理

淺議現代數學物理對數學的影響

作者：孔良

作者簡介｜孔良是美國新罕布夏（New Hampshire）大學數學與統計系講師，研究方向為數學物理。

從上個世紀80年代以來，數學物理，特別是量子場論和弦論，對數學的很多領域都產生了影響。這些影響不是簡簡單單地隔靴搔癢，可以輕易地被大多數數學家所忽視。筆者遇到很多年青的數學家都曾經在某個時候（或正在）困惑：「是不是需要學習一下量子力學和量子場論？」當然不同的數學家對這些影響可能有完全不同的態度和反應。我們想瞭解的是：「量子場論帶來的這個數學新潮流是一個曇花一現的時尚，還是一股改變數學發展進程的洪流？」要對這個問題做全面細緻的分析，免不了需要進入很多數學物理進展的具體細節，這個任務大大超過了筆者的能力。冒著主觀、片面化和簡單化的風險，本文以不進入任何具體細節的方式，試圖在哲學層面來解析這個潮流的根源和特點，以期得到以上問題的一個解答。當然我們的真正目的並不是去解答這個「膚淺」的問題，而是瞭解藏在現象背後的深層原因，從而瞭解我們在歷史脈絡裡的位置和時代賦予我們的機遇和使命。

數學物理的傳統

數學的發展的一個原動力就是去認識我們的物理世界。比如在希臘語裡「幾何」這個詞就是指測量大地的意思。反過來，對物理世界的描述和深入理解又需要數學這樣精確的語言和方法。其實從更深的層次上看，很多數學語言都是在理解自然的過程中被創造出來的，所以語言本身也是自然法則的一部分。直到20世紀中葉，數學和物理這種相互依存的關係一直伴隨著數學發展的每一個重要時期。一個特別值得一提的例子是牛頓的科學革命伴隨著微積分的誕生。微積分不僅為牛頓力學，而是為整個現代物理學提供了一個語言體系和強大的工具。如果沒有了微積分，很難想像物理學今天會是什麼樣子。而微積分在物理中的應用也成就了微積分本身的大發展。一種數學理論由於在物理中的應用而被普遍接受或被加速發展的情況屢見不鮮。除了微積分還有一個例子就是愛因斯坦的廣義相對論之於黎曼幾何。其實黎曼創立黎曼幾何的一個初衷就是希望能夠把很多複雜的物理現象看成高維的非平凡的幾何現象。愛因斯坦的廣義相對論可以看成黎曼這一理想的完美實現 1。黎曼幾何在廣義相對論發明之後成為了數學裡面的一個主流分支，在數學裡大放異彩，它的一個廣為人知的應用就是解決了拓撲學裡著名的龐卡赫猜想。其實黎曼的原始思考不僅包括了大尺度物理空間的基本要素和特徵，他還提到小尺度上的空間有可能是離散的，而且小尺度上的幾何基礎必須要由將來的物理來決定[1]，很難想像這些思考發生在量子物理登上歷史舞臺的50年前。

另外數學和物理相互依存和難以分割的關係還表現在歷史上有很多大數學家，往往也同時是物理學家或自然哲學家，比如牛頓、萊布尼茲、歐拉、拉普拉斯、高斯、黎曼、龐卡赫、希爾伯特、魏爾（Hermann Weyl）、馮諾曼（John von Neumann）等等。我們想強調的是數學和物理的緊密結合一直是科學發展過程中的主流形態，然而這個主流形態和我們今天所看到的大學教育裡面數學和物理相對獨立的現狀非常不符，其原因是20世紀中葉發生了一個脫離傳統形態的現象。

20世紀中葉的數學和物理的分道揚鑣

1 愛因斯坦把時間和空間統合在一起是黎曼沒有預料到的。

（由左至右）牛頓（1689 內勒繪）、萊布尼茲、歐拉、拉普拉斯、高斯。（維基）

20世紀中葉出現了一個新現象就是數學和物理走上了兩條相對獨立的發展道路 [2]。

現在回頭看來大致有兩個表面原因：

1. 量子力學的出現和牛頓力學的出現的一個顯著的不同是：它沒有帶來一個全新的「量子幾何」或「量子微積分」。所以量子力學完全缺乏幾何直觀，所有人在學習和掌握它的時候都會覺得非常困難。即使到現在物理學界也沒有對量子力學的基礎有一個統一的看法。物理學家為了能夠繼續往前走發展了的很多不嚴格的做法，比如量子場論中的重整化技術，使得數學家望而生畏。
2. 數學也有愈來愈形式化的趨勢，很多現代數學的抽象語言也讓大多數物理學家望而生厭，不知所云。另外數學的體系已經發展到了一個如此豐富和成熟的階段，一部分數學家認為數學不需要外部的動力也可以自己持續發展。

在這一期間，雙方都沒有給對方帶來顯著的影響，不但如此數學和物理似乎都把對方視為前進的包袱，想要努力甩掉包袱，輕裝上路，尋求自己獨立發展的自由空間。一方面，物理學家由於實驗手段的突飛猛進，很多大自然的全新結構被揭示出來，這些嶄新的發現所帶來的緊迫感，使得物理學家希望擺脫嚴格性的束縛，在沒有完善的數學和哲學基石的情況下跨步前行。物理學家也因此取得了不可思議的輝煌成就，這些成就深刻地改變了物理的全貌，甚至改變了我們的生活的方方面面。

一方面，數學家也努力地使得所謂的「純數學」成為數學的核心，而其他和應用相關的數學則被視為應用數學，甚至是含有貶義的「不純」的數學。數學成了一個完全獨立於自然科學的學科。雖然這個純數學運動從19世紀就開始了，但是到了20世紀中葉對數學純粹性的追求才真正到了頂峰。其實純數學運動是一個非常自然的訴求，她有非常底層和內蘊的動力，對此龐卡赫表述的十分恰當：

> 一方面，數學科學必須自我反思。這是很有意義的，因為反思本質正反映了創建它的人類心靈。更重要的是在所有人類心靈的創建中，數學是最少借助於外界的。……越能剝離世俗概念的這些推測，如源於自然或自然問題的應用，當越能從外部世界的變異中跳脫出來時，更能展現出人類心靈能做些什麼。從而，我們更能認知到心靈本質。[3]

20世紀發展起來很多數學，特別是那些完全脫離物理應用的學科：抽象代數、代數幾何、代數拓撲、

黎曼。（維基）

[2] 徐一鴻，〈數學在基礎物理中的有效性——威格納之後三十年〉（周樹靜 譯），數理人文2（2014）。

[3] 龐卡赫表述的英譯文出自 Jeremy Gray, Henri Poincaré, *A Scientific Biography*（2013）Princeton University Press。

（由左至右）龐卡赫、希爾伯特、魏爾、馮諾曼（Los Alamos National Labortary）、哈第。（維基）

範疇論等等都可以看做是講述人類抽象思維是如何工作的研究報告。脫離了物理學的影響，數學家同樣取得了不可思議的輝煌成就。

龐卡赫的思考也可以應用在物理上面，畢竟物理是一門以實驗為主導的自然科學，她內在的驅動力並沒有對嚴格性有嚴謹的要求，對一些自然現象的理解保持靈活的和直覺上的理解，是物理學家探索未知時不可缺少的狀態，這一特點也使得整個學科保持永恆的活力。總而言之，從學科內蘊的特徵上看，核心數學和核心物理的分離是學科發展的必然趨勢。

不過兩大核心的自然分離並不能推出數學和物理的完全分離的結論。但是歷史的單擺總是不願意在平衡點過多地停留，兩個核心的分離使得廣闊的中間地帶變得過度的荒蕪，隨著兩大核心的「量體」的增加，吸力也越來越大，荒蕪的地帶會變得更加荒蕪。時間長了不同核心地帶的居民也變得陌生起來，甚至有了敵意。

1. 一方面，一些物理學家認為數學家不會提供任何物理學家自己做不出來的結果，認為對數學嚴格性的追求會阻礙物理的發展，甚至認為過多的數學訓練會阻礙物理直覺的培養。其中的代表人物是費曼。物理學家徐一鴻先生曾寫過：「事實上，大一統理論的創造者，以及大部分1970年代的粒子物理學家，都十分費曼，很蔑視數學，有次費曼和我一起看秀，他告訴我數學物理那些華而不實的東西，應用到物理時根本連馬尿都不如。」（見註2）
2. 另一方面，一些純數學家也對應用於科學的數學產生了鄙夷之心。其中極具代表性的就是英國數學家哈第（Godfrey Hardy）[2]，他認為應用數學試圖把物理現象用數學語言表達，這些數學往往膚淺且無趣；而純數學則在尋求獨立於物理世界之外的真知，具有永恆的價值。具有諷刺意味的是，為了自圓其說，哈第認為廣義相對論和量子力學是優美的純數學，因而無用。

（由左至右）費曼（1984 Tamiko Thiel 攝）、徐一鴻。（維基）

數學和物理的分離是如此徹底，以至於即使在同一個人的身上她們也可能是分開的。既是物理學家又是數學家的戴森曾說，他錯過了發現模形式和李代數的深刻關係，是因為物理學家的戴森並不和數論學家的戴森交流。

在這一分離期間，數學物理這個名詞被限制在一個比較小的範圍內，比如用分析的方法來研究物理中的方程、泛函分析和運算元代數的方法來研究統計物理和場論模型、以及群表現論在物理中的應用，等等。

雖然這個分離時期，在70年代規範場論的興起和80年代弦論發展之後，就已經澈底結束了，但是它給我們這個時代留下的「後遺症」還廣泛地存在。

1. 在教學上表現為，數學專業的學生幾乎不要求現代物理學（特別是量子力學、量子場論和統

計物理）的任何知識 [4]，而物理專業的學生也對現代數學特別是比較形式化的課題，如代數拓撲、代數幾何、抽象代數、範疇論等缺乏基本的瞭解。而過去30年間數學與物理的大融合和大發展，造成了學生很難通過正規管道來跟上這個發展，對於是不是應該提出一個針對培養數學物理方向上的學生的教學方案這樣的問題也沒有被提到討論的日程上來。

2. 更嚴重的危機是數學物理的身份危機。對於很多物理學家來說，數學物理學家像是往返於數學和物理之間的商人，不過是經常來販賣一些時髦的數學名詞，雖然有時候還可以對某些物理理論做一些美化的工作，但是對物理本質並無核心貢獻。不少數學家也不把數學物理看成一個嚴肅的數學研究領域，因為只有那些具有明確的數學定義，陳述清晰的數學定理和完整嚴格的證明的工作才能被稱為數學，而在此發生之前的所有努力被數學家稱為物理。如果還沒有對數學有本質的貢獻，人們確實要懷疑數學物理有無存在的必要。在求職的道路上，今天的數學物理學家不得不面對這種雙重否定的身份所帶來的尷尬。

毫無疑問，數學物理與數學和物理有不一樣的特性，這些特性是不是本質的？是不是值得把數學物理當作一個專門的既不同於數學，也不同於物理的新學科來對待？這是一個不好回答的問題。但是我們堅信，如同龐卡赫所說的對數學本性的思考類似，對數學物理的本質特性的思考和討論，對數學和物理兩方面都是有益的。

數學裡的新潮流

量子場論早期的發展主要是以微擾論為主要研究方法，而孕育而生的重整化的方法對數學物理的對話起到了一定的阻礙作用。但是到了70年代，量子場論的非微擾方法開始和近代數學的課題有了廣泛的接觸，特別是規範場論和纖維叢理論的完美對應，大大促進了數學家和物理學家的重新對話，它的一個直接的結果就是80年代多納森（Simon Donaldson）理論的發現和對四維拓撲的深刻影響。而這種對話更由於80年代弦論的興起而達到了全新的高度。弦論可能是目前對數學要求最高的物理理論，它所需要的數學大多是數學裡面沒有的嶄新的數學，而這種新數學又與廣泛的數學領域有著深刻的聯繫，例如：拓撲學、代數幾何、微分幾何、表現論、分析、數論、機率論、範疇論等等。借助於這種聯繫和由量子場論帶來的獨特視角，弦論學家得到了一系列驚人的數學結果，引起了數學家的廣泛的注意。一時間以韋頓（Edward Witten）為代表的很多弦論學家，成了數學新潮流的領路人。從80年代到現在這個新潮流非但沒有出現任何衰退的跡象，反而有越演越烈之勢，以至於現在我們都不清楚什麼數學領域和物理沒有關係。

多納森。（Gert-Martin Greuel 提供，MFO）

韋頓。（丘成桐數學科學中心）

我們經常能夠聽到做學問不能跟風的勸告，因為很多時髦的東西確實都是曇花一現的時尚。那麼這個新潮流能否擺脫曇花一現的宿命呢？這個問題和我們每個人要選擇做什麼數學並沒有直接關係，從個人角度，選擇做什麼是沒有統一的答案的，因為個人的喜好和選擇總是很私密的，不可一概而論。但是學科的發展和停滯也確有其歷史發展規律，不是每個學科都會同步地發展，有些學科甚至停止發展也是正常的。

[4] 可能只有一個國家是例外就是蘇聯和後來的俄羅斯，也許部分因為和西方世界的隔絕，蘇聯的數學物理傳統保存的很好，正因為如此，在蘇聯解體之後，大量優秀的原蘇聯數學家和物理學家流向歐美，成為當今數學物理學界的主要力量。

每一個時代都會有屬於自己這個時代的潮流，我們該做的只能是從歷史的角度來分析這個潮流的特點，從而瞭解我們這個時代留給我們的機遇和使命。帶著這個疑問，我們來看看過去30年數學裡面發生了那些變化。

先從現象學的角度來看，弦論和量子場論的確對數學的方方面面產生了影響，其中一個最顯著的特徵就是新數學結構的大爆炸。過去30年嶄新的數學結構被以前所未有的速度創造發明出來，他們要嘛是直接或間接地因為量子場論而被定義出來，要嘛是由數學家獨立發現，但因其後發現了和物理的關係而被加速發展。

這裡我們舉一些例子，比如在幾何裡有：卡拉比/丘流形（Calabi-Yau manifolds）、鏡對稱（mirror symmetry）、格羅莫夫/韋頓理論（Gromov-Witten theory）、橢圓上同調（elliptic cohomology）、深谷範疇（Fukaya category）、多納森/湯馬斯不變量（Donaldson-Thomas invariant）、非交換幾何（non-commutative geometry）、導來代數幾何（derived algebraic geometry）等等；拓撲有：瓊斯多項式（Jones polynomial）、多納森理論（Donaldson theory）、陳/西蒙斯理論（Chern-Simons theory）、賽伯格/韋頓理論（Seiberg-Witten theory）、科凡諾夫同調論（Khovanov homology）、拓樸場論（topological field theory）、代數元（operad）、分解同調論（factorization homology）等等；代數及表現論有：手徵代數（chiral algebra）、量子群（quantum group）、頂點算子代數（vertex operator algebra）、模張量範疇（modular tensor category）、子因子（subfactors）、熔範疇（fusion category）、張量範疇代數（algebra in a tensor category）、A_∞代數（A-infinity algebra）、L_∞ 代數、G_∞ 代數、幾何朗蘭茲對應（geometric Langlands correspondence）等等；機率論有：隨機婁納過程（Stochastic Loewner evolution）等等。甚至在數論這樣古典的領域裡面，都發現了朗蘭茲綱領和場論裡面的電磁對偶的關係，模形式和拉曼努真（Srinivasa Ramanujan）公式等等都在量子場論中有很多的應用。

從表面上看，量子場論的確席捲了數學的大部分領域，以至於有人認為量子場論在扮演著統一數學的角色。不過對更多人來說，這可能是一句沒有意義的空話，崇尚多元和自由的數學家尤其討厭這類空洞的「政治」口號。我們需要做的是離開現象的表面去探究導致這一現象的深層原因。


拉曼努真。（維基）

大自然的饋贈：無限維的數學世界

老子說「道法自然」，大自然是我們最佳的導師。物理學家在大自然的指導下，甚至是逼迫下，不得不研究多體（或無窮自由度）系統，因為物理世界的大多數問題都是多體的，比如流體、星體、材料，甚至股票市場和人類社會。多體和少體有著本質的區別，簡單地說「多即異也」[3]，而由此而誕生的物理理論：統計物理、量子多體理論和量子場論，可以看作是大自然（或物理學家）對數學家的饋贈。這個饋贈可以精煉出來一條很短的消息：

無限維上存在有限維上根本看不到的數學結構。（如：量子場論、弦論。）

為了能夠瞭解這一個簡短的資訊帶來的震撼，讓我們來想想看，單憑想像力就能企及的無限維的數學結構是什麼？是無限維的代數（結合代數、李代數、霍普夫〔Hopf〕代數）、無限維的流形、無限維的李群？還是無限維的函數空間、運算元空間等等？你會發現這些顯然的無限維的結構都是有限維概念的直接推廣，我們在不知不覺之中陷入了一個看不見的牢籠。一個能夠打破這個牢籠的問題是：有沒有一個只在無限維上才存在的全新的數學結構？這是一個不平凡的問題，可以肯定的是單憑想像力

很難企及這樣的結構。而令人讚歎的是，現代物理發展出來的量子場論就給出了許多這樣的無限維的新結構。比如任何一個不平凡的二維共形不變的量子場論（或共形場論）都是無限維的，而有限維的二維共形場論在某種意義下都平凡的。可以想像這樣的無限維結構的存在性本身就是一個非平凡的問題，所以量子場論的數學結構的完整構造往往是非常困難的。

先拋開構造不談，這樣的新結構的存在本身已經可以解釋為什麼量子場論在扮演統一數學的角色。當我們透過不同的有限維或無限維的視窗去觀察這個無限維的龐然大物，我們往往會看到完全不同的數學景象。難道這就是老子所說的「大音希聲，大象無形」？舉一個我自己比較熟悉的例子：第一個被構造出來的二維共形場論是一個頂點運算元代數（一個有限維不存在的新結構，其中自動包括結合代數和李代數等結構）；她的配分函數是著名的J函數，J函數是所有模函數的生成函數，模函數在數論裡面佔有重要地位；她的自同構群是最大的有限散單群：魔群（Monster group）；另外她還包含了48個統計物理模型中的易辛模型（Ising model）的某種極限。這個允許很多看似毫不相關的數學結構在其上生長的龐然大物真的可以稱為怪物了。

今天我們看到，這些無限維的怪物已經在很多不同的數學領域之間建立了橋樑，為很多古老的問題帶來了全新的理解和解決方案。比如今天幾何學家也已經熟知了有些在有限維的流形上面的問題，可以通過對無限維的迴圈空間（infinite loop space）的研究而得到答案；而拓撲學家也經常強調要去看無限維的（餘）鍊空間（〔co-〕chain space）上的結構，而不僅僅是看（餘）同調（〔co-〕homology）。其實真正重要的還不是解決了以前的問題，而是發現了一個全新的數學新大陸，在等著我們去探險。

也正因為是研究無限維，我們也不難理解為什麼我們生活在一個數學結構大爆炸的時代。隨著越來越多的不同角度的觀察，新的數學結構被層出不窮地被挖掘出來，而那些剛剛發現的數學結構已經足夠的宏大和豐富，會讓人不禁感慨：似乎數學才剛剛開始。十幾年前數學家蘇利文（Dennis Sullivan）和筆者說，其實60年代已經可以研究無限維的拓撲學，那個時候也發現了一些無限維的新數學結構，但是當時確實缺乏思想上的動力，真的要等量子場論帶來了一場思想上的革命，才能真的復興，並大行其道。


陳寅恪。（維基）

所以推動這場數學的新潮流，以及數學結構的大爆炸的幕後推手，既不是一兩項新的技術，也不是一兩個深刻的思想，而是廣袤無邊的，完全未開墾的數學新大陸。至少從數學的角度看，基於以上分析，我們已經有理由相信這個由量子場論而來的研究無限維數學結構的潮流不是一個曇花一現的時尚，而是一場革命性的洪流。它應該就是陳寅恪先生在《陳垣敦煌劫餘錄序》中所提及的「此時代學術之新潮流」：

一時代之學術，必有其新材料與新問題。取用此材料，以研求問題，則為此時代學術之新潮流。治學之士，得預於此潮流者，謂之預流（借用佛教初果之名）。其未得預者，謂之未入流。此古今學術史之通義，非彼閉門造車之徒，所能同喻者也。

也許人類的想像力終究還是抵不過大自然的饋贈，數學在純數學化運動之後不久，就迎來了物理學的全面入侵，數學終於又重新擁抱大自然了。

新數學的一些特徵

量子場論帶來的無限維的新數學和傳統的數學有什麼不同的特徵呢？真的有很多不同，需要很完整的分析，我們這裡只想借助於無限維的提示來給出一些簡單化，但是可能仍然有啟發的解讀。我們先

來談談數學內容以外的一些新特徵，以及其對研究者的一些影響和挑戰。

表面上的混亂：

無限維的數學很像老子所說的大象無形，從表面上看似乎十分混亂，比如在量子場論的不同方向上的研究者似乎在用不同的數學語言，有的偏重代數，有的偏重幾何，有的偏重拓撲，有的偏重分析，有的偏重用不嚴格的物理語言，所以即使大家都在做數學物理，交流仍然是很困難的。因為這些表面上的混亂，也為初學者入行帶來了極大的困難。數學物理是不好入門的，因為第一，沒有教科書；第二，範圍太廣，幾乎涵蓋了所有數學領域，正是這樣的龐然大物，會讓初學者常常有無從下手的感覺；第三，需要一些和別的數學學科不一樣的訓練，特別是需要一些物理的背景，而自學物理對數學家來講是非常困難的。

內在的和諧與統一：

雖然表面上看是很混亂，但是在深處這些表面的亂象都是同一個無限維的龐然大物的不同的側面，因而他們有內蘊的和諧。他們在深層次上的和諧與統一，使得我們不應該把表面的現象看成混亂，而是應該看成是一種豐富的體現。是的，無限維的數學的一個基本特徵是表面的豐富和內在的統一。只有以這樣的心態去看待數學物理，才會消除很多對表面上的混亂的抵觸心理。她的豐富多彩與和諧統一正是你所追慕的，所以你也要接受她表面上多變的性格，並因此而愛她。

數學物理的哲學趣味：

一方面數學物理和對大自然的理解息息相關，所以數學物理的內涵必然是包括自然哲學的。不但如此，因為和量子引力的深刻關係，現在的數學物理在非常基礎的層次上挑戰我們對宇宙幾乎所有的認知，這些新的挑戰使得哲學家、邏輯學家、數學家、物理學家、電腦科學家開始聚合在一起，一起來面對一場非常底層的變革。另一方面不同方向的數學物理學家要交流，必須要拋開表面的、語言的和技術上的不同，而去挖掘深層次的、哲學上的共性。只有沉得足夠的深，交流才是可能的。然而更重要的是，一個本質特徵能夠被挖掘出來，往往是因為我們先發現她會在不同數學語境裡有類似的表現，而發現那些隱藏在表像背後的哲學本質本來就是數學物理研究的最根本的目標之一。數學家葛爾方德（Israel Gelfand）說：「不要吝惜時間來思考基礎理論問題，這點很重要。……，在我們的時代，數學家應該成為自然哲學家。」

新的語言：

在這個充滿未知的領域裡面，連描述未知的語言往往也是未知的。能夠描述自然法則的前提是要建立一個語言系統，而語言系統的建立本身就依賴於我們對自然法則的深刻理解，所以語言本身就是自然法則的一部分。而且語言系統的建立可能是我們在探索過程中最為艱難的步驟。用精確的數學語言把問題描述出來，或把核心結構定義出來往往是最難的。如果能做到，問題也就被解決了一大半了。

葛爾方德。（維基）

基礎知識和技術：

當精確的數學語言把問題描述出來以後，往往會發現以前所有的數學工具都用不上，需要的是去發明全新的數學工具。雖然有的時候碰巧前人發明的數學工具可以用，但是常存這樣的僥倖心理長期來講是有害的，因為我們的目的就是去發現一個全新的數學世界。所以堅固的數學基礎、廣博的數學知識和強大的技術都不是探索者必需的素質。真正需要的是探索者的勇氣，獨立之精神和自由之思想。雖然從本質上講，所有領域在這一點上都是一樣的，但是那些相對成熟的領域對基礎和技術的要求還是要高很多。

年青人的舞臺：

我們接著前面的特點略微展開談一下，量子場論

和很多領域的數學相關，這也給剛入門的學生帶來一些錯覺：是不是需要懂很多數學才有可能來做數學物理？其實真實的情況並非如此，除了幾個需要比較多基礎知識的領域，比如鏡對稱等，更多的方向上並不需要太多的基礎知識，即使是研究鏡對稱也有很多不需要太多基礎的入手點。更重要的是量子場論要求的數學大多是全新的數學，她們還沒有被建立起來。更有甚者，學了很多數學有時候甚至是有害的，因為如果學了很多數學知識放在腦子裡，我們的本能就是希望有機會讓這些數學知識能夠發揮作用，這種功利的想法反而限制了我們的想像力。因為你面對的是一個全新的數學世界，雖然建立舊世界通向新世界的橋樑也很重要，但是這種橋樑很多時候只是涉及了新世界的枝枝葉葉，而忽略了新世界有她自己內蘊的全新的生命結構。所以更重要的素質是學會放下，放下數學知識帶來的包袱，用一顆自由的心去傾聽。所以一個年青人雖然沒有很豐富的數學知識，只要能夠保持一顆天真的童心和足夠的努力，就有可能做出很大的突破性的工作。限於篇幅，只在這裡點到為止，筆者會在其他文章中詳細解讀。

在數學內容上，無限維的數學展現出很多新特徵和新現象，比如高階同倫論和高階範疇的應用，豐富的形變理論和模空間問題，很多神奇的對偶現象，等等。每一個現象都值得我們做深入的分析和解讀。而在這裡我們僅僅簡單談談下面三個新特徵。

代數方法的重要性：

傳統物理學大廈建立在微積分的基礎上，牛頓把經典力學問題完全化成了微分方程的問題，電動力學和廣義相對論也都建立在微分方程的基礎上，所以分析的方法在經典的數學物理裡面佔有舉足輕重的地位，大多數物理學家因此相信，方程是表達宇宙的永恆規律的唯一語言，寫下以自己名字來命名的方程式大概是幾乎所有物理學家的夢想。量子力學誕生以後，雖然方程仍然是主流語言，比如：薛丁格方程和狄拉克方程，但是代數的方法也越來越重要，特別是表現論的重要性變得顯而易見，群論和群表現論也已經從最初的一個純數學分支變成了所有物理學家的通用語言。而且從量子力學的起源上看，海森堡從可觀測代數的角度給出的量子力學描述可能更加基本。量子場論興起以後，分析的方法在半經典的近似下仍然有很大的作為，但是對完全量子化的場論顯得有些力不從心，其根本原因是量子物理和牛頓的經典時空觀念是格格不入的，而從描述量子世界的數學語言上看，微積分在本質上就是不夠的，我們需要一個新的量子化的微積分[4]。這裡的「量子化」有兩個不同又彼此相融的意思 [5]，

狄拉克。（維基）

1. 一是在量子物理中，可觀測量構成一個非交換的代數（海森堡圖像）。如果和量子力學的建立一樣，我們把可觀測量看做是構建新的微積分的出發點的話，那麼代數方法將是這個新的微積分核心，法國數學家孔涅（Alain Connes）發展的非交換幾何是這一個思路的代表[7]；
2. 另一個是路徑積分的，從這個角度看需要無限維，因為路徑空間是無限維的。從無限維的角度看，實數就不是一把測量無限維數學世界的好量尺。所以很多無限維空間就沒有傳統意義上的取實數值的測度。這時候我們需要用無限維的量尺來測量無限維的世界。在我們尋找適當的測量無限維的量尺的時候，量尺內蘊的結構變得更為重要。也許我們最終還是要建立完備的分析的方法和理論，但是這個理論必須建立在我們對無限維相關數學的基本代數結構的

[5] 這兩種意思是彼此融洽的，比如非交換代數可以看成無限維路徑空間上的座標函數生成的代數，見 M. Kapranov “Noncommutative geometry and path integrals” *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin*, Vol. II （2009）, 49-87, Progr. Math., 270, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA。

理解之上，就好像實數是由有理數完備化而來，但是這個完備化依賴於有理數上面的代數結構。所以對無限維上面的數學結構的理解，應該放在完備化之前 [6] 。

（由左至右）狄拉克、孔涅。（維基）

70年代以前，物理中的代數方法主要是指群論，現在越來越多的代數結構開始在量子場論的研究中大展身手，比如：無限維李代數、A_∞（C_∞，L_∞）代數、霍普夫代數、頂點運算元代數、張量範疇、分解代數（factorization algebra）等等。

範疇論的興起：

範疇論起源於代數拓撲，60年代格羅騰迪克（Alexander Grothendieck）將其變成了代數幾何的基礎語言，隨後其影響逐漸輻射到很多其他領域，因而成就了一股範疇論替代集合論的潮流。到了90年代這個潮流非但沒有衰減，反而有了新的強大動力：量子場論或無限維的數學結構。為什麼無限維的數學要用到範疇論？從代數上看，如果我們的量尺是實數（或複數），很多場論的問題就可以化成無限維的線性代數問題，但是用有限維的量尺去測量無限維是沒有效率的，而特別有效的量尺本身往往就是無限維的，用了這樣的量尺，很多場論的問題都可以轉化成在不平凡的張量範疇裡面的代數問題。更多的時候，無限維豐富的數學結構會讓研究者非常迷惑，而範疇論對數學做一個巨大的統一，很多不同領域看似不同的數學概念，在範疇論的視角裡不過是不同範疇裡的同一概念。所以研究無限維的問題的時候，範疇論變成了非常有用的語言和導向性工具。不但如此，在物理裡面，沒有結構的「存在」是不存在的，即使是「點粒子」也不是數學意義上的點而是有很多結構，很多時候我們希望能夠在每一個「點」都帶有豐富結構的「數域」上積分，而範疇論其實就提供了一個結構化的微積分。另外值得一提的是量子物理在很多基本方面都暗合範疇論的基本精神。比如，量子理論把可測量提到一個最本質的層次，可測的不是基本粒子，而是他們之間的相互作用，沒有相互作用，測量也是不可能的；而範疇論的基本精神就是認為物件之間的相互關係比物件更重要，甚至物件本身就是所有相互關係的反映 [7]。

物理圖像對無限維數學研究不可思議的有效性：

我們熟知的一個著名問題是：為什麼數學對物理有不可思議的有效性（unreasonable effectiveness）[5]？而物理圖像對無限維數學的研究有不可思議的有效性，這是一個全新的現象。要仔細解讀這個現象很難，超出了本文的範疇，我們這裡只想點出，本文的核心，無限維上的新數學，給出了一個明顯的暗示。一個無限維的數學結構，如果單從他的生成元和她們之間的關係的角度看，非常複雜，很難有什麼數學直覺。但是如果這個無限維的數學結構描述的是一個有無窮自由度的物理系統，比如一塊固體材料，我們的物理直覺，甚至就是一塊固體材料在普通視覺下效果，也已經是做了很複雜的重整化計算的結果，即把所有微觀自由度積分積出來的結果。這一個過程從數學上看是非常不平凡的，也就是說有時候物理直覺本身就是一個不平凡的對無窮自由度的計算結果。也許這就是物理圖像對無限維數學的研究有不可思議的有效性的一個重要原因。而更重要的是除了普通的視覺，物理學家還發展出很多強大的實驗和理論的手段，而每一種對宏觀多體系統的物理測量都可以看成是對全體微觀自由度的一種類似積分的強大計算。雖然我們還不能理解這種超

---

[6] 這一段筆者受惠于黃一知先生對二維共形場論研究的一些類似看法。

[7] 關於範疇論和物理的討論可見 Section 2 in https://arxiv.org/abs/1107.3649，更多討論見 nlab：https://ncatlab.org/nlab/show/higher+category+theory+and+physics。

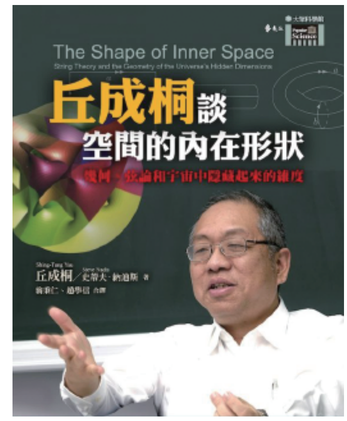
越性的計算的數學本質，但是可以肯定的是我們可以通過物理測量而獲得對一個無限維的數學結構的某種宏觀的理解，這是完全超越傳統數學工具的新的強大工具，這是大自然和物理學給數學的意外驚喜。因此我們也可以理解為什麼由此發展出來的理論工具，比如一個量子場論的拉格朗日實現或漢米爾頓量實現，往往為我們提供了難以理解的強大直覺，為一些複雜的數學問題提供意想不到的解答。

另外借助這個語境，我們順便提一下，無限維的數學世界展現了很多神奇的對偶現象，這些對偶並不是局限在數學結構之間的同構，可以是更弱意義下的對應，比如一些多體系統和場論裡面的邊界/體對偶性（boundary-bulk duality）。這些看上去低維度的多體系統能夠和高維度的多體系統之間有對偶，其根本原因是二者本質上都是無限維的。甚至在無限維的數學世界裡面，一個「點」也都是無限維的。這可能是藏在很多物理全息現象背後的原因。我們希望以後能回到這個話題上來。

結語

在這篇文章裡，我們簡略地分析了過去30年物理對數學產生了深刻影響的原因。我們希望讀者已經從我們的分析中瞭解了，為什麼這是一場革命性的洪流，而非曇花一現的時尚。我們相信探索無限維的數學新大陸正是這個時代賦予我們的機遇和使命。

在文章的進程中我們有意地忽略了很多重要的問題，比如：我們既沒有對數學物理發展的歷史進程做任何說明，在每一個年代裡面到底發生了什麼？在不同的年代有什麼特別重要的特點？也沒有對數學物理新進展的具體內容做任何介紹，也沒有給出任何具體的實例來展現由數學物理帶來的和傳統數學不同的思考方式。我們認為對這些問題做細緻的分析和廣泛深入的討論是非常有意義的，不過這不可避免地讓我們走入學科的細節。從數學方面介紹數學物理的中文文章不多，我們希望拋磚引玉，期待以後能夠看到很多這方面的討論。在這裡我們推薦阿提雅（Michael Atiyah）先生的《數學的統一性》[6]和丘成桐先生的《丘成桐談空間的內在形狀》[7]。其實這方面的英文文章也不多，特別是和本文類似性質的文章幾乎沒有，一個比較深入的討論見的討論見穆爾（Gregory Moore）的綜述性文章[8]。



《丘成桐談空間的內在形狀》的封面。

在文章結束前，我們想指出，如果物理對數學的影響只是單向的，那麼這股潮流的生命力將減少不少。所以我們要問一個顯然的問題：這些由物理學帶來的數學革命最終能不能回饋物理呢？而這種回饋會不會僅僅是一些裝飾性的美化？還是有可能會深刻地改變物理學？這些問題顯然需要另外一篇文章來仔細分析，我們只想指出數學對弦論的回饋早就不是新聞，而且近年來，我們看到一些數學家對場論的研究開始已經對其他物理學有不平凡的回饋。筆者比較熟悉的就有拓撲場論的數學理論和範疇論對凝聚態物理中的拓撲序的研究的影響。不過這是一個獨立偶然的現象呢，還是一股革命性的新潮流的開始呢？我們期待專家的解讀。

本文出處

本文文稿出自於作者部落格，特此感謝作者同意轉載。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

延伸閱讀

- 丘成桐、納迪斯《丘成桐談空間的內在形狀》（2012）遠流。
- 丘成桐〈弦論和宇宙隱維的幾何〉（數學傳播35卷4期，pp. 3-13），http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d354/35401.pdf。
- 徐一鴻《可畏的對稱：現代物理美的探索》（2012）五南。
- 穆爾的〈物理數學與未來〉的文章網址：http://www.physics.rutgers.edu/~gmoore/PhysicalMathematicsAndFuture.pdf。