將物理應用於數學

作者：時枝正（Tadashi Tokieda） 譯者：江孟蓉

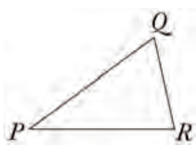
作者簡介：時枝正在日本長大，最初是一位畫家，後來在法國成為古典語文學者。然後轉行從事數學研究，再換到物理領域。他現在是史丹福大學的數學教授，之前曾以英國劍橋大學為根據地工作多年。他積極參與在開發中國家的教育推廣，尤其是透過非洲數學科學研究院（African Institute for Mathematical Sciences，AIMS）。

有時候數學定理是這樣湧現的：設定一個物理情境，從物理學的經驗來看會發生什麼現象，把它翻成數學語言，就成為一個定理。本文展示四個初階的例子：三角形的餘弦定律、正弦定律、柯西／史瓦茲不等式、算數幾何平均不等式。

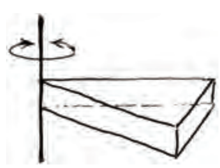
一般人的物理比數學好。當蘋果從樹上掉下來，可以接到它的人，也就是知道物理上蘋果如何運動的人，比能用微分方程算出它運動軌跡的人，要來得多。因此，利用物理來做數學是很自然的，然而在科學的歷史上，除了阿基米德 [1]，一些蘇俄古文獻 [4]，李維最近的書 [2]，以及筆者的一些文章和演講之外，罕有這類嘗試。

餘弦定律

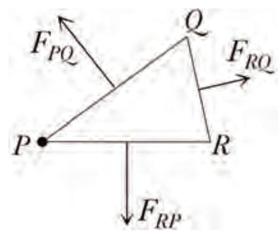
$$PQ^2 = RP^2 + RQ^2 - 2RP \cdot RQ \cos R$$



用這個三角形作底，製造一個高 h 的封閉盒子，將 P 點連結在垂直軸上，假設盒子可以繞軸旋轉，沒有摩擦力。



現在來看物理：把這個盒子灌滿壓力為 p 的氣體，氣體會對每一個面施壓，但是頂面跟底面的壓力會相互抵消，畢竟這個盒子並沒有上下移動的自由度，所以我們只考慮側面的水平方向壓力。



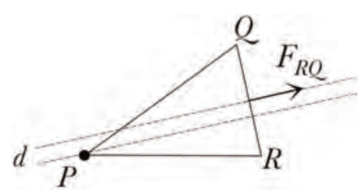
在每個面上的壓力分佈，可以由該面中心點上的單一作用力來表示。在圖中，作用力 F_{PQ} 會讓盒子以 P 點為中心逆時針旋轉，而 F_{RP} 和 F_{RQ} 一起讓它順時針旋轉。但是，因為永動機不可能存在，灌滿氣體並不會讓盒子旋轉。所以環繞 P 點的力矩必須平衡。

$$F_{PQ} \text{ 的力矩} = F_{RP} \text{ 的力矩} + F_{RQ} \text{ 的力矩}$$

其中兩項顯而易見：

$$\frac{PQ}{2} \times F_{PQ} = \frac{RP}{2} \times F_{RP} + F_{RQ} \text{ 的力矩}$$

F_{RQ} 力矩的力臂，也就是從 P 點到 F_{RQ} 力的作用線的距離，是 $d = \frac{RQ}{2} - RP \cos R$



因此

$$\frac{PQ}{2}\times F_{PQ}=\frac{RP}{2}\times F_{RP}+\left(\frac{RQ}{2}-RP\cos R\right)\times F_{RQ}$$

F_{PQ} 以壓力 p 作用在 PQh 側面上，所以 $F_{PQ}=PQhp$，其他兩項也類似。消掉共同因式 $\frac{hp}{2}$，可發現

$$PQ^2=RP^2+(RQ-2RP\cos R)RQ$$

〔在李維的書中，做了直角三角形的特例，重現了畢氏定理 [2]。其實將它推廣到餘弦定律很容易，但似乎從來沒有出現在文獻中。〕

正弦定律

同一個三角形的圖，$\frac{\sin P}{QR}=\frac{\sin Q}{RP}=\frac{\sin R}{PQ}$。一個古老的悖論可以推得其物理證明。


DE
WEEGHDAET
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
CIↃ. IↃ. LXXXVI.

這是史帝文的書中扉頁 [3]。左斜邊比右斜邊承載更多的珠子，但是掛在三角形上面的這個鍊子，並不會自發開始旋繞。

這個悖論的解釋是，平衡並非靠重量本身，而是靠其沿著斜邊的分量來達成。左邊朝下的重量跟 PQ 成比例，所以斜邊的分量跟 $PQ\sin P$ 成比例，同樣的道理，右斜邊的重量分量跟 $QR\sin R$ 成比例。將平衡寫成等式，可發現

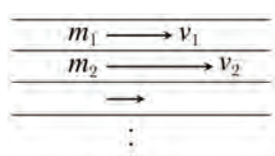
$$PQ\sin P=QR\sin R$$

等等。

〔雖然名稱似乎是對比的，但從牽涉到的物理可以看出，正弦定律比餘弦定律要淺得多。〕

柯西 / 史瓦茲（Cauchy-Schwarz）不等式

前面看了一對經典等式，接下來用物理來看兩個著名不等式。



想像一疊質量 $m_1,m_2,...$ 的層板，以速度 $v_1,v_2,...$ 相互平行摩擦移動。假設這些層板夠大，不必擔心它們的邊緣，或是彼此會失去接觸。經過一段時間之後，它們最終會達到（更精確地說是漸近於）相同的移動速度 $\langle v\rangle$。由於摩擦發生在系統內部，總動量守恆，所以

$$\sum_i m_i v_i = \Big(\sum_i m_i\Big)\langle v\rangle$$

但摩擦也造成總動能耗散：後來的動能值會小於先前的。

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \geqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_i m_i\Big)\langle v\rangle^2$$

將前式的 $\langle v\rangle$ 值代入， 重新整理可以得到

$$\sum_i m_i \sum_i m_i v_i^2 \geqslant \Big(\sum_i m_i v_i\Big)^2$$

變換變數 $m \to m^2,\ v \to \dfrac{v}{m}$。結果為

$$\sum_i m_i^2 \sum_i v_i^2 \geqslant \Big(\sum_i m_i v_i\Big)^2$$

讀者可能會反對，認為這個物理詮釋中，質量是正的，而柯西 / 史瓦茲不等式中，$m_1, m_2, \ldots$ 可正可負。這沒有關係：因為 $m_i \to -m_i$ 相當於 $v_i \to -v_i$，即是反轉第 i 個層板移動的方向。反向移動的話，不等式的左邊是不變的，而右邊的 $m_i v_i$ 項會變號。

等式成立的情形又如何呢？在物理上，這個不等式要退化成等式，只有在沒有動能耗散，所有層板一開始就以同樣的速度 $v_1 = v_2 = \cdots$ 移動的情況下，才會發生。以新的變數來看，這就是說

$$\frac{v_1}{m_1} = \frac{v_2}{m_2} = \cdots$$

m 的向量和 v 的向量平行。

〔這個不等式跟二次型有關。物理學最典型的二次型是動能，當然不等式代表失去動能。一旦領悟這點，論證便自然成型。〕

算數幾何平均不等式

我們復習一個簡單的事實做初步準備。假設有質量 $m_1, m_2, \ldots$ 的物體，由相同材質製成，尤其是有相同的比熱 c。比熱的定義是：單位質量的材質溫度升高一度所需要的熱，單位為 $\mathrm{J/(kg \cdot K)}$。容易加溫或降溫的材質比熱小，抗增溫降溫的材質比熱大。記

$$p_i = \frac{m_i}{M}, \quad M = \sum_i m_i$$

所有的 p_i 都滿足 $0 \leqslant p_i \leqslant 1$，而 $\sum_i p_i = 1$，並且第 i 個物體的熱容量（比熱乘質量）是 $cm_i = cMp_i$。大自然告訴我們，如果這些初始溫度為 $T_1, T_2, \ldots$ 的物體彼此有熱接觸，則最終會達到（漸近於）相同的溫度

$$\langle T\rangle = \sum_i p_i T_i$$

現在來看不等式的物理。當第 i 個物體溫度變化了 ΔT_i，它所接收到的熱就是 $cMp_i\Delta T_i$，而它熵的變化會是

$$\Delta S_i = \frac{cMp_i\Delta T_i}{T_i} = cMp_i \Delta \log T_i$$

第一個等號是熵的定義，接收到的熱除以絕對溫

度。根據以上事實，這個過程從開始到結束，最後的溫度會是 $\langle T\rangle$，並且

$$
\begin{aligned}
&S_i^{\text{結束}} - S_i^{\text{開始}} = cM(p_i \log\langle T\rangle - p_i \log T_i)\\
&\sum_i S_i^{\text{結束}} - \sum_i S_i^{\text{開始}}\\
&\qquad = cM\Big(\sum_i p_i \log\langle T\rangle - \sum_i \log T_i^{p_i}\Big)\\
&\qquad = cM\Big(\log\langle T\rangle - \log\prod_i T_i^{p_i}\Big)
\end{aligned}
$$

熱力學第二定律說，系統的總熵增加：等號左邊要是正的。因此

$$p_1T_1 + p_2T_2 + \cdots \geqslant T_1^{p_2} \times T_2^{p_2} \times \cdots$$

等式出現在所有的初始溫度都相等時

$$T_1 = T_2 = \cdots$$

〔此論述是與史丹福的研究生葛拉罕（Cole Graham）合作發現的。〕

從給定的敘述，一路追溯到哲美羅 / 弗朗克爾（Zermelo-Fraenkel）集合論的公理，使用天衣無縫的邏輯來做證明，難道不是數學上的正式教義嗎？這的確是證明具有的一個形象。然而，某些人相信做數學的目的是變得更聰明，同時降低蒙蔽自己的風險。這個目的，可以由多姿多樣且並不互斥的途徑及表達風格來實現。上述的證明形象只是其中一種。我們可以探索許多其他可能。∞

參考文獻

[1] Ἀρχιμήδης. *περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*. 公元前3世紀。
[2] M. Levi. *Mathematical Mechanic*. Princeton University Press, 2007.
[3] S. Stevin. *De Weeghdaet*. 1586.
[4] B. A. Успенский. *Некоторые Приложения Механики к Математике*. изд. Физико-Математической Литературы, 1958.

本文出處

本文是時枝教授在 ICCM 思廉講座的講稿。本刊感謝時枝教授同意翻譯刊登。

譯者簡介

江孟蓉為成功大學數學系副教授。

延伸閱讀

▶ Tadashi Tokieda, Roll Models, *American Mathematical Monthly*, 120(3) (2013), 265–282。這是時枝教授通過「滾動問題」案例研究進行數學建模的文章。

▶ 讀者可在 YouTube 網站搜尋「Tadashi Tokieda」或「時枝正」，有許多時枝教授的科普演講影片可觀賞。