畢氏法則

第一個數學定理？！

作者：大衛 ‧ 曼弗德（David Mumford） 譯者：趙學信

作者簡介：曼弗德現為哈佛大學與布朗大學退休榮譽教授，研究領域是代數幾何與圖形視覺與模式理論。曾獲頒費爾茲獎（1974），麥克阿瑟獎（1987）與沃爾夫獎（2008）。

關於直角三角形三邊長的關係（一般稱為畢氏定理），最早顯示人們已得知其法則的現存文獻是巴比倫泥版，時間在公元前 1800 年前後的世紀，大約是漢摩拉比（Hammurabi）的時代。我採納何伊魯帕（Jens Høyrup）的建議，稱之為法則（rule）而非定理，因為在最早期的歷史裡，它出現時，大多數是表達這些邊長關係的規則，並不是定理。更何況，我們根本不知道畢達哥拉斯是否證明了它。繼巴比倫之後，它接著又出現在印度吠陀祭壇的建築手冊裡，這些文獻早在公元前 800 年完成，經由口述流傳下來的。至於中國，由於秦朝（公元前 221 ～ 206 年）燒失大量文獻，我們能找到的最早記錄只能上溯至公元前二世紀。這些線索的確稀少。但因為畢氏法則可說是人類發現的第一個「不無聊」（non-trivial）的數學定理，所以它究竟是在何時、何地最早出現？它是否是各個文明獨立發現的，以及如何發現？這些問題一直有著廣泛討論。這一切都屬於威伊（André Weil）所謂的「原史」（protohistory），亦即當某一傳統的傳世文獻稀少，且可能不具代表性，有些文明甚至付之闕如時，仍試圖進行學術探索的嘗試。畢氏法則即是原史的一個範例，它的完整歷史為何，我們只能推測，而這就是我在本文準備做的。然而也並非全是猜測，我的推測大大得益於數學史家的深入研究，其中我特別要感謝霍伊魯普的大力協助。

我們該如何看待這類推測呢？我的觀點是：歷史永遠是**貝氏推論**（Bayesian inference）的演練，不僅原史，整個歷史都是如此。我們永遠不會有過去時空任一部分的完整知識。即使在我們自己的時空，我們也只能依賴有錯和選擇性的記憶來重構事件。學者常會有種假象，以為若只依賴第一手資料，就不致於做了過多推論，但我想他們誤會了。第一手資料當然遠遠勝過二、三手資料，但每個人都會建立他們自己對人類行為與人類文化的**先驗**（prior），藉此才得以把殘存的稀少資料展開成對事件的完整重構。的確，正如魯西迪（Salman Rushdie）引述他的劍橋教授希伯特（Arthur Hibbert）所說的：「在你聽到人們說話之前，絕不要動筆寫史。」當然這也是為何在久遠時間之後，不同時代描述同一事件的史書差距會如此巨大的根本理由。

我個人初次讀阿基米德的經驗正足以闡明我的偏誤：在適應了他的特殊用語，以及當時數學文化的特質之後，我很確定我完全能跟上他的思路。我知道現在的數學家如何推理，而阿基米德做數學的方式與我的自身經驗整個嚴絲合縫。我根據我的先驗，重構了一幅豐富的阿基米德畫像。他在這裡是解一個積分的黎曼和，在這裡他所做的惱人估計是為了建立收斂。我知道歷史家會說，我讀到的並不是他真正的意思，而是用我對現代數學的理解來扭曲他的話。這一點我無法否證，但我也不同意。我把數學看成是一個問題與解答的固定集合，獨立於文化之外，就像冶金學是能用於分析古代刀劍的一組事實的固定集合。類似情形，當我在阿基米德的著作中讀到如同現代人所寫的數學（調整過符號記法之後），我自認我能聽到他「說話」。

美索不達米亞

回到畢氏法則。我想該問的第一件事是：為何古人要研究三角形？有兩個相關且非常可信的理由。

一是土地的價值依其面積而定，若要買賣、繼承和課稅，面積的數字值是不可少的。另一原因是當聚落成長變成都市時，屋舍和街道規劃最便利的形狀是矩形。對於第一種情形，最自然的方法是把田地分割成近似的矩形或直角三角形。直角三角形是矩形的一半，一個矩形可以由對角線切成兩個直角三角形。所以你得要能在地上畫出垂直線，要能辨認一個四邊形是否為矩形，也要能檢查三角形的一角是否為直角。換句話說，所有古代王國的統治者都會需要能通曉基本幾何事實的土地測量員及建築匠師。這並不表示他們*必須懂得*畢氏法則，但它暗示了畢氏法則是很有用的。

在美索不達米亞，非常幸運的是，由於文書是記在濕泥版，而不是寫在紙張、莎草紙、樹皮或繩上，幾乎可以久永保存。例如火焚不會毀壞泥版，反而讓它*更*持久。在美索不達米亞，我們有將近三千年的泥版或泥塊（clay token）記錄，可用於重構它的文化史。史曼特 - 貝瑟拉特（Denise Schmandt-Besserat）運用這些資料建立了非常可信的書寫起源的故事：在公元兩千多年前，人們一開始用泥塊記錄，然後有了泥封（clay envelope），最後是寫在泥版上的楔形文字。她的理論基本上是說，一切都是從記下「某某人欠了什麼什麼」開始的。他們高度複雜的位值制 60 進位算術似乎源於要有一套統一的中央會計制度（可能在烏爾〔Ur〕第三王朝），包括用各種單位來記錄的商品和勞力，常寫成 $4, 5, 6, 10, 12$ 等的倍數。現存有許多獨特的會計泥版，上面詳細記載了勞力和物品，可參考馬特西奇（Richard Mattessich）的著作《會計的起源》（*The Beginnings of Accounting*）。

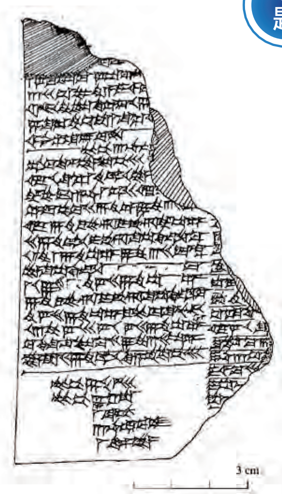

圖 1：史柯恩珍藏 3049 的巴比倫泥板：畢氏定理使用於公元前 1700 年。

那麼土地測量呢？據說女神尼莎芭（Nisaba）從恩利爾（Enlil）之處收到文字和數字為婚禮禮物，又將之傳遞給人類，下面這首歌頌祂的美妙讚歌出自一塊古巴比倫時期的泥版：

尼莎芭，綻放喜悅的女神
正直的女神，書吏，知曉一切之神：
她引導你的手指在黏土上書寫，
讓你的手指在泥版印上美麗的楔形，
讓楔形因黃金尖筆而綻放，
蘆葦測竿與青金石（lapis lazuli）準繩，
標竿，以及賦予智慧的書寫板：
尼莎芭慷慨的全部賜予你。

「蘆葦測竿」和「準繩」是測量員的基本工具，在此被放在與書寫同等重要的地位。許多流傳下來的「地契」泥版附有平面圖和長度。但在我的思路裡，最能充分展現他們關於畢氏法則知識的，是史柯恩珍藏（Schøyen collection）編號 MS 3049 的泥版（圖 1）。這塊泥版的作者在此計算一道厚重城牆門道的對角線距離，像是從內部的左下角到外部的右上角。現在一般是把畢氏定理視為是關於三角形的定理，但它描述的其實是二維坐標上的距離。迭代下去，我們可以得到 $\mathbb{R}^n$ 中的距離是每一坐標改變值的平方和開根號：

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

若一人要求城門內部對角線長，
5 肘，為 25，又 10 指，為 1 40
此乃城門高。
$x\,x\,x\,x\,x$ 表格，
於此輸入 20 及 $x\,x\,x\,x$，
你得到 26 40，城門寬是 8 53 20，
城牆厚是 6 40。
城牆高 26 40，使自噬，則
你得到 11 51 06 40。
城門寬 8 53 20，使自噬，則
你得到 1 19 ⋯ 44 26 40。
城牆厚 6 40，使自噬，則
你得到 ⋯ 44 26 40。
疊上三數，你得到 13 54 34 14 26 40。
令其等邊出現，則你得到 28 53 20，
即是高度 26 40 的城門的內部對角線長。
所以你做到了。

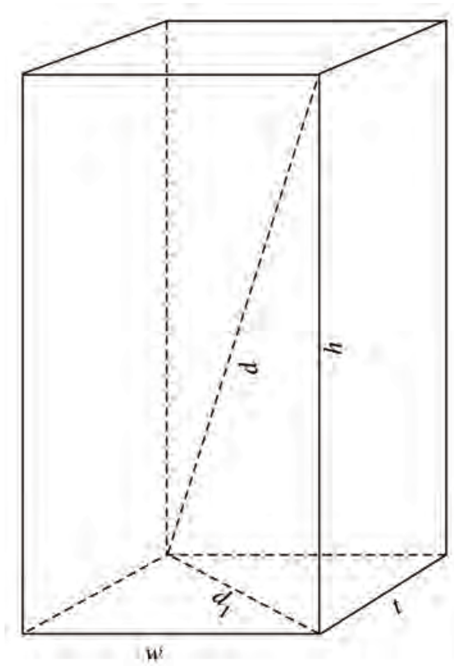

圖 2：泥板 MS 3049 的譯文與示意圖。

畢氏定理的重要性在於這個系理。而我們發現早在公元前 17 世紀，巴比倫的烏魯克（Uruk）已將之用於三維空間。

原文翻譯出自弗里貝格的《一套非凡的巴比倫數學文獻》（*Jöran Friberg, A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*），圖 2 則是他對計算所做的圖解。請注意數字使用的是 60 進位制（所以「640」是 $6\times60+40=400$），「疊上」（heap them）表示加，「使自噬」（let eat itself）表示求平方，而「等邊」（likeside）則是指平方根。

附帶一提：另一塊泥版普林頓 322（Plimpton 322，如圖 3）常被引用為美索不達米亞已知道畢氏定理的證據。它包括一份數對 (s,d) 的表格，其中 d^2-s^2 恰是一個（有限位數的）60 進位 (s,ℓ,d) 的平方，換句話說，即是「畢氏三元數」(s,ℓ,d)。由於泥版所列的三角形，角度是由 44 度均勻遞減到 32 度，所以被認為是一份正弦表，或者可能是土方工程的手冊，用於給出測量員可以放樣的簡單距離。然而羅勃森（Eleanor Robson）卻另有看法，在 2002 年 2 月的《美國數學月刊》（*American Math Monthly*）上，她認為這只是一張倒數數對 $(x,1/x)$，及其和與差的表格（現在因為泥版破損而不全），數字化成簡單的 60 進位形式，以便出數學題時使用，換句話說，這是一份教師手冊。表格與三角形有關的暗示，只在於數字 d 欄的標題寫著「對角線」。即使如此，史柯恩 MS 3049 也明確的使用兩次畢氏法則。

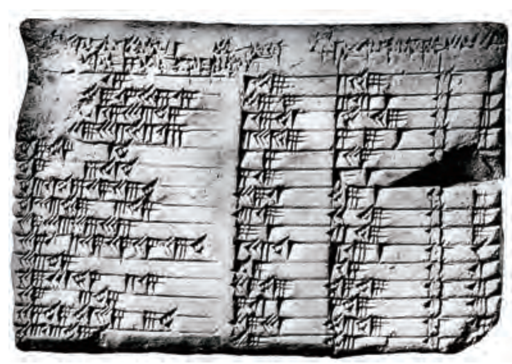
圖 3：泥板普林頓 322。

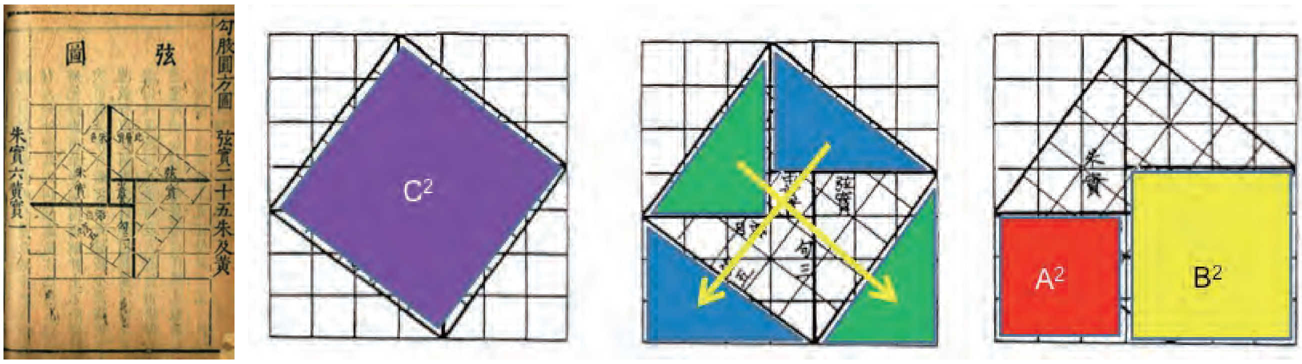

圖 5：弦圖與畢氏定理證明。

是誰想出了畢氏法則？畢竟它可說是數學裡第一個「不無聊」的事實。我們知道當時有訓練書吏的學校，裡面的學徒要接受讀、寫、算的訓練，這些都是很專門的科目。（附帶一提：除了頗有難度的 60 進位制算術，寫也是一大挑戰，因為當時的文字混合了蘇美人的表語文字以及阿卡德人的拼音字母，情形猶如現在的日文是混合了漢字和假名。）數以百計被丟棄的學生泥版留存到現在，許多還帶有錯誤！從這些學校畢業的書吏可以擔任行政官僚、會計、測量員或教師。但我認為，必定有些書吏也具有數學天賦，否則不可能會發現畢氏法則。我們是否該認為他們是史上最早的數學家？這一點會有些爭議。對羅勃森而言，這些都是針對工程、行政和教學需求而產生的 —— 用於測量和設計運河、土木工程等。她宣稱，把他們當成數學家，是一種忽略了他們所處社會的時空錯亂。

這或許反映了純數與應數之間長久以來的緊張關係。許多工程師其實是數學天才。但是數學天才並不一定就得當職業數學家，而且把當時的人稱為數學家似乎有點誇張。遵照希伯特的教誨，我們不妨想像當時有位傑出的行政官員，他白天的工作是測量或做工程，並用泥版記錄相關的平面圖。而這些幾何圖形或許激發了他的想像力，於是他開始探索這些圖形如何界定長度和面積（試想像一下在瑞士專利局上班的愛因斯坦）。然而畢氏法則是如何發現的呢？這是真正的謎團。何伊魯帕在《長、寬、面：古巴比倫代數及其相關知識》（*Length, Width, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and its kin*）一書中，當分析泥版 Db_2 146 ❶ 時主張，巴比倫人已發現了中國西漢著名弦圖的某一版本（討論見後）。弦圖的關鍵是在一正方形內做一內接正方形，使其四角所餘三角形都與給定的直角三角形相等。可惜的是，在泥版裡找不到任何類似的圖形，然而泥版 BM 15285（如圖 4）上可以看到轉成 45° 的內接正方形。一旦畫出這種圖形，就有許多方法可用於證明畢氏法則。霍伊魯普仔細分析泥版 Db_2 146 的語句之後，在書中畫出了一個類似弦圖的圖示（參見該書第 259 頁，圖 67）。圖 5 是我最偏愛的一個版本，其中 A, B, C 表示四個角落的白色三角形的三邊。

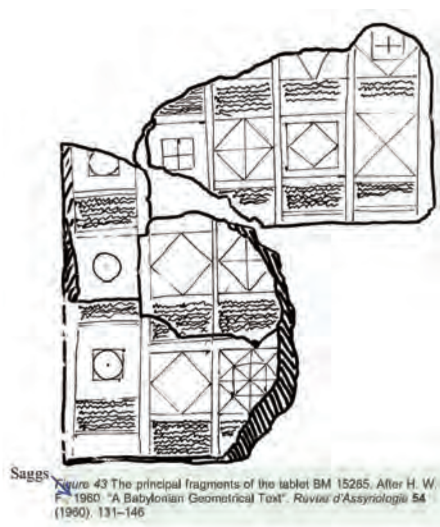

圖 4：一幅巴比倫泥板 BM 15285 的圖畫，充滿了許多基本的幾何圖形。

❶ 譯註：Db_2 146 是發掘編號，它的收藏編號是 IM 67118。它的數學問題是已知矩形面積和對角線長，求矩形的長、寬。

埃及

這樣的猜測似乎有過度推論的嫌疑，但既然史柯恩 MS 3049 確切表明巴比倫人知道畢氏法則，我認為我們必須思考其可能性。然而其他文明是否也獨立發現了畢氏法則？未必見得。若我們同意畢氏定理及其相關幾何對於徵稅和營建非常有用，它的知識自然會傳播到與美索不達米亞有貿易關係的鄰近文明。任何地方都需要建築匠師和測量員，有些人可能會移居他鄉。埃及和印度河文明的興盛與巴比倫大致同時，他們可能從巴比倫學得了最新的技術。遺憾的是，兩者的遺留物都遠比兩河流域稀少，我們難以從中推論出他們知道什麼。在埃及，所謂的「蠍王槌頭」（Scorpion Macehead）年代大約在公元前 3000 年左右，上面顯示著法老站在氾濫之後的尼羅河邊播種。為土地重新定界的是「張繩者」（rope stretcher），從當時的繪畫可看到，打上結的繩索是他們的主要工具。一般相信他們使用邊長 3-4-5 的三角形定出直角，以供工程之用。但現有的唯一證據是柏林紙草書 6619 的第一個問題，其中涉及解方程組 $x^2+y^2=100$，$y/x=3/4$。根據伊姆豪森（Annette Imhausen）最近的一篇文章〈埃及數學史學的傳統與迷思〉（Annette Imhausen,“*Traditions and myths in the historiography of Egyptian mathematics*”, Oxford Handbook of History of Mathematics, p.791），就現存的數學紙草書來判斷，難以認定埃及人知道一般的畢氏法則。而且，吉薩大金字塔（Great Pyramid of Giza）之類的建築物早在上述泥版出現之前 800 年就已建造。我的猜測是：在古王國時期，埃及人用繩索做出各邊相等且對角線相等的四邊形，藉此以構造出正方形。在中王國時期，用有結繩索以 $3,4,5$ 的比例來構造直角三角形的方法，可能已從巴比倫傳入，但其理論背景則可能未傳入。

印度河流域

至於印度河文明，現存有 3700 份銘文，其中包括大約 400 個文字符號，但因為這些文字仍無法解讀，所以於事無補。然而蘇美文獻中提到他們與東方一個叫「美魯哈」（Meluhha）的地方有貿易往來，一般認為美魯哈就在印度河流域，而且在印度河流域和美索不達米亞發現了完全相同的黏土印章。印度河都市的街道規劃非常規整，顯示他們需要很好的測量技術（各種田地也是需要的）。然而，讓完整畢氏法則由外傳入的說法更為可信的，是因為畢氏定理在印度吠陀時期，明確的出現在《包達耶那繩法經》（*Sulba Sutra of Baudhayana*，一般定年在公元前 800 年）。在此，畢氏法則不是用於土地、街道或建築的放樣，而是用於砌造供奉犧牲的火祭祭壇。一般認為，西北印度的吠陀入侵者在印度河文明的晚期佔據了印度河流域，然後向東擴散。他們如何與當地居民互動或通婚，以及他們從原住居民那裡學到了什麼，一直有很大的爭議。先且不論你在這些敏感議題的立場如何，令人驚訝的是，我們不只在吠陀經文中發現畢氏法則，而且還有運用繩索的幾何作圖，就像美索不達米亞、埃及（可能還包括印度河文明）所使用的那樣：請參考圖 6，若將繩法經與討論美索不達米亞泥版幾何的書對照來看，兩者的相似程度令人吃

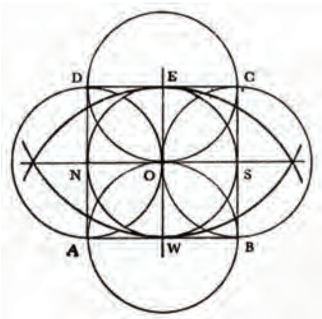

圖 6：一幅在建造吠陀火祭壇之前，根據包達耶那繩法經的處方透過繩索繪製的圓圈圖。

驚。你或許會納悶，吠陀信徒為何會那麼在意面積？有一個很簡單的儀式理由：如果獻祭沒有達到目的，儀式必須重做一次，而且祭壇面積要以 $(n+1)/n$ 的規則加大。若使用畢氏法則，這很容易用繩索辦到。我們也在稍後的孔雀王朝時期，發現了如何運用的詳細描述。總而言之，可以合理推測，大量的數學由印度河流域的民族傳遞給了吠陀印度人。

中國

那麼中國呢？中國數學史的一個關鍵問題是，數學與數學家在中國文化中的地位一向不重要。數學是低階官員的工具，在許多朝代裡，數學甚至不是科舉考試的科目。天文學與占星術倒還擁有較高的地位，但在儒家理想下，這些都比不上詩歌文章。歷經秦朝的焚書坑儒後，漢朝學者能夠重建許多先秦的朝代史和儒家典籍，至於數學，則只留下它的最終狀態，而沒有歷史源流。儘管如此，畢氏法則在他們的重構下浮現出完整面貌。在漢朝的重要數學文獻《九章算術》中，畢氏法則佔了一整章。使用弦圖的畢氏定理證明則以略顯含糊的形式，出現在戰國流傳下來的《周髀算經》裡。

是否畢氏法則、以及用高斯消去法和負數來解線性方程組，都是在漢朝的創造活動大爆發時被發現的？遠在秦漢之前，中國文化擴展和建立先進的社會已逾千年之久，具備有成熟的政府組織和土木工程等。孔子以及如墨子之類具科學傾向的哲學家，出現在此之前約 300 年。雖然我們沒有直接證據，但比較合理的推測是，畢氏法則是在周朝的某個時間被發現的（周朝是自公元前 1046 至 256 年，分為西周和東周，東周又分為春秋和戰國兩時期）。此外，畢氏法則也不太可能會在這些早期階段從中東傳入。中國文化有其獨特的書寫系統和奠基神話。在我來看，最有可能的是，某位不知名的天才在西周早期發現了這個法則。

猜測到此為止。我的中心論點是：首先，早期數學是應用數學，深深結合到日常事務，尤其是會計和測量裡。其次，這些領域的演算法不但可由發現者向外傳播，也可以藉由實際操作者（官員、書吏、建築匠師等）散播到其他文化。但是第三，對於其中一些專家，他們發現的數學有了自己的生命。他們把事物推到更深刻的層次，他們的發現像是畢氏法則，應該被視為如同金屬和輪子之類的重大發明。我認為將這些人稱為數學家並非時空錯亂，而且我相信，當他們得到新發現時，他們的感受會與我們現在的數學家並無二致。∞

本文出處

http://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2015/Pythagoras.html。
本刊特別感謝作者授權刊登。

譯者簡介

趙學信，網站工程師。兼事翻譯、寫作。

延伸閱讀

▶ Mumford, David, Blog。http://www.dam.brown.edu/people/mumfolrd/blog.html 此部落格中有許多數學相關文章。
▶ Maor, Eli"*The Pythagorean Theorem, A 4000-Year History*"（2007）Princeton University Press。這是著名數普作家毛爾所寫的《畢氏定理 4000 年》，此書獲選美國數學協會（MAA）2007 年最佳專業 / 數學書籍獎。
▶ Anderson, M, Katz, V., and Wilson, R."*Shelock Holmes in Babylon: And Other Tales of Mathematical History (Spectrum)*"（2007）MAA。本書中收錄了巴克（Creichoton Buck）的一篇文章〈福爾摩斯在巴比倫〉也有對於史柯恩 MS 3049 泥板的探討。