

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

利用凸型最佳化法設計有限脈衝響應等化器

FIR Equalizer Design Using Convex Optimization



研究生：許哲嘉

指導教授：林清安教授

中華民國九十七年七月

利用凸型最佳化法設計有限脈衝響應等化器

FIR Equalizer Design Using Convex Optimization

研究生：許哲嘉

Student : Che-Jia Shu

指導教授：林清安

Advisor : Prof.Ching-An Lin

國立交通大學

電機與控制工程學系



Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao-Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Electrical and Control Engineering

July 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月

利用凸型最佳化法設計有限脈衝響應等化器

學生：許哲嘉

指導教授：林清安教授

國立交通大學電機與控制工程學系（研究所）碩士班

摘 要



在目前有關於等化器尋找的問題中，對於多通道系統的有限脈衝頻率響應等化器有許多相關的研究，但大多只是提出求解的方法而並無最佳解的研究，並且都有著運算量過大的問題。因此為了能找出有限脈衝響應等化器的最佳解，本文提出以凸型最佳化法來找出有限脈衝等化器的方法，利用解係數方程式的最佳解來快速求得有限脈衝響應等化器，且其對於雜訊的干擾有著良好的抵抗能力。

最後經由模擬結果顯示，利用凸型最佳化所求得的有限脈衝響應等化器，的確在抑制輸出雜訊以及系統濾波器的不確定度上，有著比其他方法所得的等化器較好的效果。另外此法也有運算快速的優點，可避免大量運算所造成的時間損失。

FIR Equalizer Design Using Convex Optimization

Student : Che-Jia Shu

Advisors : Dr. Ching-An Lin

Department of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like outer border. Inside the circle, there are stylized letters 'ES' and 'A' in blue, with a red and white striped flag-like element. Below the letters, the year '1896' is inscribed.

In the modern method of equalization, there are many relative researches about multi-channel finite-impulse-response (FIR) equalization, most of these researches just proposed the methods how to find the FIR equalizer but not mentioned the optimal resolution of FIR equalizer, and also had the problem of large computation. Thus, we propose using convex optimization method to find FIR equalizer, and this FIR equalizer has good ability on noise reduction.

From simulation, we can conclude that the FIR equalizer finding by using convex optimization has less error on the influence of output noise and system uncertainty. And it also has the advantage of fast operation, which can avoid the lost of time.

致謝

感謝林清安教授這兩年來的指導，讓我能順利的完成的論文，由於老師的熱心教導，才能讓我對於研究有更深的領悟及進步，並且也要感謝口試委員鄧清政教授、梁耀文教授、以及中科院陳科祥博士對於論文的指教，讓論文能夠更佳的完整。

另外，也要感謝實驗室建賢學長、威德同學在生活上以及研究上給予我的幫助，他們寶貴的意見讓我在學習及研究上都有很大的助益，同時也感謝室友岳泰同學、家祥同學以及友僑同學陪我度過兩年的研究生生活。

最後，我要感謝我的父母親，家人以及女友，有他們的鼓勵，才能讓我能順利的完成學業。



目 錄

中文摘要	-----	i
英文摘要	-----	ii
致謝	-----	iii
目錄	-----	iv
表目錄	-----	vi
圖目錄	-----	vii
一、	簡介-----	1
二、	FIR 反矩陣存在性分析-----	3
2.1	M=N 時解存在性分析-----	3
2.2	M>N 時解存在性分析-----	4
2.3	FIR 延遲反矩陣解-----	8
2.4	FIR 估測解介紹-----	9
2.4.1	IIR to FIR 估測解-----	9
2.4.2	最小平方誤差解-----	10
2.4.3	濾波器組前置編碼求解法-----	11
三、	求解 FIR 反矩陣方法介紹-----	15
3.1	利用系統子矩陣行列式求解 FIR 反矩陣法-----	16
3.2	MMSE 等化器設計-----	18
3.3	利用史密斯形式求解反矩陣-----	24
四、	最小費氏範數 FIR 反矩陣設計-----	26
4.1	凸型化最佳理論與證明-----	26
4.2	反矩陣設計-----	28
4.3	複數形式最小費氏範數 FIR 反矩陣設計-----	33
4.4	最小 2 次範數 FIR 反矩陣解-----	36
4.4.1	最小 2 次範數 FIR 反矩陣階數設定-----	39
五、	模擬結果與分析-----	43
5.1	在白色雜訊下系統等化器錯誤率比較-----	43
5.1.1	實係數等化器對於雜訊錯誤率比較-----	43
5.1.2	複係數等化器對於雜訊錯誤率比較-----	46
5.2	在不確定度下系統等化器錯誤率比較-----	49
5.2.1	實係數等化器在不確定度下的錯誤率比較-----	50
5.2.2	複係數等化器在不確定度下的錯誤率比較-----	51
5.3	同時考慮輸出雜訊和不確定度下系統等化器錯誤率比較	52
5.3.1	實係數等化器在同時考慮雜訊和不確定度下錯誤率比較	52
5.3.2	複係數等化器在同時考慮雜訊和不確定度下錯誤率比較	53
5.4	非白色雜訊下系統等化器錯誤率比較-----	54

六、 結論	57
參考文獻	58



表 目 錄

表 3.1	五個隨機系統 1~5 階 MMSE 等化器的均方誤差變化-----	21
表 4.1	隨機系統 1 所得等化器對於雜訊的錯誤次數-----	39
表 4.2	隨機系統 2 所得等化器對於雜訊的錯誤次數-----	39
表 5.1	4×2 實數系統 1 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	44
表 5.2	4×2 實數系統 2 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	45
表 5.3	5×2 實數系統 1 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	45
表 5.4	5×2 實數系統 2 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	46
表 5.5	4×2 複數系統 1 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	47
表 5.6	4×2 複數系統 2 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	48
表 5.7	5×2 複數系統 1 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	48
表 5.8	5×2 複數系統 2 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較	49
表 5.9	4×2 實數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較-----	50
表 5.10	5×2 實數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較-----	51
表 5.11	4×2 複數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較-----	51
表 5.12	5×2 複數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較-----	52
表 5.13	5×2 實數系統所得等化器同時考慮兩因素下所得平均錯誤率-----	53
表 5.14	5×2 複數系統所得等化器同時考慮兩因素下所得平均錯誤率-----	54
表 5.15	5×2 實數系統 1 所得等化器在非白色雜訊下所得錯誤次數	55
表 5.16	5×2 實數系統 2 所得等化器在非白色雜訊下所得錯誤次數	56

圖 目 錄

圖 3.1	訊號 $X(n)$ 經過濾波器 $G(z)$ 及等化器 $F(z)$ 時的示意圖---	15
圖 3.2	假設 $\sigma_v^2=0.1$ 時的 MMSE 等化器與係數解反矩陣 BER 比較	22
圖 3.3	假設 $\sigma_v^2=0.05$ 時的 MMSE 等化器與係數解反矩陣 BER 比較	23
圖 3.4	假設 $\sigma_v^2=0.01$ 時的 MMSE 等化器與係數解反矩陣 BER 比較	23
圖 4.1	濾波器 $H(z)$ 之增益及相位頻譜分布	31
圖 4.2	以隨機系統 1 所產生的三個等化器 BER 比較	32
圖 4.3	以隨機系統 2 所產生的三個等化器 BER 比較	32
圖 4.4	隨機 3×2 系統不同階數下的等化器均方差變化	40
圖 4.5	隨機 4×2 系統不同階數下的等化器均方差變化	41
圖 4.6	隨機 5×2 系統不同階數下的等化器均方差變化	41



第一章 簡介

在通訊系統中，我們通常需要濾波器來完成訊號間的轉換，主要分為數位濾波器以及類比濾波器兩類，而數位濾波器則佔了其中較高的比率，其主要優點在於其具備溫度的穩定性，因為加法器，乘法器以及延遲對於溫度的靈敏度小。另外則是可以靠著取樣頻率的增加來同時處理多組數位信號，而數位濾波器分為有限脈衝響應（Finite Impulse Response, FIR）濾波器及無限脈衝響應（Infinite Impulse Response, IIR）濾波器兩種，而 FIR 濾波器也因為轉成實際電路較為容易且穩定度較高而成為主要的選擇。

目前有關 FIR 濾波器的研究非常的廣，其中一類較為普遍的研究即為 FIR 等化器 (equalizer) 的尋找：針對 FIR 系統 $G(z)$ ，找出其 FIR 反矩陣 (inverse) $F(z)$ ，讓 $F(z)G(z)$ 為單位矩陣 (identity matrix)，使訊號在先後通過 $G(z)$ 及 $F(z)$ 之後，能得到原本的訊號，達到訊號還原的效果。

在目前有關於尋找多輸入多輸出系統 (MIMO system) FIR 反矩陣的研究中，[1] ~ [4] 主要提出了一種找出 FIR 反矩陣通解的方式，根據此方式可以判定系統是否有 FIR 反矩陣的存在並找出所有存在的解所成的集合。另外在 [5] ~ [6]，所使用找出反矩陣的方法則是經由列運算及行運算找出系統 $G(z)$ 的史密斯形式 (Smith form) 來判斷是否存在反矩陣解，上述的兩種方法，雖然都能判斷並找到 FIR 反矩陣的存在，但是當系統輸入輸出數以及階數過大時，都有可能產生運算量過大的問題，而增加了尋找 FIR 反矩陣時的困難。

另外，對於有輸出雜訊 $V(n)$ 的存在時，對於 FIR 等化器則進一步要求其對於雜訊有抑制的效果，因此雜訊特性也會是尋找 FIR

等化器的一個重要考量，在 [7] 中，亦有對於針對雜訊的特性來設計 FIR 等化器的研究，主要是以最小均方誤差（Minimum Mean Square Error, MMSE）來當做設計的考量，但其所設計出來的 FIR 等化器與系統 $G(z)$ 的乘積不會是單位矩陣，因此只有在已知雜訊特性時才能有效的使用，有其使用上的限制。

綜觀以上幾種方法，雖然都能有效的找出系統的 FIR 等化器解，但仍有一些限制以及缺點，而增加尋找時的阻礙。因此，本篇研究的目的就是針對系統 $G(z)$ 找出一個最佳化 FIR 等化器解，且其有方便尋找、運算快速、以及極佳抑制雜訊的效果。

在文章架構方面，首先在第二章，我們將先探討 FIR 反矩陣的存在性問題，討論系統 $G(z)$ 在一般情況及特殊情況下，須滿足什麼條件才會存在 FIR 反矩陣解。並且探討在無解狀況之下，幾種求得估測解的方法以及其優缺點。接下來在第三章，則將介紹目前已知的一些 FIR 反矩陣求法以及一些模擬的例子，並且探討每個方法使用時的優缺點。在第四章，則將介紹一種新的尋找 FIR 等化器的方法以及原理，並提供一些實際例子來討論。第五章則為模擬數據分析，主要是有關於各個求得 FIR 等化器的方法與新的方法來做比較。最後在第六章，則為新的方法做個總結。

第二章 FIR 反矩陣存在性分析

對於一個 FIR 的 $M \times N$ ($M \geq N$) 多通道(multichannel)系統 $G(z)$ ，若其系統最大延遲(delay)階數為 k ，其第 m 列第 n 行元素(entry) 可表示成

$$g_{mn}(z) = g_{mn}^0 + g_{mn}^1 z^{-1} + g_{mn}^2 z^{-2} + \cdots + g_{mn}^k z^{-k} \quad (2.1)$$

其中 $1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N$,

另外我們亦可以同樣形式假設最大延遲階數為 k_r 的反矩陣 $F(z)$ ，其第 u 列第 v 行元素可表示成

$$f_{uv}(z) = f_{uv}^0 + f_{uv}^1 z^{-1} + f_{uv}^2 z^{-2} + \cdots + f_{uv}^{k_r} z^{-k_r} \quad (2.2)$$

其中 $1 \leq u \leq N, 1 \leq v \leq M$,

以下我們將分別討論 $M=N$ 以及 $M > N$ 時，在什麼情況下，才會有 FIR 反矩陣 $F(z)$ 的存在。另外，在確定無法找到 FIR 反矩陣的精確解時，有哪幾種估測解的方法可供使用，並討論其使用的限制以及優缺點。

2.1 $M=N$ 時解存在性分析

當 $M=N$ 時，若想求得系統 $G(z)$ 的反矩陣 $G^{-1}(z)$ ，根據尋找反矩陣的定義，可以得知

$$G^{-1}(z) = \frac{\text{adj}(G(z))}{\det(G(z))} \quad (2.3)$$

其中

$\text{adj}(G(z))$: $G(z)$ 的伴隨矩陣(adjoint matrix)。

$\det(G(z))$: $G(z)$ 的行列式(determinant)。

由 (2.3)，可以輕易得知當我們想要求得 $G(z)$ 的 FIR 反矩陣時，

其充要條件為 $G(z)$ 的行列式為 不等於 0 的常數, 當其行列式為含有 z 的多項式時, 則只存在 IIR Inverse, 且由於 $M=N$, $G(z)$ 反矩陣唯一, 因此當 $M = N$ 時, 解的狀況只有以下三種:

1. 無解, 當 $\det(G(z))=0$
2. 唯一 FIR 解, 當 $\det(G(z))$ 為不為 0 的常數。
3. 唯一 IIR 解, 當 $\det(G(z))$ 為含有 z 的多項式。

2.2 $M > N$ 時解存在分析

定義 2.1: 對於 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$, 則其子矩陣(minor)即為從 $G(z)$ M 列向量中選取 N 列組合所得矩陣而成集合, 且子矩陣個數為

$$r = \frac{M!}{N!(M-N)!}, \text{ 並可將子矩陣表示為 } \hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)。 \blacksquare$$

定義 2.2: 多項式矩陣列運算法則, 對於一多項式矩陣中的第 i 列及第 j 列向量, 若分別以 $R_i(z)$ 及 $R_j(z)$ 來表示, 則有以下性質[8]

1. $R_i(z) \leftrightarrow R_j(z)$, 兩列交換行列式正負號改變。
2. $R_i(z) \rightarrow R_i(z) + W(z)R_j(z)$, 某一系列乘上一多項式加到另一列不改變行列式。
3. $R_i(z) \rightarrow W(z)R_i(z)$, 某一系列乘上一多項式 $W(z)$, 行列式值增加 $W(z)$ 倍。 \blacksquare

定義 2.3: 對於多項式矩陣 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ 而言, 只有在其行數相同時才會有最大右公因數(greatest common right divisor, gcd_r) $R(z)$ 的存在, 且其具有以下性質[9]:

1. $R(z)$ 為 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ 的右公因數, 且 $\hat{G}_i(z) = G_i(z)R(z)$, $i=1, \dots, r$ 。
2. 假設 $R_1(z)$ 為另一 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ 的右公因數, 則必存在 $W(z)$

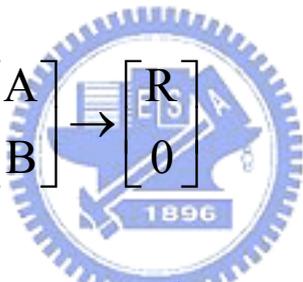
使得 $R(z)=W(z)R_1(z)$ 。 ■

定理 2.1：對於 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$ ，若其 r 個子矩陣的最大右公因數 $R(z)$ 的行列式為常數時，則 $G(z)$ 存在 FIR 反矩陣，且解非唯一。 ■

說明：對於兩個 matrix A and B ，且其有相同行數 N ，則其最大右公因數 R 的求法即為定義一個新的 matrix H ，且

$$H = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

之後將 (2.4) 式中的 H 做列運算(運算法則 1 & 2)，得到 R 過程如下所示

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$


其中 R 為 $N \times N$ 方陣，而由於列運算步驟的差異，會使得 R 非唯一，但是經由定義 2.2 可以得知所有 R 的行列式值只有正負號的差異。

即對於所有 $\text{gcd } R_1, R_2, \dots, R_t$ ，其行列式關係必滿足下式

$$\det(R_1) = \pm \det(R_a), \quad a=2,3,\dots,t \quad (2.6)$$

因此對於 系統 $G(z)$ 的所有 $N \times N$ 子矩陣，其最大右公因數即定義 $H(z)$ 為所有子矩陣排成行，將其作列運算得到 $R(z)$ ，求法如下：

$$H(z) = \begin{bmatrix} \hat{G}_1(z) \\ \hat{G}_2(z) \\ \vdots \\ \hat{G}_r(z) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

我們可以注意到將 $H(z)$ 做列運算也等同於對系統 $G(z)$ 做列運算，主要是因為 $H(z)$ 中會有重複的列，也就是說當我們將 $G(z)$ 做列運算得到 $R(z)$ 時，若 $R(z)$ 行列式為常數，則系統 $G(z)$ 必有解。

而當 $R(z)$ 行列式為常數，代表其可以繼續做列運算使得矩陣全部的元素皆為常數，並進而經由列運算得到 $N \times N$ 的單位矩陣 I_N ，這代表若 $G(z)$ 有解，那麼我們就能定義一推廣矩陣。

$$P(z) = [I_M | G(z)] \quad (2.8)$$

將(2.8)式做列運算使其成為以下形式

$$[I_M | G(z)] \rightarrow \left[M(z) \left| \begin{array}{c} I_N \\ 0 \end{array} \right. \right] \quad (2.9)$$

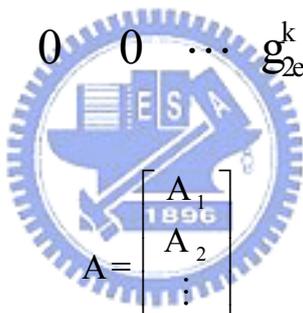
若定義 $F_r(z)$ 為 $M(z)$ 的前 N 列所組合而成的多項式矩陣，根據列運算法則，也會是系統 $G(z)$ 的反矩陣，但由於列運算的不同會產生不同的反矩陣，因此，當想要找出 FIR 反矩陣的最佳解時，不適合利用列運算解法來求出。而當 $G(z)$ 輸入輸出數大時，利用此法解反矩陣也有運算量過大的缺點。

從上面定理可得知，當系統 $G(z)$ 的最大右公因數 $R(z)$ 行列式為常數，且 $M > N$ 時，則系統會有不只一個 FIR 反矩陣。因此經由定理 2.1，我們可以得到一個判定 $G(z)$ 是否存在 FIR 反矩陣的方法，但當 $G(z)$ 輸入輸出數以及延遲階數太大時，利用此判定方法也有運算量過大的缺點。

然而，我們亦可以利用直接解係數方程式來判斷出 FIR 反矩陣解是否存在：根據所假設的 $G(z)$ 及 $F(z)$ 如 (2.1) (2.2) 所示，若我們想求出 $F(z)$ 的第 q 列的所有係數 $f_{q1}^0, f_{q1}^1, \dots, f_{q1}^{k_r}, f_{q2}^0, \dots, f_{q2}^{k_r}$,

$\dots, f_{qM}^{k_r}$ ，則利用 $F(z)G(z) = I_N$ 這個性質來可求得 $F(z)$ 第 q 列的方程組，若假設 $f_q = [f_{q1}^0 \ f_{q1}^1 \ \dots \ f_{q1}^{k_r} \ f_{q2}^0 \ \dots \ f_{q2}^{k_r} \ \dots \ f_{qM}^{k_r}]^T$ ，則可將多元一次方程組表示成 $Af_q = b_q$ ，其中對於 $e=1, \dots, N$

$$A_e = \begin{bmatrix}
 g_{1e}^0 & 0 & \dots & 0 & g_{2e}^0 & 0 & \dots & 0 & \dots & g_{Me}^0 & 0 & \dots & 0 \\
 g_{1e}^1 & g_{1e}^0 & 0 & \dots & g_{2e}^1 & g_{2e}^0 & 0 & \dots & \dots & g_{Me}^1 & g_{Me}^0 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots \\
 g_{1e}^k & g_{1e}^{k-1} & \dots & g_{1e}^{k-k_r} & g_{2e}^k & g_{2e}^{k-1} & \dots & g_{2e}^{k-k_r} & \dots & g_{Me}^k & g_{Me}^{k-1} & \dots & g_{Me}^{k-k_r} \\
 0 & g_{1e}^k & \ddots & \ddots & 0 & g_{2e}^k & \ddots & \ddots & \dots & 0 & g_{Me}^k & \ddots & \ddots \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & g_{1e}^k & 0 & 0 & \dots & g_{2e}^k & \dots & 0 & 0 & \dots & g_{Me}^k
 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 \vdots \\
 A_N
 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

且 A 為 $N(k+k_r+1) \times M(k_r+1)$ 矩陣，且 b_q 為 $N(k+k_r+1) \times 1$ 向量，其第 j 個元素 b_{qj} 可表示成

$$b_{qj} = \begin{cases} 1, & j=(q-1)(k+k_r+1)+1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.11}$$

當我們想求得 $F(z)$ 其它各列的係數時，只需將(2.10)和(2.11)代入方程組即可得解。而方程式所代表的意義即為 $F(z)$ 與 $G(z)$ 相乘後各延遲階數的係數。

因此，我們可以得到另一個判定方法如下：

一．對於 $q=1, \dots, N$ ，當 $\text{rank}(A)=\text{rank}(A|b_q)$ ，其中 rank 代表矩陣的維度，則系統有解。

二．當任何一行無法滿足一．時，則系統無精確解。

對於 $N(k+k_r+1) \times M(k_r+1)$ 矩陣 A 而言，在一般情況之下，只要未知數個數 \geq 方程式個數，方程式通常有解，因此我們亦可以矩陣 A 的大小來判斷系統是否有解，也就是當

$$N(k+k_r+1) \leq M(k_r+1) \quad (2.12)$$

系統即有解。因此可以看出對於固定的 k ，要讓(2.12)成立，則須增加 k_r 來滿足，也就是反矩陣的最大延遲階數，且當階數越高時，就會產生更多的自由度，使得 FIR 反矩陣有更多的選擇。

2.3 FIR 延遲反矩陣解

當我們無法得到 $F(z)$ ，使得 $F(z)G(z)=I_N$ 時，那麼我們可以試著找尋 $G(z)$ 的 FIR 延遲反矩陣解，也就是對於正整數 d_1, d_2, \dots, d_N ，求得 $F(z)$ 使得

$$F(z)G(z) = \begin{bmatrix} z^{-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-d_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z^{-d_N} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

其意義即為 N 個輸入 x_1, \dots, x_N ，在經過 $G(z)$ 以及延遲反矩陣解 $F(z)$ 之後，會分別延遲 d_1, \dots, d_N 個時程輸出，其好處在於雖然無法得到 $G(z)$ 的 FIR 精確解，但是利用 delay 解，雖然在時間上可能有所耗損，但是只要知道每個訊號的延遲時間，仍舊能得到原本的輸入訊號，達到訊號還原的效果。

針對 FIR 延遲反矩陣解求法，我們仍然可以利用求係數方程式

來判定並得到所想要的延遲解，當我們想要求得 $F(z)$ 第 q 列的延遲反矩陣解，針對 2.2 所設定的方程組 $Af_q = b_q$ 中，我們只須將 (2.11) 中 b_q 其第 j 個元素 b_{qj} 修改成為

$$b_{qj} = \begin{cases} 1, & j=(q-1)(k+k_r+1)+(d+1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.14)$$

當 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b_q)$ 時，即代表系統 $G(z)$ 第 q 個輸入 x_q 存在延遲 d 階的係數解。

利用以上方法，我們也可一一檢視每個輸入存在延遲解的可能性，當每一列都可找到延遲解時，代表存在反矩陣 $F(z)$ ，使得 (2.13) 式成立。另外，我們也可以尋找出每一個輸入的最小延遲 (minimum delay) 解，且其即為 (2.14) 滿足 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b_q)$ 的最小 d 值，找出最小延遲解有助於降低系統傳輸時時間的消耗。



2.4 FIR 估測解介紹

當利用以上判定法確定系統 $G(z)$ 無任何 FIR inverse 存在時，則須尋找 $G(z)$ 的 FIR 估測反矩陣 (approximated inverse matrix) 解，而目前也有一些較為普遍的方法可供參考，將在以下一一介紹，並且討論其使用限制以其優缺點。

2.4.1 IIR to FIR 估測解

當系統確定無法求得 FIR 反矩陣時，代表只可能存在 IIR 反矩陣或者無解，而在系統只存在 IIR 反矩陣時，則我們可以利用估測的方式將 IIR 反矩陣解轉換成 FIR 反矩陣解，如 [10] 中，即探討類似的 IIR to FIR 轉換問題。

其中，最為直接的轉換方法即將 IIR 多項式的分子除以分母得

到一 FIR 多項式，然而對於一 IIR 多項式 $P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ 而言，若我們想利用 $n(z)$ 除以 $d(z)$ 得到一 FIR 多項式來作為 IIR to FIR 的轉換，假設 $d(z)$ 為 P 階多項式，則必須保證多項式 $d(z)$ 的所有根 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 均在單位圓內，即

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, P \quad (2.15)$$

如此才能保證轉換過程不會因為無法收斂而導致得到效果不好的 FIR 估測反矩陣解。

2.4.2 最小平方誤差解

當我們想利用 2.2 的係數方程式求解法得到反矩陣每一列的係數時，當無法求得係數解，代表對於(2.10)式以及(2.11)式而言，

$$\text{rank}(A) < \text{rank}(A | b_q)$$

在此情況下，若想要求得估測的 FIR 反矩陣解時，就可以使用最小平方誤差(Least Squares Error)解法來得到估測係數解。因此對於方程組 $Af_q = b_q$ ，則其存在以下定理

定理 2.2：對於一 $m \times n$ 矩陣 A 以及 $m \times 1$ 向量 y ，則必存在 $n \times 1$ 向量 x_0 ，使得 $(A^T A)x_0 = A^T y$ ，且對於其他任意 $n \times 1$ 向量 x ，存在 $\|Ax_0 - y\| \leq \|Ax - y\|$ 。此外，當 $\text{rank}(A) = n$ ，則 $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T y$ ，即為最小平方誤差解，且 A^T 代表 A 的轉置矩陣(transpose matrix)。[11, p. 343]■。

由以上定理，可以得知當我們想要尋找 $Af_q = b_q$ 的最小平方誤差解，則須滿足

1. A 為滿秩(full rank)。
2. $N(k+k_r+1) > M(k_r+1)$ 。

則其最小平方誤差解為 $\mathbf{f}_q = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}_q$ 。

討論：當 $N(k+k_r+1) > M(k_r+1)$ 時，即代表方程式個數大於未知數個數，因此，系統通常無解，而由 2.2 知，若我們想增加未知數個數使得 $N(k+k_r+1) \leq M(k_r+1)$ ，則必須將反矩陣最大延遲階數提高，才有可能得到精確解。但若因反矩陣階數有其限制而無法達到時，則可利用最小平方誤差法來求得估測反矩陣，但其必須在 A 為滿秩時才能使用。

2.4.3 濾波器組前置編碼求解法

以上兩種估測反矩陣的方法，都是以單一濾波器來近似估測的反矩陣，而濾波器組前置編碼(Filter bank precoding)則是利用兩個以上濾波器組來完成訊號還原的工作[7]。

史密斯形式性質：以下我們將先介紹有關史密斯形式的一些特性，以供我們在未來引用時的依據[12]。

定義 2.4：對於一矩陣 A ，若其對角線元素依序為 a_1, \dots, a_n ，且非對角線元素皆為 0，則稱之為對角矩陣，並且以 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ 表示。■

定義 2.5：對於兩多項式 $\alpha(z), \beta(z)$ ，若 $\alpha(z)$ 可以整除 $\beta(z)$ ，則可以 $\alpha(z)|\beta(z)$ 表示之。■

對於一 $p \times q$ 多項式矩陣 $A(z)$ ，其維度為 r ，故 $r \leq \min(p, q)$ ，則 $A(z)$ 可經由行運算及列運算得到

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{B}(z)\mathbf{F}(z) \quad (2.16)$$

其中 $E(z)$ 及 $F(z)$ 分別為 $p \times p$ 以及 $q \times q$ 方陣且行列式為常數(不

為 0)，則可說 $A(z)$ 等價於 (equivalent to) $B(z)$ ，或寫成 $A(z) \sim B(z)$ ，

$$B(z) = \text{diag}(\psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_r(z), 0, \dots, 0) \quad (2.17)$$

且 $B(z)$ 中非零元素，會有 $\psi_i(z) | \psi_{i+1}(z)$ 的性質產生，並可稱 $\psi_1(z), \dots, \psi_r(z)$ 為 $A(z)$ 的不變多項式 (invariant polynomials)。

此外，由於 $E(z)$ 及 $F(z)$ 均可逆 (invertible)，故 $\text{rank}(A(z)) = \text{rank}(B(z))$ ，且當 $\text{rank}(A(z)) = r_m$ 時，其對應之 $B(z)$ 中的對角線元素 $\psi_1(z) = \psi_2(z) = \dots = \psi_{r_m}(z) = 1$ 。

定義 2.6：對於兩多項式矩陣 $P_1(z)$ 及 $P_2(z)$ 且維度分別為 r_1, r_2 ，且對應的不變多項式分別 $\{\psi_{i1}(z), \psi_{i2}(z), \dots, \psi_{ir_i}(z)\}$ ， $i=1, 2$ ，且定義 $P(z) = P_1(z) P_2(z)$ 且維度為 r ，其史密斯形式所對應之對角線元素為 $\{\psi_1(z), \psi_2(z), \dots, \psi_r(z)\}$ ，則對於 $1 \leq k \leq r$ 及 $i=1, 2$ ，存在

$\psi_{ik}(z) | \psi_k(z)$ [9]。■



定理 2.3：對於一維度為 r_m 的 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$ ，若將 $N \times K$ 前置編碼濾波器 $H(z)$ 與其組合成濾波器組 $C(z) = G(z)H(z)$ ，則 $C(z)$ 存在 FIR 反矩陣的充要條件為 $K \leq r_m$ 。■

定理 2.3 證明：(1) 充分條件證明

假設 $\{c_i(z)\}$ ， $\{h_i(z)\}$ ， $\{g_i(z)\}$ 分別為 $C(z)$ ， $H(z)$ ， $G(z)$ 的不變多項式，假設 $C(z)$ 有 FIR 反矩陣存在，則

$$C(z) \sim \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times K} \end{bmatrix}$$

則我們可以得到

$$H(z) \sim \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(N-K) \times K} \end{bmatrix},$$

使得 $g_i(z) | c_i(z), i=1, \dots, K$ 。

由於 $G(z)$ 的維度為 r_m ，故只有當 $K \leq r_m$ ，才會滿足定義 2.5，故得證。

(2) 必要條件證明

若假設 $G(z)$ 經由史密斯形式分解之後，可得到 $G(z) = U(z)D(z)V(z)$ ，並且選擇

$$H(z) = V^{-1}(z) \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(N-K) \times K} \end{bmatrix} W(z),$$

可以得到

$$C(z) = G(z)H(z) = U(z)D(z) \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(N-K) \times K} \end{bmatrix} W(z)$$

又因為 $G(z)$ 的維度為 r_m ，故 $D(z)$ 前 r_m 行所成矩陣為

$$\begin{bmatrix} I_{r_m \times r_m} \\ \mathbf{0}_{(M-r_m) \times r_m} \end{bmatrix},$$

因此當 $K \leq r_m$ ，

$$D'(z) = D(z) \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(N-K) \times K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times K} \end{bmatrix},$$

因此 $C(z) \sim \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ \mathbf{0}_{(M-K) \times K} \end{bmatrix}$ ，因此 $C(z)$ 可得 FIR 反矩陣，故得證。■

討論：從以上所得的結論，我們可以根據其來設計一個濾波器組，使其達到訊號還原的效果，且其步驟如下：

Step 1：對於 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$ ，找出其史密斯形式以及其維度 K ，當 K 小於 N ，代表系統無反矩陣解。

Step 2：設計一 $N \times K$ 系統 $H(z)$ ，且 $H(z) \sim \begin{bmatrix} I_{K \times K} \\ 0_{(N-K) \times K} \end{bmatrix}$ 。

Step 3：令 $C(z) = G(z)H(z)$ ，根據定理，其可找到 $K \times M$ 反矩陣解。

利用這個方法，我們可以將原 $M \times N$ 系統 $G(z)$ 轉換成 $M \times K$ 系統 $C(z)$ ，如此一來， $C(z)$ 可以找到對應的 FIR 反矩陣解，等同於對於一個 K 個輸入的訊號，能經由此濾波器組以及反矩陣得到訊號還原的效果，因此我們只要把原本的 N 個輸入，以一次傳送 K 個的方式來通過濾波器組以及反矩陣，就能讓此 K 個輸入訊號還原。

這個方法，其優點在於不需找出估測反矩陣，而能真正的還原訊號。但缺點在於所需還原訊號的時間變長，尤其當 $N \gg K$ 時，分次傳送訊號所消耗的時間就會更明顯的變大。

第三章 求解 FIR 反矩陣方法介紹

問題描述：對於一輸入 $X(n)=[x_1(n) \ x_2(n) \ \cdots \ x_N(n)]^T$ ，當其經過一 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$ ，可以得到輸出 $Y(n)=[y_1(n) \ y_2(n) \ \cdots \ y_M(n)]^T$ ，其經過 $N \times M$ Equalizer $F(z)$ 之後，則會得到 $N \times 1$ 的輸出訊號

$\hat{X}(n)=[\hat{x}_1(n) \ \hat{x}_2(n) \ \cdots \ \hat{x}_N(n)]^T$ ，訊號轉換流程如圖 3.1 所示。

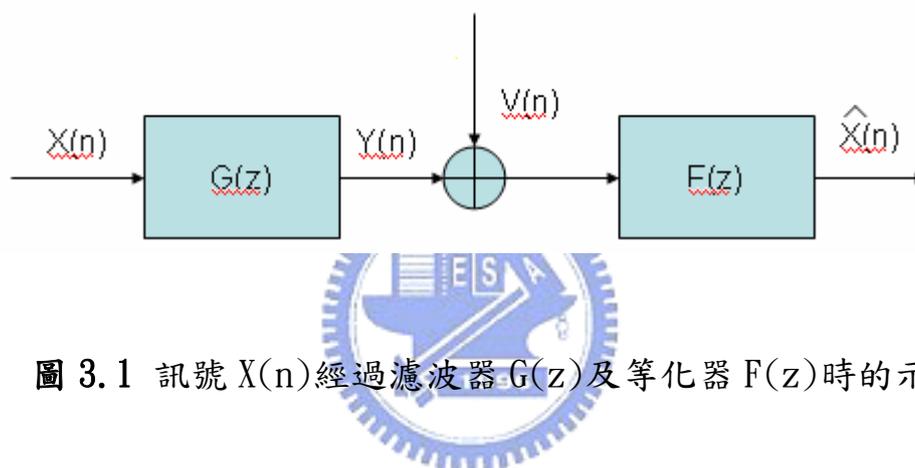


圖 3.1 訊號 $X(n)$ 經過濾波器 $G(z)$ 及等化器 $F(z)$ 時的示意圖

而我們的目標就是找出適當的 FIR 反矩陣 $F(z)$ ，使其能正確的還原出輸入訊號 $X(n)$ 。另外，也須考慮輸出雜訊 $V(n)=[v_1(n) \ v_2(n) \ \cdots \ v_M(n)]^T$ 對於整個訊號還原過程所造成的影響，進而

找出抑制雜訊效果最佳的 FIR 反矩陣。

目前，已有許多有關於 FIR 反矩陣的研究，而也有一定的研究成果以及其作法的特點，在簡介中也有一些說明，而本章將對於這些方法做詳盡的介紹，並提供一些應用實例來觀察其效果，並對於這些方法的優缺點加以討論。

3.1 利用系統子矩陣行列式求解 FIR 反矩陣法

從 2.1 中，我們知道可以利用尋找出 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$ 所有子矩陣 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ 的最大右公因數 $R(z)$ 來判定系統是否存在反矩陣。然而，我們亦可以利用 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ 來找出系統 $G(z)$ 的反矩陣 $F(z)$ ，並歸納出其通解，以便我們找尋最適合的反矩陣解。

定理 3.1： 對於 $M \times N$ FIR 系統 $G(z)$ 的 $N \times N$ 子矩陣 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ ，行列式分別為 $D_1(z), D_2(z), \dots, D_r(z)$ ，若能找到一組多項式 $a_1(z), a_2(z), \dots, a_r(z)$ ，使得 $\sum_{i=1}^r a_i D_i = 1$ ，則系統 $G(z)$ 存在反矩陣解 [1]。

■

證明： 對於系統 $G(z)$ 的 $N \times N$ 子矩陣 $\hat{G}_1(z), \hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ ，分別定義其伴隨矩陣為 $\hat{F}_1(z), \hat{F}_2(z), \dots, \hat{F}_r(z)$ ，則根據行列式定理，可以得知對於 $i=1, \dots, r$

$$\hat{F}_i(z) \hat{G}_i(z) = D_i I_N \quad (3.1)$$

對於 $G(z)$ 而言， $\hat{G}_1(z), \dots, \hat{G}_r(z)$ 分別為其 M 列中選取 N 列所得的子矩陣，若在 $\hat{F}_1(z), \dots, \hat{F}_r(z)$ 將其未被選取的列所對應的行增添 0 向量，使其變成 $N \times M$ 矩陣 $\tilde{F}_1(z), \dots, \tilde{F}_r(z)$ (例：對於 3×2 系統 $G(z)$ ，若 $\hat{G}_1(z)$ 為選取第一及第二列所得的子矩陣，第三列未被選取，則 $\tilde{F}_1(z) =$

$\begin{bmatrix} \hat{F}_1(z) & 0 \end{bmatrix}$)，則對於 $i=1, \dots, r$

$$\tilde{F}_i(z) G(z) = D_i I_N \quad (3.2)$$

若將 (3.2) 式等號左右兩邊同乘上多項式 a_i ， $i=1, \dots, r$ ，並且相加之

後可得到

$$\sum_{i=1}^r a_i(z) \tilde{F}_i(z) G(z) = \sum_{i=1}^r a_i(z) D_i(z) I_N \quad (3.3)$$

由(3.3)可知，若我們可以找出多項式 $a_1(z), \dots, a_r(z)$ ，使得 $\sum_{i=1}^r a_i D_i = 1$ ，代表可以找到反矩陣 $F(z)$ ，使得 $F(z)G(z) = I_N$ 成立，其中

$$F(z) = \sum_{i=1}^r a_i(z) \tilde{F}_i(z) \quad (3.4)$$

因此，我們可以得到反矩陣 $F(z)$ 的通解形式如下：

$$F(z) = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i(z) \tilde{F}_i(z) \mid a_i, \dots, a_r, \sum_{i=1}^r a_i(z) D_i(z) = 1 \right\} \quad (3.5)$$

因此，我們可以利用(3.5)式來找出反矩陣，並可依照我們的需求(如抑制雜訊等)來找出所有解集中最適合的反矩陣，來達成我們所期望的效果。■



例 3.1：對於一 FIR 系統 $G(z) = \begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 3+z^{-1} \\ -5+z^{-1} & -4+z^{-1} \\ -1+z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix}$ ，子矩陣及行列式

如下所示

$$G_1(z) = \begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 3+z^{-1} \\ -5+z^{-1} & -4+z^{-1} \end{bmatrix}, D_1(z) = 7, \tilde{F}_1(z) = \begin{bmatrix} -4+z^{-1} & -3-z^{-1} & 0 \\ 5-z^{-1} & 2+z^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_2(z) = \begin{bmatrix} -5+z^{-1} & -4+z^{-1} \\ -1+z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix}, D_2(z) = -4, \tilde{F}_2(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 4-z^{-1} \\ 0 & 1-z^{-1} & -5+z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$G_3(z) = \begin{bmatrix} 2+z^{-1} & 3+z^{-1} \\ -1+z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix}, D_3(z) = 3, \tilde{F}_3(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & -3-z^{-1} \\ 1-z^{-1} & 0 & 2+z^{-1} \end{bmatrix}$$

若選取 $a_1 = 0, a_2 = a_3 = -1$ ，則 $\sum_{i=1}^3 a_i D_i = 1$ ，故可得反矩陣

$$F(z) = -1 \times \tilde{F}_2(z) + (-1) \times \tilde{F}_3(z) = \begin{bmatrix} -z^{-1} & -z^{-1} & -1+2z^{-1} \\ -1+z^{-1} & -1+z^{-1} & 3-2z^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\text{且 } F(z)G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

然而對於此方法尋找反矩陣，卻仍有其缺點：運算量太大。由於在尋找反矩陣的過程中，我們需得到的數據包含了所有子矩陣以及其行列式及伴隨矩陣，另外也須運算是否有多項式 $a_1(z), \dots, a_r(z)$ 滿足

$$\sum_{i=1}^r a_i D_i = 1, \text{ 這些運算在 } r \text{ 變大時，都會跟著變多且複雜，也增加了}$$

運算量，也是我們所必須考慮到的地方。

3.2 MMSE 等化器設計

由於在訊號經過濾波器 $G(z)$ 得到輸出 $Y(n)$ 的過程中，通常會受到雜訊 $V(n)$ 的干擾，而使得實際輸出 $\hat{Y}(n) = Y(n) + V(n)$ ，而導致最後還原訊號成為 $\hat{x}(n) = x(n) + e(n)$ ，其中 $e(n)$ 為 $N \times 1$ 誤差向量。因此，亦有些針對雜訊特性而設計的等化器 $F(z)$ ，其目的即為找出系統的 MMSE 等化器解，且此解會最小化誤差向量 $e(n)$ 的共變異數矩陣 R_{ee} (covariance matrix) 的跡數(trace)，使其能在已知雜訊特性的狀況之下還原出比一般 FIR 反矩陣還要精確的輸入訊號，在 [7] 中，即有對此類型 FIR 等化器有相關推導，將在以下介紹相關推導過程以及實例觀察與討論。

對於一 $M \times N$ FIR 系統 $C(z)$ ，最大延遲階數為 $L_c - 1$ ，則可將其表示成

$$C(z) = \sum_{i=1}^{L_c-1} c(i)z^{-i}, c(i) \in \mathbb{R}^{M \times N}, i = 0 \sim L_c - 1,$$

其中 $\mathbb{R}^{M \times N}$ 代表矩陣大小為 $M \times N$ 的實數矩陣所成的集合。而若假設 $N \times M$ Equalizer $F(z)$ 最高延遲階數為 $L_f - 1$ ，則同樣的，我們可以將 $F(z)$ 表示如下：

$$F(z) = \sum_{i=1}^{L_f-1} f(i)z^{-i}, f(i) \in \mathbb{R}^{N \times M}, i = 0 \sim L_f - 1$$

而我們的目標在於找出 $F(z)$ ，使得 $F(z)C(z) = I_N$ ，然而我們亦可將其改寫成 $F_t C_t = \Gamma$ ，且

$$F_t = [f(0) \quad f(1) \quad \cdots \quad f(L_f-1)] \quad (3.6)$$

$$C_t = \begin{bmatrix} c(0) & \cdots & c(L_c-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c(0) & \cdots & c(L_c-1) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

且 F_t 和 C_t 分別為 $N \times ML_f$ 和 $ML_f \times N(L_c + L_f - 1)$ 實數矩陣，而 Γ 則為 $N \times N(L_c + L_f - 1)$ 矩陣，且其具有以下形式：

$$\Gamma = [I \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (3.8)$$

若假設 $\chi(n) = [X^T(n), X^T(n-1), \dots, X^T(n-(L_c + L_f - 2))]^T$ ， $\nu(n) = [V^T(n), V^T(n-1), \dots, V^T(n-L_f + 1)]^T$ ，則 $\chi(n)$ 為 $K(L_c + L_f - 1) \times 1$ 矩陣， $\nu(n)$ 為 $ML_f \times 1$ 矩陣，則可將最後的還原訊號 $\hat{X}(n)$ 表示如下：

$$\hat{X} = F_t C_t \chi(n) + F_t \nu(n) \quad (3.9)$$

定理 3.2： 對於(3.9)式而言，其 MMSE 解經由運算可得到

$F_t = R_{XX} \Gamma C_t^H (C_t R_{ZZ} C_t^H + R_{vv})^{-1}$ ，其中 R_{XX} 為 $\chi(n)$ 的共變異數矩陣 (covariance matrix)[7]。■

證明： 對於輸入訊號 $\chi(n)$ 及輸出雜訊 $\nu(n)$ ，可以得知系統實際輸出可寫成 $Y_v(n) = C_t \chi(n) + \nu(n)$ ，則根據韋納濾波器(Wiener filter)原理[12]，可得

$$\begin{aligned} F_t &= (E[XY_v^H])(E[Y_v Y_v^H])^{-1} \\ &= (E[X(\chi^H C_t^H + \nu^H)])(E[(C_t \chi + \nu)(C_t \chi + \nu)^H])^{-1} \\ &= R_{XX} \Gamma C_t^H (C_t R_{ZZ} C_t^H + R_{vv})^{-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中由於輸入訊號與雜訊並無相關(correlated)，所以 $E[X\chi^H]$

$= [R_{XX} \quad 0 \quad \cdots \quad 0] = R_{XX} \Gamma$ ，故可得公式如上所示。

另外，在輸入訊號以及雜訊皆為白色訊號(white signal)時，則(3.10)式可以改寫成

$$F_t = \Gamma C_t^H (C_t C_t^H + \sigma_v^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (3.11)$$

且代入所得到的 F_t 之後，可以得到雜訊的共變異數矩陣 R_{ee} 如下

$$\begin{aligned} R_{ee} &= E[XX^H] - (E[XY_v^H])(E[Y_v Y_v^H])^{-1}(E[Y_v X^H]) \\ &= \mathbf{I} - \Gamma C_t^H (C_t C_t^H + \sigma_v^2 \mathbf{I})^{-1} C_t \Gamma^H \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 σ_v^2 為雜訊 $\nu(n)$ 的變異數(variance)，因此我們只要知道雜訊以及輸入訊號的一些訊息，我們就能利用(3.10)式及(3.11)式來找出可抑制雜訊的等化器 $F(z)$ 。■

F(z)階數設定：由於當 F(z)階數改變時，其 MMSE 等化器也會有所變化，所以在此將利用 matlab 模擬隨機產生的系統 G(z)來觀察並討論該如何取得適當的階數，來得到我們所需的 FIR 等化器。

以下將隨機產生五個 3×2 的 2 階 FIR 系統，並以 $\sigma_v^2 = 0.04$ 來產生三維白色雜訊 V(n)，利用 (3.11) 式來求出每個系統 1~5 階的 MMSE FIR 等化器，觀察其 1000 筆資料均方誤差(MSE)的變化。

F(z)最高階數	1	2	3	4	5
系統 1	0.0322	0.0109	0.00585	0.00534	0.00494
系統 2	0.0124	0.00513	0.00362	0.00302	0.00252
系統 3	0.0367	0.0289	0.0153	0.0134	0.0121
系統 4	0.0304	0.0201	0.0105	0.0094	0.0082
系統 5	0.0421	0.0358	0.0151	0.0142	0.0129

表 3.1 五個隨機系統 1~5 階 MMSE 等化器的均方誤差變化

從表 3.1 可以看出，F(z)階數 2 以下時，明顯的比 3 階以上的均方誤差還要大，若根據 2.1 中利用係數方程式求解的觀點來看的話，可以將其視為未知數不足以至於無法求出較好的等化器所導致，因此代表若我們想求得好的 MMSE 等化器的話，則須要足夠階數來滿足，也就是在

$$L_f \geq (N(L_c - 1)/M - N) \quad (3.13)$$

的情況之下，會讓等化器 F(z) 有足夠的延遲階數。

另外，在延遲階數 3 階以上，則可以看出其均方誤差的落差不大，代表我們只需要得到滿足 (3.13) 的 L_f ，就能有不錯的抑制雜訊效果，而提升階數效果則有限。

例 3.2: 以下將隨機產生一 2 階 3×2 FIR 系統, 分別求出其 $\sigma_v^2 = 0.1$, 0.05 , 0.01 時的 3 階 MMSE 等化器, 並將其與直接係數求解所得的 3 階 FIR 反矩陣, 兩者做位元錯誤率 (bit error rate, BER) 比較 (10000 筆資料), 觀察訊號雜訊比 (Signal to noise ratio, SNR) 變化時兩者 BER 的變化, 另外雜訊則是以 matlab 指令 $v_n = 10^{(-0.125 \times ii)} \times \text{randn}(1, 10000)$, $ii=0, 1, \dots, 20, n=1, 2, 3$ 來分別產生 3 維雜訊:

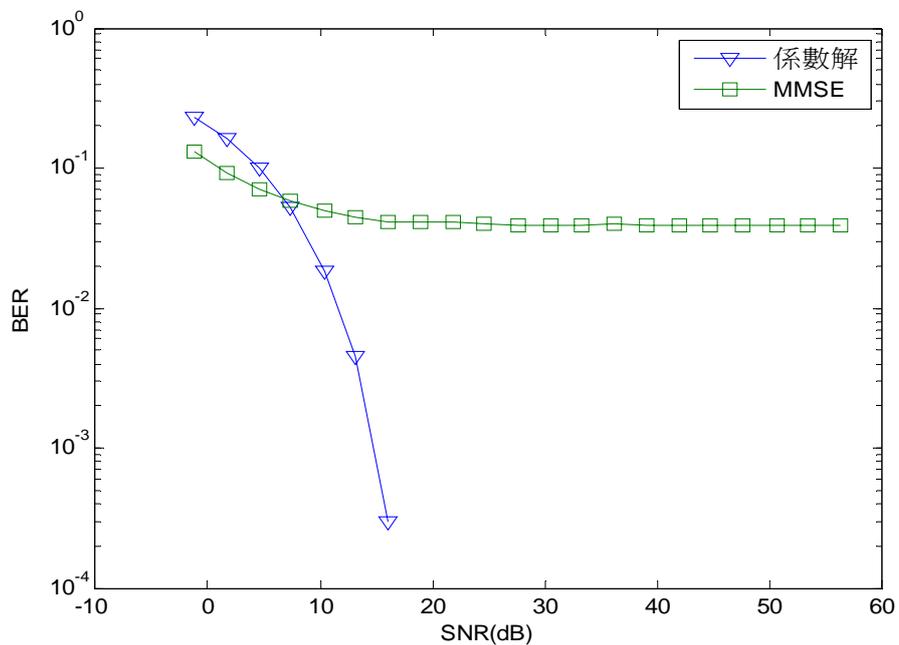


圖 3.2 假設 $\sigma_v^2 = 0.1$ 時的 MMSE 等化器與係數解反矩陣 BER 比較

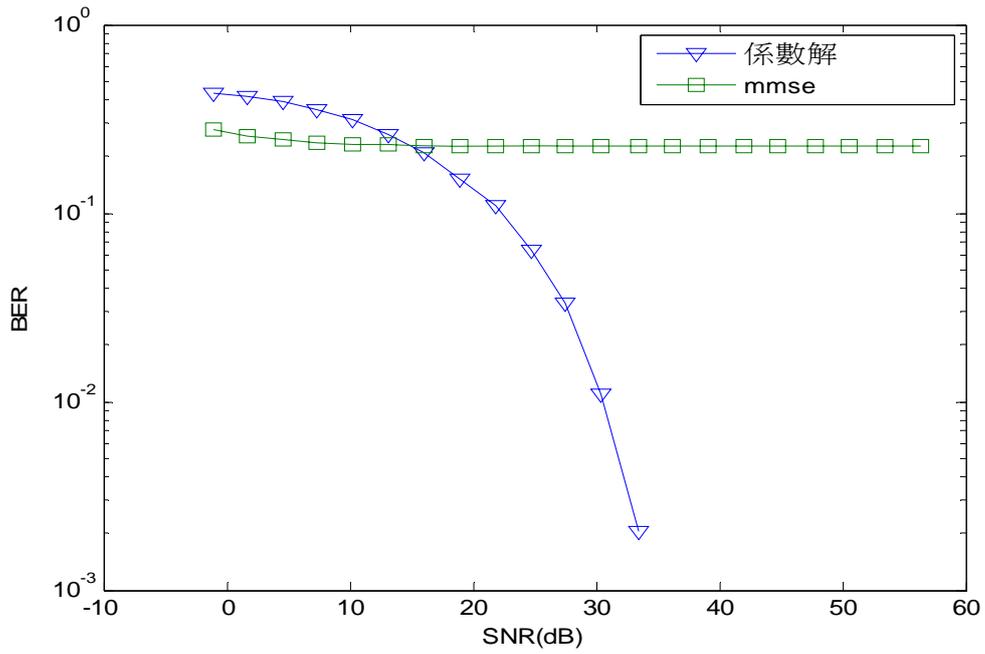


圖 3.3 假設 $\sigma_v^2 = 0.05$ 時的 MMSE 等化器與係數解反矩陣 BER 比較

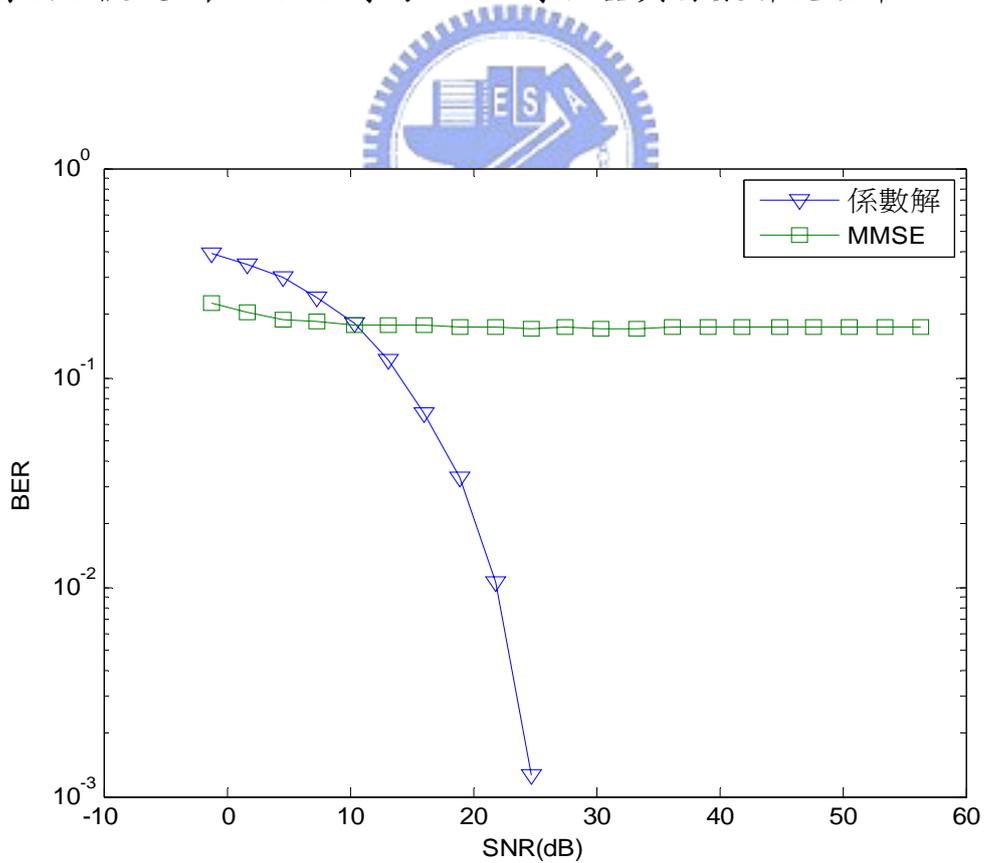


圖 3.4 假設 $\sigma_v^2 = 0.01$ 時的 MMSE 等化器與係數解反矩陣 BER 比較

討論：從圖 3.2~圖 3.4 可以看出，MMSE 等化器主要適用於本身設計變異數小於實際雜訊變異數的狀況，但是當實際雜訊比假設雜訊的變異數還要小時，MMSE 等化器的效果就會變差。另外當雜訊越來越小時，由於 MMSE 等化器無法使得 $F(z)G(z)=I_N$ ，而產生了雜訊以外的誤差，所以訊號還原效果會慢慢的比真正的反矩陣差，因此，若要使用 MMSE 等化器，可根據雜訊變異數的大概範圍來設定，才会有較好的效果。

3.3 利用史密斯形式求解反矩陣

若對於一 $M \times N$ 系統 $G(z)$ 而言，其史密斯形式分解之後可得

$$G(z)=U(z)D(z)V(z) \quad (3.14)$$

其中 $U(z)$ 為 $M \times M$ FIR 多項式矩陣， $D(z)$ 為 $M \times N$ FIR 多項式矩陣， $V(z)$ 為 $N \times N$ FIR 多項式矩陣，且由於 $U(z)$ 及 $V(z)$ 分別為列運算及行運算所得矩陣，所以其行列式為常數，且 $G(z)$ 存在 FIR 反矩陣的充要條件為 $D(z)$ 可最簡運算到以下形式

$$D(z)=\begin{bmatrix} I_N \\ \mathbf{0}_{(M-N) \times N} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

若我們想要求的 $G(z)$ 的 FIR 反矩陣，則可利用 (3.14) 式得到 $G(z)$ 的反矩陣形式如下：

$$G^{-1}(z)=V^{-1}(z)D^{-1}(z)U^{-1}(z) \quad (3.16)$$

其中 $V^{-1}(z)$ 和 $U^{-1}(z)$ 皆為 FIR 多項式矩陣，若我們想要求得 FIR 矩陣 $D^{-1}(z)$ ，根據 (3.15) 式，代表我們需尋找 $N \times M$ 的 FIR 矩陣 $D^{-1}(z)$ ，使得

$$D^{-1}(z)\begin{bmatrix} I_N \\ \mathbf{0}_{(M-N) \times N} \end{bmatrix}=I_N \quad (3.17)$$

因此，若我們經由史密斯分解得知 $G(z)$ 存在 FIR 反矩陣解，由於 $V(z)$ 和 $U(z)$ 為方陣，反矩陣唯一存在，故可經由無限多解的 $D^{-1}(z)$ 來得到反矩陣通解，並利用其來找出我們所想要的反矩陣。

例 3.3： 假設一 3×2 系統 $G(z)$ ，若其存在 FIR 反矩陣解，代表

$$D(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 因此只要 } D^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_1(z) \\ 0 & 1 & k_2(z) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1(z), k_2(z) \text{ 為任}$$

意 FIR 多項式，則利用(3.16)所得 FIR 多項式矩陣皆為 $G(z)$ 的反矩陣。

討論： 利用史密斯形式求解反矩陣，亦能得到另一種通解的形式，然而其最主要的缺點還是在於運算量過大的問題，當系統 $G(z)$ 的輸入輸出數以及階數過大時，則代表在求得 Smith form 分解時，需要消耗大量的時間在列運算以及行運算上，另外，也須計算 $V(z)$ 和 $U(z)$ 的反矩陣，這些時間的耗損將會降低工作的效率，是這個方法的主要缺點。

第四章 最小費氏範數 FIR 反矩陣設計

在這個部分，將介紹一個新的尋找反矩陣的方法，而這個方法將以降低反矩陣的費氏範數(Frobenius norm)來作為尋找的根據，而利用費氏範數當作尋找反矩陣的指標主要是因為其對於抑制輸出雜訊有極大的影響力，當能有效的降低反矩陣的費氏範數，輸出雜訊對於整個系統的影響也會變小。

而在此使用的方法仍是以求解係數解為主要的依據，根據(2.10)式及(2.11)式，可以知道求解係數解的過程是以每次求得一系列的係數，重複運算 $Af_q = b_q$ $q=1, \dots, N$ 列來得到反矩陣 $F(z)$ 各列的係數，所以每一列的係數其實是獨立的，因此我們也可以將 M 個輸入 N 個輸出(MIMO)的 FIR 系統視為 N 個 M 個輸入單一輸出(MISO)濾波器組，來一一找出各列的係數。

而為了找出所有反矩陣中的最小費氏範數解，在求解過程中也會使用的最佳化理論的方法來快速求得我們所想要得到的解，也將會在以下章節介紹其理論基礎以及如何與我們的問題做相關的聯結。另外，也會針對當系統係數允許複數存在時，求得最小費氏範數的方法該做的改變。

4.1 凸型最佳化(convex optimization)理論與證明

定義 4.1：考慮以下非線性最佳化問題，

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & \text{subject to :} \\ & g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

則卡羅需-卡-塔克條件(Karush-Kuhn-Tucker Conditions, KKT

conditions)可寫成 $\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^l v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$ [14]。■

而在此由於我們無需用到不等式條件，所以可以將其視為一線性最佳化的問題，所以對於 $i=1, \dots, m$ ， $g_i(x) \leq 0$ 條件不存在。

定理 4.1：對於一 n 維行向量 x ，其滿足方程式 $Ax=b$ ，若我們想最小化一 2 次多項式 $f(x)$ ，且 $f(x)=x^T P x$ ， P 為 $n \times n$ 正定(positive definite)矩陣，則其卡羅需-卡-塔克條件經由計算可得

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Px + A^T v &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

證明[15, p. 141]：

若想最小化 $f(x)$ ，且 $Ax=b$ ，勢必會有非最佳解 $y(Ay=b)$ ，使得

$$\nabla f(x)^T (y-x) \geq 0$$

，其中 $\nabla f(x)_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ ，因此可假設 $y=x+v$ ，若我們定義 $N(A)$ 為矩陣 A

的零空間(null space)， $R(A)$ 代表矩陣 A 的值空間(range space)，

則 $v \in N(A)$ ，則若想找出最佳解需

$$\nabla f(x)^T v = 0$$

故

$$\nabla f(x) \perp N(A)$$

$$N(A)^\perp = R(A^T)$$

因此最佳化條件可以描述如下：

$$\nabla f(x) \in R(A^T)$$

因此必存在向量 v 使得 $\nabla f(x) + A^T v = 0$ 成立，故得證。

因此，若我們想求得符合 $Ax=b$ 且將 $f(x)$ 最小化的解向量 x ，只須將

(4.1)式中的兩個方程式合併成一增廣矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

求解(4.2)式中的 \mathbf{x} 即可找到我們所要的最小 $f(\mathbf{x})$ 解。■

而利用(4.2)式，可以求出 \mathbf{x} 如下所示：

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{v} &= -(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b} \quad (4.3)$$

而 \mathbf{x} 就是滿足 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解中可以 minimize $f(\mathbf{x})$ 的向量。

4.2 FIR 反矩陣設計

定義 4.2：對於一 $1 \times M$ 列向量 $\mathbf{F}(e^{j\omega}) = [\mathbf{F}_1(e^{j\omega}) \ \mathbf{F}_2(e^{j\omega}) \ \dots \ \mathbf{F}_M(e^{j\omega})]$ ，且

$\mathbf{F}_m(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_m^k e^{-jk\omega}$ ， $m=1, \dots, M$ ，則其費氏範數的平方可表示為

$$\|\mathbf{F}(e^{j\omega})\|_F^2 = |\mathbf{F}_1(e^{j\omega})|^2 + |\mathbf{F}_2(e^{j\omega})|^2 + \dots + |\mathbf{F}_M(e^{j\omega})|^2 \quad [16, \text{p. 56}]。 \blacksquare$$

為了尋求最小費氏範數反矩陣，首先需要得知的訊息即為針對一 FIR 列向量而言，其費氏範數的表示式，因此，首先我們先以簡單的 1×2 的一階 FIR 向量觀察其費氏範數的表示式。

對於角度為 ω 的一階 FIR 向量，其費氏範數的計算如下：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(e^{j\omega})\|_F^2 &= |\mathbf{F}_1(e^{j\omega})|^2 + |\mathbf{F}_2(e^{j\omega})|^2 \\ &= |\mathbf{f}_1^0 + \mathbf{f}_1^1 e^{-j\omega}|^2 + |\mathbf{f}_2^0 + \mathbf{f}_2^1 e^{-j\omega}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f_1^0 + f_1^1 e^{-j\omega})(f_1^0 + f_1^1 e^{j\omega}) + (f_2^0 + f_2^1 e^{-j\omega})(f_2^0 + f_2^1 e^{j\omega}) \\
&= (f_1^0)^2 + 2f_1^0 f_1^1 \cos \omega + (f_1^1)^2 \\
&\quad + (f_2^0)^2 + 2f_2^0 f_2^1 \cos \omega + (f_2^1)^2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

若定義 $x = [f_1^0 \quad f_1^1 \quad f_2^0 \quad f_2^1]^T$ ，則根據凸型最佳化定理，可知若將 $f(x)$ 設定成為費氏範數的平方，則 $f(x) = x^T P x$ ，且

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega & 0 & 0 \\ \cos \omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cos \omega \\ 0 & 0 & \cos \omega & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

因此若要求得上述 x 的最小費氏範數解，若其符合方程式 $Ax=b$ ，則可代入(4.3)式，即為所求。為了得出矩陣 P 的規律性，以下則針對 1×2 的二階 FIR 矩陣再做一次分析，來得到其費氏範數表示式：

$$\begin{aligned}
\|F(e^{j\omega})\|_F^2 &= |F_1(e^{j\omega})|^2 + |F_2(e^{j\omega})|^2 \\
&= |f_1^0 + f_1^1 e^{j\omega} + f_1^2 e^{j2\omega}|^2 + |f_2^0 + f_2^1 e^{j\omega} + f_2^2 e^{j2\omega}|^2 \\
&= (f_1^0 + f_1^1 e^{j\omega} + f_1^2 e^{j2\omega})(f_1^0 + f_1^1 e^{-j\omega} + f_1^2 e^{-j2\omega}) \\
&\quad + (f_2^0 + f_2^1 e^{j\omega} + f_2^2 e^{j2\omega})(f_2^0 + f_2^1 e^{-j\omega} + f_2^2 e^{-j2\omega}) \\
&= (f_1^0)^2 + (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 + 2f_1^0 f_1^1 \cos \omega + 2f_1^0 f_1^2 \cos 2\omega + 2f_1^1 f_1^2 \cos \omega \\
&= (f_2^0)^2 + (f_2^1)^2 + (f_2^2)^2 + 2f_2^0 f_2^1 \cos \omega + 2f_2^0 f_2^2 \cos 2\omega + 2f_2^1 f_2^2 \cos \omega
\end{aligned} \tag{4.6}$$

同樣的，若定義 $x = [f_1^0 \quad f_1^1 \quad f_1^2 \quad f_2^0 \quad f_2^1 \quad f_2^2]^T$ ， $f(x)$ 如(4.6)式所示，則 $f(x) = x^T P x$ ，且

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega & \cos2\omega & 0 & 0 & 0 \\ \cos\omega & 1 & \cos\omega & 0 & 0 & 0 \\ \cos2\omega & \cos\omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos\omega & \cos2\omega \\ 0 & 0 & 0 & \cos\omega & 1 & \cos\omega \\ 0 & 0 & 0 & \cos2\omega & \cos\omega & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

從(4.5)式以及(4.7)式，我們可歸納出 P 矩陣的大小，會與列向量的 delay 階數以及向量維度有關：假設對於 $1 \times M$ 的列向量 $F(e^{j\omega})$ ，若其最高階數為 k_r ，且其係數滿足方程式 $Ax=b$ ，則其角度為 ω 時的最小費氏範數解可根據(4.3)式求得，且 P 必具有以下形式：

$$P = \begin{bmatrix} P^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P^M \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

其中 $P^t \in \mathbb{R}^{(k_r+1) \times (k_r+1)}$ ， $t=1, \dots, M$ ， $P^1 = P^2 = \dots = P^M$ ，且

$$P^t = \{P_{uv}^t = \cos(u-v)\omega \mid 1 \leq u \leq k_r+1, 1 \leq v \leq k_r+1\} \quad (4.9)$$

而對於係數方程式 $Ax=b$ 而言，我們可將其代入(2.10)式及(2.11)式來找出符合 FIR 反矩陣的行向量，也就是說當我們想要找出反矩陣第 q 列的最小費氏範數解，則其係數方程式為 $Ax_q = b_q$ ，而 P 可由(4.8)及(4.9)求得，則 x_q 可經由以下的增廣矩陣求得

$$\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_q \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

例 4.1：在此我們將藉由簡單的模擬來驗證最小費氏範數對於抑制雜訊的功效。隨機產生一 2×1 的 2 階 FIR 系統 $G(z)$ ，且其 2 維輸出雜訊會通過一低通濾波器 $H(z) = 1 + 0.5625z^{-1} + 2.8917z^{-2} + 2.1945z^{-3} + 0.81z^{-4}$ ，其頻譜分布如下所示：

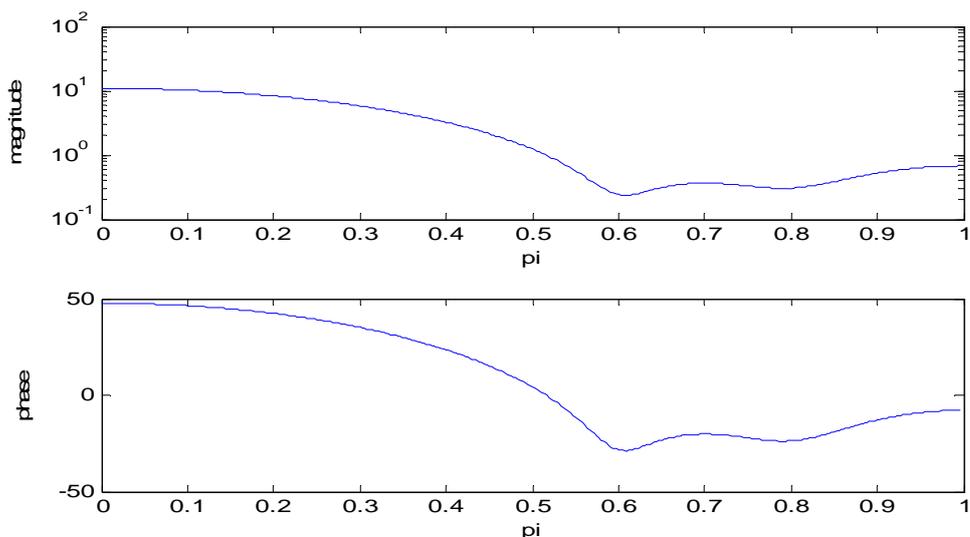


圖 4.1 濾波器 $H(z)$ 之增益及相位頻譜分布

而我們將求出反矩陣角度分布在 $0 \sim 0.5\pi$ 以及 $0 \sim \pi$ 的 3 階最小費氏範數解 $F_1(z)$ 及 $F_2(z)$ ，若將角度以 $\pi/4$ 為一等份，則 $F_1(z)$ 及 $F_2(z)$ 的費氏範數分別為

$$\|F_1(e^{j\omega})\|_F^2 = (|F_1(e^{j0})|^2 + |F_1(e^{j\pi/4})|^2 + |F_1(e^{j\pi/2})|^2) / 3$$

$$\|F_2(e^{j\omega})\|_F^2 = (|F_2(e^{j0})|^2 + |F_2(e^{j\pi/4})|^2 + |F_2(e^{j\pi/2})|^2 + |F_2(e^{j3\pi/4})|^2 + |F_2(e^{j\pi})|^2) / 5$$

並且將直接求解係數方程式 $Ax=b$ 的反矩陣 $F_3(z)$ 相比較，觀察其 BER 大小(10000 筆資料)，並以二進位相位偏移調變(Binary Phase Shift Keying, BPSK)為判定標準。

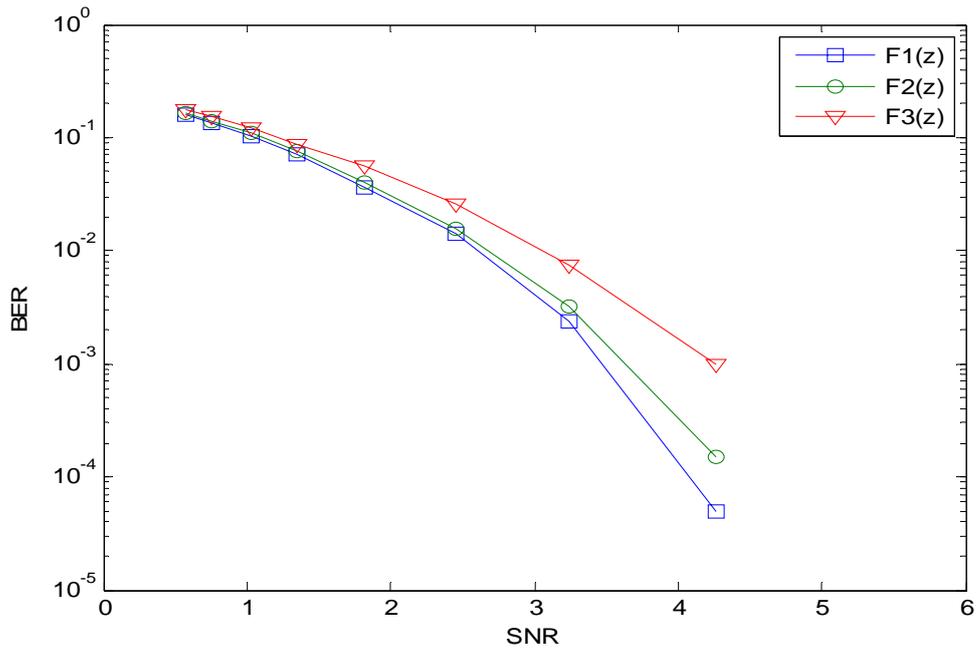


圖 4.2 以隨機系統 1 所產生的三個等化器 BER 比較

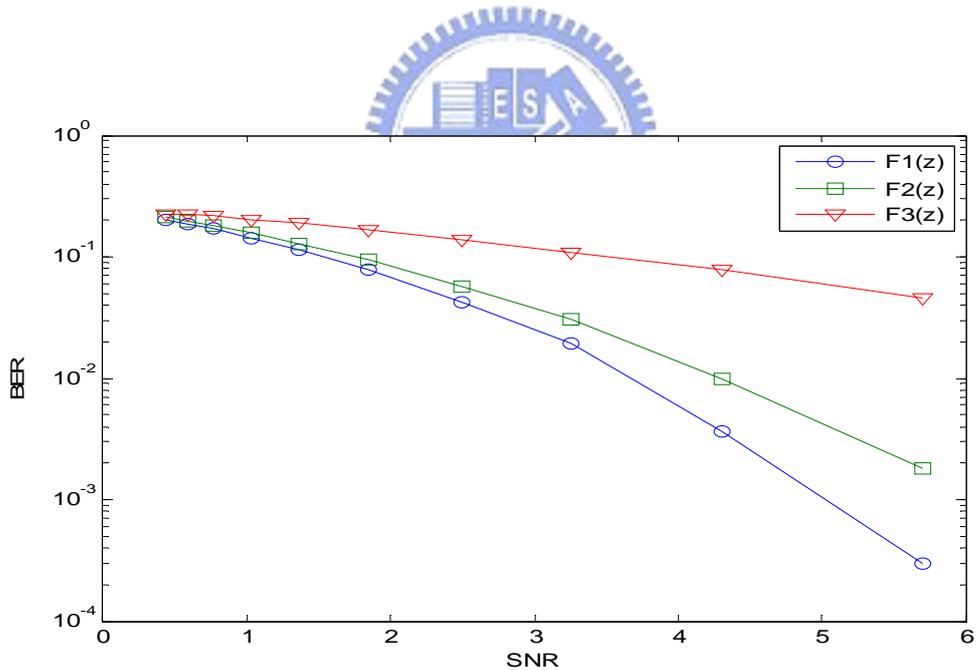


圖 4.3 以隨機系統 2 所產生的三個等化器 BER 比較

討論：由以上兩張圖可以得知，將角度設定在 $0 \sim 0.5\pi$ 所得到的最小費氏範數等化器解 $F_1(z)$ 會有最好的抑制雜訊效果，會有其結果是因為當我們設定了費氏範數的角度，等同於在其角度上放置一個零點，

會有抑制通過其角度訊號的功效，所以當雜訊為低通時，將加權角度擺在 $0 \sim 0.5\pi$ 會有最好的效果。從這個模擬可以知道，當我們知道雜訊的性質（低通或高通），則可以依照其加權所需角度得到費氏範數，達到抑制雜訊的效果。

4.3 複數形式最小費氏範數 FIR 反矩陣設計

若我們允許 FIR 矩陣的係數為複數，則對於 FIR 的 $M \times N$ ($M \leq N$) 多通道系統 $G(z)$ ，且其系統最大延遲階數為 k ，其第 m 列第 n 行元素可表示成

$$g_{mn}(z) = (ga_{mn}^0 + gb_{mn}^0 i) + (ga_{mn}^1 + gb_{mn}^1 i)z^{-1} + \cdots + (ga_{mn}^k + gb_{mn}^k i)z^{-k} \quad (4.11)$$

其中 $1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N$,

以同樣形式假設最大延遲階數為 k_r 反矩陣 $F(z)$ ，其第 u 列第 v 行元素可表示成

$$f_{uv}(z) = (fa_{uv}^0 + fb_{uv}^0 i) + (fa_{uv}^1 + fb_{uv}^1 i)z^{-1} + \cdots + (fa_{uv}^{k_r} + fb_{uv}^{k_r} i)z^{-k_r} \quad (4.12)$$

其中 $1 \leq u \leq N, 1 \leq v \leq M$,

因此若要以係數解求解反矩陣 $F(z)$ 的第 q 列係數，必須得到 $Ax_q = b_q$ 中矩陣 A 以及向量 b_q 的表示式：

若我們以簡單的 2×1 系統 ($k=k_r=1$) 來觀察 A 及 b ，則

$$G(z) = \begin{bmatrix} (ga_{11}^0 + gb_{11}^0 i) + (ga_{11}^1 + gb_{11}^1 i)z^{-1} \\ (ga_{21}^0 + gb_{21}^0 i) + (ga_{21}^1 + gb_{21}^1 i)z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$F(z) = \begin{bmatrix} (fa_{11}^0 + fb_{11}^0 i) + (fa_{11}^1 + fb_{11}^1 i)z^{-1} & (fa_{12}^0 + fb_{12}^0 i) + (fa_{12}^1 + fb_{12}^1 i)z^{-1} \end{bmatrix}$$

若定義 $x = [fa_{11}^0 \quad fb_{11}^0 \quad fa_{11}^1 \quad fb_{11}^1 \quad fa_{12}^0 \quad fb_{12}^0 \quad fa_{12}^1 \quad fb_{12}^1]^T$ ，則

$$A = \begin{bmatrix} ga_{11}^0 & -gb_{11}^0 & 0 & 0 & ga_{21}^0 & -gb_{21}^0 & 0 & 0 \\ gb_{11}^0 & ga_{11}^0 & 0 & 0 & gb_{21}^0 & ga_{21}^0 & 0 & 0 \\ ga_{11}^1 & -gb_{11}^1 & ga_{11}^0 & -gb_{11}^0 & ga_{21}^1 & -gb_{21}^1 & ga_{21}^0 & -gb_{21}^0 \\ gb_{11}^1 & ga_{11}^1 & gb_{11}^0 & ga_{11}^0 & gb_{21}^1 & ga_{21}^1 & gb_{21}^0 & ga_{21}^0 \\ 0 & 0 & ga_{11}^1 & -gb_{11}^1 & 0 & 0 & ga_{21}^1 & -gb_{21}^1 \\ 0 & 0 & gb_{11}^1 & ga_{11}^1 & 0 & 0 & gb_{21}^1 & ga_{21}^1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

若我們定義

$$G_{mn}^s = \begin{bmatrix} ga_{mn}^s & -gb_{mn}^s \\ gb_{mn}^s & ga_{mn}^s \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

則(4.13)式可以簡化成

$$A = \begin{bmatrix} G_{11}^0 & 0 & G_{21}^0 & 0 \\ G_{11}^1 & G_{11}^0 & G_{21}^1 & G_{21}^0 \\ 0 & G_{11}^1 & 0 & G_{11}^1 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

將(4.15)式與(2.10)式的 A 相比較，可以發現其會以同樣形式存在，差別只在於須將複數形式時的 g_{mn}^s 根據(4.14)式做修改即可，另外向量 b_q 的第 j 個元素 b_{qj} 則須修改為

$$b_{qj} = \begin{cases} 1 & j=2(q-1)(k+k_r+1)+1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (4.16)$$

利用(4.14)~(4.16)式，即可求得反矩陣 $F(z)$ 的第 q 列所有係數，進而得到反矩陣。

此外，我們一樣想找尋複數形式的最小費氏範數解，同樣的，我們先以簡單例子來找出角度為 ω 時的費氏範數表示式，並歸納出 P 矩陣的通式。

若定義 $F(z) = [(fa_{11}^0 + fb_{11}^0 i) + (fa_{11}^1 + fb_{11}^1 i)z^{-1} + (fa_{11}^2 + fb_{11}^2 i)z^{-2}]$ ，其費氏範數為

$$\begin{aligned}
\|F(e^{j\omega})\|_F^2 &= |(fa_{11}^0 + fb_{11}^0 i) + (fa_{11}^1 + fb_{11}^1 i)e^{j\omega} + (fa_{11}^2 + fb_{11}^2 i)e^{-2j\omega}| \\
&= [(fa_{11}^0 + fb_{11}^0 i) + (fa_{11}^1 + fb_{11}^1 i)e^{j\omega} + (fa_{11}^2 + fb_{11}^2 i)e^{-2j\omega}] \\
&\quad \times [(fa_{11}^0 - fb_{11}^0 i) + (fa_{11}^1 - fb_{11}^1 i)e^{j\omega} + (fa_{11}^2 - fb_{11}^2 i)e^{-2j\omega}] \\
&= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}
\end{aligned}$$

若定義 $\mathbf{x} = [fa_{11}^0 \quad fb_{11}^0 \quad fa_{11}^1 \quad fb_{11}^1 \quad fa_{11}^2 \quad fb_{11}^2]^T$ ，則

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\omega & \sin\omega & \cos 2\omega & \sin 2\omega \\ 0 & 1 & -\sin\omega & \cos\omega & -\sin 2\omega & \cos 2\omega \\ \cos\omega & -\sin\omega & 1 & 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 & 1 & -\sin\omega & \cos\omega \\ \cos 2\omega & -\sin 2\omega & \cos\omega & -\sin\omega & 1 & 0 \\ \sin 2\omega & \cos 2\omega & \sin\omega & \cos\omega & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

若定義 I_2 為 2×2 單位矩陣，且

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} \cos n\omega & \sin n\omega \\ -\sin n\omega & \cos n\omega \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

則 \mathbf{P} 可簡化如下：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_1^T & I_2 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_1^T & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

因此，我們可以歸納出若對 $1 \times M$ FIR 列向量 $F(z)$ ，且其最大 delay 為 k_r ，則其在角度為 ω 時的費氏範數可表示為

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_M \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

其中 $P_1 = P_2 = \cdots = P_M$ ，且

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_2 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{k_r} \\ C_1^T & I_2 & C_1 & \cdots & C_{k_r-1} \\ C_2^T & C_1^T & I_2 & \cdots & C_{k_r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k_r}^T & C_{k_r-1}^T & \cdots & C_1^T & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

在得知 A, b_q, P 之後，我們就能代入(4.3)式其來找出 FIR 反矩陣 最小費氏範數解。



4.4 最小 2 次範數 FIR 反矩陣解

定義 4.3：若假設一 FIR 函數 $w(z) = \sum_{t=0}^{\infty} w_t z^{-t}$ ，則其 2 次範數

(Quadratic norm) 的平方定義為 $\phi_w = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^2$ 。此外，若 $W(z)$ 為一

$l \times m$ FIR 矩陣，則我們可以更進一步定義其 2 次範數平方為

$\phi_W = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \phi_{w_{ij}}$ ，也可以簡單的說，對於 FIR 矩陣而言，其 2 次範數

的平方即為所有係數的平方和[4]。

在例 4.1 當中，我們可以發現當我們適當的求得特定角度的最小費氏範數解，就能有效的抑制已知特性(低通 or 高通等)的雜訊，其

方法就是把角度放在雜訊通過的通帶(passband)上,使其產生零點的效果來抑制雜訊。然而,當我們無法得知雜訊特性時,亦希望能以相同的方式來抑制雜訊的通過,那麼我們就須顧慮到每個角度,使得不論雜訊的通帶在哪都能被抑制住。

首先,在(4.5)式中若我們分別加權 k_1 及 k_2 在角度 ω_1 及 ω_2 上,則所得的P矩陣形式如下所示:

$$P = \frac{1}{k_1 + k_2} \times \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 \cos \omega_1 + k_2 \cos \omega_2 & 0 & 0 \\ k_1 \cos \omega_1 + k_2 \cos \omega_2 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 + k_2 & k_1 \cos \omega_1 + k_2 \cos \omega_2 \\ 0 & 0 & k_1 \cos \omega_1 + k_2 \cos \omega_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

當若我們想要平均加權倍數在角度 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$,其中對於 $a=1, \dots, t$, $\omega_a = (2a/t)\pi$,且 $t \rightarrow \infty$,則P矩陣可表示如下:

$$P = \frac{1}{t} \times \begin{bmatrix} t & \sum_{a=1}^t \cos(2a/t)\pi & 0 & 0 \\ \sum_{a=1}^t \cos(2a/t)\pi & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \sum_{a=1}^t \cos(2a/t)\pi \\ 0 & 0 & \sum_{a=1}^t \cos(2a/t)\pi & t \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

以上即為將角度從0度到 π 細分並平均加權所得的P矩陣,且可以看出

當 $t \rightarrow \infty$ 時, $\frac{1}{t} \sum_{a=1}^t \cos(2a/t)\pi = 0$,因此P可簡化成一單位矩陣。在

複數形式下,由於 $\frac{1}{t} \sum_{a=1}^t \sin(2a/t)\pi = 0$,因此P也會得到相同的結果。

然而,當P為一單位矩陣,代表要最小化的函數為 $x^T x$,即為所

有係數的 2 次範數平方，因此我們可以將最小 2 次範數反矩陣解視為最小費氏範數反矩陣解的特例，且其物理意義為遍布零點在 $0\sim 2\pi$ 的角度上，達到抑制雜訊的效果，且此時(4.3)式可以簡化如下：

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (4.24)$$

例 4.2：以下將 2×1 2 階 FIR 系統 $G(z)$ ，分別找出加權以下角度的反矩陣

1. 2 次範數

2. $\|F(e^{j0})\|_F^2 + \|F(e^{j\pi/6})\|_F^2 + \|F(e^{j\pi/3})\|_F^2 + \|F(e^{j\pi/2})\|_F^2$

3. $\|F(e^{j\pi/2})\|_F^2 + \|F(e^{j2\pi/3})\|_F^2 + \|F(e^{j5\pi/6})\|_F^2 + \|F(e^{j\pi})\|_F^2$

4. $\|F(e^{j0})\|_F^2$

5. $\|F(e^{j\pi/2})\|_F^2$

6. $\|F(e^{j\pi})\|_F^2$



並找出以上六個不同加權角度時的三階反矩陣，並觀察其錯誤次數多寡(30000 筆資料)，以正交相位偏移調變(Quadrature Phase Shift Keying, QPSK)當做錯誤判定標準，另外雜訊則是以 matlab 指令 $\mathbf{v}_n = 10^{-(0.125 \times dd)} \times \text{randn}(1, 10000)$ ， $dd=0, 1, \dots, 10$, $n=1, 2$ 來分別產生 2 維雜訊：

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7
1	8216	5316	2858	1129	241	28	0
2	8500	5582	3052	1244	286	32	1
3	14052	11808	9016	6237	3490	1544	433
4	9339	6482	3748	1697	521	73	2
5	12497	9919	6985	4362	1962	650	123
6	18835	17805	16392	14764	12496	10102	7167

dd=8	dd=9	dd=10
0	0	0
0	0	0
1	0	0
0	0	0
8	0	0
4377	2153	730

表 4.1 隨機系統 1 所得反矩陣對於雜訊的錯誤次數

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5
1	158	14	2	0	0
2	1502	438	60	2	0
3	1143	256	35	0	0
4	4204	2052	649	108	6
5	1460	397	40	3	0
6	1185	262	39	0	0

表 4.2 隨機系統 2 所得反矩陣對於雜訊的錯誤次數

從表 4.1 及表 4.2 可以看出，最小 2 次範數反矩陣相較於其他反矩陣而言，抑制雜訊的效果明顯較佳，也代表我們所做的假設成立，因此，當無法得知雜訊的特性時，亦或其為白色雜訊時，可以利用最小 2 次範數解來找反矩陣，且其會有良好的抑制雜訊的效果。

4.4.1 最小 2 次範數 FIR 反矩陣階數設定

當利用係數解求得反矩陣時，我們可以得知對於一 $M \times N$ 系統 $G(z)$ ，當方程組 $Ax=b$ 的未知數個數大於方程式個數時，系統通常有

解，也就是 $N(k+k_r+1) \leq M(k_r+1)$ 即有反矩陣解的存在，因此假設反矩陣階數在 a 時有解存在，那麼階數在 a 以上必也會產生反矩陣的解。且因為 $Ax=b$ 方程式自由度變多，最小 2 次範數也會隨著階數變高而降低，並且產生更良好的抑制雜訊效果。

然而，在真正實現電路時，過高的階數卻會提高實現電路的難度，且當系統 $G(z)$ 有不確定度(uncertainty)產生時，過高的階數也會受到更多的影響，因此，我們必須在 BER 以及系統階數間歸納出平衡點，才能提高濾波器的效率。

由於階數會影響自由度大小，因此我們主要將目標放在自由度與 BER 的關係上，希望能找出兩者間的關係而找出平衡點。

以下模擬將分別隨機產生 3×2 ， 4×2 ， 5×2 的 2 階系統，並且分別找出其各階數的最小 2 次範數反矩陣，觀察其均方差變化：

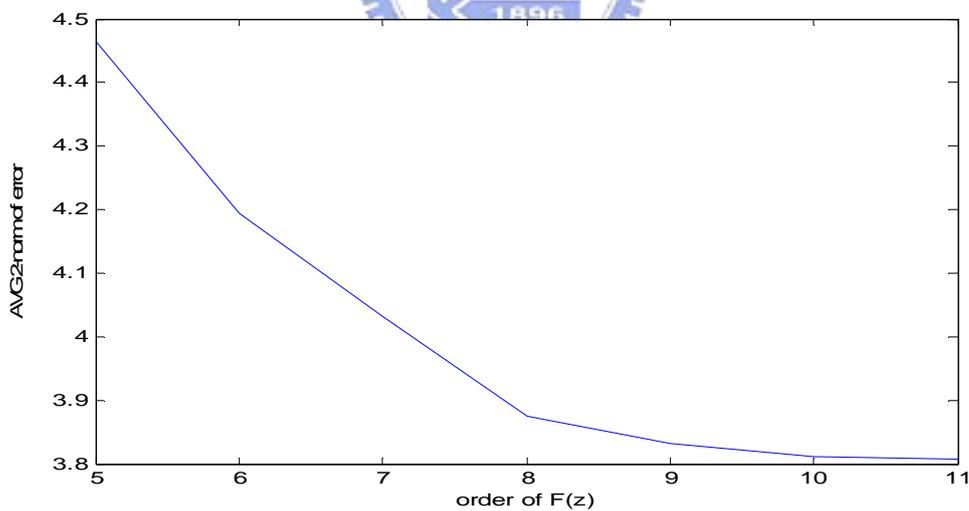


圖 4.4 隨機 3×2 系統不同階數下的等化器均方差變化

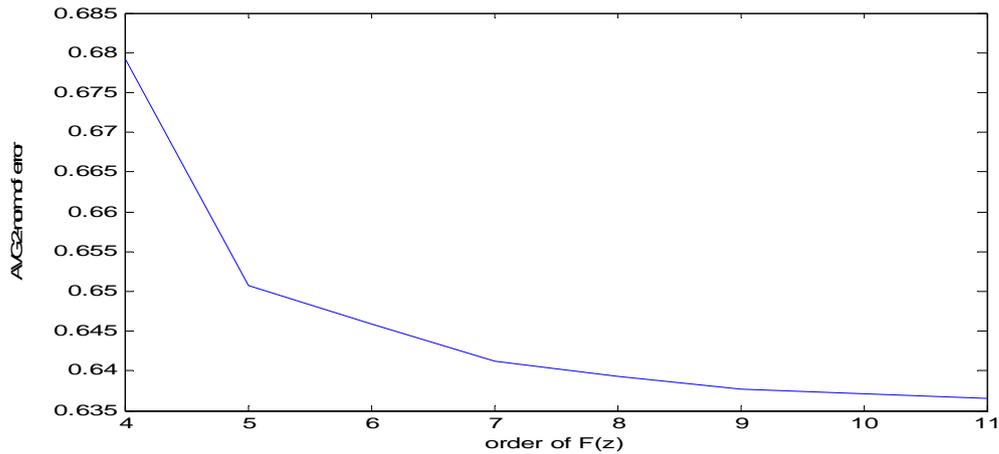


圖 4.5 隨機 4×2 系統不同階數下的等化器均方差變化

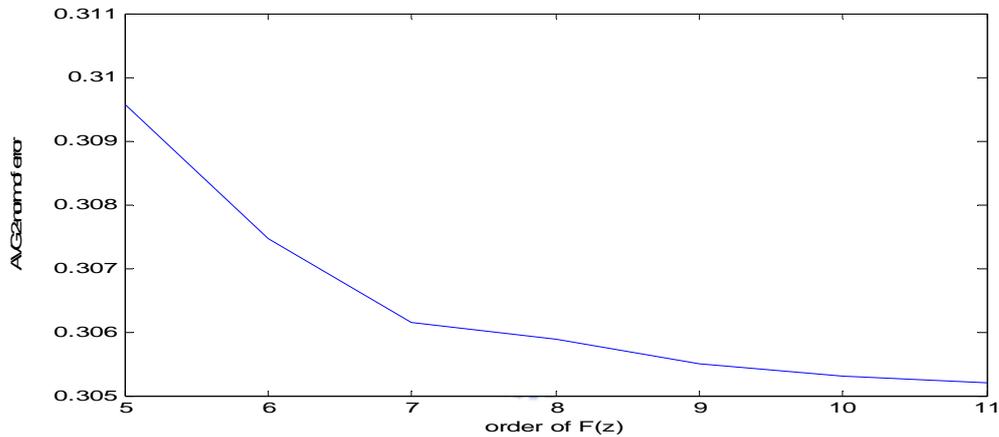


圖 4.6 隨機 5×2 系統不同階數下的等化器均方差變化

討論:若以均方差與穩態均方差差距 0.1 作為我們擷取階數的標準的話,可以看出在 3×2 系統中,最小 2 次範數反矩陣大約在 8 階左右與穩態(11 階)差距可以降到 0.1 以下,此時的自由度是 3,而繼續觀察 4×2 ,可以看出,最小非零的自由度發生在四階反矩陣,且此時自由度為 4,而且全部的均方差差距都在 0.1 以下。

繼續觀察 5×2 系統 $G(z)$,則同樣全部的平均誤差相距在 0.1 以下,最小自由度為 5 階的 12,若要觀察是否自由度大概在 4 左右就能有不錯的效果的話,則加入模擬最小 2 次範數為 1 階及 2 階的情況(自

由度 3&6), 則得到一階的平均誤差為 0.4077, 2 階的誤差為 0.33419, 與 11 階時的狀況相比, 可看出差距仍在 0.1 內, 代表所假設系統反矩陣在自由度 3 或 4 以上即會有不錯的反矩陣抑制雜訊的效果。而若為了保險起見, 則可將自由度選擇在 5 來選擇階數。



第五章模擬結果與分析

在本章中，主要將對於原本已知求得 FIR 等化器的方法與最小費氏範數解法做一個比較，探討在不同形式的輸出雜訊干擾下，哪一種等化器會有較好的抑制雜訊的效果，並以符元錯誤率(symbol error rate, SER)來判定等化器的優劣程度(以 BPSK(實數情況)及 QPSK(複數情況)當作判定標準)。

另外，我們也要觀察在有不確定度存在下(階數及係數)，最小 2 次範數是否會比其他反矩陣有較好的抵抗效果。

5.1 在白色雜訊下系統等化器錯誤率比較

在本章節所做的模擬中，主要是想觀察在白色雜訊下，利用最小 2 次範數所得的等化器解與其他等化器的錯誤率比較，並分別以 4×2 及 5×2 的 2 階 FIR 系統來觀察，並且也會觀察系統係數分別為實數以及複數時的錯誤率。

而我們將分別求出四個 3 階等化器 $F_1(z), F_2(z), F_3(z), F_4(z)$ ，其中 $F_1(z)$ 為設定 $\sigma_v^2 = 0.1$ 所得到的 MMSE 等化器。 $F_2(z)$ 為直接求係數解所得反矩陣。 $F_3(z)$ 為最小 2 次範數反矩陣解，而 $F_4(z)$ 則是平均加權角度在 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 所得的最小費氏範數解。

5.1.1 實係數等化器對於雜訊錯誤率比較

在系統 $G(z)$ 以及等化器係數均為實數下，我們可以求得 BER 比較四個等化器的優劣。

而對於 4×2 的 2 階系統 $G(z)$ ，其係數是以 $c_n = 1 \times \text{randn}(4, 2)$ ， $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的係數。並且觀察輸出雜訊變化時的 BER 變

化，並以 $v_n = 10^{-0.05 \times dd} \times \text{randn}(1, 10000)$ ，
 $dd=0, 1, \dots, 15, n=1, 2, 3, 4$ 來分別產生 4 維白色雜訊。並可得到四個
 等化器的錯誤比較次數如下(以 BPSK 做判定，輸入 x_1, x_2 各 10000 筆
 資料)：

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	1648	1211	903	862	834	821	801	769
$F_2(z)$	1707	1235	898	543	311	133	64	19
$F_3(z)$	1521	1075	711	430	251	94	34	11
$F_4(z)$	1588	1152	749	462	277	116	42	13

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	753	741	729	711	702	698	695
$F_2(z)$	8	0	0	0	0	0	0
$F_3(z)$	5	0	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	5	0	0	0	0	0	0

表 5.1 4×2 實數系統 1 所產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	3521	3247	2981	2694	2428	2270	2132	1926
$F_2(z)$	4551	3965	3454	2939	2402	1972	1496	1080
$F_3(z)$	3364	2804	2279	1748	1390	962	605	346
$F_4(z)$	3416	2814	2312	1788	1398	998	646	375

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	1911	1771	1695	1685	1644	1598	1564
$F_2(z)$	732	460	274	152	84	30	15
$F_3(z)$	216	99	58	16	5	1	0
$F_4(z)$	243	104	61	19	7	3	0

表 5.2 4×2 實數系統 2 產生等化器在雜訊下的錯誤次數比較

由上面的數據可以得知，最小 2 次範數解 $F_3(z)$ 的確在白色雜訊干擾之下，相對於其他等化器有較好的抑制效果，而 MMSE 等化器 $F_1(z)$ 雖然在雜訊變異數比所假設的雜訊變異數大時，雜訊抑制效果與最小 2 次範數解相近，不過卻由於本身不是 $G(z)$ 的反矩陣使得最後抑制雜訊的能力會變差。

而為了觀察更多的例子，我們將系統改成 5×2 ，其餘不變的情況下分析四個不同等化器的錯誤率如下。

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	1342	1016	806	575	335	212	120	64
$F_2(z)$	2511	2108	1912	1569	1265	988	743	554
$F_3(z)$	1312	985	752	513	285	149	94	53
$F_4(z)$	1392	1072	861	614	373	219	134	73

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	17	8	1	2	0	0	0
$F_2(z)$	382	229	101	51	22	8	2
$F_3(z)$	6	1	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	17	10	2	2	1	0	0

表 5.3 5×2 實數系統 1 產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	4947	4468	4080	3562	3000	2554	2188	1716
$F_2(z)$	7060	6748	6160	5934	5379	4971	4545	3948
$F_3(z)$	4951	4312	3989	3411	2845	2488	2006	1562
$F_4(z)$	5484	4945	4565	4083	3455	2976	2602	2075

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	1489	1132	869	643	481	359	222
$F_2(z)$	3423	2914	2385	1859	1342	994	663
$F_3(z)$	1281	989	703	393	253	112	86
$F_4(z)$	1733	1338	1068	739	512	358	213

表 5.4 5×2 實數系統 2 產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

當系統由 4×2 改成 5×2 時，可以看出最小 2 次範數等化器仍然有較低的錯誤率，代表其對於抑制白色雜訊的確有較好的效果，符合我們所預期的結果。

5.1.2 複係數等化器對於雜訊錯誤率比較

在系統 $G(z)$ 以及等化器係數均為複數下，我們可以求得 SER 比較四個等化器的優劣。

而對於 4×2 的 2 階系統 $G(z)$ ，其係數是以 $c_n = 1 \times \text{randn}(4, 2)$, $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的實數部分係數, $k_n = 1 \times \text{randn}(4, 2)$, $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的虛數部分係數。並且觀察輸出雜訊變化時的 SER 變化，並以 $v_{n1} = 10^{(-0.05 \times dd)} \times \text{randn}(1, 10000)$ ，

$$v_{n2} = 10^{-0.05*dd} \times \text{randn}(1, 10000), v_n = v_{n1} + v_{n2} \times i$$

dd=0, 1, ..., 15, n=1, 2, 3, 4 來分別產生 4 維複數雜訊，且 i 為虛數 (imaginary number)。並可得到四個等化器的錯誤次數如下(以 QPSK 做判定，輸入 x_1, x_2 各 10000 筆資料)：

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	735	580	478	414	367	321	292	247
$F_2(z)$	946	550	243	111	40	6	2	0
$F_3(z)$	57	16	5	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	68	17	9	1	0	0	0	0

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	237	223	204	194	172	190	176
$F_2(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_3(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	0	0	0	0	0	0	0

表 5.5 4×2 複數系統 1 產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	1241	880	591	389	249	156	101	39
$F_2(z)$	1275	894	440	201	138	80	9	1
$F_3(z)$	506	255	101	36	6	4	0	0
$F_4(z)$	540	300	115	45	10	7	2	0

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	33	17	5	5	0	2	0
$F_2(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_3(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	0	0	0	0	0	0	0

表 5.6 4×2 複數系統 2 產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

為了得到更多複數等化器之間的比較，同樣的我們繼續求得 5×2 複數系統等化器在輸出雜訊干擾下的錯誤次數比較。

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	193	137	100	84	56	22	16	9
$F_2(z)$	667	446	316	201	165	131	82	23
$F_3(z)$	89	21	10	1	1	0	0	0
$F_4(z)$	200	64	33	8	2	0	0	0

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	7	3	0	0	0	0	0
$F_2(z)$	17	6	2	1	0	0	0
$F_3(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	0	0	0	0	0	0	0

表 5.7 5×2 複數系統 1 產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	1704	1143	728	410	221	102	34	10
$F_2(z)$	2460	1985	1622	1132	891	599	462	342
$F_3(z)$	1498	995	628	338	189	87	24	13
$F_4(z)$	2066	1456	928	530	333	182	71	32

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	3	0	0	0	0	0	0
$F_2(z)$	126	85	67	15	4	0	0
$F_3(z)$	2	0	0	0	0	0	0
$F_4(z)$	6	2	0	0	0	0	0

表 5.8 5×2 複數系統 2 產生之等化器在雜訊下的錯誤次數比較

模擬分析：從以上的模擬可以發現到，不論系統係數為實數或者複數，以及系統的輸入輸出數目，最小 2 次範數等化器解 $F_3(z)$ 都有最好的抑制雜訊的效果，代表其對於白色雜訊的抑制能力確實有相當好的效果產生，而其他三個等化器則因系統的不同有所優劣程度的差距，另外， $F_4(z)$ 等化器略差於 $F_3(z)$ 原因在於其加權角度只有 4 個，無法顧全到所有 $0 \sim \pi$ 的角度，而使得抑制雜訊能力略低於 $F_3(z)$ 。

5.2 在不確定度下系統等化器錯誤率比較

在利用等化器還原輸入訊號的過程中，實際中系統 $G(z)$ 也會因為某些因素產生不確定度例如階數的不匹配以及係數的不匹配等等，而此不確定度也會導致最後輸出有錯誤的產生，而為了觀察最小 2 次範數解是否對於此不確定度有著較良好的抑制效果，因此我們將觀察其與其他等化器對於不確定度所造成的錯誤率比較。

同樣的，我們將分別求出三個 3 階等化器 $F_1(z), F_2(z), F_3(z)$ ，其中 $F_1(z)$ 為最小 2 次範數反矩陣解， $F_2(z)$ 為直接求係數解所得反矩陣，而 $F_3(z)$ 則是平均加權角度在 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 所得的最小費氏範數解。

5.2.1 實係數等化器在不確定度下的錯誤率比較

這次的模擬將完全只觀察不確定度的影響，而不加入輸入雜訊，而不確定度的設定則是以係數的不確定度來做模擬指標，同樣的我們以對於 4×2 的 2 階系統 $G(z)$ ，其係數是以 $c_n = 1 \times \text{randn}(4, 2)$, $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的係數。而不確定度則是 $u_n = z \times \text{randn}(4, 2)$, $n=0, 1, 2$, $z=0.1, 0.3, 0.5$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的不確定度係數。

為了比較錯誤率，在模擬中，我們將固定不確定度值，並且隨機產生 100 個 4×2 系統 $G(z)$ ，每次輸入 x_1, x_2 各 5000 筆資料，觀察 3 個等化器對於不確定度的平均位元錯誤率(以 BPSK 做判定)：。

	$z=0.1$	$z=0.3$	$z=0.5$
$F_1(z)$	$3.5e-5$	0.051174	0.092561
$F_2(z)$	0.00336	0.233962	0.413943
$F_3(z)$	$8e-5$	0.087966	0.134429

表 5.9 4×2 實數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較

接下來，則繼續觀察 5×2 系統的等化器對於不確定度的錯誤率比較如下：

	$z=0.1$	$z=0.3$	$z=0.5$
$F_1(z)$	0	0.004126	0.020081
$F_2(z)$	0.000458	0.034251	0.080345
$F_3(z)$	$2e-5$	0.009061	0.045976

表 5.10 5×2 實數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較

從表 5.9 及表 5.10 可以看出，最小 2 次範數反矩陣解 $F_1(z)$ 在不確定度影響之下，確實有較好的抑制效果，也能有效的壓低錯誤率，也是我們所希望看到的結果。

5.2.2 複係數等化器在不確定度下的錯誤率比較

而在允許複數係數情況下，也同樣想觀察 2 次範數反矩陣解否同樣有較好的抑制不確定度的效果。因此對於 4×2 的 2 階系統 $G(z)$ ，並以 $c_{n1}=1 \times \text{randn}(4, 2)$, $c_{n2}=1 \times \text{randn}(4, 2)$, $c_n=c_{n1}+c_{n2} \times i$, $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的係數。而不確定度則是

$u_{n1}=1 \times \text{randn}(4, 2)$, $u_{n2}=1 \times \text{randn}(4, 2)$, $c_n=c_{n1}+c_{n2} \times i$, $n=0, 1, 2$, $z=0.$

1, 0.3, 0.5 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的不確定度係數。

與實數做法相同們將固定不確定度值，並且隨機產生 100 個 4×2 系統 $G(z)$ ，每次輸入 x_1, x_2 各 5000 筆資料，觀察 3 個等化器對於不確定度的平均符元錯誤率(以 QPSK 做判定)：

	$z=0.1$	$z=0.3$	$z=0.5$
$F_1(z)$	$4.7e-5$	0.061139	0.102385
$F_2(z)$	0.00982	0.353305	0.41632
$F_3(z)$	$8.2e-5$	0.102011	0.15552

表 5.11 4×2 複數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較

接下來，則繼續觀察 5×2 系統的等化器對於不確定度的錯誤率比較如下：

	$z=0.1$	$z=0.3$	$z=0.5$
$F_1(z)$	0	0.004992	0.027455
$F_2(z)$	0.000569	0.03544	0.091236
$F_3(z)$	$1.1e-5$	0.010632	0.032552

表 5.12 5×2 複數系統所得的等化器對於不確定所得平均錯誤率比較

模擬分析：複數例子仍然與實數例子有相同的結果，最小 2 次範數等化器解仍然有較好的抑制不確定度的效果。另外，可以觀察到， 5×2 系統會比 4×2 的錯誤率低，這是因為由於自由度增加，最佳解也會因此更好，也能更有效的讓錯誤率降低。

5.3 同時考慮輸出雜訊和不確定度下系統等化器錯誤率比較

在實際情況下，其實輸出雜訊和不確定度經常是同時存在的，所以我們也須考慮此情況之下，不同等化器所造成的錯誤率大小，並觀察最小 2 次範數等化器是否仍然有較好的效果。

而我們將分別求出四個 3 階等化器 $F_1(z), F_2(z), F_3(z), F_4(z)$ ，其中 $F_1(z)$ 為設定 $\sigma_v^2 = 0.1$ 所得到的 MMSE 等化器。 $F_2(z)$ 為直接求係數解所得反矩陣。 $F_3(z)$ 為最小 2 次範數反矩陣解，而 $F_4(z)$ 則是平均加權角度在 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 所得的最小費氏範數解。

5.3.1 實係數等化器在同時考慮雜訊與不確定度下的錯誤率比較

在這節中，我們將對於 5×2 系統的 2 階系統，分別在系統 $G(z)$ 中加入不確定度，並且於輸出加入雜訊，比較四個等化器對於還原訊

號後的錯誤率。

我們同樣的將固定不確定度以及輸出雜訊的值，而系統 $G(z)$ 係數是以 $c_n = 1 \times \text{randn}(5, 2)$, $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的係數。而不確定度則是 $u_n = z \times \text{randn}(5, 2)$, $n=0, 1, 2$, $z=0.1, 0.3, 0.5$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的不確定度係數。輸出雜訊則是 $v_n = 0.1 \times \text{randn}(1, 10000)$, $n=1, 2, 3, 4, 5$ 來分別產生 5 維雜訊，並且隨機產生 100 個 5×2 系統 $G(z)$ ，每次輸入 x_1, x_2 各 5000 筆資料，觀察 4 個等化器對於不確定度的平均位元錯誤率(以 BPSK 做判定)：

	$z=0.1$	$z=0.3$	$z=0.5$
$F_1(z)$	$3e-5$	0.029654	0.096541
$F_2(z)$	0.001969	0.035546	0.092934
$F_3(z)$	$1.2e-6$	0.005717	0.034701
$F_4(z)$	$1.6e-5$	0.010405	0.052932

表 5.13 5×2 實數系統所得等化器同時考慮兩因素下所得平均錯誤率

可以觀察到，當兩個造成錯誤的因素同時考慮進去時，最小 2 次範數等化器仍然優於其他等化器，但與表 5.10 相比較可以發現由於同時考慮兩個因素，故其平均錯誤率比單純考慮不確定度下還要高。

5.3.2 複係數等化器在同時考慮雜訊與不確定度下的錯誤率比較

在複係數的模擬中，同樣固定不確定度與輸出雜訊的值，不確定度是 $u_{n1} = z \times \text{randn}(5, 2)$, $u_{n2} = z \times \text{randn}(5, 2)$, $u_n = u_{n1} + u_{n2} \times i$, $n=0, 1, 2$, $z=0.1, 0.3, 0.5$ 分別產生 0 階, 1 階, 2 階的不確定度係數。輸出雜訊則 $v_{n1} = 0.1 \times \text{randn}(1, 10000)$, $v_{n2} = 0.1 \times \text{randn}(1, 10000)$, $v_n = v_{n1} + v_{n2} \times i$, $n=1, 2, 3, 4, 5$ 來分別產生 5 維雜訊，並且隨機產生

100 個 5×2 系統 $G(z)$ ，每次輸入 x_1, x_2 各 5000 筆資料，觀察 4 個等化器對於不確定度的平均符元錯誤率(以 QPSK 做判定)：

	$z=0.1$	$z=0.3$	$z=0.5$
$F_1(z)$	$4.8e-5$	0.074621	0.132665
$F_2(z)$	0.002314	0.038521	0.116974
$F_3(z)$	$3.1e-6$	0.006713	0.039521
$F_4(z)$	$4.6e-5$	0.025194	0.089112

表 5.14 5×2 複數系統所得等化器同時考慮兩因素下所得平均錯誤率

模擬分析：最小 2 次範數等化器在兩個因素同時影響下，依舊有最好的效果，然而與只單純雜訊的 5×2 系統相比較，MMSE 等化器 $F_1(z)$ 因為無抑制不確定度的功效，導致錯誤率與最小 2 次範數解相差變大，因此，可以看出，最小 2 次範數解無論在白色雜訊干擾下，抑或是非不確定度影響系統的情況下，都能有效的讓錯誤率降低，讓訊號還原的成功率變高。

5.4 非白色雜訊下系統等化器錯誤率比較

在本節，將針對雜訊有相關性時(correlated)，系統等化器的比較，設計讓白色雜訊通過一低通濾波器之後成為相關雜訊，且低通濾波器 $H(z)=1+0.5625z^{-1}+2.8917z^{-2}+2.1945z^{-3}+0.81z^{-4}$ ，觀察 5×2 2 階實數系統所得等化器對於其錯誤率的比較。

而我們將分別求出三個 3 階等化器 $F_1(z), F_2(z), F_3(z), F_4(z)$ ，其中 $F_1(z)$ 為設定 $R_w=1.5$ (根據 $H(z)$ 計算而得) 所得到的 MMSE 等化器。 $F_2(z)$ 為直接求係數解所得反矩陣。 $F_3(z)$ 則是平均加權角度在 $0, \frac{\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}, \dots, \frac{\pi}{2}$ 所得

的最小費氏範數解，其中 $F_3(z)$ 是針對低通雜訊所設計。

而在數值設定方面，雜訊主要是以 $v_n = 10^{-0.05 \times dd} \times \text{randn}(1, 10000)$ ， $dd=0, 1, \dots, 15$ ， $n=1, 2, 3, 4, 5$ 來分別產生 5 維雜訊，並且分別經過 $H(z)$ 成為相關的低通雜訊，而系統係數則是以 $c_n = 1 \times \text{randn}(5, 2)$ ， $n=0, 1, 2$ 分別產生 0 階，1 階，2 階的係數。並輸入 x_1, x_2 各 10000 筆資料，觀察 3 個等化器對於不確定度的平均位元錯誤率(以 BPSK 做判定)：

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	2866	2111	1605	1154	547	663	562	536
$F_2(z)$	4231	3790	3144	2215	1079	315	14	0
$F_3(z)$	2832	2004	1285	967	327	28	0	0

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	505	495	494	496	504	508	517
$F_2(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_3(z)$	0	0	0	0	0	0	0

表 5.15 5×2 實數系統 1 所得等化器在非白色雜訊下所得錯誤次數

	dd=1	dd=2	dd=3	dd=4	dd=5	dd=6	dd=7	dd=8
$F_1(z)$	2264	1382	592	172	23	1	0	0
$F_2(z)$	3195	2398	1288	407	22	0	0	0
$F_3(z)$	1967	1002	234	98	11	0	0	0

	dd=9	dd=10	dd=11	dd=12	dd=13	dd=14	dd=15
$F_1(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_2(z)$	0	0	0	0	0	0	0
$F_3(z)$	0	0	0	0	0	0	0

表 5.16 5×2 實數系統 2 所得等化器在非白色雜訊下所得錯誤次數

模擬分析：由以上兩個模擬可以看出，當輸出雜訊非白色雜訊時，只要我們知道其頻譜分布，利用最小費氏範數解等化器一樣有比其他等化器還要好的抑制雜訊效果，代表無論雜訊的特性為何，我們都可以用凸型最佳化來求得良好的抑制雜訊的等化器。



第六章 結論

經由這篇論文，我們可以歸納出以下幾點結論：

- 一·由第五章的模擬分析可知，最小 2 次範數等化器解能有效的抑制白色雜訊以及不確定所造成訊號傳輸時的影響，並有效的完成訊號還原。而在第四章也經由模擬得知當輸出雜訊不為白色雜訊時，亦可根據雜訊的頻譜來設計最小費氏範數等化器解，達到抑制雜訊的效果。
- 二·而利用凸型最佳化求得等化器解，除了有比一般等化器更佳的抑制雜訊功能之外，其另外一個優點就是運算等化器的方法快且簡單，當系統須不斷變換時，其快速運算的優點將會比其他求得等化器的方法來得更有效率。
- 三·適當的選擇等化器延遲階數也會降低真正實現系統時的複雜度，經由 4.3.1 節可以得到當方程式有足夠的自由度時，就能讓等化器趨近於穩態階數時的誤差，而不須假設更高階數來得到等化器，來達到一定範圍誤差內的效果。



Reference

- [1] K. D. Rao, "Equalization of a MIMO Channel Using FIR Inverses," *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 54, no. 7, pp. 2844–2848, Jul. 2006.
- [2] R. Rajagopal and L. Potter, "MIMO FIR equalizers and orders," in *proc. 2001 Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Process*, vol. 4, pp. 2077 – 2080, May. 2001.
- [3] R. Rajagopal and L. Potter, "Multivariate MIMO FIR Inverse," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 12, pp. 458 – 465, Apr. 2003.
- [4] D. A. Cox, J. Little, and D. O' Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992.
- [5] P. P. Vaidyanathan, "Causal FIR matrices with anticausal FIR inverses, and application in characterization of biorthonormal filter banks," in *Proc ICASSP 1994*, vol. 3, pp. 177–180, Apr. 1994.
- [6] C. M. Brislawn, "Rational Transfer Matrices With FIR Inverses," in *Proc. 1996 Int. Conf. Time-frequency and Time-scale Analysis*, pp. 53–56, Jun. 1996.
- [7] A. V. Krishna and K. V. S. Hari, "Filter Bank Precoding for FIR Equalization in High-Rate MIMO Communication," *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 54, no. 5, pp. 1645–1652, May. 2006.
- [8] T. S. Blyth and E. F. Robertson, *Basic Linear Algebra*.

- London: Springer-Verlag, 2002.
- [9] T. Kailath, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1980.
- [10] L. Chai, J. Zhang, C. Zhang, and E. Mosca, "From IIR to FIR Digital MIMO Models: A Constructive Hankel Norm Approximation Method," in *CDC-ECC 2005*, pp. 5893-5898, Dec. 2005.
- [11] H. Friedberg, J. Insel, and E. Spance, *Linear Algebra*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [12] P. P. Vaidyanathan, *Multirate system and Filter banks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [13] T. Kailath, *Lectures on Wiener and Kalman filtering*, Springer-Verlag, 1981.
- [14] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. UK: Cambridge, 2004.
- [15] P. Loubaton, E. Moulines, and P. Regalia, "Subspace method for blind identification and deconvolution," in *Signal Processing Advances in Wireless Communications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.
- [16] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*. Baltimore, MD: Johns Hopkins, 1996.