

Josephson 接面之自我共振模的力學類比研究

Mechanical Analog Studies of Self-Resonant Modes in Josephson Junctions

郭義雄 Yih-Shun Gou

Department of Communication Engineering, N. C. T. U.

郭明賢 Ming-Hsien Kuo

Department of Electrophysics, N. C. T. U.

(Received June 22, 1978)

Abstract— We have built a simple, inexpensive, mechanical model of a finite Josephson junction consisting of a pendulum array along a rubber string, mounted on a metal frame. The pendulum array is driven at a constant torque by a gear connected with the string. This model has an equation of motion that is formally identical to the time-independent Josephson equation. We analyze the critical current I_C that can be carried by a Josephson junction as a function of an applied magnetic field. We find that the results are in excellent agreement with those calculated by Owen and Scalapino using a digital computer and with those observed by Matisoo in experiment, respectively. In addition, we have found that behavior of the Meissner effect and vortex structure in the junction barrier are easily demonstrated. In particular, the dynamics of the transition between different vortex modes can also be investigated. We have made a detail analysis of it and try to provided a simple model for self-resonant modes with a bias voltage and a zero external magnetic field in Josephson junctions.

摘要：吾人業已製成一簡單、價廉的 Josephson 接面之力學類比儀器。該儀器之裝置係將許多針擺串在一橡皮上，再將此橡皮條用鑽頭夾頭夾緊，立於鐵架上所組成。本儀器之最大特徵乃在於該擺裝置可由束緊橡皮之齒輪組驅動一指定之正或反向之力矩於針擺上，該正向之力矩相當於 ac 電流，而反向之力矩相當於作用在 Josephson 接面上之外加磁場。

事實上，該類比儀器之運動方程式與不隨時間改變之 Josephson 方程式完全相符。利用該類比儀器 (1) 可用以分析臨界電流與外加磁場間之關係；吾人發現的現象與 Owen 和 Scalapino 使用數值計算機，及與 Matisoo 實驗觀察所得完全相符。(2) 可用以觀察並證實接面上之 Meissner 效應與 Vortex 之結構；值得一提的，此裝置對於不同 Vortex 模間之動力學之轉移情形可直接予以解說，故吾人在本文中不僅對該現象有詳細的分析，並且對具有偏壓而無外加磁場時的 Josephson 接面提供一種自我共振模理論的假設。

一、導 言

自 1962 年 Josephson 效應 [1] 發表以來，該效應業已成為研究低溫固態物理方面的重要方向之一，尤其是 Josephson ac 效应在 Josephson 穿隧接面所造成的自我共振模式；其中之一為 Fiske 模式 [2]。該模式係在有外加磁場之情況下所引起之自我共振，然而許多不同實驗的工作者 [3 ~ 5] 却發現即使無外加磁場時，亦可發生自我共振模，其模式非常類似 Fiske 模式，但却有稍許不同，例如它只能有偶數模，並且具有截止電壓 (cut-off voltage) 的現象。上述兩種模式在實驗觀察上雖具有相似的情形，但它們發生的理論是否具有共同性，至今尚未有定論。

吾人認為如果要使上述所有自我共振的理論明朗化與統一化，則必須經由觀察歸納所得的物理邊界條件，直接求取非線性的 Josephson 相位方程式之近似解方可予以解說。故本文主旨即在

借用力學類比裝置直接觀察並引喻此類自我共振模式發生的原因。

1964年 P.W. Anderson [6] 發現在重力場下之剛性擺與超導體間之 Josephson 藕合具有類比的關係。此種類比曾被許多實驗者 [7~10] 用來作為上述之用途，其中最著名的為 T. Yamashita 等曾提出一種典型薄膜 Josephson 接面的類比裝置，並應用該裝置分析 Josephson 界面之大小與 Josephson 穿隧深度 λ_j 在不同情況下，其臨界電流對外加磁場之各種特性。

今本文內，吾人亦將另以二種簡單、精廉的力學類比裝置，更確切地探究在有外加磁場及無外加磁場之情況下，自我共振模式所發生的原由，並說明它們相互間的關係，進而提出一合乎邏輯性之邊界條件與合理的微擾近似法，使上述之共振模式在理論上能予以突破。文內將分成五節，首先為導言；第二節敘明 Josephson 傳輸 (transmission) 與剛性擺的理論類比關係；第三節簡介實驗裝置及其使用原理；第四節為實驗發現的結果及一般討論；末節為結論。

二、Josephson 傳輸與剛性擺的理論類比關係

依 Josephson 之預言 [1]，Josephson 界面之穿隧電流密度若設為 J_j ，則

$$J_j = J_0 \sin \phi \quad (1)$$

其中 J_0 為最大之 Josephson 電流密度； ϕ 為在兩個弱藕合 (coupling) 超導體間之相位差。再依 Josephson 所提出之理論 [1]， ϕ 與空間變數具有下列之關係：

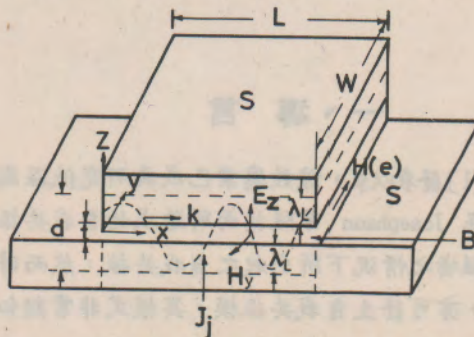
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2ev/\hbar, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2ed\mu_0 H/\hbar; \quad (3)$$

此處之 d 等於 $2\lambda_L + t$ ， λ_L 為 London 穿隧深度， t 為兩超導體間之絕緣厚度； H 為在 (\vec{r}, t) 處，包含由穿隧電流感應所產生之磁場及由外加入之磁場的總磁場； V 為在 (\vec{r}, t) 處，跨過界面之電壓降。Josephson 穿隧界面之系統座標，請參閱圖一。

在 $V = 0$ 情況下，Josephson 相位方程式變成

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_j^2} \sin \phi, \quad (4)$$



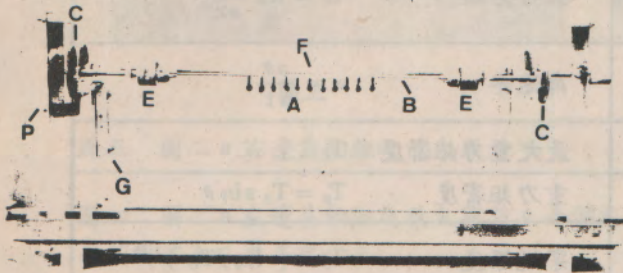
圖一 表示具有自我共振模式之穿隧界面。其中，B：寬 W 長 L 厚 t 之絕緣障壁；S：超導體薄膜； H_y ：外加磁場沿界面之一側以 Y 軸之方向加入，穿入障壁之外緣； E_z ： Z 方向之電場與 Z 方向之位置無關； λ_L ：London 穿隧深度； J_j ：穿隧電流密度，當總磁場及跨越電壓皆不為零時，以 $J_j = J_0 \sin(kx - \omega t)$ 之形式出現，其中 $k = 2ed\mu_0 H/\hbar$ ，

其中 Josephson 穿隧深度 λ_J 被定義為 $(\mu_0 J_c)^{-1/2}$ ，今由(1), (3), (4)等式可得

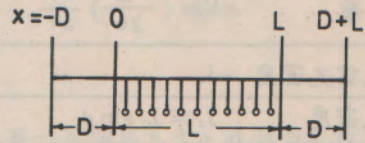
$$\frac{\partial H}{\partial x} = J_J(x) = J_c \sin \phi \quad (5)$$

吾人現今將利用類比裝置尋找(1), (3), (4), (5)等式之類比關係。若假設圖二 a 上之第 i 個擺，其角位移為 θ_i ，則在靜止狀況，

$$K [\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}] = T \sin \theta_i ;$$



圖二 a



圖二 b

圖二 a Josephson 接面之力學類比裝置照片。其中；A：針擺；B：均勻之橡皮綫；C：滑輪組；E：鎖頭；F：傳動鐵桿（於橡皮綫後面）；G：鐵架；P：把手。

圖二 b 擺串之位置座標圖。x = -D 至 x = 0 及 x = L 至 x = D+L 為橡皮綫未插針部分各長為 D；x = 0 至 x = L 為類比 Josephson 接面之擺串部分，長為 L。

此處之 K 為兩單擺間一段橡皮的扭力係數，單位為 $(N-M/Rad)$ ，隨每段橡皮之長而變；而 T 為每一單擺之最大重力力矩 $(N-M)$ 。設 Δx 為每段橡皮之長，則上式可改寫成

$$\frac{[(\theta_{i+1} - \theta_i)/\Delta x] - [(\theta_i - \theta_{i-1})/\Delta x]}{\Delta x} = \frac{T/\Delta x}{K\Delta x} \sin \theta_i ,$$

即
$$\frac{\Delta^2 \theta_i}{\Delta x^2} = \frac{T/\Delta x}{K\Delta x} \sin \theta_i , \quad (6)$$

$K\Delta x$ 為橡皮之扭力常數，定義為 K_0 ，則此常數與橡皮之長短無關，僅與橡皮材料及粗細有關 $T/\Delta x$ 為每單位長度之最大重力力矩，定義為 T_0 。以下吾人將把 θ_i 簡寫成 θ ，則(6)式可寫成

$$\frac{\Delta^2 \theta}{\Delta x^2} = \frac{T_0}{K_0} \sin \theta ; \quad (7)$$

若兩單擺間之橡皮扭力力矩設為 T_T 則

$$T_T = K_0 \frac{\Delta \theta}{\Delta x} \quad (8)$$

由(7), (8)兩式可得

$$\frac{\Delta T_T}{\Delta x} = T_0 \sin \theta = T_T ; \quad (9)$$

此處 T_T 為角位移 θ 處之針擺的單位長度重力力矩。

由本裝置所推導出之(7), (8), (9)三式之形式恰與 Josephson 傳輸中之(4), (3), (5)等式分別具

有類比關係。吾人若借用此關係，即可由本裝置求得相對於 λ_J ， H 及 J_J 之值。它們之間的詳細類比關係則分別列述於圖表一。

表一 Josephson 接面與其力學類比之對應關係

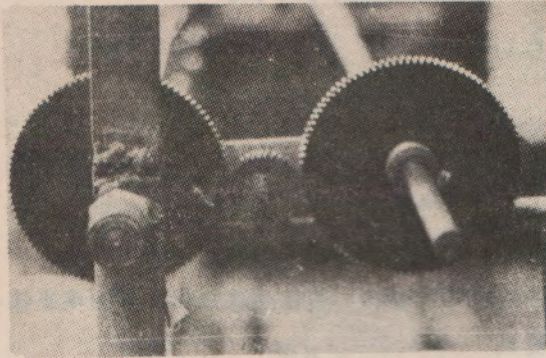
Josephson 接面	力學類比
相位差 ϕ	角位移 θ
磁場強度 $H = \left(\frac{\hbar}{2ed\mu_0} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x}$	扭力力矩 $T_T = K_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}$
電壓 $V = \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t}$	角速率 $\omega = \frac{\partial \theta}{\partial t}$
最大電流密度 J_c	最大重力矩密度 T_c
電流密度 $J_J = J_c \sin \phi$	重力矩密度 $T_p = T_c \sin \theta$
穿隧深度 $\lambda_J = \left(\frac{1}{\mu_0 J_c} \right)^{1/2}$	穿隧深度 $\lambda_J = (K_0/T_c)^{1/2}$
耦合方程式 $\frac{\partial H}{\partial x} = J_J$	耦合方程式 $\frac{\partial T_T}{\partial x} = T_p$
外加磁場 $H_0 = \frac{1}{2} [H(L) + H(0)]$	反向力矩 $T_H = \frac{1}{2} [T_T(L) + T_T(0)]$
穿隧電流 $I = \int_0^L J_J dx$	同向力矩 $T_I = \int_0^L T_p dx$

三、裝置說明及其使用原理

類比裝置之實際情形，如圖二 a 所示，係將長 6 公分之針及直徑 1 公分之塑膠小球所組成之小單擺“ A ”，串掛於一直徑為 0.5 公分之均勻橡皮線 B 上，而該橡皮線係由兩個鎖頭“ E ”束緊於鐵架“ G ”上。使用時，可經由把手“ P ”之轉動，帶動特殊設計之齒輪組“ C ”，進而驅動橡皮線。上述齒輪組之功用可由其設計予以說明，圖三係圖二 a 右邊齒輪組之放大照片，其結構係由兩個大齒輪及一個小齒輪所組成。而圖四是圖二 a 左邊齒輪組之放大照片，係由上述大小相同之兩個大齒輪及三個小齒輪所組成，其中一個大齒輪上有一把手 P。當拿走小齒輪 A，而轉動把手 P 時，則圖二 a 兩邊之兩組齒輪組可借著介於齒輪組間之鐵桿 F 的傳動，使固定於鐵架之橡皮線兩端同時作同步同向轉動；反之，若拿走小齒輪 B，則橡皮線兩端可同時作同步反向轉動。轉動之大小可由大齒輪之齒數算出。上述之大齒輪直徑為十公分，恰有一百齒，小齒輪直徑為三點六公分，有三十六個齒。

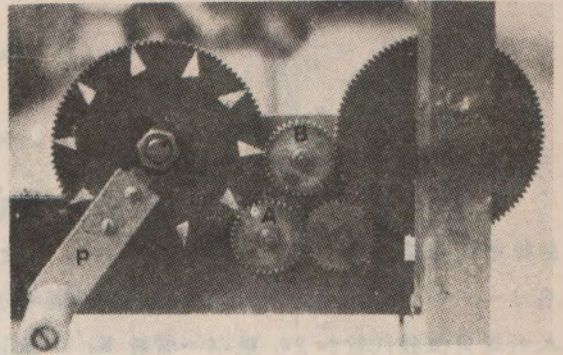
利用上述同向轉動力矩 T_I 與反向轉動力矩 T_H 對應 Josephson 傳輸之全部電流 I 與外加磁場 H_0 之方法，係由 T. Yamashita 等提出。其關係將於下面簡述之。

1967 年 Owen 和 Scalapino [11] 以 Josephson 接面兩邊緣 $x = 0$ 處之磁場為 $H(0)$ ， $x = L$ 處之磁場為 $H(L)$ 作為邊界條件用以解方程式(4)，(其座標系統請參閱圖一)則經過整個接面 L 之全部電流 I ，可由接面之電流密度 $J_J(x)$ 作整個寬度 L 的積分，再應用方程式(5)即可求得。因此



圖三

圖三 圖二 a 右邊齒輪組之放大照片。



圖四

圖四 圖二 a 左邊齒輪組之放大照片。每個大齒輪有一百個齒，A、B 兩小齒輪可簡易拿開或放入。P 為把手。

$$I = \int_0^L J_s(x) dx = H(x) \Big|_0^L = H(L) - H(0) ; \quad (10)$$

而施於界面之外加磁場 H 。可寫為

$$H_0 = \frac{1}{2} [H(L) + H(0)] 。 \quad (11)$$

若欲對應於上述之邊界條件則可將類比裝置中懸有針擺之橡皮綫的 $x = 0$ 處 (如圖二 b 所示) 之扭力力矩寫為 $T_r(0)$ ，而在 $x = L$ 處之扭力力矩寫為 $T_r(L)$ ，則整個擺串 L 上之同向力矩 T_i ，可由擺串之重力力矩密度 T_p 作整個長度 L 的積分，再應用方程式(9)，可得：

$$T_i = \int_0^L T_p(x) dx = T_r(x) \Big|_0^L = T_r(L) - T_r(0) ; \quad (12)$$

而施加於擺串上之外加反向力矩為

$$T_H = \frac{1}{2} [T_r(L) + T_r(0)] 。 \quad (13)$$

比較方程式(10)，(11)二式與(12)，(13)二式可以清楚地看出擺串在某一反向定力矩 T_H 作用下之同向力矩 T_i 達到最大，即 $T_i = T_{i0}$ ，擺串發生動力轉動 (註一) 之情況恰與 Josephson 界面在某一外加定磁場 H 作用下，穿隧電流 I 達到最大，即 $I = I_0$ ，界面發生自我共振之情況相對應。因此祇要能夠量出 T_{i0} 與 T_H 之關係，即可知道 I_0 與 H_0 之關係。

由於使用粗細均勻之橡皮綫，故在兩端未插針擺 (長為 D) 之橡皮綫 (參閱圖二 b)，其各處受拉力時，所產生之應變 $\partial\theta/\partial x$ 應該相同，因此吾人可將上述之邊界條件，直接利用方程式(8)改寫為

$$T_r(L) = K_0 \frac{\partial\theta}{\partial x} \Big|_L = \frac{K_0}{D} (\theta_{D+L} - \theta_L) ，$$

$$T_r(0) = K_0 \frac{\partial\theta}{\partial x} \Big|_0 = \frac{K_0}{D} (\theta_0 - \theta_{-D}) ；$$

註一：動力轉動可由圖表一之第三項類比關係得知，係由零電壓狀態轉變為電壓不為零之狀態。

此處 θ_x 為橡皮綫在 x 處之相位移。將此二式代入方程式(12)及(13)二式內則可得

$$T_I = \frac{K_0}{D} [(\theta_{D+L} - \theta_L) - (\theta_0 - \theta_{-D})], \quad (14)$$

$$T_H = \frac{K_0}{2D} [(\theta_{D+L} - \theta_L) + (\theta_0 - \theta_{-D})]. \quad (15)$$

當將圖二 a 左邊齒輪組之小齒輪 A (參閱圖四) 拿開, 轉動把手 P 一個角度 θ_I , 則此時由於橡皮綫兩端作同向轉動, 故 $(\theta_{D+L} - \theta_L)$ 之方向與 $(\theta_0 - \theta_{-D})$ 之方向相反, 即 $[(\theta_{D+L} - \theta_L) - (\theta_0 - \theta_{-D})]$ 為橡皮綫兩邊未插針擺部分之角位移的代數和, 其值應為由橡皮綫兩端各施入 θ_I 總角位移代數和 $2\theta_I$ 乘以一常數 K_1 , 故(14)式變為

$$T_I = \frac{K_0}{D} K_1 (2\theta_I) = 2K_2 \theta_I; \quad (16)$$

此處 $K_2 = K_0 K_1 / D$ 為一比例常數, 與橡皮綫之扭力係數及長度有關。而若將小齒輪 B (參閱圖四) 拿開, 留下小齒輪 A, 轉動把手一個角度 θ_H , 則此時橡皮綫兩端作反向轉動, 故 $(\theta_{D+L} - \theta_L)$ 之方向與 $(\theta_0 - \theta_{-D})$ 之方向相同, 即 $[(\theta_{D+L} - \theta_L) + (\theta_0 - \theta_{-D})]$ 為橡皮綫兩邊未插針擺部分之角位移的代數和, 其值應為由橡皮綫兩端各施入 θ_H , 總角位移 $2\theta_H$ 乘以與上述之同一常數 K_1 , 故(15)式變為

$$T_H = \frac{K_0}{2D} K_1 (2\theta_H) = K_2 \theta_H. \quad (17)$$

因此吾人祇需算出大齒輪之轉動齒數 θ_I 及 θ_H 即可得到 T_I 與 T_H 之關係。換言之, 即可得到 Josephson 接面之穿隧電流與外加磁場之關係。上述之簡易操作方法, 將為本文提供實驗之論據。

四、結果與討論

在此節裏, 吾人將以前節所述之方法, 分別測量各種有關的項目, 並將加以詳討。

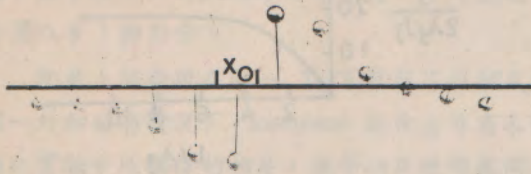
(一) λ_J 之量測:

Josephson 穿隧深度 λ_J , 係在靜態時, 決定磁場穿入接面之一特殊距離, 顯然地, 它的大小影響到電流在界面上之分佈情形。在下面吾人將討論到臨界電流 I_0 與 L/λ_J 之關係, 因此首先需要對 λ_J 予以量測。在無窮半延伸 (Semi infinite) 之 Josephson 接面中, 電流密度 J_J 可表示如 R. A. Ferrel 等[12] 所述

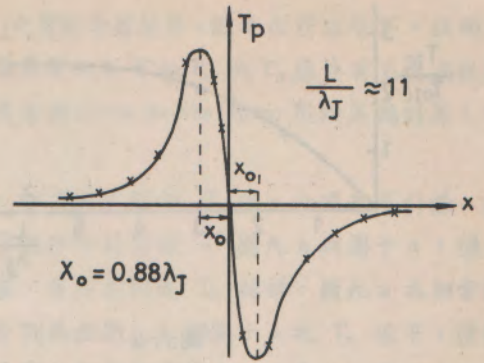
$$J_J = 2J_0 \tanh(x/\lambda_J) \operatorname{sech}(x/\lambda_J),$$

微分上式, 可求得最大電流密度之位置為 $x = x_0 = 0.88\lambda_J$, 今若將無窮半延伸之接面改為

$L \gg \lambda_J$ 之長接面, 則當有一通量量子 (flux quantum) 於此接面時, 其電流密度最大之處, 應位於從長接面中心算起 x_0 處。此狀況之類比, 可用下述之方法予以解說。例如, 在 $L = 11\lambda_J$ 之擺串上, 施一扭力使整個擺串上之相位角差恰為 2π (即相當一通量量子) 時, 則其重力力矩的分布 (如圖五 a 所示), 相當在 Josephson 接面上有一通量量子之電流的分布。因此量測擺串上之最大重力力矩密度之位置 x_0 , 即可求得 Josephson 接面上之最大電流密度之位置。由圖五 a 所量得之數據, 即圖五 b, 恰可證明 $x_0 = 0.88\lambda_J = 0.88(K_0/T_0)^{1/2}$ 。由此可見, 若 K_0/T_0 或 λ_J 未知時, 則可直接由 $\lambda_J = x_0/0.88$ 量出 x_0 , 算出 λ_J 。



圖五 a



圖五 b

圖五 a 相當 $L = 11 \lambda_J$ 之 Josephson 界面恰有一渦流 (Vortex) 時之穿隧電流密度的力學類比，由上往下拍攝所得的照片。

圖五 b 為從圖五 a 照片之擺串所實際量測之重力力矩密度 T_p (相當穿隧電流密度) 之位置圖。 $x = x_0$ 處為 T_p 最大之位置，其值等於 $0.88 \lambda_J$ 。

(一) I_{BCS} 之量測：

I_{BCS} 是零電位時，假設無任何磁場的影響情況下，通過 Josephson 界面之最大可能臨界電流。可由 A. Baratoff 等 [13] 所導出之方程式

$$I_{BCS} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{eR_N} \right) \Delta(T) \tanh \left[\frac{\Delta(T)}{2kT} \right]$$

計算出。式中 R_N 為界面之一般電阻； k 為 Boltzmann 常數； $\Delta(T)$ 為在溫度 T 時之能隙 (energy gap)。Yamashita 等曾定義該物理量之力學類比值為

$$T_{IBCS} = N T_{010} / 2。$$

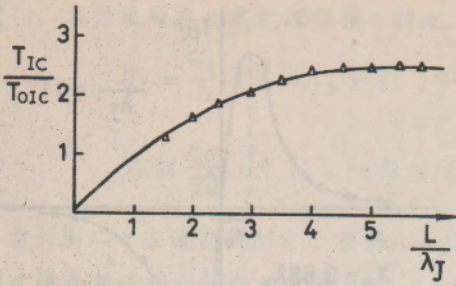
式中 T_{IBCS} 為對應 I_{BCS} 之臨界同向力矩； N 為針擺數； T_{010} 為僅在擺串兩邊端各留一針擺時之臨界同向力矩。若欲量測 T_{IBCS} 值，可先將擺串之針擺僅留邊端之兩針，其餘全部除去，然後慢慢施予同向力矩 T_i ，使其達到動力轉動 (dynamical rotation)，先求得 T_{010} ，再進一步計算原先擺串之針數，而最後算出 T_{IBCS} 。

(二) 臨界電流與渦流結構 (Vortex structure) 之力學類比實驗現象：

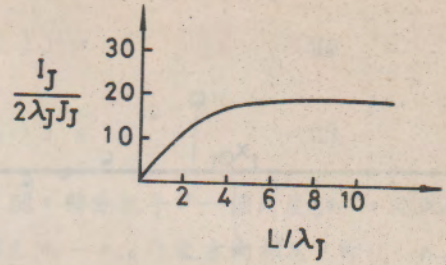
使用本節前面兩項之方法，可得下述之實驗論據。

圖六 a 相當為零偏壓，無外加磁場下， T_{i0}/T_{0i0} 隨 L/λ_J 之變化情形。由結果可知在 $L \leq 4 \lambda_J$ 時重力力矩 T_p (相當電流密度) 幾乎均勻；而當 L/λ_J 繼續增加，則 T_p 之分佈不再均勻增加，而其峯值漸向擺串之兩端移動，中間之值隨之漸減，此現象就是超導體所謂之 Meissner 效應，如圖七 a 為 $L = 11.6 \lambda_J$ 之 T_p 分布情形，其峯值非常接近距擺串邊端 λ_J 處。故當 $L > \lambda_J$ 時，雖然 L 增加，但其 T_{i0}/T_{0i0} 不再繼續增加，而漸近一定值。圖六 b 及圖七 b 為 Owen 和 Scalapino [11] 使用計算機計算的結果，與用本類比方法所得者完全相同。由此可見本類比裝置可用以觀測 Josephson 相位方程式間可能發生之現象是無可置疑的。

在 $L = 6.75 \lambda_J$ 之類比擺串 T_{i0} 與 T_H 之關係圖 (參閱圖八 a) 中發現兩個重要現象。首先在操作過程中仔細觀察，對於一小反向力矩 T_H ，重力力矩可阻止其穿透，這種現象可用於說明圖八 a 中零模式之圖形具有綫性關係。而當在另一高階模式時，則重力力矩阻止 T_H 之效力變小，



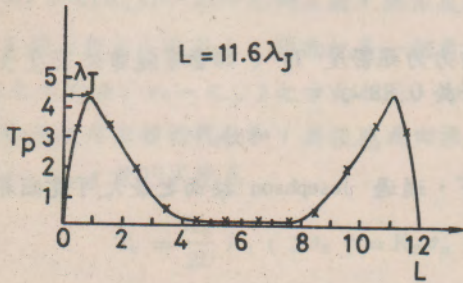
圖六 a



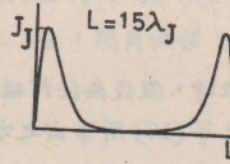
圖六 b

圖六 a 為 $T_H = 0$ (相當無外加磁場) 時之 T_{IC}/T_{0IC} 對 L/λ_J 之關係圖。

圖六 b 為 Owen 和 Scalapino 所計算之 $I_J/2\lambda_J J_J$ 對 L/λ_J 之關係圖。



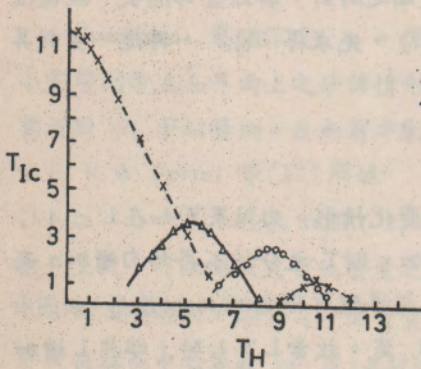
圖七 a



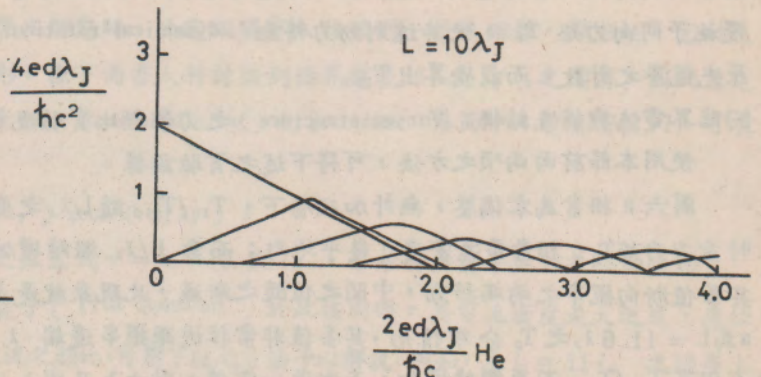
圖七 b

圖七 a 為本實驗裝置所量得之 $L = 11.6\lambda_J$ 擺串之重力力矩分佈圖，其峰值約位於離邊緣 λ_J 處。

圖七 b 為 Owen 和 Scalapino 所計算，在 $L = 15\lambda_J$ 之 Josephson 接面的電流分佈圖。



圖八 a



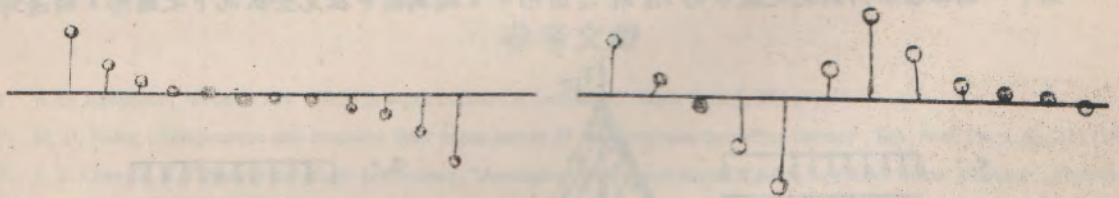
圖八 b

圖八 a 為本類比裝置對 $L = 6.75\lambda_J$ 所量得之 T_{IC} 對 T_H 之關係圖。

圖八 b 為 Owen 和 Scalapino 對 $L = 10\lambda_J$ 之 Josephson 界面計算所得之最大電流對外加磁場之關係圖。

T_{I_0} 與 T_H 不再具有綫性關係，此現象亦與 Matisoo [14] 之實驗論據相符。總之在弱磁場下，接面具有完全反磁性質，而在強磁場下，則無此特性。再則觀察圖八 a 可知 T_{I_0} 與 T_H 應具有多值函數關係。在下段將針對此現象特別探討。吾人上述實驗結果亦與 Owen 和 Scalapino 用計算機計算（參看圖八 b）相符合。

既然上述發現在同一 T_H 下可有不同模式的存在，即可有不同的 T_p 值，此現象可引證，在同一外加磁場情況下，Josephson 接面上可有不同穿隧電流分佈的情形。圖九 a 與圖十 a，係由類比實驗中所攝得的相片，該等相片說明在同一 T_H 值，可有不同之 T_p 結構。圖九 a 為相當於零模式而圖十 a 相當於第一模式。圖九 b 與圖十 b 係分別為在圖九 a 與圖十 a 之 T_H 值下，慢慢加上同向力矩 T_I 至 T_{I_0} 時，使其發生動力轉動後，而呈靜止狀態所攝得者。在本類比實驗中，動力轉動（如註一所提示）係說明由某一模式轉變至鄰近之模式。上述之照片亦可說明同一 T_H 值可有不同 T_{I_0} 之值。但最重要的乃是圖九 b 與圖十 a 具有相同的 T_p 分佈情形，換言之，只要外加 T_I 即可借由動力轉動，使其由一模式轉換到另一模式。除了上述之重要發現外，並且由圖九 a 與圖九 b 或圖十 a 與圖十 b 之 T_p 狀況可看出，由零模式到第一模式之間只約差一 vortex 之結構。由上述之觀察所得類推 n 個模式應具有 n 個 Vortex，而整數個 Vortex 之平均有效電流應為零，因此發現在不同模式之超導電流，其發生為扣除 Vortex 電流後剩下之電流所造成的。這可由上述圖中予以解說。上述發現之結果亦與 Owen 和 Scalapino 之計算完全一致。雖然 Owen 和 Scalapino 在計算過程中，發現了上述同樣現象，但吾人能直接利用類比裝置清楚地觀察到上述物理現象之轉移情形。因此吾人深信借用本實驗所得之現象預擬下面的假設，必能在 Josephson 接面之自我共振理論上予以突破。



圖九 a

圖九 b

圖九 a 為在零模式 $T_H = 1.30$ ， $T_I = 0$ 時之擺串的重力力矩分佈之垂直拍攝照片。

圖九 b 為在零模式 $T_H = 1.30$ 下，加入 $T_I = 1.06$ 產生動力轉動後歸於靜止之擺串的重力力矩分佈之垂直拍攝照片。

總之，由於在開始無 T_H 之擺串上施加同向力矩 T_I 至某一量（ $T_I = T_{I_0}$ ）時，會產生角速度（ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ），自行動力轉動，而最後形成單位長度之角位移（ $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ ），即扭力矩（ $T_r = K_0 \frac{\partial\theta}{\partial x}$ ）之改變的事實。因此我們推論，當開始在無外加磁場下，在接面上由零開始增加電流 I 至一適量時，亦應該伴隨電壓（ $V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial\phi}{\partial t}$ ）之改變發生變動，使接面單位長度之相位移（ $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ）發生

改變，即發生磁場 ($H = \frac{\hbar}{2ed\mu_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}$) 的改變。也就是說我們認為祇需在有限長度而無外加磁場之接面上，加上偏壓，則此偏壓之電能應可轉變為磁能而發生自我共振，不一定要有外加磁場才可發生共振現象。該假設已由作者之一，另外發表於交大學報第四期 [15]。

圖十 a

圖十 b

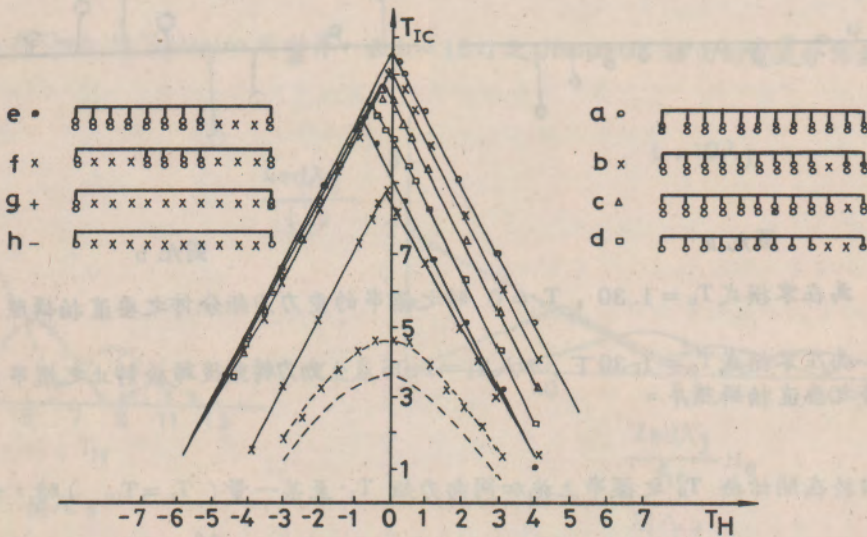
圖十 a 為在第一模式 $T_H = 1.30$ ， $T_I = 0$ 時之擺串的重力力矩分佈之垂直拍攝照片。

圖十 b 為在第一模式 $T_H = 1.30$ 下，加入 $T_I = 1.28$ 產生動力轉動後歸於靜止之擺串的重力力矩分佈之垂直拍攝照片。

(四) 判定接面缺陷之類比實驗：

本類比裝置亦可用來做為判定接面缺陷的情形。

圖十一為各種不同狀況之擺串的 T_{IC} 對 T_H 圖形。a 綫為擺串在完全狀況下之圖形，兩邊對稱



圖十一

圖十一 為各種類比 Josephson 接面之擺串之 T_{IC} 對 T_H 之關係圖。

與 T_H 之正負方向無關。由 b 綫、c 綫可知若缺陷愈靠近邊緣則影響愈大。由 c 綫、d 綫、e 綫觀察，可知缺陷愈多，其影響亦愈大。f 綫為兩邊缺陷相同者，僅影響其 T_{I_0} 之大小。而 g 綫、h 綫可視為均勻但 L/λ_j 較小之擺串的圖形，此時綫變為較平滑且 L/TJ 愈小則 T_{I_0} 愈小。總之，若 Josephson 界面已知其 I_0 對 H_c 之圖形，則可判定此界面之品質。

五、結 論

應用吾人所製作的類比裝置，觀察實驗結果，吾人認為可作如下的解釋；當一界面之外加磁場及電壓都不是零時，該界面之穿隧電流是不均勻的，而以垂直於外加磁場方向的波形流動，由於界面之阻抗比自由空間小得多，因此電流流至邊界時，將以某一特定頻率完全反射而形成駐波，有如微波在空腔內傳進一樣，這就是傳統所謂的 Fiske 模式。然而對於一般的共振系統，吾人知道電能和磁能的平均量約各佔總能量的一半，並且它們可相互轉換。因此如果吾人認為 Josephson 界面像一般共振系統，則在無外加磁場下，當然可利用偏壓之電能而轉換成磁能形成 Fiske 模式，發生共振。因此在無外加磁場下亦可如同 Fiske 模式一樣發生共振，但其偏壓電能需要一半轉換成磁能方可如同共振腔使電能與磁能相等，故其偏壓必在 Fiske 模之偶數模發生。因此吾人大膽地提出 Josephson 界面所發生之共振現象皆可視成與微波共振現象相同。

總之，我們業已製成一良好之 Josephson 界面的力學類比裝置，該裝置除可用來作為觀察 Josephson 界面的渦流結構，及其電流分佈情形的力學類比外，對於瞭解有關非線性之 Klein-Gordon 方程式及 Josephson 效應等物理現象，必也非常有效。

參考文獻

1. B. D. Josephson, "Possible new effects in superconduction tunnelling", Phys. Lett. 1, 251 (1962).
2. M. D. Fiske, "Temperature and magnetic field dependences of the Josephson tunnelling current", Rev. Mod. Phys., 36, 221 (1964).
3. J. T. Chen, T. F. Finnegan and D. N. Langenberg, "Anomalous DC current singularities in Josephson tunnel junctions", Physica, 55, 413 (1971).
4. T. A. Fulton and R. C. Dynes, "Single vortex propagation in Josephson tunnel junctions", Solid State Commun. 12, 1, 57 (1973).
5. Y. S. Gou and R. I. Gayley, "Self-resonant modes in high-Q Josephson junctions", Phys. Rev. B 10, 11, 4584 (1974).
6. P. W. Anderson, "Lecture on the Many Body Prob.", Edited by E. R. Caianello, Academic, N. Y. 1964, Vol. 2, p.113.
7. T. Yamashita, L. Rinderer, K. Nakajima and Y. Onodara, "Mechanical analog of thin-film Josephson junction and its pinning effect", J. Low Temp. Phys. 17, 12 (1974).
8. D. B. Sullivan, R. L. Peterson, V. E. Kose and J. E. Zimmerman, "Generation of harmonics and subharmonics of the Josephson oscillation", J. Appl. Phys. 41, 4865 (1970).
9. A. C. Scott, "A nonlinear Klein-Gordon equation", Amer. J. Phys. 37, 52 (1969).
10. D. B. Sullivan and J. E. Zimmerman, "Mechanical analogs of time dependent Josephson phenomena", Amer. J. Phys. 39, 1504 (1971).
11. C. S. Owen and J. D. Scalapino, "Vortex structure and critical currents in Josephson junctions", Phys. Rev. 164, 538 (1967).
12. R. A. Ferrell and R. E. Prange, "Self-field limiting of Josephson tunnelling of superconducting electron pairs", Phys. Rev. Lett. 10, 479 (1963).
13. V. Ambegaokar and A. Baratoff, "Tunnelling between superconductors", Phys. Rev. Lett. 10, 486 (1963).

- 14. J. Matisoo, "Critical currents and current distributions in Josephson junctions", *Jou. of Appl. Phys.* **40**, 4, 1813 (1969).
- 15. Y. S. Gou, S. C. Chung, "Theory of self-resonant modes with a zero-external magnetic field in Josephson tunnelling junctions", *The Jol. of NCTU* **4**, 49 (1978).

参考文献

1. B. Josephson, "Theory of superconducting tunneling", *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).

2. M. H. Lee, "Temperature and magnetic field dependence of the Josephson tunneling current", *Rev. Mod. Phys.* **32**, 371 (1960).

3. J. T. Chen, "The theory of the Josephson junction", *Phys. Rev.* **172**, 1021 (1968).

4. Y. S. Gou, "The theory of the Josephson junction", *Phys. Rev.* **172**, 1021 (1968).

5. Y. S. Gou, "The theory of the Josephson junction", *Phys. Rev.* **172**, 1021 (1968).

6. F. W. Anderson, "Lectures on the many-body problem", *Phys. Rev.* **162**, 1058 (1967).

7. T. Yamashita, L. Kishner, K. Mizushima, and Y. Gou, "Theoretical study of the BCS Josephson junction and its applications", *Jour. of the Phys. Soc. Jpn.* **31**, 1021 (1971).

8. D. B. Sullivan, R. L. Taylor, V. E. Kane, and K. E. Long, "Observation of the temperature and magnetic field dependence of the Josephson tunneling current", *J. Appl. Phys.* **41**, 4862 (1970).

9. A. C. Zettl, "A nonlinear Klein-Gordon equation", *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **121**, 121 (1965).

10. D. B. Sullivan and L. E. Bransford, "Theoretical study of the temperature and magnetic field dependence of the Josephson tunneling current", *J. Appl. Phys.* **41**, 4862 (1970).

11. C. G. Overton and L. D. Schrieffer, "The theory of the Josephson junction", *Phys. Rev.* **166**, 238 (1967).

12. R. A. Ferrell and E. E. Prange, "Self-consistent solution of the Josephson tunneling current", *Phys. Rev.* **147**, 1021 (1966).

13. V. Ambegaokar and A. Baratian, "Theory of the Josephson junction", *Phys. Rev.* **147**, 1021 (1966).