

# 國立交通大學

電機學院 IC 設計產業研發碩士班

## 碩士論文

零填補之正交分頻多工系統的盲蔽式通道估計

Blind Channel Estimation for Zero-Padding Orthogonal Frequency  
Division Multiplexing Systems

研究生：許堯勝

指導教授：吳卓諭 博士

中華民國九十八年七月

零填補之正交分頻多工系統的盲蔽式通道估計

Blind Channel Estimation for Zero-Padding Orthogonal Frequency  
Division Multiplexing Systems

研究生:許堯勝

Student: Yao-Shang Hsu

指導教授:吳卓諭 博士

Advisor: Jwo-Yuh Wu

國立交通大學

電機學院 IC 產業研發碩士班

碩士論文

A Thesis

Submitted to College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master

in

Industrial Technology R & D Master Program on

IC Design

July 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年七月

# 零填補之正交分頻多工系統的盲蔽式通道估計

學生:許堯勝

指導教授:吳卓諭 博士

國立交通大學電機學院產業研發碩士班

## 摘要

本論文提出一個經由盲蔽判別一個零填補之正交分頻多工系統通道以還原符元的方法。其判別方式是利用所接收訊號形成的自相關矩陣，計算出其通道係數乘積矩陣，再對一個由通道係數乘積矩陣所形成的厄米特矩陣作特徵分解。其通道係數向量，即為此厄米特矩陣經特徵分解後的最大特徵值所對應的特徵向量。所得的特徵向量與真實向量之間，存在了一個常數倍數的關係。而本文也提出了經由設計訓練符元的方式來得到真實的系統通道係數向量與計算而得的特徵向量之間的常數倍數。

為了減少通道雜訊對於估計通道準確度的影響，本文提出了利用觀察雜訊子空間與系統通道係數乘積子空間的相關程度來設計零填補之正交分頻多工系統的最佳週期性編碼序列。應用了最佳週期性編碼序列計算出通道之後，本篇論文以強制歸零等化器來還原符元。將實證結果與子空間方法比較後，首先，比起子空間法，本篇論文所提出的方法在計算上更為簡單。在低訊雜比與低傳送區塊的情況下，得到了較準確的通道估計與較低的錯誤率。

**關鍵詞：**正交分頻多工系統、零填補、盲蔽式通道估計、最佳週期性編碼序列

# Blind Channel Estimation for Zero-Padding Orthogonal Frequency Division Multiplexing Systems

Student: Yao-Shang Hsu

Advisor: Jwo-Yuh Wu

Industrial Technology R & D Master Program of  
Electrical and Computer Engineering College  
National Chiao Tung University

## ABSTRACT

In this thesis, we proposed a blind channel identification scheme for zero-padding orthogonal frequency division multiplexing systems with periodic modulating sequence. The proposed method uses the block system model and exploits the channel matrix when some zeros are padded into the source block signal. When block signal is received, we can use its autocorrelation matrix to compute the products of channel coefficient. The channel impulse response vector can be identified, up to a scalar ambiguity, by computing the eigenvector associated with the maximal eigenvalue of a Hermitian matrix, which is formed by the products of channel coefficient. To remove the scalar ambiguity, we design the training symbols which are inserted in the data blocks.

To minimize the decrease of channel estimation accuracy caused by channel noise, we design the optimal periodic modulating sequence for zero-padding orthogonal frequency division multiplexing by observing the orthogonality between the noise subspace and the channel product coefficient subspace. After applying the optimal periodic modulating sequence to identify the channel impulse response, zero-forcing equalizer is used to recover the symbol. Comparing to the subspace method, the proposed method is simpler in computation. In the low SNR regime and less data blocks, the proposed method has better performance in channel estimation accuracy and lower symbol error rate.

**Keywords:** orthogonal frequency division multiplexing, zero-padding, blind channel estimation, periodic modulating sequence

# 誌謝

能夠順利完成研究所學業與論文，我最要感謝的莫過於我的指導老師吳卓諭博士，無論是用嚴謹的態度來要求我研究的進度與心態，或是適時的關心我的生活，每在研究徬徨時都給予我最適切的協助與指導。點點滴滴，在在都感受到能夠成為老師的學生，是一件很榮幸的事。對此，我要對老師表示我最真摯的謝忱。

在研究期間，也非常感謝我的實驗室同學致翔，無數個夜晚的討論，一起熬夜研究，一起宵夜，每當有研究上的困難，你總是第一個能夠一起討論的人，研究所同窗相互扶持的情誼，難以磨滅。

在交大這一段時間，我還要感謝網球隊的教練與夥伴們，有你們，增添了我在學習生活之外的無數精彩。尤其是詹益欣教練，對我的幫助在任何方面都很大，對他的感謝，難以言表。

論文寫作期間，謝謝致翔、政洋的互相幫忙。也感謝惠方、祉君以及球隊的學弟學妹們的鼓勵與打氣，讓我在非常的時刻感受到溫暖，有繼續往前的動力，謝謝你們。

謹以這本論文，獻給我最親愛的爸爸媽媽與家人，長久以來，你們無私的愛與包容，無時無刻的支持與鼓勵，讓我得以順利的完成研究所的學業，真的非常感謝。

許堯勝 謹誌

民國九十八年七月

# 目錄

摘要 .....	i
誌謝 .....	iii
目錄 .....	iv
圖目錄 .....	vi
名詞縮寫表 .....	vii
運算符號表 .....	viii
第一章 緒論 .....	1
第二章文獻回顧與系統模型 .....	3
2.1 正交分頻多工系統傳輸原理 .....	4
2.1.1 子載波的正交性 .....	6
2.1.2 保護區間與循環字首 .....	7
2.1.3 正交分頻多工系統的優缺點 .....	8
2.2 基本假設 .....	10
2.3 循環字首傳送之正交分頻多工系統 .....	11
2.4 零填補傳送之正交分頻多工系統 .....	14
2.5 循環字首與零填補之正交分頻多工系統優缺點比較 .....	16
2.6 子空間法 .....	17
第三章 盲蔽式通道估計 .....	19
3.1 零填補之正交分頻多工系統的盲蔽式通道估計 .....	19
3.1.1 通道判別方程式 .....	19
3.1.2 通道係數乘積的計算 .....	22
3.1.3 通道脈衝響應的判別 .....	24
3.2 最佳週期性編碼序列設計 .....	25
3.2.1 最佳化的條件 .....	25
3.2.2 最佳解 .....	27
3.3 訓練符元的設計 .....	33
3.3.1 常數倍數的確定 .....	33
3.4 演算法 .....	35
3.5 模擬結果 .....	36

第四章 符元還原 .....	45
4.1 強制歸零等化器 .....	45
4.2 模擬結果 .....	46
第五章 結論 .....	52
參考文獻 .....	53

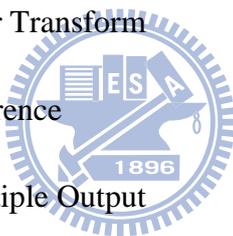


## 圖目錄

圖 2-1 有 $N$ 個子載波的連續時間之正交分頻多工系統傳送端說明.....	4
圖 2-2 有 $N$ 個子載波的連續時間之正交分頻多工系統接收端說明.....	5
圖 2-3 離散時間之正交分頻多工系統傳送與接收端說明.....	6
圖 2-4 符元間干擾與保護區間說明.....	7
圖 2-5 子載波間干擾說明.....	8
圖 2-6 循環字首說明.....	8
圖 2-7 以循環字首加入保護區間以消除符元間干擾與子載波間干擾說明.....	8
圖 2-8 循環字首傳送之正交分頻多工系統說明.....	11
圖 2-9 零填補傳送之正交分頻多工系統.....	14
圖 2-10 應用週期性編碼序列之零填補正交分頻多工系統.....	15
圖 3-1 訊雜比為 0dB，最佳週期性編碼序列與非最佳週期性編碼序列之正規化的均方差對傳送區塊比較圖.....	37
圖 3-2 訊雜比為 0dB，本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖.....	39
圖 3-3 訊雜比為 20dB，本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖.....	39
圖 3-4 傳送區塊數目為 50，本方法與子空間法之正規化的均方差對訊雜比圖.....	40
圖 3-5 訊雜比為 0dB，本方法應用最小平方方法與訓練符元方法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖.....	41
圖 3-6 訊雜比為 20dB，本方法應用最小平方方法與訓練符元方法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖.....	41
圖 3-7 傳送區塊數目為 300，本方法應用最小平方方法與訓練符元方法之正規化的均方差對訊雜比圖.....	42
圖 3-8 訊雜比為 0dB，應用訓練符元方法於本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖.....	43
圖 3-9 訊雜比為 20dB，應用訓練符元方法於本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖.....	43
圖 3-10 傳送區塊數目為 300，應用訓練符元方法於本方法與子空間法之正規化的均方差對訊雜比圖.....	44
圖 4-1 零填補正交分頻多工系統傳送與接收端說明圖.....	45
圖 4-2 傳送區塊數目為 300，最佳週期性編碼序列與非最佳週期性編碼序列之符元還原錯誤率比較圖.....	47
圖 4-3 傳送區塊數目為 500，本方法與子空間法之符元還原錯誤率比較圖.....	48
圖 4-4 傳送區塊數目為 100，本方法與子空間法之符元還原錯誤率比較圖.....	48
圖 4-5 傳送區塊數目為 500，本方法應用最小平方方法與訓練符元方法的符元還原錯誤率比較圖.....	49
圖 4-6 傳送區塊數目為 500，本方法應用最小平方方法與訓練符元方法在傳送訊號為 16-QAM 調變下的符元還原錯誤率比較圖.....	50
圖 4-7 傳送區塊數目為 300，應用訓練符元於本方法與子空間法的符元還原錯誤率比較圖.....	51

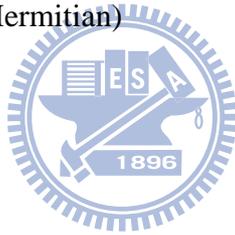
## 名詞縮寫表

ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line
BCCB	Block Circulant with Circulant Block
CP	Cyclic Prefix
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Finite Impulse Response
HDSL	High-speed Digital Subscriber Line
IBI	Interblock Interference
ICI	Intercarrier Interference
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
ISI	Intersymbol Interference
MIMO	Multiple Input Multiple Output
NMSE	Normalized Mean Square Error
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
SER	Symbol Error Rate
SISO	Single Input Single Output
SNR	Signal to Noise Ratio
VDSL	Very-high-speed Digital Subscriber Line
ZP	Zero Padding



## 運算符號表

$\ \cdot\ $	歐基里德範數(Euclidean Norm)
$*$	共軛運算(Conjugate)
$\delta(\cdot)$	克羅內克函數(Kronecker Delta Function)
$\otimes$	克羅內克乘積(Kronecker Product)
$E\{\cdot\}$	期望值運算(Expectation)
$\text{vec}(\cdot)$	向量單行化(Vectorization)
$(\cdot)^T$	轉置(Transpose)
$(\cdot)^H$	厄米特運算(Hermitian)



## 第一章 緒論

近年來，正交分頻多工系統(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM) 被廣泛的應用在通訊系統上，固定線路的網路應用就有高速式數位用戶迴路(High-speed Digital Subscriber Line, HDSL)，超高速式數位用戶迴路(Very-high-speed Digital Subscriber Line, VDSL) 以及非對稱式數位用戶迴路(Asymmetric Digital Subscriber Line, ADSL)。在無線區域網路應用上，包含有歐規的HiperLAN 2 以及美規的IEEE 802.11a 和 IEEE 802.11g 也採用正交分頻多工系統技術，在行動通訊網路應用上，也是第四代行動通訊(4G)系統的發展技術之一[1]。

因為正交分頻多工系統被如此廣泛的應用，為了提升其可靠性，準確的估計通道是一個被討論的議題。通道估計的方法通常分成兩種，一個是經由訓練符元(Training Symbol)的方式，另一個是經由盲蔽式通道估計(Blind Channel Estimation)的方式，前者利用了訓練符元的序列來達成通道估計的目標，後者則是利用了接收訊號的特性來估計通道[2]。利用後者的方法來估計通道，可以有效的降低使用領航符元(Pilot)的個數，減少訓練符元的資源消耗，顯然的提高了頻寬的利用效率。利用盲蔽式通道估計的方法，常利用了週期性編碼序列(Periodic Modulating Sequence)，最先在[3]被提出，並且被廣泛的研究。許多在單輸入單輸出(Single Input Single Output, SISO)/多輸入多輸出(Multiple Input Multiple Output, MIMO)傳送系統中關於週期性編碼序列的研究被提出[4]，第一個應用了週期性編碼序列對於單輸入/單輸出的單載波循環字首區塊傳送系統上的盲蔽式通道估計在[5]被提出，其方法探討了在一個循環結構(Circulant Structure)下，如何計算關於通道的係數乘積，並且其通道脈衝響應向量的方向可以經由特徵分解一個厄米特矩陣所得。在本篇論文中，也應用了週期性編碼序列進行分析。

正交分頻多工系統利用了將串行(Serial)的資料轉變成並行(Parallel)的資料作傳輸，因而可以進行更快的資料傳輸，並且使用了區塊傳送(Block Transmission)的方式進行分析[6]，當區塊傳送的時候，在連續的區塊間會有區塊間的影響(Interblock Interference, IBI)，為了消除區塊間影響，在每個區塊之間會插入一個大於或等於通道階數(Channel Order)的保護區間(Guard Period)，有循環字首(Cyclic Prefix)或是零填補(Zero Padding)的方式，循環字首複製了每個傳送區塊的最後數個個數大於或等於通道階數的元素，並將這些元素置放在每個區塊的開頭，並在接收端將其移除。而零填補的方式則是將個數大於或等於通道階數的零項填補進每個傳送的區塊，如此一來，連續的區塊之間將不會互

相影響，並且可以有效的在接收端被還原。而零填補的傳送方式比起循環字首的傳送方式的優點在於其還原符元的能力，不用考慮通道零點的位置，這也是在這篇論文中，考慮採用了零填補的正交分頻多工系統的原因。

本篇論文提出了一個關於零填補之正交分頻多工系統的盲蔽式通道估計方法，並且利用了估計出來的通道特性來還原符元。經由適當的安排，可以將接收訊號的自相關矩陣與通道係數乘積形成一組線性的方程式，並由這組線性方程式解出通道係數乘積。接著由通道係數乘積所形成的厄米特矩陣，將其作特徵分解之後，找出其最大的特徵值所對應的特徵向量，即為通道脈衝響應係數所形成的向量(以下簡稱通道係數向量)，並且與真實的向量之間存在一個常數倍數的關係。這個通道估計的計算過程，將完全取決於週期性編碼序列，在本篇論文中週期性編碼序列的設計目標是將雜訊對於通道估計的影響降到最低。

本篇論文的組織如下，第二章的內容為正交分頻多工系統的回顧與系統模型，並且介紹了與本篇論文作比較的方法，稱為子空間法。第三章會說明如何針對零填補的正交分頻多工系統進行盲蔽式通道判別以及最佳週期性編碼序列設計並加上模擬結果說明，第四章則提到應用等化器消除通道對符元的影響來還原符元，並觀察其錯誤率。第五章會對整篇論文作一個總結。



## 第二章文獻回顧與系統模型

這個章節會介紹關於正交分頻多工系統是如何運作的，首先會作系統的概述，包括傳送端與接收端。接著會說明數位實現的方式，針對每一個區塊作討論，包括對訊號如何調變，反快速傅立葉轉換(Inverse Fast Fourier Transform, IFFT)與快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform, FFT)，接著描述關於正交分頻多工系統子載波(Subcarrier)的正交性(Orthogonality)與應用保護區間以及循環字首的原因，最後會對正交分頻多工系統的優缺點作一個總結。在 2.2 節，描述了本篇論文所採用的基本假設。在 2.3 與 2.4 節分別介紹關於正交分頻多工系統的傳輸技術，其中包括了加入循環字首的傳送方式，以及零填補的傳送方式，這兩個方式都是為了要消除符元間干擾(Intersymbol Interference, ISI)而發展，其中，加入循環字首來消除符元間的干擾是一個很常被使用的方式，使用循環字首的方式比較方便在頻率域上的等化(Equalization)。雖然如此，但是在還原符元上，會遭受到通道零點的限制。而另外一個傳送方式，稱為零填補傳送方式，不用考慮通道零點的限制，而有比較好的訊號還原能力，在 2.3, 2.4 節會敘述這兩種傳送方式的系統模型，並在 2.4 節介紹本篇論文所採用的加入週期性編碼序列的零填補正交分頻多工系統的模型。2.5 節介紹循環字首與零填補的優缺點比較，2.6 節介紹另一種盲蔽式估計通道的方法，稱為子空間法，在第三、四章會用來與本篇論文的結果作比較。

## 2.1 正交分頻多工系統傳輸原理

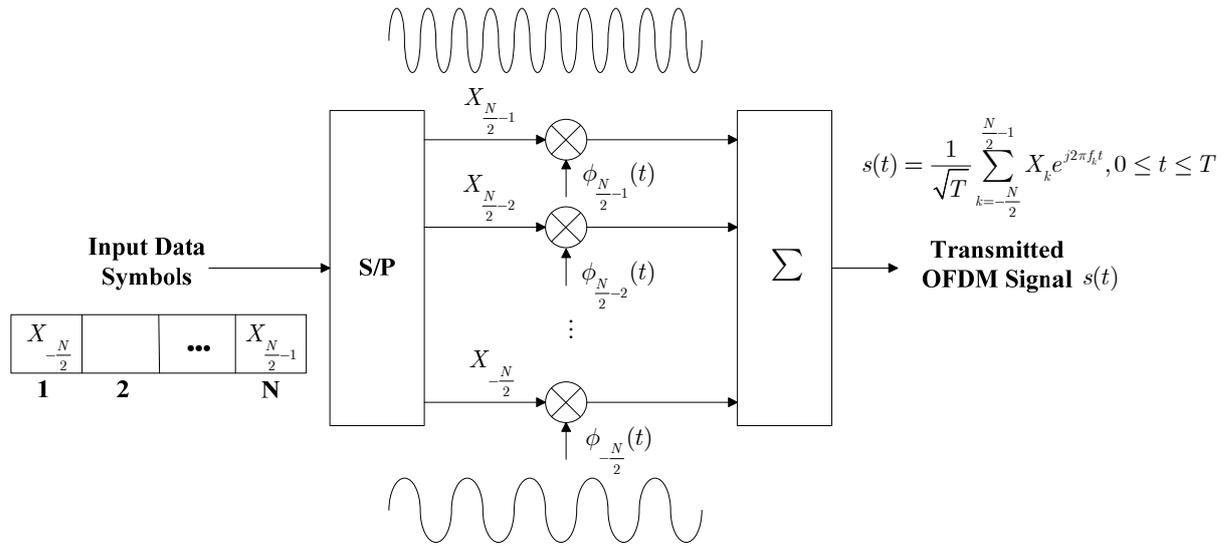


圖 2-1 有  $N$  個子載波的連續時間之正交分頻多工系統傳送端說明

圖 2-1 為一個連續時間之正交分頻多工系統傳送端的說明圖，首先為 M-相位鍵移 (M-Phase Shift Keying) 或是 M-QAM (Multi-Level Quadrature Amplitude Modulation) 的傳送資料  $X_k$ ， $k = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1$ ，經過了串並轉換，接著資料會經由不同的子載波進行傳輸。其數學表示式如下，

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X_k \phi_k(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-1)$$

其中  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi f_k t}$ ，為其第  $k$  個子載波，頻率為  $f_k = \frac{k}{T}$ ， $T$  為正交分頻多工系統的週期。

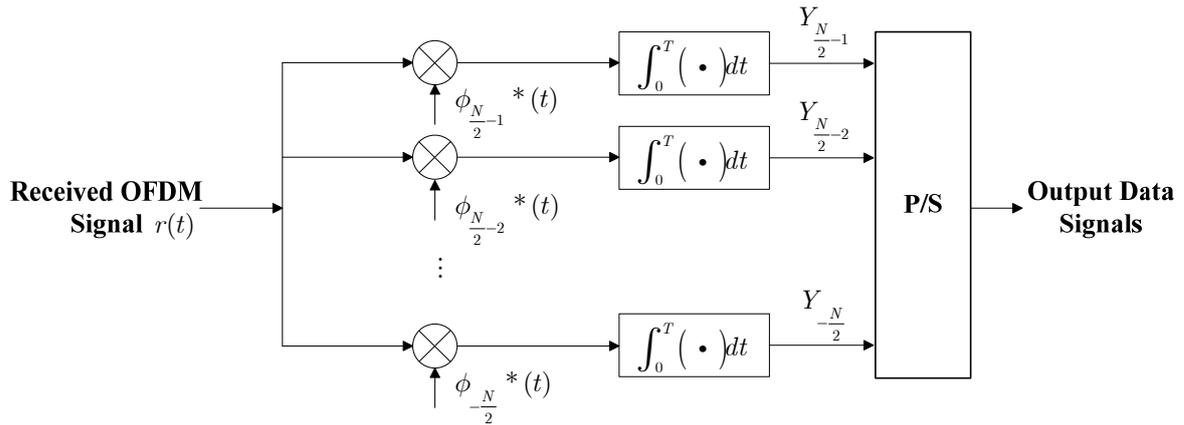


圖 2-2 有  $N$  個子載波的連續時間之正交分頻多工系統接收端說明

圖 2-2 為一個連續時間的正交分頻多工系統的接收端，所收到的訊號經過如下的解調之後，再經過並串轉換，得到了所接受的訊號符元。

$$Y_j = \int_0^T s(t) \phi_j^*(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_k \int_0^T e^{j2\pi \frac{k-j}{T} t} dt = X_j \quad (2-2)$$

接下來要說明關於正交分頻多工系統的數位實現方式，如果我們對  $s(t)$  作取樣 (Sampling)，取樣區間為  $T_d = \frac{T}{N}$ ，則其公式如下，

$$s[n] = s(t) \Big|_{t=nT_d} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-3)$$

$$= IDFT \{X_k\}$$

$s[n]$  即為  $N$  個輸入資料符元作反離散快速傅立葉轉換，同理可知， $Y_j$  即為  $N$  個  $s[n]$  作離散快速傅立葉轉換。由此，正交分頻多工系統的數位實現方式中，傳送端的調變方式為將訊號作反離散快速傅立葉轉換再經過數位/類比轉換器 (Digital to Analog Converter)，而接收端的調變方式為類比/數位轉換器 (Analog to Digital Converter) 再經過離散快速傅立葉轉換。並由圖 2-3 說明 [7]。

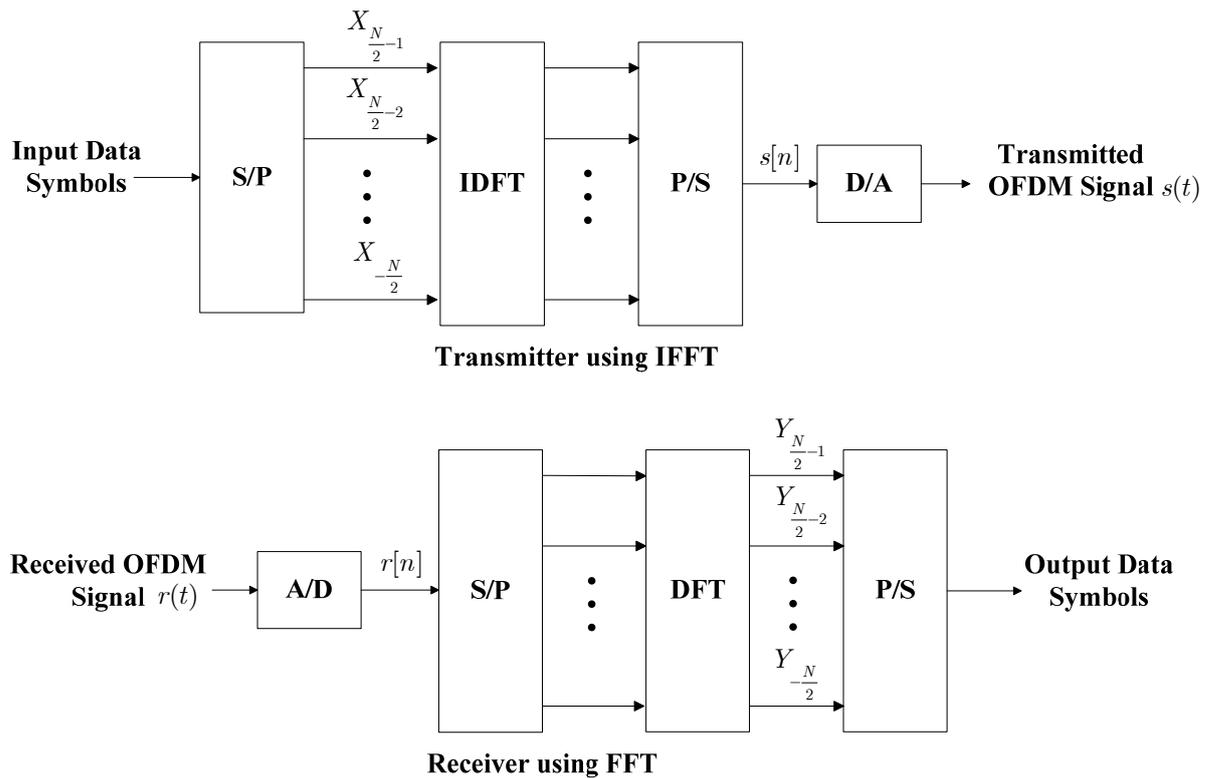


圖 2-3 離散時間之正交分頻多工系統傳送與接收端說明



### 2.1.1 子載波的正交性

在正交分頻多工系統的傳輸上面，為了避免接收訊號的混亂，將高速串行的資料分成數個並行的低速傳送資料。系統使用了多個子載波來傳輸資料，在這些子載波之間，需要彼此正交，以避免子載波之間的干擾。為了確保載送在不同子載波之間的訊號是正交的，子載波的頻率間隔需要有一定的限制。

當兩個不同的子載波滿足(2-4)式稱為正交(Orthogonal)[8]。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)df = 0 \quad (2-4)$$

## 2.1.2 保護區間與循環字首

本節所要介紹的是關於為何正交分頻多工系統要應用保護區間以及循環字首，再說明之前，需要知道的是關於正交分頻多工系統中的符元間干擾與子載波之間的干擾 (Inter-carrier Interference)。符元間干擾的原因是，在多重路徑通道下，符元與符元之間可能會出現延遲的時間，在延遲情況下所收到的正交分頻多工符元會對未延遲情況下所收到的下一個符元產生干擾，這樣的情況稱為符元間干擾。為了解決符元之間的干擾，在連續的正交分頻多工系統符元之間，插入一段不含任何資料的保護區間，只要延遲的區間小於保護區間，則符元間干擾就不會產生，如圖 2-4 所示[9]。

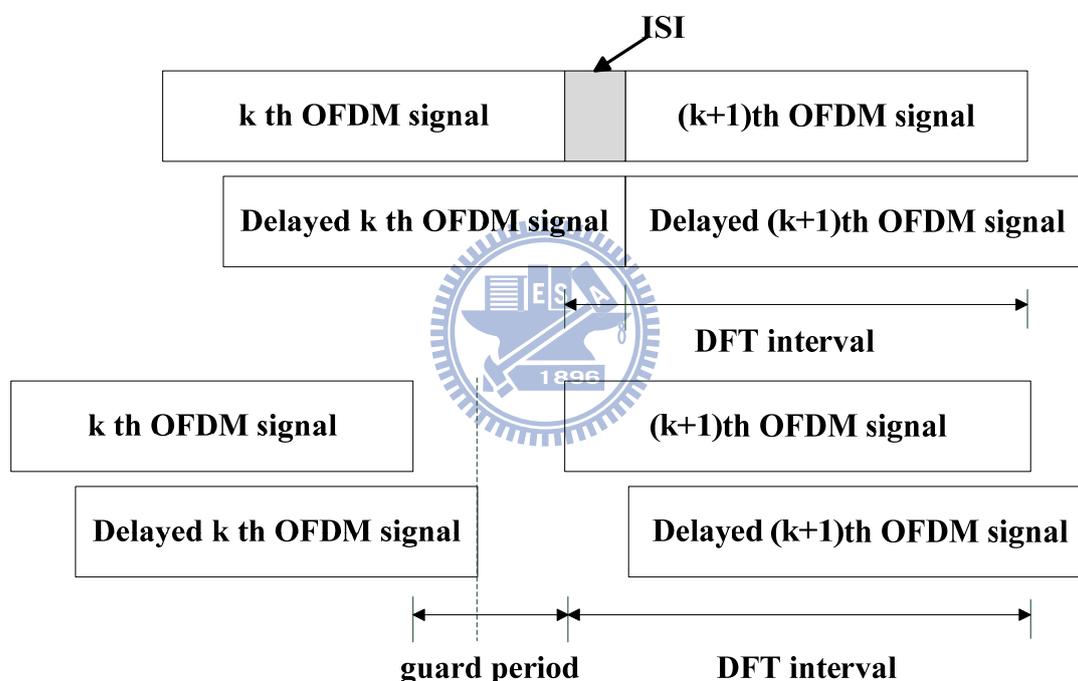


圖 2-4 符元間干擾與保護區間說明

如此，可以成功的消除了符元間的干擾。但是插入空白的保護區間，會產生一個問題。若是在不同的子載波之間有延遲的情況，則插入一段空白的保護區間，在同一個傅立葉轉換區間內會喪失子載波之間的正交性，造成在解調的時候會有子載波之間的干擾，如圖 2-5 所示。

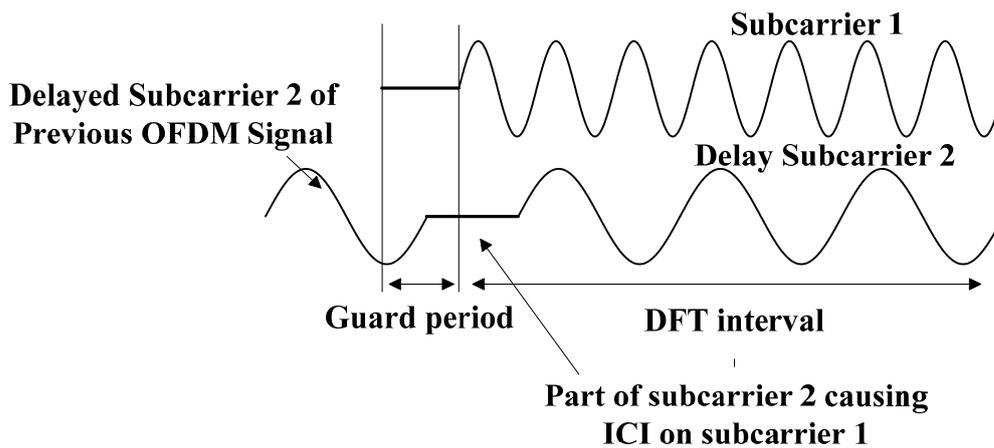


圖 2-5 子載波間干擾說明

為了解決子載波之間的干擾，將一個正交分頻多工系統的符元的尾端，複製到其前端的保護區間，可以保證所有的有延遲的子載波，在傅立葉轉換區間上都有整數倍的週期，可以成功的消除子載波之間的干擾。並以圖 2-6，圖 2-7 說明。

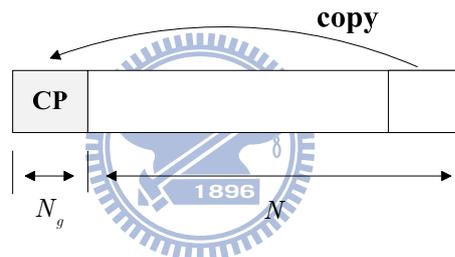


圖 2-6 循環字首說明

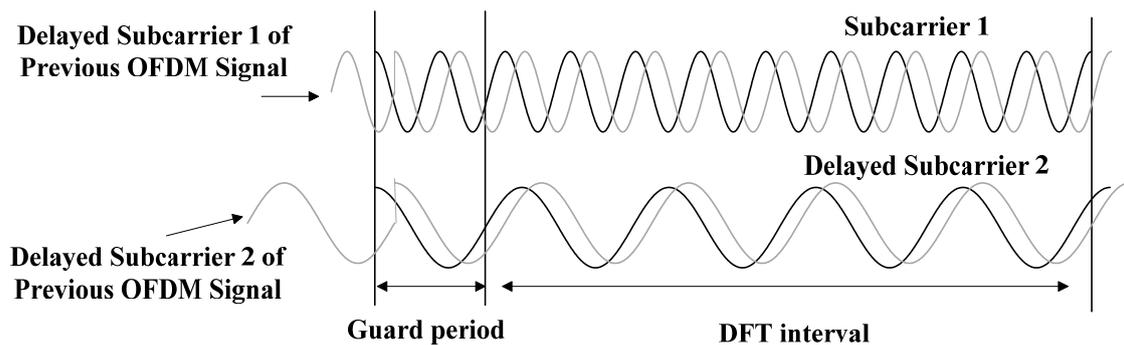


圖 2-7 以循環字首加入保護區間以消除符元間干擾與子載波間干擾說明

### 2.1.3 正交分頻多工系統的優缺點

這一節會對正交分頻多工系統的優缺點作簡單的總結。首先，正交分頻多工系統的優點如下，

- (1) 抵抗延遲擴散的影響，保護區間的設計避免了延遲擴散所造成的符元間干擾。
- (2) 有效對抗頻率選擇性衰減通道(Frequency-Selective Fading Channel)，因為正交分頻多工系統將原本的通道分割成許多子通道，於是當子通道數目夠多的時候，會呈現平坦的特性，也就是只有通道增益(Gain)的影響。不至於有嚴重的失真。
- (3) 多載波傳輸下，假設固定了子載波的個數，若讓頻率間隔是 $\frac{1}{T}$ 的整數倍， $T$ 為子載波個數，則子載波之間會保持正交性，若頻率間隔為 $\frac{1}{T}$ ，則所有子載波在保持正交性的情況下所占去的頻寬和最小，在多載波傳輸下有較高的頻譜效率。

而正交分頻多工系統的缺點有[1]，

- (1) 同步(Synchronization)的問題，正交分頻多工系統需要精確的同步，分為符元同步與頻率同步。符元同步中，可能出現的問題有時序的錯誤，若取樣的時間點不準確會造成符元之間的干擾。第二個出現的問題為載波相位雜訊所造成的子載波正交性喪失，而有子載波之間的干擾。頻率同步會發生的問題為，取樣頻率同步問題與載波頻率同步問題。取樣頻率同步問題中，當取樣頻率有漂移現象時，會造成符元間的干擾，使得符元錯誤率(Symbol Error Rate)上升。載波頻率同步的問題則因為傳送端與接收端的振盪器所震盪的頻率不同造成頻率誤差以及因為都卜勒偏移(Doppler Shift)造成頻率偏移。
- (2) 有比較高的峰值平均功率比(Peak-to-Average Power Ratio)，當子載波都在同相位的時候，峰值平均功率比會增大。造成硬體上實現的複雜度與成本會變大。

## 2.2 基本假設

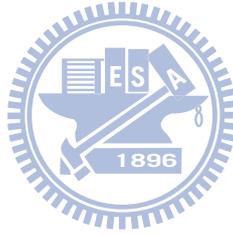
在本篇論文中，使用了以下假設，

- (1) 來源的訊號序列  $s(n)$  是獨立同分佈(Independent Identical Distributed, i.i.d.)，且平均值為零(Zero Mean)，並滿足克羅內克函數如下，

$$Es(k)s(l)^* = \delta(k-l), \quad \delta(\bullet) \text{ 為克羅內克函數(Kronecker Delta Function)}$$

- (2) 通道雜訊是白色高斯可加成性雜訊(Additional White Gaussian Noise, AWGN)，平均值為零(Zero Mean)，有變異數為  $\sigma_v^2$ ，並且與來源訊號相互無關(uncorrelated)

- (3) 假設通道階數  $L$  的上限  $\bar{L}$  為已知，循環字首的長度  $L_{cp}$  與零填補的長度  $L_{zp}$  滿足  $L_{cp} \geq \bar{L}$  與  $L_{zp} \geq \bar{L}$



## 2.3 循環字首傳送之正交分頻多工系統

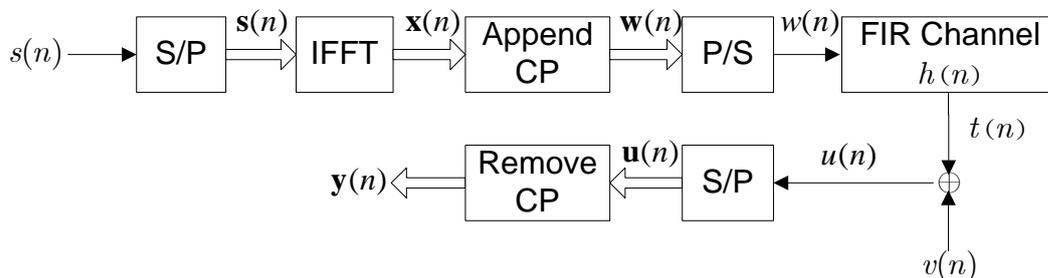


圖 2-8 循環字首傳送之正交分頻多工系統說明

圖 2-8 為一個應用循環字首的正交分頻多工傳送系統， $s(n)$  為來源的訊號，經過了串並轉換後，我們把並行的傳輸，用區塊傳送來表示[10]，假設一次傳送  $M$  個訊號，則  $\mathbf{s}(n)$  有如下的定義，

$$\mathbf{s}(n) = [s(nM) \cdots s(nM + M - 1)]^T, n > 0 \quad (2-5)$$

這個定義也同樣適用於  $\mathbf{y}(n)$ 。在傳送前， $\mathbf{s}(n)$  會先經過反快速傅立葉轉換，並加上循環字首以及並串轉換。首先，快速傅立葉轉換矩陣之定義如下，

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{(M-1)} & \cdots & w^{(M-1)^2} \end{bmatrix}, w = e^{-j2\pi/M} \quad (2-6)$$

而反快速傅立葉轉換矩陣定義如下，

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{(M-1)} & \cdots & w^{(M-1)^2} \end{bmatrix}, w = e^{j2\pi/M} \quad (2-7)$$

接著我們先看關於加上循環字首若以數學式表示將會是甚麼形式，加上循環字首就是將向量  $\mathbf{x}(n)$  中的最後  $L_{\text{CP}}$  個值，重複放到其向量的最上方，形成向量  $\mathbf{w}(n)$ ，假設  $L_{\text{CP}} > L$  (Channel Order)，這個行為可以用以下的矩陣乘法來描述，

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(n) \quad (2-8)$$

其中， $\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L_{cp} \times (M-L_{cp})} & \mathbf{I}_{L_{cp}} \\ & \mathbf{I}_{M \times M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(M+L_{cp}) \times M}$ ，並將  $M + L_{cp}$  定義為  $N$ 。

向量  $\mathbf{w}(n)$  在經過並串轉換之後，會經由等效的有限脈衝響應(Finite Impulse Response, FIR)通道傳送，而有限脈衝響應的通道輸入與輸出的關係式如下，

$$t(n) = \sum_{l=0}^L h(l)w(n-l) \quad (2-9)$$

其中， $L$  為通道的階數，有  $L + 1$  個係數(tap)。

由(2-9)式，如果我們把連續  $N$  個輸出訊號表示出來，會有以下的結果，

$$t(nN + 0) = h(0)w(nN) + h(1)w(nN - 1) + \cdots h(L)w(nN - L)$$

$$t(nN + 1) = h(0)w(nN + 1) + h(1)w(nN) + \cdots h(L)w(nN - L + 1)$$

⋮

$$t(nN + N - 1) = h(0)w(nN + N - 1) + h(1)w(nN + N - 2) + \cdots h(L)w(nN + N - L - 1)$$

並由上述的數學式，因為我們的目標是用區塊傳送來分析，所以作了以下定義，

$$\mathbf{t}(n) = \begin{bmatrix} t(nN) \\ \vdots \\ t(nN + N - 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times 1} \quad (2-10)$$

$\mathbf{t}(n)$  與輸入訊號  $\mathbf{w}(n)$  有著以下的關係，

$$\mathbf{t}(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ h(L) & & h(0) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0} \mathbf{w}(n) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & h(L) \\ \vdots & & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1} \mathbf{w}(n-1) \quad (2-11)$$

其中，

$$\mathbf{H}_0 \in \mathbb{C}^{N \times N}，是一個以 [h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1} 為第一行的下三角 Toeplitz 矩陣 \quad (2-12)$$

$$\mathbf{H}_1 \in \mathbb{C}^{N \times N}，是一個以 [0 \cdots 0 h(L) \cdots h(1)] \in \mathbb{C}^{1 \times N} 為第一列的上三角 Toeplitz 矩陣 \quad (2-13)$$

由(2-11)式，我們將 FIR 的輸入輸出關係以區塊方式來呈現，並觀察  $\mathbf{t}(n)$  是由這個時刻

的輸入訊號  $\mathbf{w}(n)$ ，與上個時刻的輸入訊號  $\mathbf{w}(n-1)$  所共同決定。而循環字首與零填補的傳送方式設計就是為了要消除這個現象。希望同一時刻的輸出訊號  $\mathbf{t}(n)$  能完全的被該時刻的輸入訊號  $\mathbf{w}(n)$  決定。

接著，在接收端接收了經 FIR 通道傳送的訊號，並且加上平均是零，變異數為  $\sigma_v^2$  的白色高斯加性雜訊，於是在訊號  $u(n)$  經過了串並轉換後，形成了  $\mathbf{u}(n)$ ，

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{t}(n) + \mathbf{v}(n) \quad (2-14)$$

在除去了前  $L_{\text{CP}}$  個值之後，得到了訊號  $\mathbf{y}(n)$ ，這個動作稱為移除循環字首，這個動作可以由下面的矩陣運算來表示。

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{R}_m \mathbf{u}(n) \quad (2-15)$$

$$\text{其中，} \mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} 0_{M \times L_{\text{cp}}} & I_{M \times M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times (M+L_{\text{cp}})}$$

於是，從傳送訊號  $\mathbf{s}(n)$  經由反快速傅立葉轉換，加上循環字首，並串轉換，經由 FIR 通道傳送，串並轉換，移除循環字首之後，得到了  $\mathbf{y}(n)$ ，並且由以下的式子，可以得到關於傳送訊號  $\mathbf{s}(n)$  與收到的訊號  $\mathbf{y}(n)$  之間的數學模型[5]。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= \mathbf{R}_m \mathbf{H}_0 \mathbf{A}_d \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + \mathbf{R}_m \mathbf{H}_1 \mathbf{A}_d \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n-1) \\ &= \mathbf{R}_m \mathbf{H}_0 \mathbf{A}_d \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + 0 \\ &= \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) \end{aligned} \quad (2-16)$$

$$\text{其中，} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(1) \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & h(L) \\ h(L) & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times M} \quad (2-17)$$

矩陣  $\mathbf{G}$  具有一個特殊的結構，稱為循環矩陣，以  $[h(0) \cdots h(L) 0 \cdots 0]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  為其第一行，至此，我們成功的將循環字首的正交分頻多工系統傳輸，以區塊傳送的方式表示出來，並且不失一般性的表示如下，

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (2-18)$$

## 2.4 零填補傳送之正交分頻多工系統

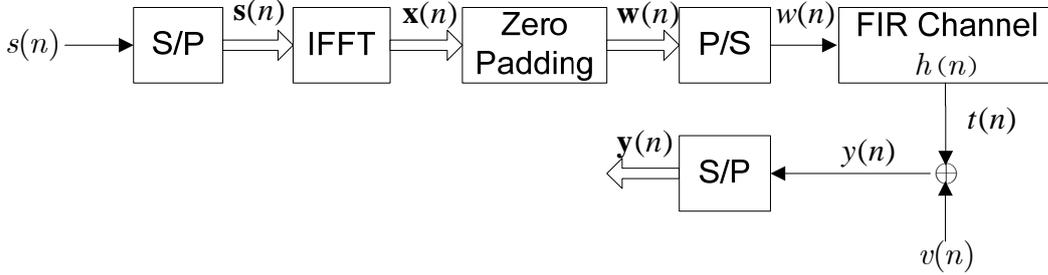


圖 2-9 零填補傳送之正交分頻多工系統

圖 2-9 為零填補傳送之正交分頻多工系統之表示，與循環字首傳送之正交分頻多工系統不同的是，在訊號經過了反快速傅立葉轉換之後，會填補一些零項，主要的原因也是為了消除 ISI，與循環字首傳送之正交分頻多工系統數學模型建立相同的是，加上零項的動作，可以用矩陣的方式表示，並且由矩陣的相乘，推導出關於零填補傳送之正交分頻多工系統的區塊傳送的數學模型。以下為其推導，與上一節相同的，我們可以經由(2-9)式推得  $\mathbf{t}(n)$  與  $\mathbf{w}(n)$  的關係，如(2-11)式，如果我們將零填補的作用看成一個矩陣，稱為  $\mathbf{T}_{ZP} \in \mathbb{C}^{(M+L) \times M}$ ，則(2-11)式會變成下列數學式。

$$\mathbf{t}(n) = \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{x}(n) + \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{x}(n-1) \quad (2-19)$$

其中， $\mathbf{H}_0$ ， $\mathbf{H}_1$  與(2-12)，(2-13)定義相同。

為了要消除 IBI，如果  $\mathbf{H}_1$  可以右乘一個矩陣，使得  $\mathbf{T}_{ZP} \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ ，又觀察矩陣  $\mathbf{H}_1$ ，只在最後  $L$  個行是有值存在的，若將矩陣  $\mathbf{T}_{ZP}$  定義如下[11]，

$$\mathbf{T}_{ZP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{L \times M} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(M+L) \times M}, \quad M + L = N \quad (2-20)$$

$\mathbf{T}_{ZP}$  的定義，對於矩陣  $\mathbf{H}_0$ ， $\mathbf{H}_1$  來說，作用將會是刪去最後的  $L$  行，對於訊號  $\mathbf{x}(n)$  來說，作用則是在向量的末端再填補  $L$  個零項。由此可知，零填補的正交分頻多工系統的區塊傳送數學模型如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{x}(n) + \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{x}(n-1) + \mathbf{v}(n) \\ &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n-1) + \mathbf{v}(n) \\ &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n) \\ &= \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$\text{其中， } \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \mathbf{T}_{ZP} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(L) & \vdots & & h(0) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times M} \quad (2-22)$$

並且不失一般性的，將零填補之正交分頻多工系統的數學模型表示如下，

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (2-23)$$

在本篇論文中，針對零填補之正交分頻多工系統作盲蔽式的通道估計，並且在傳送訊號端，應用了週期性編碼序列，於是系統的模型如下，

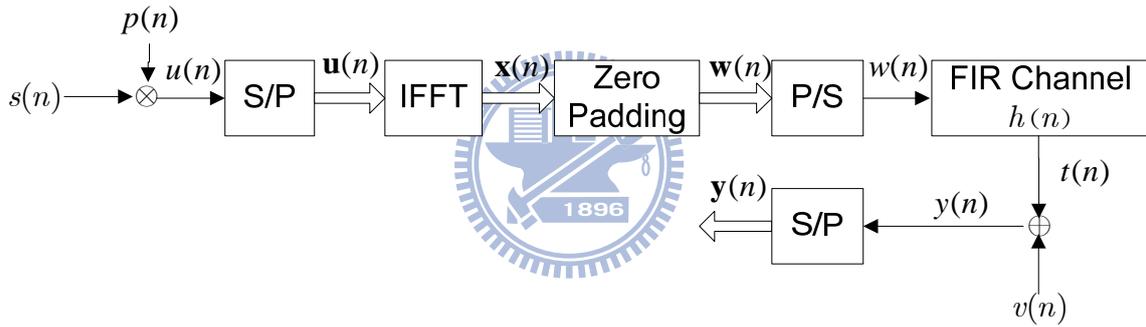


圖 2-10 應用週期性編碼序列之零填補正交分頻多工系統

其中  $p(n), 0 \leq n \leq M-1$  是週期性的編碼序列，以區塊型式表示如下，

由圖(2-10)可知  $u(n) = p(n)s(n)$ ，並且由向量表示如下，

$$\mathbf{u}(n) = [u(nM) \cdots u(nM + M - 1)]^T, n \geq 0 \quad (2-24)$$

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{D}\mathbf{s}(n) \quad (2-25)$$

其中  $\mathbf{D}$  為一個大小為  $M \times M$  的對角矩陣，對角元素值為  $p(n), 0 \leq n \leq M-1$

而不失一般性的將系統方程式表示如下，

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (2-26)$$

其中， $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{F}^{-1}$  皆與之前定義相同。

## 2.5 循環字首與零填補之正交分頻多工系統優缺點比較

這一節要介紹的是關於循環字首與零填補之正交分頻多工系統的比較。首先，如果以符元還原的角度來看，循環字首與零填補之正交分頻多工系統各有其優缺點。由(2-18)的循環字首系統方程式可以知道，循環字首之正交分頻多工系統的系統通道矩陣是一個循環矩陣，若將循環字首的正交分頻多工系統作頻率域的等化，會有以下的關係

$$\mathbf{Fy} = \mathbf{D}_n \mathbf{s} + \mathbf{Fv} \quad (2-27)$$

其中， $\mathbf{D}_n$ 是循環矩陣 $\mathbf{G}$ 經過分解之後所得的對角方陣，且 $[D_{ii}] = \sum_{l=0}^L h(l)e^{-2\pi il/M}$ 。

由(2-27)可以知道循環字首的輸入訊號與所接收到訊號的在頻率域上有一對一的關係，這個關係所帶來的好處是能有比較簡單的等化器設計(one tap equalizer)，但是這個關係也有其缺點，其缺點是若是遇到了通道係數的頻率零點，則會有資料流失(data loss)的可能而無法還原。而在零填補之正交分頻多工系統中，則不會有這個可能，因為其系統通道矩陣是一個滿秩的矩陣，就算遇到了通道係數的零點，只要通道係數不全為零，則其系統通道矩陣還是一個滿秩的矩陣，保證了符元的還原，只是比起循環字首的等化器設計，零填補傳送方式在等化器設計上較為複雜。接著以功率的觀點來看，循環字首的傳送方式需要複製一段資料於循環字首傳送，比起零填補的傳送方式需要消耗更多的功率。而在符元間干擾與子載波間干擾的觀點看來，因為循環字首消除了符元間干擾，並且保持了子載波之間的正交性，而沒有子載波間的干擾。而在零填補的傳送方式中，則會有子載波之間的干擾產生。

## 2.6 子空間法

這一節所要介紹的是用來與本篇論文所提出的估計通道的方法作比較的方法，稱為子空間法(Subspace Method)[2]。這個用來實行通道估計的方法是假設已經完全了解所收到的訊號的自相關矩陣(Autocorrelation Matrix)。而子空間方法的主要概念就是將所收到的訊號做分解，分解成訊號與雜訊的子空間，之後再適當的定義出所要討論的子空間問題。

考慮了所收到的訊號向量  $\mathbf{y}(n)$  的自相關矩陣，假設傳送訊號  $s(n)$  是 i.i.d，加上所定義的 FFT，IFFT 矩陣是正交矩陣，可以推導出其自相關矩陣

$$\mathbf{R}_y(0) = E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H] = \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2\mathbf{I}_{M+L} \quad (2-28)$$

其中  $\sigma^2$ : 雜訊功率， $\mathbf{I}_{M+L}$ : 維度為  $M+L$  之單位矩陣， $\mathbf{H}\mathbf{H}^H \in \mathbb{R}^{(M+L) \times (M+L)}$  為一個厄米特矩陣。

由(2-23)式，可以很清楚的看出訊號的子空間是矩陣  $\mathbf{H}$  的行向量的線性組合，因此這些行向量屬於訊號的子空間。假設通道的脈衝響應不是全為零，由  $\mathbf{H}$  的形式可知， $\mathbf{H}$  是一個滿秩(Full Rank)的矩陣，也就是訊號的子空間的秩是  $M$ ，因此，雜訊子空間的秩就為  $L$ 。根據上述觀察，若對矩陣  $\mathbf{R}_y(0)$  作奇異值分解(Singularvalue Decomposition)可以得到，

$$\mathbf{R}_y(0) = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_w] \begin{bmatrix} \Lambda_s + \sigma^2\mathbf{I}_{M_s} & 0 \\ 0 & \sigma^2\mathbf{I}_L \end{bmatrix} [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_w]^H \quad (2-29)$$

$\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_w$ : 分別是訊號以及雜訊子空間的正交單範基底

$\Lambda_s$ : 元素為正值的  $M \times M$  的對角矩陣

其中  $\mathbf{U}_w$  包含了矩陣  $\mathbf{R}_y(0)$  的最小奇異值(Singularvalue)所對應的向量。因為  $\mathbf{U}_w^H \mathbf{U}_s = 0$ ，並且  $\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_w$  分別為訊號以及雜訊子空間的基底，任何在雜訊子空間中的向量都會與訊號子空間中的向量互相正交，而  $\mathbf{H}$  中的行向量都在訊號的子空間中，因此任何在雜訊子

空間中長度為  $M+L$  的向量  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} = [v_1 \ \dots \ v_{M+L}]^T$ ，會使得  $\bar{\mathbf{v}}^H \mathbf{H} = 0$ ，又因為矩陣  $\mathbf{H}$  的形

式，於是  $\bar{\mathbf{v}}^H \mathbf{H}$  可以被改寫成下式  $\bar{\mathbf{v}}^H \mathbf{H} = \mathbf{h}^T \mathbf{V}^* = 0$

\*的符號代表取共軛，而  $\mathbf{V}$  為一個漢克矩陣(Hankel)[12]，其維度為  $(L+1) \times M$ ，並且由  $\bar{\mathbf{v}}$  中的元素組成，形式如下

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_M \\ v_2 & v_3 & \cdots & v_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{L+1} & v_{L+2} & \cdots & v_{M+L} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

將  $\mathbf{h}^H \mathbf{V}$  取共軛之後會得到，

$$\mathbf{h}^H \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{h} = 0 \quad (2-31)$$

上式對於任何在雜訊空間中的向量  $\bar{\mathbf{v}}$  都成立，若現在存在一組  $L$  個在雜訊空間中的向量， $\bar{\mathbf{v}}_1 \cdots \bar{\mathbf{v}}_L$ ，則會有，

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} &= 0 \\ \mathbf{W} &= \sum_{i=1}^L \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \end{aligned} \quad (2-32)$$

其中  $\mathbf{V}_i$ ， $i=1, \dots, L$  是對應的  $\bar{\mathbf{v}}_i$ ， $i=1, \dots, L$  所形成的漢克矩陣， $\mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} = 0$ ，是找出通道脈衝響應的方程式，從此式可知  $\mathbf{h}$  是相對於零，也就是矩陣  $\mathbf{W}$  最小的奇異值所對應的奇異向量。

於是應用子空間方法來估計通道脈衝響應向量的演算法如下

1. 求出  $\mathbf{R}_y(0) = E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H] = \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{M+L}$
2. 對  $\mathbf{R}_y(0)$  作奇異值分解
3. 可以由  $\mathbf{U}_w$  的行向量，求得在雜訊空間中的  $L$  個向量  $\bar{\mathbf{v}}$ 。
4. 求出相對於這  $L$  個向量  $\bar{\mathbf{v}}$  的漢克矩陣，並利用  $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^L \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H$  求出  $\mathbf{W}$ 。
5. 對  $\mathbf{W}$  作奇異值分解，找出最小的奇異值所對應的奇異向量，即為通道脈衝響應所對應的向量。

應用此方法所得到的通道響應向量，存在著一個常數尚待確定，因為若  $\mathbf{h}$  滿足了  $\mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} = 0$ ， $\alpha \mathbf{h}$  也同樣滿足。本論文中會提出關於如何估計此常數的方法，會在之後的 3.3.1 節提到。

## 第三章 盲蔽式通道估計

### 3.1 零填補之正交分頻多工系統的盲蔽式通道估計

#### 3.1.1 通道判別方程式

首先，考慮在這個零填補之正交分頻多工系統下，沒有雜訊的情況如何求得通道脈衝響應。也就是  $h(0)\cdots h(L)$ ，首先，觀察系統的通道矩陣  $\mathbf{H}$  的結構，現在已知系統通道矩陣的結構如下，

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h(0) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & h(0) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(L) & \vdots & & h(0) \\ 0 & h(L) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h(L) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times M} \quad (3-1)$$

為了要更進一步的了解這個矩陣，首先，定義一個置換矩陣(Permutation Matrix)，

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (3-2)$$

根據系統矩陣  $\mathbf{H}$  的結構， $\mathbf{H}$  將可以用其第一個行向量來表示，其表示方式如下式，

$$\mathbf{H} = [\mathbf{g} \quad \cdots \quad \mathbf{J}\mathbf{g} \quad \cdots \quad \cdots \quad \mathbf{J}^{M-1}\mathbf{g}] \quad (3-3)$$

其中， $\mathbf{g} = [h(0)\cdots h(L)0\cdots 0]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 。

根據了基本假設，可以計算出所收到訊號的自相關函數的矩陣如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y(0) &= E\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n) \\ &= \mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{F}\mathbf{H}^H \\ &= \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{H}^H \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中  $\mathbf{C}$  為一個大小為  $M \times M$  的循環矩陣。

在(3-4)式的推導中，因為化簡後發現矩陣  $\mathbf{C}$  具有  $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}^2\mathbf{F}$  的形式，而  $\mathbf{D}^2$  為一個  $M \times M$  的對角方陣，並且由Lemma 3.1可以知道矩陣  $\mathbf{C}$  為一個循環矩陣(Circulant Matrix)，並將其第一行的行向量定義如下，

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(M-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times 1} \quad (3-5)$$

Lemma 3.1  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_n^{-1} \text{diag}(\mathbf{F}_n \mathbf{v}) \mathbf{F}_n$ ， $\mathbf{C}$  為一個循環矩陣， $\mathbf{F}_n$  為一個大小為  $N \times N$  的快速傅立葉轉換矩陣[12]。

以下定義了另外一個置換矩陣， $\bar{\mathbf{J}}$ ，其大小為  $\mathbb{R}^{M \times M}$ ，

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M} \quad (3-6)$$

由(3-5)，(3-6)式可以順利的將循環矩陣  $\mathbf{C}$  用其第一行的行向量中的元素表示如下，

$$\mathbf{C} = \sum_{j=0}^{M-1} P(j) \bar{\mathbf{J}}^j \quad (3-7)$$

因為  $\mathbf{H}$  的第一行行向量包含了通道脈衝響應的未知數，所以我們想要知道在所收到的訊號的自相關函數矩陣當中，通道脈衝響應的未知數是以甚麼形式存在。由(3-3)，(3-4)，(3-7)式，可以得到下式，

$$\mathbf{R}_y(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{J}\mathbf{g} & \dots & \mathbf{J}^{M-1}\mathbf{g} \end{bmatrix} \cdot \sum_{j=0}^{M-1} P(j) \bar{\mathbf{J}}^j \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}^H \mathbf{I}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{g}^H (\mathbf{J}^T)^{M-1} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

並且經由進一步的化簡得到(3-9)式，

$$\mathbf{R}_y(0) = \sum_{j=0}^{M-1} P(j) \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{J}^i \mathbf{g} \mathbf{g}^H (\mathbf{J}^T)^{M+i-j} + \sum_{i=j}^{M-1} \mathbf{J}^i \mathbf{g} \mathbf{g}^H (\mathbf{J}^T)^{i-j} \right] \quad (3-9)$$

由(3-9)的矩陣方程式可以定義出對於未知數  $h(0) \cdots h(L)$  而言的  $N^2$  個非線性的方程式，但是如果我們將未知數定義成通道響應係數的乘積，即是將  $h(k)h^*(l)$  看成一個未知數，將會得到  $N^2$  個線性的方程式。再者，(3-9)式是由  $M$  個數學形式相同的矩陣的權和，而我們所要的資訊為  $\mathbf{g} \mathbf{g}^H$ ，如果要順利的將  $\mathbf{g} \mathbf{g}^H$  從(3.9)式中改寫，需要下面這個性質。

Lemma 3.2 矩陣方程式  $\sum_{k=1}^K \mathbf{A}_k \mathbf{X} \mathbf{B}_k = \mathbf{C}$  可以被等效的表示成

$$\left[ \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_k^T \otimes \mathbf{A}_k \right] \text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{C}) \quad [12]。$$

根據這個性質，(3-9)式可以改寫成下式，

$$\text{vec}(\mathbf{R}_y(0)) = \underbrace{\sum_{j=0}^{M-1} P(j) \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{J}^{M+i-j} \otimes \mathbf{J}^i + \sum_{i=j}^{M-1} \mathbf{J}^{i-j} \otimes \mathbf{J}^i \right]}_{\mathbf{Q}} \text{vec}(\mathbf{g} \mathbf{g}^H) \quad (3-10)$$

定義矩陣  $\mathbf{Q}$  為一個大小為  $N^2 \times N^2$  的矩陣如下，

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=0}^{M-1} P(j) \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{J}^{M+i-j} \otimes \mathbf{J}^i + \sum_{i=j}^{M-1} \mathbf{J}^{i-j} \otimes \mathbf{J}^i \right] \quad (3-11)$$

根據克羅內克乘積(Kronecker Product)的定義[12]，(2.10)式可以被重新安排成(3-12)式的一般表示式，在(3-12)式子中，這個大小為  $N^2 \times N^2$  的矩陣  $\mathbf{Q}$ ，是由下列  $M$  個循環矩陣以及  $L$  個大小為  $N \times N$  的零矩陣為第一行組成。

矩陣  $\mathbf{Q}$  的一般表示式如下，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{M-1} & \cdots & \mathbf{c}_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \mathbf{c}_{M-1} \\ \mathbf{c}_{M-1} & \ddots & & \ddots & \ddots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{M-1} & \cdots & \cdots & \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N^2 \times N^2} \quad (3-12)$$

其中  $\mathbf{c}_j \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ， $0 \leq j \leq M-1$ ，為一循環矩陣，共有  $M$  個，並以  $\bar{\mathbf{J}}^j \mathbf{P}$  與  $L$  個零為其第一個行向量。矩陣  $\mathbf{Q}$  有個特殊的形式，其中的每一個區塊間是循環的，並且區塊內也是循環矩陣，這個結構稱為循環的區塊有區塊間循環(Block Circulant with Circulant Block, BCCB)[13]。

### 3.1.2 通道係數乘積的計算

為了要求得通道的係數乘積  $h(k)h^*(l)$ ，對於  $0 \leq k, l \leq L$ ，我們需要更進一步的對(3-10)式當中的  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  作分析，根據(3-3)式，向量  $\mathbf{g}$  包含了  $L+1$  個通道脈衝響應的未知數， $h(n)$ ， $0 \leq n \leq L$ ，並接著有  $N-L-1$  個零。由此可知， $\mathbf{g}\mathbf{g}^H$  中的元素個數有  $N^2$  個，卻只有其中的  $(L+1)^2$  個是非零項。以下，我們更進一步的分析  $\mathbf{g}\mathbf{g}^H$ ，希望能將(3-10)式中的  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  中的零項移除，並且得出在  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  的零項移除後，(3-10)式中的矩陣  $\mathbf{Q}$  的相對應的化簡型式。

首先定義，

$$\mathbf{h} = [h(0) \cdots h(L)]^T \in \mathbb{C}^{L+1} \quad (3-13)$$

是所要求的通道係數向量。並且根據(3-3)可以得到，

$$\mathbf{g} = \left[ \mathbf{h}^T \quad \mathbf{0}_{(N-L-1) \times 1}^T \right]^T \quad (3-14)$$

$$\mathbf{g}\mathbf{g}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{h}\mathbf{h}^H & \mathbf{0}_{(L+1) \times (N-L-1)} \\ \mathbf{0}_{(N-L-1) \times (L+1)} & \mathbf{0}_{(N-L-1)(N-L-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N} \quad (3-15)$$

由(3-15)可以知道  $\mathbf{g}\mathbf{g}^H$  中，前  $L+1$  個行向量包含了所要求的通道係數的乘積與若干零項，後  $N-L-1$  個行向量則都是零向量。將  $\mathbf{g}\mathbf{g}^H$  作矩陣的單行化(vectorization)之後，每  $N$  個看成一個區間，則會有  $L+1$  個區間會有值，剩下的  $N-L-1$  個區間會全部都是零項。於是根據(3-10)式，第一步的化簡就是將這些在  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  中  $N-L-1$  個區間的零項消除，也就是消除了  $N(N-L-1)$  個零。相對應的消除了在(3-10)中的矩陣  $\mathbf{Q}$  的最後  $N(N-L-1)$  個行向量。

$$\text{vec}(\mathbf{R}_y(0)) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \overline{\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)} \quad (3-16)$$

其中， $\bar{\mathbf{Q}}$  為刪除了  $\mathbf{Q}$  的最後  $N - L - 1$  個行向量所得到的矩陣。

$\overline{\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)}$  為刪除了  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  中最後  $N(N - L - 1)$  個零之後所得的向量。

在(3-16)式中，順利的將  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  中最後  $N(N - L - 1)$  個零刪除並化簡了矩陣  $\mathbf{Q}$ ，

為了進一步的化簡  $\overline{\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)}$ ，定義了  $\overline{\mathbf{g}\mathbf{g}^H}$  如下，

$$\overline{\mathbf{g}\mathbf{g}^H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}\mathbf{h}^H \\ \mathbf{0}_{(N-L-1) \times (L+1)} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

由(3-15)可以知道  $\overline{\mathbf{g}\mathbf{g}^H}$  與  $\mathbf{h}\mathbf{h}^H$  的關係如下，

$$\overline{\mathbf{g}\mathbf{g}^H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L+1} \\ \text{-----} \\ \mathbf{0}_{N \times (L+1)} \end{bmatrix} \mathbf{h}\mathbf{h}^H \quad (3-18)$$

定義，

$$\mathbf{J}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L+1} \\ \text{-----} \\ \mathbf{0}_{(N-L-1) \times (L+1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (L+1)} \quad (3-19)$$

由(3-18)以及Lemma 3.2可知，

$$\overline{\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)} = (\mathbf{I}_{L+1})^T \otimes \mathbf{J}_L \cdot \text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H) \quad (3-20)$$

由(3-16)，(3-20)兩式，可以順利的將(3-10)式化簡為下式，

$$\text{vec}(\mathbf{R}_y(0)) = \underbrace{\bar{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{I}_{L+1} \otimes \mathbf{J}_L)}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \cdot \text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H) \quad (3-21)$$

(3-20)式中，我們將  $\bar{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{I}_{L+1} \otimes \mathbf{J}_L)$  定義為  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ，若  $\tilde{\mathbf{Q}}$  為一個滿秩(Full Column Rank)的矩陣，則從(3-21)式當中通道的係數乘積可以唯一的被決定如下，

$$\text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H) = (\tilde{\mathbf{Q}}^H \tilde{\mathbf{Q}})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^H \text{vec}(\mathbf{R}_y(0)) \quad (3-22)$$

### 3.1.3 通道脈衝響應的判別

從(3-22)式中，經由已知  $\mathbf{R}_y(0)$  以及  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ，可以得到通道係數的乘積， $h(k)h^*(l)$ ， $0 \leq k, l \leq L$ ，為了要得到通道係數的解，我們將這些通道係數的乘積形成以下大小為  $(L+1) \times (L+1)$  的厄米特矩陣(Hermitian Matrix)，其定義如下，

$$\bar{\mathbf{H}} = [\bar{\mathbf{H}}_{k,l}]_{0 \leq k, l \leq L}, \text{ 其中 } \bar{\mathbf{H}}_{k,l} = h(k)h(l)^* \quad (3-23)$$

理論上，矩陣  $\bar{\mathbf{H}}$  是一個單秩(Rank One)矩陣，並且可以被分解成  $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{h}\mathbf{h}^H$ ，其中  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{L+1}$  即在(3-13)式中的定義，關於矩陣  $\bar{\mathbf{H}}$  為一個單秩的矩陣，這個事實可以很明顯的經由對矩陣  $\bar{\mathbf{H}}$  的行向量，作高斯消去法，就可以觀察得到。

系統的通道脈衝響應  $h(0), \dots, h(L)$  可以經由以下步驟得到，首先先計算矩陣  $\bar{\mathbf{H}}$  的特徵值，找出這些特徵值中的最大值，接著找出其所對應的特徵向量。經由這方式所找出來的特徵向量，即為系統的通道脈衝響應  $h(0), \dots, h(L)$  所形成的向量的常數倍。在本論文之後的章節會提到關於如何得到這個常數。

## 3.2 最佳週期性編碼序列設計

在這個章節中，我們將雜訊的情況考慮進來，探討如何設計週期性編碼序列使得雜訊對所要訊號的影響達到最低。首先，會先推導出在雜訊存在的時候，所收到的訊號的自相關矩陣的數學形式。接著遵循3-1節的流程，得到關於系統的通道係數乘積解。在這個過程中，經由觀察雜訊在以甚麼數學形式存在，提出了如何量化雜訊對於訊號的影響，以及設計週期性編碼序列的設計條件。接著得出在本系統下，量化雜訊對於訊號的影響之後的通解，藉由這些通解，設計出最佳化的週期性編碼序列。

### 3.2.1 最佳化的條件

以下的討論，假設了系統的通道階數已知，由 (2-26)，我們可以推導出當雜訊存在的時候，所收到的區塊訊號的自相關矩陣，其推導如下，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_y(0) &= E[\mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H] \\
 &= E[(\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n))(\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n))^H] \\
 &= E[(\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n))(\mathbf{s}(n)\mathbf{D}^T\mathbf{F}\mathbf{H}^H + \mathbf{v}^H(n))] \\
 &= \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{H}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}_N \\
 &= \sum_{j=0}^{M-1} P(j) \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{J}^i \mathbf{g}\mathbf{g}^H (\mathbf{J}^T)^{M+i-j} + \sum_{i=j}^{M-1} \mathbf{J}^i \mathbf{g}\mathbf{g}^H (\mathbf{J}^T)^{i-j} \right] + \sigma_v^2\mathbf{I}_N
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

得到了所收到的區塊訊號的自相關矩陣之後，應用了與3-1節中，推導如何計算系統通道係數乘積相同的流程，可以得到當雜訊存在的時候的矩陣方程式如下，

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\mathbf{R}_y(0)) &= \sum_{j=0}^{M-1} P(j) \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{J}^{M+i-j} \otimes \mathbf{J}^i + \sum_{i=j}^{M-1} \mathbf{J}^{i-j} \otimes \mathbf{J}^i \right] \text{vec}\mathbf{g}\mathbf{g}^H + \sigma_v^2 \text{vec}(\mathbf{I}_N) \\
 &= \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H) + \sigma_v^2 \text{vec}(\mathbf{I}_N)
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

因為雜訊的變異數大小  $\sigma_v^2$  為未知，一般情況下，我們無法從包含了雜訊的訊號下，得到關於  $\text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H)$  的真實解。取而代之的是，當我們收到包含了雜訊的訊號之後，得出了訊號的自相關矩陣  $\mathbf{R}_y(0)$ ，由已知的  $\mathbf{R}_y(0)$ ，計算出最小平方解。其方程式如下，

$$\begin{aligned}
\text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H)_{LS} &= (\tilde{\mathbf{Q}}^H \tilde{\mathbf{Q}})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^H \text{vec}(\mathbf{R}_y(0)) \\
&= \text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H) + \sigma_v^2 (\tilde{\mathbf{Q}}^H \tilde{\mathbf{Q}})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^H \text{vec}(\mathbf{I}_N)
\end{aligned} \tag{3-26}$$

從(3.26)式可以很清楚的看出，若是要  $\text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H)$  的最小平方解等於真實解，其雜訊所存在的項  $\text{vec}(\mathbf{I}_N)$  必須要與  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的值域空間正交，也就是下列的條件，

$$\tilde{\mathbf{Q}}^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) = 0 \tag{3-27}$$

如果把(3-26)式中的  $\text{vec}(\mathbf{h}\mathbf{h}^H)$  看成是我們所想要的訊號，則  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的值域空間定義了訊號的子空間，而  $\sigma_v^2 \text{vec}(\mathbf{I}_N)$  則定義了雜訊的子空間，而(3-27)式則是要求訊號的子空間要與雜訊的子空間互相正交。而實際上，矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$  是由矩陣  $\mathbf{Q}$  經過了刪除了  $\text{vec}(\mathbf{g}\mathbf{g}^H)$  中的零項所對應的行向量處理而得來，矩陣  $\mathbf{Q}$  是由循環矩陣  $\mathbf{C}$  的第一行中的元素所組成，而矩陣  $\mathbf{C}$  的第一行元素又是完全由週期性編碼序列所決定的。

於是(3-27)式，就是我們如何設計週期性編碼序列的條件，亦即問題變成是，如何挑選適當的週期性編碼序列，能夠滿足(3-27)式中的正交條件，或者是，如果滿足正交條件是不可能的，那該如何盡可能的接近，讓雜訊的影響變的最小。因為以上的需求，我們需要知道矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}^T$  與  $\text{vec}(\mathbf{I}_N)$  的正交性，於是我們提出了以下檢驗方式，

$$\gamma(i) = \frac{|\tilde{\mathbf{q}}_i^H \text{vec}(\mathbf{I}_N)|}{\|\tilde{\mathbf{q}}_i^H\| \cdot \|\text{vec}(\mathbf{I}_N)\|} \tag{3-28}$$

(3-28)式當中， $\tilde{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ ，為矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的第  $i$  個行向量。且(3-28)式定義了當  $1 \leq i \leq (L+1)^2$ ，向量的序對  $\{\tilde{\mathbf{q}}_i, \text{vec}(\mathbf{I}_N)\}$  的相關(或正交)的程度。也就是說(3-28)式將會找出所有訊號的分量中受到雜訊的影響程度。並且能提供一個有效用來測量訊號與雜訊子空間正交性的方法。而當  $\gamma$  的值越小的時候，代表雜訊對訊號的影響程度越小，而且可以幫助我們在估計通道的時候有比較高的準確率。為了達成這個目的，設計週期性編碼序列的問題就如下所述，在下列兩個條件成立的情況下，我們希望  $\gamma$  能夠被最小化。

$$\text{條件一: } \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} p(n)^2 = 1 \quad (3-29)$$

$$\text{條件二: } p(n)^2 \geq \delta > 0, 0 \leq n \leq M-1 \quad (3-30)$$

條件一是將單一個區塊傳送的平均功率單範化，而條件二是保證編碼序列的功率會比某一個臨界值大，這個臨界值能讓我們在還原符元的時候，不會讓我們遭遇到因為傳送的功率太小而有等化上的困難[5]。

在(3-26)式當中，另一個用來增加最小平方估計精準度的方式是最小化雜訊影響項的範數平方，也就是， $\sigma_v^2 \left\| (\tilde{\mathbf{Q}}^H \tilde{\mathbf{Q}})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) \right\|^2$ ，但是這個方法在我們設定的兩個條件下，其方程式會使得  $p(n)$ 's 呈現非線性的情況，似乎沒有比較好的方法去得到一個最佳解。於是我們提出的方法是，挑選適當的  $p(n)$  使得能最佳的滿足正交的條件，即(3-28)式。

### 3.2.2 最佳解

在這一節裡，要得到關於如何設計週期性編碼序列的最佳解，也就是最不受雜訊影響的解。在(3-27)的條件下我們要檢驗的是矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ，但是以下我們提出的方法是可以經由檢驗矩陣  $\mathbf{Q}$  來達到等同於檢驗矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的目標。這麼作的原因是因為矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的BCCB結構，會使得檢驗的過程比較簡單而且易於說明。首先我們會先回顧在本系統下的矩陣  $\mathbf{Q}$  與矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的一般式，並且提出一個表示矩陣中某一個行向量的表示法，接著說明此表示方法應用在這兩個矩陣下會分別指向不同的行，但為相同的行向量。然後給出關於  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的行向量應用了(3-28)式的一般解，解中會清楚的表示出不同的行向量的相關係數值。並經由所推導出的一般解，提出如何設計  $P(i)$ ， $0 \leq i \leq M-1$ 。又  $P(i)$  是完全由  $p(i)$ ， $0 \leq i \leq M-1$ ，所決定，於是在決定如何設計  $P(i)$  後，我們會說明  $P(i)$  與  $p(i)$  的關係，並且給出  $p(i)$  的最佳解。

根據(3-12)式，可知矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$  的一般式如下，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{c}_{M-1} & \cdots & \mathbf{c}_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_{M-1} & & \ddots & \ddots & & \ddots & \mathbf{c}_{M-1} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{c}_{M-1} & \cdots & \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N^2 \times N^2}$$

其中  $\mathbf{c}_j \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $0 \leq j \leq M-1$ , 為一循環矩陣, 共有  $M$  個, 並以  $\bar{\mathbf{J}}^j \mathbf{P}$  與  $L$  個零為其第一個行向量, 以下為其一般式,

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}_{M-1} & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \tilde{\mathbf{c}}_0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \tilde{\mathbf{c}}_{M-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N^2 \times (L+1)^2} \quad (3-31)$$

其中  $\tilde{\mathbf{c}}_j \in \mathbb{C}^{N \times (L+1)}$ ,  $0 \leq j \leq M-1$  為  $\mathbf{Q}$  中相對應的循環矩陣去除了最後  $N - (L+1)$  行, 共有  $M$  個, 並以  $\bar{\mathbf{J}}^j \mathbf{P}$  與  $L$  個零為其第一個行向量。

由以上的區塊表示方式可以知道  $\tilde{\mathbf{Q}}$  中的任何一個行向量都在  $\mathbf{Q}$  中, 若以下列方式來表示  $\tilde{\mathbf{Q}}$  中的第  $i$  個行向量, 可以一對一的表示  $\mathbf{Q}$  中的任何一個行向量, 並根據這樣的表示方式, 可以表示出  $\mathbf{Q}$  中的部分行向量。

以下定義一組序對  $(\alpha, \beta)$ , 用以表示在一個以區塊表示法來表示的矩陣,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , 此以區塊表示法表示的矩陣, 我們用下列的方法來表示第  $i$  個行向量如下,

$$\text{column } i = \text{column} [(\alpha - 1) \times (\text{每個區塊中所包含的行向量個數}) + \beta] \quad (3-32)$$

$$1 \leq \alpha \leq \left( \frac{\text{矩陣的行向量個數}}{\text{每個區塊所包含的行向量個數}} \right)$$

$$1 \leq \beta \leq (\text{每個區塊中所包含的行向量個數})$$

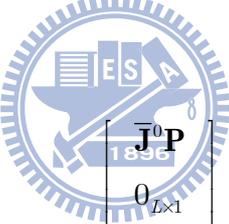
所以對於一個區塊表示法的矩陣，若是我們要表示其中第 $i$ 個行向量，另一個看法就是第 $\alpha$ 個區塊的第 $\beta$ 個行向量，所以用這樣的看法來看矩陣 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 的第 $i$ 行，其表示方法如下，

$$i = (\alpha - 1)(L + 1) + \beta, 1 \leq \alpha, \beta \leq (L + 1) \quad (3-33)$$

值得一提的是，若以組成 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 的所有序對 $(\alpha, \beta)$ ， $1 \leq \alpha, \beta \leq (L + 1)$ 。同一組 $(\alpha, \beta)$ 在表示 $\mathbf{Q}$ 上，會指向第 $(\alpha - 1)(N + 1) + \beta$ 行，指向 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 中第 $(\alpha - 1)(L + 1) + \beta$ 行，但是其行向量會與 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 中的相同。並且所有這些序對 $(\alpha, \beta)$ ， $1 \leq \alpha, \beta \leq (L + 1)$ ，所指向的 $\mathbf{Q}$ 中的這些行向量，即為組成 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 的行向量。

Fact 3.1：當以 $(\alpha, \beta)$ ， $1 \leq \alpha, \beta \leq (L + 1)$ 來表示矩陣 $\mathbf{Q}$ 與矩陣 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 的其中一個行向量時，雖然指向不同的行，但是其行向量相同。

現在，我們想要知道 $\tilde{\mathbf{q}}_i^H \text{vec}(\mathbf{I}_N)$ 的結果，首先先把 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 的第一個行向量(也是矩陣 $\mathbf{Q}$ 的第一個行向量)如下的表示，



$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^0 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \\ \bar{\mathbf{J}}^1 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{J}}^{M-1} \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \\ 0_{(N \times L) \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N^2 \times 1} \quad (3-34)$$

定義，

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2} \quad (3-35)$$

由Fact 3.1可以知道要找出 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 中的第 $i$ 行，則先找出一組 $(\alpha, \beta)$ ，並求出在 $\mathbf{Q}$ 中相對應的行向量即得。於是要求 $\tilde{\mathbf{q}}_i^H \text{vec}(\mathbf{I}_N)$ 這個問題，就轉變成求 $\mathbf{q}_j^H \text{vec}(\mathbf{I}_N)$ ， $j = (\alpha - 1)N + \beta$ ，

$1 \leq \alpha, \beta \leq (L+1)$ ，而其推導如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) &= (\tilde{\mathbf{J}}^{j-1} \mathbf{q}_1)^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) \\ &= (\tilde{\mathbf{J}}^{(\alpha-1)N+\beta-1} \mathbf{q}_1)^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) \end{aligned} \quad (3-36)$$

由於矩陣  $\mathbf{Q}$  的循環的區塊有區塊間循環結構(BCCB)，可以知道  $\tilde{\mathbf{J}}^{(\alpha-1)N+\beta-1} \mathbf{q}_1$  此項，可以化簡如下，

$$(\tilde{\mathbf{J}}^{(\alpha-1)N+\beta-1} \mathbf{q}_1)^H = \left[ \begin{array}{c} 0_{N \times 1} \\ \vdots \\ 0_{N \times 1} \\ \mathbf{J}^{\beta-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^0 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}^{\beta-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^1 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{J}^{\beta-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^{M-1} \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ 0_{(N \times L+1-\alpha) \times 1} \end{array} \right]^H \quad (3-37)$$

(3-37)中，由於矩陣  $\mathbf{Q}$  的區塊循環的關係， $\tilde{\mathbf{J}}^{(\alpha-1)N+\beta-1} \mathbf{q}_1$  將會使得第一行向量，往下移了  $(\alpha-1)$  個區塊，再因為每個區塊都是循環矩陣，所以每個區塊中的行向量往下移了  $\beta-1$  個元素。於是(3-36)可以化簡如下，其中  $\mathbf{e}_n$  為單位標準向量。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) &= (\tilde{\mathbf{J}}^{j-1} \mathbf{q}_1)^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) \\ &= (\tilde{\mathbf{J}}^{(\alpha-1)N+\beta-1} \mathbf{q}_1)^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_j^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) = \left[ \begin{array}{c} 0_{N \times 1} \\ \vdots \\ 0_{N \times 1} \\ \mathbf{J}^{\beta-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^0 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}^{\beta-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^1 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{J}^{\beta-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^{M-1} \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix} \\ 0_{(N \times L + 1 - \alpha) \times 1} \end{array} \right]^H (\mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{e}_\alpha^T \dots \mathbf{e}_{\alpha+M-1}^T \dots \mathbf{e}_N^T)^T$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^0 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix}^H (\mathbf{J}^{\beta-1})^H (\mathbf{J}^{\alpha-1}) \mathbf{e}_1 + \dots + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^{M-1} \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix}^H (\mathbf{J}^{\beta-1})^H \mathbf{J}^{\alpha+M-2} \mathbf{e}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^0 \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix}^H \mathbf{J}^{\alpha-\beta} \mathbf{e}_1 + \dots + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}^{M-1} \mathbf{P} \\ 0_{L \times 1} \end{bmatrix}^H \mathbf{J}^{\alpha-\beta+M-1} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

(3-38)

由上頁的說明可知(3-36)的結果就是 $\tilde{\mathbf{q}}_i^H \text{vec}(\mathbf{I}_N)$ 的結果，並討論整理如下，

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^H \text{vec}(\mathbf{I}_N) = \begin{cases} 0 & , \text{if } (\alpha - \beta) \geq M \\ [M - (\alpha - \beta)] P^* (\alpha - \beta) & , \text{if } 0 \leq (\alpha - \beta) \leq M - 1 \\ [M - |(\alpha - \beta)|] P^* (M - |(\alpha - \beta)|) & , \text{if } (\alpha - \beta) < 0 \end{cases}$$

(3-39)

由(3-39)的結果可以知道，每一組不同的 $(\alpha, \beta)$ 會因為 $\alpha$ 與 $\beta$ 之間的關係不同而產生不一樣的結果，也就是說在 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 當中的行向量，會因為其所在位置不同而與雜訊項 $(\text{vec}(\mathbf{I}_N))$ 產生不同的相關係數。包括了權重的不同與所對應的向量 $\mathbf{P}$ 中的元素的不同。而向量 $\mathbf{P}$ 為循環矩陣 $\mathbf{C}$ 的第一個行向量，而循環矩陣 $\mathbf{C}$ 與週期性編碼序列的關係，由(3-4)可知如下，

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}^2\mathbf{F} \quad (3-40)$$

由(3-39)式，我們已經知道相關係數是與  $P(n)$  有關，接著我們想要知道  $P(n), p(n), 0 \leq n \leq M-1$  之間的關係，於是做了以下的觀察，因為  $\mathbf{D}$  是一個對角矩陣，所以  $\mathbf{D}^2$  也是一個對角矩陣，其對角線元素為  $\{p^2(0) \cdots p^2(M-1)\}$ ，若將大小為  $M \times M$  的反快速傅立葉轉換矩陣寫成以下形式

$$\mathbf{F}^{-1} = [f_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq M} \quad (3-41)$$

因為  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ ，所以可以把快速傅立葉轉換矩陣寫成如下的表示方式，

$$\mathbf{F} = [f_{j,i}^*]_{1 \leq i,j \leq M} \quad (3-42)$$

其中，  $f_{1,j} = f_{j,1} = 1/\sqrt{M}, 1 \leq j \leq M$

為了要得到  $\mathbf{P}$  與  $p(n), 0 \leq n \leq M-1$  的關係，由(2-25)，(3-40)，(3-41)，(3-42)推得  $\mathbf{P}$  如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} p^2(0)f_{1,1} & \cdots & p^2(M-1)f_{1,M} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p^2(0)f_{M,1} & \cdots & p^2(M-1)f_{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1}^* \\ \vdots \\ f_{1,M}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p^2(0)f_{1,1}f_{1,1}^* + \cdots + p^2(M-1)f_{M,M}f_{M,M}^* \\ \vdots \\ p^2(0)f_{M,1}f_{1,1}^* + \cdots + p^2(M-1)f_{M,M}f_{1,M}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{M}[p^2(0) + \cdots + p^2(M-1)] \\ \frac{1}{\sqrt{M}}[p^2(0)f_{2,1} + \cdots + p^2(M-1)f_{2,M}] \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}}[p^2(0)f_{M,1} + \cdots + p^2(M-1)f_{M,M}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-43)$$

由(3-43)，(3-29)式可以知道向量  $\mathbf{P}$  的第一個元素一定為1，而其餘的元素值則會由  $p(n), 0 \leq n \leq M-1$ ，以及其餘的  $f_{i,j}$  項的乘積和所決定，並無一定的值，再由(3-39)式

中可得知 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 中不同的行會有不同的相關係數值，由所在的位置與向量 $\mathbf{P}$ 的元素值所決定，既然在(2-29)式的條件下，向量 $\mathbf{P}$ 的第一項一定為1，也就是不可變動的。為了要將雜訊對於所要求的通道係數乘積的影響降到最低，我們希望將 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 其他位置的相關係數都變成零，即 $P(1) = \dots = P(M-1) = 0$ ，而其最佳的週期性編碼序列即為 $p(0) = \dots = p(M-1) = 1$ 。

結論：在(3-29)，(3-30)的條件下，最佳週期性編碼序列為 $p(0) = \dots = p(M-1) = 1$ ，將會使得 $P(1) = \dots = P(M-1) = 0$ ，使得相關係數 $\gamma$ 對於 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 中的某些行向量存在固定的值，而其餘行向量的相關係數都是零。於是矩陣 $\mathbf{D} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 。

### 3.3 訓練符元的設計

由(3.1)節可知，在已知接收訊號的自相關矩陣下，我們可經由(3-22)式得出通道係數向量，或是在有雜訊的情況下，應用(3-26)式可以得到關於通道係數向量的最小平方解。而所求出來的通道係數向量解，與真實的通道係數向量，存在著一個常數倍數關係，為了要還原傳送的訊號，我們必須要安排一些訓練符元在傳送的訊號區塊當中，為了要達成這個目的，在這一節裡面，要介紹在零填補正交分頻多工系統中，如何以訓練符元的方式得到這個常數。



#### 3.3.1 常數倍數的確定

首先讓我們以下式來表示真實的通道係數向量，

$$\mathbf{h} = \alpha \hat{\mathbf{h}} \quad (3-44)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}$ 表示在(3-23)式中的單秩矩陣 $\bar{\mathbf{H}}$ 經特徵分解後，所得的最大特徵值所對應的特徵向量，而 $\alpha$ 是所欲求的常數倍數值。應用了最佳週期性編碼序列，將(3-44)式代入(2-26)式，可得下式，

$$\mathbf{y}(n) = \alpha \hat{\mathbf{H}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n) \quad (3-45)$$

其中 $\hat{\mathbf{H}}$ 為 $\hat{\mathbf{h}}$ 所形成的系統通道矩陣，形式如(3-1)式。

矩陣 $\mathbf{F}^{-1}$ 的第一列元素值皆為 $1/\sqrt{M}$ ，如果我們將 $\mathbf{s}(n)$ 中全部的元素值設計為1，那麼所得到的接收訊號將會是如下所示，

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(n) &= \alpha \hat{\mathbf{H}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n) \\
&= \alpha \hat{\mathbf{H}} \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n) \\
&= \alpha \hat{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \sqrt{M} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n)
\end{aligned} \tag{3-46}$$

在(3-46)式當中，若是傳送訊號 $\mathbf{s}(n)$ 為 $[1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ ，則 $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}(n)$ 會成為

$[\sqrt{M} \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ ，觀察傳送訊號 $\mathbf{y}(n)$ 的第一項 $y(0)$ ，其表示方式如下，

$$y(0) = \alpha \times \sqrt{M} \times \hat{h}(0) + v(0) \tag{3-47}$$

於是所欲求的未知數 $\alpha$ 估計如下，

$$\hat{\alpha} = \frac{y(0)}{\sqrt{M} \times \hat{h}(0)} \tag{3-48}$$

由(3-48)的估計方法，忽略了雜訊對於訊號的影響，來得到所估計的 $\alpha$ ，如此設計的原因如下，若是經由最小化 $\alpha$ 的均方差(Mean Square Error, MSE)來設計訓練符元[14]，所得到的 $\hat{\alpha}$ 將會是一個所估計的通道形成的函數，考慮了複雜度之後，決定由(3-48)式來估計 $\alpha$ 。

### 3.4 演算法

這一節，我們總結了所提出的零填補正交分頻多工系統之盲蔽式通道估計方法，並以演算法敘述如下，

1. 用時間平均的方法，估計出所接受訊號的自相關矩陣  $\hat{\mathbf{R}}_y(0)$

$$\hat{\mathbf{R}}_y(0) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{y}(i) \mathbf{y}^H(i) \quad (3-49)$$

其中， $K$  是所收到訊號的區塊個數。

2. 應用了最佳週期性編碼序列，形成矩陣方程式(3-10)中的矩陣  $\mathbf{Q}$ 。
3. 利用(3-21)式得到矩陣  $\tilde{\mathbf{Q}}$ 。
4. 根據(3-22)式計算通道係數乘積， $h(k)h^*(l)$ ,  $0 \leq k \leq l \leq L$ 。
5. 根據(3-23)式，形成厄米特矩陣  $\bar{\mathbf{H}}$ 。通道脈衝響應向量即為此厄米特矩陣  $\bar{\mathbf{H}}$  經特徵分解後的最大特徵值所對應的特徵向量的常數倍。



### 3.5 模擬結果

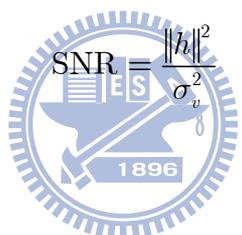
這一節，我們用了一些數值模擬，來評估所提出的盲蔽式通道估計方法的效能。在我們的模擬當中，所使用的設定為，蒙地卡羅數=2000，假定  $L=8$ ，而其通道係數是由Matlab軟體經常態分布所取出來的數值，符元的長度與零填補的長度分別為， $M=32$ ， $L_{zp}=8$ ，而輸入的訊號皆經由QPSK調變而得。

我們用正規化的均方差(Normalized Mean Square Error, NMSE)，來評估所估計的通道準確程度，其公式如下式，

$$\text{NMSE} = \left(\frac{1}{I}\right) \sum_{i=1}^I \left\| \hat{\mathbf{h}}^{(i)} - \mathbf{h} \right\|^2 \cdot \|\mathbf{h}\|^{-2} \quad (3-50)$$

其中  $I$  是蒙地卡羅數(Monte Carlo runs)， $\hat{\mathbf{h}}^{(i)}$  是第  $i$  個試驗所估計出的通道。

在我們的模擬當中，訊雜比(SNR)定義成一個無雜訊的接收訊號區塊的輸入的訊號功率與對應的雜訊功率的比值，也就是下式，

$$\text{SNR} = \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{\sigma_v^2} \quad (3-51)$$


模擬 1: 比較本篇論文所提出的最佳週期性編碼序列與非最佳週期性編碼序列所估計出的通道準確程度比較。

本篇論文提出了一個最佳週期性編碼序列，本模擬將與其他非最佳週期性編碼序列作通道估計準確度之比較，圖 3-1 為在訊雜比為 0dB 的設定下，與序列中最小臨界功率為 0.1, 0.3, 0.6 的非最佳週期性編碼序列作比較，在圖中可以很明顯的看出，應用了我們所提出的最佳週期性編碼序列所估計出的通道最為準確，並且當最小臨界功率越接近 1 的時候，正規化的均方差的表現越接近最佳的週期性編碼序列。

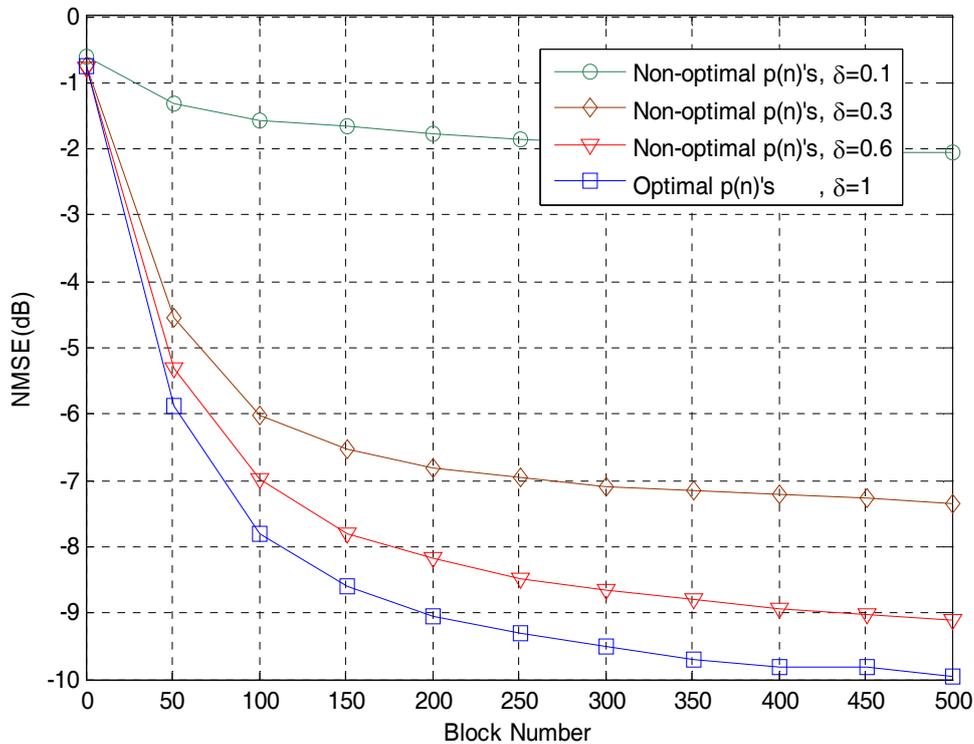


圖 3-1 訊雜比為 0dB，最佳週期性編碼序列與非最佳週期性編碼序列之正規化的均方差對傳送區塊數目比較圖

模擬 2: 比較本篇論文所提出的方法與子空間的方法所估計出的通道準確程度。

本篇論文所提出的方法應用了最佳週期性編碼序列，以及最小平方法所估計出的  $\alpha$  值，進行模擬。在不同的訊雜比條件下，作關於正規化的均方差對傳送區塊數目的模擬圖。並將其與子空間方法作比較。

最小平方法所估計  $\hat{\alpha}$  的公式如下

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\mathbf{h}}^H \cdot \mathbf{h}}{\|\hat{\mathbf{h}}\|^2} \quad (3-52)$$

圖 3-2 為訊雜比是 0dB 的情況下，兩種方法的正規化的均方差比較，由圖中可以清楚的看見在本篇論文所提出的方法，在比較低的訊雜比情況下(0dB)，有比較好的通道估計效果。

圖 3-3 為訊雜比是 20dB 的情況下，兩種方法的正規化的均方差比較，子空間法在較大的訊雜比(20dB)下，正規化的均方差值會快速的下降。

圖 3-4 為在一個固定區塊數目的條件下，觀察正規化的均方差在不同的訊雜比下的表現，發現在比較低的區塊數目下(NB=50)，在較低的訊雜比條件，本篇論文所提出的方法在通道估計準確度較為準確

由模擬結果可知，本方法在比較低的訊雜比條件下以及較少的傳送區塊數目下，比起子空間法會有比較準確的通道估計，此結果與理論相符合。首先，在比較低的訊雜比情況下，子空間法在判別雜訊子空間的向量上，容易出現錯誤，於是在估計通道的準確度會受到影響，而本方法在進行通道估計上，並不會遇到這個困難，於是比起子空間法，在低雜訊比條件下，本方法會有比較好的通道估計準確度。在比較少的傳送區塊數目下，子空間法直接對自相關矩陣作奇異值分解並選取雜訊空間的向量，容易因自相關矩陣的統計特性不準確而有較大的通道估計誤差，而本方法利用了自相關矩陣的統計特性進行設計估計通道的方法，比起子空間法對於自相關矩陣的統計特性不準確會有比較好的穩健性，於是在較低的傳送區塊數目下有較好的通道估計準確度。

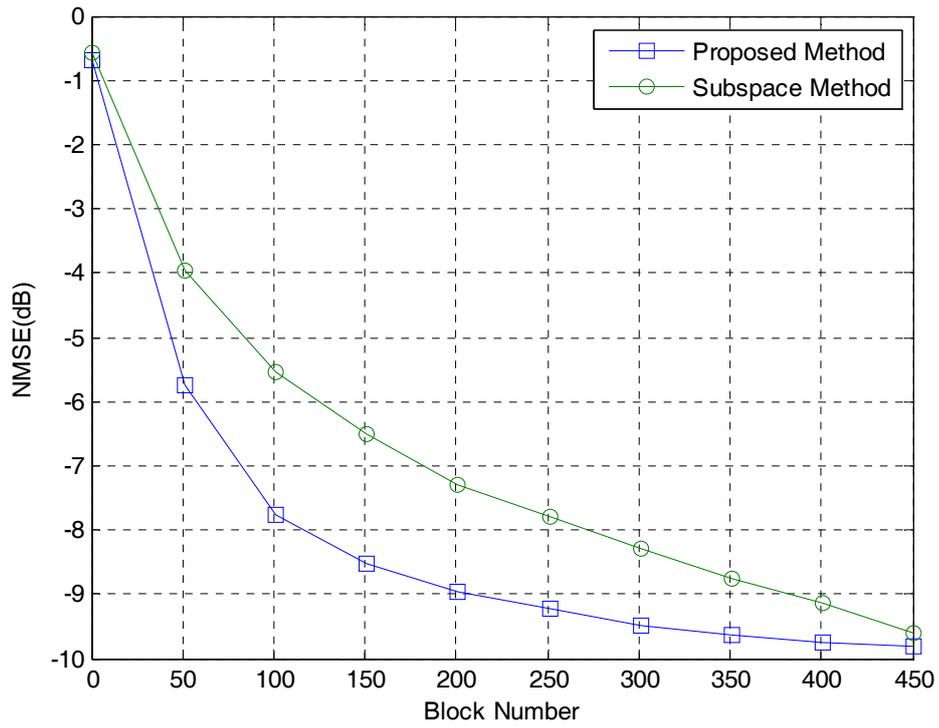


圖 3-2 訊雜比為 0dB，本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖

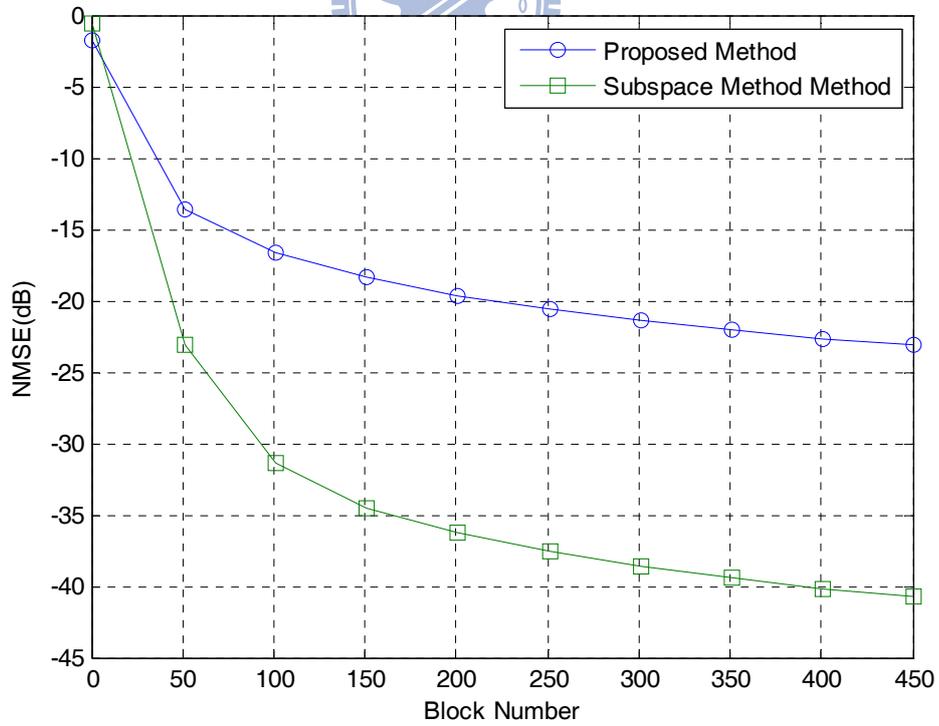


圖 3-3 訊雜比為 20dB，本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送區塊數目圖

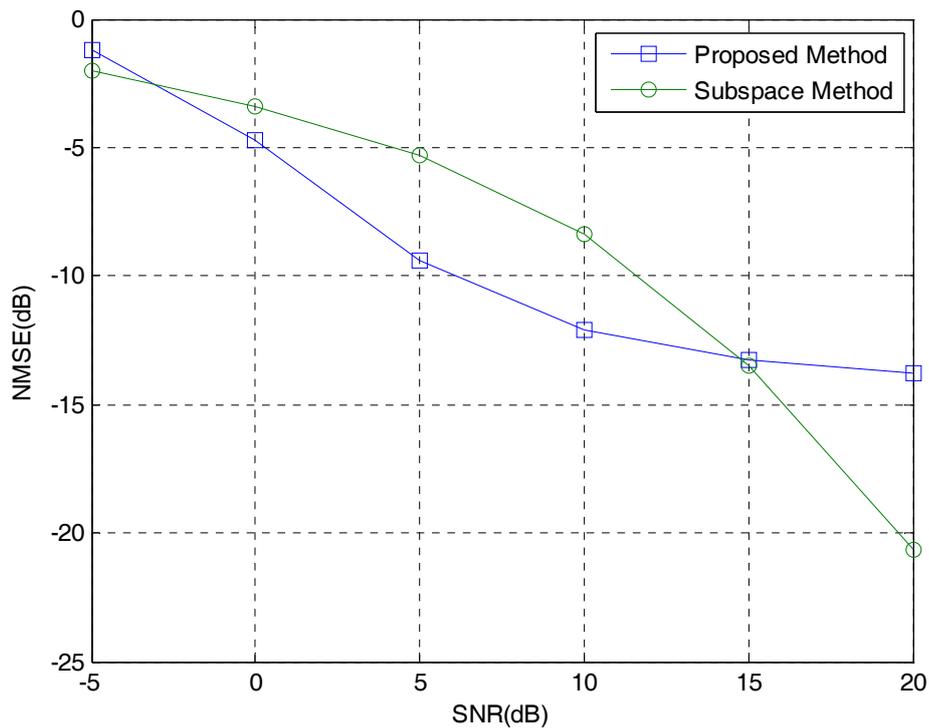


圖 3-4 傳送區塊數目為 50，本方法與子空間法之正規化的均方差對訊雜比圖

模擬 3: 比較本篇論文所提出的方法應用最小平方方法與訓練符元方法所估計出的常數值  $\hat{\alpha}$  對於通道估計的準確度影響。

圖 3-5，圖 3-6 分別為訊雜比為 0dB，20dB 的情況下，兩種估計  $\hat{\alpha}$  的方法對於估計通道的正規化的均方差比較，由圖中可清楚的看見，利用最小平方方法來估計  $\hat{\alpha}$ ，在估計通道上的準確性上比起利用訓練符元的方式來的好，並且隨著訊雜比的增加，其準確度會逐漸的增加。這個結果是符合我們的理論預期的，因為我們利用訓練符元的方式在估計  $\hat{\alpha}$  時，忽略了雜訊對於系統的影響，也就是當雜訊很大的時候，對於我們估計通道的影響是可以預期的。

圖 3-7 為固定了傳送區塊數目為 300 的情況下，在不同的訊雜比條件所得到的通道估計的正規化的均方差圖，由圖 3-6 可知，利用最小平方方法得到  $\hat{\alpha}$  所估計出的通道無論在何種訊雜比條件下都相對較好，並且隨著訊雜比從 -5dB 到 20dB，最小平方方法所得到的正規化的均方差值，比起利用訓練符元所得到的正規化的均方差值來的小，但在訊雜比大於 10dB 時，應用訓練符元方法所得到的正規化的均方差值，也已經小於 -10dB。

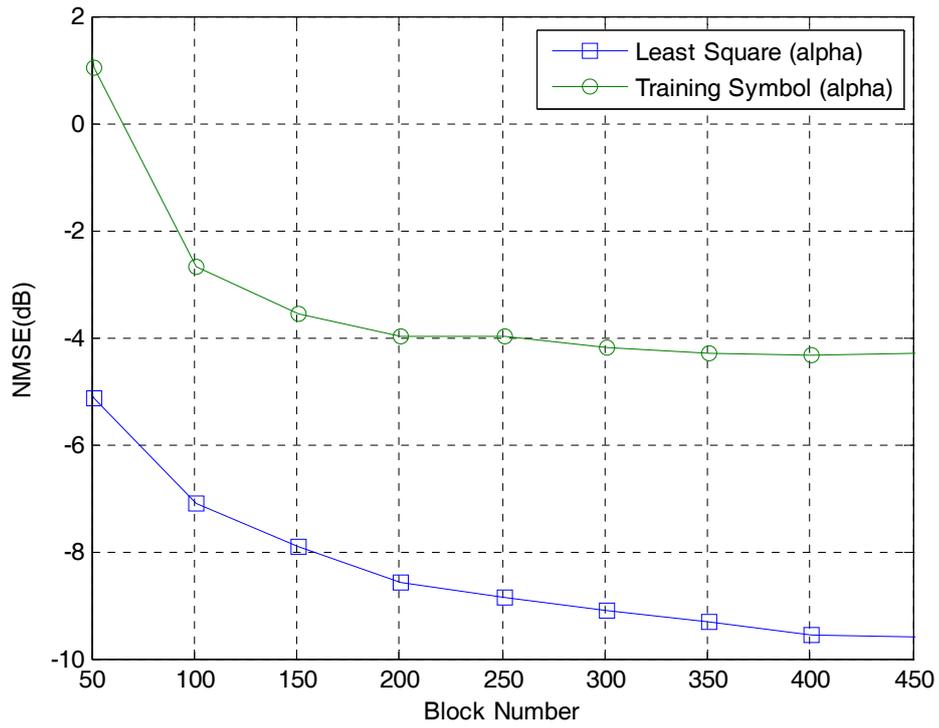


圖 3-5 訊雜比為 0dB，本方法應用最小平方法與訓練符元方法之正規化的均方差對傳送

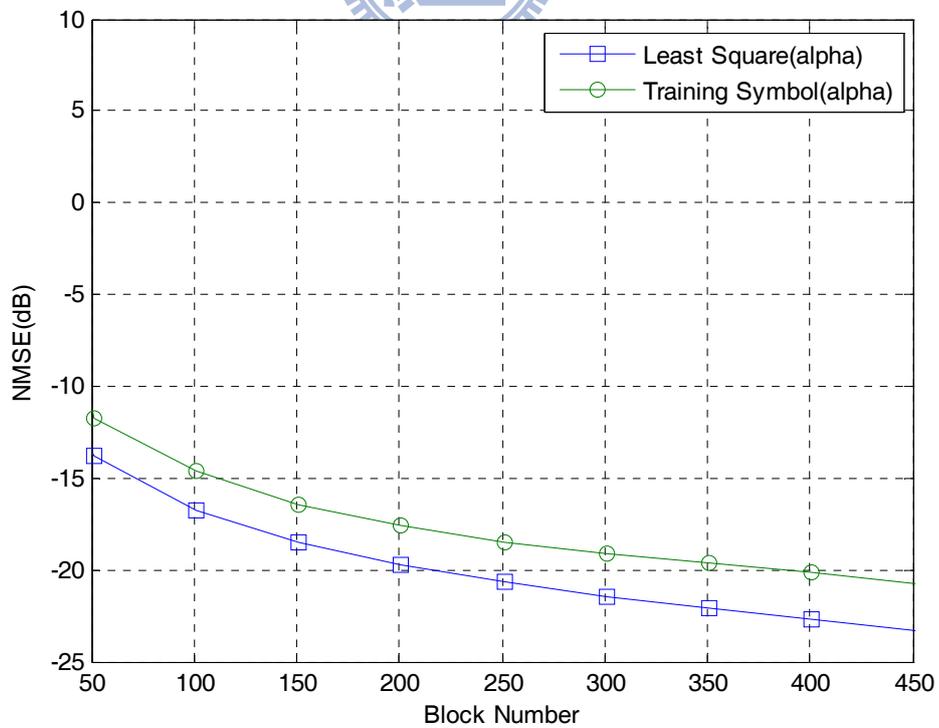


圖 3-6 訊雜比為 20dB，本方法應用最小平方法與訓練符元方法之正規化的均方差對傳送

送區塊數目圖

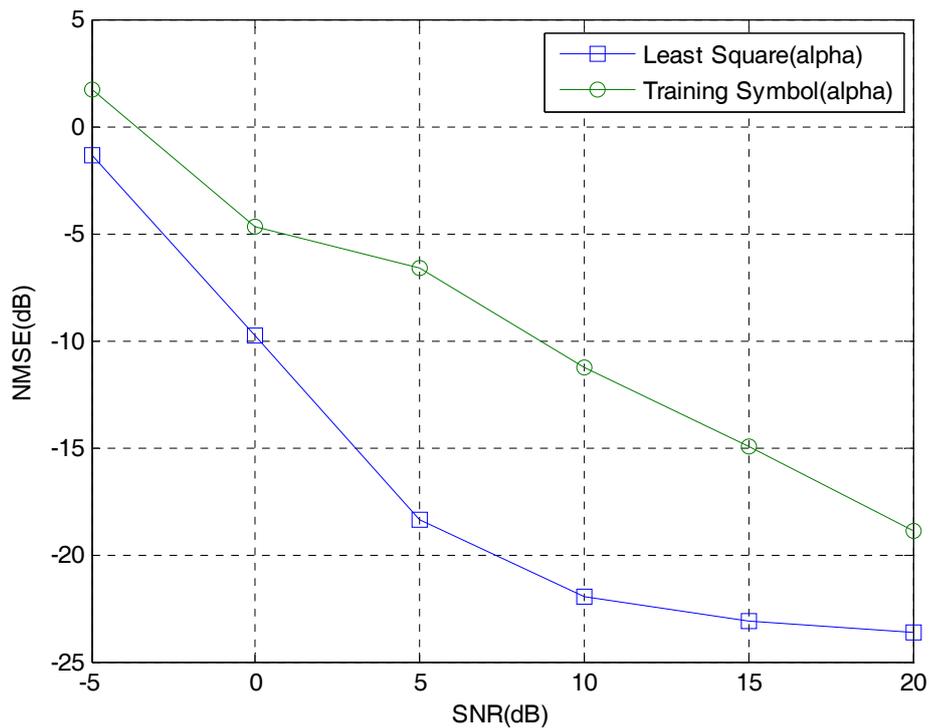


圖 3-7 傳送區塊數目為 300，本方法應用最小平方法與訓練符元方法之正規化的均方差



對訊雜比圖

模擬 4: 當應用了所設計的訓練符元在本篇論文所提出的方法與子空間法來估計通道之準確性比較。

圖 3-8 為訊雜比是 0dB 的時候，兩種方法的正規化的均方差比較圖，相對來說，本篇論文所提出的方法在低訊雜比(0dB)情況下，比起子空間法在估計通道的準確性來的高，子空間法在 NB=500 時約-2dB，本文提出的方法在 NB=500 時約-5dB。

圖 3-9 為訊雜比在 20dB 時，兩種方法的正規化的均方差比較圖，因為雜訊的影響比較小，相較起來，子空間法在高訊雜比(20dB)的情況下，在估計通道的表現(正規化的均方差約-30dB)比起本篇論文所提出的方法(正規化的均方差約-23dB)來的精確。

圖 3-10 為固定了傳送區塊數目的情況下，在不同的訊雜比下的估計通道的正規化的均方差值，由圖 3-10 可以知道，本文所提出的方法，在較低的訊雜比情況下(<5dB)，比起子空間法，有比較好的通道估計準確性，而在訊雜比大於 10dB 的時候，子空間的方法在正規化的均方差的表現則比較好，但本文所提出的方法在訊雜比>10dB 的時候也已經小於-15dB。

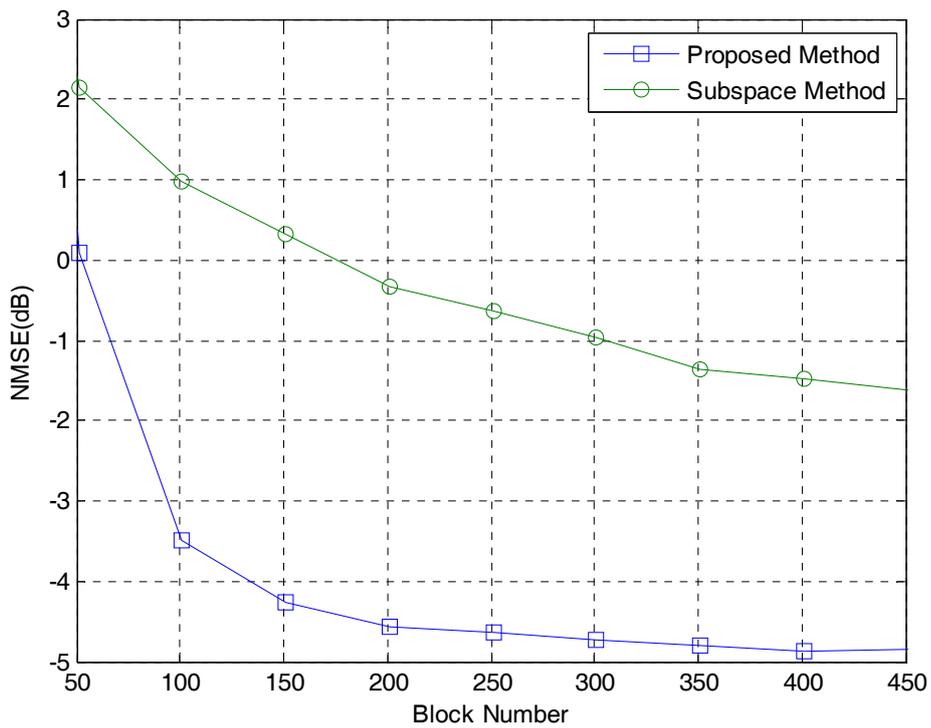


圖 3-8 訊雜比為 0dB，應用訓練符元方法於本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送



區塊數目圖

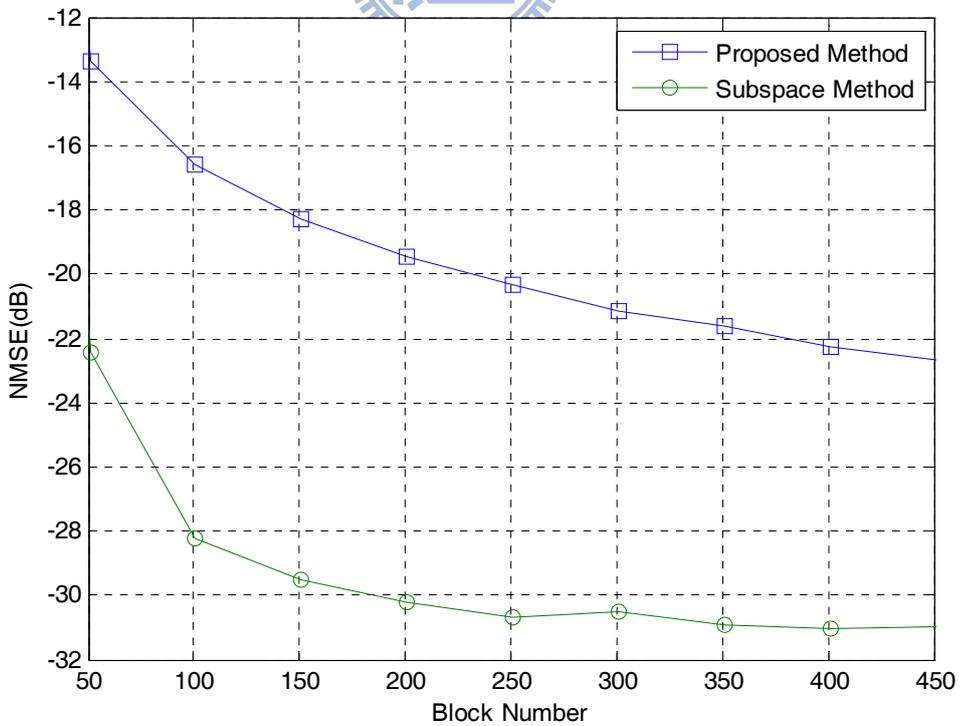


圖 3-9 訊雜比為 20dB，應用訓練符元方法於本方法與子空間法之正規化的均方差對傳送

送區塊數目圖

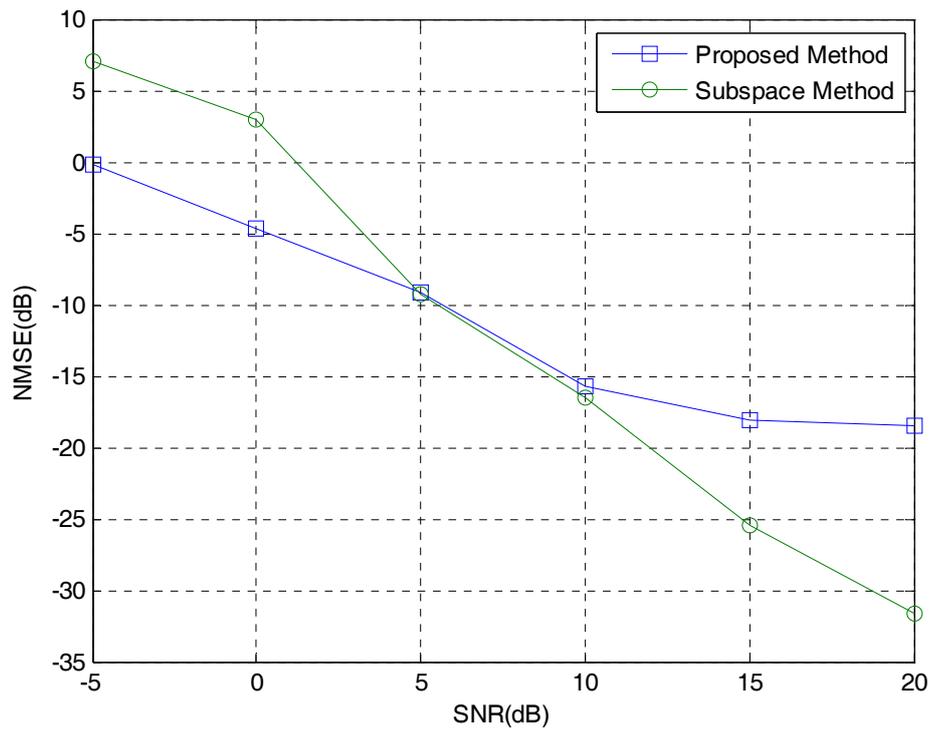


圖 3-10 傳送區塊數目為 300，應用訓練符元方法於本方法與子空間法之正規化的均方  
差對訊雜比圖



## 第四章 符元還原

在估計出通道之後，需要應用等化器來消除通道對訊號的影響來還原符元。在 4.1 節中，會先對在本論文中所應用的等化器作介紹，以及說明如何應用在本論文的方法上，接著會將模擬的結果安排在 4.2 節。

### 4.1 強制歸零等化器

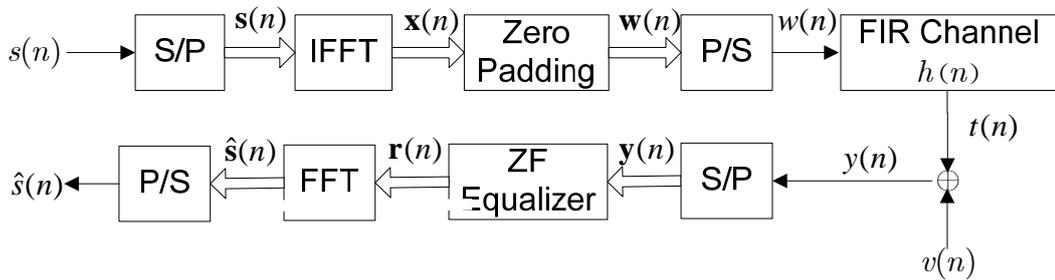


圖 4-1 零填補正交分頻多工系統傳送與接收端說明圖

所收到的訊號  $y(n)$ ，再經過等化器、傅立葉轉換，與並串轉換後還原成所傳送的符元  $\hat{s}(n)$ ，這一節要說明在本篇論文中所使用的強制歸零等化器(Zero-Forcing Equalizer)的原理，以及如何應用在本系統的模型上，由(2-26)可知  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{HF}^{-1}\mathbf{Ds}(n) + \mathbf{v}(n)$ ，且應用了最佳週期性編碼序列之後，系統方程式改寫如下，

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{HF}^{-1}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n) \quad (4-1)$$

在  $\mathbf{y}$  經過了強制歸零等化器之後，將等化器的強迫矩陣稱為  $\mathbf{C}_{ZF}$ ， $\mathbf{C}_{ZF} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ，則經過決定(Dicision)之後的訊號  $\mathbf{r}(n)$  可以用下式表示，

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(n) &= \mathbf{C}_{ZF}\mathbf{y}(n) \\ &= \mathbf{C}_{ZF}(\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n)) \\ &= \mathbf{C}_{ZF}\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{s}(n) + \mathbf{C}_{ZF}\mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (4-2)$$

而強制歸零等化器的條件如下[15]，

$$\mathbf{C}_{ZF}\mathbf{H}=\mathbf{I} \quad (4-3)$$

於是在本篇論文所採用的零填補正交分頻多工系統下，強制歸零的等化器強迫矩陣形式如下，

$$\mathbf{C}_{ZF}=(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H \quad (4-4)$$

於是  $\mathbf{r}(n)$  經快速傅立葉轉換後得到下式，

$$\hat{\mathbf{s}}(n)=\mathbf{F}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{y}(n) \quad (4-5)$$

並且不失一般性的以下式表示，

$$\hat{\mathbf{s}}=\mathbf{F}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{y} \quad (4-6)$$

## 4.2 模擬結果

這一節，我們用一些數值模擬，來模擬經由本篇論文所提出的盲蔽式通道估計方法，應用了強制歸零等化器之後的符元錯誤率(Symbol Error Rate, SER)。模擬的設定與第三章相同。



模擬 1: 比較本篇論文所提出的最佳週期性編碼序列與非最佳週期性編碼序列還原符元的錯誤率。

本篇論文提出了一個最佳週期性編碼序列，本模擬將與其他非最佳週期性編碼序列作符元還原錯誤率之比較，圖 4-2 為在傳送區塊數目為 300 的設定下，不同的週期性編碼序列與本文所提出的最佳週期性編碼序列比較，在本模擬中，與序列中最小臨界功率為 0.1，0.3，0.6 作錯誤率的比較比較，在圖中可以很明顯的看出應用了我們所提出的最佳週期性編碼序列所還原而得的符元還原錯誤率最小並且當最小臨界功率越接近 1 的時候，符元錯誤率的表現越接近最佳的週期性編碼序列，與第三章的模擬結果一致。

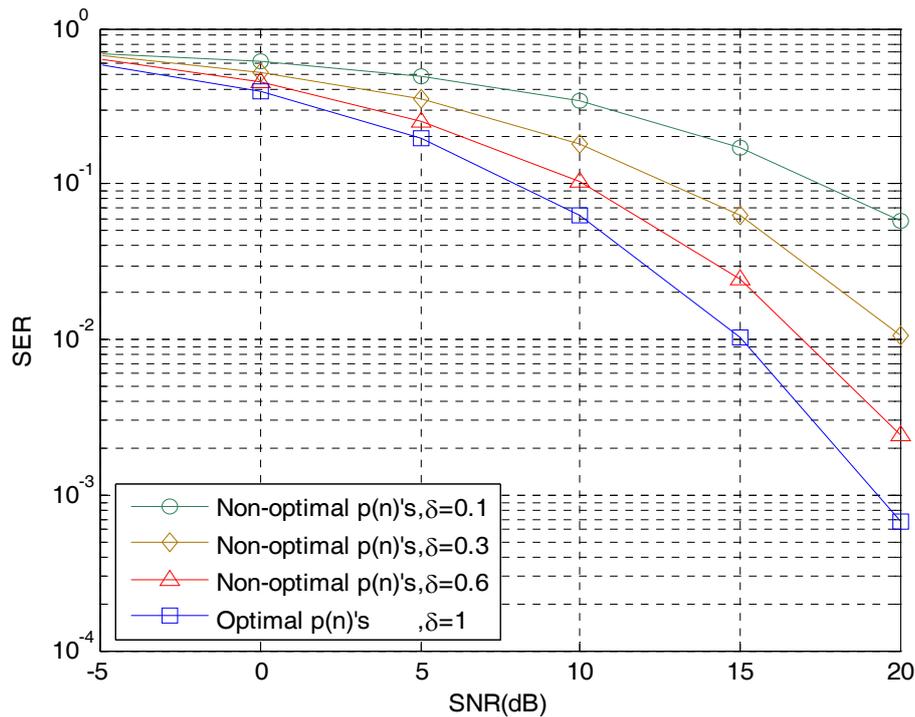


圖 4-2 傳送區塊數目為 300，最佳週期性編碼序列與非最佳週期性編碼序列之符元還原錯誤率比較圖

模擬 2: 比較本篇論文所提出的方法與子空間的方法的符元還原錯誤率。

以下是本篇論文所提出的方法應用了最佳週期性編碼序列以及最小平方法所得到的  $\alpha$  進行通道估計，並由強制歸零等化器進行符元還原之後，與子空間方法作符元錯誤率的比較。圖 4-3 為固定傳送區塊數目為 500 的設定下，兩個方法的符元還原錯誤率比較。由圖中可知，在較高訊雜比情況下(20dB)，子空間方法有較低的錯誤率。而在較低的訊雜比情況下(<10dB)並無明顯差異。由第三章的結果可知，在較低的符元還原錯誤率下，本篇論文所提出的方法在估計通道上有比較好的正規化的均方差表現。於是圖 4-4 為在傳送區塊數目為 100 的情況下，所得到兩種方法的符元還原錯誤率比較圖。由圖 4-4 可知，在訊雜比較低的情況下(<10dB)，本篇論文的符元錯誤率確實比子空間法來得低，也與第三章的模擬結果一致。

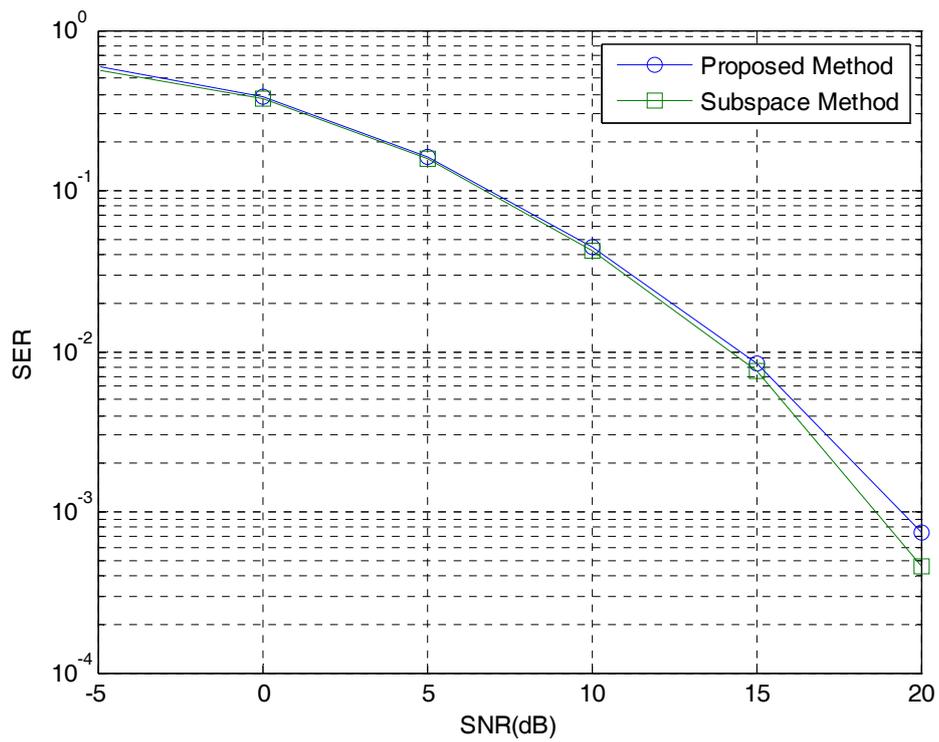


圖 4-3 傳送區塊數目為 500，本方法與子空間法之符元還原錯誤率比較圖

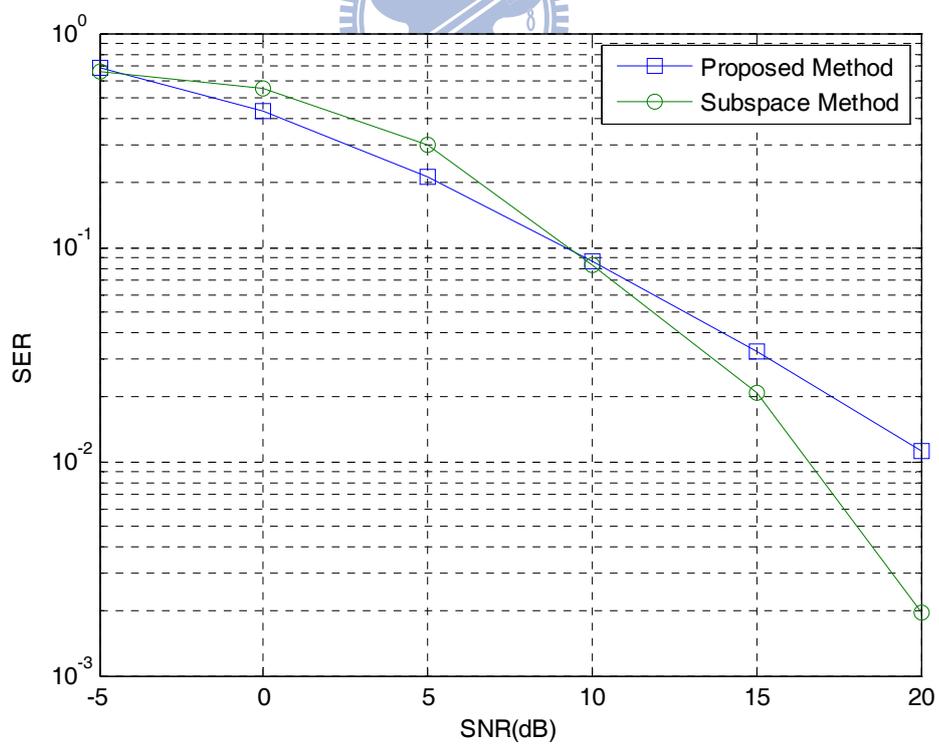


圖 4-4 傳送區塊數目為 100，本方法與子空間法之符元還原錯誤率比較圖

模擬 3: 比較本篇論文所提出的方法應用最小平方法與訓練符元方法所估計出的常數值  $\hat{\alpha}$  對於符元還原錯誤率(SER)的影響。

由圖 4-5 可知，傳送區塊數目為 500，應用了最小平方法所估計出的  $\hat{\alpha}$ ，與應用訓練符元方法所得的符元錯誤率比較圖，在比較低的訊雜比下，應用訓練符元方法所估計出的通道，在還原符元的時候，會有比較高的錯誤率，而在訊雜比較高的時候，會有比較相近的符元錯誤率。為了進一步的比較，圖 4-6 是將符元的調變方式變成 16QAM，在此條件下，可明顯看出，以訓練符元的方式估計  $\hat{\alpha}$  值，確實會使錯誤率變高，結果與第三章的結果一致。

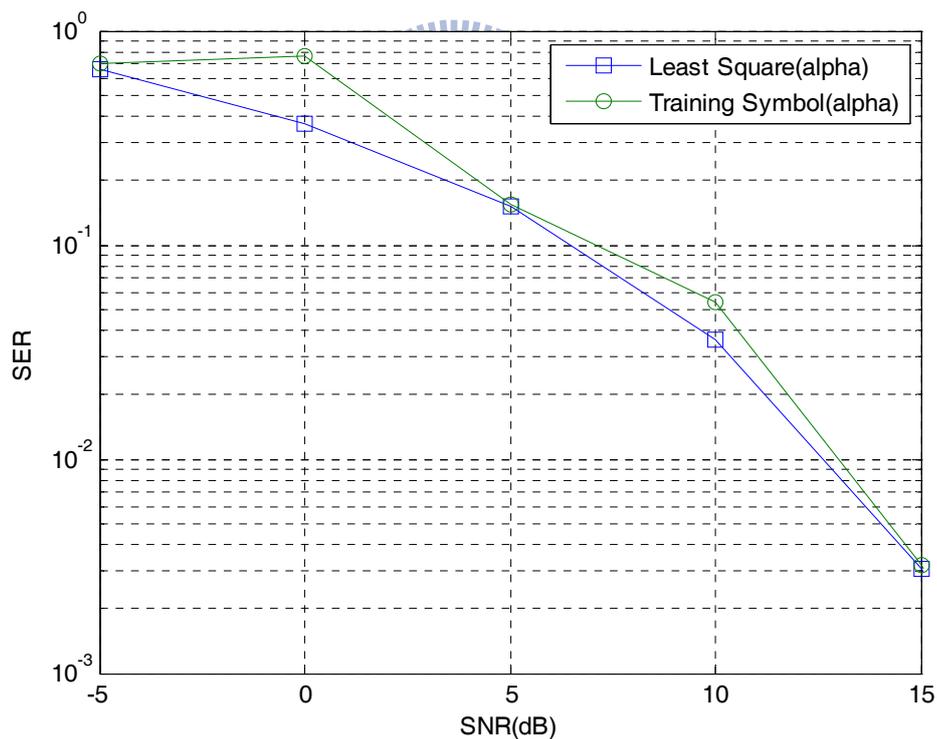


圖 4-5 傳送區塊數目為 500，本方法應用最小平方法與訓練符元方法的符元還原錯誤率比較圖

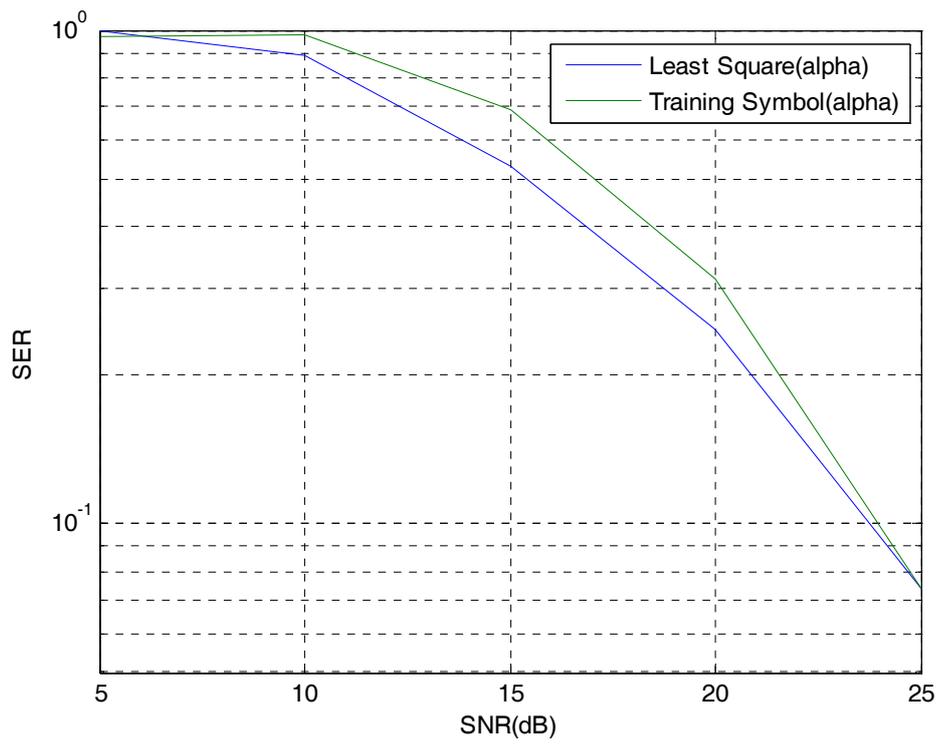


圖 4-6 傳送區塊數目為 500，本方法應用最小平方法與訓練符元方法在傳送訊號為 16-QAM 調變下的符元還原錯誤率比較圖



模擬 4: 在應用訓練符元的方法下，本篇論文所提出的方法與子空間方法的符元還原錯誤率比較。

圖 4-7 是傳送區塊數目為 300 的情況下，應用了訓練符元，觀察本篇論文所提出的方法與子空間方法的符元錯誤率比較，由圖 4-7 可知，在訊雜比較低的情況( $<4\text{dB}$ )，本篇論文所提出的方法比起子空間法，有較低的錯誤率，而子空間法則是在訊雜比較高的情況下( $>5\text{dB}$ )有較低的錯誤率。本圖的結果，與第三章的通道估計準確度結果一致。

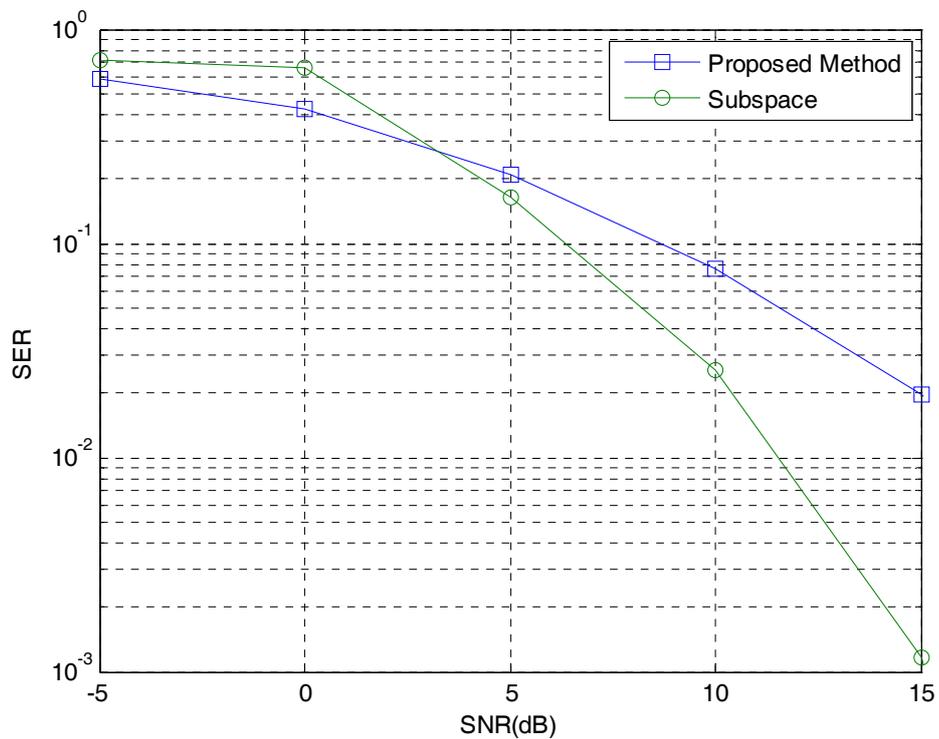


圖 4-7 傳送區塊數目為 300，應用訓練符元於本方法與子空間法的符元還原錯誤率比較圖

## 第五章 結論

在本篇論文中，提出了一個對於零填補正交分頻多工系統，應用了週期性編碼序列的盲蔽式通道估計。當以區塊傳送的方式分析系統接收訊號的自相關矩陣，可以將其自相關矩陣重新安排成相對於通道係數乘積的一組線性方程式。這組方程式的解，完全取決於週期性編碼序列的設計。其設計採用了觀察雜訊子空間與通道乘積係數子空間的相關程度來降低雜訊對於通道係數乘積的影響。最佳的週期性編碼序列結果，將是滿足了傳送功率單範化且單一功率值的編碼序列。

模擬結果顯示，與子空間的方法比較之後，在較低的訊雜比與較少的傳送區塊條件下，本篇論文所提出的方法通道估計的正規化的均方差較小以及有較低的符元錯誤率。



## 參考文獻

- [1] Zhengdao Wang, Xiaoli Ma, and Georgios B. Giannakis, "OFDM or Single-Carrier Block Transmission?" *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 3, March 2004.
- [2] Xenofon G. Doukopoulos, and George V. Moustakides, "Blind Adaptive Channel Estimation in OFDM Systems," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, no. 7, July 2006.
- [3] E. Serpedin and G. B. Giannakis, "Blind Channel identification and equalization with modulation induced cyclostationarity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.46, no. 7, pp 1930-1944,July 1998.
- [4] Yi-Sheng Chen and Ching-An Lin, "Blind-Channel Identification for MIMO Signal-Carrier Zero-Padding Block-Transmission Systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems- I: Regular papers*, vol. 55,no. 6, July 2006.
- [5] Jwo-Yuh Wu, and Ta-Sung Lee, "Periodic-Modulation-Based Blind Channel Identification for Signal-Carrier Block Transmission with Frequency-Domain Equalization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 3, March 2006.
- [6] Khaled Amleh, and Hongbin Li, "Blind-Channel Estimation and Interference Suppression for Signal-Carrier and Multicarrier Block Transmission System," *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 57, no. 5, September 2008.
- [7] Andrea Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] Simon Haykin, *Communication systems*, John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1994.
- [9] Richard van Nee, Ramjee Prasad, *OFDM wireless multimedia communication*, Artech House Boston London, 2000.
- [10] C. A. Lin and J. Y. Wu, "Blind identification with periodic modulation: a time-domain approach," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 11, pp. 2875–2888, November 2002.
- [11] Zhengdao Wang and Georgios B. Giannakis, "Wireless Multicarrier Communications," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 17, no. 3,May 2000.
- [12] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1991.

- [13] P.J.Davis, *Circulant Matrix*, New York: Wiley, 1979.
- [14] Hua Zhang, Ye Li, Anthony Reid, and John Terry, "Optimum Training Symbol Design for MIMO OFDM in Correlated Fading Channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, no. 9, September 2006.
- [15] Upamanyu Madhow, *Fundamentals of Digital Communication*, Cambridge Univ. Press, 2008.

