DOI:10.6851/MSHCM.201907_(16).0006

數

寫給藝術家的代數基本定理

作者：卡蘭塔立（Bahman Kalantori）托倫斯（Bruce Torrence）　譯者：林武雄

作者簡介：卡蘭塔立是美國羅格斯大學（Rutgers University）資訊科學系教授，著有《多項式尋根與多項式學》（*Polynomial Root-Finding and Polynomiography*）。托倫斯是美國倫道夫 / 梅肯學院（Randolph-Macon College）數學系賈奈特（Garnett）講座教授。

代數基本定理是這麼說的：在複數域裡，任何多項式都可被完全因式分解。簡單、美、而且再基礎也不過了。

如果你像我們一樣，大概在青少年時期就已經在做多項式的因式分解了。也許比較不清楚的是為什麼要做因式分解。簡單的答案是：多項式是最基礎、最普及的已知函數。常常以多項式來描述各種自然現象，所以解多項式方程式是要了解我們世界的基本技術。因為有了代數基本定理，解多項式方程式可歸結成做因式分解。但是，常常因式分解說比做還容易。

以你最喜歡的多項式方程為例，像 $x^3-2x^2-5x+5=-1$。任何這類型的方程式都可以經過改寫使得它等於 0。就我們的方程式而言，左、右式各加 1 得 $x^3-2x^2+5x+6=0$ 。代數基本定理主張上述等式左邊的多項式可完全被因式分解。些許的努力，我們得 $(x-1)(x+2)(x-3)=0$ 。因為乘積等於 0 的充分與必要條件是其中的一項為 0，由分解式可知原方程式的解是： $x=1$ ，$x=-2$ 和 $x=3$ 。

但是等等！你可能會抗議了：那 x^2+1 呢？因為平方數加 1 是不可能等於 0，所以它不可被分解。雖然對實數 x 而言是正確的，依據代數基本定理在複數域裡是可分解的。也就是說，為了分解 x^2+1 ，數學家們先問：是否在更大的數域裡，它可被分解呢？在數個世紀的漫長時間投入解多項式方程的探討後，數學家們發現了複數域。這些是以 $a+ib$ 為一般型的數字。這裡 a 與 b 是實數，以及 i 是一滿足等式 $i^2=-1$ 的虛數。複數 $a+ib$ 可與有序數對 (a,b) 鏈結而看成在歐氏平面上的點。所以複數將歐氏平面上的點變成可以作加、減、乘、除四則運算的數字。這是非常深刻的發現。在這情況下，我們有 $x^2+1=(x+i)(x-i)$ 。

現在我們將熟悉實數系放到腦後，並同意以約定俗成的符號 z 代表複變數來取代實變數 x 。

無論在實數系或複數系，因式分解是很困難的。給定 n 個複數（或把它們想成歐氏平面上的點）$z_1,z_2,\ldots,z_n$ ，很容易造一以此 n 個複數為根的多項式：將 $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ 展開。但是，如果給定任意一般型的 n 次多項式，也就是說，函數

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

這裡領導係數 $a_n\neq 0$ 和係數 a_j 可以是實數，也可以是複數。找到它的根或因式分解——找到歐氏平面上的 n 個點——會是非常艱鉅的挑戰。

數學家與電腦科學家們已經研發了許多精密的演算法來找到或至少逼近這些很複雜的根。而代數基本定理是這些演算法的要素，它保證尋根不會是徒勞的。

複多項式的視覺化

當函數 f 的定義域和值域都是實數時，在歐氏平面上繪製它的圖形是很容易的。以 x 軸為定義域和 y 軸為值域，它的圖形是由所有的 $(x,f(x))$ 點所組成。簡單！

當函數的定義域和值域都是複數時，繪製它的圖形是很不容易的。此時，函數的定義域和值域的維度都是 2，需要 4 個維度才能繪製與傳統類似的函數圖形。掃興！

一些折衷方案可以便於視覺化。這裡就是一個基於模（modulus）的。複數 $z=a+ib$ 的模 $|z|$ 是從原點到它的距離，也就是 $\sqrt{a^2+b^2}$ 。它是絕對值的複數類比。為了繪製複數值函數 p 的模圖型，我們以 x-y 平面作為定義域，所以點 (x,y) 對應到複數 $x+iy$ 。以平面的垂直軸來描繪複數 $p(x+iy)$ 的模。因為距離不可以是負的，這三維圖型不會低於 x-y 平面。

例如：圖 1 是我們給的複數多項式 $p(z)=z^3-1$ 的圖形。以 $z=x+iy$，直接計算可得 z^3-1的模是

$$\sqrt{(x^3-3xy^2-1)^2+(3x^2y-y^3)^2}\ 。$$

有 3 個下凹碰到 x-y 平面的點代表了這複數多項式的根：3 個單位元的立方根。代數基本定理告訴我們任何多項式的模圖必須向下凹碰到 x-y 平面。

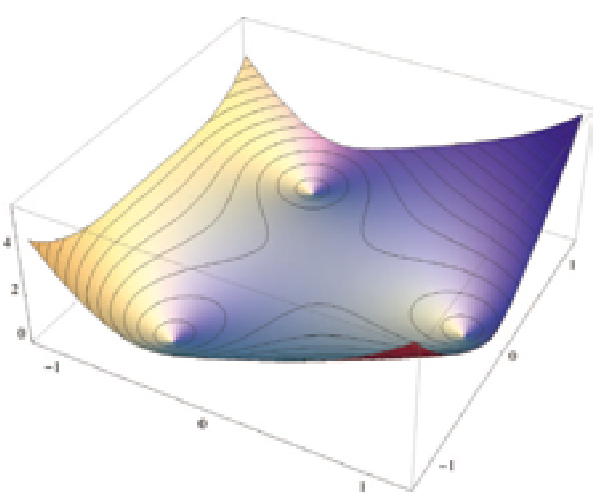

圖 1：$p(z)=z^3-1$ 的三維模圖。

鑒於你所看到頁面二維的本質，我們可用模的二維等高線圖取代以增進模圖的可判讀性。圖 2 是圖 1 的等高線圖，而黃點代表了根的位置。

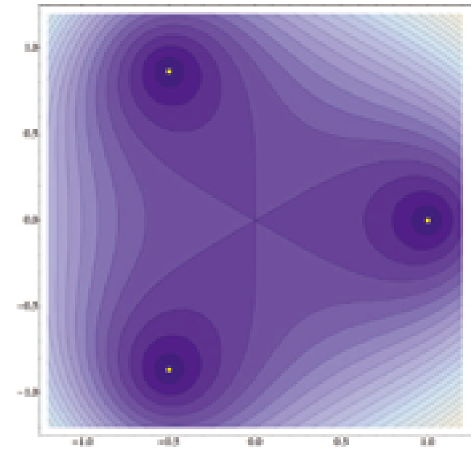

圖 2：$p(z)=z^3-1$ 的模的等高線圖。

除了三個根以外，在圖 2 上還有一值得關注的點：原點 $z=0$ 。當 $z=0$ ，我們注意到 $p(0)=0^3-1=-1$ 的模是 1。檢視所有模為 1 點所組成的等高線。如果你想像一以原點為圓心的小圓盤，這條過原點的等高線將圓盤平均分割成 6 扇形區域（如圖 3）。

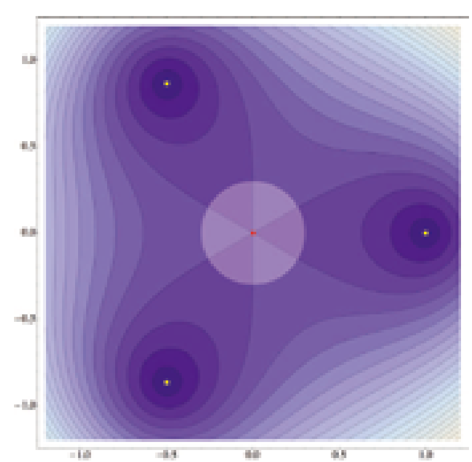

圖 3：檢驗原點附近的模圖。

由所圍出等高線區的不同明、暗色區來判讀，有 3 個區域往下朝向 3 的根，而另外 3 個區域往上朝向高處。此外這些區域是在上升和下降之間交錯的。這是幾何模原理（geometric modulus principal），它是多項式函數的一個美麗性質的呈現。

幾何模原理

在給出這原理的明確敘述前，我們先給它加一開

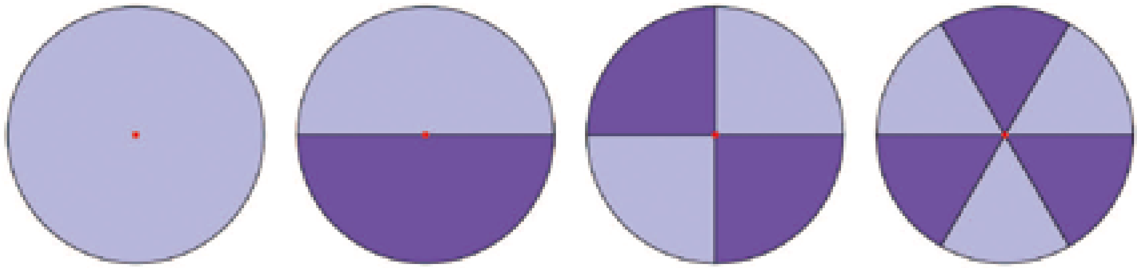

圖 4：以根為圓心的小圓盤（左）以及當 $k=1$，$k=2$ 和 $k=3$ 以點為圓心的小圓盤。

胃小菜：解釋如何預測在複多項式 $p(z)=z^3-1$ 的等高線圖中，可以將以原點為圓心的小圓盤分成 6 個上升 / 下降的區域。為何是 6 ？讓我們首先微分幾次並計算它們在 $z=0$ 的值。幸運的是，在複平面上，計算導函數的方式與微積分一樣；

$$p'(z)=3z^2,$$
$$p''(z)=6z,$$
$$p^{(3)}(z)=6 \text{ 。}$$

我們注意到 $z=0$ 是 p' 與 p'' 的根，而 p 的各階導函數中， $z=0$ 不是根的，第 **3** 次導函數是最低階。就這例子而言，幾何模原理主張：以原點為圓心的小圓盤的每一個上升 / 下降的區域的圓心角是 $\pi/3$ 。這裡 3 會出現在分母的原因是 $z=0$ 不是最低階的 **3** 次導函數的根。而 $\pi/3$ 的圓心角導致小圓盤分成 6 個區域。

更一般地說，如果我們給定任何 n 次複多項式 $p(z)$ 和任意的複數 z_0 。在 $p(z)$ 的模圖中，想像一以 z_0 為圓心的小圓盤。如果 z_0 是 p 的根，則**任何**由 z_0 出發的方向都是上升方向。也就是說，當從 z_0 沿任何方向作小量移動， p 的模值由 0 變成正值。然而，當 z_0 不是 p 的根，則考慮 p 在 z_0 的各階導數數列

$$p'(z_0), p''(z_0), p^{(3)}(z_0), \ldots$$

和假設 k 是最低階的非零項。因為 p 是 n 次多項式，它的 n 次導函數是必須是非零常數，所以 $1 \le k \le n$ 。

幾何模原理：以 z_0 為圓心的小圓盤被等分割成個上升 / 下降模的圓心角是 π/k 區域。

再次檢驗 z^3-1 的模圖。如果我們選擇非 0 或任何三根之一的 z_0，則 $p'(z_0)\neq 0$ ，所以 $k=1$ 。因此以 z_0 為圓心的小圓盤被沿著過 z_0 等高線的切線等分成兩半。這並不是很特別的部份。

有趣的部份是關於那些 $k>1$ 點，稱為 p 的臨界點（critical point）。以這些點為圓心的小圓盤被平均等分割成上升和下降模交錯的區域是既美麗又令人驚訝的。見圖 4。簡短的檢驗在微積分課程裡所遇到的 2 變數實值函數圖形的鞍點（saddle point）並沒有顯示等分上升和下降模交錯的區域。在這意義下，複多項式的模函數是很特別的。

代數基本定理

代數基本定理有許多不同的證明，而其中有幾個運用了複多項式 $p(z)$ 的模函數。這些證明背後的基本想法是先注意到當 z 離原點足夠遠時，$|p(z)|$ 一定也大。然而，在一以原點為圓心且包含邊界的大圓盤範圍內，$|p(z)|$ 必須達到最大值與最小值。又因為點離圓盤邊界越近時，$|p(z)|$ 取值越大。所以最小值只能發生在圓盤的內點，也因此必須有全域最小值。

然後，這些證明接著論述：當 z_0 不是 p 的根時，一定有一使模函數值下降的方向。由此可知，模函數在 z_0 一定不是最小值。模函數的最小值僅剩一個可能性 —— p 一定有根。最後一個步驟是：一旦找到 p 的一個根，記為 z_1 。因式分解可得 $p(z)=(z-z_1)q(z)$ ，這裡 $q(z)$ 是一複多項式。但由相同的推理可知 q 有根，因此我們在數個步驟後，可將 p 完全因式分解。

一旦能確立幾何模原理，這一證明論述可以很容易地用來證明代數基本定理。換句話來說，代數基

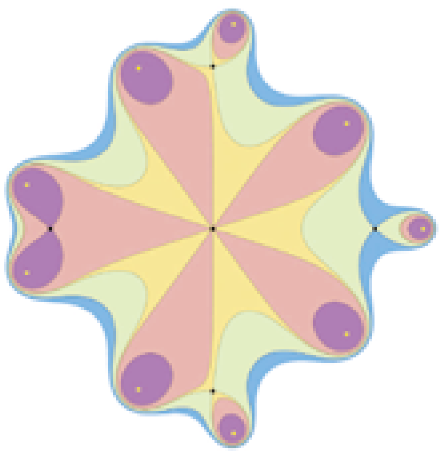

圖 5：$p(z) = z^9 - z^7 - 1$ 的模圖。

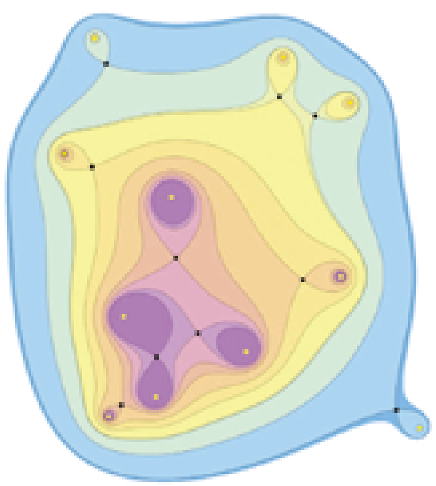

圖 6：一任意 11 次複多項式的模圖。

本定理是幾何模原理的簡單邏輯推論。也可由此推導一些其它深刻的結果，例如：複多項式的高斯 / 盧卡斯定理（Gauss-Lucas Theorem）[1]，和複多項式的最大模原理（maximal modulus principle）。將幾何模原理歸納為基本定理並不會太誇張。

基本藝術

在本質上抽象的複多項式領域裡，幾何模原理提供了令人驚訝的視覺面。當給定任何 n 個複數，繪製任何以此 n 個複數為根多項式的模圖。如果我們再增加標誌經過臨界點的等高線，幾何模原理得以實現。

在圖 5 與圖 6 中，黃點代表多項式的根，而黑點

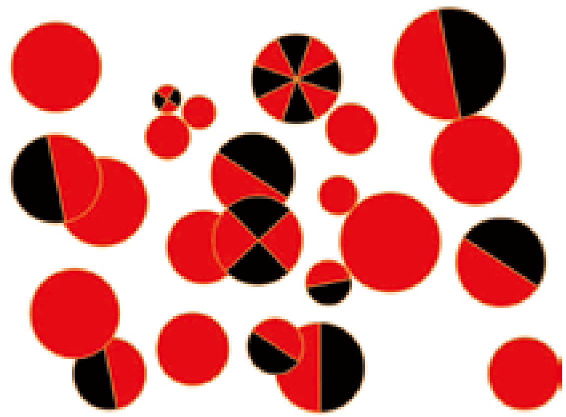

圖 7：有一個多項式的模圖符合這些的上升和下降區域小圓盤！

代表那些不是根的臨界點。每一個複多項式的模圖僅顯示那些過臨界點的等高線。幾何模原理保證任何以這些臨界點為圓心的小圓盤總是會被那些等高線平均分割成扇形區域。還有，不同模的等高線一定不會相交。

你也可以在複平面收集一些點，以這些點為圓心畫小圓盤。然後，對每一小圓盤作平均等分割為偶數扇形區域（依你所願旋轉），並任意在每一區域交錯標記上升或下降。如圖 7。一定存在一複多項式的模圖符合在指定點的所有上升 / 下降的區域！也許會有多出的根與臨界點，但絕對會精確地符合你的選擇。

本文出處

本文譯自 “The Fundamental Theorem of Algebra for Artists”, *Math Horizons* 20 (2013) No. 4, MAA。感謝 MAA 同意轉載翻譯。同文也收錄在皮提奇（Mircea Pitici）編輯的《2014 年數學最佳文章》（*The Best Writings on Mathematics 2014*, Princeton (2001)）

譯者簡介

林武雄是交通大學應用數學系助理教授。

延伸閱讀

- 幾何模原理是由本文的第一位作者提出且證明的。Kalantari, Bahman “A Geometric Modulus Principal for Polynomials”, *American Mathematical Monthly* 108 (2011)。
- 本文的第一位作者並架設及管理以下的網站，網站內有了許多藝術，數學以及電腦科學融合的資訊。http://www.polynomiography.com

[1] 高斯 / 盧卡斯定理：給定任何複多項式，它導函數的根一定落在原多項式的根所圍成的凸包（convex hull）內。