

數值控制工具機切削之二維空間數學模型

Two-Dimensional Mathematical Model of NC Machine Cutting

鍾乾癸 陳 稔 Chyan-Goei Chung and Zen Chen

Department of Computer Science, N. C. T. U.

范森雄 Sen-Shyong Fann

Institute of Electrical Engineering, National Taiwan University

(Received March 6, 1978)

Abstract — Generally speaking, the determination of a cutting path for an NC machine tool is relatively complicated. The manual design of such a path is time-consuming. It is better to implement a computer-aided design system. The paper presents a concise method for this task. Firstly, the two-dimensional surfaces are categorized into five types of basic surfaces. Any complex surface can be represented by a combination of these five basic surfaces. A computer-aided design procedure is proposed to achieve automatic determination of a cutting path. The design time is thus cut down. And the memory space required is manageable.

摘要：一般而言，數值控制工具機切削路徑之決定，頗為複雜，人工設計費時，宜改採用計算機輔助設計；本文提供一種簡潔設計方法，首先將二維空間的物面結構分為五種，經由此五種物面的組合可得任何一種較複雜之物面。文中提供計算機輔助設計之技巧，以達成物面切削之全面自動化設計，而縮短設計時間。其所需之記憶空間不必很大。

一、前 言

數值控制工具機零件程式之計算機輔助設計系統在國外已有相當好的成效，如 CUTS, APT 等系統，然而在國內，這些系統並不能完全適用，其原因如下：(1)國內的控制工具機來源不一，而這些計算機輔助系統只針對某一些廠牌之工具機而設計，因此不能完全適用，(2)這些系統的程式價格高昂，且佔用很大的計算機記憶量，此對於國內廠商而言確實是一大負擔；積於上述二點主要因素，因此國內還處於人工設計零件程式之階段。由人工設計零件程式最大缺點為設計時間過長，通常需要三天左右，而利用計算機輔助系統來設計則不到一小時即可完成，針對這點，本校在國科會工程中心之贊助下，目前正進行 NC 零件程式之計算機輔助設計系統之研究。〔1〕

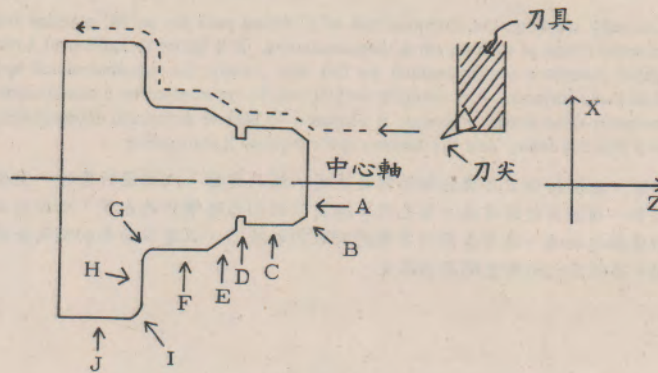
從事這方面的最大的困難是沒有足夠的參考資料，此因國外所設計的系統並未將所設計之方法發表。這方面的研究者有無從下手之感；在參考資料〔1〕中我們已說明此系統（NCTCAS 機）的設計原則，本文針對此系統中之數學切削模型提供一種更簡單的分析方法，所發展出來的程式也較前法更為簡單及佔更小的記憶位置。

全文分為二部份，第一部份介紹工件的物面結構，將二維空間的物面分為五類，而工件可由這些物面組合而構成，根據這些物面結構，我們可定出刀尖移動的位置；第二部份介紹計算機輔助程式的設計方法，並說明如何應用於車床及銑床方面。

二、物面結構之分析

車床與二軸銑床皆屬於二維空間切削的數值控制工具機；由於大部份的工件都由二軸的銑床與車床，且二維的切削問題較為簡單，在此僅以二維空間的切削為題，討論如何將工件的結構建立為數學切削模型，進而根據此數學切削模型尋出一種最簡的計算機輔助程式的設計方法。

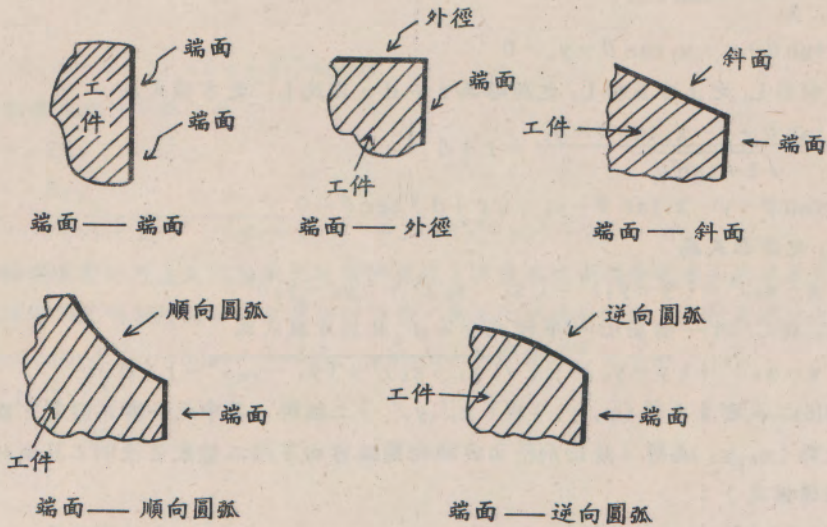
圖一中實線所示為一工件的縱切面，此工件將在車床上加工，而虛線所示為刀尖的切削路徑。由於工件的形式有無限多種變化，故欲設計出有限多種數學切削模型，以利於用計算機處理。數值控制工具機刀具在作切削工作只限走直線方向或圓弧方向，因此我們可以将工件經過刀具切削後所形成的物面分為五類：(1)端面 (FACE)：刀具僅在 X 方向作直線切削後，工件上所形成之物面；(2)外徑 (DIAM (diameter))：刀具僅在 Z 方向作直線切削後，工件上所形成之物面



圖一：工件縱切面及精車外徑時之刀具路徑

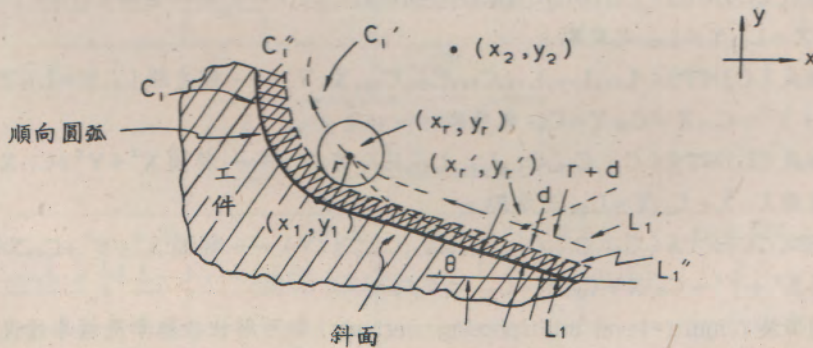
；(3)斜面 (TAPER)：刀具作直線切削後，在工件上所形成之物面，但不屬於前二種。(4)順向圓弧 (CCRADIUS (clockwise radius))：刀具沿順時鐘方向作圓弧切削後，工件上所形成之物面；(5)反向圓弧 (CCRADIUS (count-clockwise radius))：刀具沿反時鐘方向作圓弧切削後工件上所形成的物面。以圖一為例，A與H二物面屬於端面，因其是與中心軸垂直的直線，C，F與J為外徑，因為它們皆為與中心軸平行的直線，E則為斜面，因其為既不與中心軸垂直也不平行，而為對中心軸傾斜一個角度的直線，G為順向圓弧，I為反向圓弧，而B為倒角，可視為斜面，至於D為一讓槽，在工件加工時均留在精車完成後才處理，因其不屬於這五種物面之一，我們可忽略，待精車完成後才處理。至於較複雜的工件藍圖，我們可用內差法 (interpolation) 的方式利用上述五種物面來近似它，此不在本文討論範圍。

由這五種物面，我們可組成廿五種不同的物面結構，例如端面可與端面組成「端面——端面」的物面結構，也可與外徑組成「端面——外徑」的物面結構，故端面可與本身、外徑、斜向、順向圓弧及反向圓弧構成五種不同的物面結構，同理外徑也可與本身及其他四種物面構成另五種不同的物面結構，故我們由這五種物面可組成廿五種不同的物面結構。圖二是一些實例。



圖二：物面結構的實例

數學切削模型是以物面結構為基礎，而計算刀尖的切削路徑，以達到精密切削的效果。圖三所示為切削「斜面——順向圓弧」物面結構的數學切削模型，由此模型可找出由直線切削轉變至圓弧切削之點。圖三中粗線所示之 L_1 與 C_1 分別為工件之斜面與圓弧， θ 為斜面之斜角，其始邊為 x 軸，終邊為 L_1 （銳角），當粗車時，需要預留一適當的厚度 d ，以便精車時切削之用，直線 L_1'' 與圓弧 C_1'' 即為粗車後之工作表面，其 L_1 與 L_1'' 距離為 d ， (x_1, y_1) 為 L_1 與 C_1 之交點；圓表示刀尖，其半徑為 r ， (x_r, y_r) 為刀尖的中心點座標，而且是 C_1' 與 L_1' 之交點，而 C_1' 與 L_1' 另一交點之座標為 (x_r', y_r') ； (x_2, y_2) 為順向圓弧的圓心。而其中 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ， θ ， r ， d 為已知，我們欲求由直線切削變為圓弧切削之點 (x_r, y_r) 。



圖三：「斜面——順向圓弧」物面結構之數學切削模型

設 (x, y) 為平面上任何點之座標，則直線 L_1 之方程式為

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\tan \theta \quad (1)$$

或 $x \tan \theta + y - x_1 \tan \theta - y_1 = 0 \quad (2)$

因直線 L_1' 位於 L_1 之上方且與 L_1 之距離為 $r + d$ ，因此 L_1' 之方程式為

$$\frac{x \tan \theta + y - x_1 \tan \theta - y_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = r + d \quad (3)$$

或 $x \tan \theta + y - x_1 \tan \theta - y_1 - (r + d) \sec \theta = 0 \quad (4)$

圓弧 C_1 之方程式為

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (5)$$

圓弧 C_1' 與 C_1 同一個圓心，半徑為 $r + d$ ，故其方程式為

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - r - d)^2 \quad (6)$$

由(4)與(6)二式聯立可解 (x_r, y_r) 與 (x_r', y_r') 二組解，其中之一解為假解，在此例中，選擇左上方之點 (x_r, y_r) 為解。故切削斜面與順向圓弧可由下列二個數值控制工具機的指令完成(採用絕對座標模式)：

$$G(01)X(x_r - r)Y(y_r - r) \quad (\text{切削斜面})$$

$$G(01)X(?)Y(?)I(x_r - x_2)K(y_r - y_2) \quad (\text{切削圓弧})$$

而第二個指令的二個問號(?)表示需由下一個被切削物面之型態及位置決定。

三、計算機輔助程式之設計

工件的全部路徑均可由上述之廿五種數學切削模型來組成，因此每一個數學切削模型均可由一個副程式(subprogram)來解出其 (x_r, y_r) ，進而這些 (x_r, y_r) 可產生出所有的切削指令來完成所欲之工作加工。但進一步的觀察這廿五種模型中 (x_r, y_r) 之解法，可歸為下列三類：

- 直線與直線交點之求法——例如「端面——端面」的數學切削模型等。
- 直線與圓弧交點之求法——例如「端面——反向圓弧」的數學切削模型等。
- 圓弧與圓弧交點之求法——例如「順向圓弧——順向圓弧」的數學切削模型等。

因此只需建立下列四個副程式：

- 副程式 LLINTS $(L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{21}, L_{22}, L_{23}, X, Y)$ ——解二直線 $L_{11}X + L_{12}Y = L_{13}$ 與 $L_{21}X + L_{22}Y = L_{23}$ 之交點。
- 副程式 LCINTS $(L_{11}, L_{12}, L_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, X, Y)$ ——解直線 $L_{11}X + L_{12}Y = L_{13}$ 與圓 $X^2 + Y^2 + C_{21}X + C_{22}Y = C_{23}$ 之交點。
- 副程式 CLINTS $(C_{11}, C_{12}, C_{13}, L_{21}, L_{22}, L_{23}, X, Y)$ ——解圓 $X^2 + Y^2 + C_{11}X + C_{12}Y = C_{13}$ 與直線 $L_{21}X + L_{22}Y = L_{23}$ 之交點。
- 副程式 CCINTS $(C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, X, Y)$ ——解圓 $X^2 + Y^2 + C_{11}X + C_{12}Y = C_{13}$ 與圓 $X^2 + Y^2 + C_{21}X + C_{22}Y = C_{23}$ 之交點。

與多層分類選擇法(multi-level multiplexing method)即可解出在粗車及精車情況下工件上各種物面結構之數學切削模型之 (x_r, y_r) ，進而產生所需之零件程式指令。其流程圖如圖四所示。

至於如何將工件之物面之資料輸入計算機已在 NCTCAS 系統[1]中之藍圖語言中敘述，在此不再介紹。

於圖三之例中，第一種物面為斜面，故

$$L_{11} = \tan \theta \tag{7}$$

$$L_{12} = 1 \tag{8}$$

$$L_{13} = x_1 \tan \theta + y_1 + (r + d) \sec \theta \tag{9}$$

而第二種物面為順向圓弧，故

$$C_{21} = -2x_2 \tag{10}$$

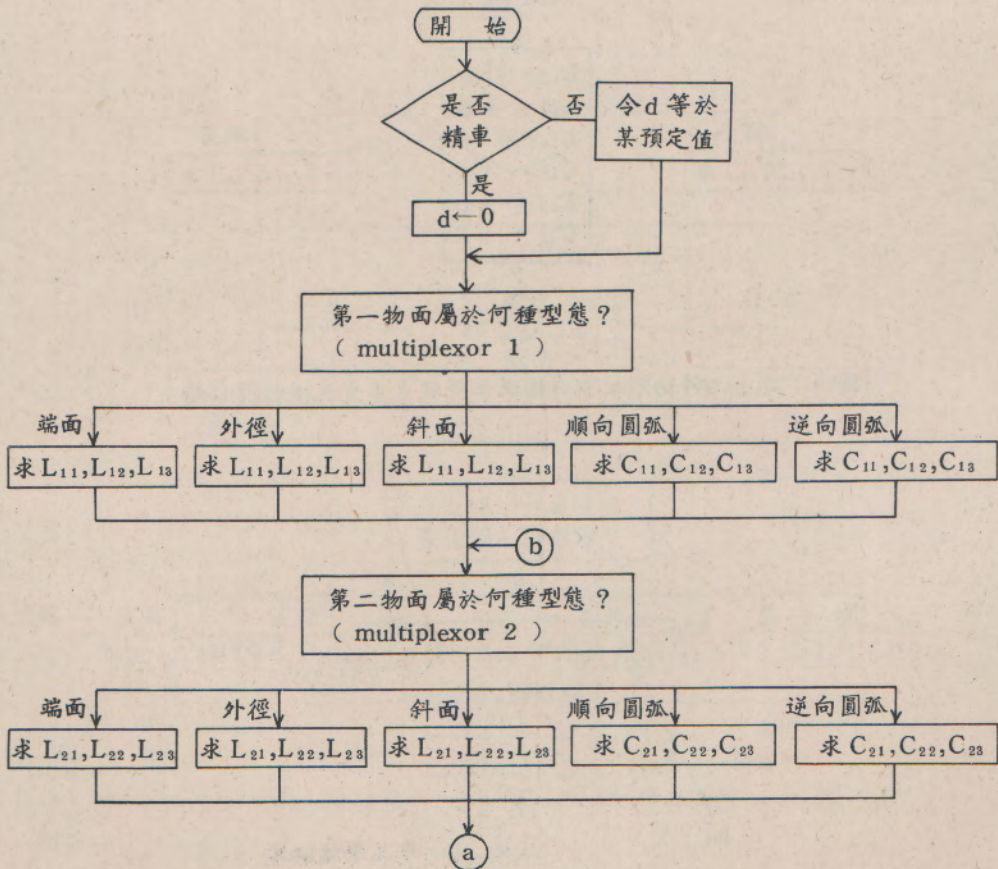
$$C_{22} = -2y_2 \tag{11}$$

$$C_{23} = (\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - r - d)^2 - x_2^2 - y_2^2 \tag{12}$$

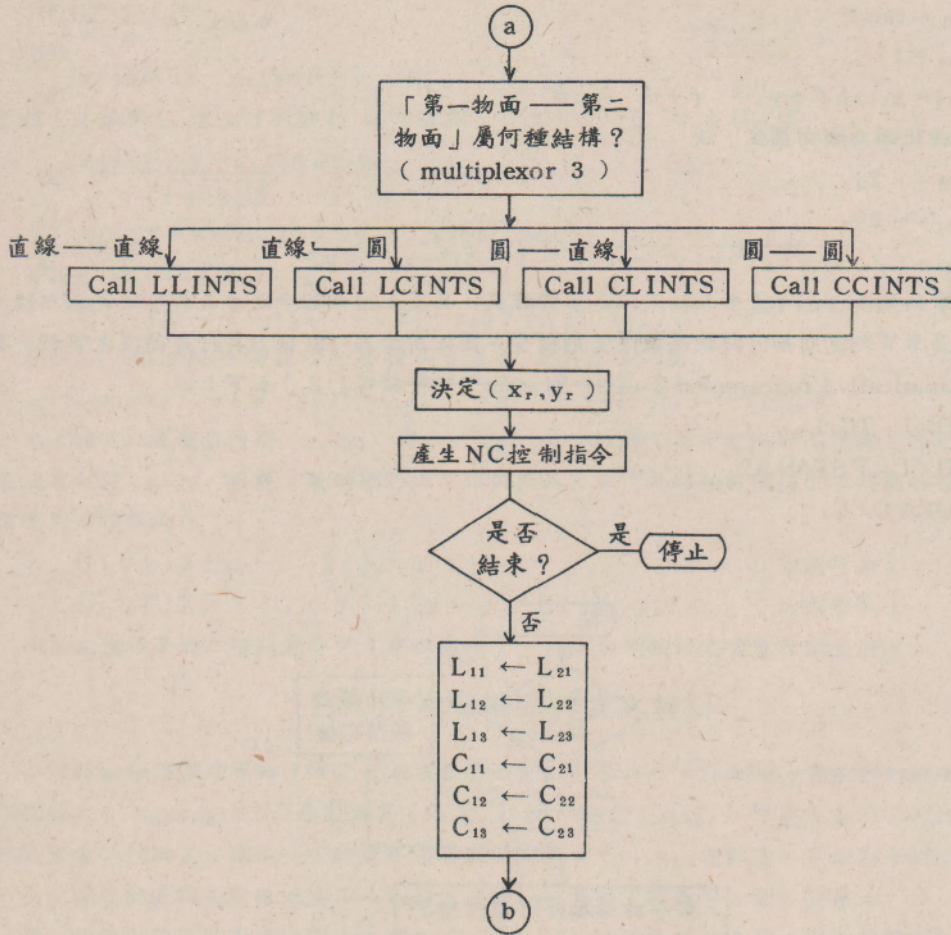
利用數學切削模型也可產生二軸銑床之零件程式，其產生控制指令之方式與車床完全相同，在此僅以一簡單實例說明如何轉換為數學切削模型，圖五所示為一銑床刀具行走路徑之實例，其APT (Automatically Programmed Tolling System) 零件程式〔2〕如下：

```

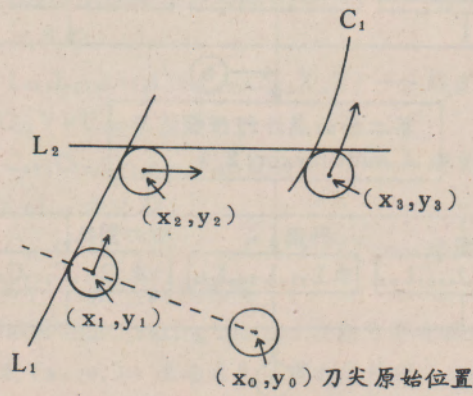
GO/L1,TO,L2
GO/L2,PSTAN,C1
GOFWD/C1
    
```



圖四：車床工件切削粗車與精車零件程式產生之流程圖

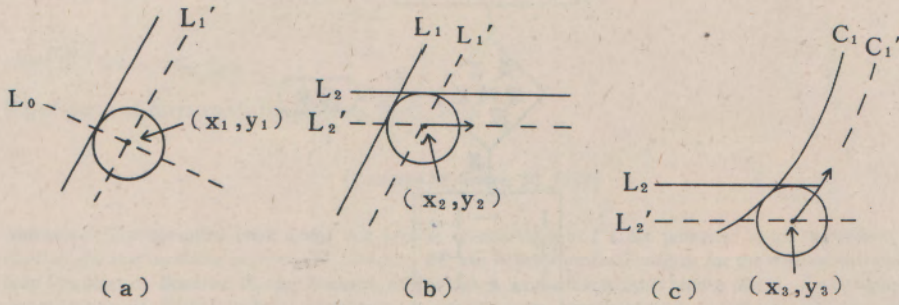


圖四：車床工件切削粗車與精車零件程式產生之流程圖（續）

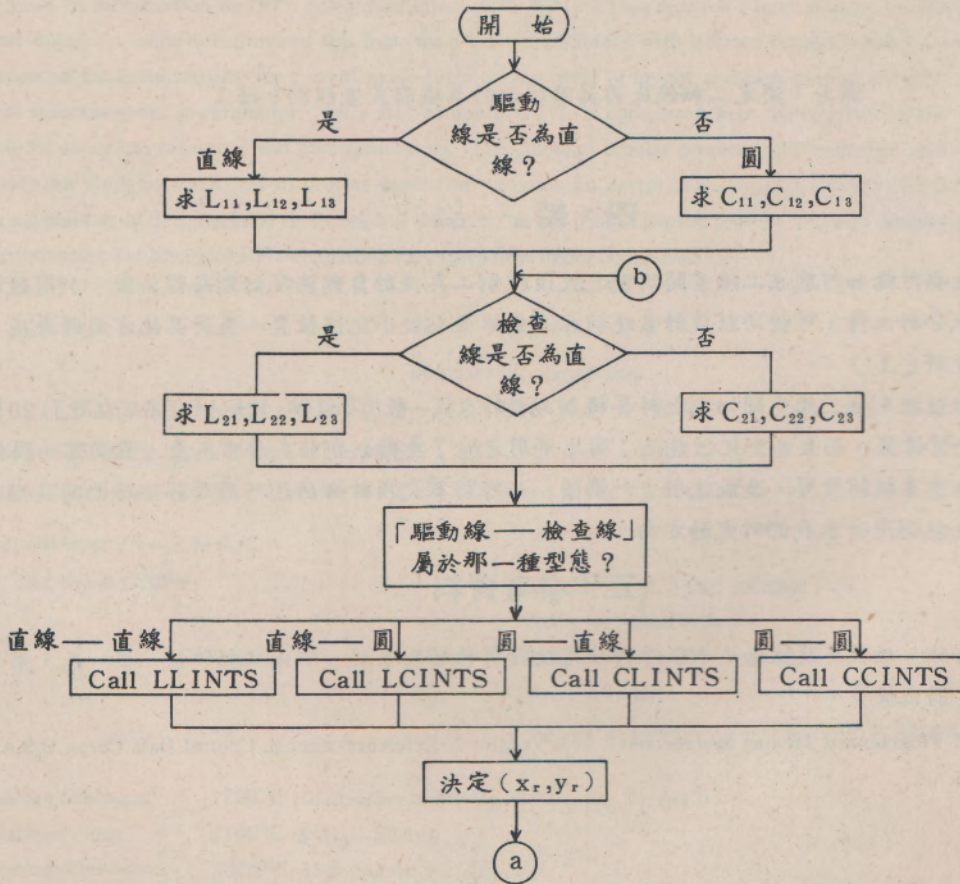


圖五：銑床刀具路徑實例

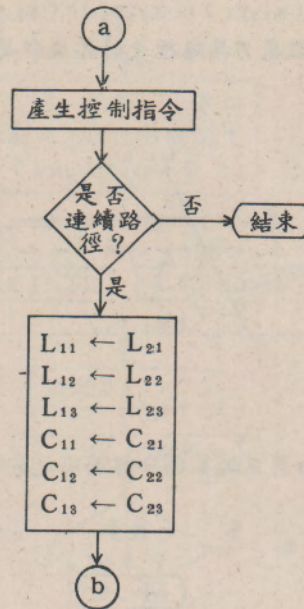
若將驅動線 (drive line) 與檢查線一併考慮而視為一物面結構, 則圖五可分解三個數學切削模型, 如圖六所示, 因此只需求出 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 三點的座標求出, 則可產生所需之控制指令。圖七所示為決定二軸銑床刀具路徑之計算機程式之流程圖。



圖六：由圖五之實例分解而得之數學切削模型



圖七：決定二軸銑床刀具路徑之計算機程式流程圖



圖七：決定二軸銑床刀具路徑之計算機程式流程圖（續）

四、結 論

本文主要討論如何建立二維空間切削之數值控制工具機之自動決定切削路徑系統，利用數學切削模型來分析工件，可使所欲設計系統之程式簡單且佔較小記憶位置，至於其他方面的考慮，可見參考資料〔1〕。

至於數值控制機三維空間切削之計算機輔助設計系統一般均很複雜，例如APT系統佔用了120K之計算機記憶位置，而且自動化性能低；因此使用者除了要對切削程式非常熟悉，且尚需一段很長時間去熟悉系統的使用，造成使用者之不便；如何將本文所討論的技巧應用於三維空間及增進其自動化性能仍是將來我們研究的方向。

五、參考資料

- 〔1〕 范森雄、鍾乾癸及陳稔：NC 零件程式之計算機輔助系統，中國工程學報，第一卷，第一期（將出版）。
- 〔2〕 CDC: Programmed Tooling System (APP IV), Version 2, Reference Manual, Control Data Corp., U.S.A., 1975.