



從大自然掘取數學問題

姚鴻澤院士訪談

受訪者簡介

臺灣大學數學系畢業，普林斯頓大學數學博士。曾任教於紐約大學、史丹福大學，目前為哈佛大學教授。研究領域為數學物理。2000年麥克阿瑟獎、2001年晨興數學金獎、2002年中研院院士，2003年美國國家科學院院士。

翁，請先跟我們談一下你的學生生涯，尤其是和數學有關的部分。

姚，小時候家裡沒有電視，父親的管教又嚴，不准亂讀課外書，所以國中時我只能讀數學書當遊戲，做一些歐氏幾何、補助線的問題。但因此對數學發生很大的興趣。

高一上，我很快將高中數學讀完了，就到光華商場舊書攤，買了詹森（Johnson）的微積分譯本來讀，但是讀完後仍然覺得不踏實。同學建議我乾脆去讀高微。結果我在書店買到威德（David Widder）的高微，我到現在仍然覺得是很好的書，他不講抽象的東西，只有古典的計算。

到了高一暑假，我開始讀原文線性代數，同時也開始讀物理。我讀的是雅隆索/范（Alonso/Finn）三冊較難的大學物理，但效果不彰。一來是物理的英文更難；而且物理比較不嚴格，像近代物理就用了太多比喻；最後，數學問題即使沒有解答我很清楚對錯，但物理找不到解答就很麻煩。

高二之後，我繼續讀大學的數學，但我一直讀不懂測度論（measure theory），不知道那些抽象概念的用處。另外，微分方程方法太瑣碎，也不了了之。總之，我高中學得最好的是高微，我後來連阿波斯特（Tom Apostol）的習題都完整做完。那時我對數論很有興趣，曾經花兩個月玩玩費馬最後定理，現在回想覺得相當可笑，但這個經驗很寶貴。

高中準備考聯考時，我的英文和化學太差必須花時間準備，我每天讀書到凌晨兩點，12點前是學校的

功課，12點後就是我最鍾愛的數學時間，現在想起來我真的很有意志力。

考大學因為自己讀的數學比較多，就沒有填物理，進了數學系。我在臺大跟張海潮學了李群，跟楊樹文學微分拓樸。我選了曹亮吉的數論，他一學期都在教古希臘數學史，非常不敬業，我本來對數論很有興趣的。

楊樹文當時建議我可以開始做研究，但劉豐哲說幾何已經死了，我擔心走進死胡同，就沒有繼續。我大四做了一件對的事，就是在張秋俊的分析課讀魯丁（Walter Rudin）的《實變與複變分析》，我把實分析的習題都做完，但複分析沒有繼續，因為我希望老師講點泛函分析，現在覺得很後悔。

我大三也讀物理，張海潮還引介物理系的老師和我見面。他問我什麼是電偶極，我回答說電荷分布做泰勒展開的第二項係數。他一聽差點瘋了，說我顯然沒有物理的圖象，不能讀物理。

回顧起來，我的大學就只是做了魯丁的習題，大部分在浪費時間。當時的教學很多是誤導，我大學快畢業，才知道怎麼算熱核（heat kernel），整個臺大沒有偏微分方程。代數拓樸雖然有趣，但是例子都是球。當時老師都不喜歡計算例子。缺乏有見識的數學家，告訴我們更多必須重視的例子。

翁，你是當完兵後，馬上就到普林斯頓讀博士。

姚，是。當時帕雷（Richard Palais）來台灣講規範場論，我知道用幾何語言可以講物理後，非常想出國去



讀。所以我當兵時又開始讀物理，想補足背景出國讀規範場論或熱門的量子場論。

我到普林斯頓很快就考過資格考，開始到物理系聽課，才知道光是量子論就有三年課，第三年才是量子場論。由於來不及，我就第一年和第三年課一起聽，但因為沒做習題，量子場論讀不懂。當時普林斯頓沒人做規範場論或量子場論的數學理論，哈佛的傑非（Arthur Jeffe）有做量子場論，但我想轉哈佛沒有轉成。

在普林斯頓，我換過許多老師，數學、應數、物理都找過了。物理系要我考物理資格考，但是普林斯頓的物理資格考出名的難，只好放棄。我找過天文物理的老師；找過創立公設量子場論的外特曼（Arthur Wightman）；也找過做孤立波（soliton）的克魯斯卡（Martin Kruskal）。數學系的老師我也試過，例如費夫曼（Charles Fefferman）要我讀他的論文，那有幾百頁，我只好在他門上留紙條，說我不想學就逃走了。

最後找到利柏（Elliott Lieb）時我已經累了，我說我不會量子場論，他說沒關係，給我一個問題，證明一種一階偏微分方程組沒有解。我找了很多資料，想了很多方法，但利柏都說不行。他也曾幫我向專家崔佛斯（François Trèves）詢問，也沒有用。最後我竟然找到反例，知道有些情況是有解的，利柏很高興，這是我的第一篇文章。

當時我懷疑這和指標定理（index theorem）有關，又覺得三維空間不能用指標定理，後來才知道可以從三維球做射影解決。其實這個方程是賽伯格/韋頓方程（Seiberg-Witten equation）的簡單情形。但當時我不夠成熟，無法做下去。這種情況發生過好幾次，由於數學知識不足，我常碰到有意思的問題做不下去。

接下來，我又跟利柏做出錢卓拉賽卡（Chandrasekhar）星球塌陷穩定性的問題。利柏很高興，同意我將兩篇文章釘在一起當作博士論文，所以

我並沒有真的寫過博士論文。當時利柏跟費夫曼在競爭一個問題，費夫曼想法很複雜，利柏和我從另外一個角度就簡單解決了，這是我從利柏學到的。

翁，你畢業是1987年，接下來就到紐約大學嗎？

姚，我畢業後還想學量子場論，在高等研究院和布理格斯（David Brydges）寫了一篇文章，但從此我對量子場論的嚴格數學化再也提不起興趣。因為一個簡單的概念，卻要花90%的力氣檢查我覺得根本不會錯的東西，讓我覺得很沮喪。

1988年，我到NYU當博士後，艾琛曼（Michael Aizenman）讓我想自旋玻璃（spin glass）的問題，我做了半年還是不知道真正的問題是什麼。物理和數學不同，問題可能很有意思，但是要明確表述後才能用數學解決。所以我需要趕快換問題，就去找做相對論的克里斯托杜婁（Demetrios Christodoulou）。他給我一篇文章，很有意思，但我讀一陣子後，突然覺得這樣會不會太瘋狂，一下從量子力學到統計力學又跳到相對論，最後還是放棄。

於是我想去找瓦拉當（Srinivasa Varadhan），剛好大學同學張志中是他的學生，可以一起學，天曉得我當時連中央極限定理都不懂，機率知識是零，所以只好趕快補。從剛開始搞不清楚瓦拉當的意思，到最後終於跟上，我和瓦拉當做研究總共約四年，說起來這是一種緣分，也許正好因為張志中在那邊。

翁，你大概是這段時間做出相對熵（relative entropy）的工作。

姚，對，那是一個巧合。瓦拉當是從微觀古典粒子系統如何收斂到宏觀古典方程的專家。我當時問了一個問題：在這個過程中微觀熵是不是也會收斂到宏觀熵。他說沒有問題，還在黑板給我一個證明。我那天沒有記筆記，結果回家想不起來他的證明，就自己想了一個證明。我把它擺在一旁，到了那年夏天，我想

到瓦拉當的證明預設了從微觀到宏觀收斂的定理，但是我發現我的證明不但不需要，還可以反過來證明這個收斂定理。

我的方法缺點是假設條件比較嚴格，譬如出現震波這類有奇點的狀況就不行，但優點是證明非常簡單，而且幾乎適用於所有系統。因此當時這類問題的研究方向就轉成研究有奇點的情況，這在微觀上來說是很困難的。

後來我考慮轉換方向，瓦拉當做的是古典統計力學，而量子力學的情況還沒有人做，我想真是太好了！當時利柏的學生艾狄胥（László Erdős）來庫朗當博士後，我們合作想從量子多體系統推出波茲曼方程（Boltzmann equation）。這個野心太大了，問題到現在還沒解決。所以後來我們考慮比較簡單的情況，做單一粒子在隨機環境如何導出線性波茲曼方程的問題，花了兩三年才做出來，這些跟隨機薛丁格方程有關。當時大概是1997年。

1995年，玻色/愛因斯坦凝聚（Bose-Einstein condensation）的著名實驗做出來了。但是理論上一直有鴻溝，這牽涉到葛羅斯/皮塔夫斯基方程（Gross-Pitaevskii equation），這是一個非線性薛丁格方程，我們花了三、四年證明這個方程可以從多體薛丁格方程嚴格的推導出來。雖然論文登在RPL（物理評論簡訊）與*Annals of Mathematics*，但是數學家比較在意古典力學，似乎不特別感興趣。物理學家也共鳴有限，畢竟他們本來就認為是對的。

【翁】所以接下來要做隨機矩陣了。

【姚】差不多。我們做隨機薛丁格方程時，就碰到一個威格納（Eugene Wigner）提出來的隨機矩陣（random matrix）重要猜想，它說不管矩陣元素是不遵從高斯分布，它們的局部行為其實是一樣的。

隨機矩陣和瓦拉當的統計力學也有關，我在紐約大學時就有同事在做。他們用的是複變和黎曼/希爾伯

特問題的技巧，對我來說跳進去學再和他們競爭完全沒有意義。我想找到自己的看法。

我們曾經在2003年試過但不成功。後來做葛羅斯/皮塔夫斯基方程就暫時擺著。到了2007年再回來想隨機薛丁格方程時，我們就決定要反過來試試這個隨機矩陣的猜想。這也算是某種機緣，因為除了和隨機薛丁格方程有關之外，一方面剛好當時有很多人在談隨機矩陣，另一方面它和數論有關，由於我哈佛的同事有很多數論學家，我想做跟同事有關的研究也蠻好的。

我們發現當時的先驗估計非常粗糙，所以就準備改善這個估計。巧合的是當時龐卡赫猜想正當紅，我們就想利用流（flow）的方法來試試，之後發現我們用的流，其實就是戴森（Freeman Dyson）五十年前提出的戴森布朗運動（Dyson Brownian motion），讓我有點失望。但是當年戴森無法做的一個猜想，現在剛好可以用這個先驗估計和相對熵的方法來證明，這是我至今覺得最重要的工作之一。

【翁】經過這麼多年，你現在是怎麼看數學的。

【姚】我比較喜歡和大自然界或應用上產生關連的問題，數學、物理、生物、甚至金融都可以。做應用問題的陷阱是儘管解決很多問題，也不見得能建立有意義的數學主題，最後可能都是無聊的小問題。像道布齊思（Ingrid Daubechies）能遇到小波（wavelet）問題，那是千載難逢的際遇。但我仍然對能讓數學有新看法的應用問題最感興趣。我希望數學不是全然抽象的科學，要能直接跟現實世界有關。

我在普林斯頓時，系上有一個很好的教授瑟斯頓（William Thurston），他是做低維拓樸的費爾茲獎得主。瑟斯頓有很多傑出的學生。例如施拉姆（Oded Schramm）他發明了施拉姆/婁納過程（Schramm-Loewner evolution, SLE）。統計力學總是想證明二維介面會收斂，但非常困難又複雜。結果施



拉姆用 SLE 將它轉換成布朗運動的問題。

瑟斯頓的另一個學生肯紐恩 (Richard Kenyon) 是發展離散解析函數 (discrete analytic function) 的大師，最近費爾茲獎得主史米諾夫 (Stanislav Smirnov) 用了許多他的結果到統計力學上。肯紐恩經常在研究鋪磚 (tiling)，我以前覺得鋪磚很無聊，結果卻變得非常重要，因為它是可算的。我當時很疑惑，問肯紐恩你是瑟斯頓的學生，為什麼在玩鋪磚。他說他當學生時，瑟斯頓就要求他們想這些問題，因為他對離散群和鋪磚很感興趣。現在回想起來，我當年應該有更廣的胸襟，在普林斯頓學習更多有趣的數學，可惜都錯過了。

我自己當研究生時，對數學沒什麼興趣，只想學物理，後來為此付出代價。當然數學物理的訓練也有好處，看問題能從內在的角度去看，而非技術上的觀點。我的主觀或成見讓我能做出一些問題，但也形成局限。

翁，後希望你能對想讀數學的學生提出一些建議。

姚，大學部學數學其實非常好，就算不當數學家，基本數學的訓練還是很有用，高微、幾何、代數、機率都很重要，有興趣就學。

怎樣的人適合當數學家並不容易回答。數學家都很不一樣，有些人活潑，喜歡和人合作，也有人很安靜，喜歡沈思，一板一眼，風格差別很大。他們有一

個共通點，就是都有很強的意志力。克里斯托杜婁做重力波理論，想了三、四十年，雖然不是每天想，但會持續想。這種單純的信念與毅力是大家共通的。不過似乎只有讀到博士時才能真正知道合不合適。

現在如果能重來，我願意多學一點和我的問題無關的數學。很多成功的數學家都真的懂兩個不同的數學領域，確實掌握兩種觀點，但是一定要學得深，不然是沒有用的。

不過我有次在交大演講，建議學生不只學數學，多學點文藝也很好，可以讓心胸開闊。當時黃光明問我「專」和「廣」只能選一樣，你要選哪一個？我說我選專，廣度非常重要，但如果沒有選擇，人還是要有自己的專長。

另外，要早一點找問題做，一邊做一邊上課是很好的經驗，透過研究再學東西的角度很不一樣。要盡量在大學部就找一些小問題，寧可做很難的習題，也比做許多小習題好得多。絕對要養成做問題的習慣，這非常重要。

訪問人：翁秉仁（臺灣大學數學系）
馮肅媛（本刊助理）

時間：2013年6月7日

地點：臺大天文數學館四樓

姚院士在訪談中所談及的代表性著作如下：

- The stability and instability of relativistic matter. *Comm. Math. Phys.* 118 (1988) no. 2. (與 Lieb 合作)
- Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Lett. Math. Phys.* 22 (1991) no. 1.
- Derivation of the Gross-Pitaevskii equation for the dynamics of Bose-Einstein condensate. *Ann. of Math.* 172 (2010) no. 1. (與 Erdős, Schlein 合作)
- Universality of random matrices and local relaxation flow. *Invent. Math.* 185 (2011) no. 1. (與 Erdős, Schlein 合作)

編註：訪談之後五年，艾狄胥與姚鴻澤合寫了“*Dynamical Approach to Random Matrix Theory*”一書，完整的介紹了隨機矩陣理論及其發展。
網址：<http://www.math.harvard.edu/~htyau/RM-Aug-2016.pdf>。