DOI:10.6851/MSHCM.201907_(16).0004

數

關於數學中的類比

一封威伊 1940 年的家書

作者：安德烈 ・ 威伊（André Weil） 英譯者：克雷格（Martin Krieger） 譯者：趙學信

作者簡介：安德烈 ・ 威伊（1906 ～ 1981）是一位在 20 世紀有影響力的數學家，以其在數論與代數幾何基礎性的研究工作而著名。他在 1979 年獲頒沃爾夫獎，1980 年京都獎。他是布巴基社群（Bourbaki group）的創始成員，也是早期的實質領導者。著名的哲學家西蒙娜 ・ 威伊（Simone Weil）是他的妹妹。

家書背景簡述

當 1939 年第二次世界大戰爆發時，安德烈 ・ 威伊在芬蘭旅遊時，因涉嫌為蘇聯從事間諜活動而被捕，後來經芬蘭友人的斡旋與協助，輾轉由瑞典經轉丹麥和英國，於 1940 年 1 月回到法國，卻被以逃避兵役的罪名被關到法國盧昂（Rouen）的軍事監獄（Bonne-Nouvelle Prison），最後受審被判服役釋放。在獄中的三個月（2 月～ 5 月）期間，他證明了有限域上曲線的黎曼 ζ 函數猜想（Riemann Hypothesis），還給親人朋友寫了許多信。本文是他寫給妹妹西蒙娜 ・ 威伊的其中一封信，信中闡述了他對數學的獨特看法，指出了以數論語言論述的句子可以翻譯成幾何語言 —— 黎曼面（Riemann surface），反之亦然。揭示了兩個看似不相干的科目之間出人意表的連繫。這也是安德烈 ・ 威伊對羅賽塔石碑的主要關點。

1956 年時期的安德烈 ・ 威伊。（MFO，Konrad Jacobs）

1941 年時年 32 歲在馬賽的西蒙娜 ・ 威伊。（維基）

20 世紀初的盧昂監獄。（維基，Jean Pierre Machain）

1940 年 3 月 26 日

妳先前曾在一封信裡問我，我對研究中感興趣的是什麼，正巧關於我的算術代數工作，最近我得到了些想法，或許可以回答妳的問題。我決定冒著大部分對妳來說都是難以理解的風險把這些想法寫下來。

接下來的思維分成兩類。第一類是關於數論的歷史，妳可能會瞭解它的開頭，但接下來的妳就完全不懂了。另一類是關於類比在數學發現中所扮演的角色，我會檢視一個特例，或許妳也會從中獲益。我得先提醒，以下關於數學史的部分根據的是不夠充分的學術研究，大部分是**先驗的**重構，而且即使歷史應該如此發生（未經證實），我也不能說它們就是如此發展的。而且數學就像其他領域，歷史的發展軌跡時有轉折。

說完這些警語之後，讓我們先從數論的歷史開始吧。數論史是由互反律（law of reciprocity）所主宰的。它是高斯的黃金定理（theorema aureum）（？關於這點我需要複習一下我的記憶：高斯很喜歡這類名稱，他還有一個絕妙定理（theorema egregium），我已經不確定哪個是哪個了），高斯在 1801 年的《算術研究》發表這個定理，但到 1820 年才開始被阿貝爾（Niels Abel）、雅可比（Carl Jacobi）和狄利克雷（Lejeune Dirichlet）所研讀和理解，它作為數論學家的聖經幾乎達百年之久。在此之前，歐拉（Leonhard Euler）和勒讓德（Adrien-Marie Legendre）已經知道了互反律的命題（歐拉和勒讓德都是從經驗發現它的；勒讓德在他的算術著作 ❶ 中給出證明，所以貢獻要大些，但他的證明顯然假定了某事為真，而它幾乎和互反律一樣難證明。即使如此，勒讓德仍苛刻地抱怨高斯「偷竊」；其實高斯並不知道勒讓德的研究，他也是從經驗發現這定理的，並且在《算術研究》裡給出兩個非常優美的證明，後來又給出另外四、五個，全都是根據不同的原理。）：為了說明互反律是什麼，我們有必要回顧一下。

代數一開始的任務是：給定一個方程，找出它在指定域中的解，這些域可以是正數，可以是實數，後來還可以是複數。人們那時還沒想到可以先從方程開始，然後特別為它打造出一個有解的域——這個巧妙的想法是現代代數的特徵。（關於這個成果極為豐碩的想法，我有很多可以說。而且關於根式解，龐卡赫〔Henri Poincaré〕曾在某處提到過一個很好的想法，但是就一般過程而言，在傳統的程序徒勞無功之後，數學家倒轉了問題，改而發展適當的方法。）起先，對於所有有負數解的二次方程，問題解決了。當方程無解時，二次方程的公式解會導致虛數的概念，對此當時有許多疑慮（這情形一直延續到高斯的時代）。正因為對這些虛數有所懷疑，三次方程根式解的所謂卡達諾和塔塔利亞公式（Cardan and Tartaglia formula）造成了一些不安。儘管如此，當高斯在《研究》裡，以同餘的觀念為起點，建構他的系統論述時，在解決一次同餘後，很自然會去解二次同餘；（同餘是整數 a、b、m 之間的一種關係，寫成 $a \equiv b$ 模（modulo） m，可簡記成 $a \equiv b \pmod{m}$ 或 $a \equiv b(m)$，意思是 a 和 b

❶ 譯註：英譯把 Arithmetic 當書名，但勒讓德並沒有著作叫這名字。他的不完整證明首先出現在論文 “Recherches d'analyse indéterminée”，1785，科學院院刊。後來又有改良但仍有瑕疵的版本收入《數論》（*Théorie des nombres*）第一版，第二版用了高斯的證明。

除以 m 後有相同的餘數，或說 $a-b$ 是 m 的倍數；一次同餘是 $ax+b\equiv 0(m)$，二次同餘是 $ax^2+bx+c\equiv 0(m)$，其餘類推。）後者可推導到 $x^2\equiv a \pmod m$（與一般二次方程求根的步驟相同），如果後者有解，我們把 a 稱為 m 的二次剩餘，若無解則 a 稱為非二次剩餘（1 和 −1 是 5 的二次剩餘，2 和 −2 是非二次剩餘）。如果這些觀念在高斯之前已存在多時，它們也不見得必定與同餘聯繫在一起；它們是以「丟番圖」問題（求方程式的整數或有理數解）的形式呈現，而這就是費馬最重要的研究對象。一次丟番圖方程 $ax+by=c$ 等價於一次同餘式 $ax\equiv c \pmod b$；費馬所研究的二次方程類型（分解成平方和 $x^2+y^2=a$，以及方程 $x^2+ay^2=b$ 等）並不等價於同餘式，但是同餘式以及區分剩餘或非剩餘，在他的研究中扮演了重要角色，即使事實上它們並沒有明白出現在他的著作裡（雖然我們沒見到他的證明，但大致可推論他是運用了別的原理）。然而就我所知（根據二手證據）這些觀念在歐拉的著作裡就很明顯了。

互反律讓我們知道，給定兩個質數 p、q，若已知

(a) p 是或不是 q 的（二次）剩餘；

(b) 若 p、q 模 4 分別同餘於 1 或 −1（或者若 $q=2$，p 模 8 同餘於 1、3、5 或 7），我們就知道 q 是否為 p 的剩餘。

例如，$53\equiv 5\equiv 1 \pmod 4$，且 53 不是 5 的剩餘，所以 5 也不是 53 的剩餘。因為非質數的問題很自然可導成質數問題，一旦知道 p、q 的質因數分解，互反律讓我們可以很容易判定 a 是否為 b 的剩餘。但這項「實際」應用無關緊要，真正重要的是當中有規律。m 的剩餘顯然形成一個公差為 m 的等差數列，因為若 a 是剩餘，所有的 $mx+a$ 也都是剩餘。一個優美且令人驚訝的結果是：有著 m 是其剩餘的質數 p 正好都會落在某個公差為 $4m$ 的等差數列；至於其他質數，則 m 是非剩餘。更奇妙的是，

BOX

二次互反律（Quadratic Reciprocity Law）

如果 p 是 q 的二次剩餘（$x^2\equiv p \pmod q$ 有解），勒讓德定義符號 $(\frac{p}{q})$ 值為 1，否則為 −1。二次互反律即是：對奇質數 p、q，

(i) $(\frac{p}{q})(\frac{q}{p})=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}$；
也就是說，如果 $p\equiv 1 \pmod 4$ 或 $q\equiv 1 \pmod 4$，則 p 與 q 同時互為對方的二次剩餘或非二次剩餘；否則，如果 $p\equiv q\equiv -1 \pmod 4$，則必有一方是二次剩餘，另一方是非二次剩餘。

(ii) $(\frac{-1}{p})=(-1)^{(p-1)/2}$；
$p-1$ 是 p 的二次剩餘若且唯若 $p\equiv 1 \pmod 4$。

(iii) $(\frac{2}{p})=(-1)^{(p^2-1)/8}$；
因為 $1^2\equiv p \pmod 2$，p 必為 2 的二次剩餘，所以重點在 2 是否為 p 的二次剩餘，$p\equiv 1,7 \pmod 8$ 時就是，$p\equiv 3,5 \pmod 8$ 就不是。

試回想任何給定等差數列 $Ax+B$ 的質數分布（根據狄利克雷，若 A、B 互質，則此數列有無窮多個質數），除了一條統計定律（給定一個 A，則 $\leq T$ 的質數個數，大約等於與 A 互質的 B 的個數）之外，並未遵守任何已知的法則，而且如果我們具體檢驗數值，每個實例看來都像是由輪盤產生出來的「隨機」清單。

除此之外，《算術研究》的重要成果還有：

1. 二元二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 的決定性理論得到的**其他結果之外**，還給出問題的完整解析從而產生了下列理論：判別 $ax^2+bxy+cy^2=m$ 是否有整數解。
2. 研究 n 次單位根（roots of unity），以及現在所謂的**由單位根形成的**體及其子體的迦羅瓦理論（Galois theory）（不使用虛數，也不用三角函數以外的任何函數，最後給出的是以直尺和圓規作出正 n 邊形的充分必要條件），它是書中先前結果的應用，並做為解在模 m 乘法群上的同餘問題的預備知識。我不會談到多於兩個變數的二次型理論，因為迄今為止，它對數論的整體發展影響甚微。

高斯接著研究三次和雙二次剩餘（定義為 $x^3 \equiv a$ 和 $x^4 \equiv a \pmod{m}$），後者稍微簡單一些。高斯體認到，若只侷限在一般整數域裡，不太可能得到簡潔的結果，所以有必要使用「複」整數 $a+b\sqrt{-1}$（高斯和阿爾龔〔Jean-Robert Argand〕大約同時間發明了把複數表示為平面上的點的方法，藉此消除對「虛數」的疑慮）。至於三次剩餘，則需藉助形如 $a+bj$ 的「整數」（a 跟 b 為整數，j 是三次單位根）。高斯同樣體認到、甚至已考慮（在他的筆記中有線索表明）去研究 n 次單位根的域，同時還思考如何證明「費馬定理」（$x^n+y^n=z^n$ 沒有整數解），他猜測費馬定理應該只是這理論的簡單應用（這是他說的）。但是後來他發現，不會有唯一的質數分解（除了 i 和 j 分別為四次和三次單位根，而我相信五次單位根也是）。

這裡有許多不同的絲線糾纏在一起；數學家花了 125 年的時間把它們解開，然後再重新捻成一束。其中的重要人物包括狄利克雷（他把 ζ 函數或 L 函數引入到二次型理論，藉此證明了每個等差數列都包含了無窮多個質數，以及其他一些定理；但最重要的是，自此之後我們只要沿用他的模型，即可將這些函數應用到數論上）、庫默爾（Ernst Kummer）（他發明了「理想」〔ideal〕因子，藉以闡釋由單位根所生成的體，並且大幅推進這些體的理論，從而獲得關於費馬定理的一些結果）、戴德金（Richard Dedekind）、克羅涅可（Leopold Kronecker）、希爾伯特（David Hilbert），以及亞丁（Emil Artin）。以下簡單描繪他們所得到的成果。

開始之前，我必須先談一下體（field）的概念。假如我們只看定義，體很簡單（它是一個集合，其元素可以做一般的「四則運算」，這些運算符合交換律、結合律、分配律等一般性質）；體 k 的代數擴張（包含 k 的體 k'，它的所有元素是代數方程

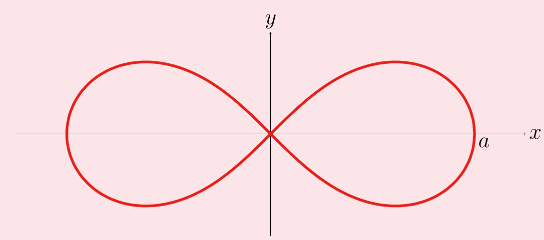
$$\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\alpha + c_n = 0$$

的根，式中的係數 $c_1, \ldots, c_n$ 是 k 的元素）；最後是體 k 的阿貝爾擴張（abelian extension），它是 k 的代數擴張，且其迦羅瓦群是阿貝爾的，亦即可交

換的。要在此給出阿貝爾擴張的完整解釋是不切實際的，比較有用的說法是，阿貝爾擴張幾乎等於，但不完全相同，將 k 添加 n 次根（方程 $x^n = a$，$a \in k$ 的根）所得到的擴張；如果 k 包含任何整數 n、1 的 n 個互異的 n 次單位根，那兩者就完全相同了（但我們感興趣的體，通常並不具備這種性質）。如果 k 包含了（任何 n 的）n 個 n 次單位根，那麼所有的 n 次阿貝爾擴張（由將 k 添加一個 n 次方程的根而生成）都可由 m 次根生成（m 是 n 的因數）。阿貝爾在研究方程是否有根式解時，發現了這個想法（阿貝爾並不知道迦羅瓦群的觀念，否則可以釐清這一切問題）。我們不可能指出阿貝爾的研究之中有多大程度受益於高斯（前面提到的）關於圓的等分和 n 次單位根的結果（這可以導到有理數體的阿貝爾擴張），同樣也不可能知道這兩者與拉格朗日的工作之間的聯繫，它們與阿貝爾自己的橢圓函數（從阿貝爾的觀點來看，是從阿貝爾方程〔其根生成了阿貝爾擴張〕分支出來的；高斯已經知道這些結果，至少知道稱為雙扭線（lemniscate）的特例，但他生前未發表）和阿貝爾函數的工作，或是與雅可比同一主題的工作（也正是這位雅可比發明了現代意義的「阿貝爾函數」並予以命名，參見他的論文“*De transcendentibus quibusdam abelianis*”❷），或是與迦羅瓦的工作的聯繫（他的理論在很晚之後才逐漸被理解。雖然〔這點最匪夷所思〕黎曼的好友戴德金當時在哥廷根擔任無薪俸講師從 1855 或 1856 年起開授抽象群和迦羅瓦理論的課，而且當時黎曼的數學能力正值顛峰，但卻沒有跡象顯示黎曼知道迦羅瓦的理論）。

BOX

白努利的雙紐線（Bernoulli's lemniscate）



雙扭線，或稱白努利的雙紐線，狀似無限大記號 ∞，首見於白努利（Jacob Bernoulli）在 1694 年發表在《*Acta Eruditorum*》的文章，他稱此線為蹄系（lemniscus，腦幹中的次級神經纖維束，拉丁語意為墜飾帶）。方程式為：

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

高斯與歐拉計算雙扭線的弧長，

$$L = 2\sqrt{2}a\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

進而衍生出橢圓積分與橢圓函數（雙週期函數）的研究。

要知道（非 p 倍數的）a 是否是質數 p 的剩餘，即是要知道 $x^2 - a = py$ 是否有解。在轉換到 $\sqrt{a}$ 的擴張體時，我們得到 $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = py$，所以在這個體中，雖然 p 不能整除 $x-\sqrt{a}$ 但卻不互質。若用理想（ideals）的語言，等於是說 p 在這個體裡不但不是質數，還可以分解成兩個質理想

❷ 編註：完整的標題應為 C.G.J. Jacobi，“Considerationes generales de transcendentibus Abelianis”，*Journal für die reine und angewandte Mathematik* 9 (1832)，pp. 394-403。

因子（prime ideal factors）。在此我們面臨了一個問題：k 是一個體（在此是有理數體），k' 是 k 的代數擴張（在此是由 k 添加 $\sqrt{a}$ 而成），我們怎麼知道一個在 k 中的質理想（在此是質數），在 k' 中是否仍是質數？或是可以分解成質理想？且如何分解？給定一個 a，互反律指向那些以 a 為剩餘的 p，於是解決了這個特例。在此及之後的文中，k、k' 等都是代數數（以有理數為係數的代數方程的根）體。

當它是雙二次剩餘的問題時，我們處理的是由 $\sqrt[4]{a}$ 所生成的體；但這樣的體一般來說並非是「基體」（base field）k 的阿貝爾擴張，除非在添加 a 的一個四次根時，同時也添加另外三個（亦即，若 α 是其中之一，另三個則是 $-\alpha$、$i\alpha$ 和 $-i\alpha$），這需要 k 包含 $i=\sqrt{-1}$。如果我們以有理數為基體，事情就不會這麼簡單，但如果（像高斯一樣）取「複有理數」$r+si$（r、s 為有理數）的體，則一切會很順利。三次剩餘的情形也相同。在這些情況下，我們研究一個 k 中的質理想（在此是質數）分解，可在一個從包含 i（或 j）的基體 k 開始加入四次（或三次）根得到的體 k' 上研究。

好吧，在 k' 中分解 k 的理想的問題，當 k' 是 k 的阿貝爾擴張時，可以完全解決，而且其方法非常簡單，它以很直接的方式推廣了互反律。對於以 a 為剩餘的質數所在的等差數列，我們把它換成理想類，其定義相當簡單。戴德金即已體認到，高斯所研究的二元二次型的類，對應到這些理想類的一個特例。狄利克雷研究二次型的分析方法（使用 ζ 或 L 函數）很容易就可以轉為更一般的理想類，也就是這個理論所研究的。例如，等差級數定理可以對應到下列結果：對於 k 的這些理想類，每一個都有無窮多個質理想，所以 k 中有無窮多個理想，可以在 k' 中以某種方式做因數分解。最後，將 k 中的理想分解成類的方式，唯一決定了 k'。而且，藉由被稱為亞丁互反律（law of Artin reciprocity）的定理（因為它蘊含了高斯互反律及所有已知的推廣），k' 關於 k 的迦羅瓦群，以及 k 中的理想類「群」，有一個對應（嚴格來說是「同構」〔isomorphism〕）關係。因此，一旦知道在 k 中發生什麼，我們就完全知道 k 的阿貝爾擴張。這並不表示我們已知道阿貝爾擴張的一切。（舉例來說，如果 k 是有理數體，我們可以用數字 $e^{2\pi i/n}$ 來生成它們，這是用指數函數；如果 k 是由 $\sqrt{-a}$（a 是正整數）生成的體，我們就知道如何用橢圓函數或其相關函數來生成這些擴張。但我們對其他所有 k 一無所知。）不過這些問題都已被充分理解，而且我們可以說，自高斯迄今，在算術裡所做的一切都涵括在互反律的各種變化之中：以高斯互反律為起始，歷經庫默爾、戴德金、希爾伯特，最終歸結到集大成的亞丁互反律，而且都一樣。這很優美，但也有點惱人。無可置疑的，我們比高斯知道的略多一些，但我們所知道的，也就是（或差不多是）我們所不知道的更多。

這可以解釋為何有一陣子，數學家專注在非阿貝爾（non-abelian）分解律的問題上（指關於 k、k' 的問題，其中 k' 是 k 的任何非阿貝爾擴張，這仍在代數數體的範圍之內）。對此我們所知甚少，而這鮮少的知識是由亞丁發現的。戴德金發現每個體都附隨著一個 ζ 函數；如果 k' 是 k 的擴張，k' 所附隨的 ζ 函數可分解成因子；亞丁找到了分解方法；

當 k' 是 k 的阿貝爾擴張時，這些因子與狄立克雷的 L 函數相同，或者更確切的說是體 k 與 k 中的理想類的推廣延伸。而這些因子與這些函數之間的相等，（換言之）即是亞丁互反律；亞丁在還沒能證明之前，即把這大膽的猜想當成定律，他似乎還因此被藍道（Edmund Landau）嘲笑（有意思的是，亞丁的證明只是簡單轉換了契波塔列夫〔Nikolai Chebotaryov〕剛發表的、用於其他地方的結果，他在論文中引用並致謝。然而真正贏得發現者榮耀的是亞丁，定律也很恰當的以他為名）。換句話說，一個表示亞丁因子（稱為「亞丁 L 函數」）的級數，互反律不過就是用來形成其係數的規律。如果 k' 是一個非阿貝爾擴張，只要依然可分解成因子，則自然而然會發現這些因子對這些「非阿貝爾 L 函數」的係數形成的規律。需要指出的是，如果是阿貝爾擴張，我們已經知道狄立克雷 L 函數是整函數（entire functions），而與其相差無幾的亞丁 L 函數也是整函數。但對一般情形則沒有發現類似的例子：正如亞丁所指出的，這是我們該尋求的攻擊點（請原諒我的譬喻）。既然已知的代數方法似乎都不能用來證明亞丁函數是整函數，我們希望藉由證明它而打開一道進入堡壘的突破口（請原諒這繼續惡化的譬喻）。

既然這開口的防禦很堅強（連亞丁也鎩羽），我們需要盤點一下可用的火砲以及破城工具（再請見諒）[3]。至此，一開頭提到的類比終於登場，就像達爾杜弗到了第三幕方始現身。

[3] 有耐性通篇讀完的讀者，將會看到我運用的火砲包括三語碑文、辭典、不倫、作為樞紐的橋，更別提上帝和魔鬼也在這齣喜劇中演出。

BOX

《偽君子》（*Tartuffe*）

達爾杜弗（Tartuffe）是法國喜劇作家莫里哀（Molière）完成於 1664 年的著名作品《偽君子》劇中主人翁的名字。該劇諷刺當時貴族與教會的偽善、腐敗、墮落，首演後即遭禁演。後來劇名改為《偽善者》（*L'Imposteur*）並改寫結局重演，但仍遭到禁演。直到 1669 年才得以原著重新上演。

達爾杜弗（Eduard Charlemont 繪製，維基）

人們普遍認為單變數的代數函數沒有什麼可做了，因為黎曼發現了我們對它們所知的一切（除了龐卡赫和克萊恩〔Felix Klein〕的統一化，以及赫維茲〔Adolf Hurwitz〕和賽韋利〔Francesco Severi〕在對應上的工作之外），沒有任何跡象顯示單變數的代數函數還會有重大問題。我當然是對這個問題最熟的人之一；主要是因為我有幸（在 1923 年）直接學習自黎曼的論文，它無疑是史上最偉大的數學著作之一，其中字字珠璣。然而，故事並沒有結束；例如，參閱我在劉維爾（Joseph Liouville）的期刊上的論文 ❹（請參考該文的引言）。當然，我沒有蠢到把自己與黎曼相比；但只要能在黎曼之上再添加一點點，即使微小，也可算是希臘人所謂的「做了點什麼」，但即使要做到這一點，還得需要迦羅瓦、龐卡赫和亞丁的暗中協助。

話雖如此，當大約在（1875 年至 1890 年）戴德金創造他在代數數體的理想理論時（見於他著名的「第十一篇補充」〔Supplement XI〕：狄利克雷晚年在哥廷根〔Göttingen〕講數論，戴德金為他精心編輯了四版數論講義；講義的最後有多篇補充，但未註明它們是戴德金的原創作品，而且的確只是部分是原創的，從第二版開始的每一版，對理想理論共有三種完全不同的闡述），他發現到有一個類比的原理容許人們通過純代數的方法建立單變數代數函數理論中被稱為「基本」的主要結果，而這是黎曼透過超越 ❺ 的手段獲得的；他與韋伯（Heinrich Weber）合寫了一篇論文，說明這一原理的結果。在此之前，當談到代數函數時，涉及的是一個單變數 x 的函數 y，由方程式 $P(x,y)=0$ 定義，其中 P 是一個複係數多項式。為了應用黎曼的方法，後面這點是不可或缺的；戴德金的方法則相反，因為其論述都是**純代數**的，這些係數可以來自一個任意的體（稱為「常數體」）。這一點很快就會變得重要。

戴德金展示的類比很容易理解。對於整數，可以用 x 的多項式替代，則整數的可除性對應多項式的可除性（眾所周知，還有其他的類比，有些甚至在高中教過，例如推導最大公約數），有理數對應有理函數，以及代數數對應代數函數。乍看之下，這個類比似乎很膚淺；數論中最深刻的問題（像是分解為質理想），在代數函數中似乎沒有任何對應，反之亦然。希爾伯特進一步研究了這些問題，例如，他看到黎曼 / 羅赫定理（Riemann-Roch）對應戴德金在算術工作上稱為「差」的理想。希爾伯特的見解只是發表在他一篇鮮為人知的論文裡（承奧斯特羅夫斯基〔Alexander Ostrowski〕告知），但它已被口耳相傳，就像他在這個主題的其他想法一樣。現代數學不成文的規定是，一個觀點若不能被精確地陳述，更重要的是還不能被證明，就禁止被寫下來。說實話，若非如此，我們會被比現在期刊上的若非更無用、至少更愚蠢的文章淹沒。但是我們會希望希爾伯特記下了他所有的想法。

讓我們更仔細的研究這個類比。一旦可以將任何特定的證明從一種理論轉化為另一種理論，那麼對於此一目的，類比就失去了創造力。如果我們找到一個有意義且自然的方式來從單一理論推導出這兩種理論，那麼類比就完全沒功用了。從這個意義上

❹ 英譯註：“Généralisation des fonctions abéliennes”，*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*，IX 17 (1938): 47-87，引言在頁 47-49。

❺ 英譯註：transcendental，即分析（analytic）。

BOX

期刊趣聞

威伊信中提到的三本數學期刊，都是非常有名的期刊的俗稱。

1. 科雷厄於 1826 年出版的《純數學與應用數學期刊》（*Journal für reine und angewandte Mathematik*）是世界上目前還在發行中最古老的國際數學期刊，也被稱為《科雷厄期刊》（*Crelle's Journal*）。
2. 第二古老的是劉維爾於 1836 年出版的《純粹與應用數學期刊》（*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*），也被稱為《劉維爾期刊》（*Liouville's Journal*）。
3.《粉紅雜誌》（*Revue Rose*）是指出版於 1863 年的《科學雜誌》（*Revue Scientifique*），因其封面顏色而得稱。

來說，在 1820 年左右的數學家（高斯、阿貝爾、迦羅瓦、雅可比）以痛苦和喜悅的心情，讓自己接受圓分割（高斯問題）和橢圓函數分割之間的類比來引導他們。今天，我們可以很容易證明這兩個問題在阿貝爾方程的理論中都佔有一席之地；我們有阿貝爾擴張理論（我談的是純代數理論，所以在此跟數論無關）。類比消失了：這兩種理論，它們的衝突和美妙的相互反映，他們偷偷的愛撫，他們莫名的爭吵，都消失了；唉，這一切只變成一個理論，雖然宏偉但卻再也不能引發我們的激情。沒有什麼能比這些稍微曖昧的關係更豐富多產；沒有什麼能給予鑑賞家更大的快感，無論他是否參與其中，或者即使他是以歷史學家的身分，帶著一絲憂鬱追溯歷史。快感來自幻影和曖昧不明的意義；一旦幻影消散，獲得知識，人們同時就會興味索然。至少在《薄伽梵歌》（*Bhagavad Gītā*）裡，有大量詩句談論這個題目，每一章節都比前面的更明確。還是回到我們的代數函數吧。

無論是歸因於希爾伯特的傳統亦或是這個主題的魅力，代數函數和數字之間的類比已存在我們這個時代的所有偉大數論學家的心中。阿貝爾擴張和阿貝爾函數，理想類和因子類，有眾多的素材可供誘人的心智遊戲來取用，但其中一些可能是誤導的（例如在一些理論中偶爾會出現 θ 函數）。但要在這方面做出成就，還需要兩個近代的技術發明。一方面，黎曼的代數函數論**基本上**是根據雙有理不變量的概念；例如，如果我們關注在單變數 x 的有理函數體，我們採用對應 x 各種複數值的**點**（一開始我把常數體當作為複數），包含用 $x=\infty$ 象徵性的表示並定義 $1/x=0$ 的無窮遠點，這個點扮演的角色和其他所有點完全相同，此一事實是不可或缺的。令

$R(x)=a(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_m)/(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n)$

是一個有理分式，並如所示將其因式分解；它有零點 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$，與極點 $\beta_1,\ldots,\beta_n$，而且如果 $n>m$ 則 ∞ 點為零點，但如果 $n<m$ 則為無窮大。在有理數的定義域中，人們總是能做質因數分解，$r=p_1\ldots p_m/q_1\ldots q_n$，每個質數對應一個二項式因式 $(x-\alpha)$；但顯然沒有東西對應到無窮遠點。如果人們要在代數論上建立函數論的模型，

如果我們要對這個結果做出明確的陳述，那麼將被迫在證明中給無窮遠點一個特殊角色來排除這個問題：這正是戴德金 / 韋伯所做的，這也正是一直以來，所有寫過有關單變數代數函數的純代數理論作者所做的。直到兩年前，我是第一個 ❻ 給了這個理論的主要定理一個純粹代數的證明（發表在科雷厄〔August Crelle〕期刊 ❼ ），它就像黎曼的證明一樣是雙有理不變的（也就是說，沒有把任何特殊角色賦予任何點）；它的重要性並不僅僅在方法論。不過，在函數體有這些結果固然很好，但似乎人們已經看不到類比了。為了重新建立類比，有必要在代數數論中引入對應於函數論中的無窮遠點。這就是人們在「賦值」（valuations）論中辦到的，而且是以非常令人滿意的方式達成。賦值論並不難，但我不打算在此解釋。它是根據亨澤爾（Kurt Hensel）的 p 進位體論：定義一個（抽象給定的）體中的一個質理想來「同構地」表示在 p 進位體中的這個體：要在實數體或複數體中用相同的方式表示它，（在這個理論中）就是定義一個「無窮遠的質理想」。後者的概念是源自亨澤爾的學生哈塞（Helmut Hasse），也可能是亞丁，或者兩人都是。如果人們循著它所有的推論，那麼理論就能讓我們在許多原本看似有瑕疵的地方重新建立類比：它甚至讓我們發現數體中簡單而基本卻尚未見過的事實（細節見我 1939 年在粉紅雜誌上的文章 ❽ ）。目前為止所用的觀點，主要目的並不在於為阿貝爾擴張理論的主要結果，給出令人滿意的陳述（忘了說，這個理論通常被稱為「類體論」〔class field thoery〕）。重點是，對應一個質理想的 p 進位體，或分別是實數體或複數體，在算術上恰如在一個點附近的展開的冪級數體在函數論中所扮演的角色：這就是為什麼人們稱之為局部體。

所有這一切都讓我們取得了很大的進展；但這還不夠。在任何任意常數體上的代數函數的純代數理論，都還不夠豐富到讓人們可以從中學到有用的知識。在複常數體上的代數函數的「古典」理論（即黎曼）遠遠更為豐富；但一方面它又多到過頭，以至於在大量事實中一些真正的類比就被湮沒了；最重要的是，這與數論相去甚遠。兩者之間如果沒有橋樑，人們就會完全受阻。

恰如上帝必然擊敗魔鬼：這橋是存在；它就是有限常數體上的代數函數體的理論（也就是說，有限多個元素：因為迦羅瓦首先定義它們並研究它們，也被稱為迦羅瓦體，或者更早被稱為「迦羅瓦虛數」〔Galois imaginaries〕；它們是經由數字 $0, 1, 2, \ldots, p-1$ 使用模質數 p 來計算組成具有 p 個元素體上的代數擴張）。它們早已出現在戴德金的作品中。一位在 1914 或 1915 年早逝的哥廷根年輕學生，在他 1919 年出版的論文中（據他的老師藍道說，研究全是他獨力完成的），研究其中某些體的 ζ 函數，並證明可以把代數數論的普通方法應用於之上。亞丁在 1921 或 1922 年從 ζ 函數的角度再次提出了這個問題；在保證 ζ 函數的一個定義是雙有理不變的過程中，施密特（Friedrich Schmidt）

❻ 其實我並不是第一個，意大利學派（以賽韋利為首）的證明，儘管非常迂迴，原則上是相同的，但他們是用古典語言撰寫的。

❼ 英譯註：“Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen”，*Journal für reine und angewandte Mathematik* 179 (1938)，pp. 129-133。

❽ 英譯註：“Sur l’analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques”，*Revue Scientifique* 77 (1939)，pp. 104-106，以及在 *Oeuvres Scientifiques*，卷 1，pp. 542-543 的評註。

在這些結果與戴德金 / 韋伯的結果之間架起了橋樑。在最近幾年，這些體是哈塞和他的學派最喜歡的主題；哈塞做出許多優美的貢獻。

我談到的是橋，但用轉車盤做比喻會更準確些。一方面，數體的類比是如此嚴格和明顯，以至於數論中所有的論證或結果，幾乎都能逐字逐句翻譯成函數體。特別是，關於 ζ 函數和亞丁函數的所有內容都是如此；而且，在阿貝爾的情況下的亞丁函數是多項式，人們可以用這些體所提供的一個在數體中發生的簡化模型來表示；此處從而可猜測，非阿貝爾的亞丁函數仍是多項式：這正是我現在的研究課題，所有這些都使我相信，如果人們能夠找到適當表述，則這些體的所有結果都可以反過來被翻譯到數體上。

另一方面，在函數體和「黎曼」體之間的距離不大，只要耐心研究就能學會從一個轉換到另一個的功夫，而且後者的所學知識有益於研究前者，並且在研究後者時，積分和分析函數論提供給我們極有力的工具。這一點都不簡單，差得遠了；但即使仍有迷惘，人們終究學會看出端倪。直覺在其中扮演要角；直覺在此是指能看出外表完全不同的東西之間的聯繫；它使我們不會時常誤入歧途。無論如何，我的工作主要在於解譯一份三種語言的文件 ❾；三個欄位我各只有不同的片段；三種語言我也各只知道一些：即使沒有任何預備知識，我也知道欄與欄之間在意思上有很大的不同。經過數年的努力後，我找到字典的隻言片語。有時候我在這一欄工作，有時在另一欄。我在劉維爾的期刊上發表的大型論文在「黎曼」這欄取得了不錯的進展；不幸的是，許多解譯出來的文字在另兩種語言裡沒有對應的譯文，但仍有一部分對我非常有用的。此時此刻我正在中間那欄工作。這些全部都很有意思。然而，不要以為多欄工作的情形在數學中是常態；以如此純粹的形式為之幾乎是孤例了。這種工作尤其適合我；令人難以置信的一點是，像哈塞師生這樣長年致力鑽研這個主題的傑出之士，不僅忽視，甚至不屑採用黎曼的觀點，現在他們已經看不懂用黎曼觀點寫的作品（西格爾〔Carl Siegel〕有一天取笑哈塞，說哈塞宣稱他看不了我在劉維爾寫的論文），而且他們有時會費盡九牛二虎之力，以他們的方言重新發現早已眾所周知的重要結果，就像杜林（Max Deuring）重新發現賽韋利在對應環上的結果。而我所謂的類比，即使並非始終清晰，但卻是極其重要的。在我們獲得文本的時候花時間研究這些事情會是非常有趣的；選擇會很微妙。

附筆：我沒重新讀過就把信寄給妳……恐怕我說了太多我的研究；也就是說，為了（如妳囑咐的）解釋人們如何展開其研究，我努力堅持在我想彌補的差距上。在談到數字和函數之間的類比，希望沒讓妳誤以為我是唯一了解它們的人：亞丁也深刻反思過，無須多言。有件奇特的事值得一提：兩三年前出現了一篇論文（署名的是亞丁的學生，但卻從未沒聽過其人，在沒有反證的情形下，我們只能假定真正的作者是亞丁），也許是唯一源自古典理論結果的例子，它是以算術結果（在阿貝爾 ζ 函數上）為起點，藉由雙重翻譯得到，既有新意也很

❾ 英譯註：比喻可參考羅塞塔石碑（Rosetta Stone）。譯註：羅塞塔石碑是由埃及象形文字、埃及世俗體文字和古希臘文寫成，學者由此三種語文對照解讀出埃及象形文字。

有趣。而哈塞的天賦和耐心最終使得他成為天才，他在這個主題上也有非常有趣的想法。而且這一切都是透過傳統的口頭和書信（妳得同情，這是現代代數學派的一個癖性），而不是以正式出版品來傳播，所以很難詳細寫下完整的歷史。

妳有很好的理由來懷疑，現代公理學在困難的素材上是否可行。當我發明（我說的是發明，而非發現）均勻空間（uniform space）時，我並不覺得處理材料時遇到阻力，反而覺得像是專業雕塑家在堆雪人。妳可能很難體會，現代數學已變得如此廣泛且複雜；如果數學仍要維持整體性，不致淪為零碎研究的堆積，就有必要予以統合，從這門學科各分支的共同基層裡吸納某些單純和通則的理論，摒棄那些不太有用或非必要的，並且完整保留每個大問題真正具體的細節。這是公理學可成就的善（而且是不小的成就）。這就是布巴基想要達到的。妳不會沒注意到（再次借用軍事術語）在此涉及了戰略這個大題目。了解戰術是很平常的，但策劃戰略卻很稀有（而美麗，甘地如是說）。我會把偉大的公理建築比較戰線的後方通訊（儘管這比喻不太高明）：榮耀不會落在後勤和運輸部隊身上，但如果沒有這些勇者投身輔助工作（而且欣然以此為人生目的），後果會如何呢？最大的危害在於，各個戰線的下場並不是缺糧（研究委員會由此而來），而是由於彼此注意不足而浪費時間，有些像曠野中的希伯來人，有些則像卡普阿的漢尼拔。目前的科學組織並沒有考慮到（這對實驗科學很不幸，對數學的損害則輕微許多），事實就是僅有極少數人能夠掌握整個科學的前沿，不僅能攻取防守弱點，而且能攻陷戰略要地，懂得如何組織大軍，讓每個單位能互相協力等等。當然在我提到部隊一詞時，至少對數學家來說，基本上只是隱喻。每個數學家的部隊就是他自己。即使某些「學派」在幾位導師的領導下成就斐然，在數學裡，個人的角色還是絕對重要的。然而，把這種觀點應用到整體科學上就變得勢不可行；不可能有人可以同時精通數學和物理，其程度足以同時或先後控制它們的發展。一切「規劃」的企圖只會顯得荒謬，只能把它留給機遇和專家。∞

本文出處

本文的法文原稿收錄在威伊的論文集中（*Œuvres Scientifiques, Collected Papers I*, New York: Springer, 1979 , pp. 244–255.），並加了腳註，後來克雷格翻譯成英文收錄於其著作（*Doing Mathematics: Convention, Subject, Calculation, Analogy*, Singapore: World Scientific, 2003, pp. 293–305.）的附錄，也轉載於 *Notices of the AMS* (52) 2005 No.3。本刊感謝 World Scientific Publishing 同意翻譯刊登。

英譯者簡介

克雷格為南加州大學公共政策學院規劃教授。

譯者簡介

趙學信，網路工程師，兼事翻譯寫作。

延伸閱讀

- ▶本刊第 14 期的〈歐拉的學伴 — 威伊，我的父親〉。
- ▶安德烈 ‧ 威伊的回憶錄《數學家的學徒生涯》（*The Apprenticeship of a Mathematician*）(1992) Birkhäuser。