

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究



Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order  
Polynomial Systems

研究生：許益銘

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十七年七月

二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究

Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order  
Polynomial Systems

研究生：許益銘

Student : Yi-Ming Syu

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Yew-Wen Liang

國立交通大學電機與控制工程學系



A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering  
College of Electrical Engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master  
in  
Electrical and Control Engineering  
June 2008  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月


# 二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究

研究生：許益銘

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要



本論文探討單輸入單輸出二次多項式系統之穩健輸出追蹤議題。利用變結構控制理論，本論文提出使二次多項式系統達到輸出追蹤之條件及穩健控制律。所獲得的理論結果也應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究。模擬結果驗證了所設計穩健控制律之有效性。

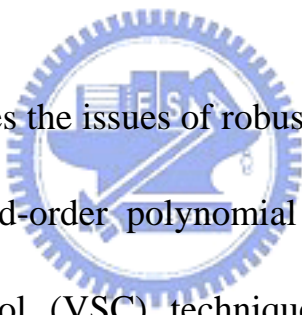
# **Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order Polynomial Systems**

Student : Yi-Ming Syu

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering  
National Chiao Tung University

## **ABSTRACT**



This thesis investigates the issues of robust output tracking for a class of SISO uncertain second-order polynomial systems. With the aid of Variable Structure Control (VSC) technique, this thesis presents an existence condition and a class of SMC controllers for robust output tracking task. The analytical results are also applied to a tap-changer control based power system for voltage regulation. Simulation results demonstrate the use and the benefits of the VSC scheme.

# 誌 謝

本篇論文能夠順利完成，實在要感謝很多人關心與協助。首先，要感謝我的指導教授梁耀文博士，感謝老師細心與耐心的指導以及對我的鼓勵，使我在這兩年的學習中受益良多，除此之外老師對於日常生活以及做人處事的道理也不吝提供幫助與提供正確且良好的觀念，對於往後的人生將有很大的助益。也要感謝系上曾給予協助的老師，同時，也要感謝口試委員廖德誠博士、宋朝宗博士和鄭治中博士給予指正與寶貴的建議，使本論文更加完備。

接下來要感謝徐聖棟學長，陳宏泰學長，曾昭銘學長及陳逸康學長在我遇到困難時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學紹偉，丞昶陪伴了我兩年研究所生活，在我心情低落的時候能夠協助我，並且在學業及生活上給我很大的支持與幫助，而學弟家榮，立偉，士昕也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對於我的幫助，使我的論文研究能夠更加順利。感謝所有我認識的朋友，有你們的陪伴讓我的研究所生活過得多采多姿且充滿快樂的回憶。

最後要感謝我最親愛的家人和女友的支持與體諒，不管發生什麼事總是支持我，給我最大的鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謹將此論文獻給所有我愛的人，謝謝你們！

# 目錄

	頁次
中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 論文架構.....	3
第二章 預備知識.....	4
2.1 可變結構控制.....	4
2.2 線性二次調節器.....	8
2.3 電力系統模型.....	9
2.4 二次多項式系統之穩健輸出追蹤.....	13
第三章 應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究.....	17
3.1 控制律設計.....	18
3.2 模擬結果.....	21

3.3 LQR 與 VSC 兩種控制律的比較.....	26
3.3.1 LQR 控制律設計.....	26
3.3.2 LQR 與 VSC 控制律性能比較.....	29
第四章 改良型可變結構控制律設計.....	50
4.1 控制律設計.....	51
4.2 模擬結果.....	53
第五章 結論與未來研究方向.....	66
5.1 結論.....	66
5.2 未來研究方向.....	67
參考文獻.....	68



# 表目錄

表 3.1  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ , VSC 與 LQR 控制律的比較.....32

表 3.2  $t_f = \min\{t^* \mid e(t) < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ , VSC 與 LQR 控制律的比較.....32





# 圖目錄

圖 2.1	順滑模態產生之示意圖.....	7
圖 2.2	順滑層示意圖.....	7
圖 2.3	電力系統模型，(a)原始電力系統模型加上變壓器(b)戴維寧等效 .....	10
圖 3.1	$\Delta Q_1 = 0$ 時，狀態 $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 滿足 $\Omega(\mathbf{x}, t)$ 的區域，(a) $Q_1 = 9$ ，(b) $Q_1 = 11$ 。 .....	33
圖 3.2	$Q_1^0 = 10$ 時，狀態 $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 滿足 $\Omega(\mathbf{x}, t)$ 的區域，(a) $\Delta Q_1 = 0$ ，(b) $\Delta Q_1 = 1$ 。 .....	34
圖 3.3	$Q_1^0 = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，初始電壓誤差為正值，(a) $Q_1$ 值，(b) 狀態 $x_1$ ，(c) 狀態 $x_2$ ，(d) 狀態 $x_3$ ，(e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。 .....	35
圖 3.4	$Q_1^0 = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，初始電壓誤差為正值。(a) $Q_1$ 值，(b) 狀態 $x_1$ ，(c) 狀態 $x_2$ ，(d) 狀態 $x_3$ ，(e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。 .....	35
圖 3.5	$Q_1^0 = 11 + 0.2\sin(t)$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，(a) $Q_1$ 值，(b) 狀態 $x_1$ ，(c) 狀態 $x_2$ ，(d) 狀態 $x_3$ ，(e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。 .....	36
圖 3.6	$Q_1^0$ 在 11~11.5 變化， $\Delta Q_1 = 0$ ，(a) $Q_1$ 值，(b) 狀態 $x_1$ ，(c) 狀態 $x_2$ ，(d) 狀態 $x_3$ ，(e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。 .....	36

圖 3.7	$Q_1^0 = 9$ , $\Delta Q_1 = 0.3$ 時系統的模擬結果。(a) $Q_1$ 值, (b) 狀態 $x_1$ , (c) 狀態 $x_2$ , (d) 狀態 $x_3$ , (e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值), (f) 變壓器調節值。.....	37
圖 3.8	$Q_1^0 = 10$ , $\Delta Q_1 = -0.2 \sim 0.2$ 時系統的模擬結果。(a) $Q_1$ 值, (b) 狀態 $x_1$ , (c) 狀態 $x_2$ , (d) 狀態 $x_3$ , (e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值), (f) 變壓器調節值。.....	37
圖 3.9	$\varepsilon = 0.001$ , $\Delta Q_1 = 0$ , $Q_1 = Q_1^0$ 變動時系統平衡點對應的軌跡, (a) 狀態 $x_1$ , (b) 狀態 $x_2$ , (c) 狀態 $x_3$ , (d) 狀態 $x_4$ , (e) 變壓器調節值。.....	38
圖 3.10	$\varepsilon = 0.001$ , $Q_1^0 = 9$ , $\Delta Q_1$ 變動時系統平衡點對應的軌跡, (a) 狀態 $x_1$ , (b) 狀態 $x_2$ , (c) 狀態 $x_3$ , (d) 狀態 $x_4$ , (e) 變壓器調節值。.....	39
圖 3.11	$\varepsilon = 0.001$ , $Q_1^0 = 11$ , $\Delta Q_1$ 變動時系統平衡點對應的軌跡, (a) 狀態 $x_1$ , (b) 狀態 $x_2$ , (c) 狀態 $x_3$ , (d) 狀態 $x_4$ , (e) 變壓器調節值。.....	40
圖 3.12	狀態 $x_4$ 平衡點軌跡的局部放大圖, (a) 圖 3.9(d) 的局部放大圖, (b) 圖 3.10(d) 的局部放大圖, (c) 圖 3.11(d) 的局部放大圖。.....	41
圖 3.13	$Q_1^0 = 9$ , $\Delta Q_1 = 0.2$ 時系統的模擬結果。(a) $Q_1$ 值, (b) 狀態 $x_1$ , (c) 狀態 $x_2$ , (d) 狀態 $x_3$ , (e) 狀態 $x_4$ (負載電壓值), (f) 變壓器調節值。.....	42
圖 3.14	$Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、 初始狀態 $x_0 = [0.17386 \ 0 \ 0.00175 \ 0.53]$ 。(a) 以 VSC 控制的系統狀態圖, (b) 以 LQR 控制的系統狀態圖.....	43
圖 3.15	$Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、 初始狀態 $x_0 = [0.7 \ 0 \ 0.00175 \ 1]$ 。(a) 以 VSC 控制的系統狀態圖, (b) 以 LQR 控制的系統狀態圖.....	44

- 圖 3.16  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態  $x_0 = [0.17386 \ 2 \ 0.00175 \ 1]$ 。(a)以 VSC 控制的系統狀態圖，(b)以 LQR 控制的系統狀態圖.....45
- 圖 3.17  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態  $x_0 = [0.17386 \ 0 \ 0.7 \ 1]$ 。(a)以 VSC 控制的系統狀態圖，(b)以 LQR 控制的系統狀態圖.....46
- 圖 3.18 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 VSC 設計的控制律下，系統的表現，(a)狀態  $x_1$ ，(b)狀態  $x_2$ ，(c)狀態  $x_3$ ，(d)狀態  $x_4$ ，(e)u 值.....47
- 圖 3.19 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 LQR 設計的控制律下，系統的表現，(a)狀態  $x_1$ ，(b)狀態  $x_2$ ，(c)狀態  $x_3$ ，(d)狀態  $x_4$ ，(e)u 值.....47
- 圖 3.20 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |e(t)| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 VSC 設計的控制律下，系統的表現，(a)狀態  $x_1$ ，(b)狀態  $x_2$ ，(c)狀態  $x_3$ ，(d)狀態  $x_4$ ，(e)u 值.....48
- 圖 3.21 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |e(t)| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 LQR 設計的控制律下，系統的表現，(a)狀態  $x_1$ ，(b)狀態  $x_2$ ，(c)狀態  $x_3$ ，(d)狀態  $x_4$ ，(e)u 值.....48
- 圖 3.22 定義收斂時間  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0.3$  時，應用 VSC 設計的控制律下，系統的表現，(a)狀態  $x_1$ ，(b)狀態  $x_2$ ，(c)狀態  $x_3$ ，(d)狀態  $x_4$ ，(e)u 值.....49

圖 3.23 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0.3$  時，應用 LQR 設計的控制律下，系統的表現，(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值.....49

圖 4.1  $Q_1 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0.192$ ，初始狀態  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 7 \ 0.1 \ 0.7]$  在滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域內無法達成電壓調節的例子，(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e) 函數  $W(\mathbf{x}, t)$  值.....57

圖 4.2  $Q_1 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0.192$ ，初始狀態  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 7 \ 0.1 \ 0.7]$  在滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域內達成電壓調節的例子，(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e) 函數  $W(\mathbf{x}, t)$  值.....57

圖 4.3 (4.2)式示意圖。.....58

圖 4.4 藍色曲面是  $W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，黃色曲面是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，兩個黃色曲面間的區域是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) < 0$  的區域，兩個藍色曲面間的區域是  $W^*(\mathbf{x}, t) > 0$  的區域，在  $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.1$ ， $k_1 = 0.1$ ， $T = 0.0001$ ， $x_4 = 0.9$  時。.....58

圖 4.5 藍色曲面是  $W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，黃色曲面是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，兩個黃色曲面間的區域是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) < 0$  的區域，兩個藍色曲面間的區域是  $W^*(\mathbf{x}, t) > 0$  的區域，在  $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.1$ ， $k_1 = 0.1$ ， $T = 0.0001$ ， $x_4 = 0.95$  時。.....59

圖 4.6 藍色曲面是  $W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，黃色曲面是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，兩個藍色曲面間的區域是  $W^*(\mathbf{x}, t) > 0$  的區域，在  $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.1$ ， $k_1 = 0.1$ ， $T = 0.0001$ ， $x_4 = 1$  時。.....59

- 圖 4.7  $Q_1^0 = 10$  ,  $\Delta Q_1 = 0$  ,  $T = 0.0001$  , 初始電壓誤差為正值 , (a)  $Q_1$  值 , (b)狀態  $x_1$  , (c)狀態  $x_2$  , (d)狀態  $x_3$  , (e)狀態  $x_4$ (負載電壓值) , (f)變壓器調節值。 .....60
- 圖 4.8  $Q_1^0 = 10$  ,  $\Delta Q_1 = 0$  ,  $T = 0.0001$  , 初始電壓誤差為負值 , (a)  $Q_1$  值 , (b)狀態  $x_1$  , (c)狀態  $x_2$  , (d)狀態  $x_3$  , (e)狀態  $x_4$ (負載電壓值) , (f)變壓器調節值。 .....60
- 圖 4.9  $\Delta Q_1 = 0$  ,  $T = 0.0001$  ,  $Q_1^0$  在 9.5~10.5 之間變化 , (a)  $Q_1$  值 , (b)狀態  $x_1$  , (c)狀態  $x_2$  , (d)狀態  $x_3$  , (e)狀態  $x_4$ (負載電壓值) , (f)變壓器調節值。 .....61
- 圖 4.10  $Q_1^0 = 8$  ,  $\Delta Q_1 = 0.2$  ,  $T = 0.0001$  , (a)  $Q_1$  值 , (b)狀態  $x_1$  , (c)狀態  $x_2$  , (d)狀態  $x_3$  , (e)狀態  $x_4$ (負載電壓值) , (f)變壓器調節值。 .....61
- 圖 4.11  $Q_1^0 = 9$  ,  $T = 0.0001$  ,  $\Delta Q_1$  在 -0.1~0.1 之間隨機變動 , (a)  $Q_1$  值 , (b)狀態  $x_1$  , (c)狀態  $x_2$  , (d)狀態  $x_3$  , (e)狀態  $x_4$ (負載電壓值) , (f)變壓器調節值。 .....62
- 圖 4.12  $\varepsilon = 0.001$  ,  $T = 0.0001$  ,  $\Delta Q_1 = 0$  ,  $Q_1 = Q_1^0$  變動時系統平衡點對應的軌跡 , (a)狀態  $x_1$  , (b)狀態  $x_2$  , (c)狀態  $x_3$  , (d)狀態  $x_4$  , (e)變壓器調節值。 .....63
- 圖 4.13  $\varepsilon = 0.001$  ,  $T = 0.0001$  ,  $Q_1^0 = 10$  ,  $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡 , (a)狀態  $x_1$  , (b)狀態  $x_2$  , (c)狀態  $x_3$  , (d)狀態  $x_4$  , (e)變壓器調節值。 .....64
- 圖 4.14 狀態  $x_4$  平衡點軌跡的局部放大圖 , (a)圖 4.12(d)的局部放大圖 , (b)圖 4.13(d)的局部放大圖。 .....65

# 第一章

## 緒論

### 1.1 研究背景與動機



在現實中，幾乎所有實際的物理系統都是以非線性的方式呈現，線性系統只是對非線性系統的一種簡化或近似，或者說是非線性的一種特例，在許多情況下，線性理論無法解釋出非線性系統中複雜的物理現象。實際的機械系統、電子系統、通訊系統、自動控制系統、電力系統中都存在著各種非線性因素，如電場力、磁場力、電子元件的非線性特性等，因此實際的工程系統絕大多數都是非線性系統。雖然用線性系統理論來處理目前許多工程技術問題，在一定範圍內或許可以得到滿意的結果。但是，隨著科學技術的不斷發展，人們對於實際系統的分析要求日益精密且廣泛，因此，勢必得研究處理越來越多種不同的非線性系統。

近年來，高次多項式系統已逐漸引起大家的注意，例如文獻[1-3]。文獻[1] 利用一個自由度的磁浮系統(levitation system)，其系統形式為一個單輸入的二次多項式系統，以二階順滑模式控制(sliding mode control)設計控制律，使系統在某些

條件下可達到穩定的效果。文獻[2]對多輸入的高次多項式系統利用控制李亞普諾夫函數(Control Lyapunov Function)的理論探討使系統穩定的條件及設計對應之穩定控制律，但是其主要結果大都集中在單輸入之高次多項式系統，其所獲得的結果也成功的應用在穩定[1]所提出之磁浮系統。文獻[3]則是將[2]所獲得的結果推廣到多輸入的二次多項式系統，它不但探討了 CLF 存在的條件及穩定控制律的設計，並將能使系統穩定之控制律參數化(parameterize)。同時也探討了片段連續的穩定控制律之存在條件及設計。上述針對多項式系統的文獻，其控制目標都是使系統穩定，因此都假設非控系統(uncontrolled system)具有平衡點。此外，文獻[2]及[3]都不考慮模型誤差(model uncertainty)及外界干擾(external disturbance)。

在本論文中，我們將針對單輸入具有不確定因素之二次多項式系統在非控系統不存在平衡點的情況下，以可變結構控制(Variable Structure Control; VSC)理論來設計控制律，使系統達到穩健輸出追蹤(output tracking)的控制目的。採用可變結構控制技術的原因在於其具有響應快速、良好的暫態性能以及對於系統不確定因素與外在干擾具有良好抑制程度的穩健特性[5-7]。由於可變結構控制具有的良好特性，它已經被廣泛地應用在許多不同類型的控制問題[9-15]。在本論文中，我們也將就所獲得的結果應用於以變壓器控制之電力系統[8]之電壓調節問題上。此電力系統原始模型模型是由 Dobson 和 Chiang[21]所提出，系統模型中包含發電機、無限匯流排與非線性負載，並且系統會呈現有電壓崩潰的現象[16,17,20-21]，發生電壓崩潰現象的原因可歸納於電力系統操作在穩定邊界時，負載損耗增加所造成[17,22]，其電壓崩潰發生於鞍點分歧處(saddle node bifurcation)附近[21-22]。為了使系統能達到電壓調節(voltage regulation)的目的，藉由在原始系統加入一個變壓器(tap changer)[8]，利用變壓器的匝數比作為控制器輸入。當負載損耗有所變化時，藉由調整變壓器來達到電壓保持穩定值，避免電壓崩潰的發生。對於變壓器用於電力系統的效果，在文獻[19,23-25]中有被討論。在本論文中，我們將應用可變結構控制來設計以變壓器控制之電力系統的控

制律，達到電壓調節的功能。

## 1.2 論文架構

在第二章中，我們介紹非線性系統的可變結構控制，以及 LQR 控制律的設計方法，然後介紹利用 Dobson 和 Chiang[21]所提出的電力系統模型，在原始系統模型中加入一個變壓器[8]之後，得到的系統模型，接下來針對單輸入的二次多項式系統，系統相對階數為一階，以可變結構控制理論設計控制律方法，達到輸出追蹤的目的。第三章將可變結構控制應用於變壓器調節的電力系統，以電力系統的變壓器為控制輸入點，調整變壓器的匝數比來達到電壓調節的功能，並且比較以可變結構控制設計的控制律與 LQR 設計的控制律兩者的效能，然後對於系統的系統平衡點做分析。第四章針對此電力系統，提出改良型可變結構控制律，並且估計出使系統能夠達成電壓調節目的的初始狀態區域。最後，第五章提出本論文之結論及未來研究方向。



## 第二章

### 預備知識

#### 2.1 可變結構控制



可變結構控制(variable structure control, 簡稱 VSC)是一種不連續的狀態回授控制，在 1960 年代初期由前蘇聯科學家們所發展出一種非線性控制法則，由俄國人 Filippov 所律先提出。可變結構控制的優點是響應快速、良好的暫態性能以及對於系統不確定因素(uncertainties)與外在干擾(disturbances)具有良好抑制程度的穩健特性，再加上設計方法較容易，已成為最廣為人使用的控制方法之一。可變結構控制的特色是利用不連續的控制輸入，使系統在設定的轉換平面(Switching Plane)或稱之超平面(Hyperplane)或順滑平面(Sliding surface)上改變結構，而獲得所謂之滑動控制模式(Sliding Mode Control)。

VCS 是一種高速切換的回授控制(feedback control)，其回授方式可以是狀態回授(state feedback)或輸出回授(output feedback)。採用 VSC 可使系統具有較好的

系統穩健性(Robustness)，對於一些有不確定因素的系統而言，VSC 的高抗雜訊能力是一種不錯的控制方法。

設計可變結構控制器有兩個主要步驟：

步驟一：根據狀態選取適當的順滑平面，使得系統軌跡在順滑模態時能滑向控制目標點。

步驟二：設計適當的控制器，使得系統軌跡在有限時間內接觸到順滑平面產生順滑模態並且使得系統軌跡在順滑模態時能滑向控制目標點。

對於一般線性系統而言，順滑函數可以選取如下：

$$s(x) = cx \quad (2.1)$$

其中， $x$  表示系統的狀態變數。當系統在順滑平面  $s(x)=0$  之外時，應確保所有的軌跡在有限的持間內接觸到此順滑平面，這個過程稱為迫近模態，當系統進入此順滑平面後，應保證不再離開並且朝著平衡點  $x=0$  逼近，在這個順滑平面中的系統行為稱為順滑模態(Sliding mode)，圖 2.1 概略描繪出這兩個程序：系統狀態在有限的時間  $t_h$  內到達順滑平面，然後在往後的  $t > t_h$  時段，系統不再脫離此順滑平面，並且朝著平衡點  $x=0$  移動，最後達到  $x(\infty) \rightarrow 0$  的目標。

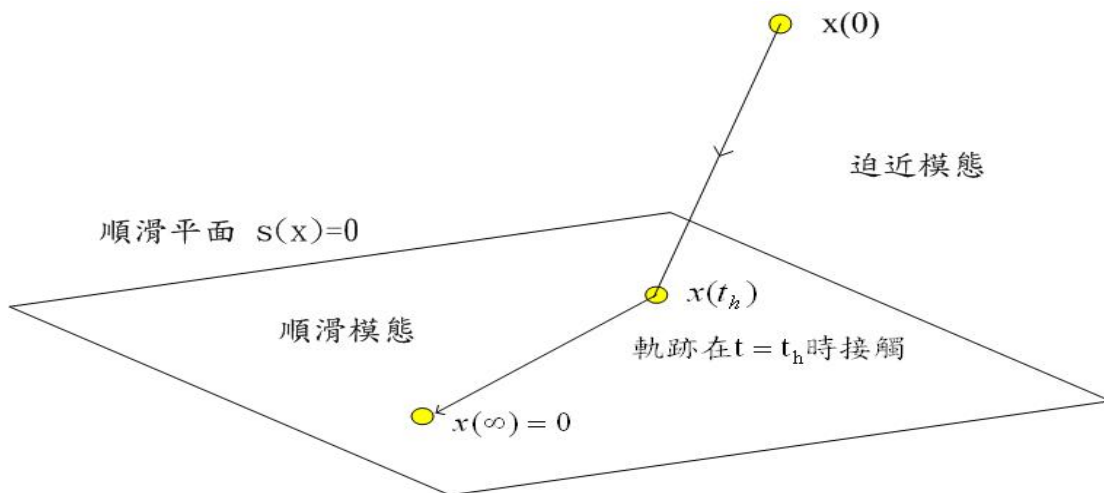


圖 2.1 順滑模態之產生

順滑平面的選取在 VSC 的設計上相當重要，而讓系統上順滑平面的條件就是使設計的控制器滿足迫近條件(reaching condition)：

$$s^T \dot{s} < -\sigma \|s\|, \quad \sigma > 0 \quad (2.2)$$

這裡利用 Lyapunov 原理來說明此條件如何保證系統在有限的時間內接觸到順滑模態，首先選取 Lyapunov 函數

$$V = s^2 \quad (2.3)$$

由於順華函數  $s$  對時間是一次可微的，因此

$$\dot{V} = 2s\dot{s} \quad (2.4)$$

當迫近條件(2.2)式成立時，將使得

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} < -2\sigma |s| = -2\sigma \sqrt{V} < 0 \quad (2.5)$$

顯然可得  $\dot{V} < 0$ ，故  $V$  真的是一個 Lyapunov 函數，呈現遞減收斂的趨勢，由於  $\sqrt{V} > 0$  和  $dt > 0$ ，進一步整理後可得

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} < -2\sigma dt \quad (2.6)$$

故  $0 \leq \sqrt{V(t)} < \sqrt{V(0)} - \sigma t$ ，也就是說

$$0 \leq \sqrt{V(t)} < 0 \quad \text{當} \quad t = \frac{\sqrt{V(0)}}{\sigma} = \text{有限值} \quad (2.7)$$

亦即  $V(t)$  必在時間  $t = \frac{\sqrt{V(0)}}{\sigma}$  之內收斂至 0，接觸到順滑面  $s=0$ 。因此在任一  $S$  鄰域之狀態起點，其軌跡必定在有限時間內趨近到順滑平面  $S$ ，且沿此平面滑動。當系統進入滑動模式，系統動態反應受控於順滑平面，但是，在滑行的過程中，狀態代表點因受到不連續控制之輸入影響，並非完全在順滑平面( $s(x)=0$ )上，而是在  $s(x)=0$  的鄰域來回變動，此狀況會導致控制器在高速切換時產生”切跳(Chattering)”的現象，這是我們所不願見到的現象。切跳現象輕則會影響系統的最終狀態(steady state)，重則會激發出一些系統潛在的未模式高頻部份(high frequency unmodeled parts)，將影響到系統整個控制的結果，導致系統的不穩定現象發生，在可變結構控制系統中，切跳現象是無法避免的。視控制輸入之不連續程度而定，切跳的大小也不一樣，要改善切跳所導致的負面影響，可以引入順

滑層的想法[4]，示意圖如圖 2.2 所示，將原來的符號函數(Sign Function)用飽和函數(Saturation Function)、磁滯函數(Hysteresis Function)或磁滯-飽和函數(Hysteresis Saturation Function)等方式取代，這些方法可應用於實際的系統中，對系統的切跳行為可獲得明顯有效的改善。

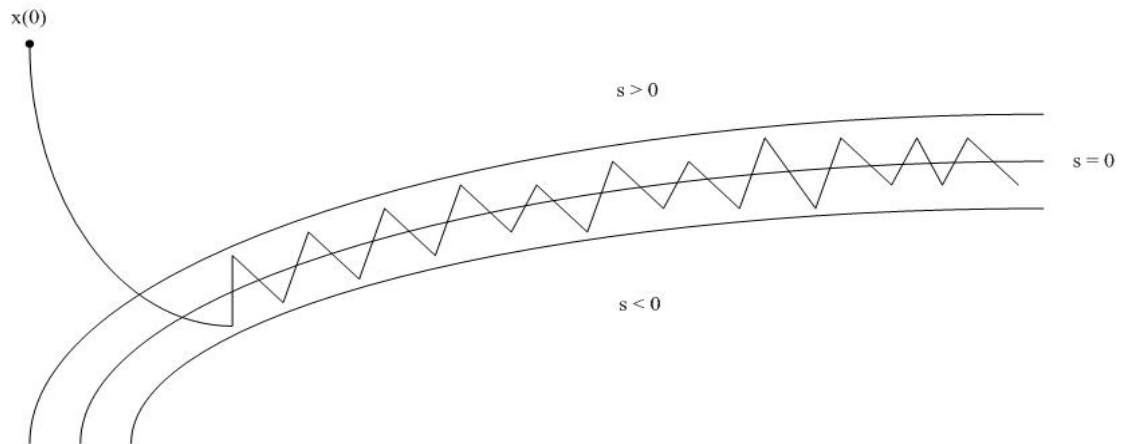


圖 2.2：順滑層



## 2.2 線性二次調節器 (Linear Quadratic Regulator)

最佳化控制理論(optima control theorem)[27-28]是以損耗最少”成本”的情況下，達到控制目標的一種控制方法，而線性最佳化控制(linear optima control)是最佳化控制的其中一種，若系統的狀態是以線性微分方程式表示，且成本是以二次函數表示，以二次的成本函數為依據所設計出來的線性最佳化控制律的方法稱為線性二次方法(Linear Quadratic method)，LQR 便是其中的一種。

考慮以下動態系統：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.8)$$

其中， $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  為系統矩陣(system matrix)， $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$  為控制矩陣， $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  為系統狀態變數， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^{m \times 1}$  為系統輸入，根據線性狀態回授理論， $\mathbf{u}(t)$  可表示為

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.9)$$

其中  $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  為回授增益矩陣(feedback gain matrix)使得如下的成本指標(cost function)達到最小值

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (2.10)$$

其中  $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  為半正定(positive semi-definite)之反應加權矩陣(response weighting matrix)， $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{m \times m}$  為正定(positive definite)之控制力加權矩陣(control force weighting matrix)。矩陣  $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$  數值的相對大小不同，所設計出來的控制律會使系統有不一樣的反應，相對較大的  $\mathbf{Q}$  值表示使系統提供較大的控制力，讓系統狀態盡快趨近於  $\mathbf{0}$ ，反之，相對較大的  $\mathbf{R}$  值表示優先考慮較少的控制成本付出。

根據線性最佳控制理論，我們可以在滿足忽略外力之狀態方程式(2.8)式條件下，求得使  $J$  為極小的回授增益矩陣如下

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.11)$$

其中  $\mathbf{P}$  必須滿足下式之 Riccati 矩陣方程式[27-28]

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.12)$$

### 2.3 電力系統模型

本節中，我們主要是研究 Dobson 和 Chiang [21] 的電力系統數學模型。利用 Dobson 和 Chiang 的模型，並且在原始模型中加入一個變壓器(tap changer)[8]，以變壓器的匝數比作為控制器輸入，達到電壓調節的目的。

在電力系統模型中，主要包含了無限匯流排、非線性負載、變壓器、負載平衡電容與發電機，其模型描述可以分為負載模型與電力系統模型兩大部分，其描述如下：

負載模型：非線性負載模型的表示是採用於 Walve[29]，並且在[21]將其化簡，其非線性模型是描述在感應馬達動態與 PQ 負載在並聯情況之下。而馬達與 PQ 負載所組成的非線性模型，表示如下：

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{K}_{pw} \dot{\delta} + \mathbf{K}_{pv} (\mathbf{V} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{V}}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{K}_{qw} \dot{\delta} + \mathbf{K}_{qv} \mathbf{V} + \mathbf{K}_{qv2} \mathbf{V}^2 \quad (2.14)$$

在此， $\mathbf{P}_0$ 與 $\mathbf{Q}_0$ 分別代表馬達中所消耗的有效功率與無效功率， $\mathbf{P}_1$ 與 $\mathbf{Q}_1$ 是表示為 PQ 負載的消耗功率。

電力系統模型：原始模型中加入變壓器的圖形表示於圖 2.3(a)。在模型中，發電機的動態方程式可利用搖擺方程式(swing equation)獲得，表示如下：

$$M\ddot{\delta}_m = -d_m\omega + P_m + E_m V Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin\theta_m \quad (2.15)$$

在此， $M$ 、 $d_m$ 與 $P_m$ 分別表示發電機的慣量、阻尼與機械功率。在模型中，包含一個負載平衡電容 $C$ ，來使電壓能提升到標么值為1.0的附近。為了方便使用，我們利用戴維寧等效將 $C$ 、 $Y_0$ 、 $E_0$ 化簡，其表示如下：

$$E'_0 = E_0 / \left(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos\theta_0\right)^{1/2}$$

$$Y'_0 = Y_0 \left(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos\theta_0\right)^{1/2}$$

$$\theta'_0 = \theta_0 + \arctan\left\{\frac{C Y_0^{-1} \sin\theta_0}{1 - C Y_0^{-1} \cos\theta_0}\right\}$$

明顯地，利用戴維寧等效結果 $E'_0 Y'_0$ 與 $E_0 Y_0$ 是相同的，其等效圖形表示於圖2.3(b)。

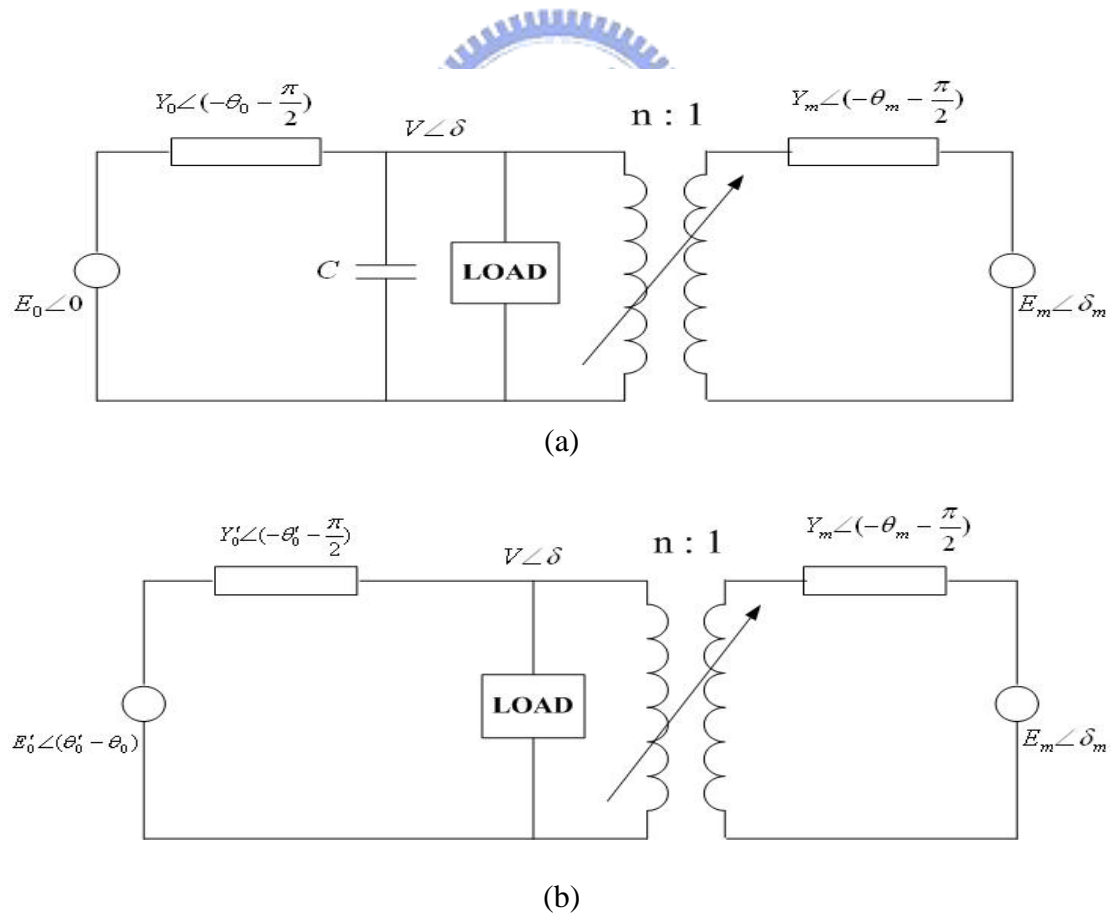


圖 2.3：電力系統模型(a)原始電力系統模型加上變壓器(b)戴維寧等效

計算其網路中所消耗功率，在網路中無效功率損耗與有效功率損耗可以表示

如下：

$$P(\delta_m, \delta, V) = E'_0 Y'_0 V \sin(\delta + \theta_0) - \frac{1}{n} E_m Y_m V \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + \left( Y'_0 \sin \theta'_0 + \frac{1}{n^2} Y_m \sin \theta_m \right) V^2 \quad (2.16)$$

$$Q(\delta_m, \delta, V) = E'_0 Y'_0 V \cos(\delta + \theta_0) + \frac{1}{n} E_m Y_m V \cos(\delta - \delta_m - \theta_m) - \left( Y'_0 \cos \theta'_0 + \frac{1}{n^2} Y_m \cos \theta_m \right) V^2 \quad (2.17)$$

由(2.13)-(2.15)以及(2.16)-(2.17)，我們可以得到電力系統的動態方程式如下：

$$\dot{\delta}_m = \omega \quad (2.18)$$

$$M \dot{\omega} = -d_m \omega + P_m + \frac{1}{n} E_m Y_m V \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin \theta_m \quad (2.19)$$

$$K_{qw} \dot{\delta} = -K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1 \quad (2.20)$$

$$K_{qw} K_{pv} \dot{V} = K_{pw} K_{qv2} V^2 + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{qw} (P(\delta_m, \delta, V) - P_0 - P_1) - K_{pw} (Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1) \quad (2.21)$$

我們的系統參數是採用於[21]，其參數值如下：

負載參數

$$K_{pw} = 0.4, K_{pv} = 0.3, K_{qw} = -0.03, K_{qv} = -2.8, K_{qv2} = 2.1, T = 8.5, P_0 = 0.6,$$

$$Q_0 = 1.3, P_1 = 0$$

網路與發電機參數

$$Y_0 = 20.0, \theta_0 = -5.0, E_0 = 1.0, C = 12.0, Y'_0 = 8.0, \theta'_0 = -12.0, E'_0 = 2.5,$$

$$Y_m = 5.0, \theta_m = -5.0, E_m = 1.0, P_m = 1.0, d_m = 0.05, M = 0.3$$

全部的參數以標么值(per unit value)為單位，其角度以度數表示。

我們令  $x_1 = \delta_m$ ， $x_2 = \omega$ ， $x_3 = \delta$ ， $x_4 = V$ ，由(2.18)-(2.21)，我們可將動態方程式表示為



$$\dot{x}_1 = x_2 + d_1 \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_2 = 3.3333(0.5642 - 0.05x_2 + (5x_4n^{-1}\sin(0.0873 - x_1 + x_3))) + d_2 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & -33.3333(-1.3 - Q_1 + 2.8x_4 - x_4^2(10.0239 + 4.981n^{-2}) \\ & + 20x_4\cos(0.0873 - x_3) + (5x_4n^{-1}\cos(0.0873 + x_1 - x_3))) + d_3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -13.0719(-1.111x_4 + 0.84x_4^2 - 0.4(-1.3 - Q_1 - x_4^2(7.9239 \\ & + 4.981n^{-2}) + 20x_4\cos(0.0873 - x_3) + 5x_4n^{-1}\cos(0.0873 + x_1 - x_3)) \\ & - 0.03(-0.6 + x_4^2(-1.7431 - 0.4358n^{-2}) + 20x_4\sin(0.0873 - x_3) \\ & + 5x_4n^{-1}\sin(0.0873 + x_1 - x_3))) + d_4 \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)^T$  代表系統可能具有的不確定因素或外在干擾。有兩種類型的  $\mathbf{d}$  在文獻[21,30]中提到，其中一種起因於負載的變動，也就是  $Q_1$  隨著電力的需求所產生的變動；另一種則來自於動態感應馬達模型的參數。

## 2.4 二次多項式系統之穩健輸出追蹤

近年來，高次多項式系統的穩定性研究及應用已受到廣泛的注意與討論，例如文獻[1-3]。上述針對多項式系統的文獻，其控制目標都是使系統穩定，因此都假設非控系統 (uncontrolled system) 具有平衡點。此外，文獻[2]及[3]都不考慮模型誤差(model uncertainty)及外界干擾(external disturbance)。在本節中，我們將針對單輸入具有不確定因素之二次多項式系統在非控系統不存在平衡點的情況下，以 VSC 的控制理論設計出適合的控制律，達到輸出追蹤(output tracking)的目的。

考慮一個非線性系統如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\mathbf{u}^2 + \mathbf{d} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

其中  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  為系統狀態變數， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$  為控制輸入， $\mathbf{y} \in \mathcal{R}$  為控制輸出及  $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$  為模型的不確定因素或外部雜訊。假設  $\mathbf{f}(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_1(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_2(\cdot)$  及  $\mathbf{h}(\cdot)$  為平滑向量場。因為動態方程式(2.26)中有  $\mathbf{u}^2$  項，我們可以得知此動態方程式不是非線性仿射系統 (nonlinear affine system)。在本章中，我們將利用可變結構控制設計出一個控制器  $\mathbf{u}$ ，使得系統輸出即使在有不確定因素與外部雜訊干擾的情況下，依然可以達到所要的輸出值  $y_d(t)$ ，完成  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  當  $t \rightarrow \infty$ 。

從第二章我們可以知道 VSC 的設計可以分成兩個步驟，第一個步驟是選取順滑平面，使系統軌跡在順滑模態的時候，能滑向控制目標。第二個步驟是設計適當的控制器，使系統軌跡在有限時間內抵達順滑平面，產生順滑模態並滑向控制目標。定義輸出誤差為

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \quad (2.28)$$

控制目的是利用 VSC 設計出控制器，使得  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ 。在第一步驟中我們選定順滑平面為

$$s(t) = e(t) = 0 \quad (2.29)$$

若系統軌跡到達順滑平面並且維持在順滑平面上，則輸出軌跡追蹤就可以達成，因此控制器必須有到達順滑平面與保持在順滑平面的控制能量。在第二步驟中，我們選擇控制器為

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re} \quad (2.30)$$

其中  $\mathbf{u}^{re}$  負責在有限時間內，使系統狀態到達順滑平面， $\mathbf{u}^{eq}$  負責使系統狀態維持在順滑平面中。從(2.26)-(2.29)式我們可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \nabla h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla h \cdot \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \nabla h \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\mathbf{u}^2 + \nabla h \cdot \mathbf{d} - \dot{y}_d(t) \\ &= a\mathbf{u}^2 + b\mathbf{u} + c + \nabla h \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.31)$$

其中  $\nabla h$  為  $h(\mathbf{x})$  的梯度向量 (gradient vector)， $a = a(\mathbf{x}) = \nabla h \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ ， $b = b(\mathbf{x}) = \nabla h \cdot \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ ， $c = c(\mathbf{x}) = \nabla h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dot{y}_d(t)$ ，並且我們利用下面的假設

假設 2.1 在控制期間， $a = (\nabla h \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{x})) \neq 0$

假設 2.2 存在一個非負函數  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ，且  $|\nabla h \cdot \mathbf{d}| \leq \rho(\mathbf{x}, t)$

假設 2.1 意味著系統(2.26)-(2.27)的相對階數(relative degree)為 1，並且  $\mathbf{u}^2$  項永遠不會消失，也就是我們將要探討的系統模型。除此之外，我們也藉由假設 2.2 來限制  $\mathbf{d}$  的上限。

在(2.31)式中，等號的右邊是  $\mathbf{u}$  的二次多項式形式，且一般來說  $\mathbf{d}$  是無法預測的，定義  $\Delta$  為此二次多項式的判別式，如下所示

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (2.32)$$

在  $\Delta \leq 0$  時，無論  $\mathbf{u}$  輸入值為何， $\dot{s}(t)$  將無法改變符號，也就是，若系統狀態位於  $s\dot{s} \geq 0$  且  $s \neq 0$  的狀況時，系統狀態將無法到達順滑平面上。由(2.28)式與(2.29)式可知道，到達順滑平面也就是達成了輸出追蹤的目標，所以當  $\Delta \leq 0$  時，系統狀態無法到達順滑平面，也就無法完成輸出追蹤的目標。因此我們將對  $\Delta > 0$  的情況下進行討論。

為了保持系統狀態位於順滑平面，選擇  $u^{eq}$  滿足  $\dot{s}(t) = 0$ ，根據等效控制原理可以得到

$$\dot{s}(t) = a(u^{eq})^2 + bu^{eq} + c + \nabla h \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (2.33)$$

一般來說  $\mathbf{d}$  是無法預測的，因此由上式可得

$$u^{eq} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2.34)$$

滿足(2.33)式的  $u^{eq}$  有兩個，在此我們先選取

$$u^{eq} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2.35)$$

進行討論。利用(2.30)、(2.31)及(2.35)，我們可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= a(u^{eq} + u^{re})^2 + b(u^{eq} + u^{re}) + c + \nabla h \cdot \mathbf{d} \\ &= a(u^{re})^2 + 2au^{eq}u^{re} + bu^{re} + \nabla h \cdot \mathbf{d} \\ &= a(u^{re})^2 - \sqrt{\Delta}u^{re} + \nabla h \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.36)$$

由(2.36)式可得

$$s(t)\dot{s}(t) = \{a(u^{re})^2 - \sqrt{\Delta}u^{re} + \nabla h \cdot \mathbf{d}\}s(t) \quad (2.37)$$

在此，我們選取  $u^{re}$  為

$$u^{re} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \text{sgn}(s(t)) \quad (2.38)$$

為了在有限時間內使系統狀態到達順滑平面，系統必須滿足迫近條件

$$s(t)\dot{s}(t) \leq -\eta |s(t)|, \quad \eta > 0 \quad (2.39)$$

其中  $\eta$  為正數，我們利用下面的假設

假設 2.3 函數  $\frac{\Delta}{4 \cdot |a|} - \rho(\mathbf{x}, t)$  為正值。並且存在一個正數  $\eta$ ，使得在控制期間

$$W(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta}{4 \cdot |a|} - \rho(\mathbf{x}, t) - \eta \geq 0 \quad (2.40)$$

假設 2.3 意味著(2.31)式拋物線極值的絕對值必須大於不確定因素或外在干

擾的上限值  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ，也就是  $\Delta$  不會因  $\mathbf{d}$  的大小變動導致  $\Delta \leq 0$ 。由(2.37)及(2.38)及假設 2.3，我們可以得到

$$\begin{aligned} s(t)\dot{s}(t) &\leq \left( -\frac{\Delta}{2 \cdot |a|} + \frac{\Delta}{4 \cdot |a|} + \rho(\mathbf{x}, t) \right) |s(t)| \\ &= -\left( \frac{\Delta}{4 \cdot |a|} - \rho(\mathbf{x}, t) \right) |s(t)| \\ &\leq -\eta |s(t)| \end{aligned} \quad (2.41)$$

因此可知系統將滿足迫近條件，在有限的時間內到達順滑平面。由上述的討論我們可以得到控制律為

$$\mathbf{u} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (2.42)$$

若我們在(2.34)式選擇  $u^{eq}$  為正號時，由上述類似的推導可以得到控制律為

$$\mathbf{u} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (2.43)$$

因此，我們有下列的結果

**定理 2.1** 若系統(2.26)-(2.27)滿足假設 2.1、2.2 及 2.3，控制律選定為(2.42)或(2.43)，則系統將可達成輸出追蹤  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  之性能。

## 第三章

# 應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究



在本章中我們將應用第 2.4 節中設計的 VSC 控制律於 Dobson 和 Chiang [21] 的電力系統模型，在原始模型中加入一個變壓器[8]，如 2.3 節所介紹的電力系統模型，並且以變壓器為控制輸入點，藉由調整變壓器的匝數比，使系統的負載電壓能夠穩定地保持在我們希望的電壓值，以達到電壓調節的功能。在 3.1 節中，我們將 2.4 節中針對單輸入的二次多項式系統設計控制律的方法應用於電力系統中，設計出適合的控制律，應用於電力系統達到電壓調節的目的。在 3.2 節中，針對系統負載無效功率的情況，討論系統可能達到電壓調節的狀態範圍，並分析模擬結果與系統應用可變結構控制時是否存在穩定的平衡點。在 3.3 節中，我們把應用可變結構控制的系統線性化，並應用 LQR 設計出另一個控制律來與可變結構設計的控制律做一些效能上的比較。

### 3.1 控制律設計

在 2.3 節中，將 Dobson 和 Chiang [21] 的電力系統模型加入一個變壓器[8]，經過參數的選取與整理得到(2.22)-(2.25)式，我們將負載  $Q_1$  以  $Q_1 = Q_1^0 + \Delta Q_1$  來表示，其中  $Q_1^0$  為選取的標稱值(nominal value)， $\Delta Q_1$  是負載隨需求所產生的變動值。為了方便討論，在本論文中，我們假設  $\mathbf{d}$  只來自於  $Q_1$  的變動，並且限制  $\Delta Q_1$  的變動值不超過  $Q_1^0$  的百分之十，由(2.22)-(2.25)可知

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.3333\Delta Q_1 \\ -5.2288\Delta Q_1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

定義  $u = \frac{1}{n}$ ，並且經過整理可以得到

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = 1.8807 - 0.1667x_2 + [16.6667x_4 \sin(0.0873 - x_1 + x_3)]u \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & 43.3333 - 93.3333x_4 + 334.1297x_4^2 - 666.6667x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ & + 33.3333(Q_1^0 + \Delta Q_1) - [166.6667x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3)]u \\ & + 166.0325x_4^2 u^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ & + 7.8431x_4 \sin(0.0873 - x_3) - 5.2288(Q_1^0 + \Delta Q_1) \\ & + [26.1438x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3) + 1.9608x_4 \sin(0.0873 + x_1 - x_3)]u \\ & - 26.2152x_4^2 u^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

我們可將(3.2)-(3.5)表示成如下的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{d} \quad (3.6)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}, Q_1^0) \\ f_2(\mathbf{x}, Q_1^0) \\ f_3(\mathbf{x}, Q_1^0) \\ f_4(\mathbf{x}, Q_1^0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{1,1}(\mathbf{x}) \\ g_{1,2}(\mathbf{x}) \\ g_{1,3}(\mathbf{x}) \\ g_{1,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{2,1}(\mathbf{x}) \\ g_{2,2}(\mathbf{x}) \\ g_{2,3}(\mathbf{x}) \\ g_{2,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$f_1(\mathbf{x}, Q_1^0) = x_2$$

$$f_2(\mathbf{x}, Q_1^0) = 1.8807 - 0.1667x_2$$

$$f_3(\mathbf{x}, Q_1^0) = 43.3333 - 93.3333x_4 + 334.1297x_4^2 - 666.6667x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ + 33.3333Q_1^0$$

$$f_4(\mathbf{x}, Q_1^0) = -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ + 7.8431x_4 \sin(0.0873 - x_3) - 5.2288Q_1^0$$

$$g_{1,1}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{1,2}(\mathbf{x}) = 16.6667x_4 \sin(0.0873 - x_1 + x_3)$$

$$g_{1,3}(\mathbf{x}) = -166.6667x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3)$$

$$g_{1,4}(\mathbf{x}) = 26.1438x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3) + 1.9608x_4 \sin(0.0873 + x_1 - x_3)$$

$$g_{2,1}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{2,2}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{2,3}(\mathbf{x}) = 166.0325x_4^2$$

$$g_{2,4}(\mathbf{x}) = -26.2152x_4^2$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = 33.3333\Delta Q_1$$



$$d_4 = -5.2288\Delta Q_1$$

在此，我們選擇系統電壓為系統輸出

$$y = h(\mathbf{x}) = x_4 \quad (3.7)$$

我們定義電壓調節值  $y_d(t) \equiv 1$ 。由(2.28)、(2.29)及(3.7)可得到順滑平面為

$$s(t) = x_4 - 1 \quad (3.8)$$

並且可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{x}_4 \\ &= f_4(\mathbf{x}, Q_1^0) + g_{1,4}(\mathbf{x})u + g_{2,4}(\mathbf{x})u^2 + d_4 \\ &= au^2 + bu + c + d_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $a = g_{2,4}(\mathbf{x})$ ， $b = g_{1,4}(\mathbf{x})$ ， $c = f_4(\mathbf{x}, Q_1^0)$ 。一般來說  $\mathbf{d}$  是無法預測的，定義  $\Delta$  為二次多項式(3.9)式的判別式，

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (3.10)$$

由(3.6)式可以知道  $a = -26.2152x_4^2$ ，由  $a$  的形式可知道在控制期間  $a$  會小於 0，滿足假設 3.1，除非電壓崩潰的情況。由  $|\nabla h \cdot \mathbf{d}| = |d_4| \leq 5.2288|\Delta Q_1| = \rho(\mathbf{x}, t)$  我們可知道若存在某個正數  $\eta$ ，使控制期間  $\frac{\Delta}{4 \cdot |a|} - \rho(\mathbf{x}, t) - \eta > 0$ ，則可以滿足假設 3.2-3.3。因此，根據定理 3.1，有兩種控制律的設計方法可以達到控制目的，為了方便說明，在此我們選定控制律為

$$u = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \cdot \text{sgn}(s(t)) \quad (3.11)$$

### 3.2 模擬結果

由(3.10)式，我們可以知道電力系統中

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= x_4^2 \left\{ [26.1438 \cos(0.0873 + x_1 - x_3) + 1.9608 \sin(0.0873 + x_1 - x_3)]^2 \right. \\ &\quad + 104.8608 \left[ -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4 \cos(0.0873 - x_3) \right. \\ &\quad \left. \left. + 7.8431x_4 \sin(0.0873 - x_3) - 5.2288Q_1^0 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

由定理 3.1 可知道，系統要達成輸出電壓調節，必須滿足假設 2.1-2.3，其中假設 2.3 意味著(3.9)式拋物線頂點的高度必須大於不確定因素或外在干擾的上限值  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ，也就是  $\Delta$  不會因  $\mathbf{d}$  的大小變動導致  $\Delta \leq 0$ 。我們由假設 2.2 與(3.6)式可以得到  $|\nabla h \cdot \mathbf{d}| = |-5.2288\Delta Q_1| \leq 5.2288|\Delta Q_1|$ ，若設定假設 2.3 中之  $\eta = 0$ ，使不等式(2.40)變成如下的形式

$$W(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta}{4 \cdot |a|} - 5.2288|\Delta Q_1| > 0 \quad (3.13)$$

由(3.2)-(3.7)及(3.13)式的形式，我們可以知道滿足(3.13)式將只受到  $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 、 $Q_1^0$  及  $\Delta Q_1$  值的影響，因此，若選定  $Q_1^0$ ， $\Delta Q_1$  值不同，則滿足(3.13)式的狀態變數  $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$  的區域也會不同。定義滿足(3.13)式的區域為  $\Omega(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{x} \mid W(\mathbf{x}, t) > 0\}$ ，

選定  $Q_1^0$  及  $\Delta Q_1$  值後，可以在空間中畫出滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域，如圖 3.1-3.2 所示。

圖 3.1(a)是  $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$  時，狀態  $x_1$ 、 $x_3$  與  $x_4$  滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域，因為在  $x_1$  方向上，圖形是週期性的，因此我們擷取  $x_1 = -\pi \sim \pi$  的區域來表示。圖 3.1(b)是  $Q_1^0 = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$  時，狀態  $x_1$ 、 $x_3$  與  $x_4$  滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域。由圖 3.1 可以觀察

到，當  $Q_1^0$  值愈大時，狀態滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域愈小，也就是系統狀態滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域會愈小。圖 3.2(a) 是  $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0$  時，狀態  $x_1$ 、 $x_3$  與  $x_4$  滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域。圖 3.2(b) 是  $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 1$  時，狀態  $x_1$ 、 $x_3$  與  $x_4$  滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域。由圖 3.2 可以觀察到，當  $\Delta Q_1$  值愈大時，狀態滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域愈小，也就是系統狀態可能滿足假設 2.3 的區域會愈小。

在電力系統電壓調節中，為了避免高頻切換的產生，我們將控制律(3.11)式中的  $\text{sgn}(s(t))$  以  $\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\varepsilon}\right)$  取代，則控制律可表示為

$$u = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \cdot \text{sat}\left(\frac{s(t)}{\varepsilon}\right) \quad (3.14)$$

接下來我們取  $\varepsilon = 0.01$  進行數值模擬，選定  $Q_1^0 = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$  時，初始狀態滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域進行模擬，觀察是否可以達到電壓調節的功能。在圖 3.3 中，我們選定初始狀態為  $x_0 = [0.6, 0.5, 0.4, 1.4]$ ，此模擬主要是觀察初始電壓誤差為正值時 ( $s(t) > 0$ )，電壓的調節效果。圖 3.3(a) 是控制過程中的  $Q_1$  值，圖 3.3(b)-3.3(e) 分別是四個狀態的變化情形，圖 3.3(f) 是控制過程中變壓器所對應的變化顯示。圖 3.3(b)-3.3(d) 可以看出狀態  $x_1 \sim x_3$  的變化隨時間的增加震盪逐漸減小，最後收斂於定值，由圖 3.3(e) 可以看出電壓值由 1.4 收斂於 1。在圖 3.4 中，我們選定初始狀態  $x_0 = [0.5, 0.2, 0.1, 0.9]$ ，此模擬主要是觀察初始電壓誤差為負值時 ( $s(t) < 0$ ) 電壓的調節效果，由圖 3.4(e) 可以看出電壓值由 0.9 收斂於 1，完成電壓調節的目的。接下來的模擬中，我們將觀察  $Q_1^0$  隨著時間改變時，系統動態的變化情形。圖 3.5 中，我們設定  $Q_1 = 11 + 0.2\sin(t)$ ，初始狀態  $x_0 = [0.5, 0.2, 0.1, 0.9]$ ，由圖 3.5(b)-(d) 中，我們觀察到狀態  $x_1 \sim x_3$  收斂於某一範圍中，有著微小的變化，這是因為  $Q_1^0$  隨時間改變時，使得平衡點也隨著時間改變，由圖 3.5(e) 可以觀察到電壓值均能收斂到我們希望的電壓值。在圖 3.6 中，我們使  $Q_1^0$  在  $t = 3 \sim 3.5$  時，由 11 上升到 11.5，當  $t = 6.5 \sim 7$  時，再由 11.5 下降到 11，選定系統的初始狀態為  $x_0 = [0.3, 0.2, 0.1, 1.3]$ ，由圖 3.6(e) 可以觀察到系統

電壓值都能收斂到我們希望的電壓值，也就是電壓調節的目的都能順利達成。

接下來我們針對不一樣的  $Q_1^0$  值及  $\Delta Q_1 \neq 0$  時進行模擬。首先選擇  $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ ，初始狀態  $x_0 = [0.8, 0.5, 0.2, 1.3]$ ，模擬結果如圖 3.7 所示，圖 3.7(a) 是控制過程中的  $Q_1$  值，圖 3.7(b)-3.7(e) 分別是四個狀態的變化情形，圖 3.7(f) 是控制過程中變壓器所對應的變化顯示，由圖 3.7(e) 可以觀察到系統負載電壓值都能收斂到我們希望的電壓值。接下來，我們考慮  $\Delta Q_1$  會隨著時間變動的情況，選定  $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1$  在  $-0.2 \sim 0.2$  之間隨機變動，初始狀態  $x_0 = [0.1, 0.2, 0.1, 1.1]$ ，模擬結果如圖 3.8 所示，由圖 3.8(e) 可以看出系統負載電壓仍然可以維持在我們希望的地方。由以上的模擬結果，我們可以知道即使系統在具有不確定因素的情況下，我們設計的控制律仍然可以達成電壓調節的功能，並且可以得到以下結果

**定理 3.1** 若系統(3.6)-(3.7)為最小相位系統，並且滿足假設 2.1、2.2 及 2.3，在  $\Delta Q_1$  為某個常數時，控制律選定為(3.11)，系統將完成輸出電壓調節的功能，並且使狀態收斂至平衡點。

由於我們的控制目的是希望使負載電壓  $x_4$  穩定於 1，而為了驗證閉迴路系統在  $x_4 = 1$  時存在穩定的平衡點，我們將系統零點動態(zero dynamics)進行線性化分析。為了方便說明，我們選定  $Q_1^0 = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.1$  時，此時經由“MATLAB”可以計算出系統的平衡點為  $x_e = [0.1858, 0, 0.0034]$ ，令  $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3]$ ，其中

$$\hat{x}_1 = x_1 - 0.1858$$

$$\hat{x}_2 = x_2 - 0$$

$$\hat{x}_3 = x_3 - 0.0034$$

將系統(3.2)-(3.4)對平衡點進行線性化，可以得到

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -19.6892 & -0.1667 & 19.649 \\ 14.3695 & 0 & -64.1753 \end{bmatrix}$$

其特徵值分別為  $-64.1067$  及  $-0.1176 \pm 3.9105i$ ，實部都在左半平面，因此可知道此平衡點為穩定的平衡點。

接下來，我們將探討系統滿足假設 2.1-2.3 的情況下，系統對應不同  $Q_1$  值的平衡點軌跡，由圖 3.5 可以發現當  $Q_1^0$  隨著時間變動時，狀態  $x_1$ 、 $x_2$  及  $x_3$  會收斂於某一範圍中，有著微小的變化，這是因為  $Q_1^0$  隨時間改變時，使得平衡點也隨著時間改變。為了觀察平衡點因為  $Q_1$  改變的時候所產生的變化，我們利用”AUTO”這套軟體來分析平衡點的軌跡，以及何時會發生鞍點分歧 (saddle node bifurcation)。一般認為電壓崩潰的發生是由於系統平衡點產生鞍點分歧，也就是負載超過電力系統所能提供的範圍而不再存在有平衡解，以致於平衡點整個發散掉。接下來，我們將利用”AUTO”這套軟體分析系統的平衡點軌跡。由於  $\text{sgn}(s(t))$  與  $\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\varepsilon}\right)$  都是不連續的函數，”AUTO”無法適用，為了能夠分析系統的平衡點軌跡，我們將控制律(3.14)式中的  $\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\varepsilon}\right)$  函數以連續的函數

$$\text{sigmoid}(s(t), \varepsilon) = \frac{s(t)}{|s(t)| + \varepsilon} \quad (3.15)$$

取代，則控制律可以改寫成如下的形式

$$u = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \cdot \text{sigmoid}(s(t), \varepsilon) \quad (3.16)$$

設定  $\varepsilon = 0.001$ ，利用 AUTO 這套軟體所畫出來的平衡點軌跡如圖 3.9-3.11 所示。其中圖 3.9 是  $\Delta Q_1 = 0$ ， $Q_1$  與系統平衡點對應的軌跡。圖 3.10 是  $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡。圖 3.11 是  $Q_1^0 = 11$ ， $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡。由圖 3.9-3.11 可以觀察到在對應不同的  $Q_1$  時，系統平衡點移動的軌

跡，圖中實線代表的是穩定的平衡點，虛線代表的是不穩定的平衡點，”x”代表的是模擬中發現的鞍點分歧。觀察圖 3.9 可知道在  $\Delta Q_1 = 0$  的情況下，系統能夠容忍最大的  $Q_1$  值大約是 12.4 左右，圖 3.9(a)-(d) 式四個狀態平衡點所對應的軌跡圖，3.9(e) 是對應的變壓器調節值，其值會隨著  $Q_1$  與平衡點變動，使負載電壓維持在 1 的地方。由圖 3.9(d) 可以看出系統電壓在  $\Delta Q_1 = 0$  的時候，狀態  $x_4$  穩定平衡點都維持在 1 的位置。觀察圖 3.10 和圖 3.11，可以知道系統能夠承受最大的  $Q_1$  大約是  $Q_1^0 + \Delta Q_1 = 12.4$ ，但是隨著  $\Delta Q_1$  值增加，狀態  $x_4$  的平衡點會由 1 往下略為遞減，和我們所希望的電壓值產生誤差，這是因為我們將控制律(3.11)中的  $\text{sgn}(s(t))$  以  $\text{sigmoid}(s(t), \varepsilon)$  取代所導致，當負載電壓越接近 1 時，

$u^{\text{rc}} = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \right) \text{sigmoid}(s(t), \varepsilon)$  的控制力道會越弱，但是都能夠將負載電壓維持在非

常接近 1 的地方。我們將圖 3.9(d)、3.10(d) 及 3.11(d) 在鞍點分岔附近的軌跡放大分別如圖 3.12(a)、3.12(b) 及 3.12(c) 所示，由圖中可以看出狀態  $x_4$  的軌跡都是連續的。



我們藉由下面這個例子來驗證若  $\Delta Q_1$  為某個常數值時，系統狀態是否可以收斂到平衡點，滿足定理 3.1。選定  $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ，此時系統平衡點  $\hat{x} = [0.176, 0, 0.002, 1]$ ，選擇初始狀態  $x_0 = [0.3, 0.3, 0.4, 1.2]$  進行模擬，模擬結果如圖 3.13 所示。由圖 3.13 我們可以觀察到系統可以達成電壓調節的功能，並且使系統狀態收斂至平衡點。

### 3.3 LQR 與 VSC 兩種控制律的比較

由 3.2 節的模擬結果，我們可以知道以 VSC 設計的控制律具有反應快速以及優異的穩健性等優點，但是在能量損耗方面的表現如何呢？是否在電壓調節的過程中會損耗很多的能量？因此在本節中，我們在  $Q_1^0$  為某個固定值時，找出應用 VSC 控制的電力系統的平衡點，將系統線性化，利用 LQR 設計控制律來與 VSC 設計的控制律做一些比較，以更加了解 VSC 的控制律優異與不足的地方。

#### 3.3.1 LQR 控制律設計

將系統(3.6)式以如下形式來表示

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, Q_1^0) + \mathbf{d} \quad (3.17)$$

其中

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, Q_1^0) = x_2$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, Q_1^0) = 1.8807 - 0.1667x_2 + 16.6667x_4 \sin(0.0873 - x_1 + x_3)u$$

$$f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, Q_1^0) = 43.3333 - 93.3333x_4 + 334.1297x_4^2 - 666.6667x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ - 166.6667x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3)u + 166.0325x_4^2u^2 + 33.3333Q_1^0$$

$$f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}, Q_1^0) = -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ + 7.8431x_4 \sin(0.0873 - x_3) + [26.1438x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3) \\ + 1.9608x_4 \sin(0.0873 + x_1 - x_3)]u - 26.2152x_4^2u^2 - 5.2288Q_1^0$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = 33.3333\Delta Q_1$$

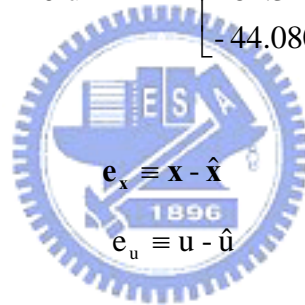
$$d_4 = -5.2288\Delta Q_1$$

在  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，經由”MATLAB”計算可以得到系統應用 VSC 控制的平衡點  $\hat{x} = [0.173863 \ 0 \ 0.00175 \ 1]$ ， $\hat{u} = 1.332285$ ，藉由得到的平衡點，我們將系統線性化得到系統矩陣 **A** 與控制矩陣 **B** 如下

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -22.125 & -0.1667 & 22.125 & -1.881 \\ 56.9581 & 0 & -113.9219 & 285.4894 \\ -6.4097 & 0 & 7.5308 & -45.5338 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.4119 \\ 281.3151 \\ -44.0802 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

定義



$$\mathbf{e}_x \equiv \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{e}_u \equiv \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (3.21)$$

我們可得到線性化系統

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{A}\mathbf{e}_x + \mathbf{B}\mathbf{e}_u \quad (3.22)$$

考慮優先降低系統反應，亦即需要較大的控制力設計下，選取矩陣 **Q** (反應加權矩陣，response weighting matrix) 與 **R** (控制力加權矩陣，control force weighting matrix) 值如下，

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{R} = 0.9 \quad (3.24)$$

此時使得成本指標(cost function)  $J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt$  達到最小值的回授增益矩陣(feedback gain matrix)為



$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \\ &= [2.4712 \quad 0.8535 \quad 0.6923 \quad -0.0627]\end{aligned}\quad (3.25)$$

其中  $\mathbf{P}$  為滿足 Riccati 矩陣方程式  $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$  的矩陣

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3.9932 & -0.1432 & -0.0817 & -0.5604 \\ -0.1432 & 0.1242 & 0.0297 & 0.1699 \\ -0.0817 & 0.0297 & 0.0124 & 0.0655 \\ -0.5604 & 0.1699 & 0.0655 & 0.4146 \end{bmatrix}\quad (3.26)$$

因此我們可以得到

$$\begin{aligned}e_u &= -\mathbf{K}e_x \\ &= -2.7278(x_1 - 0.173863) - 0.9799x_2 - 0.8150(x_3 - 0.00175) + 0.1226(x_4 - 1)\end{aligned}\quad (3.27)$$

將(3.27)式代入(3.21)式可以得到控制律

$$\begin{aligned}u &= e_u + \hat{u} \\ &= -2.4712(x_1 - 0.173863) - 0.8535x_2 - 0.6923(x_3 - 0.00175) + 0.0627(x_4 - 1) \\ &\quad + 1.332285\end{aligned}\quad (3.28)$$



### 3.3.2 LQR 與 VSC 控制律性能比較

本節中我們將探討 3.3.1 節中在  $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 LQR 設計的控制律(3.28)式與應用 VSC 設計的控制律(3.14)式，在條件相同的環境下做性能的比較。首先，我們考慮在  $\Delta Q_1 = 0$ ， $Q_1^0 = 9$  的情況下，比較兩種控制律可以達到電壓控制的範圍，此時系統的平衡點位於  $\hat{x} = [0.17386 \ 0 \ 0.00175 \ 1]$ ，若只考慮狀態  $x_4$  的範圍變化，其餘狀態  $x_1 \sim x_3$  都位於平衡點上，取初始狀態  $x_0 = [0.17386 \ 0 \ 0.00175 \ 0.53]$ ，我們可以發現使用 VSC 控制律的系統可以達成電壓調節的目的，但是使用 LQR 控制律的系統卻沒辦法達成，如圖 3.14 所示。若我們只考慮狀態  $x_1$ 、 $x_2$  及  $x_3$  單獨變化，其餘的狀態位於平衡點上，初始狀態取  $x_0 = [0.7 \ 0 \ 0.00175 \ 1]$ 、 $x_0 = [0.17386 \ 2 \ 0.00175 \ 1]$ 、 $x_0 = [0.17386 \ 0 \ 0.7 \ 1]$ ，我們也可以得到相同的結果，如圖 3.15-3.17 所示。由圖 3.14-3.17 的比較，可以發現以 VSC 設計的控制律在以 LQR 設計的控制律無法達成電壓穩定的狀態下，仍然能夠達到電壓穩定的效果，因此具有較大的可穩定範圍。

接下來，考慮  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，平衡點  $\hat{x} = [0.17386 \ 0 \ 0.00175 \ 1]$ ，選擇初始狀態  $x_0 = [0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.6]$ ，定義輸出電壓的收斂時間為

$$t_f = \min \left\{ t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^* \right\} \quad (3.29)$$

也就是狀態  $x_4$  最後一次進入  $|x_4(t) - 1| < 0.0001$  的區域後就永遠在此區域內的時間點。比較應用兩種控制律使電壓收斂到我們希望的電壓值所花費的時間、在收斂期間最大的控制力、花費的能量總合、負載電壓與 1 的誤差平方總和以及成本指標，模擬結果如圖 3.18 及圖 3.19 所示。圖 3.18 為 VSC 設計的控制律，圖 3.18(a)-(d)分別為四個狀態的圖形，圖 3.18(e)為  $u$  值。圖 3.19 為 LQR 設計的控制律，我們將比較結果整理如表 3.1 所示，其中  $t_f$  為收斂時間， $\|u(t)\|_{\infty}$  其間最大

的控制力， $\int_0^{t_f} u(t)^2 dt$  為花費的能量總和， $\int_0^{t_f} (x_4(t)-1)^2 dt$  為負載電壓與 1 的誤差平方總和， $\int_0^{t_f} (\mathbf{e}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) + u(t)^T R u(t)) dt$  為成本指標 (cost function)，其中  $\mathbf{e}(t) = (x_1(t) - 0.17386, x_2(t), x_3(t) - 0.00175, x_4(t) - 1)^T$ ，代表四個狀態與  $\hat{x}$  的誤差。在表 4.1 中，VSC 欄中括號的數字代表的是我們將 VSC 的控制時間拉長到與 LQR 收斂時間相同的情形下，以 VSC 控制的系統效能表現。

下一個比較，我們考慮在相同情況下，兩種控制律使所有狀態收斂所需的時間，定義收斂時間為

$$t_f = \min \left\{ t^* \mid \|\mathbf{e}(t)\|_1 < 0.0001, \forall t \geq t^* \right\} \quad (3.30)$$

在  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，模擬結果如圖 3.20 及圖 3.21 所示。圖 3.20 為應用 VSC 設計的控制律，圖 3.21 為應用 LQR 設計的控制律，我們將比較結果整理如表 3.2 所示。由圖 3.18-3.21 及表 3.1-3.2 的比較，我們可以發現，在  $\Delta Q_1 = 0$  的情況下，若只考慮電壓穩定的功能，以 VSC 設計的控制律可以在非常短的時間內調節電壓到我們希望的電壓值，也因此能夠使量損耗很少。而 LQR 設計的控制律雖然調節電壓到我們希望的電壓值時間比較長，但是其餘的狀態到達平衡點的時間，卻比我們以 VSC 設計的控制律快上許多，這是因為 VSC 在設計上主要著重在電壓調節的功能上，而 LQR 是針對所有的狀態做控制，使狀態都到達平衡點。因此，從比較的結果來看，若我們只著重在電壓調節的目的上，VSC 有非常優異的表現，在電壓收斂時間、能量損耗以及負載電壓與 1 的平方誤差上都有非常優異的表現。

接下來我們考慮  $\Delta Q_1 \neq 0$  的情況下，在  $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$  時，比較兩種控制律的表現。選擇初始狀態  $x_0 = [0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.6]$ ，輸出電壓收斂時間為(3.29)式，模擬結果如圖 3.22 及圖 3.23 所示。圖 3.22 是應用 VSC 設計的控制律，圖 3.22(a)-(d) 分別為四個狀態的圖形，圖 3.22(e) 為  $u$  值，由圖 3.22(d) 可以看出在  $\Delta Q_1 = 0.3$  時，系統仍然能將電壓收斂到我們所希望的電壓範圍，並且收斂的時間也非常短。圖

3.23 是系統應用 LQR 設計的控制律，由圖中我們可以發現受到  $\Delta Q_1$  的影響，系統無法將電壓收斂到我們所希望的電壓範圍。比較我們所設計的兩種控制律，由以上的模擬結果觀察，可以知道若只考慮電壓調節的功能時，VSC 所設計的控制律能夠有較快的響應速度，損耗的能量較少，而且對於系統的不確定因素較不敏感。



表 3.1：VSC 與 LQR 控制律的性能比較

	VSC	LQR
$t_f$	0.121 (4.798)	4.798
$\ u(t)\ _\infty$	0.83 (1.34)	1.54
$\int_0^{t_f} u(t)^2 dt$	0.0347 (8.3061)	8.8628
$\int_0^{t_f} (x_4(t) - 1)^2 dt$	0.0059 (0.0059)	0.0390
$\int_0^{t_f} (e(t)^T Q e(t) + u(t)^T R u(t)) dt$	0.1131 (8.2835)	8.2875

$t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ， $\|u(t)\|_\infty$  為其間最大的控制力，

$\int_0^{t_f} u(t)^2 dt$  為花費的能量總和， $\int_0^{t_f} (x_4(t) - 1)^2 dt$  為狀態  $x_4$  與 1 的誤差總和，

$\int_0^{t_f} (e(t)^T Q e(t) + u^T R u) dt$  為成本指標(cost function)，其中  $Q = I_{4 \times 4}$ ， $R = 0.9$ 。

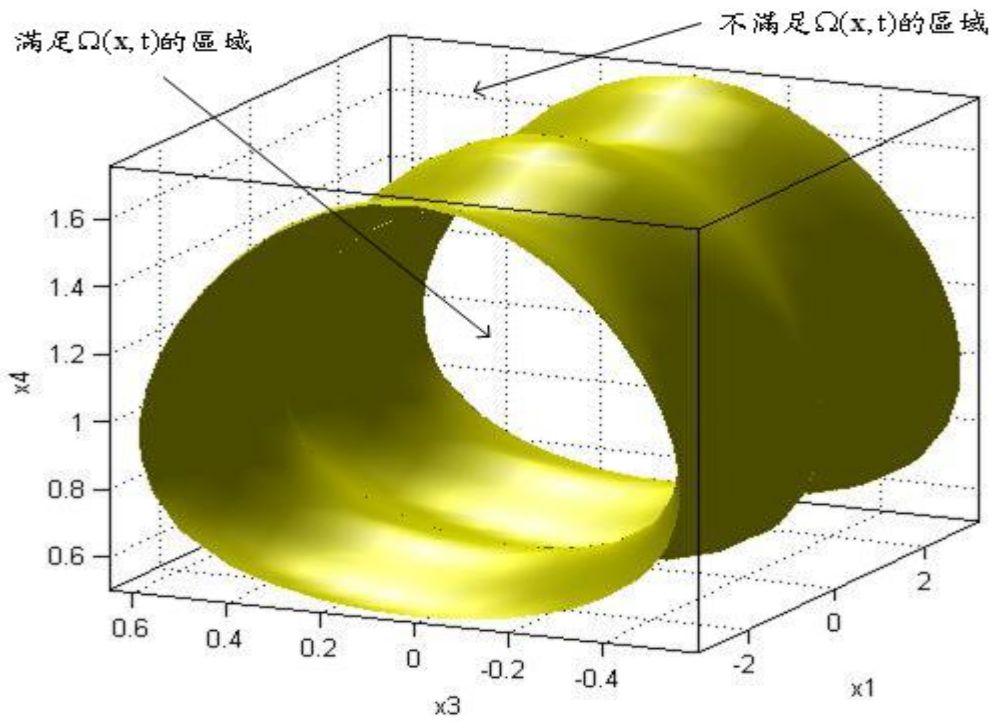
表 3.2：VSC 與 LQR 控制律的性能比較

	VSC	LQR
$t_f$	70.742	5.859
$\ u(t)\ _\infty \mid_{t \leq t_f}$	1.3413	1.5487
$\int_0^{t_f} u(t)^2 dt$	125.3537	10.7463
$\int_0^{t_f} e(t)^2 dt$	1.1361	0.3110
$\int_0^{t_f} (e(t)^T Q e(t) + u(t)^T R u(t)) dt$	113.9544	9.9826

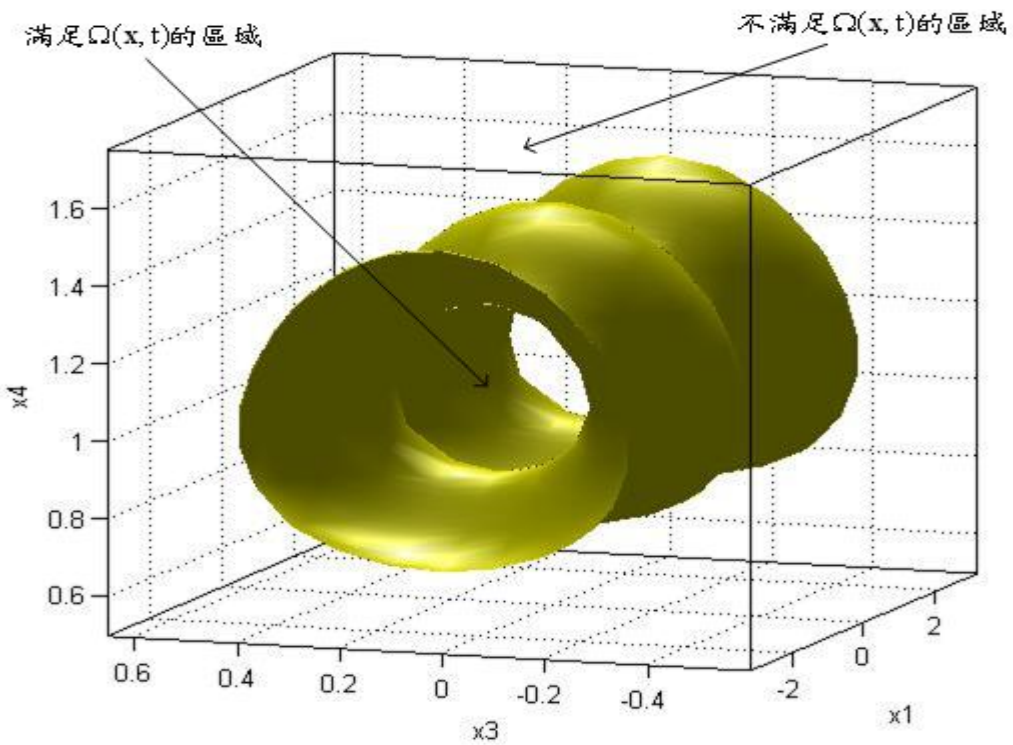
$t_f = \min\{t^* \mid e(t) < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$  時， $\|u(t)\|_\infty$  為其間最大的控制力，

$\int_0^{t_f} u(t)^2 dt$  為花費的能量總和， $\int_0^{t_f} e(t)^2 dt$  為狀態與平衡點的誤差總和，

$\int_0^{t_f} (e(t)^T Q e(t) + u^T R u) dt$  為成本指標(cost function)，其中  $Q = I_{4 \times 4}$ ， $R = 0.9$ 。



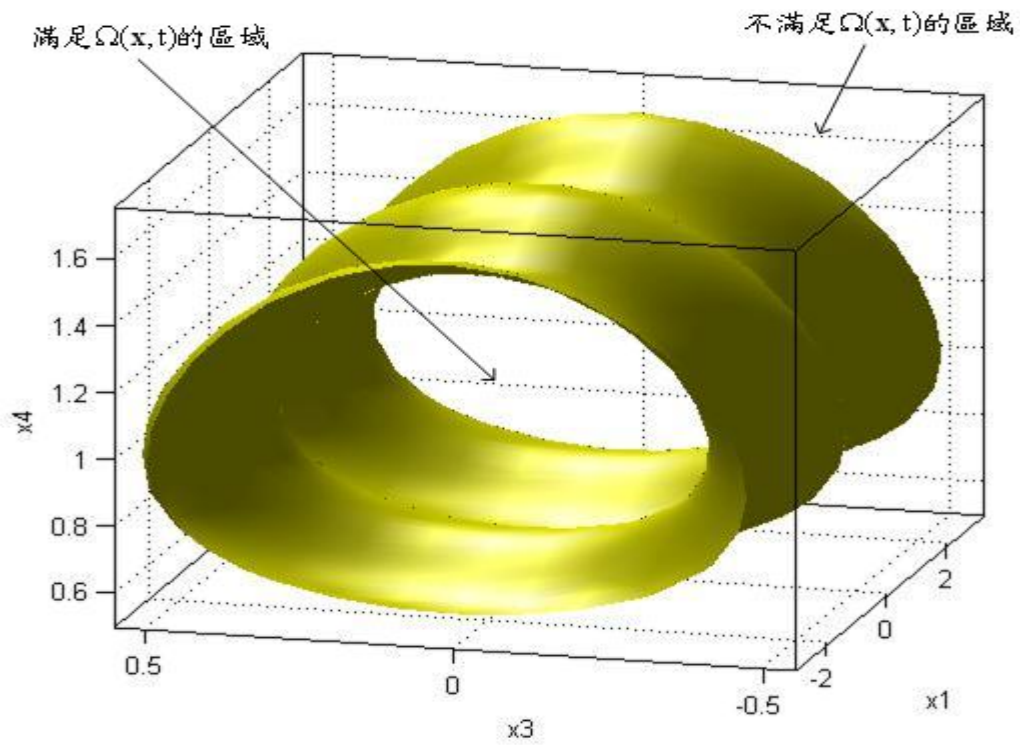
(a)



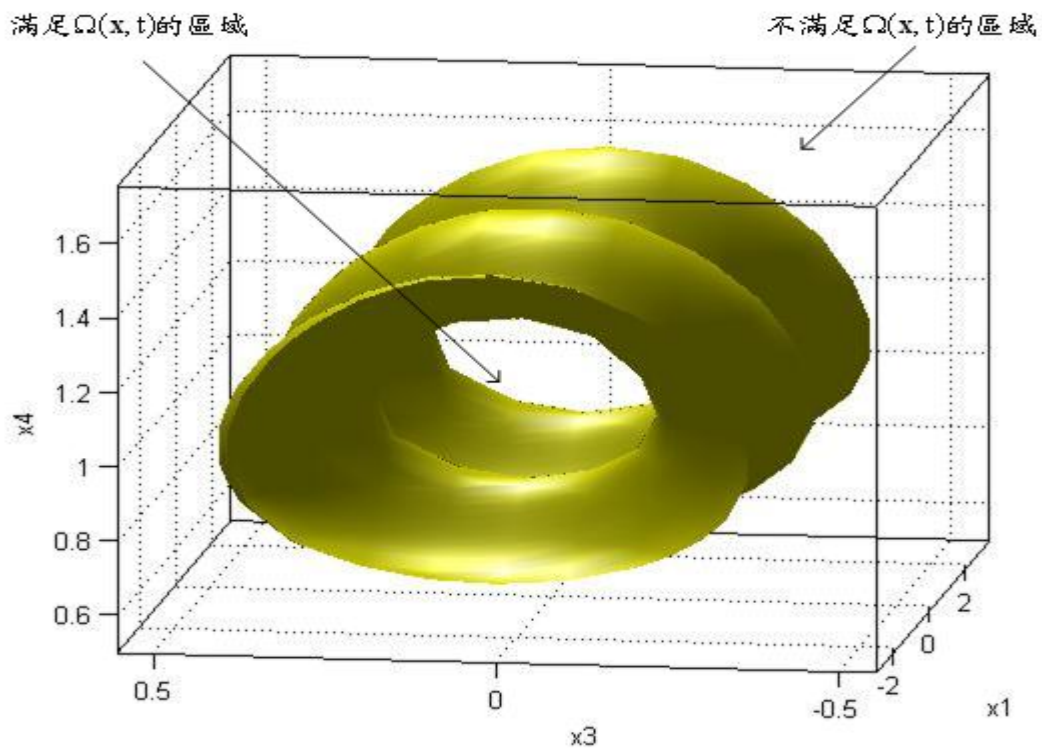
(b)

圖 3.1： $\Delta Q_1 = 0$ 時，狀態  $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$  滿足  $\Omega(x, t)$  的區域，

(a)  $Q_1^0 = 9$ ，(b)  $Q_1^0 = 11$ 。



(a)



(b)

圖 3.2：  $Q_1^0 = 10$  時，狀態  $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$  滿足  $\Omega(x,t)$  的區域，

(a)  $\Delta Q_1 = 0$ ，(b)  $\Delta Q_1 = 1$ 。

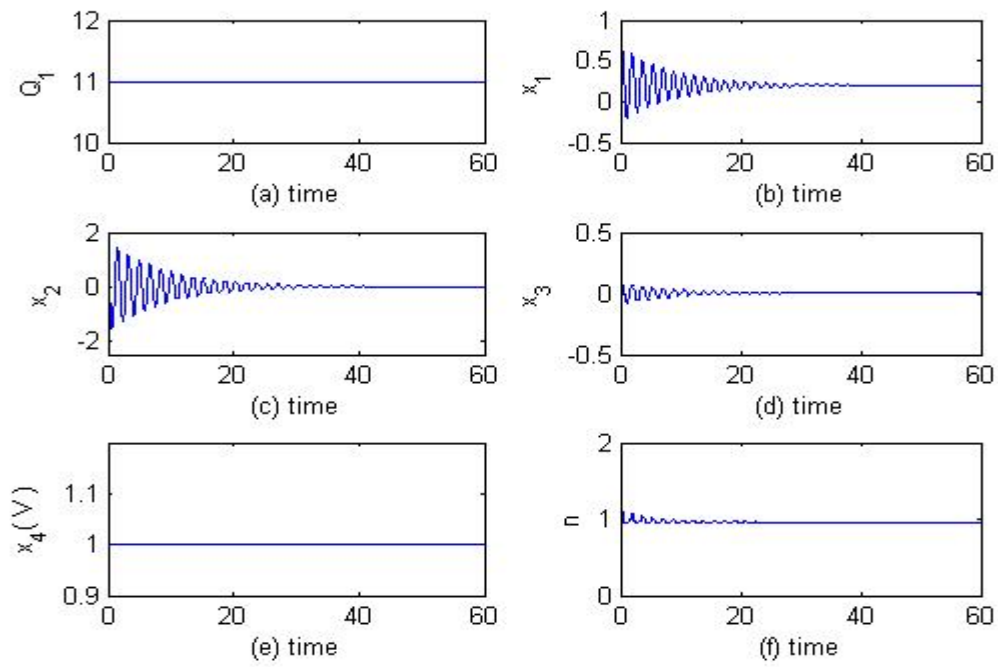


圖 3.3:  $Q_1^0 = 11$ ,  $\Delta Q_1 = 0$ , 初始電壓誤差為正值, (a)  $Q_1$  值, (b) 狀態  $x_1$ , (c) 狀態  $x_2$ , (d) 狀態  $x_3$ , (e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值), (f) 變壓器調節值。

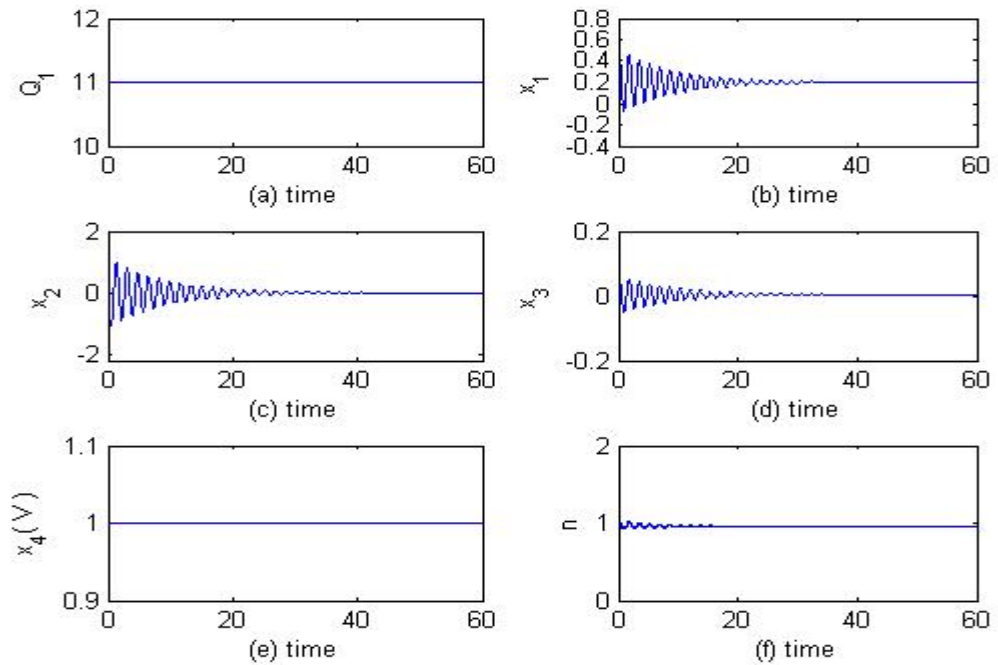


圖 3.4:  $Q_1^0 = 11$ ,  $\Delta Q_1 = 0$ , 初始電壓誤差為正值。(a)  $Q_1$  值, (b) 狀態  $x_1$ , (c) 狀態  $x_2$ , (d) 狀態  $x_3$ , (e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值), (f) 變壓器調節值。



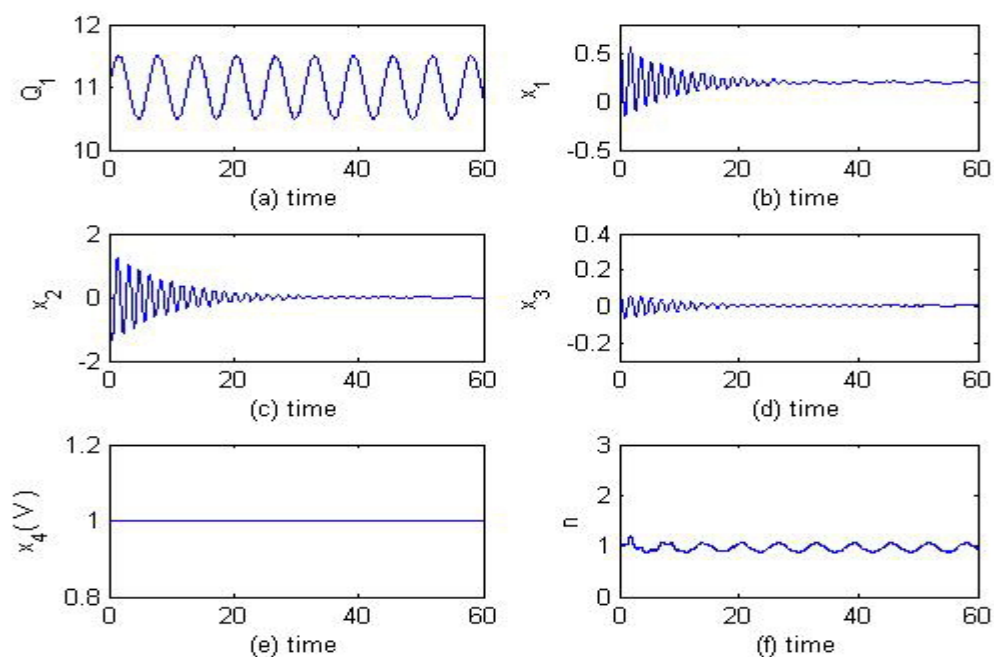


圖 3.5 :  $Q_1^0 = 11 + 0.2\sin(t)$  ,  $\Delta Q_1 = 0$  , (a)  $Q_1$  值 , (b) 狀態  $x_1$  , (c) 狀態  $x_2$  , (d)

狀態  $x_3$  , (e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值。

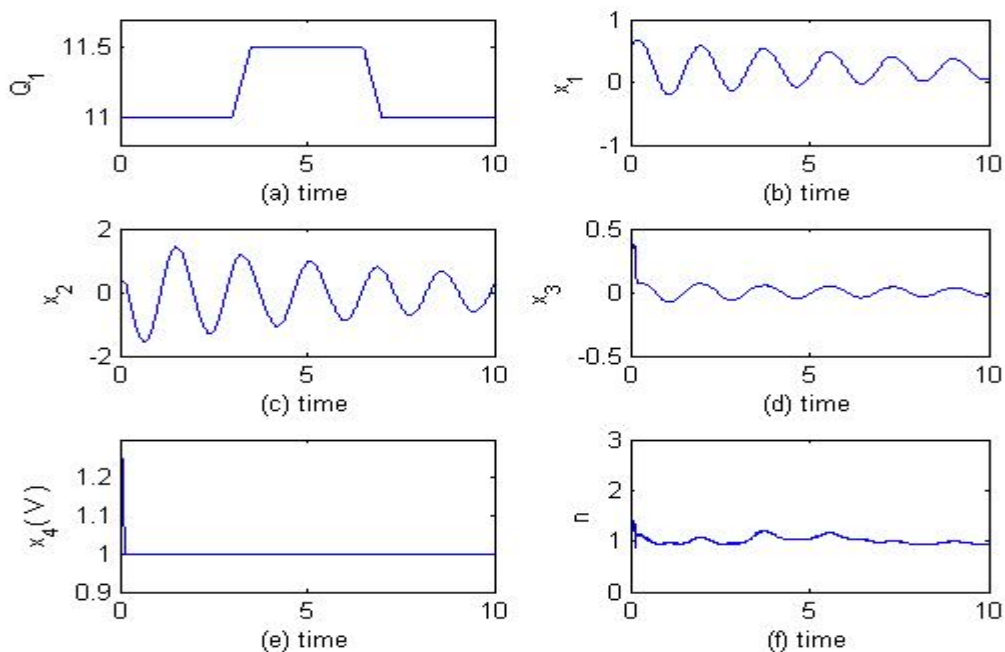


圖 3.6 :  $Q_1^0$  在 11~11.5 變化 ,  $\Delta Q_1 = 0$  , (a)  $Q_1$  值 , (b) 狀態  $x_1$  , (c) 狀態  $x_2$  , (d)

狀態  $x_3$  , (e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值。

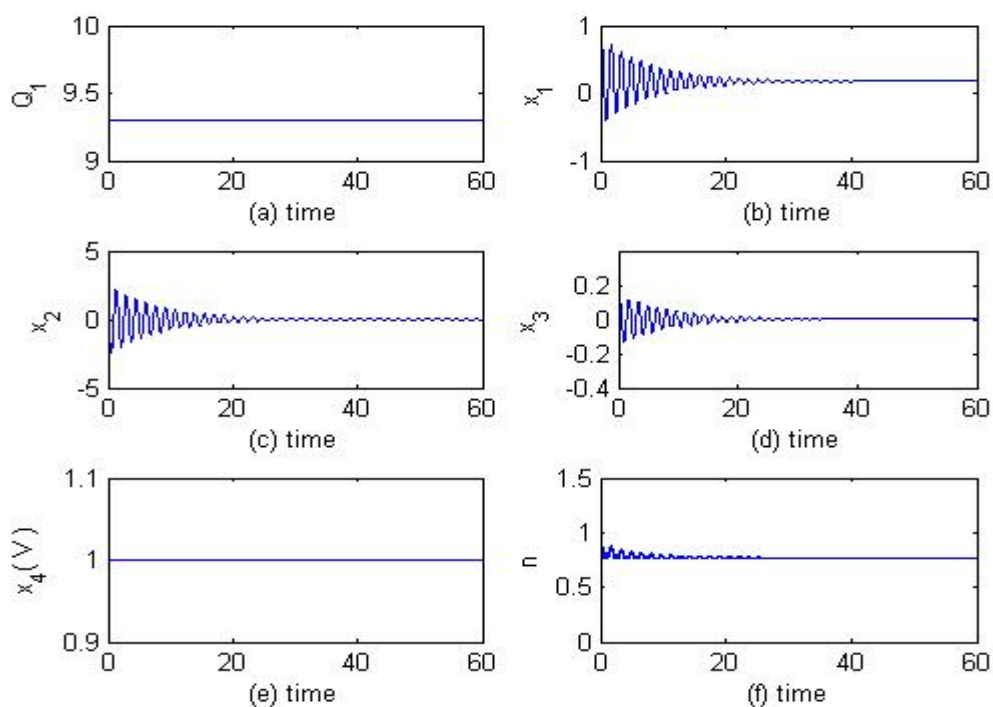


圖 3.7：  $Q_1^0 = 9$ ，  $\Delta Q_1 = 0.3$  時系統的模擬結果。(a)  $Q_1$  值，(b) 狀態  $x_1$ ，(c) 狀

態  $x_2$ ，(d) 狀態  $x_3$ ，(e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。

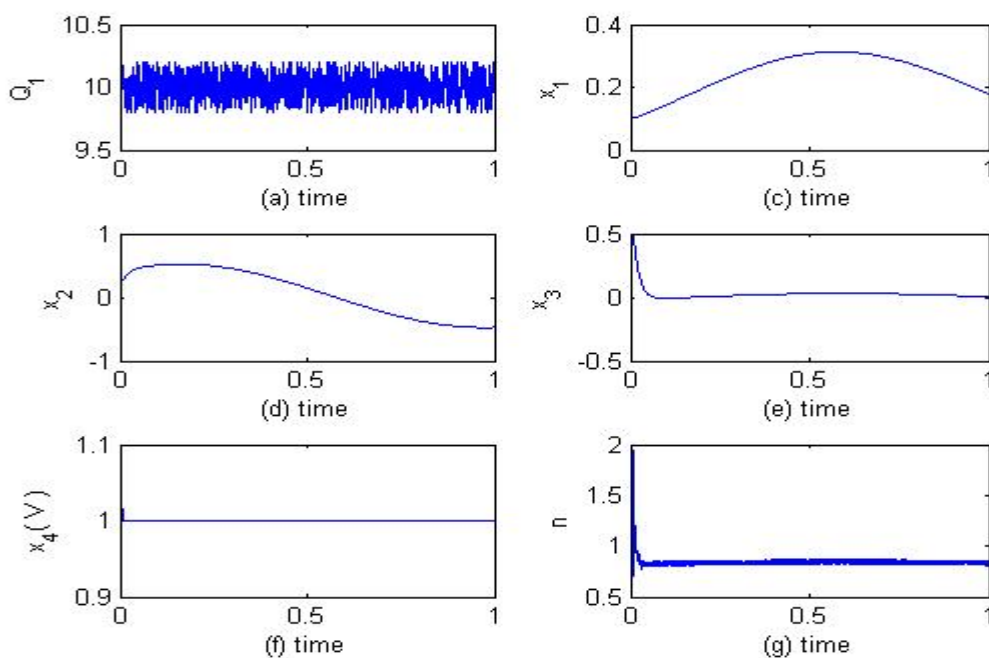


圖 3.8：  $Q_1^0 = 10$ ，  $\Delta Q_1 = -0.2 \sim 0.2$  時系統的模擬結果。(a)  $Q_1$  值，(b) 狀態  $x_1$ ，

(c) 狀態  $x_2$ ，(d) 狀態  $x_3$ ，(e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。

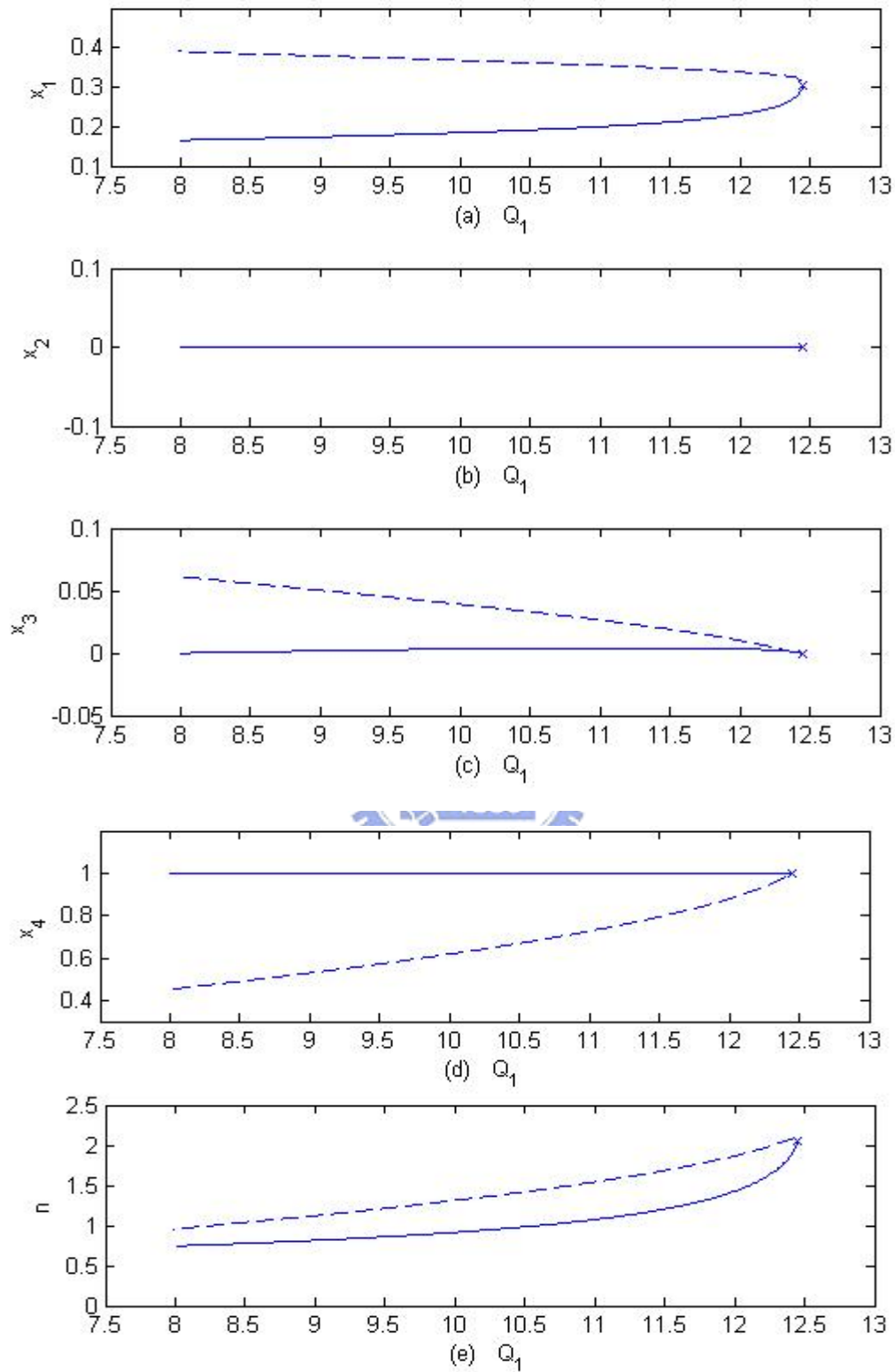


圖 3.9:  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\Delta Q_1 = 0$ ,  $Q_1 = Q_1^0$  變動時系統平衡點對應的軌跡, (a) 狀態  $x_1$ ,  
 (b) 狀態  $x_2$ , (c) 狀態  $x_3$ , (d) 狀態  $x_4$ , (e) 變壓器調節值。

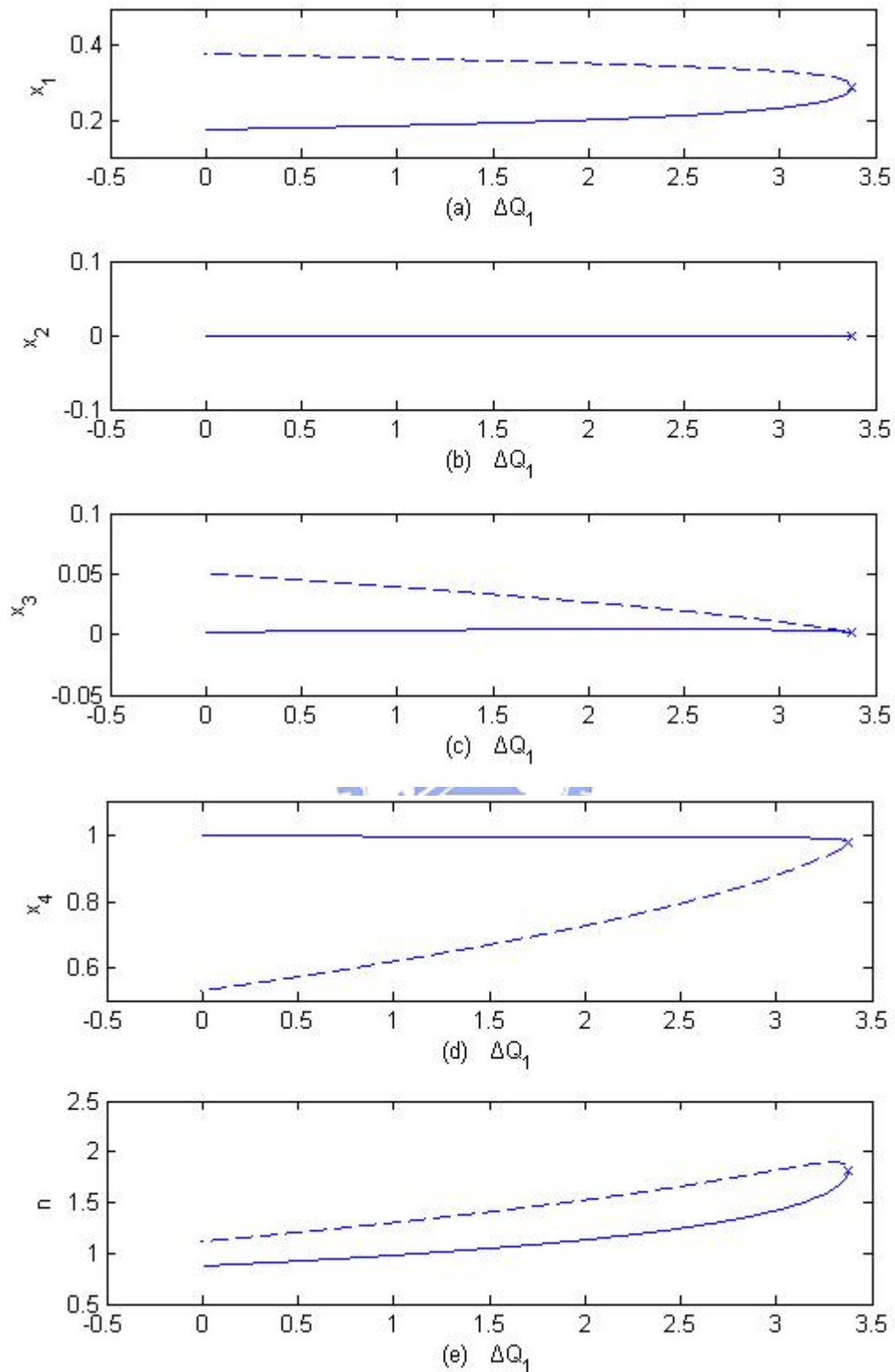


圖 3.10： $\varepsilon = 0.001$ ， $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡，(a) 狀態  $x_1$ ，  
 (b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e) 變壓器調節值。

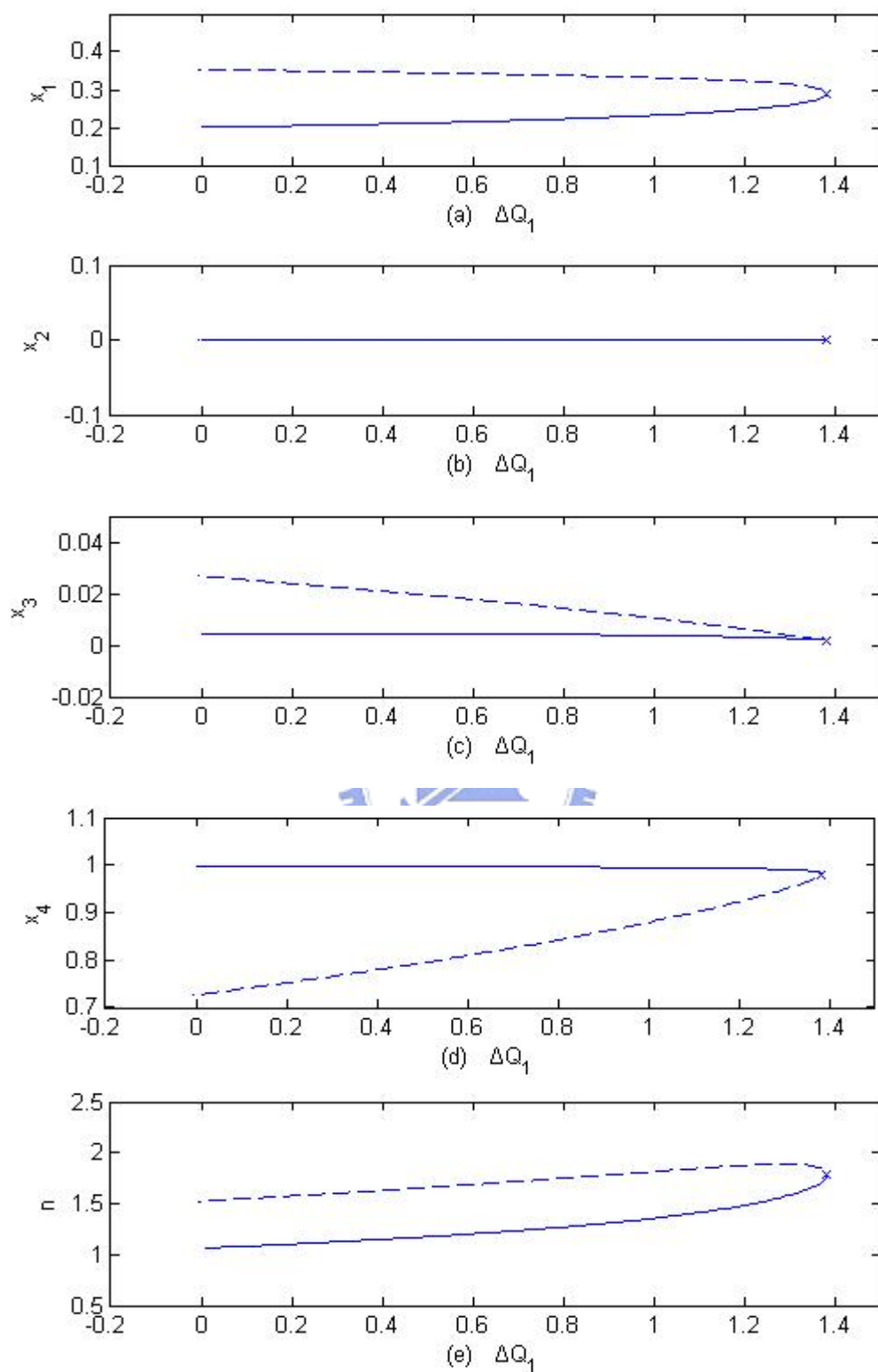


圖 3.11： $\varepsilon = 0.001$ ， $Q_1^0 = 11$ ， $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡，(a) 狀態  $x_1$ ，  
 (b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e) 變壓器調節值。

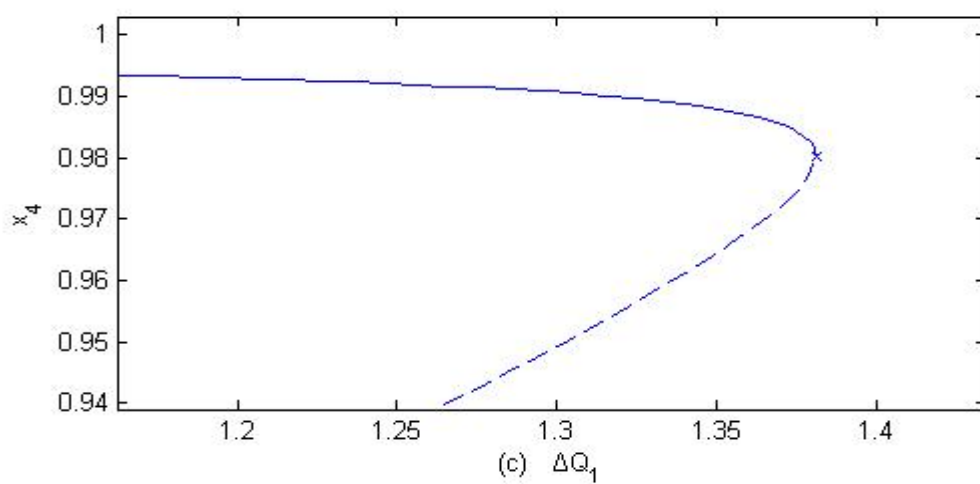
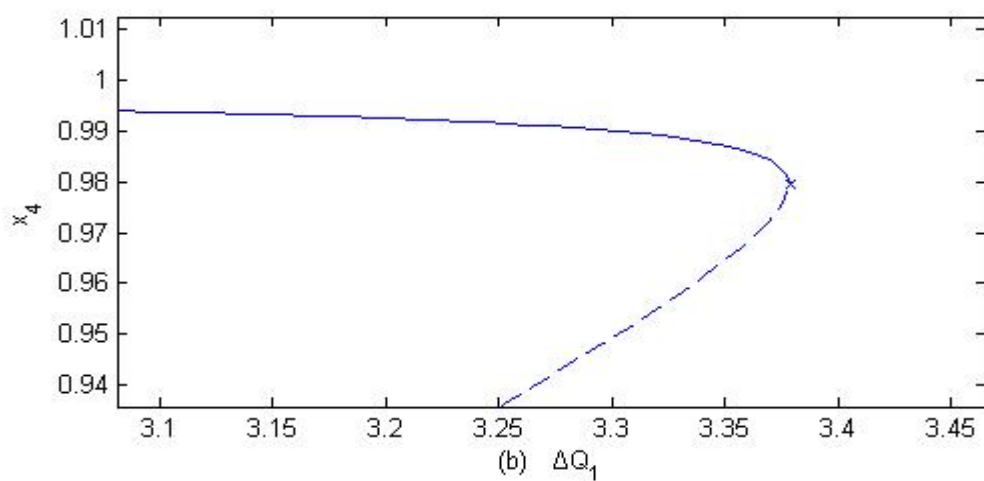
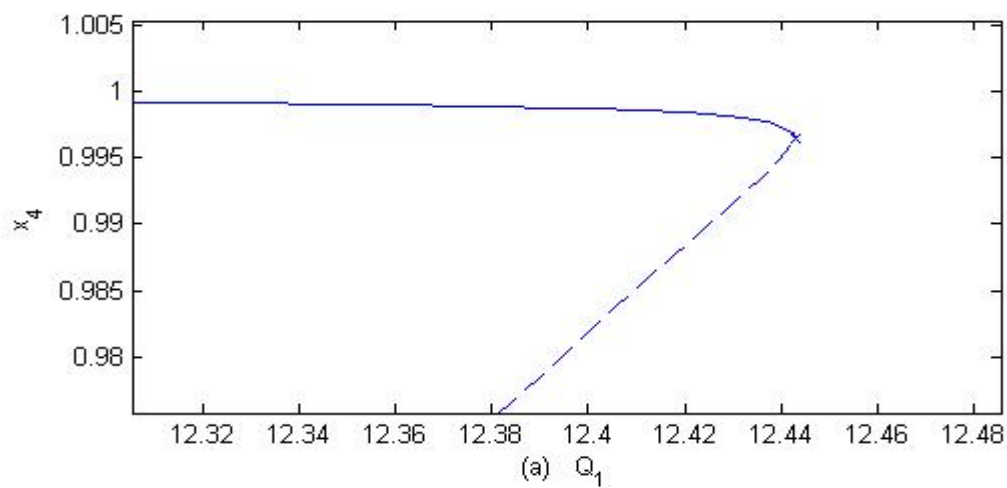


圖 3.12: 狀態  $x_4$  平衡點軌跡的局部放大圖, (a) 圖 3.9(d) 的局部放大圖, (b) 圖 3.10(d) 的局部放大圖, (c) 圖 3.11(d) 的局部放大圖。

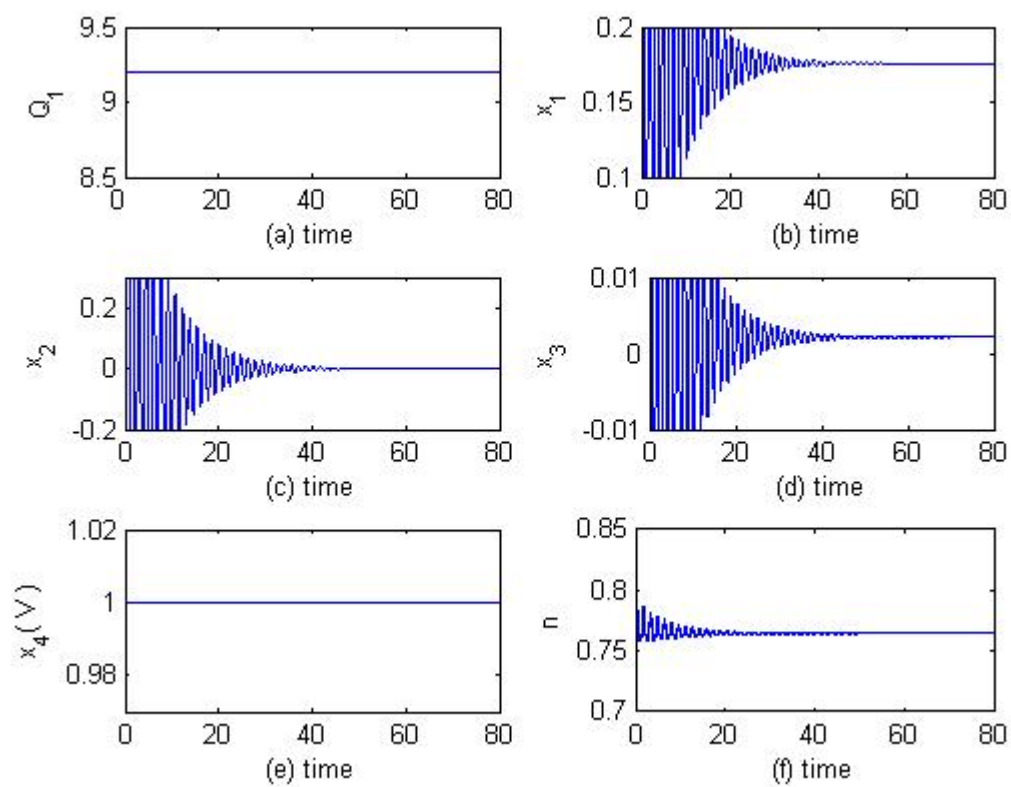
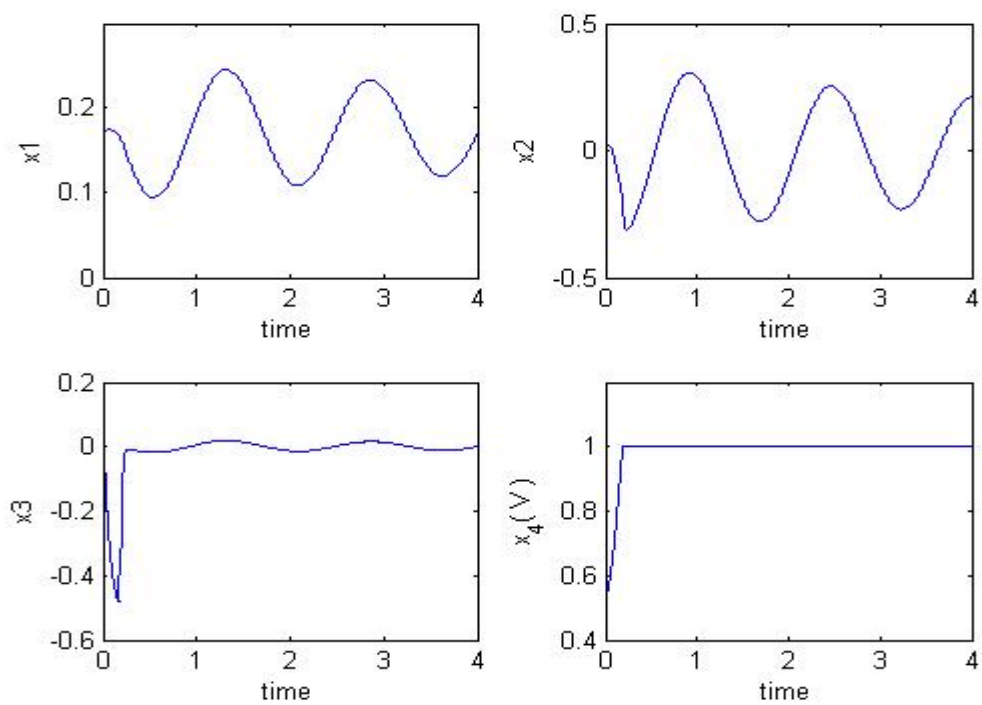
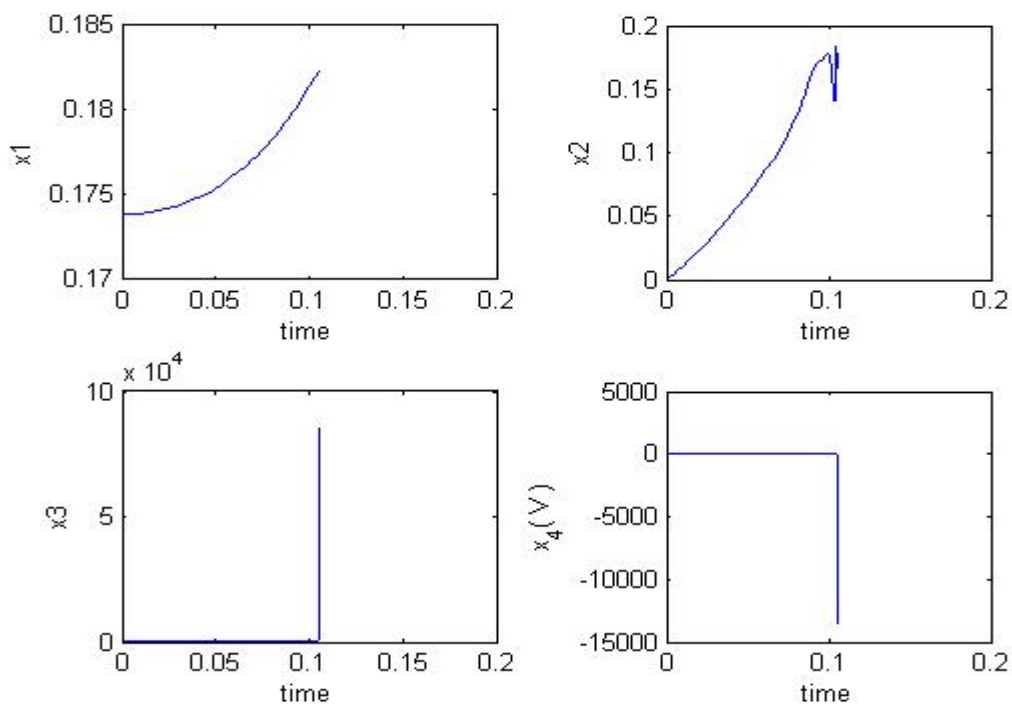


圖 3.13：  $Q_1^0 = 9$ ，  $\Delta Q_1 = 0.2$  時系統的模擬結果。(a)  $Q_1$  值，(b) 狀態  $x_1$ ，(c) 狀態  $x_2$ ，(d) 狀態  $x_3$ ，(e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。



(a)



(b)

圖 3.14:  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態  $x_0 = [0.17386 \ 0 \ 0.00175 \ 0.53]$ 。(a) 以 VSC

設計的控制律系統狀態圖，(b) 以 LQR 設計的控制律系統狀態圖。



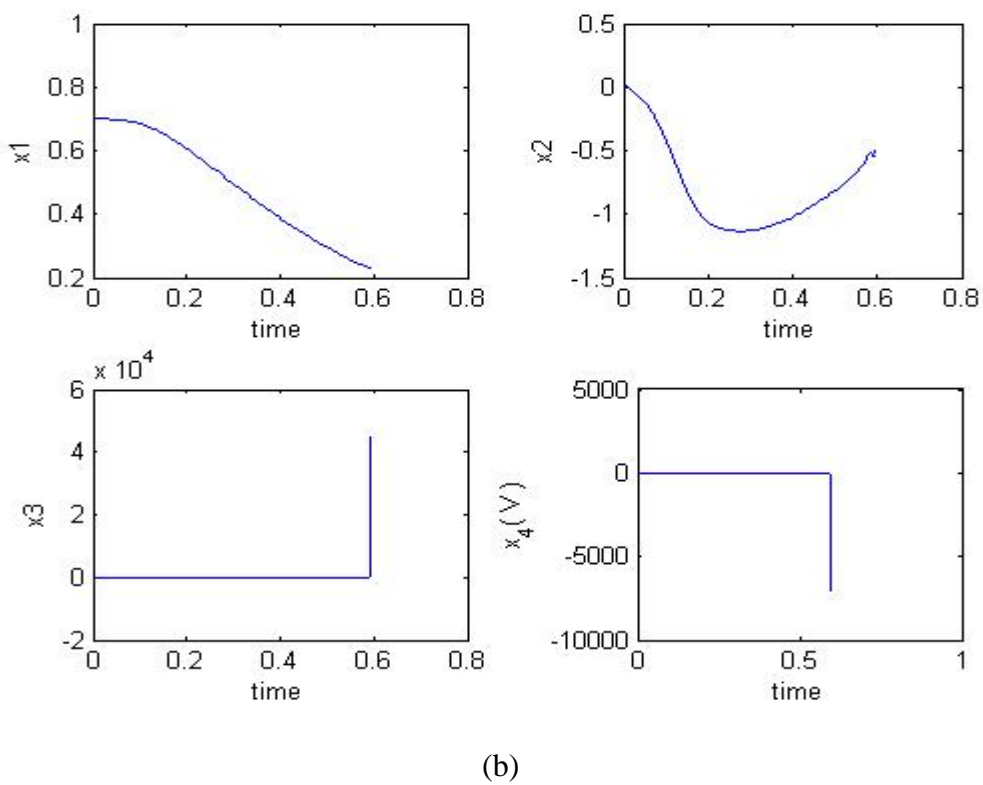
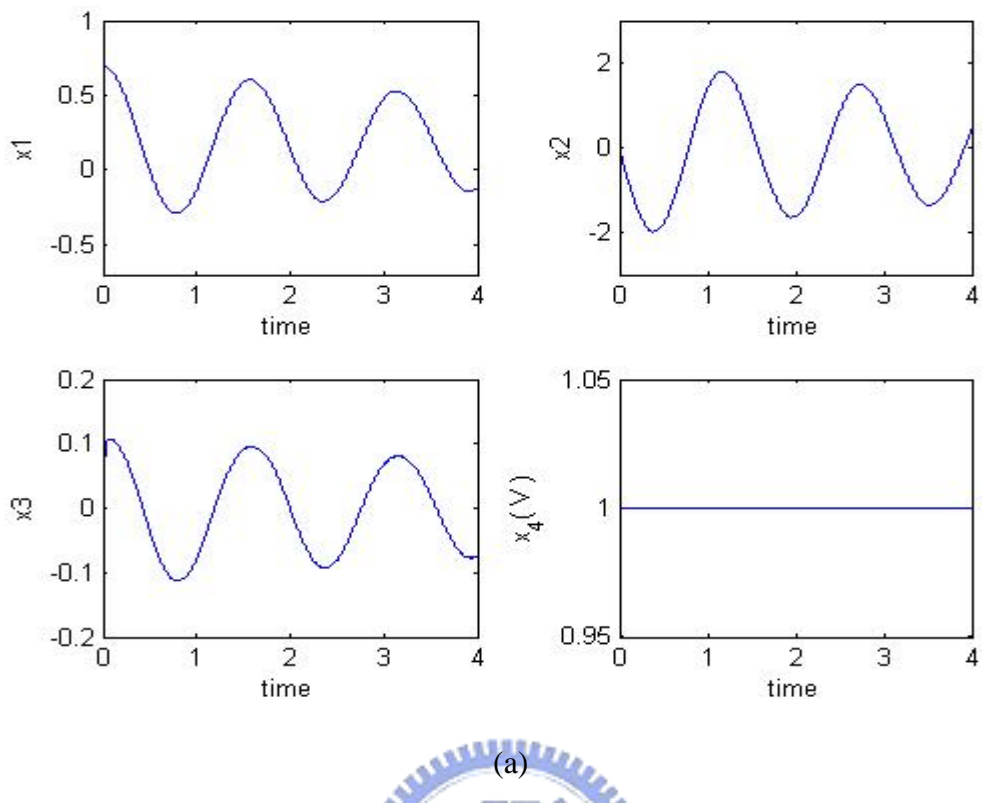
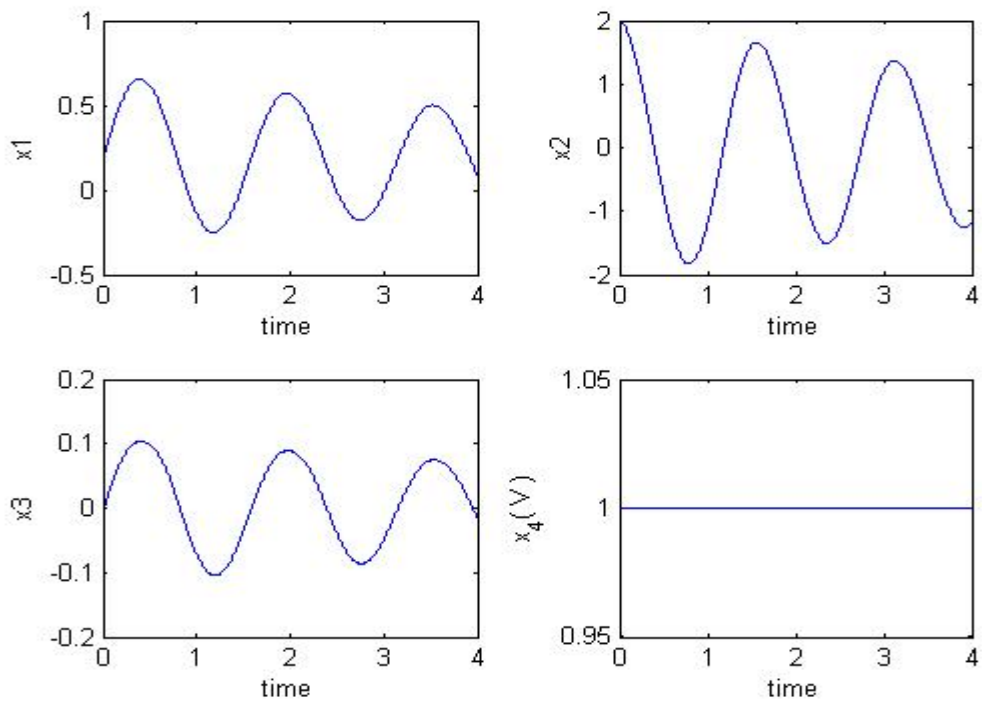
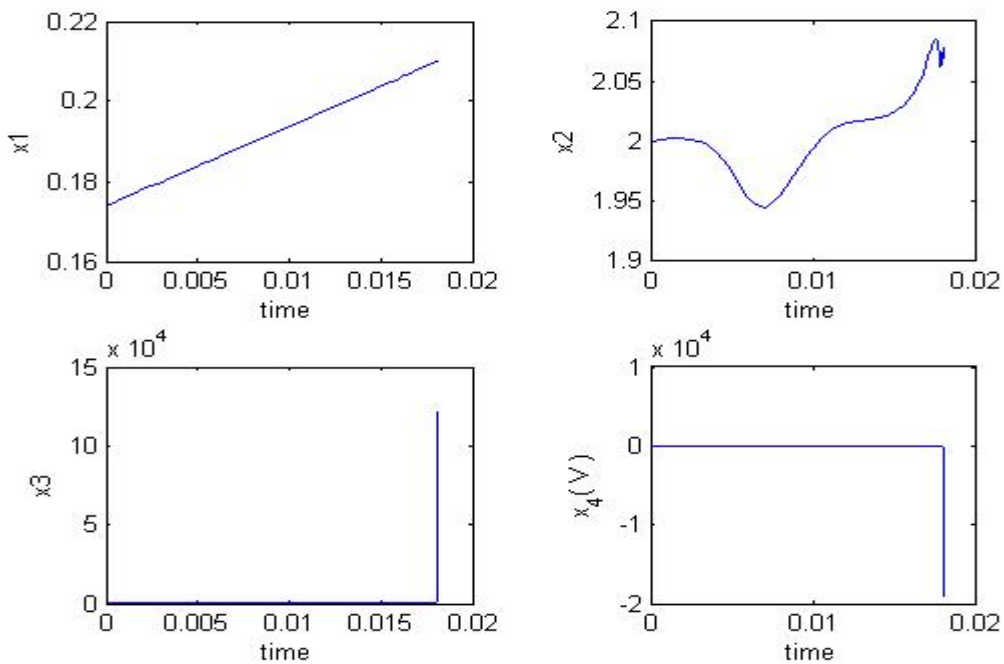


圖 3.15：  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態  $x_0 = [0.7 \ 0 \ 0.00175 \ 1]$ 。(a) 以 VSC 設計的控制律系統狀態圖，(b) 以 LQR 設計的控制律系統狀態圖。



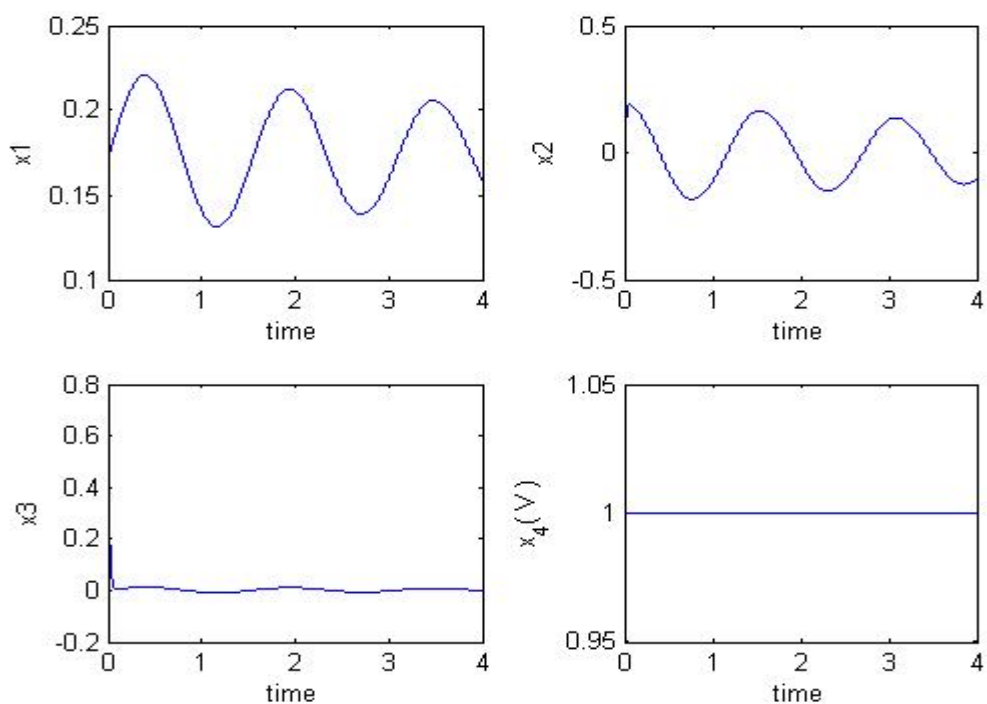
(a)



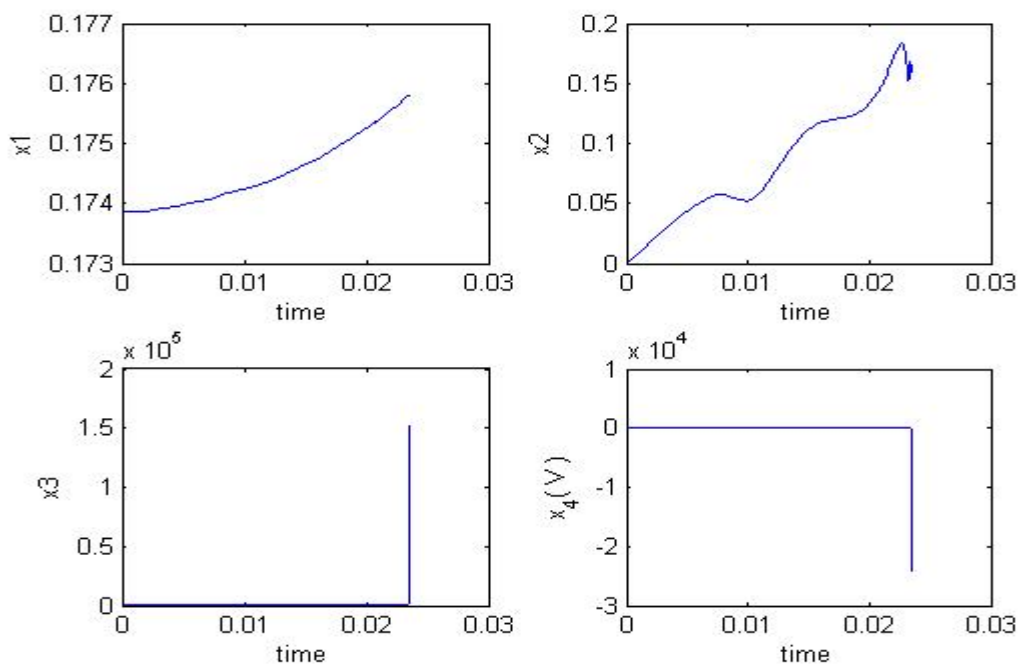
(b)

圖 3.16： $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態  $x_0 = [0.17386 \ 2 \ 0.00175 \ 1]$ 。(a) 以 VSC

設計的控制律系統狀態圖，(b) 以 LQR 設計的控制律系統狀態圖。



(a)



(b)

圖 3.17： $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態  $x_0 = [0.17386 \ 0 \ 0.7 \ 1]$ 。(a) 以 VSC 設計

的控制律系統狀態圖，(b) 以 LQR 設計的控制律系統狀態圖

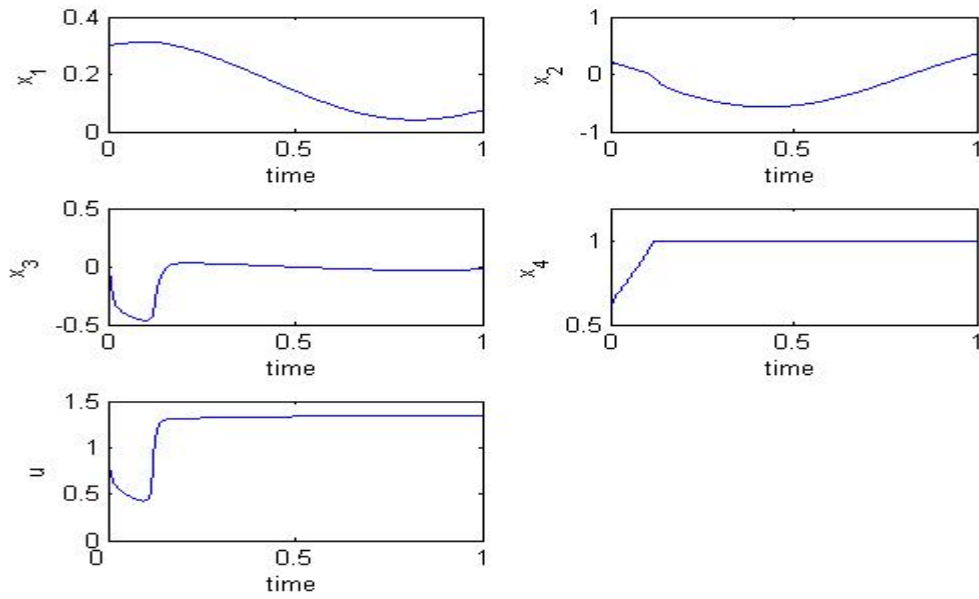


圖 3.18: 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ,  $Q_1^0 = 9 \cdot \Delta Q_1 = 0$

時，應用 VSC 設計的控制律下，系統的表現， $t_f = 0.121$ 。(a) 狀態  $x_1$ ，

(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值。

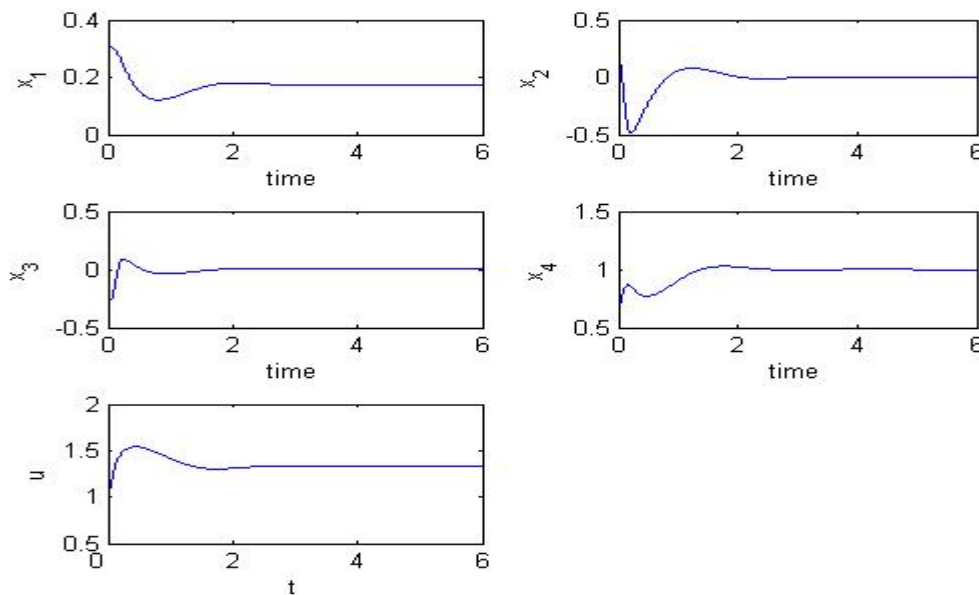


圖 3.19: 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ,  $Q_1^0 = 9 \cdot \Delta Q_1 = 0$

時，應用 LQR 設計的控制律下，系統的表現， $t_f = 4.798$ 。(a) 狀態  $x_1$ ，

(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值。

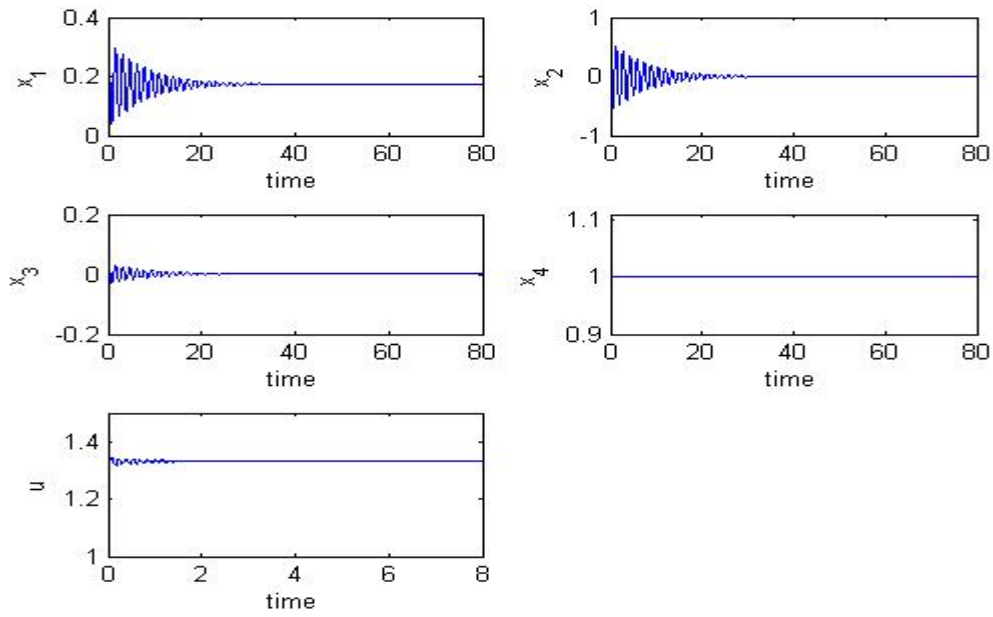


圖 3.20：定義收斂時間為  $t_f = \min \left\{ t^* \mid e(t) < 0.0001, \forall t \geq t^* \right\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 VSC 設計的控制律下，系統的表現， $t_f = 70.742$ 。(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值。

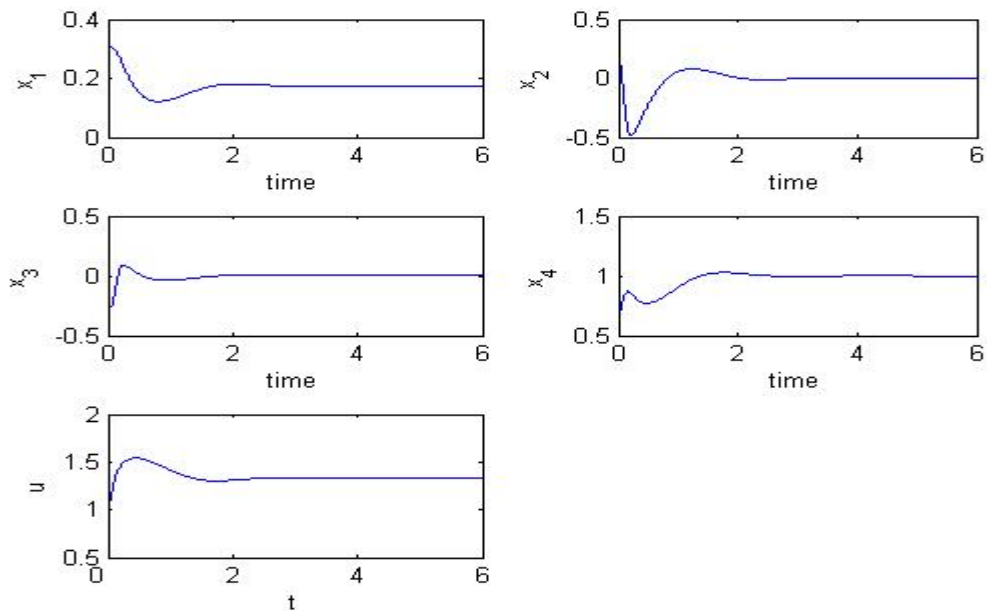


圖 3.21：定義收斂時間為  $t_f = \min \left\{ t^* \mid e(t) < 0.0001, \forall t \geq t^* \right\}$ ， $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0$  時，應用 LQR 設計的控制律下，系統的表現， $t_f = 5.859$ 。(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值。

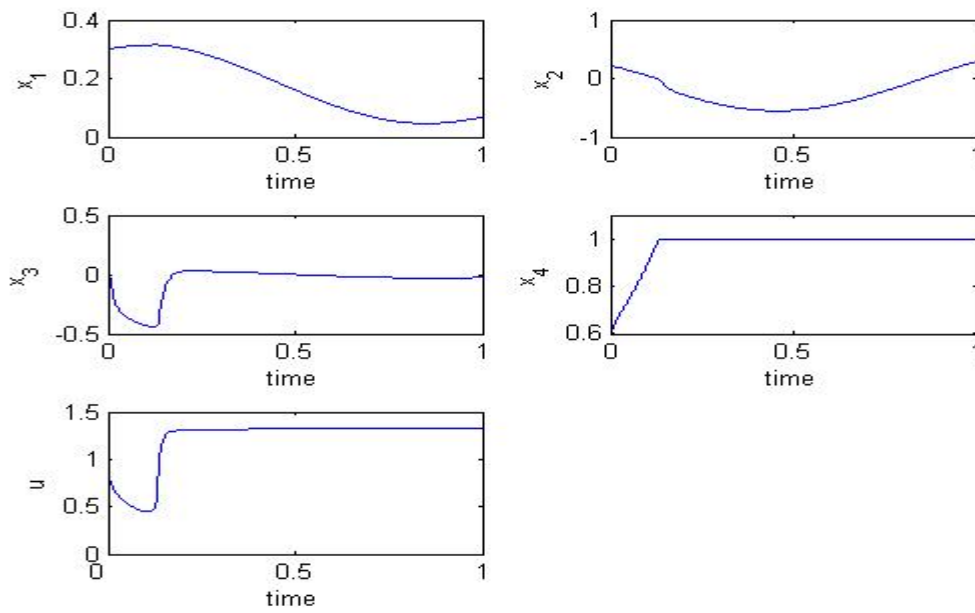


圖 3.22: 定義收斂時間  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ,  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0.3$

時，應用 VSC 設計的控制律下，系統的表現， $t_f = 0.135$ 。(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀

態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值。

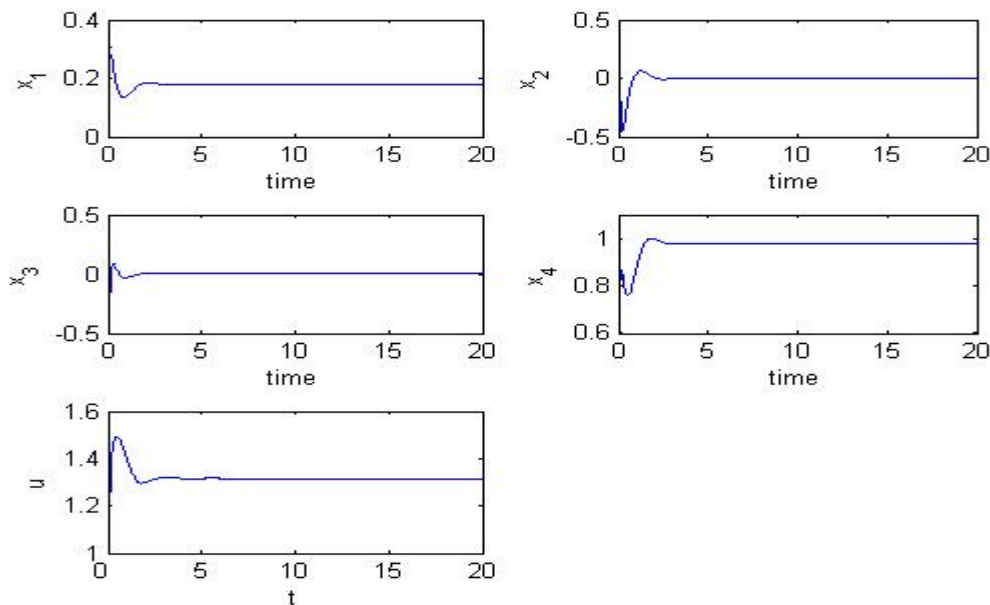


圖 3.23: 定義收斂時間為  $t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.0001, \forall t \geq t^*\}$ ,  $Q_1^0 = 9$ 、

$\Delta Q_1 = 0.3$  時，應用 LQR 設計的控制律下，系統的表現， $t_f = 4.798$ 。

(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e)  $u$  值。

## 第四章

### 改良型可變結構控制律設計



在第三章中，我們所設計的控制律必須滿足假設 2.3，系統才能夠達到電壓控制的目的，我們把可能滿足假設 2.3 的區域以  $\Omega(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{x} \mid W(\mathbf{x}, t) > 0\}$  來表示，其中  $W(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta}{4 \cdot |a|} - \rho(\mathbf{x}, t) - \eta \geq 0$ ，但是由(3.6)-(3.9)式我們可以發現，會影響  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的狀態只有  $x_1$ 、 $x_3$  及  $x_4$ ，不包含  $x_2$ 。由系統的動態方程式可以知道  $\dot{x}_1 = x_2$ ，因此，當系統的初始狀態在  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  區域內的邊界附近時，此時若  $x_2$  夠大的話，系統狀態有可能會跑出滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區域，造成不穩定的情況發生。考慮下面兩個例子，我們設定  $Q_1 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0.192$ ，初始狀態分別選擇  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 7 \ 0.1 \ 0.7]$  與  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 6 \ 0.1 \ 0.7]$ ，這兩個初始狀態都在滿足  $\Omega$  的區域內。其中，選擇  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 7 \ 0.1 \ 0.7]$  的例子，狀態在經過一小段時間後，就會跑出  $\Omega$  區域，隨即發生電壓崩潰的現象，如圖 4.1 所示，圖 4.1(a)-4.1(d) 分別是系

統的狀態  $x_1 - x_4$ ，圖 4.1(e)是對應的  $W(x)$  值。但是選擇  $x_0 = [0.7 \ 6 \ 0.1 \ 0.7]$  的例子卻能夠達成電壓調節的目的，如圖 4.2 所示。因此，若要知道在  $\Omega(x, t)$  區域的中，哪些是滿足假設 2.3 的區域，哪些不是滿足假設 2.3 的區域，我們還必須計算出  $\Omega(x, t)$  內每個點的  $x_2$  範圍，但這不是一件容易的事。

本章中，針對此電力系統，我們將選取控制律經過改良，使假設 2.3 能包含系統所有的狀態，以解決上述的問題。

#### 4.1 控制律設計

為了使假設 2.3 能夠包含所有的狀態資訊，我們將本來的控制律修改為如下形式

$$u = u^{eq} + u^{re*} \quad (4.1)$$

其中

$$u^{eq} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$u^{re*} = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} + Tx_2 \right) \text{sgn}(s(t))$$

藉由控制律的修改，我們可以使假設 2.3 包含所有的狀態資訊。但是，控制律經過修改後，為了讓系統能夠滿足迫近條件，我們也必須針對假設 2.3 的條件做修改，使系統滿足迫近條件。若系統要滿足迫近條件，則  $u^{re*}$  必須滿足下列不等式

$$\frac{-\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta + 4a\rho(x, t)}}{2a} < u^{re*} < \frac{-\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta + 4a\rho(x, t)}}{2a} \quad (4.2)$$

其中  $\rho(x, t)$  代表系統不確定因素的上限。若  $u^{re*}$  在控制期間滿足(4.2)式，代表系統不會因為不確定因素的影響，使得  $s(t) < 0$  時，控制律  $u$  選取在使  $\dot{s}(t) < 0$  的情況，或是當  $s(t) > 0$  時，控制律  $u$  選取在使  $\dot{s}(t) > 0$  的情況，(4.2)式的示意圖如圖



4.3 所示，當系統具有不確定因素且  $s(t) < 0$  時， $u^{re*}$  必須讓控制律  $u$  選取在使  $\dot{s}(t) > 0$  的區域中。將(4.2)式經過整理後，我們可以得到

假設 4.1 存在一個正數  $k_1$ ，使得在控制期間

$$|Tx_2| \leq \frac{\sqrt{\Delta + 4a\rho(x,t)}}{2|a|} - k_1 \quad (4.3)$$

由假設 4.1 的形式，我們可以發現，系統在控制期間若滿足假設 4.1，則同時也會滿足假設 2.3。若選取控制律為(4.1)式，由(2.31)、(4.1)以及假設 4.1 可以得到

$$\begin{aligned} s(t)\dot{s}(t) &= \left\{ a(u^{re*})^2 - \sqrt{\Delta} u^{re*} + \nabla h \cdot d \right\} s(t) \\ &\leq \left\{ -\frac{\Delta}{4|a|} + T^2 x_2^2 |a| + \rho(x,t) \right\} |s(t)| \\ &= \left\{ -\frac{\Delta + 4a\rho(x,t)}{4|a|} + T^2 x_2^2 |a| \right\} |s(t)| \\ &\leq \left\{ -\left[ \frac{\sqrt{\Delta + 4a\rho(x,t)}}{|a|} k_1 - k_1^2 \right] |a| \right\} |s(t)| \\ &\leq -(k_1^2 |a|) |s(t)| \end{aligned} \quad (4.4)$$

因此可知系統將滿足迫近條件，在有限的時間內到達平滑平面。

為了由假設 4.1 估測出使系統能夠達成電壓調節的狀態區域，我們將(4.3)式寫成如下的函數形式

$$W^*(x,t) = \frac{\sqrt{\Delta + 4a\rho(x,t)}}{2|a|} - |Tx_2| - k_1 \geq 0 \quad (4.5)$$

由(3.6)及(4.5)式的形式可以知道， $W^*(x,t)$  包含了所有狀態  $x_1 - x_4$  的資訊，因此可以知道，若存在某個區域  $\Omega^*(x,t) = \left\{ x \mid W^*(x,t) \geq 0 \right\}$ ，在此區域中系統狀態  $x$  都

會滿足(4.5)式，並且在此區域中  $W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的地方，其微分值  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t)$  都會大於 0，也就是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) > 0 \Big|_{W^*(\mathbf{x}, t) = 0}$ ，則系統可以達成電壓調節的功能。我們以下面這個例子來說明，考慮  $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.1$ ， $k_1 = 0.1$ ， $T = 0.0001$ ， $x_4 = 0.9$  時，我們可以在空間中畫出滿足的  $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$  區域，如圖 4.4 所示。在圖 4.4 中，圖形在  $x_1$  的方向上是週期性的，因此我們擷取範圍在  $-\pi \sim \pi$  之間來表示，圖中藍色的曲面代表的是  $W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，兩個藍色曲面中間所夾的區域是  $W^*(\mathbf{x}, t) > 0$  的區域，黃色曲面代表的是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) = 0$  的等高曲面，兩個黃色曲面中間所夾的區域是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) < 0$  的區域，以外則是  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) > 0$  的區域。因此我們可以發現在圖 4.4 的區域中，狀態會滿足  $\frac{d}{dt} W^*(\mathbf{x}, t) > 0 \Big|_{W^*(\mathbf{x}, t) = 0}$ ，此時系統滿足迫近條件，因此狀態  $x_4$  會往 1 接近，期間狀態都會在滿足的  $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$  區域中，當  $x_4 = 0.95$  時，系統仍然會在滿足  $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$  的區域中，如圖 4.5 所示。由圖 4.5 我們可以看出系統狀態仍然不會離開  $W^*(\mathbf{x}, t) \geq 0$  的區域，並且狀態  $x_4$  會繼續往 1 接近，最後到達  $x_4 = 1$ ，如圖 4.6 所示的區域，完成電壓調節的功能。

## 4.2 模擬結果

本節我們將針對 4.1 節中所設計的控制律，進行一些數值模擬，加以驗證系統的確可以達成電壓調節的功能。為了避免發生切跳現象，我們將控制律(4.1)式中的  $\text{sgn}$  函數以  $\text{sat}$  函數取代，則控制律可以表示如下

$$u = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} + T x_2 \right) \cdot \text{sat} \left( \frac{s(t)}{\varepsilon} \right) \quad (4.6)$$

選定順滑層  $\varepsilon = 0.01$  及  $T = 0.0001$ ，首先考慮  $\Delta Q_1 = 0$  的情況，當  $Q_1^0 = 10$  時，選取初始值  $x_0 = [-0.5, 3, 0.4, 1.3]$  進行模擬，觀察初始電壓為正值時 ( $s(t) > 0$ )，系統是否能夠達成電壓調節的功能，模擬結果如圖 4.7 所示。圖 4.7(a) 是控制過程中的  $Q_1$  值，圖 4.7(b)-4.7(e) 分別是四個狀態的變化情形，圖 4.7(f) 是控制過程中變壓器對應的變化顯示。接下來，一樣在  $Q_1^0 = 10$  時，我們選取初始值為  $x_0 = [0.2, 0.7, 0.3, 0.8]$  進行模擬，觀察初始電壓為負值時 ( $s(t) < 0$ )，系統是否能夠達成電壓調節的功能，模擬結果如圖 4.8 所示。由圖 4.7 與 4.8 我們可以觀察到系統可以使負載電壓收斂在 1，也就是我們所希望的電壓值，達成電壓調節的功能，而且狀態  $x_1$ 、 $x_2$  及  $x_3$  最後也會收斂到某個定值。下一個例子，我們考慮在  $\Delta Q_1 = 0$  時，我們使  $Q_1^0$  在  $t = 1.5 \sim 2$  時，由 10 上升到 10.5，當  $t = 3.5 \sim 4$  時，再由 10.5 下降到 9.5，選定系統的初始狀態為  $x_0 = [-0.1, 0.2, 0.3, 0.8]$ ，模擬結果如圖 4.9 所示。由圖 4.9(e) 我們可以觀察到系統電壓值都能收斂到我們希望的電壓值，也就是電壓調節的目的能夠順利達成。

接下來我們考慮當  $\Delta Q_1 \neq 0$  的情況下，系統是否仍然能夠達成電壓調節的功能。當  $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$  時，選定初始狀態為  $x_0 = [0.4, 0.1, -0.2, 1.2]$  模擬結果如圖 4.10 所示。觀察圖 4.10(e) 可以知道系統依然能夠達成電壓調節的功能，並且由圖 4.10(b)-(d) 可以發現在  $\Delta Q_1$  為定值的時候，狀態  $x_1$ 、 $x_2$  及  $x_3$  最後也都會收斂到某個定值。接下來考慮  $Q_1^0 = 9$ ， $\Delta Q_1$  在  $-0.1 \sim 0.1$  之間隨機變動，系統的初始狀態為  $x_0 = [0.1, 0.2, 0.2, 0.9]$  模擬結果如圖 4.11 所示，由圖 4.11(e) 可以看出負載電壓仍然可以維持在 1 的地方。綜合以上的模擬結果，我們可以知道系統即使在具有不確定因素的影響下，仍然可以達成電壓調節的功能，並且在  $\Delta Q_1$  為某個常數時，系統狀態會收斂到平衡點。為了驗證系統在  $x_4 = 1$  時會存在穩定的平

衡點，我們將系統的零點動態線性化分析。為了方便說明，選定  $Q_1^0 = 9$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$  時，由”MATLAB”可以計算出此時系統的平衡點為  $\mathbf{x}_e = [0.1758, 0, 0.0021]$ ，令  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3]$ ，其中

$$\hat{x}_1 = x_1 - 0.1758$$

$$\hat{x}_2 = x_2 - 0$$

$$\hat{x}_3 = x_3 - 0.0021$$

將系統(3.2)-(3.4)對平衡點進行線性化，可以得到

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -21.9083 & -0.1667 & 21.8729 \\ 16.0403 & 0 & -65.8507 \end{bmatrix}$$

其特徵值分別為  $-65.7698$  及  $-0.1238 \pm 4.0725i$ ，實部都在左半平面，因此可知道此平衡點為穩定的平衡點。根據上述的模擬及分析，我們可以得到以下結果

**定理 4.1** 若系統(3.6)-(3.7)為最小相位系統，並且滿足假設 2.1、2.2 及 4.1，在  $\Delta Q_1$  為某個常數時，控制律選定為(4.6)，系統將完成輸出電壓調節的功能，並且使狀態收斂至平衡點。

接下來，我們藉由”AUTO”來分析系統對應  $Q_1$  的平衡點軌跡，將控制律(4.6)式中的 sat 函數以 sigmoid 函數取代，則控制律可以寫成如下的形式

$$u = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} + T x_2 \right) \cdot \text{sigmoid}(s(t), \varepsilon) \quad (4.7)$$

設定  $T = 0.0001$  及  $\varepsilon = 0.001$ ，當  $\Delta Q_1 = 0$  時， $Q_1$  與系統平衡點對應的軌跡如圖 4.12 所示，圖中實線代表的是穩定的平衡點，虛線代表的是不穩定的平衡點，”x”代表的是模擬中發現的鞍點分歧。由圖 4.12(d)可以看出當  $\Delta Q_1 = 0$  時，狀態  $x_4$  穩定的平衡點都能夠維持在 1 的位置。當  $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡如圖 4.13 所示。我們將圖 4.12(d)及 4.13(d)在鞍點分岔附近的軌跡放大，分別

如圖 4.14(a)及圖 4.14(b)所示，由圖中可以看出狀態  $x_4$  的軌跡都是連續的。由於我們使用 sigmoid 函數取代 sgn 函數，因此由圖 4.13(d)可以發現隨著  $\Delta Q_1$  增加，狀態  $x_4$  的平衡點會由 1 往下略為遞減，和第三章中所討論的情況相同。

比較本章中設計的控制律與第三章中設計的控制律，可以知道兩者都能夠達成電壓調節的功能，而且反應速度都很快，對系統的不確定因素較不敏感。但是在第三章中設計的控制律無法使假設 2.3 包含狀態  $x_2$ ，因此在滿足不等式(3.13)的區域中，我們還必須對每個點計算出狀態  $x_2$  的範圍，才能找出使系統可以達成電壓調節的區域，而本章中所設計的控制律，假設條件經過修改後得到假設 4.1，可以包含所有狀態的資訊，因此我們可以估算出使系統達成電壓調節的區域。



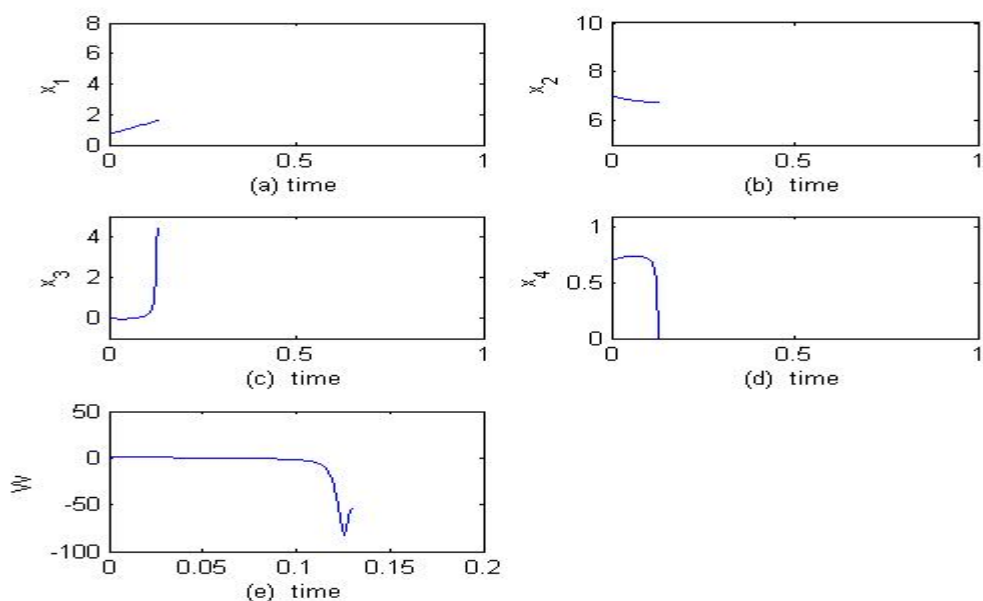


圖 4.1：  $Q_1 = 10$ ，  $\Delta Q_1 = 0.192$ ， 初始狀態  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 7 \ 0.1 \ 0.7]$  在滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區

域內無法達成電壓調節的例子，(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，

(d) 狀態  $x_4$ ，(e) 函數  $W(\mathbf{x}, t)$  值。

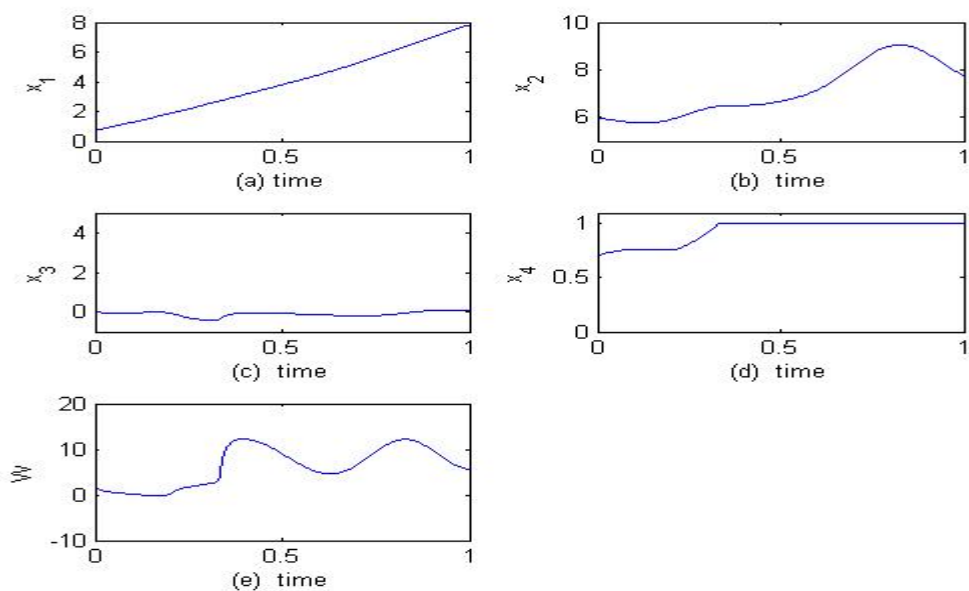


圖 4.2：  $Q_1 = 10$ ，  $\Delta Q_1 = 0.192$ ， 初始狀態  $\mathbf{x}_0 = [0.7 \ 7 \ 0.1 \ 0.7]$  在滿足  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  的區

域內達成電壓調節的例子，(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，

(e) 函數  $W(\mathbf{x}, t)$  值。

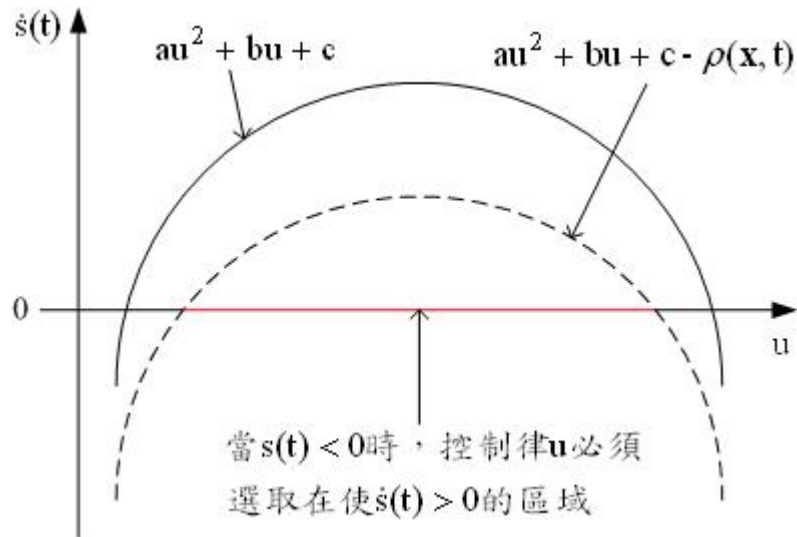


圖 4.3：(4.2)式示意圖。

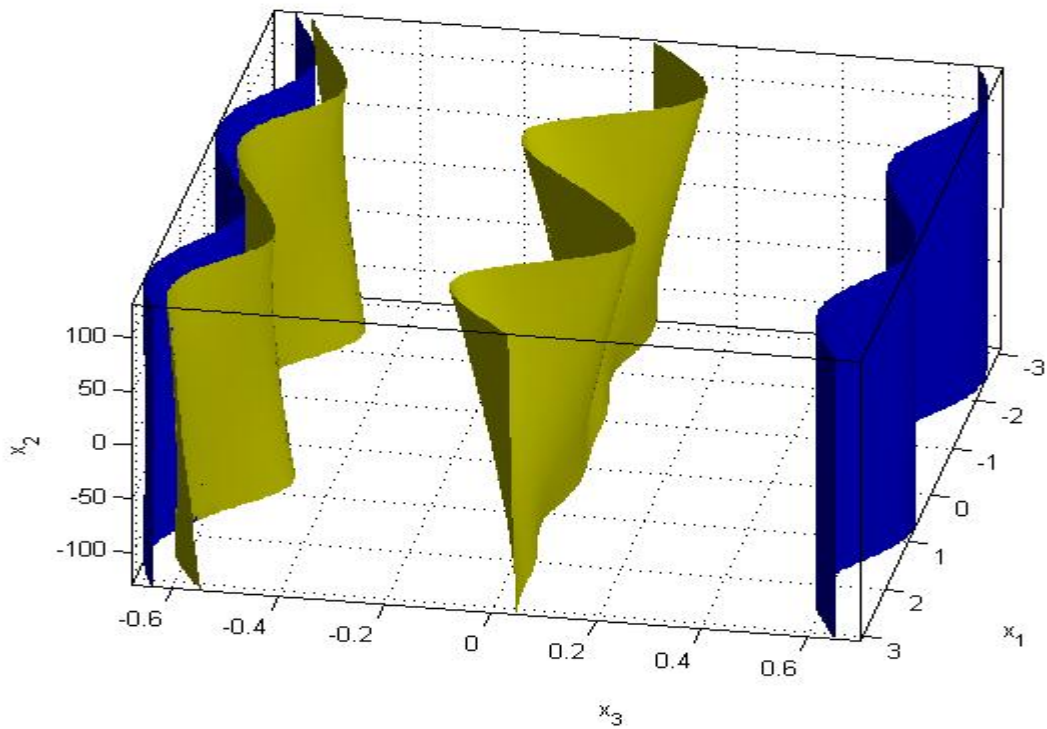


圖 4.4：藍色曲面是  $W^*(x, t) = 0$  的等高曲面，黃色曲面是  $\frac{d}{dt} W^*(x, t) = 0$  的等高曲面，兩個黃色曲面間的區域是  $\frac{d}{dt} W^*(x, t) < 0$  的區域，兩個藍色曲面間的區域是  $W^*(x, t) > 0$  的區域，在  $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.1$ ， $k_1 = 0.1$ ， $T = 0.0001$ ， $x_4 = 0.9$  時。

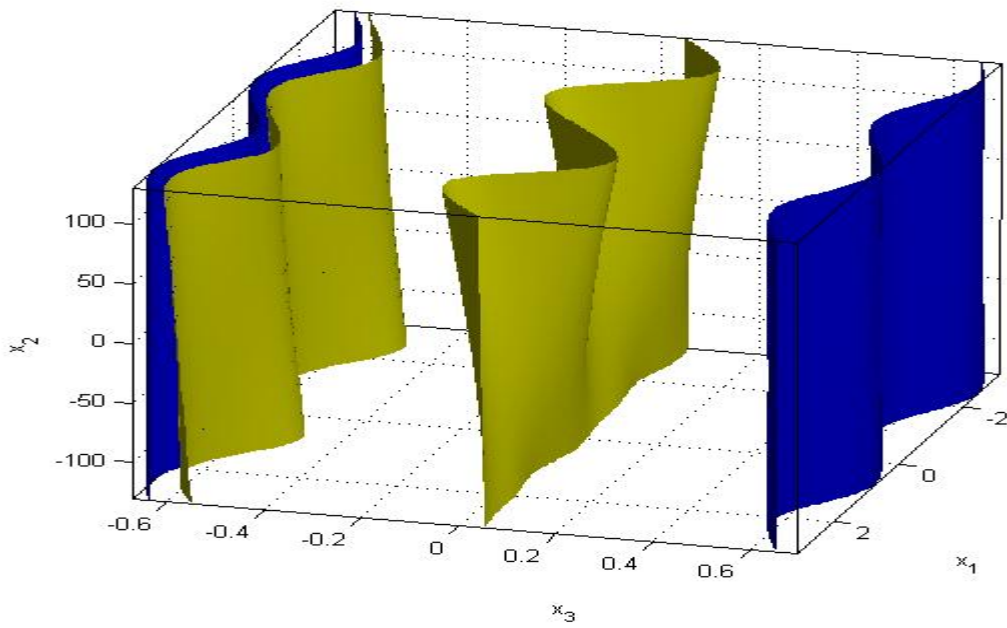


圖 4.5: 藍色曲面是  $W^*(x,t)=0$  的等高曲面，黃色曲面是  $\frac{d}{dt}W^*(x,t)=0$  的等高曲面，兩個黃色曲面間的區域是  $\frac{d}{dt}W^*(x,t)<0$  的區域，兩個藍色曲面間的區域是  $W^*(x,t)>0$  的區域，在  $Q_1^0=8$ ， $\Delta Q_1=0.1$ ， $k_1=0.1$ ， $T=0.0001$ ， $x_4=0.95$  時。

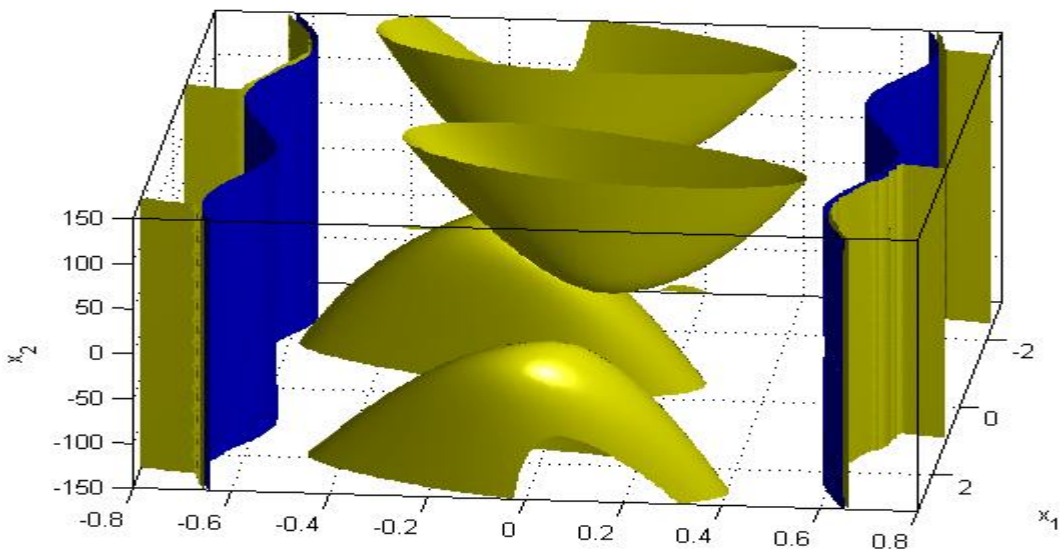


圖 4.6: 藍色曲面是  $W^*(x,t)=0$  的等高曲面，黃色曲面是  $\frac{d}{dt}W^*(x,t)=0$  的等高曲面，兩個藍色曲面間的區域是  $W^*(x,t)>0$  的區域，在  $Q_1^0=8$ ， $\Delta Q_1=0.1$ ， $k_1=0.1$ ， $T=0.0001$ ， $x_4=1$  時。



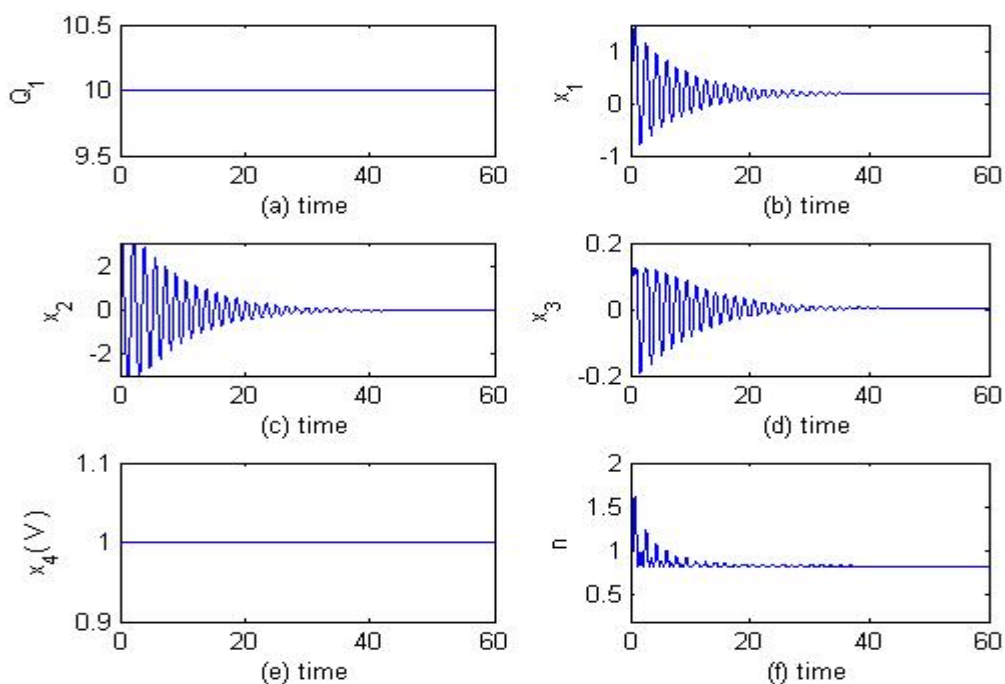


圖 4.7： $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ， $T = 0.0001$ ，初始電壓誤差為正值，(a) $Q_1$  值，(b) 狀態  $x_1$ ，(c) 狀態  $x_2$ ，(d) 狀態  $x_3$ ，(e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。

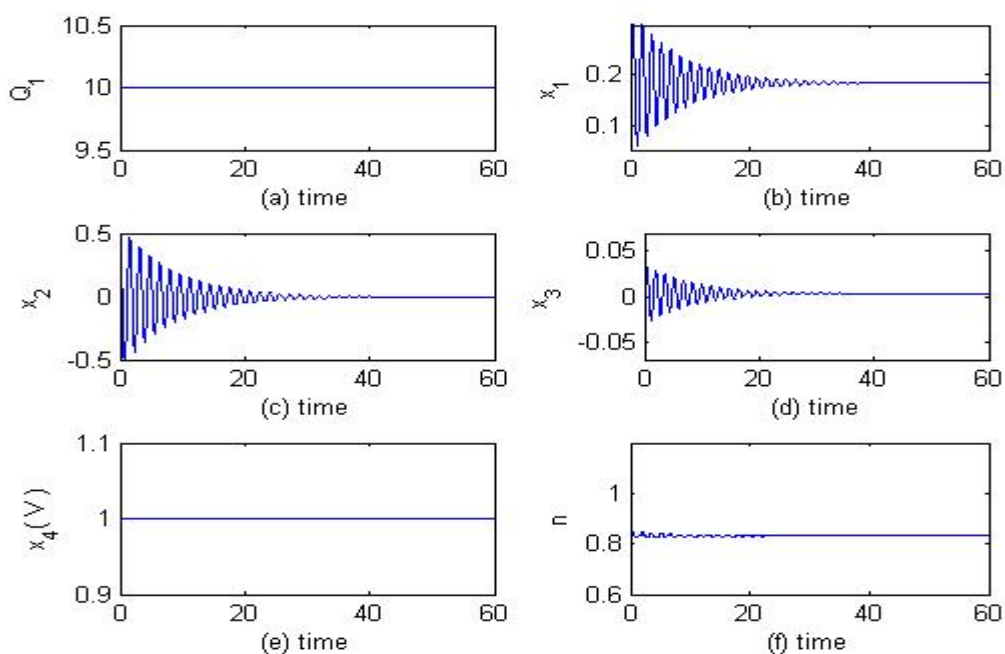


圖 4.8： $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ， $T = 0.0001$ ，初始電壓誤差為負值，(a) $Q_1$  值，(b) 狀態  $x_1$ ，(c) 狀態  $x_2$ ，(d) 狀態  $x_3$ ，(e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。

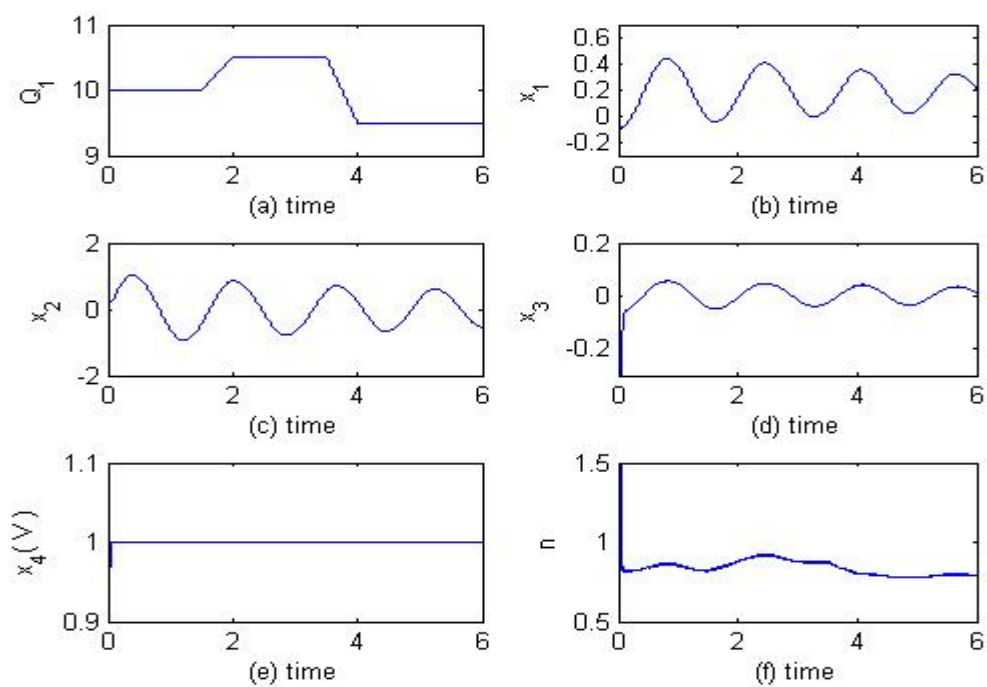


圖 4.9： $\Delta Q_1 = 0$ ， $T = 0.0001$ ， $Q_1^0$  在 9.5~10.5 之間變化，(a) $Q_1$  值，(b)狀態  $x_1$ ，  
(c)狀態  $x_2$ ，(d)狀態  $x_3$ ，(e)狀態  $x_4$ (負載電壓值)，(f)變壓器調節值。

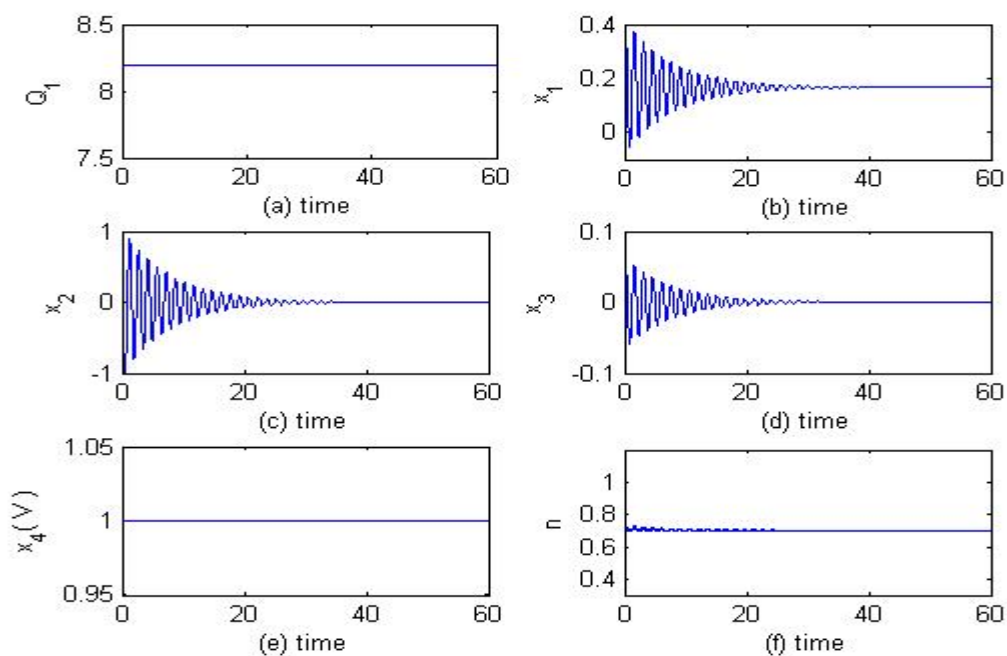


圖 4.10： $Q_1^0 = 8$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $T = 0.0001$ ，(a) $Q_1$  值，(b)狀態  $x_1$ ，(c)狀態  $x_2$ ，(d)  
狀態  $x_3$ ，(e)狀態  $x_4$ (負載電壓值)，(f)變壓器調節值。

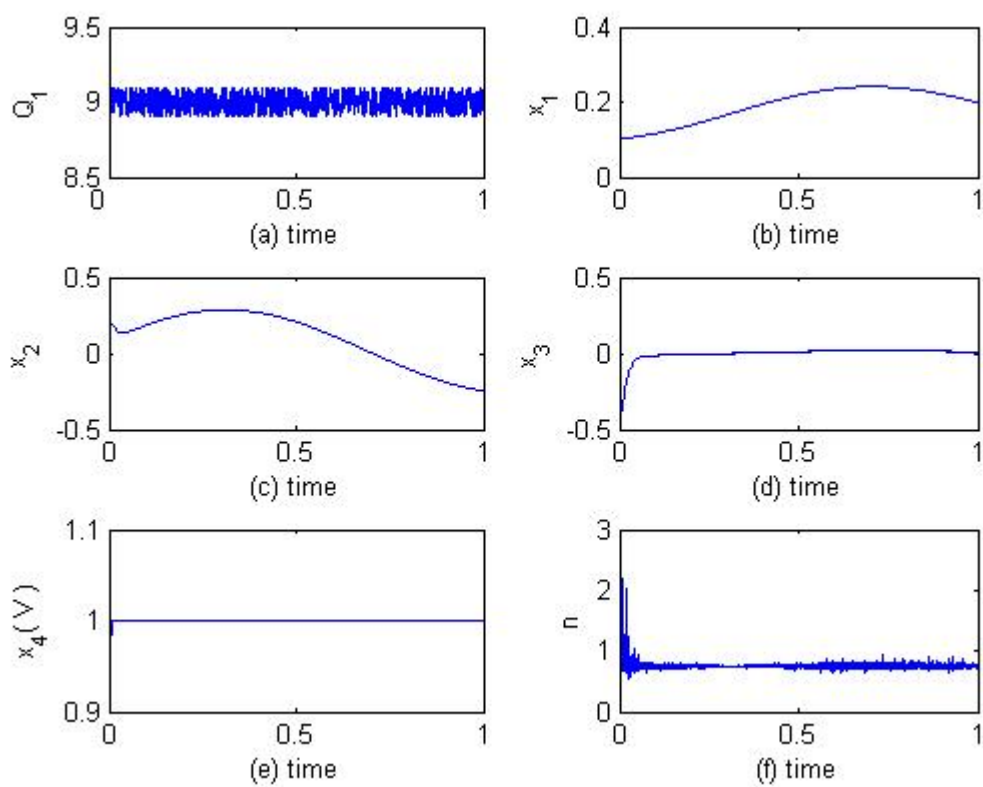


圖 4.11：  $Q_1^0 = 9$ ，  $T = 0.0001$ ，  $\Delta Q_1$  在  $-0.1 \sim 0.1$  之間隨機變動，(a)  $Q_1$  值，(b) 狀態  $x_1$ ，(c) 狀態  $x_2$ ，(d) 狀態  $x_3$ ，(e) 狀態  $x_4$  (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。

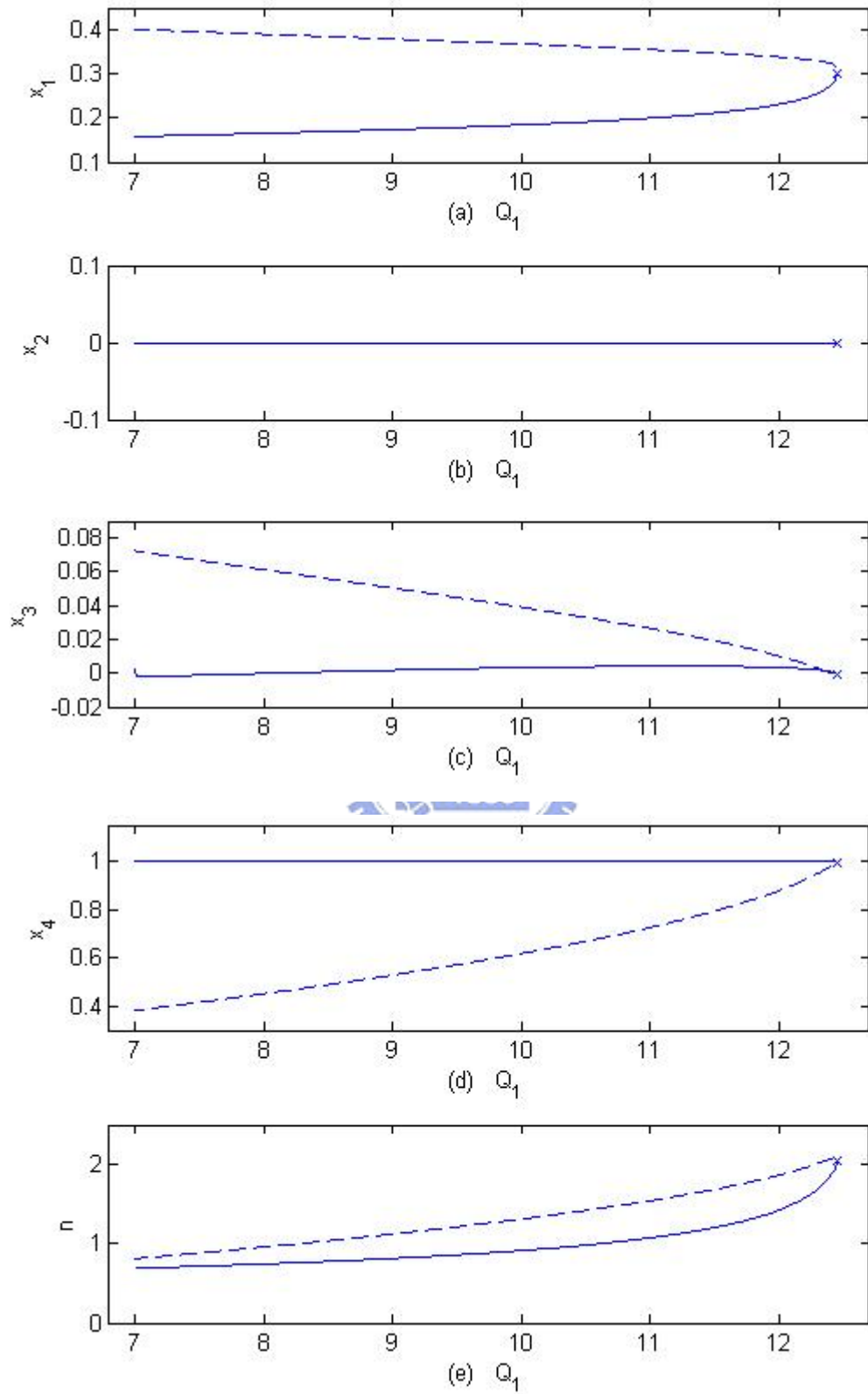


圖 4.12:  $\varepsilon = 0.001$ ,  $T = 0.0001$ ,  $\Delta Q_1 = 0$ ,  $Q_1 = Q_1^0$  變動時系統平衡點對應的軌

跡, (a) 狀態  $x_1$ , (b) 狀態  $x_2$ , (c) 狀態  $x_3$ , (d) 狀態  $x_4$ , (e) 變壓器調節值。

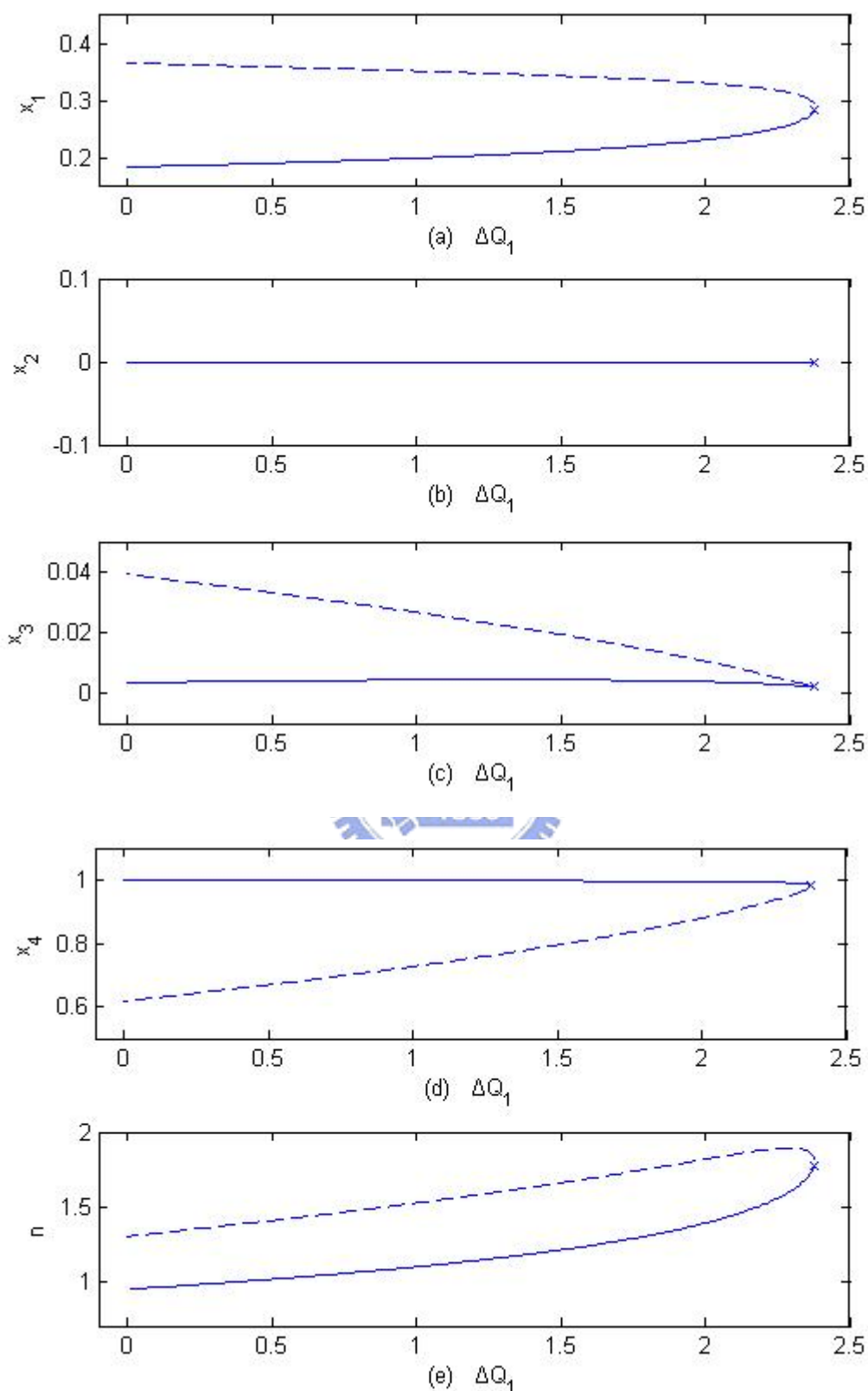


圖 4.13： $\varepsilon = 0.001$ ， $T = 0.0001$ ， $Q_1^0 = 10$ ， $\Delta Q_1$  變動時系統平衡點對應的軌跡，

(a) 狀態  $x_1$ ，(b) 狀態  $x_2$ ，(c) 狀態  $x_3$ ，(d) 狀態  $x_4$ ，(e) 變壓器調節值。

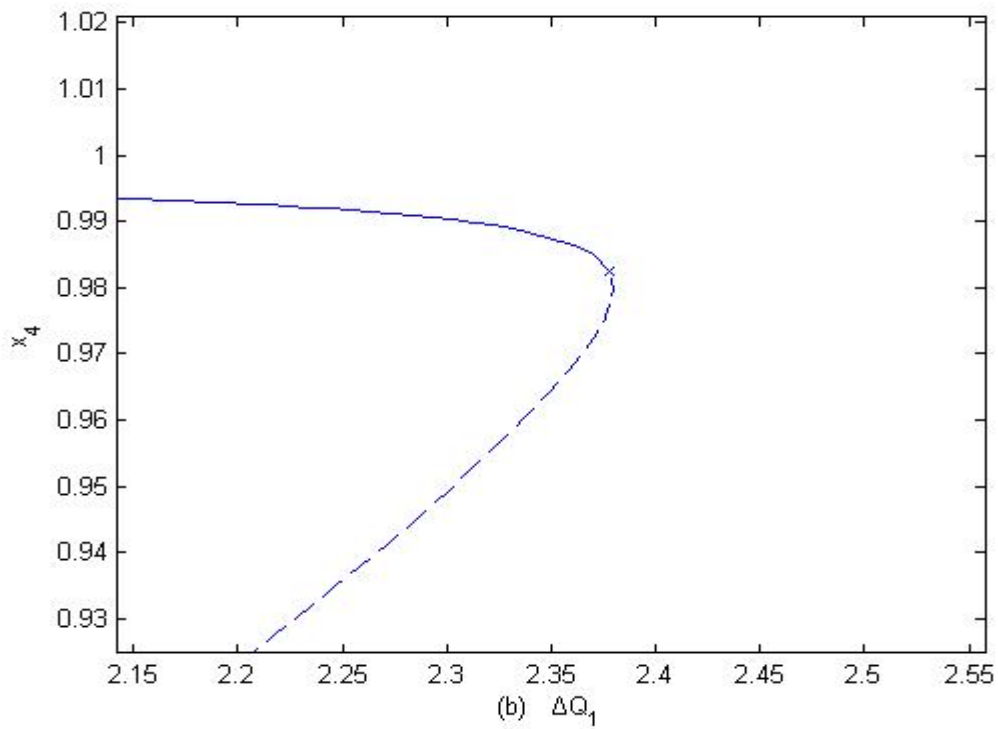
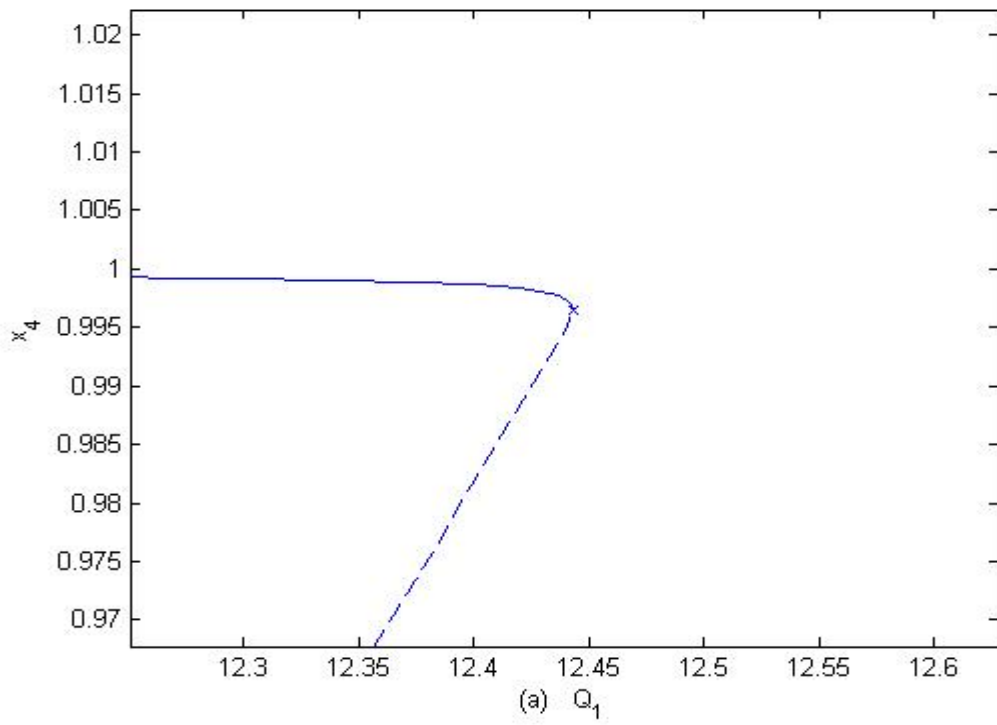


圖 4.14：狀態  $x_4$  平衡點軌跡的局部放大圖，(a)圖 4.12(d)的局部放大圖，(b)圖

4.13(d)的局部放大圖。

# 第五章

## 結論與未來研究方向

### 5.1 結論



在本論文中，我們對具有二次輸入的非線性系統，系統相對階數為一階時，以可變結構控制理論設計出適合的控制律，達到輸出追蹤的目的，應用在電力系統的電壓調節，以提升電力供給的品質。我們利用 Dobson 和 Chiang[21]所提出的電力系統模型，在原始系統模型中加入一個變壓器[8]，利用變壓器的匝數比作為控制器輸入，以達到電壓調節的目的。利用可變結構控制的方法，具有高準確度、反應迅速、對於系統的不確定因素或外界干擾較不敏感以及設計方法較容易等優點。

在第三章中，我們針對單輸入的二次多項式非線性系統，系統相對階數為一階，以可變結構控制理論提出控制律的設計方法，達到輸出追蹤的目的，應用在電力系統中，使系統即使存有不確定性與干擾的時候，仍然可以達到電壓調節的目的。藉由與 LQR 設計的控制律比較，我們可以發現以可變結構設計的控制律

在電壓調節的功能上有優異的表現，能夠在非常短的時間內達成電壓調節的目的，能量的損耗也很少，並且對於系統的不確定因素與干擾較不敏感，具有良好的穩健性。電力系統應用可變結構設計的控制律，對應負載無效功率變化的系統平衡點軌跡分析，可以知道系統能夠達成電壓調節的範圍，避免負載過大造成電壓崩潰的情形發生，並且在系統為最小相位系統且負載無效功率為固定值的時候，所有的狀態最終會收斂到穩定的平衡點。

在第四章中，我們針對電力系統設計出改良型可變結構控制律，使系統存有不確定性與干擾時，仍然可以達到電壓調節的功能，並且藉由滿足假設條件的狀態區域估計出使系統能夠達成電壓調節目的的初始狀態區域，避免系統的初始狀態選取在無法達成電壓調節的區域，造成不穩定的結果。

## 5.2 未來研究方向



1. 在本論文中，對於系統控制器存在輸入二次項時，所設計的控制器利用於系統相對階數為一階，當用於相對階數為高階時，是否可以設計出適當的控制律。
2. 以更有效的方法估測出使系統能達成輸出追蹤的初始狀態區域。
3. 對於電力系統的電壓調節，是否可以應用二階順滑模式控制來達成電壓調節的目的
4. 一個有效且可靠的電力系統應使得電壓與頻率維持一定，本論文中只完成電壓調節，應該加入頻率的控制。



## 參考文獻

- [1] O. Bethoux, T. Floquet, and J. P. Barbot, "Advanced sliding mode stabilization of a levitation system," presented at the Eur. Control Conf., Cambridge, U. K., 2003.
- [2] E. Moulay and W. Perruquetti, "Stabilization of Nonaffine Systems : A Constructive Method for Polynomial Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, No. 4 , April, 2005.
- [3] J. Zhong, D. Cheng and X. Hu, "Constructive Stabilization for Quadratic input Nonlinear Systems," Automatica, available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- [4] J. J. E. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," International Journal Control, Vol. 38, pp. 465-492, 1983.
- [5] J. J. E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Pentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [6] Utkin, V. I. , Sliding modes and their application to variable structure systems, MIR Publishers, Moscow, Russia, 1978.
- [7] 陳永平, 可變結構控制, 全華科技圖書, 1991.
- [8] D. C. Liaw, K. H. Fang and C. C. Song, "Bifurcation Analysis of Power Systems with Tap Changer," Proc. 2005 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control (ICNSC'05), Tucson, Arizona, U.S.A., pp. 283-288, 2005.

- [9] C. Edwards, and S. K. Spurgeon, Sliding Mode Control: Theory and Applications, Taylor & Francis, 1998.
- [10] J. J. E. Slotine and S. S. Satry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," International Journal of Control, Vol. 38, No. 2, pp. 465- 492, 1983.
- [11] D. C. Liaw, Y. W. Liang, and C. C. Cheng, "Nonlinear control for missile terminal guidance," Journal of Dynamics Systemsn Measurement, and Control, Vol. 122, No. 4, pp. 663-668, 2000.
- [12] Y. W. Liang and S. D. Xu, "Reliable control of nonlinear systems vis variable Structure scheme," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 51, No. 10, pp. 1721- 1726, 2006.
- [13] Y. W. Liang ,S. D. Xu and C. L. Tsai, "Study of VSC reliable designs with application to spacecraft attitude stabilization," IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 15, No. 2, pp. 332 -338, 2007.
- [14] K. Y. Lian and C. R. Lin, "Sliding mode motion/force control of constrained Robot," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, pp. 1101- 1103, 1990.
- [15] Y. P. Chen, and S. C. Lo, "Sliding-mode controller design for space craft attitude tracking maneuvers," IEEE Transactions on Aerospace and Electric Systems Technology, Vol. 29, No. 4, pp. 1328- 1333, 1993.
- [16] E. H. Abed, A. M. A. Hamdan, H. C. Lee, and A.G. Parlos, "On bifurcations in power system models and voltage collapse," Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 6, pp. 3014-3015, Dec. 5-7 1990.

- [17] B. H. Lee and K. Y. Lee, "A study on voltage collapse mechanism in electric power systems," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 3, pp. 966-974, 1991.
- [18] W. Xu and Y. Mansour, "Voltage stability analysis using generic dynamic load models," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 479-493, 1994.
- [19] P. Kundur, Power System Stability and Control, McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [20] E. H. Abed, J. C. Alexander, H. Wang, A. M. A. Hamdan, and H. C. Lee, "Dynamic bifurcations in a power system model exhibiting voltage collapse," IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Vol. 5, pp. 2509-2512, May 3-6 1992.
- [21] I. Dobson, H. D. Chiang, J. S. Thorp and L. Fekih – Ahmed, "A model of voltage collapse in electric power systems," Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 3, pp. 2104-2109, Dec 7-9 1988.
- [22] I. Dobson, H. D. Chiang, R. J. Thomas, J. S. Thorp and L. Fekih-Ahmed, "On voltage collapse in electric power systems," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 2, pp. 601-611, 1990.
- [23] J. H. Choi and J. C. Kim, "Advanced voltage regulation method of power distribution systems interconnected with dispersed storage and generation systems," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 16, No. 2, pp. 329-334, 2001.
- [24] H. Ohtsuki, A. Yokoyama and Y. Sekine, "Reverse action of on-load tap changer in association with voltage collapse," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 1 pp. 300-306, 1991.

- [25] C. A. Smith, M. A. Redfern and S. Potts, "Improvement in the performance of on-load tap changer transformers operating in series," IEEE Power Engineering Society General Meeting, Vol. 3, pp. 1905-1910, July 13-17 2003.
- [26] A. F. Filippov, Differential Equation with Discontinuous Rightsides, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht , Boston, London, 1988.
- [27] F. L. Lewis, V. L. Syrmos, Optimal Control, 2nd ed., Wiley, 1995.
- [28] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control Linear Quadratic Methods, Prentice-Hall, 1990.
- [29] K. Walve, "Modelling of power system components at severe disturbances," International conference on Large High Voltage Electric Systems, CIGRÉ pp. 18-38, 1986.
- [30] IEEE Task Force on Load Representation for Dynamic Performance, 1993, "Load Representation for Dynamic Performance Analysis," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 2, pp. 472-482, 1993.