國立交通大學

理學院應用科技學程

碩 士 論 文

關於高中學生數學建模指導之研究

A Study of Mathematical Modeling for Senior High School Students

研 究 生：劉宗榮

指導教授：黃大原 博士

中 華 民 國 九 十 六 年 六 月

關於高中學生數學建模指導之研究
A Study of Mathematical Modeling for Senior High School Students

研 究 生：劉宗榮　　Student：Tzong-Ying Liu

指導教授：黃大原　　Advisor：Tayuan Huang

國 立 交 通 大 學
理學院應用科技學程

碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Degree Program of Applied Science and Technology
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Degree Program of Applied Science and Technology

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

關於高中學生數學建模指導之研究

研究生：劉宗榮　　　　　　　　指導教授：黃大原 博士

國立交通大學理學院應用科技組碩士班

摘　　要

數學建模是國內數學教育改革中一個新興的議題，尤其是新修訂的高中數學課程綱要（草案）中，即明確指出要發展學生數學建模的基本能力。

本論文首先針對數學建模作理論上的介紹（第一章），探討學習數學建模的意義，以及數學建模在國內外的發展狀況。數學建模之受到重視，實肇因於透過數學解決現實生活中的問題，許多人文社會及自然科學的學術研究都需要數學的參與。在高中的數學基礎教育階段，指導學生進行簡易的數學建模，培養數學建模的思維亦有其意義（第二章）。從近幾年的大學入學考試試題中，可以發現數學建模概念題是相當受重視的，這些題目可以成爲我們指導學生進行數學建模的題材(第三章)。

許多數學軟體可以協助我們解決數學建模中不可避免要處理的各種數據資料，其中亦有免費的自由軟體如 Scilab 及 Maxima。本論文將對它們的功能做簡單的介紹，並實際運用於數學建模的過程中（第四章）。結合前述理論上的探討，我們將針對研究過程中所探討的數學建模相關課題作細部介紹(第五章)。

關鍵字：數學建模、數學教育、數學軟體

A Study of Mathematical Modeling for Senior High School Students

Studend：Tzong-Ying Liu   Advisor：Tayuan Huang

Degree Program of Applied Science and Technology
College of Science
National Chiao Tung University

Abstract

Mathematical modeling is a current issue in mathematics education in Taiwan or even worldwide; in particular, the ability of handling mathematical modeling is among the core abilities claimed in the Mathematics Curriculum (draft 2006) for the senior high school students in Taiwan.

Mathematical modeling will be first recalled from the theoretical view point in Chapter 1, including its significance, the status in developing mathematical modeling in Taiwan and other countries. It must be emphasized that the problems in real life have continuously been solved by mathematical ideas and methods as well in the framework of mathematical modeling, and mathematics has always played a vital role in academic researches such as humanities and social sciences, natural sciences. The significances of instructing students with the abilities in thinking and handling mathematical modeling will be surveyed in Chapter 2. The concept of mathematical modeling has also been one of the focuses in the college entrance examination recently, some of these problems are collected in Chapter 3 followed by some detailed analysis from the view points of mathematical modeling.

Many mathematical softwares, including freewares such as Scilab and Maxima, are now available for treating complicated and huge mount numerical data involved in mathematical modeling. Their functions used in the processes of mathematical modeling will be provided in Chapter 4. Some problems with real immediate applications involved in this research are provided in the final Chapter 5 together with detailed analysis.

Keywords: mathematical modeling, mathematics education, mathematical softwares

誌　　謝

論文能夠順利完成，首先最要感謝指導教授黃大原老師兩年來辛苦指導，除了在研究上的指引外，在撰寫論文的架構與編排也給予許多寶貴的建議，並讓我學習到從事研究的態度與思考的方法，使我獲益良多，在此致上最誠摯的謝忱。

感謝專班主任莊祚敏老師對於專班同學的照顧，給予同學適時的支援與鼓勵。感謝蔡文賢老師與交大物理所林登松老師在專題研討課程的指導，使我們作專題報告能夠切中要點，對於問題的思考更加透澈。感謝交大資工所陳榮傑老師在編碼學上的指導，擴展我對數學應用的認識。感謝交大資工所蔡文能老師引導我進入Java程式設計的世界，使我對於物件導向程式有更深刻的了解。此外還要感謝在專班演講的所有老師，犧牲周末或晚上的時間講述您們專業領域的研究，讓從大學畢業多年後再重回學生的我能充實新知、增廣見聞。

感謝陽明高中林清波校長與所有同仁，對我的支持與關懷，讓我能在工作之餘順利完成進修。感謝仁杰、秉鈞、弘毅、建佳及專班同學一起陪伴我走過這段忙碌卻充實的日子，雖然大家平時各有工作事業，見面機會不多，但課堂上彼此之間的討論交流確實讓我獲益良多，爲這兩年的學習增添許多色彩。

由衷地感謝我的家人，尤其是賢內助君蓉的體諒與支持鼓勵，讓我能專心於課業，還有生我育我的父母親，你們都是支持我完成進修的推手。

二年的研究所生涯中，要感謝的人很多，無法在此一一表達，謹向所有關心我、協助我的人，表達最誠摯的謝意。

目　　錄

表　　目　　錄

頁次

圖　目　錄

一、數學建模概論

1.1 什麼是數學建模

應用數學去解決實際問題時，首先要建立「數學模型」(Mathematical Model)。數學模型是對實際問題的一種數學表述，具體地說，數學模型是關於部分現實世界為某種目的的一個抽象、簡化的數學結構，而這也是既關鍵又困難的步驟。而「數學建模」則是建立數學模型的整個「過程」，數學建模是一種數學思考模式運用數學的語言和方法將複雜的實際問題經由抽象、簡化而建立為數學結構，並解決實際問題的一種有力的數學手段。而過程中，調查、蒐集數據資料、觀察實際對象的特徵和規律，建立反映實際問題的數量關係，利用數學的理論和方法去分析、解決問題，這都需要深厚的數學基礎。此外，敏銳的洞察力和想像力，及對實際問題濃厚的興趣和廣博的知識也是不可或缺的。因此，數學建模可以充分發揮以數學解決實際問題的功能，真正表現出數學的意義 (姜啓源，1992)。

數學建模是一門將應用領域轉化為良好數學形式的藝術，其數學形式所具有的理論與數值分析，提供一個對原始問題的深刻理解與解答，並且是有用的指引 (Arnold, 2004)。實際問題一般都是極其複雜的，人們不可能一絲不差地用數學將其複製出來。為了用數學來描述實際問題，研究者必須從實際問題中抽象出它的本質屬性，抓住主要因素，去除次要因素，經過必要的精煉簡化，建立起相應的「數學模型」 (楊啓帆，2006)。數學模型模仿了一個現實系統，但建立數學模型並非以模仿為目標，而是為了解決實際問題 (徐全智，2003)。因此藉由數學模型中的推理所求得的解，最後仍要回歸到現實世界中檢驗，確認結果的正確性。

就認知的觀點，數學活動的特徵是多樣的記號表徵與二種變換。一種是同系統表

徵內的處理，另一種則是不同系統表徵之間的轉換。數學建模活動的認知特徵在於物理世界、數學世界與各世界之內和兩種世界之間的變換。在這些變換中，不只需要利用數學思維來解決現實問題，同時也必須透過對於現實問題的了解來建立數學模型。各種臆測、判斷和假設、尋找對應關係、合理解釋都包含在建模活動之中 (林福來，2003)。

1.1.1 爲什麼要學數學建模

數學建模已經被廣泛應用於工程、物理、生物或社會科學。在應用和發展模式的過程中，創造、直觀和遠見都扮演重要的角色，這也使得數學建模成爲具有挑戰性的學習活動 (Murthy et al., 1990)。長久以來，年輕學子也一直對數學的學習有極大的困難，甚至感到恐懼，而這些學習困難不外乎是感覺到「數學是枯燥無趣又與生活無關的符號遊戲」。由於教師們太注重數學形於外的符號運算與證明，又太強調數學問題的答案，使得學生在學習初期便感覺數學與現實生活脫節，同時也養成只重視求答案的計算技巧而忽略了思考推理過程的心態 (鄭英豪，2005)。而學習數學建模是從理論數學訓練到問題導向的數學專門知識的重要步驟，並且使學生適應於現代科技文化的挑戰 (Arnold, 2004)。以下從其他層面來看學習數學建模的意義，分述如下：

1. **培養學生數學應用能力**：在中學數學教育中，學生所學的數學是抽象化之後的理論，並且是屬於片段的知識，無法將所學知識串連起來。而數學建模的過程就是應用數學的思想和方法去尋求對科學事實和現實世界現象的認識和理解的過程，是用數學的知識去解決生產生活乃至學習中的各種實際問題的過程。數學建模融入數學課程教學是培養學生應用數學的意識、興趣和能力。讓學生學會用數學的思維方式觀察周圍的事物，用數學的思維方法分析、解決實際問題。而在數學課中要培養學生數學應用意識和能力，數學的建模是關鍵 (張珠寶，2005)。

人類的認知活動按照 Bloom(1956)的分類，由淺到深的順序可以分成知識(knowledge)、理解(comprehension)、應用(application)、分析(analysis)、綜合(synthesis)以及評估(evaluation)等層次。目前數學教育中，學生是被動接受知識，所做的數學解題練習僅止於提高對於定理的熟練度與理解程度，少部分能加以應用在真實世界，更不用說能達到綜合與評估這些層次了。數學建模正是一個能提供學生更大的發揮空間，在建模當中將所學的數學加以綜合，並且要對數學模型加以評估。

2. **提供學生合作學習的環境**：在廿一世紀的今天，許多行業都不是個人單打獨鬥就能完成工作，需要整個團隊分工合作來達成任務。目前中學的課程中，都還是重視在個人的學習成效，部分在考試中成績表現優異的學生其實非常缺乏與他人溝通合作的能力。在學校的教育應該要多加以重視這種能力的培養，才符合現代的潮流。傳統上，分組合作學習只見於工藝、家政、童軍等藝能科目以及物理、化學的實驗上。而藉由數學建模，無論是課堂中的學習活動或參加校外競賽的過程都充分的提供了學生具體實踐合作學習的環境。合作學習給學生自由創造的空間，提升學生個人的創造力，讓學生在合作環境中，透過討論活動，培養學生的組織思考能力；數學建模的對象或主題常常是一些非數學領域的實際問題，也因此超越了個別能力的範圍，即使是老師也未必能給予具體的協助；因此，藉由數學建模活動搭建出的平台，透過資料蒐集、查閱文獻資料、上網尋找相關知識、學會分工合作發揮個人的潛在價值與能力 (林國源，2005)。

3. **培養學生創造力**：數學建模中，學生需要運用所瞭解的數學關係以及各種數學能力，將訊息重新聯結並連結對應物理和數學世界的假設和推論結果，這過程常常是一種發現、發明或再創新。所以如果想提昇學生的數學創造力，具有豐富思維過程的建模活動則是一個恰當的媒介。如果配合恰當的教學方式，透過數學建模活動培養數學創造力不失爲一種有效的方法。因此，設計具有豐富數學思考和情境轉換的活動則成爲培養數學創造力的研究重點之一 (林福來，2003)。多數的創意靈感並非發生在一瞬間，要了解一個問題需要時間反覆思考推敲，若要能發揮創意則要更多的時間。在

數學建模中學生有充分的時間去思考如何解決問題，不需如同考試時擔心時間不夠寫不完，能夠大膽地去嘗試各種可能，即便是犯了錯無妨。有時候一個看似錯誤的答案，可能只是因爲不符合老師的觀點而已 (J.S Robert, 2003)。

4. **對於數學教育的改革**：它把數學從教師、黑板、粉筆的傳統教學模式轉變爲以教師爲主導，以學生爲主體，從實際問題入手，把數學知識、數學軟體、電腦加以結合，學生自己設計實驗步驟創造性地解決問題的現代教學模式。它解決了數學教學中實驗難以開展的問題，在數學理論與實際問題之間搭起了一座橋樑，使數學在解決實際問題中得到了充分的展現，也爲學生運用創造性思維解決問題，提供了一個展示才華的舞臺。數學建模本身就是教學方式、教學內容、教學手段上的教學改革，它已經成爲高等教育改革的濫觴，直接推動著高等教育的全面發展 (魏福義，2003)。數學爲科學之母，是科學研究的基礎，而科學發展又是一個國家國力的關鍵指標，因此數學教育實在是關係著國家的強盛興衰。在目前數學教育中，太偏重各種純數學題目的解題技巧，而忽略了如何運用數學在真實情境問題。因此對大部分學生而言，學數學只是一個考試的工具而已，這實在是很讓人遺憾的事。

1.1.2 各國數學建模發展概況

在數學教育中引進數學建模最早是由美國開始，主要是透過數學建模競賽吸引學生的參與，慢慢擴大影響力。之後中國與台灣的學者也注意到這股潮流，開始推動數學建模。茲將各國的發展概況分述如下：

1. **美國：**1975 年美國的數學科學學會 (Conference Board of the Mathematical Science，簡稱 CBMS)在「K-12 級中學數學的概觀與分析」(Overview and Analysis of School Mathematics K-12)文件中，建議把數學建模放到高中課程中去。美國的全國數學教師會議 (National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)把數學建模融

進中學教材作為 1981-1990 年數學教學改革的目標。1989 年，全國的全國研究會議(National Research Council)提出對未來數學教育的報告(A Report to the nation on the Future of Mathematics Education)中，把數學建模列入了數學教育改革最急需的項目。1989 年 NCTM 的中學數學課程和教學評估標準(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)文件中，對各年級數學課程都列出了問題解決能力標準，並強調「數學建模」作為問題解決一個側面的重要性 (施羿如，2005)。另外 1985 年開始就由數學與其應用聯盟 (The Consortium for Mathematics and Its Applications ，簡稱 COMAP)主辦全國性的「大學生數學建模競賽」 (Mathematical Contest of Modeling，簡稱 MCM)，1999 年 COMAP 將此項活動往下延伸，開始辦理全美國高中生的數學建模競賽 (簡稱 HiMCM)，COMAP 這個組織的贊助單位包含了許多國家級的學術研究機構與政府部門，其中甚至還包含了美國的國家安全局 (National Security Agency)，可見美國各界極為重視數學建模的教育。

2. **中國大陸：**中國大陸從 1992 年開始由中國民間的「中國工業與應用數學學會」主辦全國性的大學生數學建模競賽 (CUMCM)，1994 年起改由「國家教委高教司」和中國工業與應用數學學會共同舉辦，每年一次。在中學階段，也從 1997 年起舉辦「北京高中數學知識應用競賽」，將數學建模的精神向下札根。2003 年時將數學探究、數學建模、數學文化三個主題列入「普通高中數學課程標準」，建議在教材中應該提供一些適合學生水平的數學建模問題和背景材料供學生和教師參考；教材中可以提供一些由學生完成的數學建模案例，以激發學生的興趣。詳細內容如下：

(1) **數學探究**

數學探究即數學探究性課題學習，是指學生圍繞某個數學問題，自主探究、學習的過程。這個過程包括：觀察分析數學事實，提出有意義的數學問題，猜測、探求適當的數學結論或規律，給出解釋或證明。

數學探究是高中數學課程中引入的一種新的學習方式，有助於學生初步瞭解數學概念和結論產生的過程，初步理解直觀和嚴謹的關係，初步嘗試數學研究的過程，體

驗創造的喜悅，建立嚴謹的科學態度和不怕困難的科學精神；有助於培養學生勇於質疑和善於反思的習慣，培養學生發現、提出、解決數學問題的能力；有助於發展學生的創新意識和實踐能力。

要求：

① 數學探究課題的選擇是完成探究學習的關鍵。課題的選擇要有助於學生對數學的理解，有助於學生體驗數學研究的過程，有助於學生形成發現、探究問題的意識，有助於鼓勵學生發揮自己的想像力和創造性。課題應具有一定的開放性，課題的預備知識最好不超出學生現有的知識範圍。數學探究課題應該多樣化，可以是某些數學結果的推廣和深入，不同數學內容之間的聯繫和類比，也可以是發現和探索對自己來說是新的數學結果。也可以從教師提供的案例和背景材料中發現和建立，應該特別鼓勵學生在學習數學知識、技能、方法、思想的過程中發現和提出自己的問題並加以研究。

② 學生在數學探究的過程中，應學會查詢資料、收集資訊、閱讀文獻。學生在數學探究中，應養成獨立思考和勇於質疑的習慣，同時也應學會與他人交流合作，建立嚴謹的科學態度和不怕困難的精神。在數學探究中，學生將初步瞭解數學概念和結論的產生過程，體驗數學研究的過程和創造的喜悅，提高發現、提出、解決數學問題的能力，發揮自己的想像力和創新精神。

③ 高中階段至少應爲學生安排一次數學探究活動，還應將課內與課外結合起來。課程標準中並不對數學探究的課時和內容做具體安排，學校和教師可根據各自的實際情況，統籌安排數學探究活動的內容和時間。例如，可以結合方程的近似求解、導數的應用等內容安排數學探究活動。

說明與建議：

① 教師應努力成爲數學探究課題的創造者，有比較開闊的數學視野，瞭解與中學數學知識有關的擴展知識和內在的數學思想，認真思考其中的一些問題，加深對數學的理解，提高數學能力，爲指導學生進行數學探究做好充分的準備，並累積指導學生進行數學探究的資源。教師要成爲學生進行數學探究的組織者、指導者、

合作者。教師應該爲學生提供較爲豐富的數學探究課題的案例和背景材料；引導和幫助而不是代替學生發現和提出探究課題，特別應該鼓勵和幫助學生獨立地發現和提出問題；組織和鼓勵學生組成課題組合作地解決問題；指導和幫助學生養成查閱相關的參考書籍和資料、在電腦網路上查找和引證資料的習慣；一方面應該鼓勵學生獨立思考，幫助學生建立克服困難的毅力和勇氣，另一方面應該指導學生在獨立思考的基礎上用各種方式尋求幫助；在學生需要的時候，教師應該成爲學生平等的合作者，教師要有勇氣和學生一起進行探究。教師應該根據學生的差異，進行有針對性的指導。在鼓勵學生創新的同時，允許一部分學生可以在模仿的基礎上發揮自己的想像力和創造力。

② 數學探究的結果以課題報告或課題論文的方式完成。課題報告包括課題名稱、問題背景、對事實的觀察分析、對結果的猜測、對結果的論證、合作情形、對探究結果的體會或評論、引證的文獻資料等方面。可以通過小組報告、班級報告、答辯會等方式交流探究成果，通過師生之間和學生之間的討論來評價探究學習的成績，評價主要是正面鼓勵學生的探索精神，肯定學生的創造性勞動，同時也指出存在的問題和不足。

③ 數學探究報告及評語可以記入學生成長記錄，作爲反映學生數學學習過程的資料和推薦依據。對於學生中優秀的報告或論文應該給予鼓勵，可以採取表揚、評獎、推薦雜誌發表、編輯出版、向大學推薦等多種形式。

④ 教材在適當的章節應該提供一些數學探究課題的案例和背景材料，可以提供一些由學生完成的數學探究的案例，可以爲教師指導數學探究學習提供一些參考性的建議。

2. **數學建模**

數學建模是運用數學思想、方法和知識解決實際問題的過程，已經成爲不同層次數學教育重要和基本的內容。數學建模是數學學習的一種新的方式，它爲學生提供了自主學習的空間，有助於學生體驗數學在解決實際問題中的價值和作用，體驗數學與

日常生活和其他學科的聯繫，體驗綜合運用知識和方法解決實際問題的過程，增強應用意識；有助於激發學生學習數學的興趣，發展學生的創新意識和實踐能力。

要求：

① 在數學建模中，問題是關鍵。數學建模的問題應是多樣的，應來自於學生的日常生活、現實世界、其他學科等多方面。同時，解決問題所涉及的知識、思想、方法應與高中數學課程內容有聯繫。通過數學建模，學生將瞭解和經歷解決實際問題的全過程，體驗數學與日常生活及其他學科的聯繫，感受數學的實用價值，增強應用意識，提高實踐能力。每一個學生可以根據自己的生活經驗發現並提出問題，對同樣的問題，可以發揮自己的特長和個性，從不同的角度、層次探索解決的方法，從而獲得綜合運用知識和方法解決實際問題的經驗，發展創新意識。

② 學生在發現和解決問題的過程中，應學會通過查詢資料等手段獲取資訊。學生在數學建模中應採取各種合作方式解決問題，養成與人交流的習慣，並獲得良好的情感體驗。

③ 高中階段至少應爲學生安排一次數學建模活動。還應將課內與課外結合起來，把數學建模活動與綜合實踐活動結合起來。課程綱要中不對數學建模的課時和內容做具體安排，學校和教師可根據各自的實際情況，統籌安排數學建模活動的內容和時間。例如，可以結合統計、線性規劃、數列等內容安排數學建模活動。

說明與建議：

① 學校和學生可根據各自的實際情況，確定數學建模活動的次數和時間安排。數學建模可以由教師根據教學內容以及學生的實際情況提出一些問題供學生選擇；或者提供一些實際情景，引導學生提出問題；特別要鼓勵學生從自己生活的世界中發現問題、提出問題。

② 數學建模可以採取課題組的學習模式，教師應引導和組織學生學會獨立思考、分工合作、交流討論、尋求幫助。教師應成爲學生的合作夥伴和參謀。數學建模活動中，應鼓勵學生使用電腦、計算器等工具。教師在必要時應給予適當的指導。

教師應指導學生完成數學建模報告，報告中應包括問題提出的背景、問題解決方案的設計、問題解決的過程、合作過程、結果的評價以及參考文獻等。

③ 評價學生在數學建模中的表現時，要重過程、重參與。不要苛求數學建模過程的嚴密、結果的準確。評價內容應關注以下幾個方面：

創新性：問題的提出和解決的方案有新意。

現實性：問題來源於學生的現實。

真實性：確實是學生本人參與制作的，資料是真實的。

合理性：建模過程中使用的數學方法得當，求解過程合乎常理。

有效性：建模的結果有一定的實際意義。

以上幾個方面不必追求全面，只要有一項做得比較好就應該予以肯定。

④ 對數學建模的評價可以採取答辯、報告、交流等形式進行，通過師生之間、學生之間的提問交流給出定性的評價，並且應該特別鼓勵學生工作中的巧思。數學建模報告及評價可以記入學生成長記錄，作爲反映學生數學學習過程的資料和推薦依據。對於學生中優秀的論文應該給予鼓勵，可以採取表揚、評獎、推薦雜誌發表、編輯出版、向大學推薦等多種形式。

⑤ 教材中應該提供一些適合學生水準的數學建模問題和背景材料供學生和教師參考；教材中可以提供一些由學生完成的數學建模的案例，以激發學生的興趣。

3. **數學文化**

數學是人類文化的重要組成部分。數學是人類社會進步的產物，也是推動社會發展的動力。通過在高中階段數學文化的學習，學生將初步瞭解數學科學與人類社會發展之間的相互作用，體會數學的科學價值、應用價值、人文價值，開闊視野，尋求數學進步的歷史軌跡，激發對於數學創新原動力的認識，受到優秀文化的薰陶，領會數學的美學價值，從而提高自身的文化素養和創新意識。

要求：

① 數學文化應盡可能有機地結合高中數學課程的內容，選擇介紹一些對數學發展起

重大作用的歷史事件和人物，反映數學在人類社會進步、人類文明發展中的作用，同時也反映社會發展對數學發展的促進作用。

② 學生通過數學文化的學習，瞭解人類社會發展與數學發展的相互作用，認識數學發生、發展的必然規律；瞭解人類從數學的角度認識客觀世界的過程；發展求知、求實、勇於探索的情感和態度；體會數學的系統性、嚴密性、應用的廣泛性，瞭解數學真理的相對性；提高學習數學的興趣。

3. **台灣**：有鑒於國內各級學校的老師與學生長期面對沒有標準答案、甚至沒有答案的數學及自然科學題目的經驗，致使國人特有的創造力無法提升，更缺乏整合，所以一群遍及理、工、農、生命科學、資訊、商學、及教育背景的教授、研究生，結合實際面對學生的中等學校教師和社會人士於 2003 年 1 月 18 日共同發起「數學建模與創意學會」(林國源，2005)，並於同年舉辦第一屆「台灣大專學生數學建模競賽」與第一屆「全國高中職數學作文競賽」，以鼓勵學生從問題中培養思考能力及發揮創造力。

思源科技教育基金會爲鼓勵學生從日常生活中熟悉的情境題目出發，拓展思考的深度及廣度，重視解題過程中思考能力的發展，並嘗試建構模型，從中領略數學平易近人的一面，並培養團隊合作精神，於 2004 年起多次舉辦了高中生數學專題競賽。因爲思考與分析步驟是高科技業中創造力來源的基礎。

交通大學爲培養科學、科技各領域，以數學模式及電腦模擬計算爲腦具與工具之研發人才，於 2006 年 9 月設立「數學建模科學計算所」，並將於 2007 年招收碩士生 10 名。而在 2007 年 1 月時，舉辦了校內第一屆數學建模競賽，提供同學們利用所學、發揮想像力、思考力，使用數學建模的形式來解決問題，並提供書面表達與口頭表達之訓練機會。

1.2 數學建模的分類

數學模型可以按照問題本身所處的領域和解決問題的方法，以及按照人們的各種不同意願有各種不同的方式分類 (任善強，1998)。下面是幾種常見的分類：

1. **按應用領域分**

   對一些人們較爲重視或對人類活動影響較大的實際問題的數學模型，可以按照研究課題的實際範疇來加以分類，例如人口模型、生命系統模型、交通流模型、經濟模型、基因模型、腫瘤模型、傳染病模型 (楊啓帆，2006)、環境模型、生態模型、水資源模型、城市規劃模型、生產過程模型等。

2. **按採用方法分**

   可分爲初等數學模型、幾何模型、微分方程模型、圖論模型、馬可夫鏈模型、規劃論模型、機率模型、統計模型、系統動力學模型、模糊數學模型等。

3. **按變量性質分**

   根據變量是確定的還是隨機的可分爲確定性模型和隨機模型。根據變量是連續的還是離散的可分爲離散模型和連續模型。按變量是否因時間關係而變化可分爲靜態模型和動態模型等。

4. **按建模目的分**

   可分爲描述模型、仿真模型、分析模型、預測模型、優化模型、決策模型、控制模型等。同樣的對象由於不同的建模目的可以有不同的模型。

5. **按照對模型結構和參數的了解程度分**

   (1)白箱模型：研究對象的結構和參數都已知的，稱爲白箱模型。如力學、電學等一些學科中所研究問題的機理已相當清楚以及相應的工程技術問題。

   (2)黑箱模型：研究對象的結構和參數都未知的，稱爲黑箱模型。如生命學科、社會學科中，很多不清楚當中運作模式的現象。

   (3)灰箱模型：研究對象的參數未知的，稱爲灰箱模型。結構中包含已知的與許多未知、不確定的資訊，如經濟、生態、氣象、管理、社會、生命等系

統中的現象。

這三個模型間沒有確切的界線，隨著科學技術不斷發展，以及人們投入愈來愈多的研究，黑箱問題逐漸變灰，灰箱問題逐漸變白。

1.3　數學建模步驟

數學建模問題通常通常很難直接套用數學上現有結論，參賽者需要具有良好的數學建模思想、創造性的思維能力、邏輯推理能力和計算能力 (張珠寶，2005)。數學建模的範圍相當廣泛，現實生活中只要是需要用到數學來解決的問題，都是數學建模的一部分。有些問題的數學模型已經在學習數學的過程中被建構好，通常這些問題的條件比較簡化且充分。大部分沒有在數學教育中建構出模型的問題則較為複雜，要自行建立模型解決問題。首先要先了解數學建模的步驟，熟悉數學建模的步驟，有助於我們從千頭萬緒，或不知如何下手的問題當中，找到一個遵循的原則。

1. 葉其孝 (1998)：數學建模可用框圖 1-3-1 說明就是框圖的多次循環執行的過程。

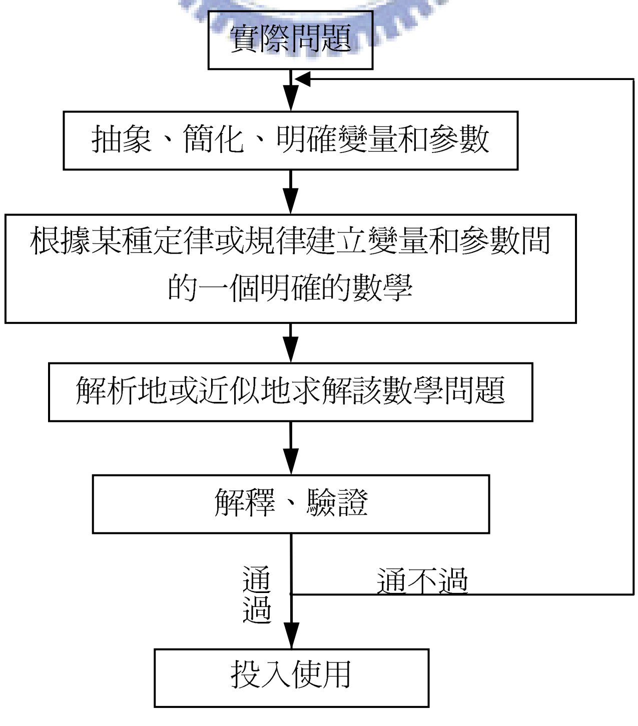


圖 1-3-1 葉其孝數學建模流程圖

(1) 實際問題往往是極爲複雜的。抓住主要方面來先進行定量研究，這是抽象和簡化的過程。正確的抽象和簡化常不是一次能完成的。而變量和參數的確定不僅重要，往往也是複雜和困難的。

(2) 應用某種規律建立變量、參數間的明確數學關係。規律可以是物理學或其他學科的定律，而明確數學關係可以是等式、不等式及其組合的形式，甚至是個明確的算法。在這一二兩個階段中，能用數學語言把實際問題的各方面「翻譯」成數學問題是極爲重要的。

(3) 框圖中形成數學模型的求解，可能對數學提出挑戰性強的問題，因而從數學角度不一定能短時間求得完全解決；當不能完全解決時，先考慮近似求解。而這不僅限於數學模型的求解這一階段，而是遍及建模的每一階段之中，因此數學建模過程往往是多次循環執行的。

(4) 數學的求解將它們「翻譯」成與實際問題有關的語言，才能讓有關領域的專家來判定，培養「雙向」翻譯的能力是進行建模的重要基礎。建模是否正確必須驗證，通過才能付之使用，因而解釋和驗證是不可少的。

(5) 成功的數學建模特別需要想像力和聯想力，正如偉大的物理學家愛因思坦所指出的「想像力比知識更重要，因爲知識是有限的；而想像力卻抓住了整個世界，激勵著產生進化的進步」。

(6) 好的數學建模必須要有各領域的專家合作，因此數學建模的過程是個跨學科的合作過程。

2. 袁震東 (2002)：數學建模是一個「迭代」的過程，可以用框圖 1-3-2 來表示。

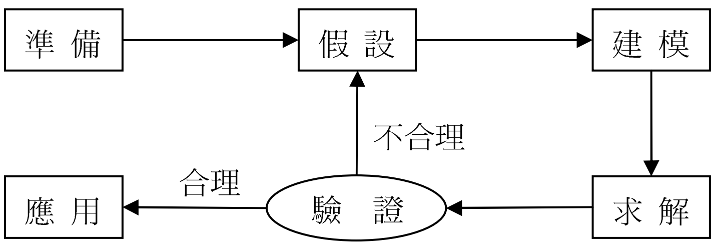


圖 1-3-2　袁震東數學建模流程圖

其文字表述如下：

(1) 建模準備：要求建模者深刻了解實際問題的背景，明確建模的目的，進行深入細緻的調查研究，盡量掌握建模對象的各種信息和數據，尋找實際問題的內在規律；一般地說，這是一個向實際工作者學習的過程。

(2) 作假設：現實問題涉及面廣，數學模型不能面面俱到，應該把實際問題適當地簡化或理想化，這就必須作一定的假設，假設應該符合實際背景。

(3) 建立模型：根據問題的要求和假設，利用恰當的數學方法建立各種量之間的數學關係。建立數學模型時應使用何者方法，應視實際問題而定。遇到離散的問題可以用處理離散問題的數學方法，如規劃論、網絡優化、馬可夫鏈等。遇到連續的問題應用處理連續問題的數學方法，如微積分、微分方程、變分法、平穩過程等等。一般地說，在建立數學模型時可能用到數學的任何一分支，同一個實際問題還可以用不同方法建立不同的數學模型。當然，在達到預期目標前提下，應該採用盡可能簡單的數學方法建立容易實現的數學模型，以便讓更多人接受和使用這種模型。

(4) 模型求解：包括求解各種類型的方程，大多數模型需要上計算機計算，求解還包括畫圖、列表和證明定理以及製作計算機程式等。

(5) 討論與驗證：根據模型的特點和模型求解結果，進行分析討論，如算法的穩定性、精度影響。根據計算結果對問題作出解答、預測或提題最優決策和控制方案。最後將模型的結果與實際情況相比較，檢驗模型是否合理，說明模型的使用範圍及注意事項。

(6) 模型應用：把所得到的數學模型應用到實際問題中去。

應該指出建立模型是一個過程，不是一種死板的步驟，如果在討論和驗證時發現型確實合理，當然可將模型投入應用，如果發現模型不合理，那就必須修改假設，重新建模，重新求解，再作驗證。這一過程可以循環往復，直至得到滿意的結果爲止。

3. 楊啓帆(2006)：建立數學模型的過程大致可以分爲以下步驟。

(1) 了解問題的實際背景，明確建模目的，收集掌握必要的數據資料。這一步驟可以看成是建模準備，沒有對實際問題的較爲深入了解，建模就無從下手。爲了對實際問題有所了解，有時還要求建模者對實際問題作一番深入細緻的調查研究。

(2) 在明確建模目的，掌握必要資料的基礎上，通過對資料的分析計算，找出起主要作用的因素，經必要的精煉、簡化，提出若干符合客觀實際的假設。這一步驟爲建模的關鍵所在，因爲其後的工作都是建立在這些假設的基礎之上。

(3) 在所作的假設之上，利用適當的數學工具去描述各變量之間的關係，建立相應的數學結構，即建立數學模型。採用什麼數學結構、數學工具要看實際問題的特徵，並無固定的模式，可以說，數學的任何分支在建模中都有可能被用到，而同一實際問題也可以用不同的數學方法建立起不同的數學模型。一般而言，在能夠達到預期目的的前提下，所用的數學工具越簡單越好。

(4) 模型求解。爲了得到結果，建模者還應當對模型進行求解，在難以得出解析解時，應當借助計算機求出數值解。

(5) 模型的分析與檢驗。建立數學模型研究實際課題，得到的只是假如假設正確，就會有什麼結果。那麼假設是否正確或者是否基本可靠呢？建模者還應當對結果進行檢驗。建立數學模型的目的是爲了認識世界，建模的結果應當能解釋已知現象，預測未來的結果，只有經得起實踐檢驗的結論才能被人們廣泛地接受。如果檢驗結果與事實不符，只要不是在求解中存在推導或計算上的錯誤，那就應該分析檢查假設中是否有不合理的地方或錯誤的地方，修改假設重新建模，直至結果滿意。

二、數學建模的題材及其方法

2.1　數學建模的題材

人類的文明從遠古時代至今，進步的程度之大非筆墨所能形容，累積下來的學問知識更如浩瀚汪洋難以計數。在這些進步背後，數學的發展佔了相當重要的地位，倘若微積分沒有被發明的話，整個近代史將大爲改寫。隨著人類生活日趨複雜，所產生的問題也就層出不窮，很多都需要依靠數學來提供解決之道。

在今日的許多學術領域中，數學是不可或缺的工具，不論是自然科學、人文社會科學、航太空程、電機工程…等，都需要使用數學當做進行研究的工具，誠所謂數學爲科學之母，而這些運用數學來解決問題的過程正都是數學建模。以下列舉出近代諸多科學的研究中，需要用數學建立模型的各種領域 (Arnold, 2003)：

1. 人文社會科學領域

(1) 人類學或考古學：分類的技巧、碎片或頭顱的重建。

(2) 犯罪偵查學：指紋辨識、面貌識別。

(3) 金融：風險分析、選擇權的估價。

(4) 政治學：選舉的分析。

2. 生命科學領域

(1) 生物學：人類的基因工程、人口動態、物種的演化、疾病的傳播、動植物的培育 (遺傳學)。

(2) 醫學：輻射治療計畫、X 光片拍攝、血液循環模型。

(3) 藥物學：對蛋白質的分子的修飾、新化合物的掃描。

(4) 神經系統科學：神經網路、在神經裡的信號發送。

3. 自然科學領域

(1) 天文學：行星的系統的探測、宇宙的起源。

(2) 氣象學：氣預測、氣候預測 (全球暖化、什麼引起臭氧洞？)。

(3) 物理學：基本粒子追蹤、量子領域理論預測、雷射。

(4) 化學：分子模型、電子結構計算。

(5) 流體力學：紊流、風的路徑。

4. 資訊科學領域

(1) 計算機科學：影像處理、資料搜尋、比對。

(2) 人工智慧：計算機視覺、機器人技術、語音識別。

5. 空間科學領域

(1) 航運科學：空中交通安排、汽車和飛機的自動駕駛儀、軌道計畫、飛行模擬、。

(2) 建築學：虛擬現實。

6. 工業工程領域

(1) 生產與運作管理：生產計畫與批量問題，庫存管理，物流與供應鏈管理。

(2) 決策分析：投資分析、產品開發、市場行銷、可行性研究。

(3) 多目標決策：企業經營管理、工程項目管理、交通運輸管理、環境保護與管理、工程設計與工藝、公共事業規劃。

2.2 數學建模的方法

在數學解題中往往不止一種解法，一般來說，模型建立的方法也不止一種，例如最短路線問題，可以用圖論方法，也可以用線性規劃方法，有時還可以用動態規劃的方法 (劉承平，2002)。由此可見數學建模具有相當的難度，建模的過程就如同藝術家雕塑作品般，不同的欣賞角度與不同的思考方向都可能成就不同的作品。就數學建模而言，對同一現象可以有不同的模型來描述，從而會得到不同的答案，而且這些答案不會只有一個是對的，而其他是錯的，差別只在於模型與實際現象的合適與否 (林國源，2005)。

在進行建模時，隨著問題的性質、建模目的不同，以及建模者本身的知識與專長領域的不同，所用的建模方法也就會不同。有時並不一定有現成可用的方法，需要建模者發揮創造力，找出解決問題的關鍵所在，以及解決問題的策略。例如牛頓在推導萬有引力定律時發現原有的數學工具根本無法用來研究變化的運動，為了研究工作的需要創建了微積分； 尤拉為了研究柯尼斯堡七橋問題發明了圖論。

綜上所述，數學建模的方法可說是充滿無限的可能，所呈現出來的模型也各異其趣。但是在建模的過程中所使用的策略以及基本原則仍有許多共同點，在中學進行的數學建模，著重的應該就是讓學生在建模的過程體會到數學建模的精神。以下歸納出幾點在數學建模過程中所用的思考方法（徐全智，2003）：

1. 明確問題

(1) 清楚建模的目的。

(2) 條件與數據分析：建模中所給的條件和數據通常不是恰到好處，可能有不足的條件、數據，也可能有多餘的條件、數據，需要視情況加以增加或減少。另外還需考慮數據是否可靠，所給的條件有何意義？哪些條件是本質的？哪此條件是可以變動的？

(3) 將問題分解為初態、目標態、以及從初態到目標態的過程：初態為我們現在所有的條件、數據；目標態為我們想要達到的；過程則是應該要做什麼。一般數學解題中，初態與目標態都很明確，但在數學建模中的初態與目標態都要盡很大的努力才能分析出來。

2. 思考方式

(1) 群體思考：數學建模經常需要不同專長的人相互合作，各自發揮自己的專長。在眾人的腦力激盪之下，有時就會出現意想不到的好方法。群體思考的過程中，需要建立在相互平等、相互尊重的基礎上，制定一些交流、討論的原則，以減少無謂的爭辯，最後才發現彼此之間並沒理解對方的想法。

(2) 發散性思考

① 提問題法：這個問題和什麼問題相似？假如變動問題的某些條件將會怎樣？將問題分解成若干部分再考慮會怎樣？重新組合又會怎樣？還可以做什麼工作？還有沒有需要進一步完善的內容？

② 關鍵詞聯想法：抓住問題或方案的關鍵詞，然後不受任何約束地讓想法浮現，並把聯想到的內容記在卡片上，再在這些卡片的激發下產生新的想法，進一步想出新的主意。經過這樣一個過程後，再把卡片相互搭配，形成解決問題的初步思路與步驟。

3. 作假設

(1) 關於是否包含某些因素的假設。

(2) 關於條件相對強弱及各因素影響相對大小的假設。

(3) 關於變量間關係的假設。

(4) 關於模型適用範圍的假設。

有些假設的必要性在模型求解過程中才會發現，所以在建模的各個階段都應注意你的工作是建立在什麼假設的基礎上。

Arnold (2003) 針對數學建模一般的規則，提出以下建議：

1. 看看其他相似情況中的數學建模，調整他們的模型適合到你目前的狀況。
2. 蒐集、探究了解問題所需要的背景資訊。依預期或希望的等級，將有用的資訊排序。
3. 找出所有相關的量，並且使他們精確，以及所有量必須有的限制（正負、極限的狀況），哪個限制嚴格？哪個寬鬆？找出所有量與量之間重大的關係（如方程式、不等式），再從蒐集的資料來驗證他們的關係。試著將量與量化簡合併。
4. 找出所有的目標 (包括會衝突的)。
5. 開始一個簡單的模型；當它們變得明瞭可用，或者有必要時，再增加細節進去，以得到較好的模型。

6. 扮演像惡魔般唱反調的人，去挖掘與想出你模型中的弱點。
7. 建立一個模型的等級：從粗糙的、高度簡化的模型到考慮所有已知細節的模型。有沒有較簡單資料建立的雛型？有沒有模型簡化後的極端事例？有沒有非常有趣的事例幫你發現困難的地方？
8. 在進行總時間的三分之一之後，試著做出一個簡單的模型報告。用剩餘時間改進或者根據你的經驗擴展模型，使它們變得更多用途並且優良，再美化論文的編製。
9. 良好的溝通對於團隊工作是必要的。
10. 不要沮喪，失敗是告知你在了解問題中遺漏了重要的細節－要利用這訊息！很少有完美的解決辦法，建模是找到令人滿意的妥協方案的藝術。從最高的標準開始，再降低它們直到能接受的底限。如果你早有結果，再次提升你的標準。
11. 及時完成你的工作。

三、中學數學中的數學建模

3.1　課程中的數學建模

目前在高中數學課程中，雖然並沒有特別提到數學建模，但是仍然可以在課本的例題或習題上看到數學建模的概念。尤其是在函數的部分，不論是二次函數、指數函數、三角函數，都跟現實生活息息相關。陳宜良教授(2005)：「函數的操作可以延伸函數在具體世界的應用，我們建議應加入函數的操作及其應用。」「大陸在這一方面十分著重，在介紹基本函數時都會以具體實例引入，舉例來說，指數函數的介紹是透過具體實例 (如：細胞的分裂，考古中所用的 C_{14} 的衰減，藥物在人體內殘留量的變化)，瞭解指數函數模型的實際背景，體會引入有理指數冪的必要性。我國綱要應該增加函數應用的說明。」民國九十八年將實施的高中數學課程綱要(草案)中即指出「注意歸納思維的訓練，讓學生發現規律性，發展數學建模基本能力」。

數學知識的掌握不全是教出來的，而是自己做出來的。數學建模正好是一個學數學、用數學、做數學的過程，它實現了學和用的統一 (袁震東，2005)。數學建模的能力並非一朝一夕就能養成，在中學階段，可以從簡單的生活情境問題來當作起步，奠立數學建模的基礎。在這些基礎之上可以將問題的來源更生活化，更貼近實際；條件和結論更模糊；可用信息和最終結論更有待學生自己去挖掘。

在中學開展數學應用與建模活動的關鍵是尋找適合學生參與的「好的問題」，教師在選擇這些問題時，應特別注意以下幾點(嚴士健，2003)：

1. 應努力選擇與學生的生活實際相關的問題，並減少對問題不必要的人為加工和刻意雕琢。
2. 數學建模問題應努力表現出建模的全過程，而不僅僅是解決問題本身。
3. 數學建模選用的問題最好有較為寬泛的數學背景，有不同的層次，以便於不同水平學生的參與，並注意問題的可擴展性和開放性。
4. 應鼓勵學生在問題分析解決的過程中使用計算工具和電腦軟體。
5. 提倡教師自己動手，因地制宜地蒐集、編制、改造數學應用或建模問題，以更適

合學生的使用，並根據學生的實際情況採取適當的教學策略。

我們從高中數學課本南一版當中，整理了目前高中數學之建模概念問題，並分成以下幾種類型：極值問題、指數模型、線性規劃、機率與期望值、幾何模型、統計。

A. 極值問題

1. 用一堆木板，製成 80 公尺長的柵欄，去圍成一個矩形的院子，院子的一側是房屋的牆，不必再用柵欄去圍，怎樣設計可使所圍成的院子的面積最大？

(第一冊)

2. 果園種了 30 棵檸檬樹，平均每棵年產 400 個檸檬，根據業者經驗，在此果園中每加種一棵檸檬樹，則每棵年產量平均減少 10 個，問應加種幾棵才能使年總產量最多？

(第一冊)

B. 指數模型

1. 假設光線通過一塊玻璃板，它的強度就會失掉 10%。現在要把 n 塊玻璃板重疊，使通過它們的光線強度是原來光線強度的 $\frac{3}{5}$ 以下，則 n 最少是多少？

(第二冊)

2. 有一食品實驗室，混和甲、乙兩種菌類製成一種新食品。調查後發現“乙菌數目”是“甲菌數目”的1000倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍 (成為原來的四倍)。現在取同數量的甲、乙兩種菌，讓它們同時繁殖。請問至少第幾天後 (取整數) 混和甲、乙兩種菌類才能製成受歡迎的食品？

(第二冊)

3. 在西元2000年，臺灣地區的人口數是23×10^6人 (二仟三百萬人) ，如果每年人口數平均成長率為1%，那麼從2000年算起， x 年後臺灣地區的人口數表成 x 的函數為$f(x)$。(1) 試求 $f(x)$。(2) 估測西元2010年臺灣地區的人口數。

(第二冊)

4. 假設一般病人服某種藥品，服藥後t小時，殘留在胃裡的藥量有$M(t)=450\times0.64^t$ (毫克) ，試問服該種藥品後1.5小時，殘留在病人胃裡的藥量大約有多少毫克？

(第二冊)

5. 生物體內的放射性碳 C_{14} 不斷衰變，經過 t 年其殘餘量 a'與原始含量 a 之間的函數關係是 $a'=a\cdot e^{-kt}$ ($e=2.71828\ldots$) ，其中 k 是常數，並且已知 C_{14} 的半衰期 ($\frac{a'}{a}=\frac{1}{2}$) 是 5570 年。中國大陸出土的一些古蓮子，測得 $\frac{a'}{a}=87.9\%$，那麼這些古蓮子是多少年前的遺物？

(第二冊)

6. 阿財到銀行存入一百萬元，定期存款年利率爲7%，每年複利計息一次，阿財希望本利和達二百萬元（本金的2倍） 時，能一次領回，請偏勞您爲阿財算一算，至少需要幾年 (取整數) ？

(第二冊)

7. 假設世界人口自 1980 年起，五十年內每年的增長率均固定。已知 1987 年 7 月 11 日世界人口達 50 億人 (聯合國將 7 月 11 日定爲“世界人口日”) ，1999 年第 60 億人誕生在東歐賽拉耶佛。試根據上述資料，推估在哪一年，世界人口將達 70 億人？

(第二冊)

8. 假設某一種放射性同位素每年的蛻變率 (衰變率) 爲 10%，剛開始時該同位素的質量是 500 克。(1) 求 t 年後該同位素的質量 $f(t)$ 。(2) 計算同位素的“半衰期” (由 500 克衰變到 250 克所需的時間) 時，您必須去解哪一個指數方程式？算出半衰期需多少年？

(第二冊)

9. 阿財剛上高中時，他的儲蓄已累積四萬元，現在他又選擇一家銀行，把四萬元存入，年利率 8%，每年複利計息一次。 (1)求 n 年後，阿財的本利和有多少元？ (2) 當他的本利和累積到五萬元，需要多少年？

(第二冊)

10. 西元 1980 年中國大陸的人口數是 995×10^{6} 人 (九億九仟伍佰萬人) ，假設每年人口數平均成長率爲 1.4%，試算一算到西元 2000 年時，中國大陸的人口約有多少 (百萬) 人？ (指自然成長，排除移居國外或外來移民) 。

(第二冊)

11. 假設開車發生車禍的百分率 R 與駕駛者血液中酒精濃度 x 的關係可以用下列數學模式表示：$R=3\cdot10^{kx}$，其中 k 是一個常數。假設血液中酒精濃度爲0.06

時的車禍發生率為10％ ($R＝10$) 。

(1) 求 k 之值。

(2)若要使車禍百分率降至 5%以下，必須規定駕駛者血液中酒精濃度不得高於多少？

(數學乙上冊)

12. 心理學家有時候用數學模式：$L(t)=A(1-10^{-kt})$ 來描述在時間 t 時的學習量 $L(t)$，其中A與k都是常數。假設有一學生需要背熟100個英文單字，心理學家發現這個學生在10分鐘時背熟10個單字。根據這些資料，這個學生至少要學習多久，才能背熟80個以上的單字。

(數學乙上冊)

13. 物理學家定義聲波強度為：單位面積中，聲波轉換成能量的數量。例如：人耳所能偵測到頻率為 100 赫 (hertz) 的最小聲音大約是每平方米 10^{-12} 瓦 (walt) 。因為聲波強度可以從很小到很大，所以一般都取其對數來表示音量：$L(I)=10\log\dfrac{I}{I_0}$，其中 $I_0=10^{-12}$ (瓦/平方米) ，I 為聲波強度 (單位：瓦/平方米) ，$L(I)$ 為音量，單位為分貝 (decibels) 。若音量在 70 分貝以上，一般人就會覺得不舒服，問聲波強度在哪一範圍時，音量會超過 70 分貝。

(數學乙上冊)

14. 假設在一個社區裡有一個謠言在傳播，下列的數學模式可以表示這個謠言流傳的速度：$N=P(1-10^{-0.1d})$ ，其中P表示這個社區的總人口，N表示謠言開始流傳後第d天以內已經聽到這個謠言的人口數。設某一社區有2000人，則一個謠言從開始流傳最少要幾天才會有1200人以上聽到這個謠言？

(數學乙上冊)

C. 線性規劃

1. 某化學製造公司有兩家工廠生產同一種產品，A工廠每月最多可生產120公噸，B工廠每月最多可生產160公噸，該公司希望每月總共最少要生產200公噸。依據經驗，A工廠每生產1公噸的產品，則產生10公斤的一氧化氮飄入空氣中，汙染空氣，而B工廠每生產1公噸的產品，則產生15公斤的一氧化氮汙染空氣。問A，B兩工廠每月各要生產多少產品才能符合需求，且對空氣的汙染減至最低？

(數學乙上冊)

2. 某一信託基金公司想要投資A，B兩種債券，最多共1000萬元。A債券比較安全，但利潤較低，其利潤爲8%，B債券利潤爲12%。假設該基金規定投資B債券不得多於600萬元，而投資A債券最少250萬元。問A、B兩債券應各投資多少，才能獲得最大利潤？

(數學甲上冊)

D. 機率與期望值

1. 老張過去買釋迦的經驗是平均 5 個中就有 1 個釋迦內長蟲不能吃須丟掉，因此有次到水果攤買釋迦時向老板抱怨，老板說今天釋迦每斤 70 元，如果老張要求當場打開，則售價提高至每斤 80 元，但如打開有蟲可退回。試以“期望值”的觀點來看，老張應否要求打開？

(第四冊)

2. 網球一盤比賽先勝 6 局者贏，贏一盤可得獎金 1000 元，甲、乙兩人實力相當，但甲已連勝 5 局，請問如果因下雨不再繼續比賽，則甲、乙兩人如何分配獎金才公平？

(第四冊)

3. 醫學上常利用心電圖篩檢心臟疾病，根據統計，有 90% 的心肌梗塞病患可由心電圖篩檢出來（ 即有 10% 的心肌梗塞病患未被查出 ），但也有 5% 健康者的心電圖會被誤判爲患有心肌梗塞。如果某城市有 0.2% 的市民患有心肌梗塞的疾病，請問若某人的心電圖檢查結果被判定爲患有心肌梗塞，則他真正患有心肌梗塞疾病的機率是多少？

(數學甲上冊)

4. 假設有一家租車公司有三個門市，顧客可以從其中任一門市租車而在任一門市還車。如果 $P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0.2\\ 0.1 & 0.7 & 0.3\\ 0.1 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，它的第（ i,j ）元 p_{ij} 表示從 j 門市租的車在 i 門市還的機率。例如 $p_{12}=0.2$ 表示在第二門市租出去的車子中有 $\frac{20}{100}$ 是在第一門市還的。若剛開始時各門市各有 200 輛車，則經過一段時間後，這三處門市的車子大約各有多少輛？（ 假設每天每輛車都有人租 ）

(數學甲上冊)

E. 幾何模型

1. 甲船從碼頭朝東方駛離時，乙船恰在碼頭的北方 7 公里處，正駛向碼頭。甲、乙兩船的航速分別為每小時 60 公里，30 公里。問經過多少分鐘後，兩船相距最近？又最近距離是多少？

(第二冊)

2. 有一塊寬 4 公尺、長 6 公尺的白鐵板，今在四角各截去一個相同的小正方形，然後摺成一個無蓋的長方體蓄水槽，若要求水槽的容積不小於 8 立方公尺(鐵板厚度不計)，那麼四角被截去的小正方形邊長若干？

(第一冊)

3. 站在瞭望臺O點處發現正北方，仰角60°之A點處有一架飛機保持$500\sqrt{3}$公尺高度，等速朝東飛行，5秒後測得該飛機B點處的仰角為30°。試問：

(1) $\overline{OC}$與$\overline{OD}$的長度是多少？(2) 該飛機的速度為何？

(第二冊)

4. 兩名搬家工人正要將一個大衣櫃搬出房間，已知此衣櫃的長為 1.5 公尺，寬為 0.8 公尺，高為 2.5 公尺；房門的寬為 1.2 公尺，高為 2.2 公尺，請問此衣櫃的傾斜度要在多少度以下，才能順利通過房門？

(第二冊)

5. 某公園內有一半徑50公尺的圓形池塘，池塘內有美麗的荷花與錦鯉。為方便遊客觀賞，並使整體景觀更為雅緻，打算在池塘上建造一座“T”字型木橋。試問這座木橋總長最長有多長？

(第二冊)

6. 在馬戲團中常演出砲彈人的節目：一個人從大砲中射出，飛到對面的安全網中。如果大砲的仰角為θ ($0°<\theta<45°$)，且砲彈人被射出的初速為v_0公尺/秒，則此人被射出的水平距離為$R=\dfrac{v_0}{9.8}\sin 2\theta$ (公尺)。

如果安全網架設距大砲30公尺到40公尺之範圍內 (安全網長度10公尺)，且砲彈人被射出的初速為19.6公尺/秒，則大砲的仰角應在哪一個範圍之內才安全？

(數學乙上)

7. 有一張矩形會議桌，寬 1.2 公尺、長 3 公尺，今要裁一塊桌布，使它的面積不大於桌面的 2 倍，並且從桌面四邊垂下的長度要相等。應如何裁剪？ (第一冊)

F. 統計

1. 甲合約：若有一批零件共 10000 件，合約規定抽取 100 件零件，如有 2 件或 2 件以上不良品時退貨，否則接受此批零件。乙合約：若有一批零件共 10000 件，合約規定抽取 50 件零件，如有 1 件或 1 件以上不良品時退貨，否則接受此批零件。假設已知一批貨的不良率是 2%，這兩份合約哪一份對生產者較有利？

(數學乙上)

2. 蒐集臺灣地區 8 個地點的公告地價與市價（ 單位：萬元/坪 ）如下：

公告地價（x）	12	10	22	30	8	40	20	18
市價（y）	15	11	28	40	10	72	39	25

若某塊土地公告地價是每坪28萬元，試利用迴歸式預測其市價。

(數學乙上)

G. 其他

1. 桌面上放了 15 粒棋子，甲、乙兩人輪流取棋子，每次至少拿 1 粒，至多拿 3 粒，規定：拿到最後一粒棋子的人獲勝。你有制勝的策略嗎？

(第一冊)

2. 有一項運動協會，要從 250 位會員代表中選出 7 位理事，250 位代表每人投一票互選。如果你想選上理事，至少要得多少選票，纔能保證當選？

(第一冊)

3. 某公司有甲、乙、丙三條生產線，現欲生產三萬個產品，如果甲、乙、丙三條生產線同時開動，則需 10 小時；如果只開動乙、丙兩條生產線，則需 15 小時；如果只開動甲生產線 15 小時，則需再開動丙生產線 30 小時，才能完成所有產品。問：如果只單獨開動甲、乙、丙生產線，則各需幾小時，才能生產三萬個產品？

(第三冊)

3.2 升學考試中的數學建模題目

考試中的數學問題，依解題的層次可以分成概念試題、程序試題、解題試題，概念試題是在檢定考生對數學基本定義、觀念或者概念的瞭解、表達與辨識程度。概念

性試題可分為如下三大類：基本概念題、定理概念題、建模概念題。其中建模概念題在測試學生將問題轉換成可以用代數結構、幾何操作或自建模型解釋的能力 (許志農，2004)。

分析近幾年的升學考試試題，可以發現試題中有愈來愈多情境試題的趨勢，所謂情境試題意指數學試題本身是具有情境的，此類試題在於測驗學生是否能將情境與所學的數學相連結(融合)，進而解決問題(許志農，2004)。要解這些情境試題，需要具備一定的數學能力，且將所學的數學知識融會貫通，加以綜合應用，還有對問題的洞察力與思考能力也相當重要。

以下蒐集了近幾年在升學考試出現的情境題或建模概念題，這些題目的深度與廣度都高出課本的例題，不過仍符合高中學生的程度，因此要在高中進行數學建模的活動時，這些題目可以當做很好的指引。有些題目我們僅保留題幹部分，做了若干刪減，並不是完整的問題，依 3.1 節的分類方式加以整理，詳列如下：

A. 極值問題

1. 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。

(95 年指定考試數學甲)

2. 一農夫想用66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬2公尺的出入口，如下圖示。此農夫所能圍成的最大面積為________平方公尺。

(95年指定考試數學乙)

B. 指數模型

1. 地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加為原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100000 倍，依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。 (94 年指定考試數學甲)

2. 據內政部統計，台灣地區在西元 2000 年底有 2228 萬人，而最近九年的人口平均年增加率為 0.0087，假設此後一世紀內，人口的年增加率皆為 0.0087，則台灣地區人口增加 50% 而達到 3342 萬人時，會最接近下面所列的哪一年(西元)？

(90 年指定考試數學甲)

3. 根據過去長期統計資料顯示：某公司推銷員的年資 x (年)，與每次推銷成功的機率 $y(x)$，滿足下列關係式： $y(x)=\dfrac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}$

(94 年指定考試數學乙)

4. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$ (約 2.16) 倍。觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，試問這國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍？

(93 年指定考試數學乙)

5. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$ (W/m^2)；當測得的聲音強度為 I (W/m^2) 時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$ 。

(93 年指定考試數學乙)

6. 目前國際使用芮氏規模來表示地震強度。設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時，震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$ 的關係如下：$\log E(r) = 5.24 + 1.44r$，

(1)某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？

(2)試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之多少倍？ (整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44} = 27.54$)

(90 年指定考試數學乙)

7. 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？ (95 年學科能力測驗)

8. 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後， t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100(1-2^{-kt})\%$ ，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？

(92 年學科能力測驗)

9. 某君於九十年初，在甲、乙、丙三家銀行各存入十萬元，各存滿一年後，分別取出。已知該年各銀行之月利率如下表，且全年十二個月皆依機動利率按月以複利計息。

	甲銀行	乙銀行	丙銀行
1-4 月	0.3%	0.3%	0.3%
5-8 月	0.3%	0.4%	0.2%
9-12 月	0.3%	0.2%	0.4%

假設存滿一年，某君在甲、乙、丙三家銀行存款的本利和分別為 a、b、c 元。

(91 年指定考試數學甲)

10. 前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓台灣 double(加倍)，一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 a%，其中 a 為整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值為__________。

x=	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log(1+0.01x)≒	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

(91 年指定考試數學乙)

11. 某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。某乙則於 89 年 7 月起，每單月(一月、三月、五月…)1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元。問下列選項何者為真？

(91 年學科能力測驗)

C. 線性規劃

1. 為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少84單位的營養素A、至少72單位的營養素B和至少60單位的營養素C給他的雞群。

這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價5元並含有7單位的營養素A，3單位的營養素B與3單位的營養素C；第二種飼料每公斤售價 4元並含有

2單位的營養素A，6單位的營養素B與2單位的營養素C。

(1)若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x, y 必須滿足的不等式組。

(2)若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x, y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？

(95年指定考試數學乙)

2. 南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查每年中草藥最大需求量為 30 公斤，健康食品最大需求量是 1800 公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤，並製成健康食品 y 公斤，設 P 為其可獲利潤。

(93 年指定考試數學乙)

3. 某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點。

根據市場調查發現成為明歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數(形象指數與知名度指數的和)至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手(形象指數與知名度指數皆為 0)成為明歌星，至少應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電台個分配多少，效果最好。(請在座標平面上畫圖求解)

(91 年指定考試數學乙)

4. 某公司所生產的產品，存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位、40 單位，現在市場 A、市場 B 分別的需求量是 20 單位、30 單位，下表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本。在滿足 A、B 市場的需求下，最節省的運輸成本為________元。

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500 元	450 元
倉庫乙	400 元	300 元

(92 年指定考試數學乙)

D. 機率與期望值

1. 某公司考慮在甲、乙兩地選擇一地投資開設新廠。經評估，在甲地設廠，如獲利，預計可獲利 10000(萬元)；如不獲利，預計虧損 7000(萬元)。在乙地設廠，如獲利，預計可獲利 6000(萬元)；如不獲利，預計虧損 5000(萬元)。又該公司評估新廠在甲、乙兩地獲利的機率分別爲 0.6，0.7。如以獲利期望值爲決策準則，該公司應選擇甲地或乙地投資？寫出作決策的過程。

(91 年指定考試數學乙)

2. 宴會在場的 50 位賓客有人偷了主人的珠寶，由於賓客身上都沒有珠寶，而且他們都不承認偷竊。警方決定動用測謊器，並且只問客人一個問題：「你有沒有偷珠寶？」。已知若某人說謊，則測謊器顯示他說謊的機率爲 99%；若某人誠實，則測謊器顯示他誠實的機率是 90%。

(94 年指定考試數學甲)

3. 使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：把雙白球稱爲狀態 1，一白球一黑球稱爲狀態 2，雙黑球稱爲狀態 3。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球(移入白球或黑球的機率相等)。每次操作可能會改變袋中球的狀態。

(93 年指定考試數學甲)

4. 彩票公司每天開獎一次，從 1、2、3 三個號碼中隨機開出一個。開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼爲止。如果在第一天開出的號碼是 3，則在第五天開出號碼同樣是 3 的機率是________。

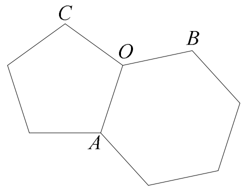
(92 年指定考試數學甲)

5. 醫療主管機關持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 4%的機率，將一不患該傳染病的受檢者誤檢爲患有該病。已知全部男性人口中有 0.2%的機率患有此病。現於兵役體檢時進行檢測，若該梯次亦難共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。

(91 年指定考試數學甲)

E. 幾何模型

1. 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成 (令它們的邊長均爲 1) 的平面圖形，如下圖所示：



(95年指定考試數學乙)

2. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過8°。某建築公司打算在離機場中心3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高5 公尺的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋______層樓。

(95 年指定考試數學乙)

3. 珈慶杯撞球大賽的勝負是這樣決定的：裁判將寬16 公分、長7公分的千元鈔票貼邊放置在長方形球台的左下角，如右圖所示。甲、乙兩參賽者分別擊球，球靜止位置離鈔票中心點較近者獲勝。

甲、乙擊球後，裁判拿尺仔細量得甲所擊球停在離球台左緣23公分，離球台下邊39.5 公分處；乙所擊球停在離球台左緣 40 公分，離球台下邊27.5公分處。

(95年指定考試數學乙)

4. 設一地球儀球心爲空間坐標原點，有兩個城市的坐標分別爲 A(1, 2, 2)，B(2, -2, 1)。假定地球爲半徑等於 6400 公里的圓球，試問飛機從 A 城市直飛至 B 城市的最短航線長最接近下列那一個選項的值？

(94 年指定考試數學乙)

5. 李探長爲了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從(0, 0, 2)朝向(5, 8, 3)發射一固定雷射光束，接著又從點 $(0, 7, a)$ 沿平行於 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 爲何值時，兩雷射光束會相交？

(93 年指定考試數學乙)

6. 當平面上的點(x, y)之坐標 x 與 y 都是整數時，稱點(x, y)爲格子點。數學家知道：坐標平面上三個頂點皆爲格子點的三角形之面積可以用公式：$aS+bI+c$ 來表示，其中 S 代表三角形三邊邊上的格子點數，I 是落在三角形內部(不含邊上)的格子點數，a, b, c 是固定的常數。則(a, b, c)=______________。

(93 年指定考試數學乙)

7. 坐標平面上的圓C: $(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有________個點與原點的距離正好是整數值。

(93 年學科能力測驗)

8. 一群登山友，在山上發現一顆巨樹，隊中 10 位身高 170 公分的男生，手拉著手剛好環抱大樹一圈。問樹幹的直徑最接近下列何值？

(91 年學科能力測驗)

六、統計

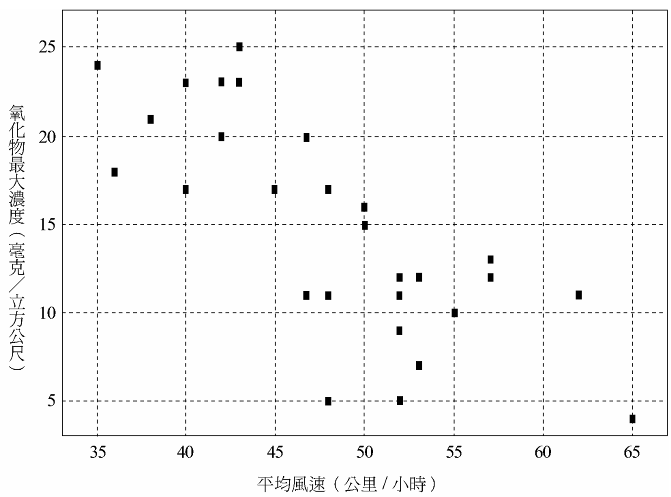
1. 下表是 2001 年時， 從各國國會網站取得有關『該國國會議員席次與人口數』的資料：

國名	議會席次y	人口數P(千人)
冰島	63	270
挪威	165	4480
丹麥	175	5330
泰國	393	60600
日本	500	126540

根據上述資料，人口數(以千人爲單位)爲 P 的國家，他們的國會議員席次 y，以下列哪個公式制訂較接近上述五個國家的現況？

(92 年指定考試數學乙)

2. 空氣品質會受到污染物排放量及大氣擴散等因素的影響。某一機構爲瞭解一特定地區的空氣品質，連續二十八天蒐集了該地區早上的平均風速及空氣中某特定氧化物的最大濃度。再繪製這二十八筆資料的散佈圖(見下圖)。



(91 年指定考試數學甲)

3. 某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分爲高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口

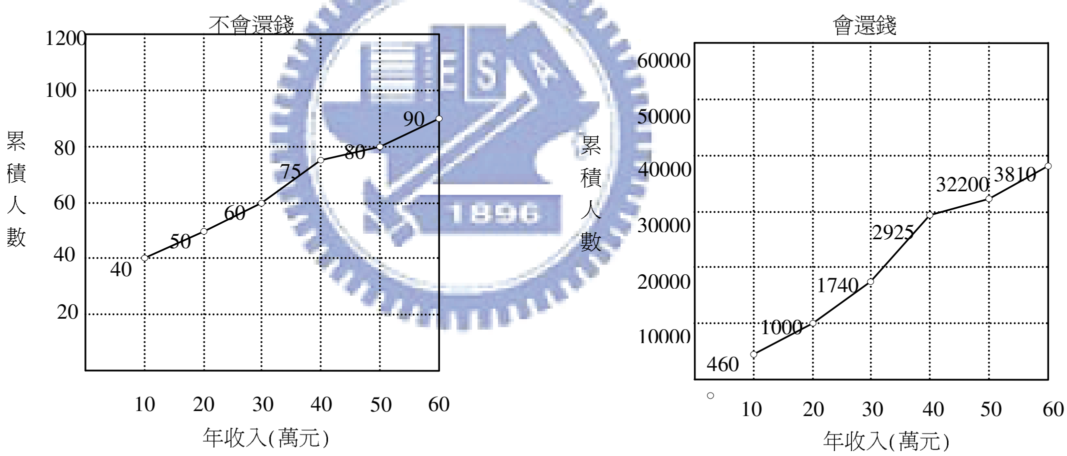
中，每年有四成會轉變為低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變為高收入？。

(92 年指定考試數學甲)

4. 根據調查，在華人社會，身高 H 公尺，體重 W 公斤的人中，其平均體表面積 S 平方公尺，可以用數學模型 $S=aH+bW-0.01$ 來表示，這裡的 a，b 是常數。又知體重一樣，身高多 5 公分，平均體表面積會增加 0.03 平方公尺；而身高一樣，體重多 4 公斤，平均體表面積會增加 0.05 平方公尺。根據模型，身高 170 公分，體重 64 公斤，應該有__________平方公尺的平均體表面積。

(92 年指定考試數學乙)

5. 某銀行檢討『一年期 20 萬元的小額急用貸款，一年後還款 21 萬元』的申請資格。過去幾年的記錄顯示：申辦此項貸款者一年後只有依約還款 21 萬元與違約不理 (1 元都不還) 兩種情形，沒有還一部分錢等其他情形發生；且發現會還錢或不會還錢者與其年收入有關，兩者的累積次數分配部分圖形如下：



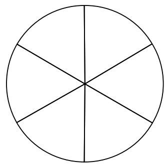
(94 年指定考試數學乙)

6. 沈醫師認為身高 H(公尺)的人，其理想體重 W(公斤)，應符合公式：$W=22H^2$ (公斤)。一般而言，體重在理想體重 ±10%範圍內，稱為標準體重；超過 10%，但不超過 20%者，稱為微胖；超過 20%者，稱為肥胖。微胖及肥胖都是過重的現象。對身高 H，體重 W 的人，體重過重的充要條件為 $W>cH^2+dH+e$，則 (c, d, e) ＝____________。

(92 年指定考試數學乙)

G. 其他

1. 如下圖所示，某摩天輪等分為6 個全等區域。為了夜間的燈光造景， 6 個區域分別採用不同顏色的燈光裝飾。若有7 種不同顏色的燈光可供使用，則此摩天輪正面的夜間燈光造景共有________種不同的顏色排列方式。



(95 年指定考試數學乙)

2. 一個「訊息」是由一串5 個數字排列組成，且每位數字都只能是0 或1，例如10010 與01011 就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串10010 與01011 在第1, 2 及5 三個位置不同，所以訊息10010 與01011 的距離為3。

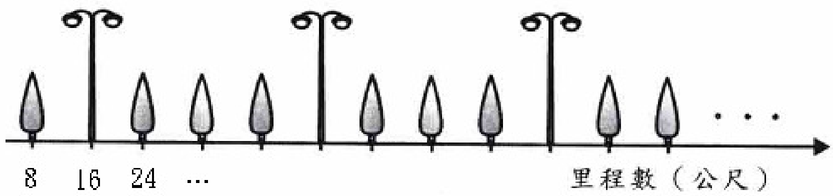
(95 年指定考試數學乙)

在國中升高中的基本學力測驗中，由於國中生所具備的數學能力相當有限，並且該測驗只是評量學生基本學科能力，因此只有少數題目較接近數學建模的程度。以下是從最近五年的考試中蒐集的相關題目：

1. 一群海盜在無名島上藏了三批珠寶，先在島上 A 地藏第一批珠寶，然後向東走 x 公里，再向南走 5 公里到 B 地藏第二批珠寶，再循原路回到 A 地後，向西走 6 公里，再向北走 10 公里到 C 地藏第三批珠寶，如果 A、B、C 三地恰在一直線上，則 x=？

(90 年國中基本學力測驗)

2. 如圖，在某條以路上，從里程數 8 公尺開始到 4000 公尺為止，每隔 8 公尺將樹與燈按圖中所示之規則設立：在里程數 8 公尺處種一棵樹，在 16 公尺處立一盞燈，在 24 公尺處種一猓樹…，且每兩盞燈之盼的距離均相等。依此規則，下列哪一個選項是里程數 800 公尺~824 公尺之間，樹與燈的正確排列順序？



(90 年國中基本學力測驗)

3. 某公司每天晚上必須派保全人員留守，表中是甲、乙、丙、丁、戊五位保全人員的留守值班表。該公司排班的規則如下：

(1)按甲、乙、丙、丁、戊的順序，各排一天班。

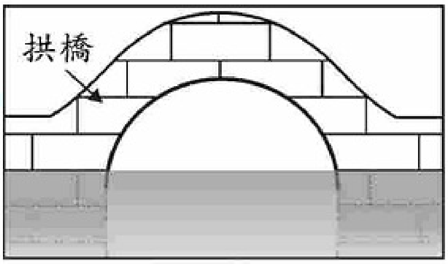
(2)五人排完之後再以原順序排班。

	一	二	三	四	五	六	日
第 1	甲	乙	丙	丁	戊	甲	乙
第 2	丙	丁	戊	甲	乙	丙	丁
…	…	…	…	…	…	…	…

請問「丙」先生在下列週次中的哪一週必須留守兩次？

(91 年國中基本學力測驗)

4. 圖為一拱橋的側面圖，其拱橋下緣呈一弧形，若洞頂為橋洞的最高點，且知當洞頂至水面距離為 90 公分時，量得洞內水面寬為 240 公分。後因久旱不雨，水面位置下降，使得拱橋下緣呈現半圓，這時，橋洞內的水面寬度變為多少公分？



(91 年國中基本學力測驗)

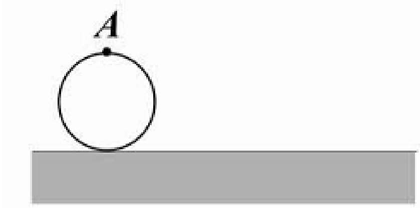
5. 表為某照相館的價目表，今逢週年慶，底片沖洗與照片沖洗皆打九折。守守帶了一卷底片去沖洗規格(3×5)的照片若干張，打折後共付了 189 元。請問守守洗了多少張照片？

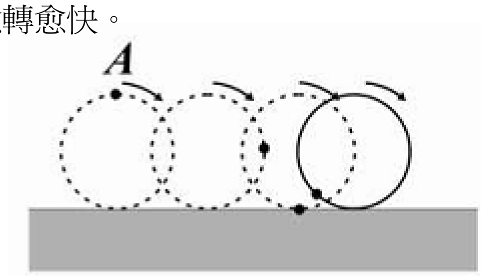
價目表

項目	費用
底片沖洗費	70 元 / 卷
規格(3 × 5)	4 元 / 張

(92 年國中基本學力測驗)

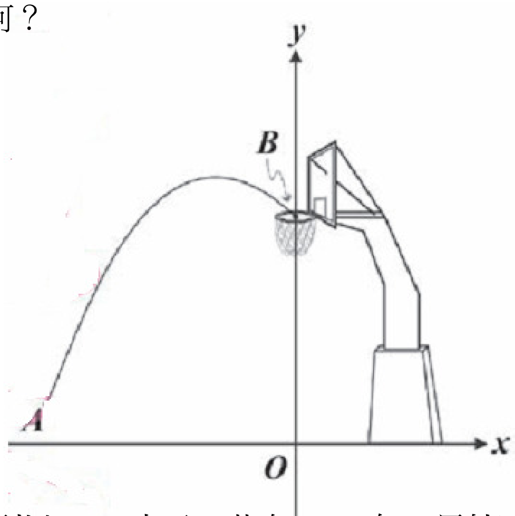
6. 如圖，地板上有一圓，其圓周上有一點 A。今在沒有滑動的情況下，將此圓向右滾動。已知當 A 接觸到地板時，會在地板上留下一個印子，如圖所示，且此圓滾動的方式是：第 1 分鐘轉 1 圈，第 2 分鐘轉 2 圈，第 3 分鐘轉 4 圈……依此規則(即每一分鐘轉的圈數都是前一分鐘的兩倍)，愈轉愈快。





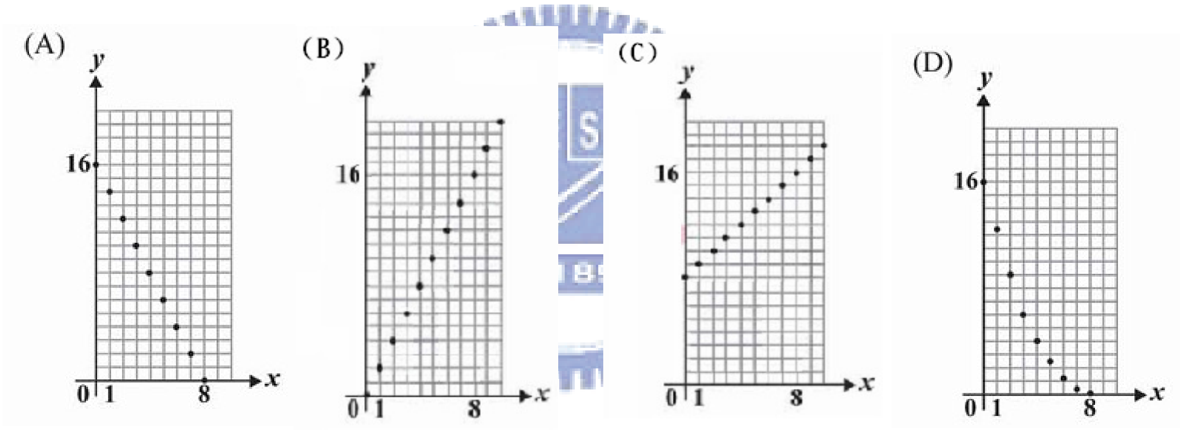
(93 年國中基本學力測驗)

7. 下圖是一坐標平面。已知籃框位置 B 點在 y 軸上，今有一選手將球從 A 點的位置投出，球經過的路徑是拋物線，由 B 點空心進籃。若此拋物線是下列某一函數的圖形，則此函數為何？



(92 年國中基本學力測驗)

8. 將兩兄妹的年齡分別以 y、x 表示。若在 2004 年，兄妹兩人的年齡分別為 16 歲、8 歲，則下列哪一個圖形為兩人年齡的關係圖？



(94 年國中基本學力測驗)

9. 小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼(例如，生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 與 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145)。已知小華的密碼為 2030，求小華出生在幾月分？

(94 年國中基本學力測驗)

10. 甲、乙兩店賣豆漿，每杯售價均相同。已知：

甲店的促銷方式是：每買 2 杯，第 1 杯原價，第 2 杯半價。乙店的促銷方式是：每買 3 杯，第 1、2 杯原價，第 3 杯免費。例如，分別在甲、乙兩站購買豆漿 5 杯，均需 4 杯的價錢。若東東想買豆漿 24 杯，則下列哪一個方式花的錢最少？

(95 年國中基本學力測驗)

3.3 北京高中數學知識應用競賽

自 1997 年起，北京教委會舉辦「第一屆北京市高中數學知識應用競賽」，目的在「開展數學知識應用競賽，推動數學教育改革」，作爲探索和推動數學教育改革，在學科中實施素質教育的一項教育改革的實驗。

競賽中的試題背景大都從自然、生活、社會的實際現象中提出，有助於中學生了解數學與現實生活的關聯，提高應用數學的能力。試題的解法以高中數學所學到的知識、方法爲原則。真正從生活實際提出來的問題以及解決這類問題的思維模式是中學生和多數中學數學教師不十分熟悉的。這類問題的條件和結論之間的邏輯關係不一定像數學問題那樣明確，那樣配合的嚴絲合縫，甚至還需要對問題進行進一步的加工整理才能初步看出問題的數學結構。題目中的資料是實際觀測的結果，他們在不同程度上與實際存在誤差，如何處理這些問題，在我們傳統的數學教育中並沒有給予足夠的注意(北京高中數學知識應用競賽命題組，2002)。在台灣的考試中並不能使用計算機，因此題目的設計便受到限制，有些數據還必須加以設計，以免答案太「醜」，這樣的題目就不是那麼的自然。

北京高中數學知識應用競賽分初賽和決賽兩個階段進行。初賽是開卷的，在一個星期五的 16：00 將試卷發給學生，答卷地點不限，可以參考任何資料，可以使用任何計算工具 (包括電腦、計算器、各種數學軟體) 。要求學生獨立完成，提倡誠實的治學態度；如果學生與他人作了討論，則要求學生在考卷上注明討論的情況。星期一上午 8：00，學生把完成的試卷交給教師批改。

決賽分兩部分。一是讓學生完成一篇數學應用的小論文，即讓學生觀察社會、自然和生活，發現問題，提出問題，運用自己學過的數學和其他知識，把問題變成數學問題，然後解決這一問題，寫成一篇論文。論文成績作爲總成績的一部分，並單獨設立優秀論文獎。決賽的第二部分是閉卷答題，在 150 分鐘內在指定地點每個人獨立完成問卷中的問題，答卷時可以使用計算器等計算工具 (北京高中數學知識應用競賽命題組，2002)。

這個競賽的初賽題目對於一般生活化問題來說又更貼近真實情境，對於高中生數

學建模的學習也是很好的途徑。以下蒐集了第一屆到第七屆的初試試題，按 3.1 節中的分類，列舉數道北京高中數學知識應用競賽中的試題如下：

A. 極值問題

1. 某罐裝飲料廠爲降低成本要將制罐材料減少到最小，假設罐裝飲料筒爲正圓柱體(視上、下底爲平面)，上下底半徑爲 r，高爲 h．若體積爲 V，上下底厚度分別是側面厚度的 2 倍，試問當 r 與 h 之比是多少時用料最少？(你可以到市場上做一下調查，看看哪些罐裝飲料大體上符合你的計算結果)

(第一屆)

2. 小童的父親要到美國訪問，受人之托希望多帶點東西。中國民航的《國際旅客須知》中有關規定："計件免費行李額"中規定"適用中美、中加國際航線上的行李運輸…。經濟和旅遊折扣票價，免費交運的行李數爲兩件，每件箱體三邊之和不超過 62 英寸 (158 釐米) ，但兩件之和不得超過 107 英寸 (273 釐米) ，每件最大重量不得超過 32 公斤。"試問這兩個箱子的長、寬、高各爲多少可達最大體積？請到市場上看看，商店出售的行李箱的尺寸與你計算所得結果是否近似？爲什麼？

(第三屆)

B. 指數模型

1. 中國人民銀行前不久公佈銀行存款利率從 97 年 10 月 23 日起下調，調整後的整存整取年利率如下表：

一年期	二年期	三年期	五年期
5.67％	5.94％	6.21％	6.66％

現有一位剛升入初一的學生，家長欲爲其存 1 萬元，以供 6 年後上大學使用．若此期間利率不變，問採用怎樣的存款方案，可使 6 年所獲收益最大？最大收益是多少？

(第一屆)

2. (考古工作中的碳-14 計年法)人們早就發現了放射性物質的衰減現象，最常見的放射性物質之一是碳-14，他常用來確定有機物的年代。比如，一段骨骼含少量的碳-14，它在骨骼的含碳量占有一定比例，一旦有機物死亡，它就不能通過與外界環境的相互作用(例如呼吸)獲得碳-14，並且還要不斷衰減。

已知放射性物質的衰減服從指數規律：$C(t)=C_0e^{-rt}$，其中 t 表示衰減的時間，C_0 表示放射性物質的原始質量，$C(t)$表示經衰減了 t 年後尚存的質量，e≒2.72 是一個非常重要的常數。爲計算衰減的年代，通常給出該物質質量衰減一半的時間，稱其爲該物質的半衰期，碳-14 的半衰期大約是 5730 年，由此可確定係數。人們又知道，放射性物質的衰減速度是與其質量成正比的。

1950 年在巴比倫發現一根刻有 Hammurbi 王朝字樣的木炭，當時測定，其碳-14 分子的衰減速度爲 4.09(個/每克每分鐘)，而新砍伐燒成的木，碳-14 的衰減速度爲 6.68(個/每克每分鐘)，請估算出其 Hammurbi 王朝所在年代。

(第二屆)

3. 據世界人口組織公佈，地球上的人口在西元元年爲 2.5 億，1600 年爲 5 億，1830 年爲 10 億，1930 年爲 20 億，1960 年爲 30 億，1974 年爲 40 億，1987 年爲 50 億，到 1999 年底，地球上的人口數達到了 60 億。請你根據 20 世紀人口增長規律推測，到哪年世界人口將達到 100 億？到 2100 年地球上將會有多少人口？

(第三屆)

4. 根據中國人民銀行頒布的《個人住貸款管理辦法》(第十一條) ”借款人應和貸款銀行制定還本付息計劃，貸款期限在一年以上的，按月歸還貸款本息” 的規定，爲方便貸款銀行操作和選擇，中國人民銀行具體規定了個人住房貸款的兩種按月還本付息的辨法，允許借款人和貸款銀行在雙方商議的基礎上做出選擇。

第一種辨法是等額本息還款法，其還款方式已經在 1999 年第三屆北京高中數學知識應用競賽初賽試題的第 3 題作了介紹，並要求給出月均還款額、還款總額和利息負擔和的計算公式。按照這些公式不難算出，一個人如果從銀行得到買房貸款 40 萬元，計劃 20 年還清貸款，按規定貸款的年利率應爲 5.58%，這時貸款人的月均還款額應爲 0.27696 萬元，還款總額爲 66.4717 萬元，利息負擔總和爲 26.4717 萬元。

第二種辨法是等額本金還款法(又叫等本不等息還款法)，指在貸款期間內，每月除了要還清當月貸款的利息外，還要以相等的額度償還貸款的本金。這樣一來，每月償還的貸款的利息將隨本金的減少而逐月遞減。因此稱之爲等本不等息還款

法。如果這個貸款人選擇了等額本金還款法，在 20 年內償還他所借的 40 萬元貸款，他只需要償還本息總合 62.413 萬元，其中利息負擔的總合爲 22.413 萬元，比前一種還款方法少支付利息 4.0587 萬元，節省了 15.33%的利息。

請你給出等額本金還款法的每月還款額，還款總額和利息負擔和的計算公式，使用這些公式計算貸款初期的前三個月的每月還款額，並進一步分析貸款人還款多少個月之後，他每個月的還款負擔將低於等額植息還款法的還款負擔。

(第四屆)

5. 中國青年報 2002 年 9 月 19 日報導：據北京市交通管理局的最新統計，目前北京機動車總量已突破 180 萬輛，每 100 個家庭擁有超過 10 輛汽車，城市汽車擁有量已躍居全國首位。……，到 2008 年左右，北京機動車保有量將達到 300 萬輛。

(1) 請你按以上資訊，計算北京今後 6 年的機動車平均年增長率；

(2) 給出一個適合北京遠景規劃的汽車新牌號設計原則和設計方案，設計原則中應考慮城區普通車、農用車、警用車、外籍車等不同車種的區分。

(第六屆)

C.線性規畫

1. 現有甲乙兩個服裝廠生產同一種服裝，甲廠每月產成衣 900 套，生產上衣和褲子的時間比是 2：1，乙廠每月產成衣 1200 套，生產上衣和褲子的時間比是 3：2。若兩廠分工合作，請安排一生產方案，其產量超過原兩廠生產能力之和，求出每月生產多少套成衣？

(第一屆複試)

2. 改革開放以來，土地承包製成爲基本政策，經常會遇到類似下面的阿題：

北京懷柔縣某村一農民承包了 100 畝(中低產)地土地租用費 50 元/年、畝，農業稅 10 元/年、畝；根據當地氣候條件，可以種植小麥、玉米和花生，其種植週期是：10 月份(秋天)收玉米後可種冬小麥，第二年 6 月(夏天)收割小麥，6 月份收割小麥後可種玉米，10 月份收割玉米，4 月份種花生，10 月份收割花生，收割花生後可種冬小麥。

有關冬小麥、花生、玉米三種作物的收支價格及產量如下表所示。

項目／作物	耕地 元/畝	播種 元/畝	澆水 元/畝	收割 元/畝	化肥 元/畝	農藥植保 元/畝	種籽 元/畝	中耕 元/畝	畝產 公斤/畝	售價 元/公斤
冬小麥	14	10	66	45	111	2	30	0	300	1.68
夏播玉米	14	10	0	45	81	1	9	10	400	1.23
春播花生	14	10	0	8	78	4	56	0	200	3.1

這位農民每年必須完成 20000 公斤小麥公糧，每年留足全家 1000 公斤口糧，另外根據市場預測 1996 年花生種植面積不宜超過 20 畝，1997 年不宜再種花生。

試問：這位農民應如何安排從 1995 年 10 月秋種至 1997 年 10 月秋收的兩年生產計畫，使他既能完成公糧徵購任務，又能留夠口糧，並且在 100 畝土地上取得最大收益？(爲了便於計算，不妨假定從 1995～1997 年內各種價格不變，產量也不變，並且不計承包人自己的工資，假定賣公糧價與賣餘糧價相同。)

(第一屆)

3. 根據國家版權局《書籍稿酬暫行規定》，書籍稿酬由基本稿酬和印數稿酬組成。基本稿酬的標準爲：(1) 著作稿酬每千字 10 至 30 元，確有學術價值的，可適當提高，但每千字不超過 40 元；(2) 詞書稿有兩種計酬方法：其一是按一般著作稿標準另加 15%至 20%計算 (詞條書目) ；其二是按每千字 20 元至 30 元計算，另增加 20%至 30%的基本稿酬 (百科全書詞條) 。

印數稿酬的標準爲：(1) 一般書籍，印數在一萬冊以內的，以一萬冊計算付基本稿酬的 8%。印數超過一萬冊的，其超過部分每千冊付基本稿酬的 0.8%。(2) 確有學術價值而印數較少的專著，印數在一萬冊以內的，以一萬冊計算付基本稿酬的 30%，印數超過一萬冊的，計算方法同 (1)。根據以上內容，解答下列問題。

(1) 若印 x 千冊，試寫出每千字最高稿酬 $f(x)$和每千字最低稿酬 $g(x)$的函數關係式；

(2) 若王教授出版了一本 25.4 萬字的書，印數 1.8 萬冊，試計算他可獲得的最高稿酬和最低稿酬。

(第三屆)

4. 某工廠的一個車間生產某種產品，其成本爲每公斤 27 元，售價爲每公斤 50 元，在生產產品的同時，每公斤產品產生出 0.3 立方米的污水。污水有兩種排放方式：

其一是輸送到污水處理廠，經處理 (假設污水處理率爲 85%)後排入河流；其二是直接排入河流。若污水處理廠每水時最大處理能力是 0.9 立方米污水，處理成本是每立方米污水 5 元；環保部門對排入河流的污水收費標準是每立方米污水 17.6 元，根據環保要求該車間每小時最多允許排入河流中的污水是 0.225 立方米。試問：該車間應該選擇怎樣的生產與排污方案，使其淨收益最大。

(第四屆)

5. 永強加工廠接到一批訂單，爲完成訂單任務，需用 a 米長的材 料 440 根，b 米長的材料 480 根，可採購到的原料有三種，一根甲種原料可截得 a 米長的材料 4 根，b 米長的材料 6 根，b 米長的材料 2 根，成本爲 50 元；一根丙種原料可截得 a 米長的材料 4 根，成本爲 40 元，問怎樣採購，可使材料成本最低？

(第六屆)

D. 機率與期望值

1. 某地發行 10 萬張彩票，其中有 100 張能中獎，即隨機抽取一張中獎概率爲千分之一。小王認爲買 1000 張彩票應該能中獎，但他買了 1000 張後卻沒中獎，他很不高興。他的一個朋友告訴他，買 1000 張彩票不中獎的概率要大於 35%，他很吃驚，這個結論對嗎？請你估計一下這個概率，並給出解釋。

(第二屆)

2. 體育彩票的抽獎是從寫在 36 個球上的 36 個號碼隨機搖出 7 個。有人統計了過去中特等獎的號碼，聲稱某一號碼在歷次特等獎中出現的次數最多，它是一個幸運號碼，人們應該買這一號碼，也有人說，若一個號碼在歷次特等獎中出現的次數最少，由於每個號碼出現的機會相等，應該買這一號碼，你認爲他們的說法對嗎？

(第六屆)

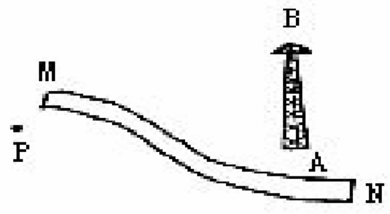
E. 幾何模型

1. 有一隧道內設雙行線公路，其截面由一長方形和一拋物線構成，爲保證安全，要求行駛車輛頂部(設爲平頂)與隧道頂部在豎直方向上高度之差至少要有 0.5 米，若行車道總寬度 AB 爲 6 米，請計算車輛通過隧道時的限制高度是多少米？(精確到 0.1 米)

(第一屆)

2. 如圖所示，有一條河 MN，河岸的一側有一很高建築物 AB．一人位於河岸另一側

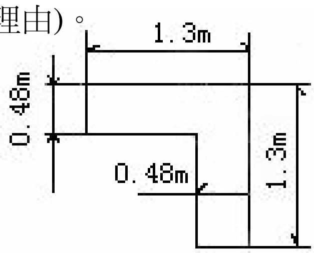
P 處，手中有一個測角器(可以測仰角)和一個可以測量長度的皮尺(測量長度不超過 5 米)。



請你設計一種測量方案(不允許過河)，並給出計算建築物的高度 $\overline{AB}$ 及距離 $\overline{PA}$ 的公式．希望在你的方案中被測量資料的個數儘量少。

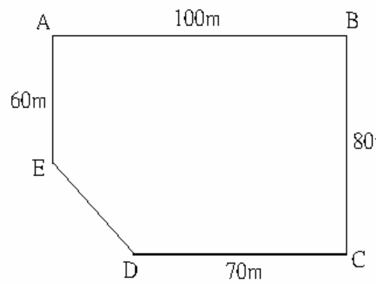
(第一屆)

3. 一房間的門寬爲 0.9 米，牆厚爲 0.28 米. 今有一傢俱其水準截面如圖，問能否把此傢俱水準地移入房間內(說明理由)。



(第一屆)

4. 某房地產公司擁有一塊缺角矩形荒地 ABCDE，邊長和方向如右圖。欲在這塊地上建一座地基爲長方形東西走向的公寓，請畫出這塊地基，並求地基的最大面積 (精確到 $1cm^2$) 。

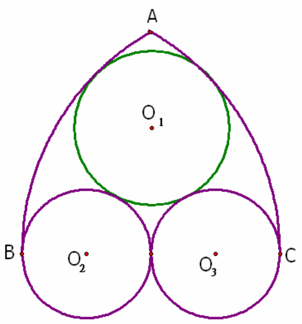


(第二屆)

5. 某學校有一塊矩形土地，南北向長 100m，東西向寬 90m，欲建 4 條並排跑道，每條跑道寬爲 1m，且內圈長爲 300m，請你給出較爲簡單的設計原則及具體設計方案。

(第二屆)

6. 《中學生數學》雜誌 2000 年第一期的封面是一幅歐洲教堂的照片，它是一座哥德式的建築。建築物上有一個窗戶的造型如下圖所示。圖中弧 AB 和弧 AC 分別是以 C 和 B 爲圓心，BC 長爲半徑的圓弧。圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 兩兩相切，並且圓 O_1、圓 O_2 與弧 AB 相切，圓 O_1、圓 O_3 與弧 AC 相切，圓 O_2、圓 O_3 的半徑相等。如果使圓 O_2、圓 O_3 充分大，記 $\overline{BC}$ 的長度爲 a，請你計算出圓 O_1 的半徑，並給出這個圓的作法。



(第四屆)

7. 北京時間 2002 年 9 月 27 日 14 點，國航 **CA981** 航班從首都國際機場準時起飛，當地時間 9 月 27 日 15 點 30 分，該航班正點平穩降落在紐約甘迺迪機場；北京時間 10 月 1 日 19 點 14 分，**CA982** 航班在經過 13 個小時的飛行後，准點降落在北京首都國際機場，至此國航北京--紐約直飛首航成功完成。這是中國承運人第一次經極地經營北京--紐約直飛航線。從北京至紐約原來的航線飛經上海（北緯 31°，東經 122°）東京（北緯 36°，東經 140°）和三藩市（北緯 37°，西經 123°）等處，如果飛機飛行的高度為 10 千米，並假設地球是半徑為 6371 千米的球體，試分析計算新航線的空中航程較原航線縮短了多少。

(第六屆)

六、統計

1. “人口問題”是我國最大社會問題之一，估計人口數量和發展趨勢是我們制定一系列相關政策的基礎，由人口統計年鑒，可查得我國從 1949 年至 1994 年人口資料資料如下：

年	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994
人口数（百万）	541.67	602.66	672.09	704.99	806.71	908.59	975.42	1034.75	1106.76	1176.74

試估計我國 1999 年的人口數。

(第一屆)

2. 根據統計資料，我國能源生產自 1985 年以來發展速度很快。下面是我國能源生產總量（折合億噸標準煤）的幾個統計數據：1985 年 8.6 億噸，1990 年 10.4 億噸，1995 年 12.9 億噸。有關專家預測到 2000 年我國能源生產總量將超過 16.1 億噸。試給出一個簡單模型，說明有關專家預測是否合理。

(第二屆)

3. 燕隼(sun)和紅隼是同屬於隼形目隼科的鳥類。它們的體形大小如鴿，形略似燕，

身體的形態特徵比較相似，紅隼的體形比燕隼略大。通過抽樣測量，已知燕隼的平均體長約爲 31 厘米，平均翅長約爲 27 厘米；紅隼的平均體長約爲 35 厘米，平均翅長約爲 25 厘米。近日在某地發現了兩隻形似燕隼的紅隼的鳥。經測量，知道這兩隻鳥的體長和翅長分別爲 A(32.65 厘米，25.2 厘米)，B(33.4 厘米，26.9 厘米)。你能否設計出一種近似的方法，利用這些數據判斷這兩隻鳥是燕隼還是紅隼？

(第四屆)

4. 請你搜集有關的數據，估算一下我國 2000 年 18 歲的人口數。

(第四屆)

5. 2000 年希臘奧運會上第一次列入女子舉重的項目，各級別冠軍的成績如下：

級別	運動員	國籍	體重(kg)	抓舉(kg)	挺舉(kg)	總成績(kg)
48kg	德拉諾娃	保加利亞	47.48	82.5	102.5	185
53kg	楊霞	中國	52.46	100	125	225
58kg	門丁維爾	墨西哥	56.92	95	127.5	222.5
63kg	陳曉敏	中國	62.82	112.5	130	242.5
69kg	李偉寧	中國	66.74	110	132	242
75kg	烏魯蒂亞	哥倫比亞	73.28	110	135	245
>75kg	丁美媛	中國	103.56	135	165	300

試利用這些數據組建模型，描述運動員舉重的總成積對運動員體重的依賴關係。根據模型分析哪些級別上運動員舉重的總成績還有較大的提高潛力。

(第四屆)

四、數學建模和資訊科技的結合

4.1 意義闡釋

電腦技術迅速發展，它改變了世界和我們的生活和學習，也改變了我們的研究方法，使得很多以前無法完成的計算有了實現的可能。電腦爲學生提供了前所未有的學習環境，學生可借助高效的數學軟體和高速的電腦對實際問題進行反覆地模擬，從觀察中發現某些規律，從規律中猜測某種性質，對猜測的性質進行證明，也可對實際問題的數學模型進行大規模的反覆計算，從計算結果中驗證了模型對問題解釋的正確性，從而解決了實際問題 (韓曙光、胡覺亮，2005)。而在科學研究各個領域中，不只是天文、物理、化學、生物等自然科學，電腦也應用到經濟、政治、心理、動態規畫等社會科學上。

電腦的發展導致對數學和數學活動包括什麼的看法有所改變，比如更加突出了數學中的實驗方面，把探索和發現看作數學教學過程的重要組成部分，因爲探索和發現可以使學生更好地保持和理解數學知識，是使學生看到數學如此有用的最好途徑。比如用電腦的圖像使各種二維和三維物件形象化，可以幫助學生自己去探索問題，發現結果。通過探測資料分析、圖像和數値探測，用簡單函數逼近複雜函數；通過符號數學系統去發現諸如二項式定理等數學公式等 (丁爾升，2001)。如此學生不再是單方面接收教師課堂上知識的灌輸，而能自己去經驗、觀察、探索數學。透過數學建模中需要運用電腦來解決的問題，可以讓學生有更多的機會提昇自己的資訊能力，學習各種數學軟體來輔助解題，將電腦變爲數學的一門工具。

數學建模問題要求的是能綜合應用所學到的知識，而同時在建模的分析求解過程中有時需要大量及繁雜的運算與反覆檢驗的時間。因此，強調電腦的使用 這不僅在建模過程中使用計算工具，而且是在猜想、爭辯、探索、發現、證明、檢驗中使用計算工具。它的各個環節，如問題假設、抽象簡化、建模求解、檢驗修改、電腦的操作等，在整個建模操作的過程裡其實是代表著不同的思維鍛鍊 (林國源，2005)。

目前一般的電腦 CPU 運算速度就非常快了，在軟體上，有各式各樣數學的應用軟體可以處理不同範疇的數學問題。著名的軟體有 Mathematica、Maple、Matlab、GSP 等，能在幾何繪圖、數值運算上大大減低人的工作負擔。不過這些軟體需要花費去購買，對於一般數學問題而言，可能只用到其中幾個功能而已，而本章所要介紹的 Maxima 與 Scilab 都是免費的自由軟體（freeware），連上網路就能到作者發佈的網站下載回來使用。

4.2 Maxima

在 Maxima 的首頁中介紹著說：「Maxima 是一個能夠符號運算、數值運算的系統，包含微分、積分、泰勒展開式、拉普拉斯轉換、常微分方程、線性方程式、多項式、集合、向量、矩陣、張量。Maxima 使用精確的分數、任意精確的浮點數來表示出高精確的數值結果。Maxima 可以用二維或三維來畫出函數或資料的圖形。」因此 Maxima 的功能已足夠一般使用，甚至也堪用於科學研究。從它的首頁 http://maxima.sourceforge.net 可以下載到這個軟體。

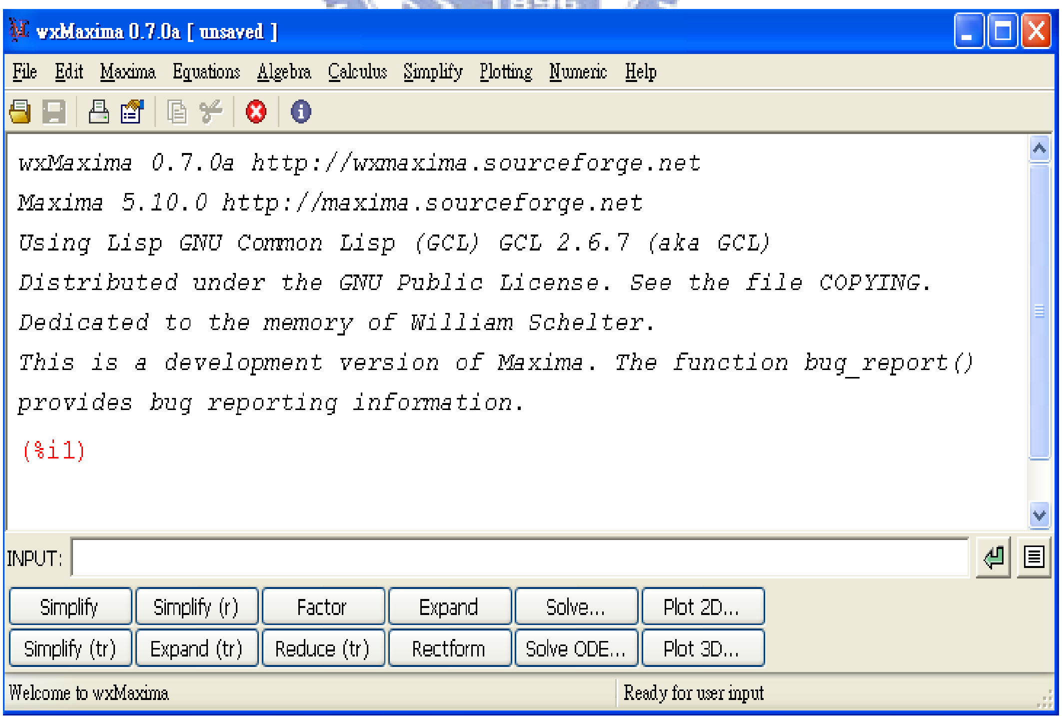


圖 4-2-1 Maxima 程式的主畫面

Maxima 在操作上也相當簡單，幾乎不需要背任何指令，因爲都可以點取選單(menu)上的功能來命令電腦運算，只需要會簡單的算式輸入（加減乘除、指數）就可以將計算部分通通給電腦來算。

4.2.1 Maxima 的基本功能

1. 多項式展開

在 INPUT 的地方輸入所要展開的多項式，例如 (x + 2)*(2*x + 3)*(3*x – 7)然後按 Enter，它會將你所輸入的式子（給電腦看的）輸出成一般的數學算式（給人看的）。接著再按下面工具列的 **Expand**，則會輸出展開結果。每個輸出的結果都有一個代號，例如%o2，我們可以用這個代號來進行其他運算。例如再輸入另一個多項式 (2*x + 1)*(3*x – 2)，再展開之後得到%o4。接著在 INPUT 的地方直接輸入%o2 + %o4，則會將兩個多項式相加。

```
(%i1)  (x+2)*(2*x+3)*(3*x-7);
(%o1)  (x + 2)(2 x + 3)(3 x - 7)
(%i2)  expand(%);
(%o2)  6 x^3 + 7 x^2 - 31 x - 42
(%i3)  (2*x+1)*(3*x-2);
(%o3)  (2 x + 1)(3 x - 2)
(%i4)  expand(%);
(%o4)  6 x^2 - x - 2
(%i5)  %o2+%o4;
(%o5)  6 x^3 + 13 x^2 - 32 x - 44
```

圖 4-2-2　Maxima 兩個多項式相加

2. 解多項方程式 $f(x)=0$

先在 INPUT 輸入所要解的 *f*(*x*)，右邊「=0」不需要輸入。例如要解 $99x^2+56x+100=0$ 則輸入 99*x^2 + 56*x + 100，按 Enter 之後，點取選單上的

Equations，再選取 Solve..這個選項，則會將 x 解出來。其中%i 表示虛數單位$\sqrt{-1}$。

```
(%i1) 99*x^2 + 56*x+100;
```

(%o1) $99\,x^2 + 56\,x + 100$

```
(%i2) solve([%], [x]);
```

(%o2) $[\,x = -\dfrac{2\sqrt{2279}\,\%i + 28}{99},\ x = \dfrac{2\sqrt{2279}\,\%i - 28}{99}\,]$

圖 4-2-3　Maxima 解二元一次方程式

3. 數值計算

(1) 例如要計算 $\sin 10^{\circ}$ 的近似值，則輸入 sin(%pi/18)。其中%pi 代表圓周率，10^{o} 化成弧度則是$\dfrac{\pi}{18}$。接著點取選單上的 **Numeric**，選擇 To float，則會將近似值算出來。

```
(%i5) sin(%pi/18);
```

(%o5) $\sin\left(\dfrac{\%pi}{18}\right)$

```
(%i6) float(%), numer;
(%o6) 0.17364817766693
```

圖 4-2-4　Maxima 求三角函數值

(2) 反三角函數也可以輕易算出來，例如要算 $\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$，則輸入 asin(1/3)，然後以同樣步驟可以得到 0.33983690945412，不過這個的單位是弧度，不是角度。要化成角度需要乘以$\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$，則輸入%o2*180/%pi，%o8 是之前輸出的結果。最後同樣再選取 **Numeric** 裡的 To float，則得到近似值是 19.47122063449069 度，這樣的精確度相當夠用了。

```
(%i1)  asin(1/3);
(%o1)  asin(1/3)
(%i2)  float(%), numer;
(%o2)  0.3398369094541
(%i3)  %o2*180/%pi;
       61.17064370174195
(%o3)  -----------------
              %pi
(%i4)  float(%), numer;
(%o4)  19.47122063449069
```

圖 4-2-5　Maxima 求反三角函數值

4. 求$\sum$ 的值

例如要求$\sum_{k=1}^{10} k^2+2k+1$的值，則先輸入k^2+2k+1。然後點選 **Calculus** 中的 Calculate sum… 會出現圖 4-2-6 的對話盒，再依序輸入好每個空格中的值之後，再按 ok 確認，則會計算出結果 (圖 4-2-7)。

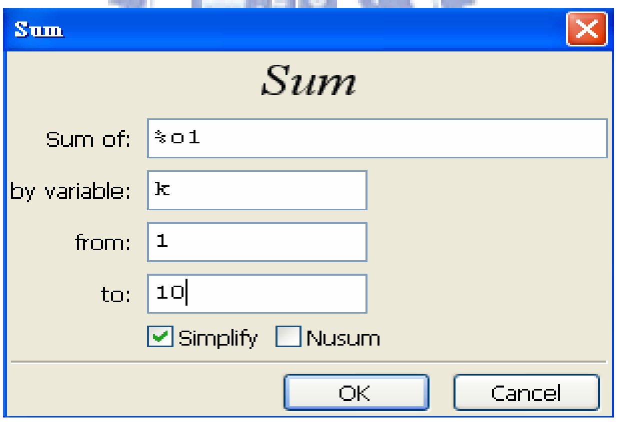


圖 4-2-6 輸入Σ的求值範圍

```
(%i1)  k^2+2*k+1;
(%o1)  k^2 + 2 k + 1
(%i2)  sum(%o1, k, 1, 10), simpsum;
(%o2)  505
(%i3)
```

圖 4-2-7　Σ求值的運作畫面

5. 微分與積分

(1) 將所要計算的函數輸入之後，點選 **Calculus** 裡的 differentiate，則會算出結果。

(2) 將所要計算的函數輸入之後，點選 **Calculus** 裡的 Integrate，則會算出積分結果。

```
(%i1)  x^2*sin(x);
(%o1)  x^2 sin(x)
(%i2)  diff(%, x);
(%o2)  2 x sin(x) + x^2 cos(x)
(%i3)  integrate(%o1, x);
(%o3)  2 x sin(x) + (2 - x^2) cos(x)
```

圖 4-2-8　Maxima 求函數微分與積分

6. 解線性方程組

例如要解 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$ 這個聯立方程組，先點選 **Equations** 裡面的 Solve linear system，然後會問你要解幾個方程組，輸入 3 之後，就可以將方程式個別輸進去，如圖所示。接著就會解出 x,y,z 了。

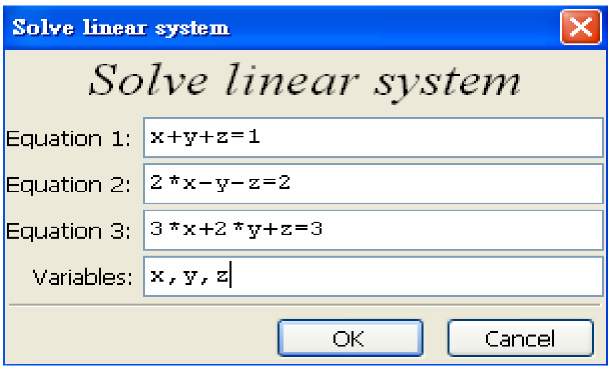


圖 4-2-9　Maxima 解三元一次方程組

如果有一個地方輸入錯了，要修改也相當容易。因爲在工作畫面裡會出現以指令方式的輸入法是 **linsolve([x+y+z=1, 2*x-y-z=2, 3*x+2*y+z=3], [x,y,z])**這個樣子。只要按鍵盤上的 $\boxed{\uparrow}$ 這個鍵，就會將曾經用過輸入顯示在 INPUT 的地方，再

把輸入錯誤的地方更正即可，不需要整個重新輸入。

7. 矩陣運算

點選選單上的 **Algebra** 裡的 Enter matrix，可以輸入要用的矩陣。另外也可以直接在 INPUT 輸入，例如 matrix([1,2,4], [3,1,5], [2,1,1])。同樣在 Algebra 這個選單裡，可以來計算反矩陣、行列式值、特徵多項式、特徵值 (eigenvalues)、特徵向量(eigenvectors)、轉置矩陣、伴隨矩陣 (adjoint matrix)等功能。

(%i3) `matrix([1,2,4],[3,1,5],[2,1,1]);`

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i4) `invert(%);`

(%o4) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}$

圖 4-2-10 Maxima 求反矩陣

4.2.2 數學建模中運用 Maxima－影院座位設計

在 2004 年由上海復旦大學所舉辦的「第六屆大學生數學建模邀請賽」中的一道試題如下:「下圖為影院的剖面示意圖，座位的滿意程度主要取決於視角 α 和仰角 β。視角 α 是觀眾眼睛到螢幕上、下邊緣視線的夾角，α 越大越好；仰角 β 是觀眾眼睛到螢幕上邊緣視線與水平線的夾角，β 太大使人的頭部過分上仰，引起不舒適感，一般要求 β 不超過 30^{o}。

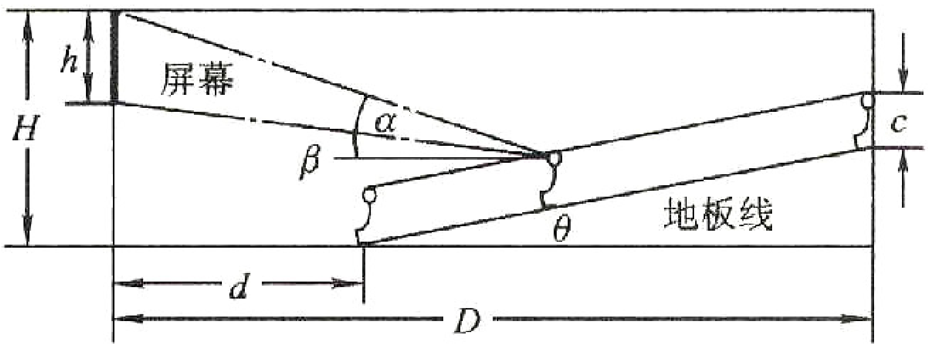
設影院螢幕高 h, 上邊緣距地面高 H，地板線傾角 θ，第一排和最後一排座位與螢幕水準距離分別為 d 和 D, 觀眾平均坐高為 c（指眼睛到地面的距離）。已知參數

h=1.8， H=5，d=4.5 ，D=19，c=1.1（單位：m）。(如圖所示)

(1)地板線傾角 θ＝10^{o}，問最佳座位在什麼地方。

(2)求地板線傾角 θ（一般不超過 20^{o}），使所有觀眾的平均滿意程度最大。

(3)地板線設計成什麼形狀可以進一步提高觀眾的滿意程度。」



【思維分析】本題需要將觀眾的「滿意程度」以具體的數字呈現出來。根據題意，滿意程度是由視角與仰角所決定，需建立一個在不同位置都能求出角度的數學模型。因此將題目中的幾何關係建立在坐標平面上，是最容易的一個方法。再利用反三角函數，就可求出觀眾的視角與仰角了。在解題過程中會出現許多繁雜的計算，完全依靠人力是非常吃力的事，因此搭配數學軟體來輔助是不可或缺的。

此題的基本假設爲：(1) 觀眾身高都相同，座位與座位的水平間距相同。(2) 在仰角不超過 30^{o} 的時候，觀眾的視角愈大，滿意度愈高。

【解】

(1) 根據題意定義直角坐標系，A(0, 5)，B(0, 3.2)，C(4.5, 0)，D(4.5, 1.1)，E(19, 0)，如圖 3-2-11 所示。當地板傾斜角爲 10^{o} 時，觀眾眼睛在直線 $y = \tan 10^{o}(x-4.5) + 1.1$ 這條直線上。

假設眼睛爲 P 點，則 P(x, $\tan 10^{o}(x-4.5) + 1.1$)，

$\because$ $\tan\beta = \dfrac{5-[\tan 10^{\circ}(x-4.5)+1.1]}{x}$，$\therefore$ 仰角 $\beta = \arctan\dfrac{5-[\tan 10^{\circ}(x-4.5)+1.1]}{x}$

視角 $\alpha = \arctan\dfrac{5-[\tan 10^{\circ}(x-4.5)+1.1]}{x} - \arctan\dfrac{3.2-[\tan 10^{\circ}(x-4.5)+1.1]}{x}$

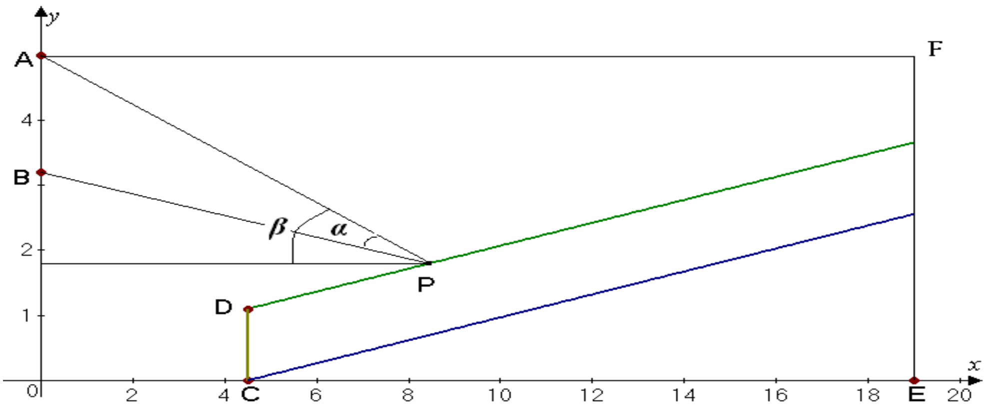


圖 4-2-11　電影院座位直角坐標

畫出視角 (單位爲弧度)的函數圖形 (圖 4-2-12)，可以看出在 $4.5 \le x \le 19$ 時爲遞減函數，沒有一次微分等於零的解。所以離螢幕愈近有愈大的視角，不過仰角也愈大，題目中要求仰角不要超過 30^{o}，因此考慮仰角等於 30^{o} 的位置，解得 $x \doteqdot 6.23$。

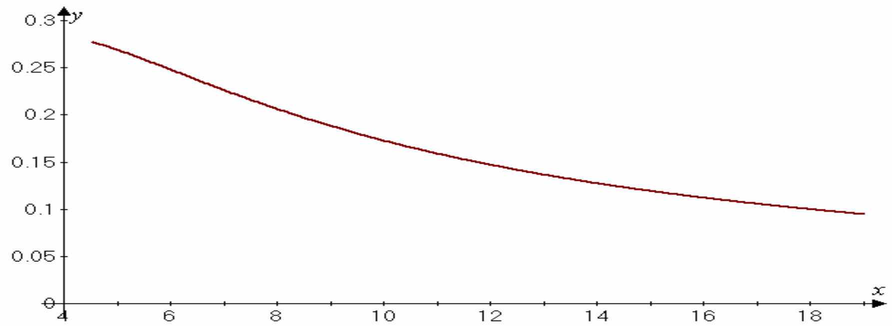


圖 4-2-12　　觀眾視角的函數圖形

(2) 要求出較好的地板線傾斜角 θ，使觀眾的平均滿意度最大，則計算所有觀眾的視角，求總和的最大值。因此假設地板線傾斜角 θ，可得出觀眾眼睛所在的直線。

假設座位與座位之間的距離爲 0.8 公尺，則總共可容納的位置爲 $\dfrac{19-4.5}{0.8} \approx 18$ 排。

令 $x_i = 4.5 + (i-1)\times 0.8$ ，$i = 1,2,3....,18$，爲第 i 排座位的 x 坐標，則第 i 排觀眾眼睛的高度 $y_i = \tan\theta(x_i - 4.5) + 1.1$。

第 i 排觀眾的仰角 $\beta_i = \arctan\dfrac{5-[\tan\theta(x_i-4.5)+1.1]}{x_i}$,

第 i 排觀眾的視角 $\alpha_i = \arctan\dfrac{5-[\tan\theta(x_i-4.5)+1.1]}{x_i} - \arctan\dfrac{3.2-[\tan\theta(x_i-4.5)+1.1]}{x_i}$

則平均滿意程度最大為：在 $\beta_i \le 30^\circ$ 的條件下，$\sum \alpha_i$ 的最大值。

在 Maxima 中的具體做法如下：

① 設座位地板線的傾斜角為 k，第 i 排座位的 x 坐標為 $4.5+(i-1)\times 0.8 = 0.8i+3.7$，則第 i 排觀眾的仰角 β_i 與視角 α_i 分別為

$$\beta_i = \arctan\frac{3.9-\tan k(0.8i-0.8)}{0.8i+3.7}$$

$$\alpha_i = \arctan\frac{3.9-(0.8i-0.8)\tan k}{0.8i+3.7} - \arctan\frac{2.1-(0.8i-0.8)\tan k}{0.8i+3.7}$$

如圖 3-2-13 所示。

```
(%i25) atan((3.9-tan(k)*(0.8*i-0.8))/(0.8*i+3.7));
```

(%o25) $\operatorname{atan}\left(\frac{3.9-(0.8\,i-0.8)\tan(k)}{0.8\,i+3.7}\right)$

```
(%i26) atan((3.9-tan(k)*(0.8*i-0.8))/(0.8*i+3.7))-atan((2.1-tan(k)*(0.8*i-0.8))/(0.8*i+3.7));
```

(%o26) $\operatorname{atan}\left(\frac{3.9-(0.8\,i-0.8)\tan(k)}{0.8\,i+3.7}\right)-\operatorname{atan}\left(\frac{2.1-(0.8\,i-0.8)\tan(k)}{0.8\,i+3.7}\right)$

圖 4-2-13 輸入視角與仰角的函數

② 求視角總和函數 $\sum_{i=1}^{18}(\arctan\frac{3.9-(0.8i-0.8)\tan k}{0.8i+3.7} - \arctan\frac{2.1-(0.8i-0.8)\tan k}{0.8i+3.7})$ 。

則在命令列中輸入 **sum(%o26, i, 1, 18), simpsum**，會得到一長串的輸出結果。

```
(%i27) sum(%o26, i, 1, 18), simpsum;
```

(%o27) $\operatorname{atan}(0.18867924528302\,(3.9-0.8\tan(k)))-\operatorname{atan}(0.18867924528302\,(2.1-0.8\tan(k)))+$
$\operatorname{atan}(0.16393442622951\,(3.9-1.6\tan(k)))-\operatorname{atan}(0.16393442622951\,(2.1-1.6\tan(k)))+$
$\operatorname{atan}(0.14492753623188\,(3.9-2.4\tan(k)))-\operatorname{atan}(0.14492753623188\,(2.1-2.4\tan(k)))+$
$\operatorname{atan}(0.12987012987013\,(3.9-3.2\tan(k)))-\operatorname{atan}(0.12987012987013\,(2.1-3.2\tan(k)))+$
$\operatorname{atan}(0.11764705882353\,(3.9-4.000000000000001\tan(k)))-\operatorname{atan}(0.11764705882353\,(2.1-4.000000000000001\tan(k)))+$
$\operatorname{atan}(0.10752688172043\,(3.9-4.800000000000001\tan(k)))-\operatorname{atan}(0.10752688172043\,(2.1-4.800000000000001\tan(k)))+$
$\vdots$

圖 4-2-14 求視角總和的函數

③ 最後畫出視角總和的函數 y=$\sum_{i=1}^{18}\alpha_i$ 圖形，則在命令列中輸入繪圖指令：

plot2d ([%o27] , [k, 0, %pi/9])

要注意的是地板傾斜角 k 的範圍不超過 20^o，要換算成弧度單位 $\frac{\pi}{9}$ 。結果如圖 4-2-15 所示，得知此為單調遞增函數，即地板的傾斜角愈大，觀眾的視角和愈大。

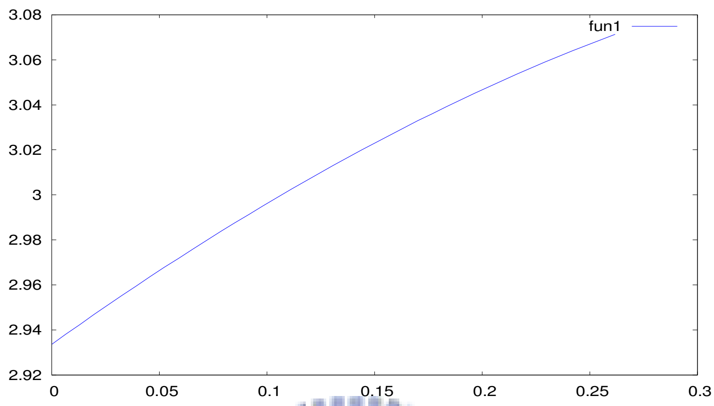


圖 4-2-15 電影院地板傾斜角函數圖形

④ 再來考慮觀眾的仰角與地板傾斜角關係。

在 x 軸上取一點 K，使∠OKA=30^o，如圖 4-2-16 所示，$\overline{DI}$ 為觀眾視角所在直線，$\overline{DI}$ 與 $\overline{AK}$ 的交點為 P，則 P 點觀眾的仰角為 30^o。當 $\overline{DI}$ 與水平線夾角愈大時，$\overline{DP}$ 愈短，即仰角大於 30^o 的觀眾愈少。

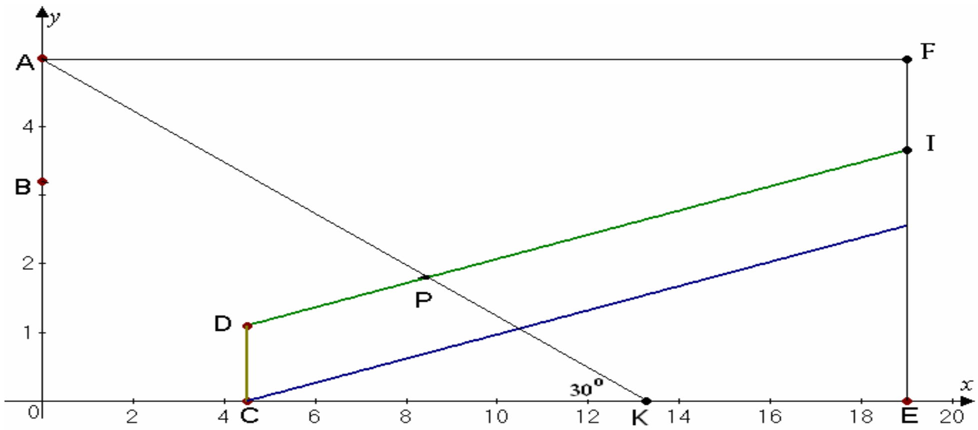


圖 4-2-16 觀眾仰角與地板傾斜角關係圖

⑤ 由以上兩點，傾斜角愈大時，觀眾的視角總和愈大，且仰角大於 30^o 的觀眾愈少，則平均滿意度最高。但考慮到最後一排的觀眾不能超過天花板，因此地板線的傾

斜角最大等於DF與水平線夾角 $\arctan\dfrac{5-1.1}{19-4.5}\approx 15.06^\circ$

（3）進一步提高觀眾滿意程度可以考慮以下幾點：

① 將地板墊高，使第一排觀眾的仰角不超過 30°。設 $D(4.5, y_1)$，由 $\tan^{-1}\dfrac{5-y_1}{4.5}=\dfrac{\pi}{6}$

可以解得 $y_1\approx 2.4$，也就是將地板墊高 1.3 公尺 (圖 3-2-17)。

② 稍微加大座位間的距離變為 0.9 公尺，可增加觀眾的滿意程度。

③ 當觀眾眼睛所在位置低於螢幕下緣 $(2.4\le y_i<3.2)$時：

考慮 $y_1=2.4$，視角的最大值發生在 $x_1=1.44$ 的位置。但是座位的第一排是在 x= 4.5 的地方，因此實際上視角最大値在 (4.5, 2.4)的地方。在圖 4-2-17 中，當地板線是直線時，第二排 (x=5.4)的觀眾眼睛所在位置為 P 點，從圖中可以看出 P 往上移時，視角會變大。

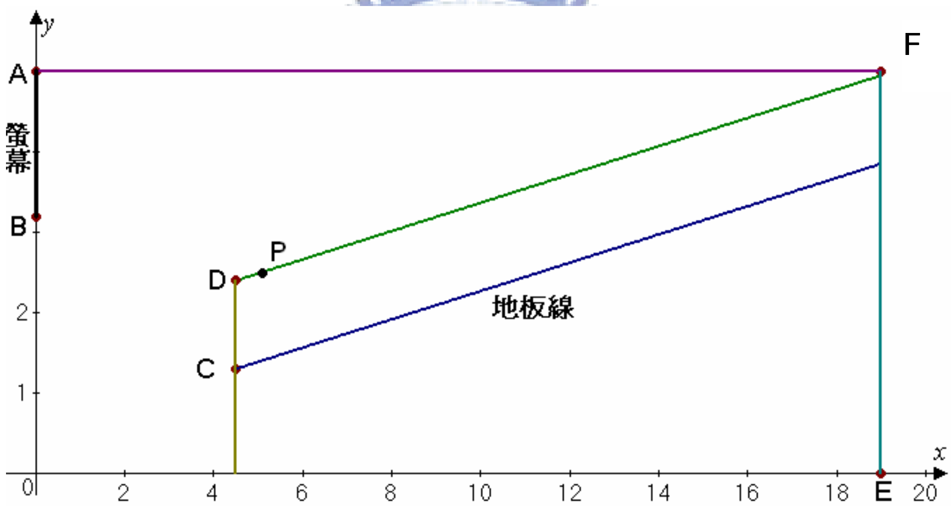


圖 4-2-17　電影院墊高地板座位圖

④ 當觀眾眼睛所在位置位於螢幕上下緣之間 $(3.2\le y_i\le 5)$時：

觀眾愈靠近螢幕，視角愈大；在距離螢幕相同遠的地方，視角最大是在$\overline{AB}$的中垂線上，同時仰角也不會超過 30°，因此觀眾眼睛所在位置應盡量靠近$\overline{AB}$的中垂線。而最後一排的觀眾容易被擋到，所以觀眾的眼睛高度不能超過$\overline{FB}$。

⑤ 綜合以上所述，將原來的地板線改成如圖 4-2-18 的曲線，觀眾將可得到更好的視角。

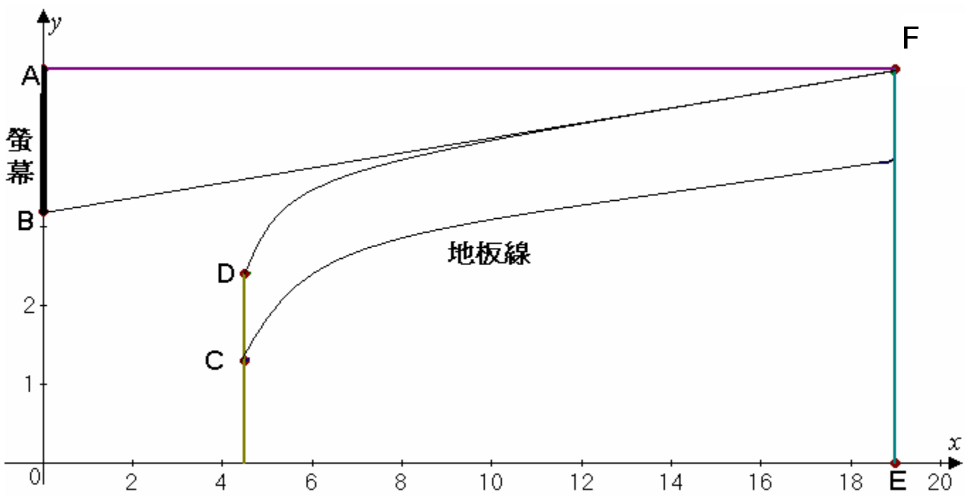


圖 4-2-18　電影院座位優化設計圖

4.3　Scilab

Scilab 是由法國國家電腦科學及控制研究院(INRIA)與路橋大學(ENPC)的研究人員於 1990 年開始所共同開發的科學計算軟體。並於 1994 年開始在網路上免費散布，用在教育及工業環境上。目前的版本開發至 4.0。

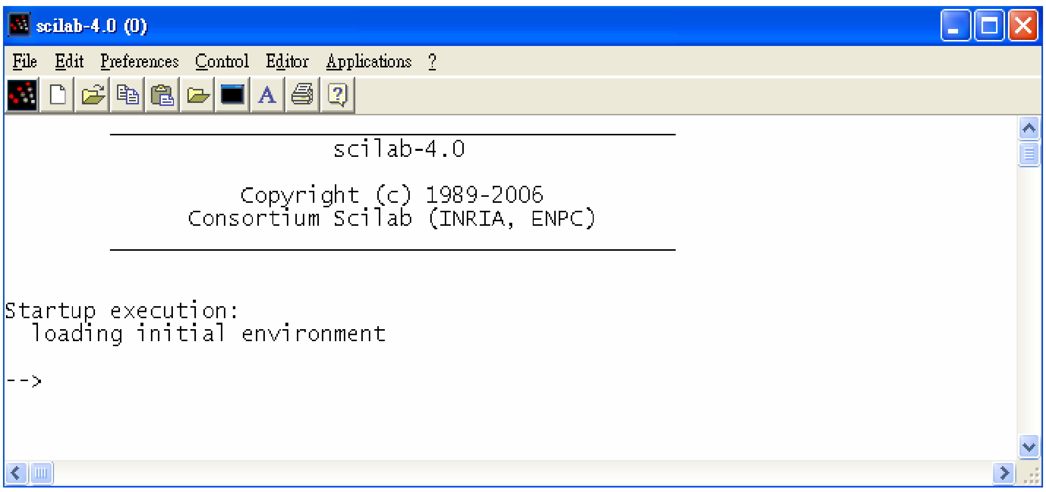


圖 4-3-1　Scilab 程式主畫面

Scilab 為 **SCI**entific **LAB**oratory 字頭的縮寫。Scilab 有以下特點(林正仁，2006)：

(1) 跨平台：包括 UNIX/Linux、Windows 9X/NT/2000/XP、Macintosh、FreeBSD。

(2) 與 Matlab 相容：種類豐富之數據型態、簡易之矩陣的運算、文字編輯器、支援特殊應用之工具箱。

(3) 圖形化介面。

(4) 開放原始碼：完全開放式的數學計算環境。

(5) 平行計算：Scilab 組合了 PVM (Parallel Virutal Machine)，因此可以在網路環境中進行平行計算。

Scilab 已具有下列功能之工具箱：

(1) 2D 及 3D 繪圖、動畫。

(2) 線性代數、稀疏矩陣處理。

(3) 多項式及有理式之處理。

(4) 常微分方程式 (使用 ODEPACK)、微分代數方程式 (使用 DASSL)。

(5) Scicos：動態系統模擬器。訊號處理 。

4.3.1 Scilab 中的矩陣運算介紹

1. 矩陣的輸入

例如要建立一個 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ 的矩陣，則直接輸入以下這個指令：

[A]=[1, 2, 3 ; 4, 5, 6; 7, 8, 9]，結果如圖 4-3-2 所示

```
-->[A]=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
 A  =

    1.    2.    3.
    4.    5.    6.
    7.    8.    9.

-->
```

圖 4-3-2 Scilab 輸入矩陣

2. 取矩陣中的某一行向量

例如要取 A 的第三行，並命名爲 V 向量，則輸入 **V=A(: , 3)**

3. 求矩陣的某一列之總和

例如要求第三列的總和，則輸入 **sum(A (3 , :))**

4. 將矩陣的某一列乘以一個數

例如將矩陣的第二列中每個元乘以 2，則輸入 **A(2, :) = A(2 , :) * 2**

```
-->A(2,:)=A(2,:)*2
 A  =

    1.     2.      3.
    8.     10.     12.
    7.     8.      9.

-->
```

圖 4-3-3　Scilab 矩陣中列運算

5. 將某一列乘以一個數加到另一列

例如將 A 的第一列乘以 －8 加到第二列，則輸入 A(2, :) = A(1, :)*(–8)+A(2, :)

```
-->A(2,:)=A(1,:)*(-8)+A(2,:)
 A  =

    1.     2.      3.
    0.   - 6.    - 12.
    7.     8.      9.

-->_
```

圖 4-3-4　Scilab 矩陣中列運算

6. 矩陣相乘

例如 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，計算 B*A

```
-->B=[1,0,1;2,1,-1]
 B  =

    1.     0.      1.
    2.     1.    - 1.

-->B*A
 ans  =

    8.     10.     12.
  - 5.   - 10.   - 15.
```

圖 4-3-5 矩陣相乘

4.3.2 數學建模中運用 Scilab 軟體－賽揚獎模型

旅美職棒好手王建民去年表現大放異彩，拿下美國聯盟勝投王(與 Santana 並列)，甚至有機會問鼎投手的最高榮譽－賽揚獎。表 4-3-1 中是 2006 年美國聯盟勝投數前三名的投手之主要紀錄，試建立一個數學模型說明誰最有機會得獎。

表 4-3-1　投手表現紀錄

Player	勝投數	防禦率	投球局	WHIP	K/9
J Santana	19	2.77	233.2	1.0	9.4
C Wang	19	3.63	218	1.3	3.1
J Garland	18	4.51	211.1	1.4	4.8
F Garcia	17	4.53	216.1	1.3	5.6
R Johnson	17	5	205	1.2	7.6
K Rogers	17	3.84	204	1.2	4.4
J Verlander	17	3.63	186	1.3	6.0

【思維分析】首先要對這些棒球統計資料的專有名詞加以了解，這些資料的意義及計算公式如下：

a. 防禦率(ER)=$\dfrac{\text{責任失分}\times 9}{\text{投球局數}}$，亦即代表投手平均在投九局的情況下，扣除隊友失誤因素後，投手本身被對方得到的分數，這個值愈低愈好。

b. K/9 =$\dfrac{\text{三振數}\times 9}{\text{投球局數}}$。代表投手平均一場球(九局)中，可以用三振製造出局數的能力，一位強力投手通常具備很好的三振能力。

c. WHIP=$\dfrac{(\text{被安打數}+\text{保送數})}{\text{投球局數}}$。代表投手平均在一局中被對方上壘的人數。

賽揚獎（Cy Young Award）指的是美國職棒大聯盟每年頒給投手的一項榮耀。這個獎項最初是於 1956 年由會長福特·弗立克（Ford Frick）所提議，用來紀念 1955 年過世的棒球名人堂投手賽·揚（Cy Young）。最初的 11 年（1956 年至 1966 年）間，兩個聯盟每年只選出一位受獎者。當弗立克於 1967 年退休後，就變成每個聯盟各選出

一位受獎者。

這個獎項是由全美棒球記者協會（Baseball Writers Association of America，簡稱BBWAA）的 28 個成員所票選出來的。每個成員選出自己心目中各個聯盟最好的前三名投手，然後再加權計算總分。每個投手的總分等於他所得到第一名選票的票數乘以5，加上所得到第二名選票的票數乘以 3，再加上所得到第三名選票的票數（即 5F＋3S＋T）。各個聯盟總分最高的即為當年度該聯盟的賽揚獎得主。如果有兩人總分相同，則他們就共享這個獎。

這個記分方法是從 1970 年球季才開始採用的。在此之前，每個人只能投一票，由得票最多的人得獎 (維基百科) 。

其中投球局數 233.2 代表 233 又三分之二局。這些統計資料的數值大小不一，單位也不同，彼此之間不易找到一個運算法則。因此要綜合來判斷那個投手的表現比較好，可以針對同樣一個紀錄，這些投手之間來相互比較。再將原始資料轉化爲相對大小，這樣就可以將同一個選手的不同紀錄的統計資料加以求和，得到一個綜合評價。

【解】

(1) 將表中的資料表示成矩陣形式 $C_{ij}\,(i=1,2,3,4,5,6,7;\ j=1,2,3,4,5)$ ，得到

$$C_{7\times 5}=\begin{bmatrix} 19 & 2.77 & 233.67 & 1.00 & 9.4 \\ 19 & 3.63 & 218 & 1.31 & 3.1 \\ 18 & 4.51 & 211.33 & 1.36 & 4.8 \\ 17 & 4.53 & 216.33 & 1.28 & 5.6 \\ 17 & 5 & 205 & 1.24 & 7.6 \\ 17 & 3.84 & 204 & 1.26 & 4.4 \\ 17 & 3.61 & 186 & 1.33 & 6.0 \end{bmatrix}$$

將資料建立在 Scilab 中的結果如圖 4-3-6 所示。

```
-->c=[19,2.77,233.67,1,9.4;19,3.63,218,1.3,3.1;18,4.51,211.33,.
 c  =,4.4;17,3.63,186,1.3,6]

    19.     2.77     233.67     1.     9.4
    19.     3.63     218.       1.3    3.1
    18.     4.51     211.33     1.4    4.8
    17.     4.53     216.33     1.3    5.6
    17.     5.       205.       1.2    7.6
    17.     3.84     204.       1.2    4.4
    17.     3.63     186.       1.3    6.

-->
```

圖 4-3-6　將投手紀錄建立在 Scilab 中的矩陣

(2) 建立模糊綜合判斷矩陣

設 $C_{ij}\,(i=1,2,3,4,5,6,7;\ j=1,2,3,4,5)$ 表示第 i 位投手的第 j 個因素的值，令

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sum_{k=1}^{7} c_{kj}} \qquad (i=1,2,3,4,5,6,7;\ j=1,2,3,4,5)$$

即 r_{ij} 表示第 i 個投手的第 j 個因素在 7 個投手的同一因素值的總和中所占的比例，得到模糊綜合評判矩陣 $R=(r_{ij})_{7\times 5}$。這個過程可以用 Scilab 來運作(圖 4-3-7)。

$$R_{7\times5}=\begin{bmatrix} 0.1532 & 0.099 & 0.158 & 0.113 & 0.230 \\ 0.1532 & 0.130 & 0.148 & 0.149 & 0.076 \\ 0.1452 & 0.162 & 0.143 & 0.155 & 0.117 \\ 0.1371 & 0.162 & 0.148 & 0.146 & 0.137 \\ 0.1371 & 0.179 & 0.139 & 0.141 & 0.186 \\ 0.1371 & 0.138 & 0.139 & 0.144 & 0.108 \\ 0.1371 & 0.130 & 0.126 & 0.151 & 0.147 \end{bmatrix}$$

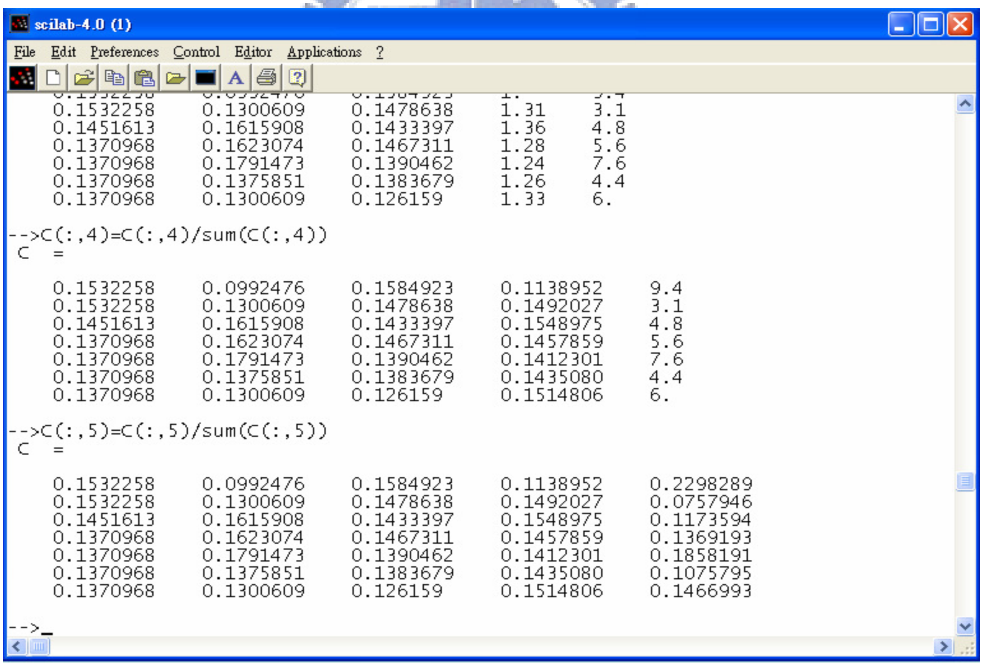


圖 4-3-7 用 Scilab 來計算模糊評判矩陣

(3) 設定各因素的權重分配爲 A=[1, −1, 1, −1, 1], 第二項與第四項因素的値愈低, 表示表現愈好, 因此權重取−1。

令 $b_i = \sum_{j=1}^{5} a_j \cdot r_{ij}$ ，得

B = [0.328, 0.097, 0.089, 0.113, 0.142, 0.102, 0.128]

```
-->A=[1;-1;1;-1;1]
 A  =

    1.
  - 1.
    1.
  - 1.
    1.

-->c*A
 ans  =

    0.3283330
    0.0975273
    0.0892562
    0.1125375
    0.1414563
    0.1018524
    0.1290373
```

圖 4-3-8　用 Scilab 計算最後結果

(4) 結果說明：

從原始數據來看，Santana 表現都是所有人之冠，得獎是意料中之事，最後投票結果也確實是 Santana 獲得這個獎項。而王建民得分與 Santana 相差許多，只勝過 Garland，主要在於三振數太低。若將勝投數權重加大，令 A=[2, -1, 1, -1, 0.5]，重新計算結果，得到

B = [0.367, 0.213, 0.176, 0.181, 0.186, 0.185, 0.192]

這樣的結果似乎比較合理些。

(5) 模型檢驗：

以 2004 年的美國聯盟資料來驗證

表 4-3-2　2004 年投手表現紀錄

Player	勝投數	防禦率	投球局數	WHIP	K/9
C Schilling	21	3.26	226.2	0.91	8.06
J Santana	20	2.61	228	0.68	10.46
B Colon	18	5.01	208.1	1.03	6.83
K Rogers	18	4.76	211.2	1.17	5.36

將表中的資料表示成矩陣形式 $C_{ij}\,(i=1,2,3,4,5,6,7;\ j=1,2,3,4,5)$ ，得到

$$C_{4\times5}=\begin{bmatrix}21 & 3.26 & 226.67 & 1.06 & 8.06\\ 20 & 2.61 & 228 & 0.92 & 10.46\\ 18 & 5.01 & 208.33 & 1.37 & 6.83\\ 18 & 4.76 & 211.67 & 1.48 & 5.36\end{bmatrix}$$

同樣將這個矩陣轉換成模糊判斷矩陣，得到

$$R_{4\times5}=\begin{bmatrix}0.2727 & 0.208 & 0.269 & 0.219 & 0.262\\ 0.2597 & 0.169 & 0.261 & 0.190 & 0.341\\ 0.2338 & 0.320 & 0.238 & 0.284 & 0.222\\ 0.2338 & 0.304 & 0.242 & 0.306 & 0.175\end{bmatrix}$$

假設權重分配 A = [2, -1, 1, -1, 0.5], 令 $b_i=\sum_{j=1}^{5}a_j\cdot r_{ij}$ 得到

B = [0.508, 0.593, 0.213, 0.186]

得分最高者爲勝投排名第二的 Santana ，而當年的獲獎者正是他。

五、數學建模實例

5.1 最優化模型

現實生活中，許多問題都存在一個最佳狀態的解，例如最短路徑、最少時間、最大收益…等，在資源有限、空間有限的情況下，得到最佳化結果是現代化社會所追求的目標。日常生活中，所看到所用到的東西，在我們沒注意到的地方或許都隱藏著設計者的巧思。例如從物品的形狀來說，爲什麼馬路上的人孔蓋是設計成圓形較好，而不是方形？爲什麼金屬罐飲料是設計成圓柱體，鋁箔包飲料是長方體？從尺寸來說，爲什麼同樣 355 毫升的易開罐飲料幾乎都差不多大小？

每種求最佳解的方法往往都成爲數學的一門分枝，或是需要綜合幾個不同的領域，形成一個新的數學領域，其中有許多問題已經被研究出來，成爲經典案例。

5.1.1 單變數函數的極值

一個典型的問題是：「一條長度 l 的繩子，將其圍成矩形，面積最大是多少？」這個題目很容易可以轉化爲數學模型，在現實生活中可能出現的狀況就如同「95 年大學入學指定考試數學乙」中的一道題目：「一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口。此農夫所能圍成的最大面積為多少平方公尺？」不過，常常在我們面臨實際問題的時候，很多條件都是模糊的，不是馬上就找到所需要用的數學方法。例如 2006 年「中國大學生數學建模競賽」的試題 C，題目如下：

「我們只要稍加留意就會發現銷量很大的飲料 (例如飲料量為355毫升的可口可樂、青島啤酒等) 的飲料罐(即易開罐)的形狀和尺寸幾乎都是一樣的。看來，這並非

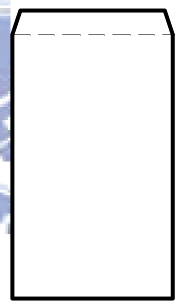
偶然，這應該是某種意義下的最優設計。當然，對於單個的易開罐來說，這種最優設計可以節省的錢可能是很有限的，但是如果是生產幾億，甚至幾十億個易開罐的話，可以節約的錢就很可觀了。

現在就請你們小組來研究易開罐的形狀和尺寸的最優設計問題。具體說，請你們完成以下的任務：

1．取一個飲料量為 355 毫升的易開罐，例如 355 毫升的可口可樂飲料罐，測量你們認為驗證模型所需要的資料，例如易開罐各部分的直徑、高度，厚度等，並把資料列表加以說明；如果資料不是你們自己測量得到的，那麼你們必須注明出處。

2．設易開罐是一個正圓柱體。什麼是它的最優設計？其結果是否可以合理地說明你們所測量的易開罐的形狀和尺寸，例如說，半徑和高之比，等等。

3．設易開罐的中心縱斷面如下圖所示，即上面部分是一個正圓臺，下面部分是一個正圓柱體。



什麼是它的最優設計？其結果是否可以合理地說明你們所測量的易開罐的形狀和尺寸。

4．利用你們對所測量的易開罐的洞察和想像力，做出你們自己的關於易開罐形狀和尺寸的最優設計。」

即便這個問題已經述敘很完整了，但該用哪些條件來解決問題並不算明確，需要仔細思考推敲。其實這個問題在本質上仍和菜圃那道問題是相同的，也就是說要製造 355 毫升的飲料罐，形狀或尺寸要如何設計會讓使用材料最少？或者反過來，以同樣的材料，要設計怎樣的形狀或尺寸的飲料罐，可以讓容積最大？

建立模型初步就是簡化題目的假設條件。恰如 1997 年「第一屆北京中學生數學知識競賽」的一道題目：「某罐裝飲料廠為降低成本要將製罐材料減少到最小，假設罐裝飲料筒為正圓柱體(視上、下底為平面)，上下底半徑為 r，高為 h．若體積為 V，上下底厚度分別是側面厚度的 2 倍，試問當 r 與 h 之比是多少時用料最少？(你可以到市場上做一下調查，看看哪些罐裝飲料大體上符合你的計算結果)」

【思維分析】題目中圓柱體有底半徑 r、高 h、體積 V 三個變數，關係是 $V=\pi r^2\times h$。其中我們可以將 V 視爲定值（因爲一罐飲料的大小是設計成恰好可以一次喝完，太大可能就喝不完，太小又不能解渴。)，求相同容積時，使用材料（重量）的最小值。

r 與 h 這兩個變數可以假設成 k 倍關係，因此得到使用材料的函數 $f(k)$，這是單一變數的函數，即可求發生最小值時 k 的值。

【解】 設 $h=r\cdot k$，則 $V=\pi r^2\times h=\pi r^3 k \Rightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi k}}$

設 $f(k)$爲飲料罐所用的材料，爲上下底面的材料加上側面的材料

故 $f(k)=2\times(2\pi r^2)+(2\pi r)\times h$

$=4\pi r^2+2\pi r^2 k$

$=\pi\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\pi^2k^2}}(4+2k)$ (將函數代換成只有 k 這個變數)

$=\sqrt[3]{\pi V^2}\,(4k^{-\frac{2}{3}}+2k^{\frac{1}{3}})$ (化簡得到一個以 k 表示的函數)

怎樣求這個函數的最小值？以下使用三個方法來解：

(1) 算幾不等式

對於還沒學過微積分的中學生來說，求極值的常用的方法有：配方法、算幾不等式、柯西不等式、正餘弦函數疊合等方法。先令 $k^{\frac{1}{3}}=t$，則 $4k^{-\frac{2}{3}}+2k^{\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{t^2}+2t$，得到一個稍微簡單的函數，因爲 k 是一個正數，$t$ 也是正數。$\dfrac{4}{t^2}+2t$ 這個函數可利用算幾不等式來解極值。

$\dfrac{4}{t^2}+2t=\dfrac{4}{t^2}+t+t$ (將函數拆成三項，以便使用算幾不等式)

$$\frac{\frac{4}{t^2}+t+t}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{4}{t^2}\cdot t\cdot t} \Rightarrow \frac{4}{t^2}+t+t \ge 3\sqrt[3]{4}$$ ，有最小值。

其中等式成立的條件爲 $\frac{4}{t^2}=t=t \Rightarrow t=\sqrt[3]{4}$

因此，$k^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow k=4$

(2) 微積分

雖然算幾不等式是基本的一個不等式，但是上面的解法需要技巧性的將函數拆成三項。如果使用略爲高等的方法－微積分，這個函數很容易可以求出極值。

對 $f(\mathrm{k})$ 微分，得到 $f'(k)=\sqrt[3]{\pi V^2}\left(-\frac{8}{3}k^{-\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}k^{-\frac{2}{3}}\right)$

解 $-\frac{8}{3}k^{-\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}k^{-\frac{2}{3}}=0 \Rightarrow \frac{2}{3}k^{-\frac{5}{3}}(-4+k)=0$，

得 k = 4 或 k= 0 時有極值，k= 0 不合，故 k= 4 爲所求。

嚴格來說，應該再去探討 k= 4 是不是極小值，不過這個答案與我們日常生活中飲料罐的高與底半徑的比大約符合，在此略去後續步驟。

(3) 使用電腦軟體輔助

算幾不等式、微積分都是用來解決數學問題的工具之一，須要花不少時間練習才能加以掌握。在廿一世紀的今天，電腦數學軟體也成爲重要的數學解題工具了。以前要手工畫出函數圖形是一件非常耗時間的事，但是如今藉著電腦軟體，只要會將函數輸入到電腦中，彈指間就能畫出函數圖形 (圖 5-1-1)，因此一般函數的極值可以直接觀察出所在位置。

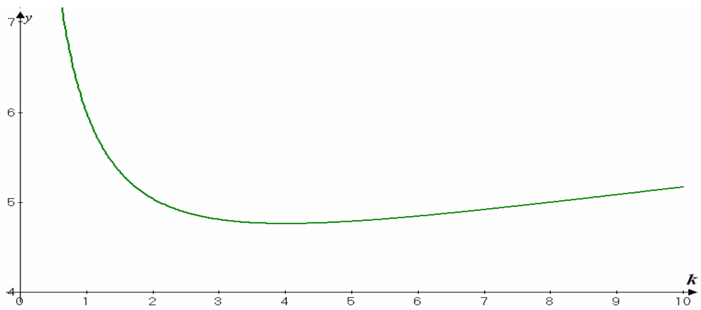


圖 5-1-1　$y=4k^{-\frac{2}{3}}+2k^{\frac{1}{3}}$ 函數圖形

另外再配合使用 Excel 電子試算表，也能很快計算出大量的函數值加以觀察(表 5-1-1)，如此便能找出最小值就是在 k= 4。

表 5-1-1 $y = 4k^{-\frac{2}{3}} + 2k^{\frac{1}{3}}$ 的函數值

k	$4k^{-\frac{2}{3}} + 2k^{\frac{1}{3}}$	k	$4k^{-\frac{2}{3}} + 2k^{\frac{1}{3}}$	k	$4k^{-\frac{2}{3}} + 2k^{\frac{1}{3}}$
0.5	7.9370	3.5	4.77178	3.95	4.762287
1	6.0000	3.6	4.76815	3.96	4.762257
1.5	5.3420	3.7	4.76545	3.97	4.762233
2	5.0397	3.8	4.76360	3.98	4.762216
2.5	4.8860	3.9	4.76254	3.99	4.762206
3	4.8075	4	**4.76220**	4	**4.762203**
3.5	4.7718	4.1	4.76252	4.01	4.762206
4	**4.7622**	4.2	4.76346	4.02	4.762216
4.5	4.7695	4.3	4.76495	4.03	4.762233
5	4.7879	4.4	4.76696	4.04	4.762255
5.5	4.8141	4.5	4.76945	4.05	4.762285

實際問題中，要求出易開罐高與底半徑最佳的比例，則模型變得複雜些。從外觀形狀來看，它不是單純的圓柱體，比較接近一個圓柱加上一個正圓臺。在材料部分，上下底的厚度、側面的厚度、頂端圓臺厚度都不相同，都需要列入考量，引入模型中求解。最後可以將得出來的解，與一開始測量時的結果驗證。

另外需考慮的一點是，從數學模型中得來最佳化的值，並不一定能符合現實需求。例如飲料罐的題目中，最後請參賽者發揮想像力與創造力，研究易開罐形狀、尺寸的最優設計。當形狀不限制是圓柱體時，應該會有其他形狀可以讓「材料」的成本更低，例如設計成中間較寬、上下底半徑較小（因為上下底的材料較厚）的啤酒桶形狀。不過再考量加工的便利性、儲存飲料罐的空間、消費者持拿的方便性等因素，飲料廠商終究還是以直圓柱形來設計。

再以 1999 年「第三屆北京中學生數學知識競賽」中一題爲例，題目爲：「小童的父親要到美國訪問，受人之托希望多帶點東西。中國民航的《國際旅客須知》中有關規定："計件免費行李額"中規定"適用中美、中加國際航線上的行李運輸…。經濟和

旅遊折扣票價，免費交運的行李數為兩件，每件箱體三邊之和不超過 62 英寸（158 釐米），但兩件之和不得超過 107 英寸（273 釐米），每件最大重量不得超過 32 公斤。"試問這兩個箱子的長、寬、高各為多少可達最大體積？請到市場上看看，商店出售的行李箱的尺寸與你計算所得結果是否近似？為什麼？」

【解】設兩個箱子的長、寬、高各為 a_1, b_1, c_1 與 a_2, b_2, c_2，需滿足

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \le 158 \\ a_2 + b_2 + c_2 \le 158 \\ a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 \le 273 \end{cases},$$

而所要求的最大體積即 $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2$ 的最大值。

(1) 首先考慮兩個箱子的尺寸總和。如果在尺寸總和還未達到 273 時，假設此時體積和為 V_1；則可以將某個箱子的某一邊加長，使尺寸總和達到 273，假設體積和為 V_2，則 $V_2 > V_1$。所以體積和的最大值，必然是當 $a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 = 273$ 時。

(2) 題目裡的變數總共有 6 個，若要設法減少變數，可令 $x = a_1 + b_1 + c_1$，則 $a_2 + b_2 + c_2 = 273 - x$，這樣僅剩單一變數而已，再代回原來不等式中，可解出 x 的範圍。

$$\begin{cases} x \le 158 \\ 273 - x \le 158 \end{cases} \Rightarrow 115 \le x \le 158$$

(3) 最後考慮所要求的體積 $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2$，與 x 的關係。

由算幾不等式，$a_1b_1c_1 \le \left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{x}{3}\right)^3$

$$a_2b_2c_2 \le \left(\frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)^3 = \left(\frac{273 - x}{3}\right)^3$$

$$\text{故 } a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 \le \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{273 - x}{3}\right)^3$$

令 $y = \left(\dfrac{x}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{273 - x}{3}\right)^3$, 且 $115 \le x \le 158$，則 y 的最大值即為所求。此時如果使用微積分，解一次微分等於零的方程式，而未去驗證是極大值的話就錯了。因為將 y 展開後是一個開口朝上的二次函數，使用微積分解出來的是極小值。這個函數的最大值是發生在邊界的地方，即 x=115 或 x=158 時，兩個箱子的體積

和有最大值。此時兩個箱子都是正立方體的形狀，一個邊長為$\frac{158}{3} \approx 52.66$公分，

另一個邊長為$\frac{115}{3} \approx 38.33$公分。

$y=\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{273-x}{3}\right)^3$的函圖形如下：

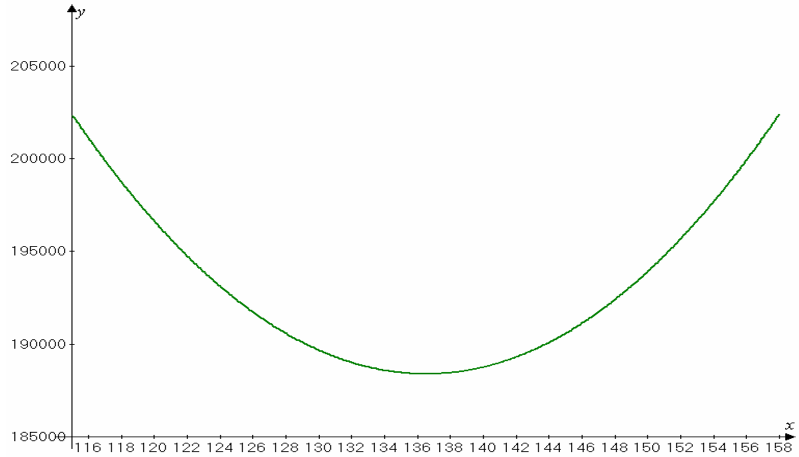


圖 5-1-2 $y=\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{273-x}{3}\right)^3$函數圖形

但這個結果與實際狀況不相同，市面上行李箱的形狀幾乎都是長方體，而非立方體。原因就是立方體並不易便於攜帶，即便它可以有較大的空間容量，另外一點就是長方體所能放置東西的最大長度較長，立方體所能放置東西的最大長度較短，因此在使用上，長方體的行李箱也比較具有彈性。

5.1.2 多變數函數的極值

有些要求極值的函數並不能化為單一變數的函數，如果這些變數都是一次方，並且各變數的條件限制是一次方的不等式，則可以使用高中數學甲上冊所介紹的「線性規劃」(Linear Programming)來解。以95年「大學入學指定考試數學乙」中一題為例：

「為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素A、至少 72 單位的營養素B和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。

這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A， 3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0, y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x, y 必須滿足的不等式組。

(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x, y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？」

【解】先將題目的敘述，以表列方式呈現：

表 5-1-2　飼料所含維他命表

	維他命 A 含量	維他命 B 含量	維他命 C 含量	售價(元/公斤)
第一種飼料	7	3	3	5
第二種飼料	2	6	2	4

再根據要求提供維他命量，可得到以下的不等式

$$\begin{cases} 7x + 2y \geq 84 \\ 3x + 6y \geq 72 \\ 3x + 2y \geq 60 \end{cases}$$

圖形如下：

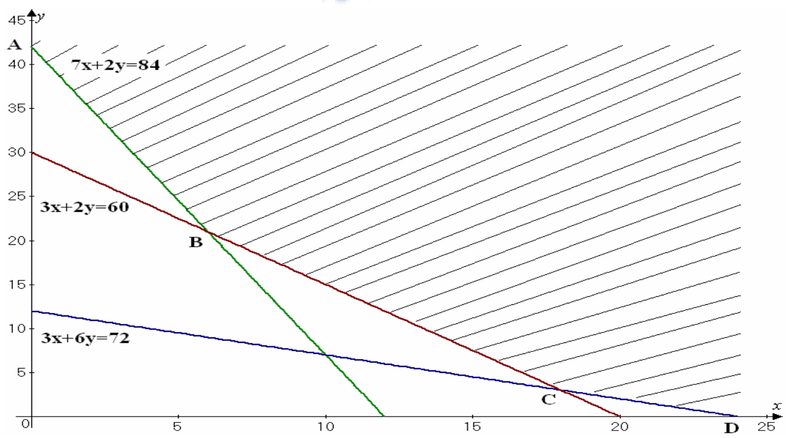


圖 5-1-3　　二元一次聯立不等式圖形

設斜線部分爲可行解區域 Ω，在 $(x, y) \in \Omega$ 條件下，求目標函數 P= $5x + 4y$ 的最小值。而此函數最小值發生在邊界處，因此只要分別將 A, B, C, D 四個點代入，即可得出最小值。

A(0, 42)代入，P= 168

B(6, 21)代入，P= 30 + 84 = 114

C(18, 3)代入，P= 90 + 12 = 102

D(24, 0)代入，P= 120

故農場主人每天使用第一種飼料 18 公斤，第二種飼料 3 公斤，可以使得花費最少，每天為 102 元。

5.2 微分方程與指數模型

在許多實際問題中，有時要直接找出變數之間的函數關係較為困難，但導出包含未知函數的導數或微分的關係式較為容易時，可先列出微分方程式與初始值，再解微分方程來得到所要求的函數模型。例如人口的成長、藥物在體內的分佈、傳染病的擴散…等。

5.2.1 馬爾薩斯 (Malthus)模型

馬爾薩斯在分析人口出生與死亡情況的資料後發現，人口淨增長率 r 基本上是一常數，假設 N(t)為時刻 t 的人口數，則 $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dt}=r$，可得到 $N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$，其中 N_o=N(t_o)為初始時刻 t = t_o 的人口數。

除了人口之外，放射性物質的質量變化、人體內藥物的吸收也都可由微分方程的建立，得到指數形式的模型。其中，放射性物質的衰減率與尚存物質的原子數成正比，而裡面藥物被吸收的速率與藥物的數量成正比。

在「第二屆北京中數學生數學知識競賽」中出了這樣一道試題：人們早就發現了放射性物質的衰減現象，最常見的放射性物質之一是碳-14，他常用來確定有機物的年代。比如，一段骨骼含少量的碳-14，它在骨骼的含碳量占有一定比例，

一旦有機物死亡，它就不能通過與外界環境的相互作用(例如呼吸)獲得碳-14，並且還要不斷衰減。

已知放射性物質的衰減服從指數規律：$C(t)=C_0e^{-rt}$，其中 t 表示衰減的時間，C_0 表示放射性物質的原始質量，C(t)表示經衰減了 t(年)後尚存的質量，e≒2.72 是一個非常重要的常數。為計算衰減的年代，通常給出該物質質量衰減一半的時間，稱其為該物質的半衰期，碳-14 的半衰期大約是 5730 年，由此可確定係數。人們又知道，放射性物質的衰減速度是與其質量成正比的。

1950 年在巴比倫發現一根刻有 Hammurabi 王朝字樣的木炭，當時測定，其碳-14 分子的衰減速度為 4.09（個/每克每分鐘），而新砍伐燒成的木碳-14 的衰減速度為 6.68（個/每克每分鐘），請估算出其 Hammurabi 王朝所在年代。

【解】由碳-14 的半衰期爲 5730 年，得到$\frac{1}{2}C_0=C_0\mathrm{e}^{-r\times5730}$。將兩邊的 C_0 消掉，並且取自然對數，得 $\ln\frac{1}{2}=-5730r$，可以解出 $r\approx1.21\times10^{-4}$。

再由題目所提供「放射性物質的衰減速度與其質量成正比」，不妨令 C_0=6.68，$\therefore 4.09=6.68e^{-rt}$。將等式兩邊同除以 6.68，再同時取自然對數，得到 $\ln\frac{4.09}{6.68}=-rt$。將 r =1.21×10^{-4} 代入上式，最後得出 t≈4055。

因此 Hammurabi 王朝約在西元前 2100 年前。

以上的運算過程，可以用 Maxima 軟體來輔助，實作情形如圖 5-2-1 所示：

```
(%i1)  log(1/2)+5730*r;
(%o1)  5730 r - log(2)
(%i2)  solve([%], [r]);
                log(2)
(%o2)  [ r = ------ ]
                5730
(%i3)  float(%), numer;
(%o3)  [ r = 1.209680943385594 10^-4 ]
(%i4)  log(4.09/6.68)/-%o3;
         0.49057301749384
(%o4)  [ ---------------- = 4055.391797120099 ]
                r
```

圖 5-2-1　用 Maxima 解方程式

5.2.2 Logistic 模型

在馬爾薩斯模型中，$N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}$表示人口數量將隨時間 t 的增加而成幾何級數變大，這對於有限的地球資源來說當然是不合理的，這個模型在自然環境條件較好，人口密度較小時是合理的，而對於人口密度較大時就不能成立。因爲人類生存空間及可利用資源 (食物、水、空氣) 等環境因素對人口的增長起著阻滯作用。

設人類生存空間及可利用資源等環境因素所能容納的最大人口數量爲 K，則人口數量 N 的增長速率不只與現有人口數量成正比，而且與可成長的人口數量所佔的比例$1-\dfrac{N}{K}$成正比，比例係數爲 r，因此得到

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}=rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right) \\ N(0)=N_0 \end{cases} \tag{1}$$

(1)式可改寫成$\left(\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{K-N}\right)dN=rdt$ (2)

將(2)式兩邊積分，得

$$\ln N-\ln(K-N)=rt+c$$ ，c 爲待定係數。

整理化簡可得 $N(t)=\dfrac{K}{1+e^{-rt+c}}$ (3)

將初始條件 $N(0)=N_0$ 代入(3)式，得到$\dfrac{K}{1+e^c}=N_0$ ，所以 $e^c=\dfrac{K}{N_0}-1$ 。最後可以解出 $N(t)=\dfrac{KN_0}{N_0+(K-N_0)e^{-rt}}$ 。這就是 Logistic 增長模型 (阻滯增長模型)，它是荷蘭數學家、生物學家 Verhulst 在 1839 年首次提出的模型。

$\dfrac{dN}{dt}=rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right)$這個式子也表示出人口增長速率$\dfrac{dN}{dt}$是人口數量 N 的二次函數。當 $N=\dfrac{K}{2}$時，增長速率達到最大值，而後隨著 N 增大而減少。當 N=K 時，成長速率爲 0。圖 5-2-2 是 Logistic 曲線，有 $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=K$ ，即 N=K 是穩定的平衡點，這與模型一開始的假設是符合的。

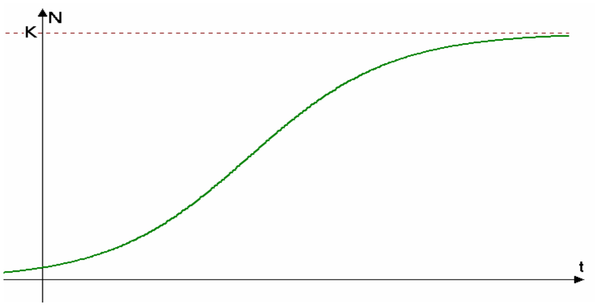


圖 5-2-2　Logistic 曲線

Logistic 模型用途十分廣泛，除了用於預測人口增長外，也可用於疾病傳播，謠言的傳播，銷售預測等。但這個模型的最大缺點是飽和係數 K 的值不容易確定 (劉承平，2002)。

在 92 年「大學推甄入學學科能力測驗」中，曾以這個模型當成命題的來源，題目如下：「根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？」

另外在南一版的高中課本數學乙上冊中的一道題目，所用的也是Logistic模型，題目如下：「心理學家有時候用數學模式：$L(t)=A(1-10^{-kt})$ 來描述在時間 t 時的學習量$L(t)$，其中A與k都是常數。假設有一學生需要背熟100個英文單字，心理學家發現這個學生在10分鐘時背熟10個單字。根據這些資料，這個學生至少要學習多久，才能背熟80個以上的單字。」

5.2.3　藥物吸收代謝模型

口服藥物或肌肉注射藥物進入人體內後，集中在人體的某一部位，靠著表面與身體內部接觸而逐漸被吸收，被吸收的藥物也會隨著時間而排出體外，整個系統如圖所

示，稱為單房室模型 (圖 5-2-3)。它假設體內藥物在任一時刻都是均勻分布的，設 t 時刻後血液中的藥物總量為 $x\,(\,t\,)$，系統處於一種動態平衡，即假設以下的關係式成立：

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{入}-\left(\frac{dx}{dt}\right)_{出}$$

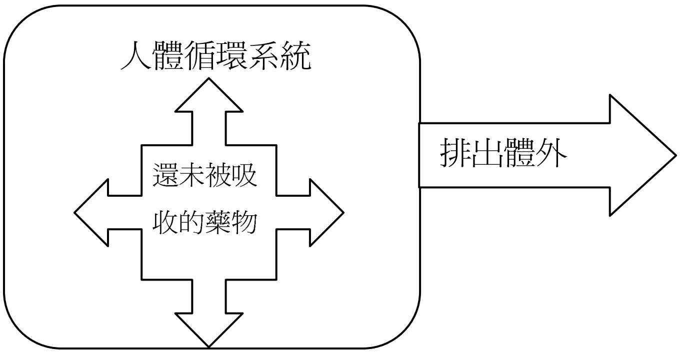


圖 5-2-3 單房室模型示意圖

設被分解排出體內的速率 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{出}$ 與 $x(t)$ 的濃度成正比，比例係數為 k，則 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{出}=kx$，假設藥物被吸收的速率與剩餘藥物的數量成正比，比例係數為 k_1，還未吸收的剩餘藥物量為 $y\,(\,t\,)$，則 y 滿足：

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-k_1 y \\ y(0)=D\end{cases}$$，其中 D 為藥物總量

可以解出 $y(t)=De^{-k_1 t}$

因此 $\dfrac{dx}{dt}=k_1De^{-k_1t}-kx$ (4)

而且 $x(0)=0$ 。將(4)式移項，得到 $\dfrac{dx}{dt}+kx=k_1De^{-k_1t}$ (5)

(5)式同乘以 e^{kt} ，得 $e^{kt}\dfrac{dx}{dt}+kxe^{kt}=k_1De^{(k-k_1)t}$ (6)

將(6)式左邊合併成微分形式，得 $\dfrac{d}{dt}\left(xe^{kt}\right)=k_1De^{(k-k_1)t}$

將 dt 移項，並且對等式兩邊積分

$$\int d\left(xe^{kt}\right)=\int k_1De^{(k-k_1)t}dt$$

$$\Longrightarrow\ xe^{kt}=\frac{k_1D}{k-k_1}e^{(k-k_1)t}+c$$

$$\Longrightarrow\ x(t)=\frac{k_1D}{k-k_1}e^{-k_1t}+ce^{-kt}$$

由 $x(0)=0$ ，解得 $c=-\dfrac{k_1D}{k-k_1}$ ，故 $x(t)=\dfrac{k_1D}{k-k_1}(e^{-k_1t}-e^{-kt})$ 。

接著我們以飲酒之後，血液中的酒精濃度 (blood alcohol content) 來檢驗這個模型是否符合實際狀況。酒中的酒精會經由吸收而進到人體的血液中，血液中的酒精濃度便會增加，然後由胃、腸、肝臟、腎臟等器官的酵素系統，將之氧化分解成無毒的醋酸，再氧化成二氧化碳和水，並產生能量 (蔡中志，2003)。所以在血液中的酒精濃度會先升高，然後再慢慢下降。

在數學建模中，資料的蒐集是初步的工作之一。要驗證這個模型便需要血液中酒精濃度隨著時間變化的資料，藉由網際網路的便利性，可以讓我們很容易找到需要的相關資料。中央警察大學蔡中志教授蒐集國人年齡層由 20 歲到 61 歲不等的男女有效樣本合計 84 人，其中男性 56 人，女性 28 人；依年齡層分爲 20 至 30 歲 26 人，31 至 40 歲 29 人，40 歲以上 29 人。每人的飲酒量依其體重計算，男性每公斤 1 克純酒精（約相當於 60 公斤成人，飲用 600ml 啤酒二瓶半，600ml 紅酒或 180ml 烈酒），女性每公斤 0.8 克純酒精。餐後 30 分鐘內飲完酒，之後 30、45、60、120、180、240 分鐘後測得的血液酒精濃度如表 5-2-1 所示。

表 5-2-1 血液中酒精濃度

時　間	0.5 小時	0.75 小時	1 小時	2 小時	3 小時	4 小時
平均值(mg/dl)	53.253	56.402	57.434	53.687	45.506	33.566
標準差(mg/dl)	15.940	15.342	16.036	17.351	18.539	19.067

利用這些數據，我們可以求出 k 與 k_1 的值。由 $x(1)=57.434$，$x(2)=53.687$，$x(4)=33.566$，分別代入模型中，得到聯立方程組：

$$\begin{cases} \dfrac{k_1 D}{k-k_1}(e^{-k_1}-e^{-k}) = 57.434\cdots\cdots\cdots(7) \\ \dfrac{k_1 D}{k-k_1}(e^{-2k_1}-e^{-2k}) = 53.687\cdots\cdots\cdots(8) \\ \dfrac{k_1 D}{k-k_1}(e^{-4k_1}-e^{-4k}) = 33.566\cdots\cdots\cdots(9) \end{cases}$$

將第(8)式除以第(7)式，第(9)式除以第(8)式，可得到聯立方程組

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-2k_1}-e^{-2k}}{e^{-k_1}-e^{-k}} = 0.93475989831807 \\ \dfrac{e^{-4k_1}-e^{-4k}}{e^{-2k_1}-e^{-2k}} = 0.62521653286643 \end{cases}$$

利用因式分解來化簡，得到

$$\begin{cases} e^{-k_1}+e^{-k} = 0.93475989831807 \\ e^{-2k_1}+e^{-2k} = 0.62521653286643 \end{cases}$$

再令 $p=e^{-k_1}, q=e^{-k}$ ，可得 $\begin{cases} p+q=0.93475989831807 \\ p^2+q^2=0.62521653286643 \end{cases}$

利用 Maxima 可以解出 $p=e^{-k_1}$ =0.16051806996207， $q=e^{-k}$ =0.77424184653062。將這兩個數值代回第(2)式中，最後解出 $\dfrac{k_1 D}{k-k_1}$ = -93.58281720992588 。

取其近似值，得出血液中酒精濃度模型的函數為 $x(t)=-93.58(0.1605^t-0.7742^t)$ 。

計算函數值 (表 5-2-2) 與實驗所得的數據比較，誤差並不是很大，只有在 $t=0.5$ 的差異較大，不過原來實驗數據中的標準差為 15.94，因此這個模型尚能符合實際情況。

表 5-2-2 血液中酒精濃度函數值

t	0.5	0.75	1	2	3	4
$x(t)$	44.85	53.51	57.434	53.687	43.05	33.566

模型應用：

依照我國「道路交通管理處罰條例」第三十五條，對於酒精濃度過量（吐氣 0.25mg/L、血液 0.05%或 50mg/dL 以上）駕駛汽車者處以新台幣六千元以上一萬二千元以下罰鍰，並當場禁止其駕駛，同時吊扣駕駛執照六個月。飲酒駕車往往會造成嚴重的交通事故，我們可以從這個模型來分析，飲酒後應該休息多少時間再上路，會比較安全。

從函數圖形（圖 5-2-4）中可以看出大約飲酒後 1 至 1.5 小時之間，血液中的酒精濃度達到最高，之後開始下降。從這裡可以解釋所謂酒的後勁，因爲喝酒精純度愈高的酒，高峰值的時間會延後，而且曲線下的面積愈大（何國榮，2000）。本模型中 $x(2.3)= 50.56$，$x(2.4)= 49.481$，因此一個體重 60 公斤的人，如果喝了二瓶半的 600ml 啤酒時，要休息 2.4 個小時以上，血液中的酒精濃度才不會超過標準（50mg/dL）。

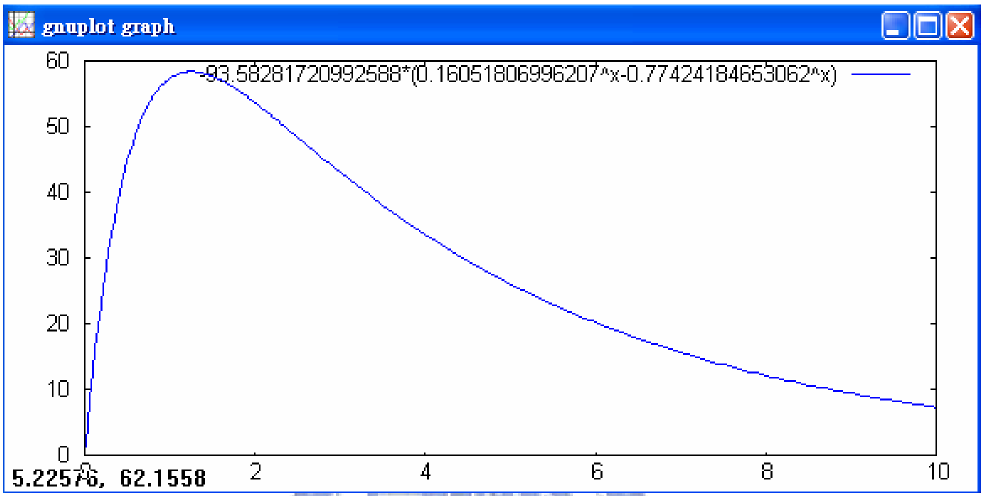


圖 5-2-4　血液中酒精濃度函數圖形

模型評價：

飲酒速度的快慢，在這個模型中並沒有去考慮，而是假設一開始所有的酒精就在胃當中。模型所用的實驗數據是餐後三十分鐘內飲用一定數量的酒，之後才開始測量，所以這個模型可以再加以改進，也就是假設酒是以相等速率慢慢進到胃中。

另外每個人的體質不同，空腹與非空腹時的酒精吸收速度也不見得相同，因此在特殊的情況下，就無法應用這個模型了。

5.3　線性迴歸模型

在建立數學模型的過程中，經常需要建立變量之間的關係，但有時對於研究對象的結構並不很清楚，這時可以借助觀察量測來獲得一些離散數據，再分析這些數據，從中找出變量的內在關係。例如克卜勒研究第谷收集的天文觀測資料，發現了行星運

動的軌跡應該是橢圓，進而提出了著名的克卜勒行星運動定律。

若兩個變量之間存在關係，通常可以分成兩類：一類是確定性關係，即兩者之間有函數關係；另一類關係是變量之間存在某種聯繫，但又未達到可以相互確定的程度，例如身高與體重之間有關係，但是知道一個人的身高並不能確定他的體重(徐全智，2003)。

研究變量之間關係最有效的第一步就是繪製數據的散布圖，藉由電腦協助，我們可以很準確而且快速地完成。對散布圖進行分析時，可以找出變量的關係是線性的還是非線性的，以及是否有周期性等有用資訊。當變量之間的關係是線性關係，我們可以利用最小平方法來找出最合適的迴歸直線(線型函數)對數據進行擬合。

5.3.1 最小平方法原理

假設有一組資料為(x_i , y_i)，i =1, 2, 3,⋯, n，從散布圖中看出變數 x 與變數 y 具有線性的關係，要找一個線性函數 $y = a + bx$，使得觀測值 y_i 與擬合值 $a + bx_i$ 的殘差平方和最小。即求出 a, b 的值，使$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2$有最小值。

令$Q=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2$，將 Q 對 a, b 偏微分，令其為 0，得方程式如下：

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=\sum\left[y_i-(a+bx_i)\right]\cdot(-2)=0$$

$$\Rightarrow na+b\Sigma x_i=\Sigma y_i \quad \Rightarrow na+bn\overline{x}=n\overline{y}$$

$$\Rightarrow a+b\overline{x}=\overline{y} \tag{10}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b}=\sum\left[y_i-(a+bx_i)\right]\cdot(-x_i)=0 \Rightarrow a\Sigma x_i+b\Sigma x_i^2=\Sigma x_i y_i$$

$$\Rightarrow an\overline{x}+b\Sigma x_i^2=\Sigma x_i y_i \tag{11}$$

由(10)式得 $a=\overline{y}-b\overline{x}$，代入(11)式，得

$$(\overline{y}-b\overline{x})n\overline{x}+b\Sigma x_i^2=\Sigma x_i y_i$$

$$b(\Sigma x_i^2-n\overline{x}^2)=\Sigma x_i y_i-n\overline{x}\,\overline{y}$$

$$\therefore b=\frac{\Sigma x_i y_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\Sigma x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}$$

令 $r=\dfrac{\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\overline{x})^2\cdot\Sigma(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{(n-1)S_xS_y}$ 爲 x, y 的相關係數

則 $b=\dfrac{\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{(n-1)S_xS_x}=r\cdot\dfrac{S_y}{S_x}\Rightarrow a=\overline{y}-r\dfrac{S_y}{S_x}\overline{x}$

因此所求的迴歸直線爲 $y=(\overline{y}-r\dfrac{S_y}{S_x}\overline{x})+r\dfrac{S_y}{S_x}x$ ，即 $y-\overline{y}=r\dfrac{S_y}{S_x}(x-\overline{x})$

5.3.2 線性迴歸模型應用

在第四屆「北京中學生數學知識競賽」裡有一道試題：「2000 年希臘奥運會上第一次列入女子舉重的項目，各級別冠軍的成績如下：

級別	運動員	國籍	體重(kg)	抓舉(kg)	挺舉(kg)	總成績(kg)
48kg	德拉諾娃	保加利亞	47.48	82.5	102.5	185
53kg	楊霞	中國	52.46	100	125	225
58kg	門丁維爾	墨西哥	56.92	95	127.5	222.5
63kg	陳曉敏	中國	62.82	112.5	130	242.5
69kg	李偉寧	中國	66.74	110	132	242
75kg	烏魯蒂亞	哥倫比亞	73.28	110	135	245
>75kg	丁美媛	中國	103.56	135	165	300

試利用這些數據組建模型，描述運動員舉重的總成積對運動員體重的依賴關係。根據模型分析哪些級別上運動員舉重的總成績還有較大的提高潛力。」

這道題目並沒有很明確指出所要使用的數學方法，所給的條件只是比賽的成績，而且所問的問題－「較大的提高潛力」也有點模糊。對中學生而言這是比較陌生的題

目，因爲類似的題目都是直接了當告訴學生求出迴歸直線，然後從給定 x 的值來預測 y 的值。所以即使學生學過迴歸直線，很可能不知道可以用在這道題目上。

迴歸直線方程式的運算頗爲繁雜，我們可以利用 Excel 來完成這些工作。首先在 Excel 中將兩個變數的資料輸入兩個欄位後，可以很快畫出散布圖，及求出迴歸直線。

【解】分別將 7 位選手的體重與總成績輸入 Excel 中，如圖 5-3-1 所示。

	A	B	C
1	體重	總成績	
2	47.48	185	
3	52.46	225	
4	56.92	222.5	
5	62.82	242.5	
6	66.74	242	
7	73.28	245	
8	103.56	300	
9			

圖 5-3-1　在 Excel 中的舉重比賽資料

資料輸入完後，在選單上選取「插入(I)、圖表、XY 散布圖」，這樣就會將體重與總成績的散布圖畫出來(圖 5-3-2)。

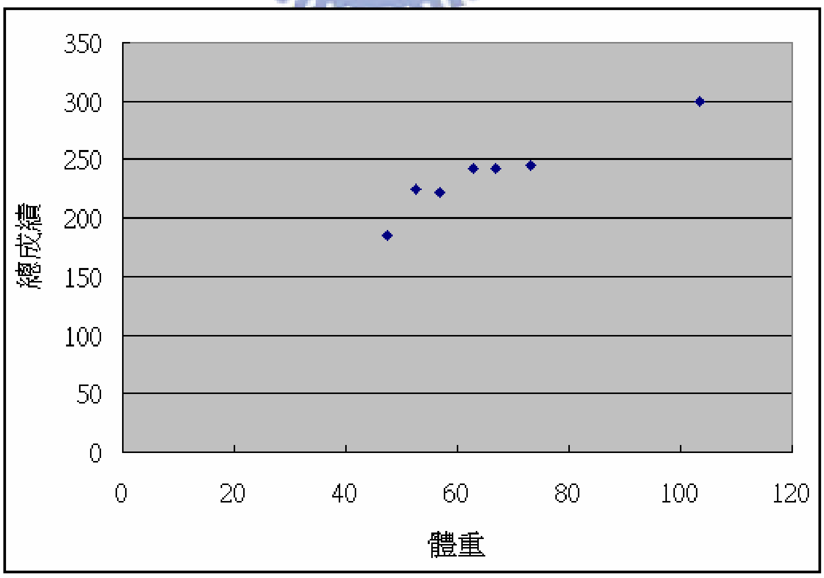


圖 5-3-2　體重與總成績散布圖

在圖表上以滑鼠左鍵點選一次，再從選單中選擇「圖表、加上趨勢線」，然後選

擇「線性類型」，並在選項上勾選「圖表上顯示公式」(圖 5-3-3)。

圖 5-3-3 繪製迴歸直線

如此即得到迴歸直線(趨勢線)的方程式 $y = 1.7601x + 120.91$ (圖 5-3-4)。

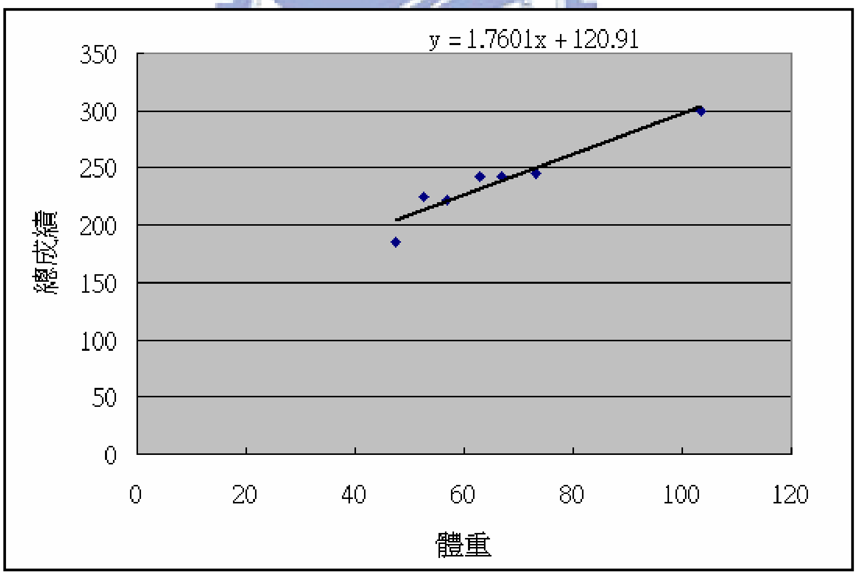


圖 5-3-4　迴歸直線圖型與方程式

分別將體重代入迴歸直線模型中，得到結果如表 5-3-1 所示。在結果中可以看出來 48 公斤級別的選手具有最大的進步空間。75 公斤與大於 75 公斤級別的選手也還有小幅度的進步空間。

表 5-3-1　迴歸模型估算的成績

級別	體重	總成績	模型成績
48	47.48	185	204.48
53	52.46	225	213.24
58	56.92	222.5	221.09
63	62.82	242.5	231.48
69	66.74	242	238.38
75	73.28	245	249.89
>75	103.56	300	303.19

模型評價

48 公斤級別的數據具有較大的偏差，尤其在數據資料少的時候，所具有的影響力相對較大，所以參與建模並不恰當，所得到的模型並不能適當擬合其他級別選手的成績。將這個數據去掉後，所得的迴歸直線為 $y = 1.51x + 141.76$(模型二)。用這個模型來估算選手的成績如表 5-3-2，可以發現這個模型對於其他選手來說是比較合適的。在建模過程中應當特別注意到極端值會對整體所造成的誤差，需適時加以剔除。

表 5-3-2　兩個舉重模型成績比較

級別	體重	總成績	模型一成績	模型二成績
48	47.48	185	204.48	213.29
53	52.46	225	213.24	220.80
58	56.92	222.5	221.09	227.52
63	62.82	242.5	231.48	236.40
69	66.74	242	238.38	242.31
75	73.28	245	249.89	252.16
>75	103.56	300	303.19	297.78

5.4 群試(Group testing)模型

群試的想法是在1942年第二次世界大戰的時候因驗血問題(檢驗新兵是否感染梅毒)而產生的(阮夙姿，1999)。群試的意義如下：假設需要檢驗物有 n 個，每次取其中 d 個出來檢驗，如果這 d 個待測物中只要有一個會呈現陽性反應，則將這次試驗結果稱爲陽性，記爲 1；如果 d 個待測物沒有出現陽性反應，則將這次試驗結果稱爲陰性，記爲 0。這樣進行 m 次之後，要找出 n 個檢驗物中有哪幾個是呈現陽性反應，並且希望 m 能夠盡量小於 n。

當 n 很大的時候，如果檢驗次數 m 可以遠小於 n，則可以節省相當多的檢驗時間與使用的成本。群試模型就是設計一種檢驗方式，達到我們要的目標，以下介紹使用 *d-disjunct* 矩陣來進行群試。

5.4.1 *d-disjunct* 矩陣

1. 定義

設 M 是一個０、１矩陣，C_j 爲矩陣的第 j 行(column)，我們也可以把 C_j 看成是一個集合。例如矩陣 M 的第 2 行裡，只有第 1 個與第 3 個元是 1，則可以把 C_2 記做{1, 3}。因此 $\bigcup_{j\in D} C_j$ 爲 M 中任取矩陣中 d 行(columns)做布林和(Boolean sum)運算，其中 $|D| = d$ 。例如 $C_1 = [1001]^t = \{1, 4\}$， $C_2 = [1010]^t = \{1,3\}$，則 $C_1 \cup C_2 = (1011)^t = \{1, 3, 4\}$。所謂 *d-disjunct* 矩陣就是對任意 $j_0 \notin D$，都滿足 $C_{j_0} \cap \left(\bigcup_{j\in D} C_j \right) \neq C_{j_0}$ 這個性質的矩陣。也就是 *d-disjunct* 矩陣中任取 d + 1 行來看，在任何一行都可以找到一個 1，而這個 1 所在的列當中，其他 d 行都是 0。如下面的矩陣中，任取 3 行來看，每一行都可以找到一個

1，使得所在的列只有這個 1 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d-disjunct 矩陣另一個特性是：在矩陣中任取 d 行的布林和結果都不相同。

2. 構造 *d-disjunct* 矩陣

設$[n]=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\binom{[n]}{k}$代表從 n 個元素中取 k 個元素所成集合的族。例如$[4]=\{1, 2, 3, 4\}$，則$\binom{[4]}{2}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 。

定理：設 d 是正整數，且 d < k，$D\in\binom{[n]}{d}$，$K\in\binom{[n]}{k}$ ，若 $D\subset K$ ，則矩陣中第(D, K)位置的元為 1，否則為 0。如此可以得到一個$\binom{n}{d}\times\binom{n}{k}$的 0、1 矩陣，簡記做$\delta(n, d, k)$，則 $\delta(n, d, k)$是一個 *d-disjunct* 矩陣(Macula, 1996)。

以下為 n=5，k=3，d=2 為例，所得到一個結果。

表 5-4-1　$\delta(5, 2, 3)$矩陣

	1,2,3	1,2,4	1,2,5	1,3,4	1,3,5	1,4,5	2,3,4	2,3,5	2,4,5	3,4,5
1,2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1,3	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1,4	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
1,5	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2,3	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
2,4	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
2,5	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
3,4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
3,5	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
4,5	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

證明：

令 $C_{j_0}, C_{j_1}, \cdots, C_{j_d}$ 爲 δ (n, d, k)中的 d + 1 個不同的行，則有 d + 1 個不同的 k 元子集 $K_{j_0}, K_{j_1}, \cdots, K_{j_d}$ 與他們對應。

$\forall i, 1 \le i \le d$ ，必然存在 $x_i \in K_{j_0} - K_{j_i}$ ，所以 $\{x_i \mid 1 \le i \le d\}$ 包含於[n]的某個 d 元子集 D_0, 而 $D_0 \subset K_{j_0}$ 且 $D_0 \not\subset K_{j_i}$ 。

因此 δ (n, d, k)矩陣中，在 D_0 所在的這一列中，只有在 C_{j_0} 這一行是 1，而在其他 $C_{j_1}, \cdots, C_{j_d}$ 這 d 個行都是 0。

同理可證在其他任一行中，都可以找到某一列的 1，而這個 1 所在的列當中，其他 d 行都是 0。

5.4.2 DNA 檢驗

1. 何謂 DNA

脫氧核醣核酸（DNA，爲英文 Deoxyribonucleic acid 的縮寫），又稱去氧核醣核酸，是染色體的主要化學成分，同時也是組成基因的材料。有時被稱爲「遺傳微粒」，因爲在繁殖過程中，父代把它們自己 DNA 的一部分複製傳遞到子代中，從而完成性狀的傳播 (維基百科)。所謂基因就是一段特定序列的 DNA ，以去氧核醣與磷酸酯爲主要骨幹，並含有四種鹼基：腺嘌呤 (A)、鳥糞嘌呤 (G)、胸腺嘧啶 (T)、胞嘧啶 (C)其中 AT 會互相吸引，GC 會互相吸引。例如，一條 DNA 序列爲 AATTCGC，則其互補序列就是 TTAAGCG。當二者序列完全吻合時，其間氫鍵吸引的力量最強。人類的基因約有 4 萬多個，DNA 的鹼基有 30 億個。

2. 檢測 DNA 的實驗方法

美國西北大學奈米科技研究所教授 Mirkin 在 1997 年 Science 期刊上，發表了利用金奈米粒子 (gold nanoparticle)來檢測 DNA 的方法。其原理是將 DNA 片段接到金奈米粒子表面，如果兩種 DNA 片段是互補片段，則兩種含有金奈米粒子的溶液混在一起時，金奈米粒子會藉由 DNA 片段之間的作用力互相吸附在一起(如圖 5-4-1)，這時可以從溶液的顏色改變來得知。因此可以從一組已知的 DNA 片段來偵測出另一組片段。

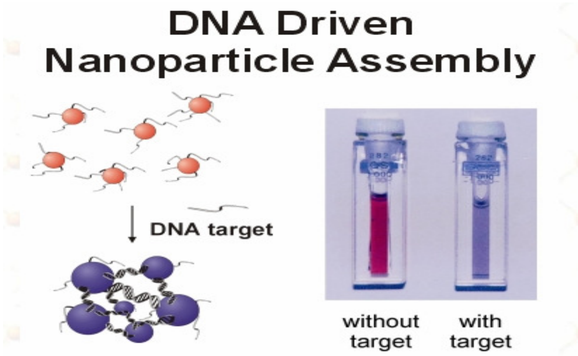


圖 5-4-1　將 DNA 藉由奈米粒子組合

資料來源：http://chemgroups.northwestern.edu/mirkingroup/

3. 使用 *d-disjunct* 矩陣設計實驗

由於 DNA 的組成有太多可能，例如長度為 12 鹼基的 DNA 片段，可能的型式就有 4^{12} 種，因此要從一段已知的片段來找到另一組互補的 DNA 片段有如海底撈針一般，一個一個檢驗的話，需要實驗相當多的次數。此時便可以使用群試來減少實驗次數，可以每次同時檢驗很多個。首先視實際情況，設計一個 *d-disjunct* 矩陣。

在 *d-disjunct* 矩陣中的行數，即總共待檢測的 DNA 片段個數，列數則是所需要的實驗次數。我們以一個例子，來說明使用 *d-disjunct* 的演算法。假設有 20 個待測 DNA，其中最多只有兩個會與探測器反應(陽性反應)。在 DNA 的檢驗中，這個假設是合理的，甚至完全不會呈陽性反應的機率也很大，要視 DNA 片段的長度而定。在其他的試驗中，則要從過去經驗來評估在待檢測物中會有陽性反應物的個數。

令 d = 2，因為 $20=\binom{6}{3}$，且 $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=15$，所以使用 δ(6, 2, 3)這個矩陣(圖 5-4-2a)

來設計實驗。在第一列中，第 1，2，3，4 行為 1，代表將編號 1、編號 2、編號 3、編號 4 的的 DNA 片段一起進行檢測。假設編號 3 與編號 7 的 DNA 片段含有要檢測的鹼基，所以第一次實驗的結果為陽性反應，記為 1。第二次則取編號 1、編號 5、編號 6、編號 7 來進行實驗，因為有取到編號 7，所以結果也是 1，這樣總共的實驗次數為 15 次，其中會在第 1、2、4、5、8、12 次的時候陽性反應，得到一個 15 x 1 的 0、1 矩陣(圖 5-4-2b)。

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

(a) (b)

圖 5-4-2 δ(6，2，3)矩陣

我們怎麼從這個實驗結果來得知編號 3 與編號 7 是與探測器反應的 DNA 片段呢？由 *d-disjunc*t 的性質：這個矩陣任兩行的 Boolean sum 都不同，我們可以將所有兩行的 Boolean sum 都算出來，再將實驗所得到的這個行向量去比對，可以找到唯一一個會完全相同的行向量，就是第 3 行與第 7 行的 Boolean sum 結果。

如果會呈現陽性反應的 DNA 只有一個，假設是編號 2，則所得到的實驗結果就跟第 2 行完全相同。如果這 20 個都不會呈現陽性反應，所得的結果就是一個全部是 0 的矩陣。因此在 20 待檢驗 DNA 片段當中，假設最多只有 2 個會呈現陽性反應，我

們可以在 15 次的實驗後找出來是哪幾個。

實際上在應用時，可以造出行數比列數大許多的矩陣。例如 δ(20, 5, 10)矩陣就是 $\binom{20}{5}\times\binom{20}{10}$=15504 × 184756 的大小。這個矩陣最多可以檢測 184756 個待測的 DNA 片段，只需要 15504 次的實驗，但是 1884756 個 DNA 片段中，最多只能有 5 個是探測器的互補 DNA 片段。

六、結論與建議

不論是自然科學、數學，甚至是各行各業要能持續進步發展，創造力是絕對重要的一個動力。然而目前中學教育中，對於創造力的啓發並沒有太大重視，即使是數學也是如此。升學考試決定了師生教與學的目標，結果得到「數學考得好」並不代表「數學能力好」的現象。以傳統的考試而言，數學要考得好，不外乎計算能力與解題能力兩個因素，這些都需要演練大量題目才有所提昇，學生只好透過反覆的演練以應付考試，而考完試之後就忘掉一大半。

數學建模的過程中，解題的思考策略與創意相當重要，計算能力反而不是很必要，只要清楚計算過程的邏輯，都可以利用電腦來協助計算。大多數學生學習數學是相當受挫折，即使是能夠理解所學的概念，在考試中仍會不斷受到挫折，很難從中獲得成就感。數學建模並沒有絕對的標準答案，藉由電腦的協助，除了可以讓學生發揮創意來解決問題，也可以拉近學生之間計算能力的落差，讓程度較差同學也有表現機會，不因而放棄數學。

在高中數學中，或許可以設計一門數學建模選修課程，讓學生學習使用電腦來進行「數學實驗」以及解決數學中的問題，讓學生從實際操作中來體驗數學概念。例如觀察函數圖形來掌握函數性質、觀察級數與數列變化、動態幾何呈現、機率事件的模擬…。一方面可以讓學生熟悉數學軟體的操作，為將來大學課程做準備，另一方面可以提昇學生的學習動機，這樣對於數學教育目標的達成亦有其助益吧！

參考文獻

第一章

姜啓源，數學模型，凡異出版社，台北，1992。

Arnold, Neumaier, hhttp://www.mat.univie.ac.at/~neum/model.html

楊啓帆，談之奕，何勇，數學建模，浙江大學出版社，杭州，2006。

徐全智，楊晉浩，數學建模，高等教育出版社，北京，2003。

林福來，「透過數學建模活動培養高中生數學創造力」，網址：http://www.creativity.edu.tw/modules/wfsection/download.php?fileid=55，2003。

Murthy, et al. Mathematical modeling: A tool for problem solving in engineering, physical, biological and social sciences, Pergamon Press plc, 1990.

鄭英豪，命題工作坊之情境試題，網址：http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/study/situationproblem.doc，2005。

張珠寶，「數學建模融入數學課程教學的研究與實踐」，第九屆全國數學建模教學與應用會議，山西太原，2005 年 8 月 8 日至 13 日。

林國源，「高中數學建模課程與實踐之研究」，國立交通大學，碩士論文，2005。

Robert, J.S 著，郭俊賢、陳淑惠譯，如何培育學生的創造力，心理出版社，台北，2003。

魏福義，「數學建模在高等教育改革中的作用初探」，科技進步與對策 9 月號，湖北，2003。

施羿如，「從數學建模的觀點探究高一生指數函數單元解題歷程之研究」國立高雄師範大學，碩士論文，2005。

National Council of Teachers of Mathematics, Problem solving be the Focus of school mathematical in the 1980's. An agenda for action . Palo Alto, Calif：Dale Seymour Publications, 1980.

National Council of Teachers of Mathematics, Curricalum and Evaluation Standards for School Mathematics. Palo Alto, Calif.: Dale Seymour Publications, 1989.

NCTM.INC, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989.

Conference Board of the Mathematical Sciences, Overview and Analysis of School

Mathematics, Grades K-12, 1975.
中華人民共和國教育部，普通高中數學課程標準(實驗)，人民教育出版社，北京，2003。
任善強、周寅亮，數學模型，中央圖書出版社，台北，1998。
葉其孝，中學數學建模，湖南教育出版社，湖南，1998。
袁震東，數學建模方法，華東師範大學出版社，上海，2002。
思源科技教育基金會，歷年活動回顧，網址：
http://www.seed.org.tw/?activity/creativity/history/2004/math/2004math.html
交通大學數學建模競賽，網址：http://www.math.nctu.edu.tw/mcm/mcm/

第二章

Arnold, Neumaier, hhttp://www.mat.univie.ac.at/~neum/model.html
劉承平，數學建模方法，高等教育出版社，北京，2002。
林國源，「高中數學建模課程與實踐之研究」，國立交通大學，碩士論文，2005。
徐全智，楊晉浩，數學建模，高等教育出版社，北京，2003。

第三章

陳宜良，中小學數學科課程綱要評估與發展研究，2005。
袁震東，「數學建模與中學數學」，數學數學 2005 第一期，上海，2005。
嚴士健、張奠宙、王尚志，數學課程標準(實驗)解讀，江蘇教育出版社，江蘇，2003。
林福來，高級中學數學第一冊至第四冊，南一書局，台南，2005。
林福來，高級中學數學數學甲上下、數學乙上下冊，南一書局，台南，2005。
許志農，「大考試題趨評析」，2004。
北京高中數學知識應用競賽命題組，「北京高中數學知識應用競賽簡介」，網址：
http://math.cersp.com/Modeling/200607/1731_3.html，2002。

第四章

韓曙光、胡覺亮，「數學實驗課程的教學實踐」，第九屆全國數學建模教學與應用會議，山西太原，2005 年 8 月 8 日至 13 日。
丁爾升，「面向新世紀的數學教育」，中國教育和科研計算機網，網址：
http://www.edu.cn/20010823/208280.shtml，2001。

林國源，「高中數學建模課程與實踐之研究」，國立交通大學，碩士論文，2005。

林正仁，「SciLAB 簡介」，http://mail.nkmu.edu.tw/~crlin/SciLab_Tutorial/SciLab_1.htm。

維基百科，「賽揚獎(Cy Young Award)介紹」，網址：
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B3%BD%E6%8F%9A%E7%8D%8E

第五章

蔡中志，「酒精與交通安全研討」，網址：
http://www.tybus.com.tw/酒精與交通安全.htm

何國榮，「人體血液中酒精濃度與呼氣酒精濃度在實例上的探討」，八十九年道路交通安全與執法研討會論文集，台北，2000。

阮夙姿，「群試問題」，國立交通大學，博士論文，1999。

Anthony J. Macula, A simple construction of d-disjunct matrices with certain constant weights. Discrete Mathematics 162, 1996.

Dyachkov, A., Macula, A., Rykov, V. , New applications and results of superimposed code theory arising from the potentialities of molecular biology. In the book:Numbers and Combinatorics, Proc, ”Numbers, Information, and Complexity”, Kluwer Academic Publishers, 2000.