

國立交通大學

電信工程學系

碩士論文



背接金屬共平面波導饋入槽孔天線

**Slotted Conductor-Backed Coplanar
Waveguide Antennas**

研究生：程奕翔 (Yi-Xiang Cheng)

指導教授：林育德 博士 (Dr. Yu-De Lin)

中華民國九十七年七月

國立交通大學

電信工程學系碩士班

碩士論文

背接金屬共平面波導饋入槽孔天線

Slotted Conductor-Backed Coplanar Waveguide Antennas



研究生：程奕翔 (Yi-Xiang Cheng)

指導教授：林育德 博士 (Dr. Yu-De Lin)

中華民國九十七年七月

背接金屬共平面波導饋入槽孔天線

Slotted Conductor-Backed Coplanar Waveguide Antennas

研究生：程奕翔

Student : Yi-Xiang Cheng

指導教授：林育德 博士

Advisor : Dr. Yu-De Lin

國立交通大學

電信工程學系碩士班



A Thesis

Submitted to Department of Communication Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master of Science

In

Communication Engineering

June 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月

背接金屬共平面波導饋入槽孔天線

研究生：程奕翔

指導教授：林育德 博士

國立交通大學 電信工程學系

摘要

背接金屬共平面波導以主模(共平面波導模態)傳播電磁波，在任何頻率下皆會激發表面波向兩側傳遞，致使印刷電路板或是封裝裡產生不必要的耦合及串擾。文章中簡短提及，我們能藉由幾種方式抑制此表面洩漏波，使背接金屬共平面波導只以共平面波導模態傳遞，形成良好的傳輸線。

利用全波分析，得知該表面波以某一角度偏離主軸傳遞。在已知偏離角度下，沿該角度射線每隔一波長蝕刻一矩形槽孔，使每個槽孔被等相位地激發。當矩形槽孔長邊遠大於寬邊，並約等於二分之一波長(共振長度)時，電磁波便能有效地朝空氣輻射能量形成天線，最後可得一集中的邊射輻射場形。

直播衛星收發天線運用在 12GHz 的頻段，要求高增益與高效率。本論文研究遂將天線的操作頻率設計在該頻段上，最後可得 25.98dBi 的輻射增益以及 0.9GHz 的頻寬。

Slotted Conductor-Backed Coplanar Waveguide Antennas

Student: Yi-Xiang Cheng

Advisor : Dr. Yu-De Lin

Department of Communication Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

Conductor-backed coplanar waveguide (CBCPW) exists two dominant modes including CPW and parallel plate modes (surface wave) with no cutoff frequency. The latter causes the power leakage into transverse direction, resulting in unexpected or even harmful coupling and crosstalk to the neighboring transmission lines or devices. By some methods, we can suppress the surface leaky wave, and the structure would become a good transmission line. It will be exhibited briefly in the article.

Implementing the full wave analysis (Spectral Domain Analysis) on the CBCPW structure, we can acquire the information that the surface wave propagates along an particular angle relative to the main CPW line. So, we etch rectangular slots along the angle on the two side ground planes. Because the slots are separated one guided wavelength, they are excited in the same phase. If the long dimension of the slot is significantly longer than the wide one and approximately equals to a half of guided wavelength, the slots fed by CBCPW can radiate power efficiently. Finally, we derive a broadside radiation pattern.

The antenna for direct broadcast from satellites (DBS) is operated at 12 GHz and asked for high gain and efficiency. We also make our antenna operate at this frequency.

Finally, we have the measured radiation pattern with 25.98dBi and the measured bandwidth with 0.9GHz.



誌謝

首先我要感謝我的指導教授 林育德博士，在這兩年研究所給予我的指導，讓我在微波及天線的領域得到相當多的知識與訓練。感謝張道治教授、黃瑞彬教授及沈志文學長在口試的時候前來指導。感謝吳霖堃教授在課餘時間仍不嫌煩的給予我研究上的意見。

感謝實驗室的大學長林烈全，這兩年一起相處的日子永生難忘；也感謝已畢業的士彥、宏德、智聰、旻翰學長在我碩一時期的幫助及陪伴；還有志豪、建宏、陳鈺、家綱，有你們的鼓勵及彼此間的討論，才能讓這本論文如期完成。謝謝信良、仁佑、侑賢、永志學弟在苦悶的碩二生活為我們帶來歡樂及實驗上的幫忙。

最後我要感謝在心理上給我最大支柱的家人，阿芬媽媽、婷纖，還有去年離開我的阿炳爸爸，因為你們我才能完成學業。



目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
謝誌.....	III
目錄.....	V
圖錄.....	VI
第一章 序論.....	1
1.1 動機與目的	1
1.2 章節介紹	2
第二章 基本原理及特性.....	3
2.1 洩漏波的基本原理與特性	3
2.2 背接金屬共平面波導上表面洩漏波的介紹與抑制.....	6
第三章 背接金屬共平面波導的SDA分析	10
3.1 Space domain to spectral domain	10
3.2 SDA on CBCPW.....	11
3.3 SDA 數值結果.....	18
第四章 平板金屬波導饋入槽孔分析.....	19
4.1 平板金屬波導饋入槽孔的等效電路推導.....	19
4.2 平板金屬波導饋入槽孔的等效電路模擬驗證.....	27
第五章 背接金屬共平面波導饋入的槽孔天線設計.....	30
5.1 設計流程.....	30
5.2 天線模擬與量測結果.....	34
5.3 天線應用延伸.....	44
第六章 結論.....	53
參考文獻.....	54

圖、表錄

圖 2-1	YZ 方向波數分解	3
圖 2-2	微帶線結構.....	3
圖 2-3	微帶線 SDA 分析	4
圖 2-4	XZ 方向波數分解	5
圖 2-5	CPW structure.....	5
圖 2-6	CPW SDA 分析.....	5
圖 2-7	CBCPW structure	6
圖 2-8	CBCPW SDA 分	6
圖 2-9	CPW mode 電場分布.....	6
圖 2-10	PPW mode 電場分布.....	6
圖 2-11	CBCPW with via 電路示意圖.....	7
圖 2-12	CBCPW with via 正面電路圖.....	8
圖 2-13	CBCPW with via 反面電路圖.....	8
圖 2-14	比較有無導通孔的 S11 量測.....	8
圖 2-15	比較有無導通孔的 S21 量測.....	8
圖 2-16	Multilayered CBCPW structure	9
圖 3-1	兩層介質微帶線剖面圖	10
圖 3-2	CBCPW 單層介質剖面圖.....	11
圖 3-3	X 方向電場分佈	14
圖 3-4	Z 方向電場分佈	14
圖 3-5	微帶線積分路徑	16
圖 3-6	CBCPW 積分路徑(一).....	16
圖 3-7	CBCPW 積分路徑(二)	17
圖 3-8	CBCPW 積分路徑(三)	17

圖 3-9	相位常數曲線	18
圖 3-10	衰減常數曲線	18
圖 3-11	CBCPW 表面電流波.....	18
圖 4-1	矩形槽孔被於無窮平面金屬的示意圖	19
圖 4-2	槽孔內電場分佈	19
圖 4-3	理想 PPW 內電場磁場.....	20
圖 4-4	平板金屬波導內槽孔示意圖	20
圖 4-5	旋轉槽孔在 PPW 上層金屬示意圖.....	22
圖 4-6	傳輸線上串接一正規化阻抗示意圖	24
圖 4-7	理想 PPW 邊界條件示意圖.....	27
圖 4-8	理想 PPW 內電場分佈.....	27
圖 4-9	理想 PPW 內磁場分佈.....	27
圖 4-10	HFSS 模擬示意圖.....	28
圖 4-11	隨槽孔長度變化的正規化阻抗值	28
圖 4-12	隨槽孔角度變化對應之共振長度	29
圖 4-13	隨槽孔角度變化對應之等效電阻值	29
圖 5-1	PPW 波偏離角度示意圖.....	30
圖 5-2	天線上槽孔旋轉角度對應的串接阻抗值	31
圖 5-3	矩形金屬波導饋入縱向槽孔天線示意圖	32
圖 5-4	矩形金屬波導饋入縱向槽孔的等效電路	32
圖 5-5	平板金屬波導饋入旋轉槽孔天線示意圖	33
圖 5-6	平板金屬波導饋入旋轉槽孔的等效電路	33
圖 5-7	原始 CBCPW 架構	34
圖 5-8	調整後 CBCPW 架構	34
圖 5-9	模擬天線示意圖	35
圖 5-10	天線饋入端放大圖	35

圖 5-11	饋入結構俯視圖	36
圖 5-12	饋入結構側視圖	36
圖 5-13	饋入結構 S 參數模擬結果	36
圖 5-14	天線與饋入架構合併示意電路	37
圖 5-15	天線 S 參數模擬與量測結果	37
圖 5-16	旋轉槽孔內電場分佈	38
圖 5-17	天線槽孔內電場分解	38
圖 5-18	12GHz YZ 切面輻射場形.....	39
圖 5-19	12GHz XY 切面 phi 極化.....	40
圖 5-20	12GHz XY 切面 theta 極化	40
圖 5-21	12GHz phi 極化 3D 場形	40
圖 5-22	12GHz theta 極化 3D 場形	40
圖 5-23	YZ 切面隨頻率變化的 theta 極化輻射場形	41
圖 5-24	電路正面照片	42
圖 5-25	饋入電路的正面照片	43
圖 5-26	饋入電路的反面照片	43
圖 5-27	電路側面鍍銅導通照片	43
圖 5-28	全部槽孔向短路端平移 0.5 波長示意圖.....	44
圖 5-29	下半部槽孔向短路端平移 0.5 波長示意圖.....	45
圖 5-30	四片扇型天線組成的天線陣列及槽孔內電場分解示意圖	46
圖 5-31	饋入電路俯視圖	47
圖 5-32	饋入電路側視圖	47
圖 5-33	饋入電路 S 參數模擬	47
圖 5-34	天線與饋入電路合併示意圖	48
圖 5-35	天線 S 參數模擬與量測結果.....	49
圖 5-36	12GHz YZ 切面輻射場型.....	49

圖 5-37 12GHz XY 切面輻射場型	49
圖 5-38 隨頻率變化的 YZ 切面量測輻射場形	50
圖 5-39 電路俯看圖.....	51
圖 5-40 電路側視圖.....	51
圖 5-41 天線板材邊緣鍍銅.....	52
圖 5-42 電路背面使用同軸電纜饋入.....	52
表 5-1 串接阻抗值對應之旋轉角度.....	31
表 5-2 YZ 切面隨頻率變化的 theta 極化輻射增益數值整理.....	42



第一章 序論

(Introduction)

1.1 動機與目的

1973年，T. Itoh 和R. Mittray發明了頻譜分析法(Spectral-domain analysis，SDA)[1]，可求得各種印刷電路架構的散射係數以及作為傳輸線的特性阻抗，更由此法求得架構中電流及電場的分佈。

1979年，W. Menzel提出洩漏波天線的想法[2]。1986年，Oliner教授及Lee博士推導出洩漏波的橫向共振特性及輻射範圍的判定，使得我們可以更有系統去設計洩漏波天線[3]。

1980年，由於MMIC的發展促進了各種平面傳輸線在此技術上的學術研究，Y. C. Shih 和 T. Itoh 教授對背接金屬共平面波導提出論述[4]，指出此種架構與共平面波導都以主模準 TEM 傳遞電磁波，另外介質層背面存在額外的金屬，無論頻率為何，背接金屬共平面波導皆可額外支持平板金屬波導的模態傳遞，而此種模態會造成 IC 封裝裡電路之間的串擾，降低效能。

1947年，Stevenson發表了槽孔天線在矩形金屬波導裡的等效電路[5]。由於矩形金屬波導能承受大功率，以及其饋入簡單的優點，該結構饋入的槽孔陣列天線被大量運用在軍事雷達系統上。1996年，Reuven Shavit推導出橫向矩形槽孔在平板波導裡的等效電路[6]。在本碩士論文裡，藉由相同的推導方式，求得了旋轉角度的矩形槽孔在平板波導裡的等效電路，並運用在背接金屬共平面波導裡，以期得到理想的輻射天線。

1988年，M. Ando, K. Sakurai, N. Goto, K. Arimura 和 Y. Itoh發表了放射狀線槽孔天線 (radial line slot antenna, RLSA)[7]，運用在直播衛星收發，該天線具有高輻射增益與高效率的特性，並且在邊射方向(broadside)具有高指向性鉛筆束(pencil beam)的輻射場形。

1.2 章節介紹

本論文第二章介紹洩漏波天線的基本理論，探討背接金屬共平面波導裡的表面洩漏波，以及抑制該洩漏波的三種方法。第三章主要介紹背接金屬共平面波導頻譜分析(SDA)的成果，求得其相位常數與洩漏常數。第四章分析了旋轉角度的矩形槽孔在平板金屬波導裡的等效電路。第五章主要介紹背接金屬共平面波導饋入的槽孔陣列天線。第六章為結論。



第二章 基本原理及特性

本章我們介紹洩漏波的基本原理與特性。並簡單介紹背接金屬共平面波導結構中，表面洩漏波在電路上的影響與抑制方法。

2.1 洩漏波的基本原理與特性

洩漏波主要可分成兩種：space leaky wave 與 surface leaky wave。在這裡我們用微帶線(microstrip line)及共平面波導(coplanar waveguide)為例作介紹。

2.1.1 space leaky wave

圖 2-1、2-2 為微帶線的示意圖，波的傳遞為 Z 方向。假設 Z 方向的傳播常數為 $k_z = \beta - j\alpha$ (β 為相位常數， α 為衰減常數或是洩漏常數)，其中 β 、 α 都是頻率的函數。對該結構而言，如果 β 大於 k_0 ，可得一虛數 k_y (Y 方向之傳播常數)，代表電磁波在 Y 方向不傳遞而是隨距離衰減，意即能量被束縛在基板中；反之，如果 β 小於 k_0 ，可得一實數 k_y ，代表電磁波在 Y 方向帶有分量，意即能量輻射至空氣中。

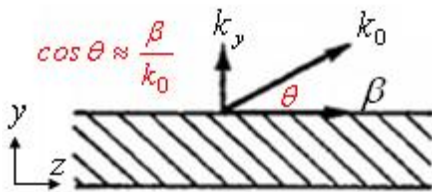


圖 2-1 YZ 方向波數分解

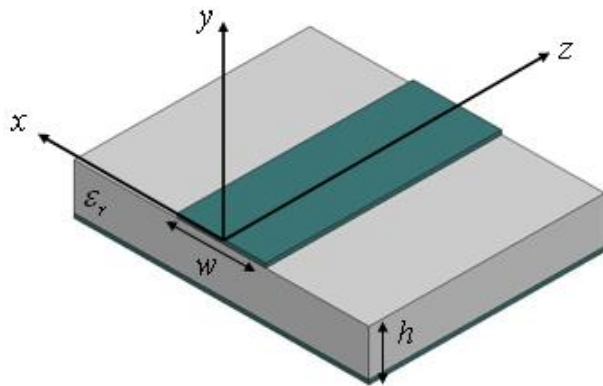


圖 2-2 微帶線結構

圖2-3為一微帶線正規化後的傳播常數曲線。在(I)區，由於衰減常數大於相位常數，無法有效地產生建設性干涉，能量快速衰減，我們稱此區域為reactive region。在(II)區，起始點為相位常數等於衰減常數的交點($\beta = \alpha$)，到相位常數等於空氣波數($\beta = k_0$)為終點，此區域由於 $\beta < k_0$ ，能量會向空氣傳遞，在相對於Z軸，仰角為 $\theta = \cos^{-1}(\beta/k_0)$ 的地方會有建設性干涉，故天線運用在這個頻段稱之為radiation region。在(III)區，因為 $\beta > k_0$ ，能量被束縛在基板內不再向空氣傳遞，稱此區域為bound region。

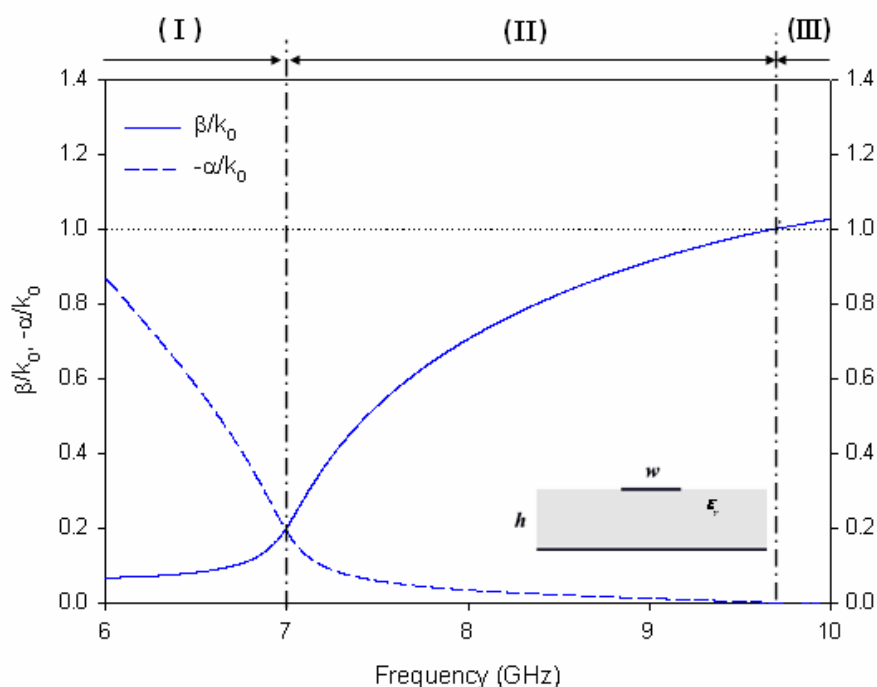


圖 2-3 微帶線 SDA 分析

2.1.2 surface leaky wave

圖 2-4、2-5 為共平面波導示意圖，波的傳遞為 Z 方向，針對一電磁波在 Y 方向為衰減，意即能量只在基板裡傳遞。由於基板本身為一介質波導結構，可能存在一表面波，假設其傳播常數 k_s 。對該結構而言，如果 β 大於 k_s ，可得一虛數 k_x ，代表能量不會往 X 方向傳遞，意即能量被束縛在 Z 方向上，這時就不會有串擾(crosstalk)的現象發生；反之如果 β 小於 k_s ，得一實數 k_x ，代表電磁波在

橫向上有分量，使原本在 Z 方向上傳遞的主模會向兩側以表面波的模態洩漏，造成電路之間的干擾。

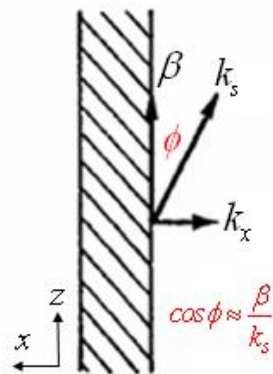


圖 2-4 XZ 方向波數分解

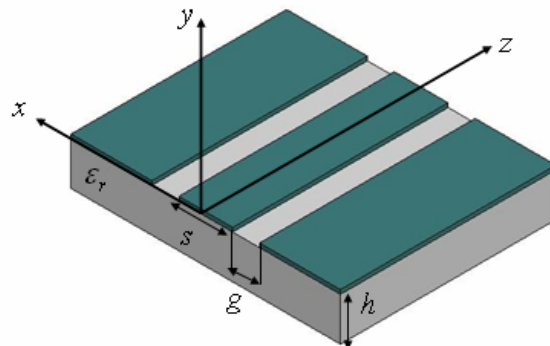


圖 2-5 CPW structure

圖 2-6 為一具平面波導與介質波導表面波正規化後的傳播常數(低頻時為 TM_0 mode)。在(I)區，由於 $\beta > k_s$ ，能量不往橫向傳遞，稱此區域為 bound region。在(II)區，當 $\beta < k_s$ ，能量會在基板裡相對 Z 軸，偏離 $\theta = \cos^{-1}(\beta/k_s)$ 角度向兩側傳遞，稱此區域為 surface leaky region。

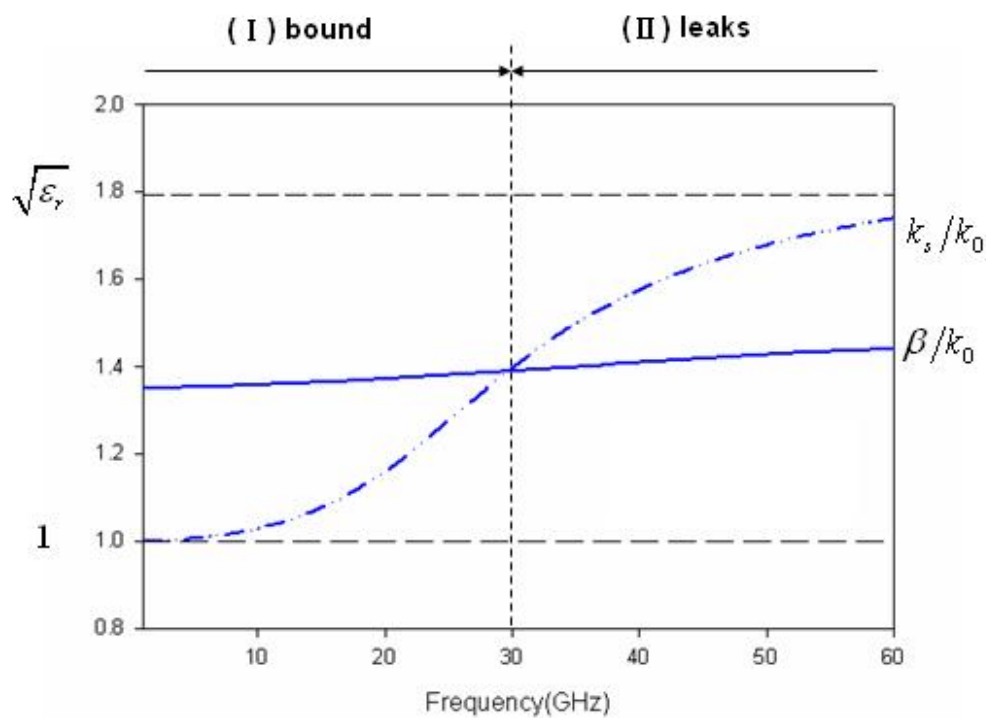


圖 2-6 共平面波導 SDA 分析

2.2 背接金屬共平面波導上表面洩漏波的介紹與抑制

2.2.1 surface wave on CBCPW

圖 2-7 為背接金屬共平面波導，圖 2-8 為該架構的正規化傳播常數與表面波波數的頻率響應(此圖由 SDA 分析求得，詳細論述留待第三章說明)。

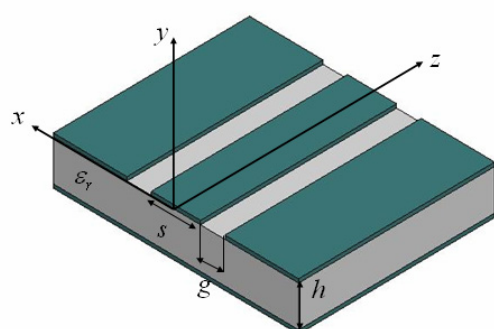


圖 2-7 CBCPW structure

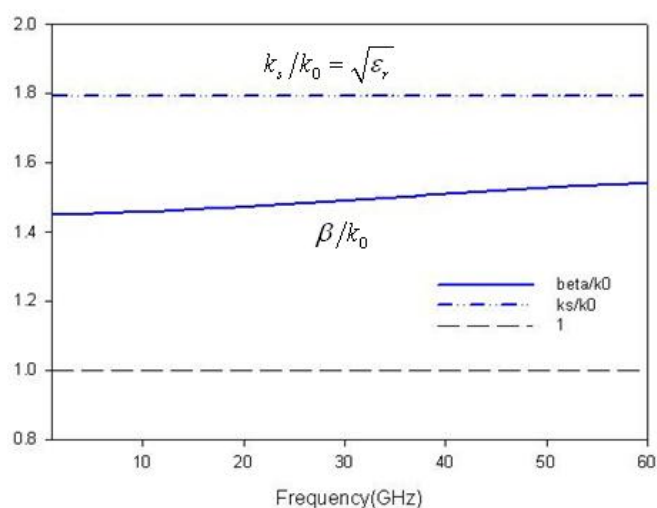


圖 2-8 CBCPW SDA 分析

由於表面波波數 k_s 在任何頻率下皆大於相位常數 β ，使得表面波永遠存在。我們可以宣稱此架構具有兩種主模：(1) CPW mode (2) PPW mode，後者在低頻時為 TEM wave。兩種電場場形如圖 2-9、2-10 所示。

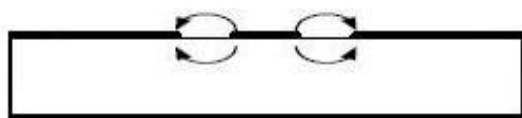


圖 2-9 CPW mode 電場分布

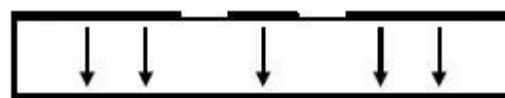


圖 2-10 PPW mode 電場分布

2.2.2 surface wave suppression on CBCPW

背接金屬共平面波導結構中，我們簡單介紹三種抑制表面波的方法：

(a) CBCPW with via (b) UC-PBG CBCPW (c) Multilayered CBCPW。

(a) CBCPW with via

共平面波導(CPW)的饋入為中間金屬火線，兩側金屬地線，而背接金屬共平面波導則是連背面的金屬也為地線，在饋入端使用 SMA 接頭將三個地接起來，可以確保三者等電位。但是電磁波隨著行徑距離增加(朝 Z 方向)，會發生上層金屬地與下層金屬地不等電位的現象，使兩者之間產生垂直電場，如圖 2-10。我們可以將這些垂直電場等效成水平磁流，就如同我們熟知的貼片天線(patch antenna)是用前後兩端的等效磁流輻射，這些水平磁流亦會向外側繼續延續，形成向兩側傳遞的洩漏表面波。

如果能讓三個金屬地的電位持續保持相等，理論上便可抑制基板內的表面波，於是我們在上層金屬地與下層金屬地之間以銅柱(via)導通維持電位相等，如圖 2-11。在 IC 封裝裡也使用 via 結構隔絕電路間干擾，業界規格 via 以二十分之一波長為間隔。

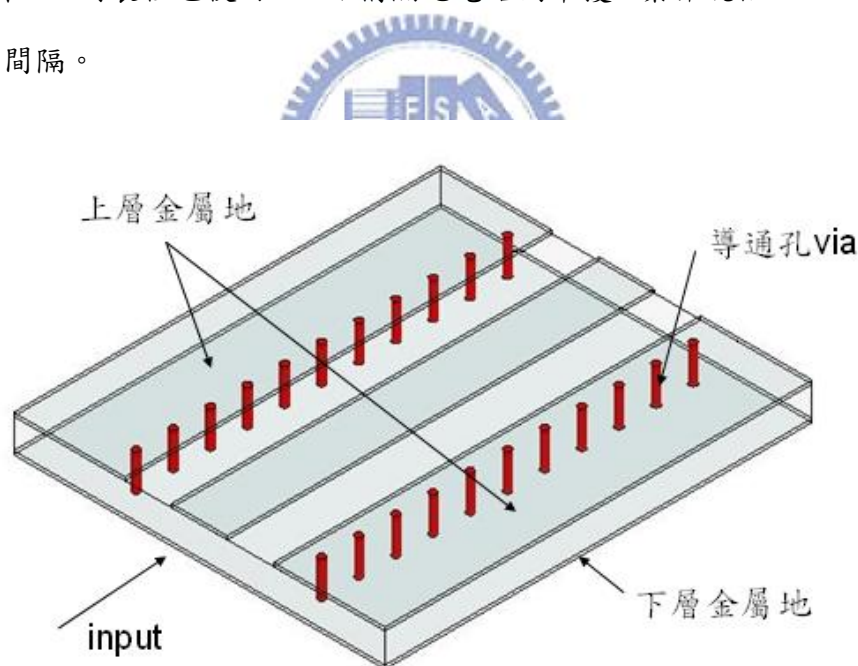


圖 2-11 CBCPW with via 電路示意圖

我們實際上製作了一個該結構的電路，由於人工的鑽孔及焊接技術沒有辦法做到間隔太小的 via 結構，不過針對低頻仍有程度上的改進。圖 2-12、2-13 分別為電路的正面與反面。兩端使用 SMA 接頭當輸入、輸出端。

(Rogers4003c , $\epsilon_r = 3.58$, size : 80mm x 83mm , interval of via : 7mm ,
 $h = 1.524\text{mm}$, $g = 0.9\text{mm}$, $w = 2.9\text{mm}$, for $Z_0 = 50\text{ ohm}$)

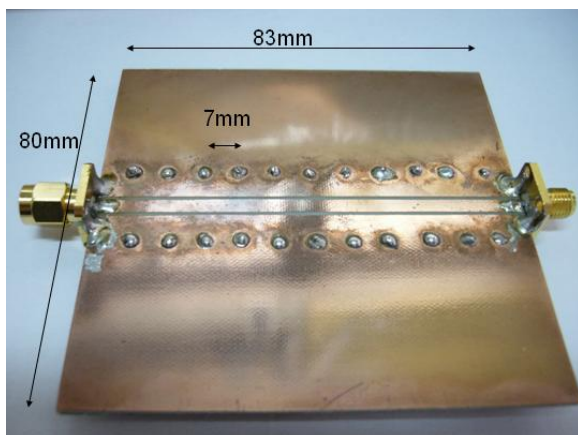


圖 2-12 CBCPW with via 正面電路圖

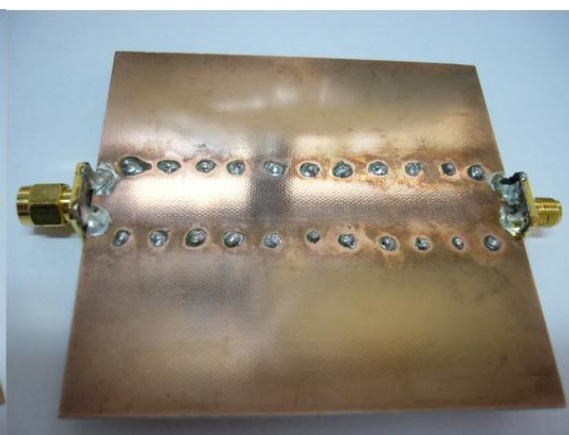


圖 2-13 CBCPW with via 反面電路圖

圖 2-14、2-15 為沒有 via 結構與有 via 結構的 S 參數比較：虛線為沒有 via 的 CBCPW，圖形呈現週期性的共振是因為上層金屬地為有限寬度，兩側末端為開路形成一共振腔；實線為有 via 的 CBCPW，明顯可見在 5GHz 以下的 S11 與 S21 有明顯改善，能量可以束縛在傳播方向形成良好的傳輸線，大於 5GHz 的部份則沒有什麼改善，主因是 via 的間隔對高頻來說過大，無法有效地使上下層金屬地等電位，以致基板裡仍存在表面波。

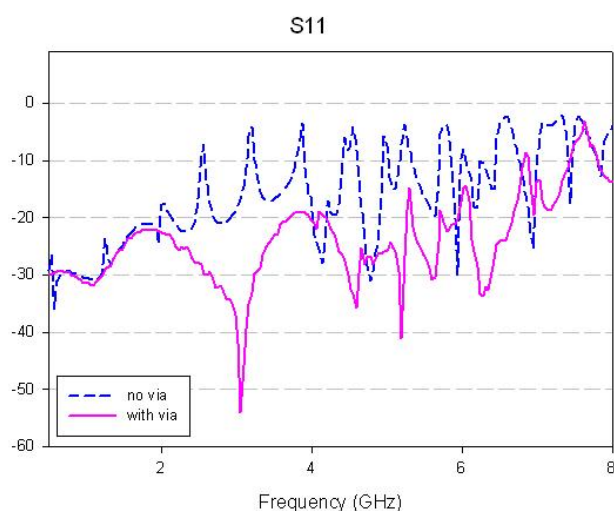


圖 2-14 比較有無導通孔 S11 量測

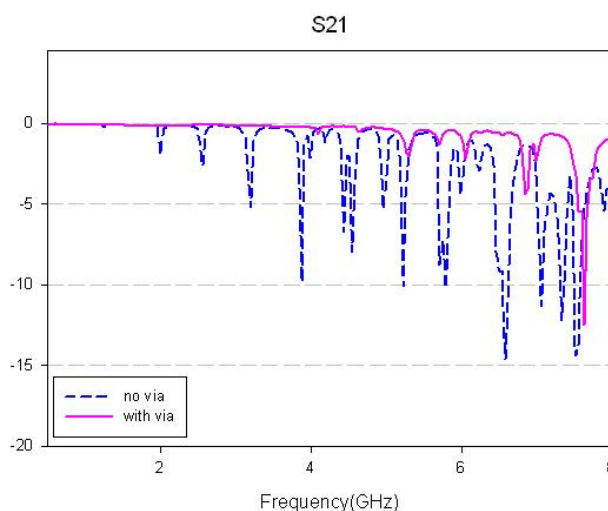


圖 2-15 比較有無導通孔的 S21 量測

(b) UC-PBG CBCPW

Uniplanar Compact Photonic-Bandgap (UC-PBG), 原理為在電路板上蝕刻週期性結構，於某一頻段內對電磁波而言為高阻抗，可阻擋能量傳遞。運用此原理，在背接金屬共平面波導的上層金屬地蝕刻週期性結構，可抑制基板內表面波的傳遞[8]。

(c) Multilayered CBCPW

傳統的背景金屬共平面波導只使用到單層的介質，所以板材內支持的表面波為平板金屬波導的模態。今將上下層金屬間插入另一介質，如圖 2-16，此時存在於基板間的表面波會以接近含地介質波導(grounded dielectric slab)的模態傳遞，在低頻時為 TM_0 mode(如圖 2-5 中 k_s/k_0 曲線)。所以在低頻的地方會出現所謂的 bound region，此區域表面波會被抑制。藉由調整 h_1 、 h_2 、 ϵ_1 和 ϵ_2 可決定 bound region 涵蓋的範圍[9]。



圖 2-16 Multilayered CBCPW structure

第三章 背接金屬共平面波導的SDA分析

本章我們利用 Itoh 教授提出的頻譜分析法(spectral domain analysis)[1]，求得背接金屬共平面波導結構傳播方向的波數，並利用 HFSS (Ansoft)驗證表面波以偏離一角度在基板內向兩側基板傳播。

3.1 Space domain to spectral domain

圖 3-1 為兩層介質的微帶線剖面圖。

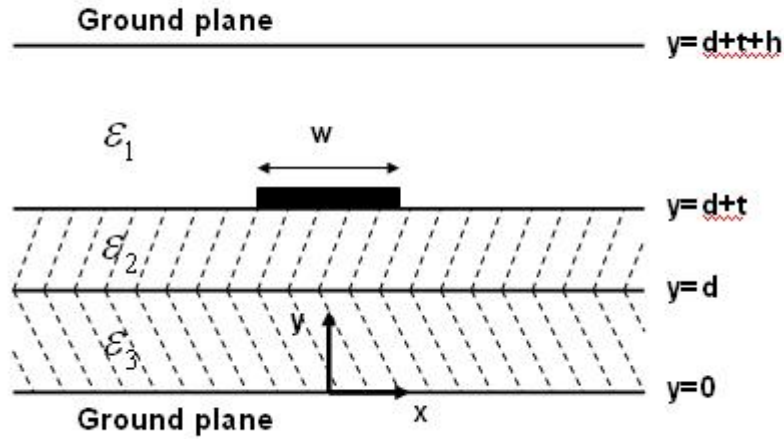


圖 3-1 兩層介質微帶線剖面圖

傳統的空間分析，電場分佈是以電流與格林函數的迴旋積分求得：

$$\int [Z_{zz}(x-x', y)J_z(x') + Z_{zx}(x-x', y)J_x(x')] dx' = E_z(x) \quad (3-1a)$$

$$\int [Z_{xz}(x-x', y)J_z(x') + Z_{xx}(x-x', y)J_x(x')] dx' = E_x(x) \quad (3-1b)$$

其中 Z_{zz} 、 Z_{zx} 、 Z_{xz} 、 Z_{xx} 為空間上電流產生電場的格林函數。在已知電流分佈與格林函數的情況下，經過迴旋積分便可求出電場。今天我們將格林函數、電流及電場對 X 方向波數(k_x)做傅利葉轉換：

$$\tilde{\Phi}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{jk_x x} dx \quad (3-2)$$

(3-1a)、(3-1b)在 $y = d + t$ 位置的等式可變成：

$$\tilde{Z}_{zz}(k_x, d+t)\tilde{J}_z(k_x) + \tilde{Z}_{zx}(k_x, d+t)\tilde{J}_x(k_x) = \tilde{E}_z(k_x, d+t) \quad (3-3a)$$

$$\tilde{Z}_{xz}(k_x, d+t)\tilde{J}_z(k_x) + \tilde{Z}_{xx}(k_x, d+t)\tilde{J}_x(k_x) = \tilde{E}_x(k_x, d+t) \quad (3-3b)$$

其中($\sim$)為傅利葉轉換後的 k_x 頻譜函數。我們可以觀察到，等式由空間上的積分式變成 k_x 頻譜上的乘積式，所以從頻譜觀點著手可以減少運算上的困難。

3.2 SDA on CBCPW

3.2.1 格林函數 (Green's Function)

圖 3-2 為 CBCPW 結構之剖面圖。對 CBCPW 而言一共分為兩個區域；

(1) region 1：無窮延伸之上層空氣 (2) region 3：有限高度的基板。

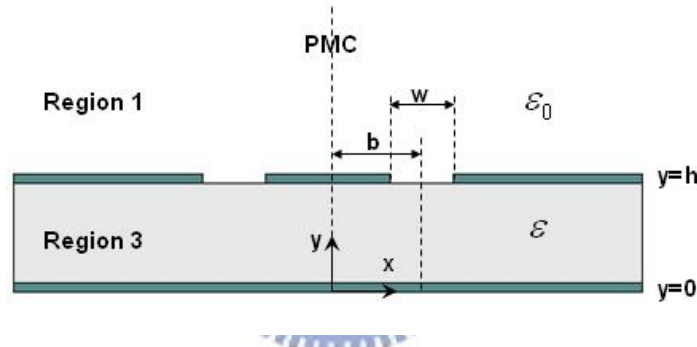


圖 3-2 CBCPW 單層介質剖面圖

在結構中存在的場為混合的形式，我們把場拆解成對 Y 方向的 TE 及 TM 場，並用 scalar potential $\tilde{\psi}^e$ 、 $\tilde{\psi}^h$ (ψ^e 、 ψ^h 的 FT) 表示。所得之電場與磁場為：

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -j \frac{k_x}{\bar{y}} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial y} - j k_z \tilde{\psi}^h & \tilde{H}_x &= j k_z \tilde{\psi}^e - j \frac{k_x}{\bar{z}} \frac{\partial \tilde{\psi}^h}{\partial y} \\ \tilde{E}_y &= \frac{1}{\bar{y}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \tilde{\psi}^e & \tilde{H}_y &= \frac{1}{\bar{z}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \tilde{\psi}^h \\ \tilde{E}_z &= -j \frac{k_z}{\bar{y}} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial y} + j k_x \tilde{\psi}^h & \tilde{H}_z &= -j k_x \tilde{\psi}^e - j \frac{k_z}{\bar{z}} \frac{\partial \tilde{\psi}^h}{\partial y} \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$\bar{y} = j\omega\epsilon \quad \bar{z} = j\omega\mu \quad k^2 = \omega^2\mu\epsilon$$

其中 k_x 為 X 方向之波數、 k_z 為 Z 方向之波數。傅利葉轉換的 scalar potential 滿足

$$\text{傅利葉轉換後的荷姆赫茲方程式：} \left(-k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_z^2 \right) \tilde{\psi} + k^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (3-5)$$

對(3-5)齊次方程式而言，我們熟知其通解為：

$$\tilde{\psi} = c_1 \cosh \gamma y + c_2 \sinh \gamma y, \quad \gamma^2 = k_x^2 + k_z^2 - k^2 \quad (3-6)$$

將 CBCPW 邊界條件帶入：在 region 1，上層空氣無限延伸， $y=h$ 為連續條件：

$$\tilde{\psi}_1^e = A^e e^{-\gamma_1(y-h)} \quad \tilde{\psi}_1^h = A^h e^{-\gamma_1(y-h)} \quad (3-7)$$

在 region 3， $y=0$ 為金屬， $y=h$ 為連續條件：

$$\tilde{\psi}_3^e = D^e \cosh \gamma_3 y \quad \tilde{\psi}_3^h = D^h \sinh \gamma_3 y \quad (3-8)$$

將(3-7)、(3-8)代入(3-4)得到兩個區域 X、Z 方向的電場與磁場：

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{x1} &= jk_x \gamma_{y1} A^e e^{-\gamma_1(y-h)} - jk_z A^h e^{-\gamma_1(y-h)} & \tilde{H}_{x1} &= jk_z A^e e^{-\gamma_1(y-h)} + jk_x \gamma_{z1} A^h e^{-\gamma_1(y-h)} \\ \tilde{E}_{x3} &= -jk_x \gamma_{y3} D^e \sinh \gamma_3 y - jk_z D^h \sinh \gamma_3 y & \tilde{H}_{x3} &= jk_z D^e \cosh \gamma_3 y - jk_x \gamma_{z3} D^h \cosh \gamma_3 y \\ \tilde{E}_{z1} &= jk_z \gamma_{y1} A^e e^{-\gamma_1(y-h)} + jk_x A^h e^{-\gamma_1(y-h)} & \tilde{H}_{z1} &= -jk_x A^e e^{-\gamma_1(y-h)} + jk_z \gamma_{z1} A^h e^{-\gamma_1(y-h)} \\ \tilde{E}_{z3} &= -jk_z \gamma_{y3} D^e \sinh \gamma_3 y + jk_x D^h \sinh \gamma_3 y & \tilde{H}_{z3} &= -jk_x D^e \cosh \gamma_3 y - jk_z \gamma_{z3} D^h \cosh \gamma_3 y \end{aligned}$$

$$\gamma_i^2 = k_{xi}^2 + k_{zi}^2 - k_i^2 \quad \gamma_{yi} = \frac{\gamma_i}{y_i} \quad \gamma_{zi} = \frac{\gamma_i}{z_i} \quad i=1,2,3... \quad (3-9)$$

為了求得 A^e 、 A^h 、 D^e 、 D^h 係數，將(3-9)代入 $y=h$ 介面上的邊界條件：

$$\tilde{E}_{x1} = \tilde{E}_{x3} \quad \tilde{E}_{z1} = \tilde{E}_{z3} \quad \tilde{H}_{x3} - \tilde{H}_{x1} = \tilde{J}_z \quad \tilde{H}_{z3} - \tilde{H}_{z1} = -\tilde{J}_x \quad (3-10)$$

其中(3-10)裡的 $\tilde{J}_z$ 與 $\tilde{J}_x$ 為 $y=h$ 介面上存在金屬的部份，換言之，我們是利用電流分佈來取代金屬存在的部份，有關電流分佈的形式，留待稍後討論。將電場及磁場代入，可得到在 XZ 平面上($y=h$)電場與電流的關係式，並用矩陣形式表現：

$$\begin{aligned} [\tilde{E}] &= [\tilde{G}_{EJ}] \cdot [\tilde{J}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{zz} & \tilde{Z}_{zx} \\ \tilde{Z}_{xz} & \tilde{Z}_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{E}_z \\ \tilde{E}_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} (k_z^2 \tilde{Z}_e + k_x^2 \tilde{Z}_h) & \frac{-k_x k_z}{k_x^2 + k_z^2} (\tilde{Z}_e - \tilde{Z}_h) \\ \frac{-k_x k_z}{k_x^2 + k_z^2} (\tilde{Z}_e - \tilde{Z}_h) & \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} (k_x^2 \tilde{Z}_e + k_z^2 \tilde{Z}_h) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} \quad (3-11) \\ \tilde{Z}_e &= \frac{\gamma_{y1} \gamma_{y3}}{\gamma_{y1} \coth \gamma_3 h + \gamma_{y3}} \quad \tilde{Z}_h = \frac{1}{\gamma_{z1} + \gamma_{z3} \coth \gamma_3 h} \end{aligned}$$

如此一來，便得到了經過傅利葉轉換後的格林函數 (Appendix A)。

3.2.2 $\tilde{G}_{EJ}$ to $\tilde{G}_{JE}$

對背接金屬共平面波導而言，在 $y=h$ 介面上由於絕大部分為金屬，造成我們要假設其電流分佈的困難，所以我們將格林函數的形式改寫。假設其源為電場，得到的電流為結果，其格林函數從 $\tilde{G}_{EL}$ 變成 $\tilde{G}_{JE}$ ，之間變化如下：

$$\begin{aligned} [\tilde{G}_{JE}] &= \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{zz} & \tilde{Y}_{zx} \\ \tilde{Y}_{xz} & \tilde{Y}_{xx} \end{bmatrix} = [\tilde{G}_{EJ}]^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{zz} & \tilde{Z}_{zx} \\ \tilde{Z}_{xz} & \tilde{Z}_{xx} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \begin{bmatrix} \frac{k_z^2}{\tilde{Z}_e} + \frac{k_x^2}{\tilde{Z}_h} & k_x k_z \left(\frac{1}{\tilde{Z}_e} - \frac{1}{\tilde{Z}_h} \right) \\ k_x k_z \left(\frac{1}{\tilde{Z}_e} - \frac{1}{\tilde{Z}_h} \right) & \frac{k_x^2}{\tilde{Z}_e} + \frac{k_z^2}{\tilde{Z}_h} \end{bmatrix} = \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \begin{bmatrix} k_z^2 \tilde{Y}_e + k_x^2 \tilde{Y}_h & k_x k_z (\tilde{Y}_e - \tilde{Y}_h) \\ k_x k_z (\tilde{Y}_e - \tilde{Y}_h) & k_x^2 \tilde{Y}_e + k_z^2 \tilde{Y}_h \end{bmatrix} \\ \tilde{Y}_e &= \frac{1}{\tilde{Z}_e} = \frac{\gamma_{y1} \cosh \gamma_3 h + \gamma_{y3} \sinh \gamma_3 h}{\gamma_{y1} \gamma_{y3} \sinh \gamma_3 h} \quad \tilde{Y}_h = \frac{1}{\tilde{Z}_h} = \frac{\gamma_{z1} \sinh \gamma_3 h + \gamma_{z3} \cosh \gamma_3 h}{\sinh \gamma_3 h} \quad (3-12) \end{aligned}$$

3.2.3 Basis (E field)

圖 3-2 為 CBCPW 之結構圖，對其兩種主模(CPW mode、PPW mode)左右為 PMC 對稱。所以我們使用 Itoh 教授假設的電場基底形式：

$$\begin{aligned}
 E_{xm}(x) = & \begin{cases} \frac{\cos[n\pi(x+b)/w]}{\sqrt{1-[2(x+b)/w]^2}} - \frac{\cos[n\pi(x-b)/w]}{\sqrt{1-[2(x-b)/w]^2}} & n=0,2,4... \\ \frac{\sin[n\pi(x+b)/w]}{\sqrt{1-[2(x+b)/w]^2}} + \frac{\sin[n\pi(x-b)/w]}{\sqrt{1-[2(x-b)/w]^2}} & n=1,3,5... \end{cases} \\
 & (3-13) \\
 E_{zm}(x) = & \begin{cases} \frac{\cos[m\pi(x+b)/w]}{\sqrt{1-[2(x+b)/w]^2}} + \frac{\cos[m\pi(x-b)/w]}{\sqrt{1-[2(x-b)/w]^2}} & m=1,3,5... \\ \frac{\sin[m\pi(x+b)/w]}{\sqrt{1-[2(x+b)/w]^2}} - \frac{\sin[m\pi(x-b)/w]}{\sqrt{1-[2(x-b)/w]^2}} & m=2,4,6... \end{cases}
 \end{aligned}$$

圖 3-3、3-4 為 X 方向、Z 方向電場對空間 X 軸作圖：

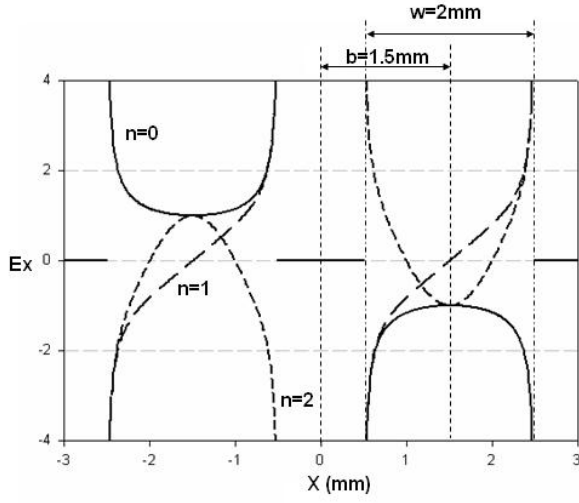


圖 3-3 X 方向電場分佈

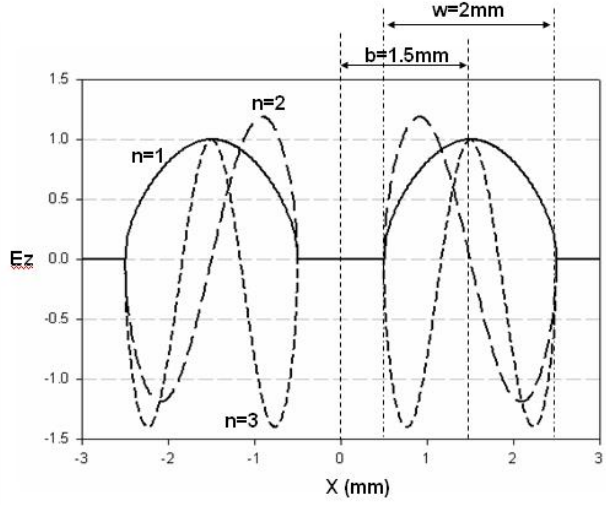


圖 3-4 Z 方向電場分佈

我們由圖形可知， E_x 在 gap 邊緣滿足垂直電場最大； E_z 在 gap 邊緣滿足切線電場為零。在 gap 裡存在的電場必須滿足二分之一波長的整數倍。接著將空間上的電場傅利葉轉換到 k_x 頻域上，其結果為 Bessel 函數形式：

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{xn}(k_x) &= \begin{cases} \frac{-j\pi w}{2} \sin(k_x b) \left[J_0\left(\left|\frac{wk_x + n\pi}{2}\right|\right) + J_0\left(\left|\frac{wk_x - n\pi}{2}\right|\right) \right] & n = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{-j\pi w}{2} \cos(k_x b) \left[J_0\left(\left|\frac{wk_x + n\pi}{2}\right|\right) - J_0\left(\left|\frac{wk_x - n\pi}{2}\right|\right) \right] & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ \tilde{E}_{zm}(k_x) &= \begin{cases} \frac{\pi w}{2} \cos(k_x b) \left[J_0\left(\left|\frac{wk_x + m\pi}{2}\right|\right) + J_0\left(\left|\frac{wk_x - m\pi}{2}\right|\right) \right] & m = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{-\pi w}{2} \sin(k_x b) \left[J_0\left(\left|\frac{wk_x + m\pi}{2}\right|\right) - J_0\left(\left|\frac{wk_x - m\pi}{2}\right|\right) \right] & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (3-14)$$

3.2.4 Method of solution

由 3.2.2 與 3.2.3 章節我們得到了 k_x 頻域上的格林函數與電場基底，最終目的為解出 Z 方向的波數 k_z 。首先我們先對 CBCPW gap 裡的電場作展開：

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z &= \sum_{m=1}^N c_m \tilde{E}_{zm}(k_x) \\ \tilde{E}_x &= \sum_{m=1}^M d_m \tilde{E}_{xm}(k_x) \end{aligned} \quad (3-15)$$

在 $y=h$ 介面上，有金屬的部份只存在水平電流而無水平電場；沒有金屬的部份只存在水平電場而無水平電流。我們利用此特性可以寫出下列等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{zk}(x)J_z(-x)dx = 0 \quad (3-16)$$

其中 E_{zk} 為 Z 方向電場的任一基底。從 Parseval's Theorem 得知能量在頻譜上的積分與在空間上的積分差 2π 倍，所以(3-16)可延續成：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{zk}(k_x)\tilde{J}_z(k_x)dk_x = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} E_{zk}(x)J_z(-x)dx = 0 \quad (3-17)$$

同理，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{xl}(k_x)\tilde{J}_x(k_x)dk_x = 0 \quad (3-18)$$

接著將(3-17)、(3-18)裡的 $\tilde{J}_x(k_x)$ 及 $\tilde{J}_z(k_x)$ 用(3-15)的電場基底與(3-12)的格林函數乘積展開：

$$\begin{aligned} \int_{k_x} \left[\tilde{E}_{zk}\tilde{Y}_{zz} \sum_{m=1}^N c_m \tilde{E}_{zm} + \tilde{E}_{zk}\tilde{Y}_{zx} \sum_{m=1}^M d_m \tilde{E}_{xm} \right] dk_x &= 0, \quad k=1,2,3..N \\ \int_{k_x} \left[\tilde{E}_{xl}\tilde{Y}_{xz} \sum_{m=1}^N c_m \tilde{E}_{zm} + \tilde{E}_{xl}\tilde{Y}_{xx} \sum_{m=1}^M d_m \tilde{E}_{xm} \right] dk_x &= 0, \quad l=1,2,3..M \end{aligned} \quad (3-19)$$

從(3-19)我們可以再整理成矩陣的形式，我們以(M=2,N=1)為例，意即 X 方向電場用兩組基底展開； Z 方向用一組基底展開，可得下列矩陣方程式：

$$\begin{bmatrix} \int_{k_x} \tilde{E}_{x1}\tilde{Y}_{xx}\tilde{E}_{x1} & \int_{k_x} \tilde{E}_{x1}\tilde{Y}_{xx}\tilde{E}_{x2} & \int_{k_x} \tilde{E}_{x1}\tilde{Y}_{xz}\tilde{E}_{z1} \\ \int_{k_x} \tilde{E}_{x2}\tilde{Y}_{xx}\tilde{E}_{x1} & \int_{k_x} \tilde{E}_{x2}\tilde{Y}_{xx}\tilde{E}_{x2} & \int_{k_x} \tilde{E}_{x2}\tilde{Y}_{xz}\tilde{E}_{z1} \\ \int_{k_x} \tilde{E}_{z1}\tilde{Y}_{zx}\tilde{E}_{x1} & \int_{k_x} \tilde{E}_{z1}\tilde{Y}_{zx}\tilde{E}_{x2} & \int_{k_x} \tilde{E}_{z1}\tilde{Y}_{zz}\tilde{E}_{z1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3-20)$$

在(3-20)中， $\tilde{E}_{xl}$ 與 $\tilde{E}_{zk}$ 為 k_x 的函數、 $\tilde{Y}$ 為 (k_x, k_z) 的函數，所以 $\tilde{E} \cdot \tilde{Y} \cdot \tilde{E}$ 是 (k_x, k_z) 的函數。由於 k_x 會被積分掉，整個矩陣最後會只變成 k_z 的函數。從線性代數觀點， $A\bar{x}=0$ 方程式要有唯一解，必須滿足 $|A|$ (行列式值) 為零，我們可以利用這個關係式求出 k_z ，得到 Z 方向的波數。

3.2.4 Integral contour

對一傳輸線而言，傳播方向的波數應該只有實數的相位常數而無虛數，表示電磁波只沿傳輸線作相位變化而無衰減現象(假設 lossless 材質)。對微帶線而言，如果要計算用來當作傳輸線的傳播常數，(3-20)式裡的積分路徑只要取實軸即可，如圖 3-5。但是對 CBCPW 來說，假設 k_z 為實數，則(3-12)式裡格林函數分母為零處會發生 k_x 為實數的情況，於是(3-20)式裡的積分路徑如果取實軸必定會發散，如圖 3-6。

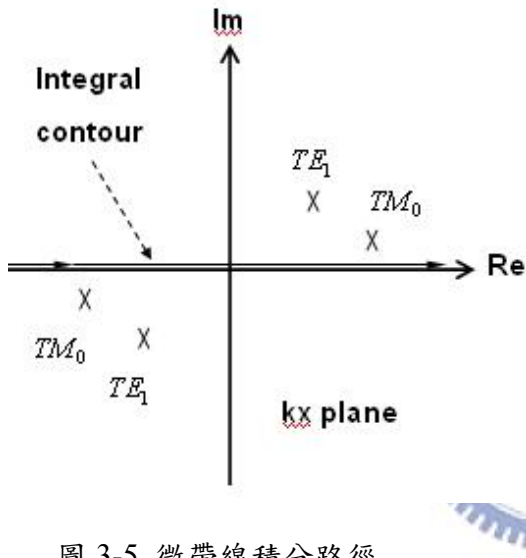


圖 3-5 微帶線積分路徑

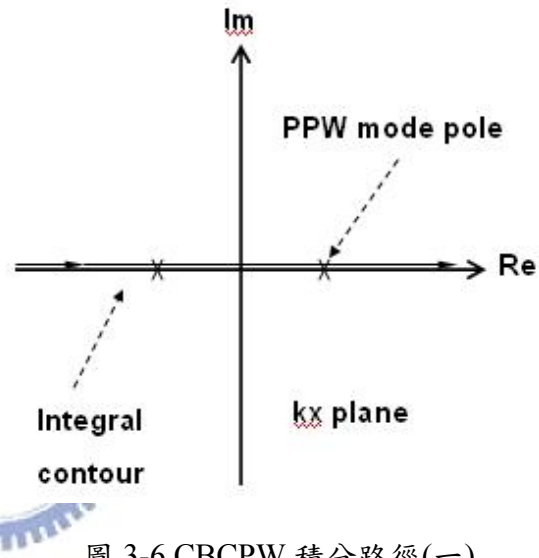


圖 3-6 CBCPW 積分路徑(一)

數學解釋如下，(3-12)的 $\tilde{Y}_e$ 、 $\tilde{Y}_h$ 通分後分母為零的等式為：

$$\gamma_{y1}\gamma_{y3} \sinh \gamma_3 h = 0 \quad (3-21)$$

(3-21)式零點發生在 $\gamma_{y3} = 0$ 或 $\sinh \gamma_3 h = 0$ 處，即 $\gamma_3 = \frac{-jn\pi}{h}$ 。我們先取 $n=0$ 來看，將 $\gamma_3 = 0$ 代入(3-6)式可得：

$$k_x^2 = k^2 - k_z^2 \quad (k = \sqrt{\epsilon_r} k_0) \quad (3-22)$$

(3-22)式中，由於 k_z 恆小於 k ，若 k_z 為實數則 k_x 必為實數，因此假如積分路徑取圖 3-6 必會有一極點存在實軸上，我們稱此 k_x 為 k_{xp} 。這告訴我們背接金屬共平面波導恆不可能只有實數的傳播常數。

由以上得知，CBCPW 的傳播常數必定帶有虛部。於是我們開始探討其造成虛部的效應：觀察格林函數發散的條件為 $\gamma_3 = \frac{-jn\pi}{h}$ ，這數值正好是平板金屬波導(PPW)的截止波數，這意涵 CBCPW 架構永遠會包含平板金屬波導的模態。當 $n=0$ ，正好是 PPW 裡的最低模 TEM；當 $n=x$ ，則為 TM_x 、 TE_x 模態，前者在任何頻率下都存在，後者則有截止頻率的限制。今天我們積分路徑改取如圖 3-7，路徑包含了 PPW 的 TEM 極點，表示考慮了 TEM mode 的效應與有實虛部的 $k_z = k_{zr} - jk_{zi}$ (高階模態往往在很高的頻率才會存在，我們在此就不列入探討)。從複變理論的觀點，圖 3-7 的路徑可以簡化至圖 3-8 的路徑，因為積分路徑為可解析的(analytic)。最後(3-20)的積分求值變成對實軸積分再加上極點的留數值(當考慮有虛數的 k_z 時，極點就不會在實軸上)。

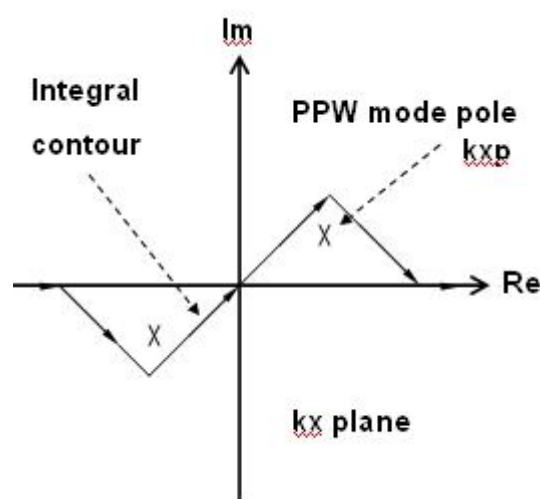


圖 3-7 CBCPW 積分路徑(二)

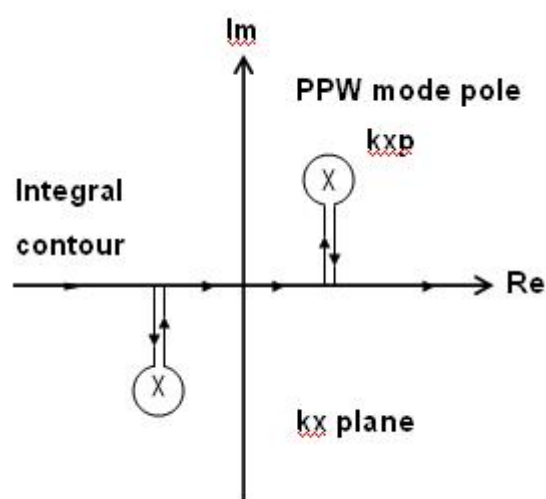


圖 3-8 CBCPW 積分路徑(三)

另外在此補上 $\tilde{Y}_{xx}$ 、 $\tilde{Y}_{xz}$ 、 $\tilde{Y}_{zx}$ 、 $\tilde{Y}_{zz}$ 的留數函數：

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 = 0 \Rightarrow Res_{-}\tilde{Y}_{xx} &= \frac{k_{xp}\omega\epsilon_0\epsilon_r}{j2(k_{xp}^2 + k_z^2)h} \\
 Res_{-}\tilde{Y}_{zz} &= \frac{k_z^2\omega\epsilon_0\epsilon_r}{j2k_{xp}(k_{xp}^2 + k_z^2)h} \\
 Res_{-}\tilde{Y}_{xz} = Res_{-}\tilde{Y}_{zx} &= \frac{k_z\omega\epsilon_0\epsilon_r}{j2(k_{xp}^2 + k_z^2)h}
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

3.3 SDA 數值結果

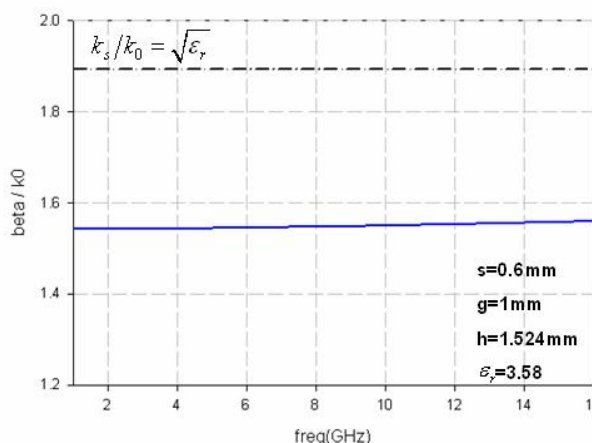


圖 3-9 相位常數曲線

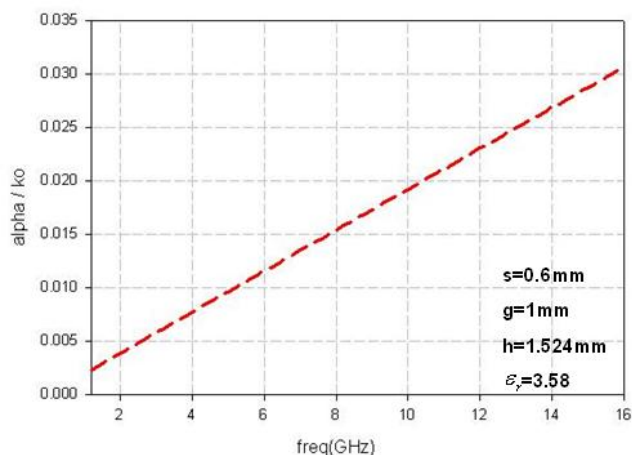


圖 3-10 衰減常數曲線

最後 SDA 的結果，圖 3-9、3-10 分別為 Z 方向的相位常數與衰減常數的正規化曲線($k_z = k_{zr} - j \cdot k_{zi} = \beta - j \cdot \alpha$)。此結構參數為 $\epsilon_r = 3.58$ 、 $s = 0.6\text{mm}$ 、 $g = 1\text{mm}$ 、 $h = 1.524\text{mm}$ 。我們可以由圖 3-9 觀察到 k_s 從 0GHz 就恆大於 β ，而圖 3-10 的 α 也從 0GHz 就開始有值，表示 PPW 的 TEM 模態在任何頻率下都會混合在結構中。在 12GHz 時， β/k_0 為 1.5531、 α/k_0 為 0.0231。

我們再來看另一尺寸的 CBCPW 結構。 $\epsilon_r = 4.4$ 、 $s = 2.9\text{mm}$ 、 $g = 0.9\text{mm}$ 、 $h = 1.6\text{mm}$ ，在 5GHz 時 β/k_0 為 1.6935、 α/k_0 為 0.023。我們可以得到一角度 $\theta = \cos^{-1} \frac{\beta}{k_s} = 35.24^\circ$ ，另外我們用 HFSS 來做驗證，可以發現表面電流波約略以 33 度向兩側傳遞，如圖 3-11。

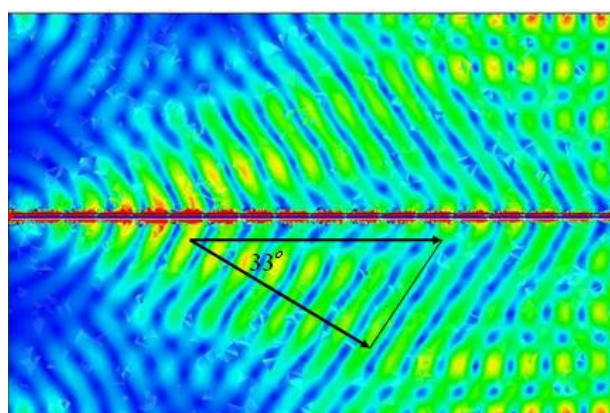


圖 3-11 CBCPW 表面電流波

第四章 平板金屬波導饋入槽孔分析

本章參考 R. Elliott 在天線理論[10]一書中，利用推導矩形金屬波導饋入槽孔的類似方法，推導出平板金屬波導饋入槽孔的等效電路，最先是由 Reuven Shavit 在 1996 年提出橫向的舉矩形槽孔分析，本論文研究則進一步推廣到旋轉的矩形槽孔分析。

4.1 平板金屬波導饋入槽孔的等效電路推導

4.1.1 無窮平面金屬上的槽孔

圖 4-1 為一槽孔被蝕刻於無窮平面金屬的示意圖，從 Booker's relation 我們知道此架構會與一耦極天線(dipole antenna)互補。若 $2w$ 遠小於 $2l$ ，我們可視此槽孔為上下兩段於 P_1 、 P_2 饋入的傳輸線，且於 $z = \pm l$ 被短路起來，於是傳輸線裡會形成駐波，數學式為；

$$\bar{E}_{slot} = \frac{V_m}{2w} \cdot \frac{\sin k(l - |z|)}{\sin kl} \tilde{x} \quad (4-1)$$

其中 V_m 為饋入電壓的峰值。若 $2l$ 等於半波長，饋入端 P_1 P_2 的電壓會有最大值，如圖 4-2，其分佈類似半波長耦極天線上的電流分佈。

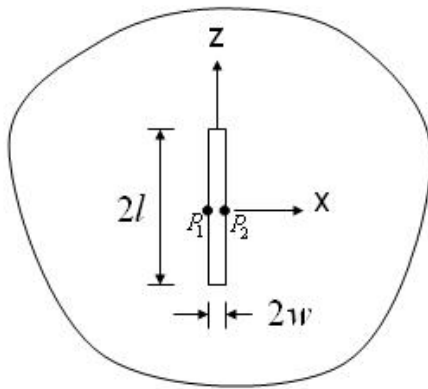


圖 4-1 矩形槽孔於無窮平面金屬示意圖

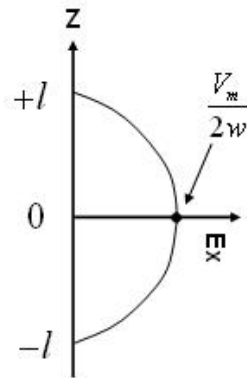


圖 4-2 槽孔內電場分佈

4.1.2 Scattering method

理想的平板金屬波導，在其邊緣的電場不會有 fringing 效應，如圖 4-3 所示。

我們可視其電場與磁場在波導內為均勻分佈，將電場正規化後表示如下：

$$\vec{E} = -\tilde{y} \frac{V_0}{a} e^{-jkz} = -\tilde{y} e^{-jkz} \quad (4-2a)$$

$$\vec{H} = \tilde{x} \frac{V_0}{\eta a} e^{-jkz} = \tilde{x} \frac{1}{\eta} e^{-jkz} \quad (4-2b)$$

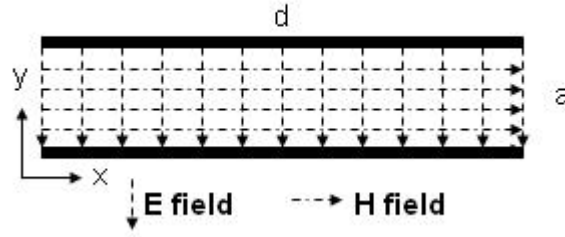


圖 4-3 理想 PPW 內電場磁場

為了分析槽孔特性我們假設一有限寬度的理想平板金屬波導，在上板金屬蝕刻一矩形槽孔(橫向、旋轉皆可)，如圖 4-4 所示。另外定義一無源體積 V 由 S 封閉面包圍， S 包括了四部份：(1) S_1 ：於 $z = z_1$ 的截面，(2) S_2 ：於 $z = z_2$ 的截面，(3) S_3 ：上下緊貼金屬板的兩面，(4) S_4 ：左右兩個面，其邊界條件為 PMC，用意為強迫此兩面有切線電場、垂直磁場。

接著我們假設兩種能夠存在於 S 封閉面裡的場：

$(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$ ：從無窮遠入射一 TEM 波，受槽孔而擾動的電磁場。

$(\underline{E}_2, \underline{H}_2)$ ：往 +Z 或 -Z 入射的 TEM 電磁場。

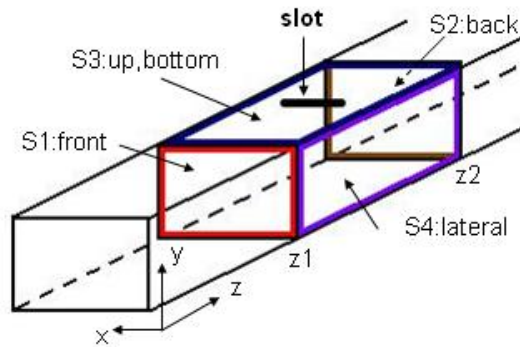


圖 4-4 平板金屬波導內槽孔示意圖

上述的兩種場形皆為此無源封閉面內可存在的解，從 Reciprocity Theorem 兩者電磁場滿足下列等式：

$$\int_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot d\underline{S} = 0 \quad (4-3)$$

對 $(\underline{E}_2, \underline{H}_2)$ 我們很熟悉，就是(4-2a)、(4-2b)理想 PPW 內存在的場；對 $(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$ 我們做如下假設：

$$\begin{aligned} \underline{E}_{1t} &= \sum_a C_a \underline{E}_{at} e^{-\gamma_a z}, \quad z \geq z_2 & \underline{E}_{1t} &= \sum_a B_a \underline{E}_{at} e^{+\gamma_a z}, \quad z \leq z_1 \\ \underline{H}_{1t} &= \sum_a C_a \underline{H}_{at} e^{-\gamma_a z}, \quad z \geq z_2 & \underline{H}_{1t} &= -\sum_a B_a \underline{H}_{at} e^{+\gamma_a z}, \quad z \leq z_1 \end{aligned} \quad (4-4)$$

其中下標 t 表示橫向(transverse)， C_a 為往+Z 方向傳遞波的擾動振幅， B_a 為往-Z 方向傳遞波的擾動振幅， $\underline{E}_{at}$ 、 $\underline{H}_{at}$ 為 PPW 各種模態的橫向電、磁場， Σ 則表示 PPW 裡 TEM、TE 或 TM 模態混合存在。此假設在 $z_1 \leq z \leq z_2$ 裡不成立，因為沒有考慮到槽孔擾動產生的複雜模態。接著考慮邊界條件：

- (1) $\underline{E}_{2t}$ 在 S_3 上為零，
- (2) $\underline{H}_{1t}$ 、 $\underline{H}_{2t}$ 在 S_4 上為零
- (3) $\underline{E}_{1t}$ 在 S_3 上為零，除了槽孔部份

代入(4-3)式 $\int_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot d\underline{S} = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{S_3+S_4} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot d\underline{S} + \int_{S_1+S_2} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot d\underline{S} = 0 \\ &\Rightarrow \int_{S_3} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S} = \int_{S_1} (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1 - \underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S} + \int_{S_2} (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1 - \underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S} \\ &\Rightarrow \int_{slot} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S} = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$I_1 = \int_{S_1} (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1 - \underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S}$$

$$I_2 = \int_{S_2} (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1 - \underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S}$$

在 I_1 與 I_2 中，由於模態的正交性，最後會只剩下 TEM 模態。我們先討論 $(\underline{E}_2, \underline{H}_2)$ 為一往+Z 方向傳的 TEM 波：因為 I_1 為在 S_1 上積分， $(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$ 的傳播方向為-Z，

只有當 γ_a 等於 k_{TEM} 時 ($e^{+\gamma_a z} \cdot e^{-k_{TEM} z}$)，乘積項才會留下來；而對 I_2 而言為在 S_2 上

積分， $(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$ 的傳播方向為 +Z，所以即使 γ_a 等於 k_{TEM} ($e^{-\gamma_a z} \cdot e^{-k_{TEM} z}$)，其積分仍

為零，結果如下：

$$\begin{cases} I_1 = 2B_{TEM} \int_{S_1} (\underline{E}_{TEM} \times \underline{H}_{TEM}) \cdot \underline{\tilde{z}} d\underline{S} \\ I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_{TEM} = \frac{\int_{slot} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S}}{2 \int_{S_1} (\underline{E}_{TEM} \times \underline{H}_{TEM}) \cdot \underline{\tilde{z}} d\underline{S}} \quad (4-6)$$

反之，考慮往 -Z 方向傳的 TEM 波，可得下列式子：

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = 2C_{TEM} \int_{S_2} (\underline{E}_{TEM} \times \underline{H}_{TEM}) \cdot \underline{\tilde{z}} d\underline{S} \end{cases} \Rightarrow C_{TEM} = \frac{\int_{slot} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot d\underline{S}}{2 \int_{S_2} (\underline{E}_{TEM} \times \underline{H}_{TEM}) \cdot \underline{\tilde{z}} d\underline{S}} \quad (4-7)$$

由以上結果，我們可以下一個結論：入射一 TEM 波至槽孔，當因槽孔而擾動的高階模衰減後，最後也是以 TEM 形式的波在反射及入射。得到 B_{TEM} 與 C_{TEM} 的表示式後，我們將實際數值代入。

直接考慮旋轉 ϕ 角度的矩形槽孔，TEM 傳播方向為 +Z，如圖 4-5。我們對槽孔的正中心另定義一座標 (ζ, ξ) ，首先，先做座標轉換的動作：

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \tilde{\xi} \cos \phi + \tilde{\zeta} \sin \phi & \tilde{x} &= -\tilde{\xi} \sin \phi + \tilde{\zeta} \cos \phi \\ \tilde{\xi} &= -\tilde{x} \sin \phi + \tilde{z} \cos \phi & \tilde{\zeta} &= \tilde{x} \cos \phi + \tilde{z} \sin \phi \end{aligned} \quad (4-8)$$

(4-6)、(4-7) 的分母剛好為 2 倍的入射能量，在此重新定義 S_{TEM} 並將 (4-2) 式代入：

$$S_{TEM} = \int_d \int_a (-\tilde{y} e^{-jkz}) \times (\tilde{x} \frac{1}{\eta} e^{-jkz})^* \cdot \underline{\tilde{z}} dy dx = \frac{ad}{\eta} \quad (4-9)$$

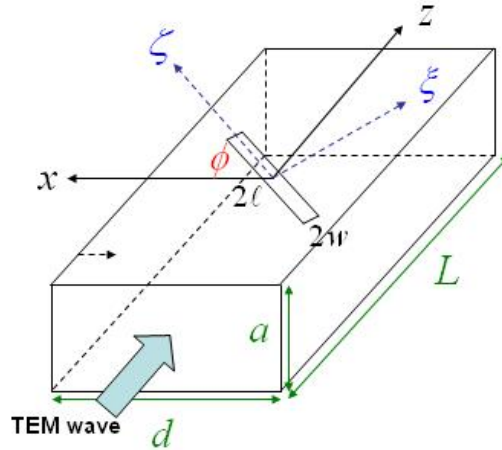


圖 4-5 旋轉槽孔在 PPW 上層金屬示意圖

重新定義座標後，(4-1)式槽孔裡的電場也要跟著做調整：

$$\bar{E}_{slot} = \frac{V_s}{2w} \cdot \frac{\sin k_s(\ell - |\zeta|)}{\sin k_s \ell} \tilde{\xi} \quad (4-10)$$

V_s 為假設從中心饋入的電壓峰值，假設槽孔內波數 $k_s = k_0 \sqrt{(1 + \epsilon_r)/2}$ 。將(4-2b)

、(4-10)代入(4-6)的分子(Appendix B)：

$$\begin{aligned} & \int_{slot} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot \tilde{y} dS \\ &= \int_{-w}^w \int_{-\ell}^{\ell} \frac{V_s}{2w} \frac{\sin k_s(\ell - |\zeta|)}{\sin k_s \ell} \tilde{\xi} \times \tilde{x} \frac{1}{\eta} e^{-jkz} \cdot \tilde{y} d\zeta d\xi \\ &= \frac{2V_s \cos \phi}{\eta} \cdot K_1 \end{aligned} \quad (4-11)$$

$$K_1 = \sin c(kw \cos \phi) \frac{k_s}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \frac{\cos k_s \ell - \cos(k \ell \sin \phi)}{\sin k_s \ell}$$

由(4-9)、(4-11)可得到(4-6)：

$$B_{TEM} = -\frac{\frac{2V_s \cos \phi}{\eta} \cdot K_1}{\frac{2ad}{\eta}} = -\frac{V_s \cos \phi}{ad} \sin c(kw \cos \phi) \frac{k_s}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \frac{\cos k_s \ell - \cos(k \ell \sin \phi)}{\sin k_s \ell} \quad (4-12)$$

同理，(4-7)：

$$C_{TEM} = -\frac{V_s \cos \phi}{ad} \sin c(kw \cos \phi) \frac{k_s}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \frac{\cos k_s \ell - \cos(k \ell \sin \phi)}{\sin k_s \ell} \quad (4-13)$$

從(4-12)、(4-13)可知兩個方向擾動後的波振幅有下列關係：

$$B_{TEM} = -C_{TEM} \quad (4-14)$$

4.1.3 等效電路

圖 4-6 為一傳輸線上串接一正規化阻抗的示意圖。我們假設左右端有完美匹配電路，代表不會有反射波從兩端彈回。假設傳輸線上的電壓電流波為：

$$\left. \begin{aligned} V(z) &= Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} \\ I(z) &= Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad z < 0 \quad (4-15a)$$

$$\left. \begin{aligned} V(z) &= (A + C)e^{-j\beta z} \\ I(z) &= (A + C)e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad z > 0 \quad (4-15b)$$

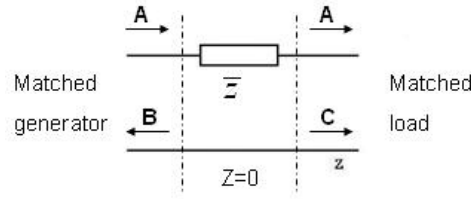


圖 4-6 傳輸線上串接一正規化阻抗示意圖

代入邊界條件至(4-15)： $I(0^-) = I(0) = I(0^+)$ 可得：

$$B = -C \quad (4-16)$$

如果 B 為實數

$$\bar{z} = \bar{r} = \frac{2B}{A-B} \quad (4-17)$$

由(4-16)我們得知當 $B = -C$ 時，物理意義為一傳輸線上串接一阻抗。所以從(4-14)及(4-16)我們可以下一結論：平板金屬波導饋入的槽孔可以等效成傳輸線上串接一阻抗，物理意義為槽孔截斷了上層金屬板的電流，在槽孔內部激發了電場向外輻射。(4-17)式為槽孔對波導內部為一等效串接阻抗的正規化阻抗值，只要我們能知道 A_{TEM} 及 B_{TEM} 便能求得其值。

從能量守恆觀點可列出下列等式：

$$P_{inc} = P_{ref} + P_{tr} + P_{rad} \quad (4-18)$$

我們將 P_{inc} 、 P_{ref} 、 P_{tr} 用(4-9)的 S_{TEM} 表示：

$$P_{inc} = \frac{1}{2} A \cdot A^* \cdot S_{TEM} = \frac{ad}{2\eta} A \cdot A^*$$

$$P_{ref} = \frac{1}{2} B \cdot B^* \cdot S_{TEM} = \frac{ad}{2\eta} B \cdot B^*$$

$$P_{tr} = \frac{1}{2} (A+C) \cdot (A+C)^* \cdot S_{TEM} = \frac{ad}{2\eta} (A+C) \cdot (A+C)^* = \frac{ad}{2\eta} (A-B) \cdot (A-B)^*$$

將上列三式代回(4-18)，可得槽孔輻射的能量為：

$$P_{rad} = \frac{ad}{2\eta} [A^2 - B^2 - (A-B)^2] = \frac{ad}{\eta} B(A-B) \quad (4-19)$$

同樣的，只要我們能知道 A_{TEM} 及 B_{TEM} 便能求得輻射的能量值，這對我們求得等效阻抗有很大的幫助。

4.1.4 槽孔內等效磁流的幅射能量

從天線理論一書[10]，我們知道一長度極短的電 dipole 在遠場的場如下：

$$\bar{E}_\theta = \frac{I \cdot dz}{4\pi} j\omega\mu \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \quad (4-20a)$$

$$\bar{H}_\phi = \frac{I \cdot dz}{4\pi} j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \quad (4-20b)$$

從 duality 觀點，磁 dipole 在遠場的場為：

$$\bar{H}_\theta = \frac{I_m \cdot dz}{4\pi} j\omega\varepsilon \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \quad (4-21a)$$

$$\bar{E}_\phi = -\frac{I_m \cdot dz}{4\pi} j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin\theta \quad (4-21b)$$

我們將(4-10)式槽孔裡的電場依 Schelkunoff Equivalence Principle 等效成磁流：

$$\bar{J}_m = 2E_s \tilde{\zeta} = I_m \frac{\sin k_s(\ell - |\zeta|)}{w} \tilde{\zeta} \quad (4-22)$$

$$I_m = \frac{V_s}{\sin k_s \ell}$$

將(4-22)代入(4-21)並對 ζ 積分：

$$\begin{aligned} H_\theta &= j\omega\varepsilon_0 \sin\theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_{-w}^w \int_{-\ell}^{\ell} \frac{I_m \sin k_s(\ell - |\zeta|)}{w} e^{jk_0 \zeta \cos\theta} d\zeta d\xi \\ &= j\omega\varepsilon_0 I_m k_s \sin\theta \frac{e^{-jk_0 r}}{\pi r} \cdot \frac{[\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos\theta)]}{k_0^2 \cos^2 \theta - k_s^2} \end{aligned} \quad (4-22a)$$

$$E_\phi = -jk_0 I_m k_s \sin\theta \frac{e^{-jk_0 r}}{\pi r} \cdot \frac{[\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos\theta)]}{k_0^2 \cos^2 \theta - k_s^2} \quad (4-22b)$$

有了遠場的電磁場後，要求得輻射功率，我們繼續計算波印亭向量：

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_s^2}{\sin^2 k_s \ell} \frac{k_0 \omega \varepsilon_0 k_s^2 \sin^2 \theta}{\pi^2 r^2} \left(\frac{[\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos\theta)]}{k_0^2 \cos^2 \theta - k_s^2} \right)^2 \tilde{r} \end{aligned} \quad (4-23)$$

接著我們對(4-23)做半球面積分(Appendix C)：

$$\begin{aligned} P_f &= \iint \bar{S} \cdot d\bar{S} \\ &= \frac{1}{2} k_0 \omega \varepsilon_0 \frac{V_s^2}{\sin^2 k_s \ell} \frac{k_s^2}{\pi^2} \int_{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{1}{k_s^4} \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos\theta)}{\frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta - 1} \right]^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

$$P_f = \frac{V_s^2}{2\pi\eta_0 \sin^2 k_s \ell} \frac{k_0^2}{k_s^2} \int_0^\pi \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta \quad (4-24)$$

最後我們由磁流分佈求得一矩形槽孔對空氣輻射的總功率為(4-24)。

4.1.5 等效串接阻抗值

(4-19)、(4-24)皆為槽孔消耗的功率表示式，差別在(4-19)為對內的電路觀點；而(4-24)為對外的輻射觀點。兩者應該相等，其等式為：

$$P_{rad} = \frac{ad}{\eta} B(A-B) = \frac{V_s^2}{2\pi\eta_0 \sin^2 k_s \ell} \frac{k_0^2}{k_s^2} \int_0^\pi \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta \quad (4-25)$$

為了計算方便，我們令 $K_2 = \int_0^\pi \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta$ ，(4-25)可得：

$$A-B = \frac{1}{B} \frac{\eta}{ad} \frac{V_s^2}{2\pi\eta_0 \sin^2 k_s \ell} \frac{k_0^2}{k_s^2} \cdot K_2 \quad (4-26)$$

接著我們將(4-26)與(4-12)代入(4-17)的等式裡：

$$\bar{r} = \frac{2B}{A-B} = \frac{2 \frac{V_s^2 \cos^2 \phi}{a^2 d^2} \cdot K_1^2}{\frac{\eta}{ad} \frac{V_s^2}{2\pi\eta_0 \sin^2 k_s \ell} \frac{k_0^2}{k_s^2} \cdot K_2} \quad , \quad K_1 = \sin c(kw \cos \phi) \frac{k_s}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \frac{\cos k_s \ell - \cos(k \ell \sin \phi)}{\sin k_s \ell}$$

將 K_1 、 K_2 代入上式整理可得：

$$\bar{r} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{4\pi \cos^2 \phi \sin^2 c^2(kw \cos \phi)}{adk_0^2} \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k \ell \sin \phi)}{1 - \frac{k^2}{k_s^2} \sin^2 \phi} \right]^2 \cdot \frac{1}{\int_0^\pi \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta}$$

最後我們得到了平板金屬波導餵入槽孔的等效阻抗值。 (4-27)

4.2 平板金屬波導饋入槽孔的等效電路模擬驗證

我們先用 HFSS 模擬一完美的平板金屬波導，給予上下層板 PEC 邊界條件、左右為 PMC 邊界條件，前後為完美匹配的兩個埠，如圖 4-7 所示。波導內電場、磁場分佈如圖 4-8、圖 4-9，我們可以清楚看見在 PPW 裡只存在垂直電場與水平磁場。接下來我們仿照 Reuven Shavit 論文裡[6]推導及量測的平板大小來模擬旋轉角度的等效電路。其參數如下：

$$L = 200\text{mm}$$

$$d = 200\text{mm}$$

$$a = 10\text{mm}$$

$$\epsilon_r = 1 \text{ (air)} \quad \text{at } 9.2 \text{ GHz}$$

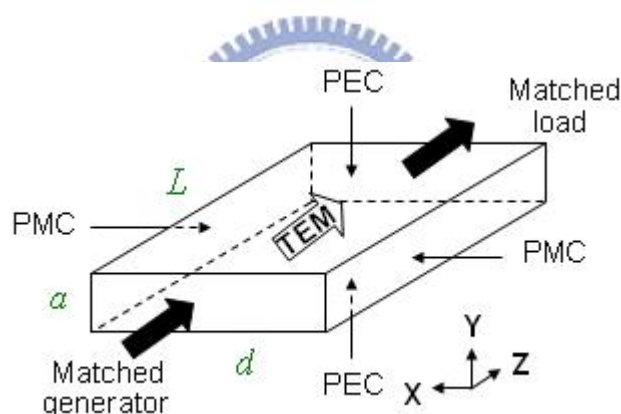


圖 4-7 理想 PPW 邊界條件示意圖

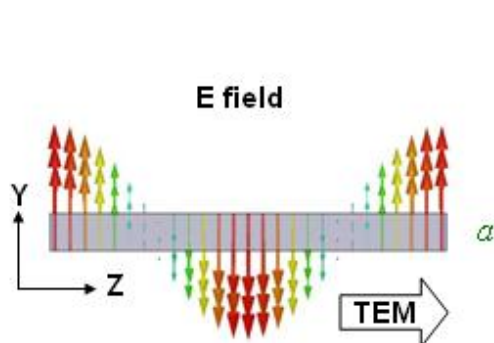


圖 4-8 理想 PPW 內電場分佈

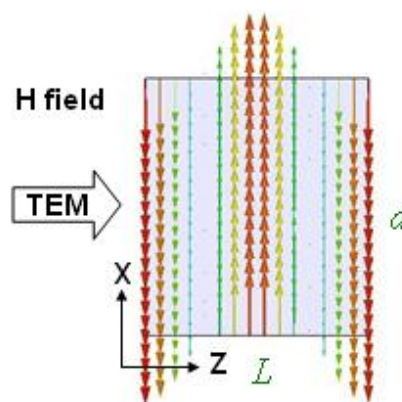


圖 4-9 理想 PPW 內磁場分佈

有了平板金屬波導的尺寸之後，我們在上層 PEC 板放置一矩形槽孔，如圖 4-10 所示為旋轉 30 度的槽孔。

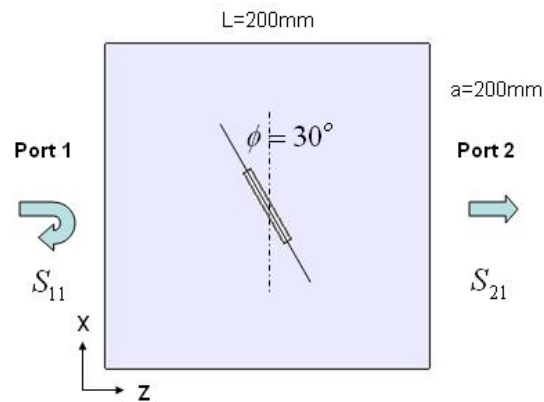


圖 4-10 HFSS 模擬示意圖

經由 HFSS 模擬，我們可以得到兩埠的 S 參數。利用 Transmission method [11] 來求得等效的串接阻抗值：

$$\bar{Z}_s = 2 \cdot (T_s / T - 1) \quad (4-28)$$

(4-28)式中， T_s 為沒有槽孔時的透射係數， T 為有槽孔時的透射係數。我們先固定槽孔的寬為 1.5mm 及旋轉角度為 30 度，操作頻率在 9.2GHz，接著以槽孔的長度做變數，最後可以得到圖 4-11 的結果。

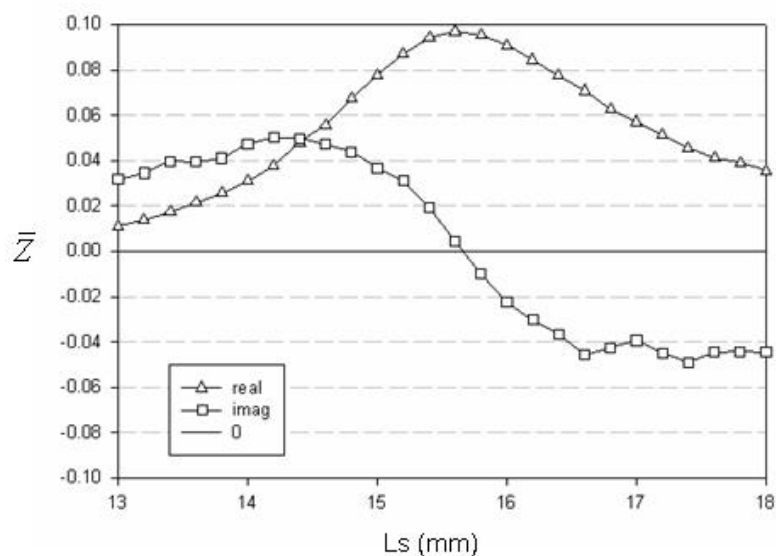


圖 4-11 隨槽孔長度變化的正規化阻抗值

圖 4-11 中，我們可以觀察到在長度約為 15.6mm 時，正規化阻抗的實部有最大值 0.0969、虛部接近零，我們稱此長度為共振長度。將共振長度代入(4-27)式裡，其值為 0.094，與模擬結果很接近。接著我們重複此步驟，改變槽孔的旋轉角度，得到圖 4-12 與圖 4-13。

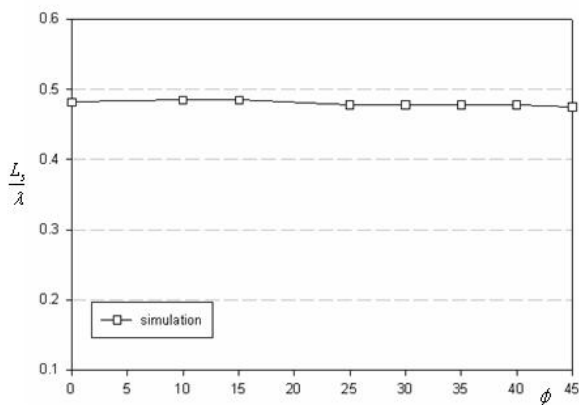


圖 4-12

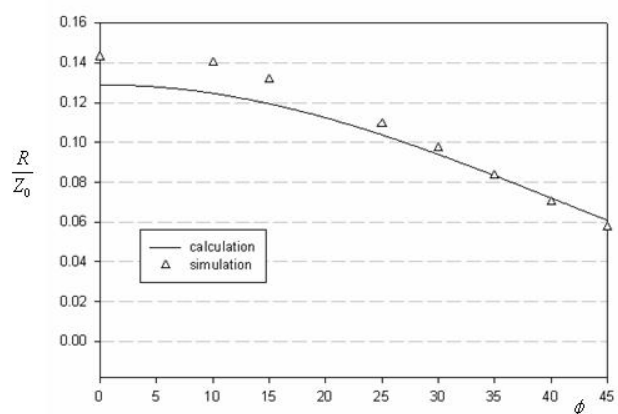


圖 4-13

隨槽孔角度變化對應之共振長度

隨槽孔角度變化對應之等效電阻值

圖 4-12 為各種角度下的共振長度對波長的比值模擬結果，我們發現其共振的長度都略小於半波長，與耦極天線的共振長度相同也是略小於半波。圖 4-13 為各種角度下模擬的等效電阻值，其特性為隨著旋轉角度增加，其值愈小，原因在於截斷的電流愈少的關係。

由以上數學推導與模擬結果，我們能得到準確的等效電路來進行接下來天線的設計。

第五章 背接金屬共平面波導饋入的槽孔天線設計

本章我們利用第三章的表面波分析及第四章求得的槽孔等效電路來做天線的設計。最後利用槽孔內電場的方向可繼續延伸至大尺寸天線，以期更高的增益，最後附模擬結果與量測結果。

5.1 設計流程

5.1.1 表面波偏離角度

由第三章最後一部份，針對 CBCPW 的尺寸 ($\epsilon_r = 3.55$ 、 $s = 0.6mm$ 、 $g = 1mm$ 、 $h = 1.524mm$)，我們已經有了 SDA 分析，在 12GHz 可以求得表面波以

$\theta = \cos^{-1} \beta a / k_s = 34.48^\circ$ 向兩側基板傳播 ($k_s/k_0 = \sqrt{\epsilon_r} = 1.884$ 、 $\beta/k_0 = 1.553$)。接

著我們定義兩個方向的波長 (1) Z 方向 CPW mode 波長 $\lambda_g = \lambda_0 / \beta$ (2) θ 方向

PPW mode 波長 $\lambda_s = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ ，如圖 5-1 所示。

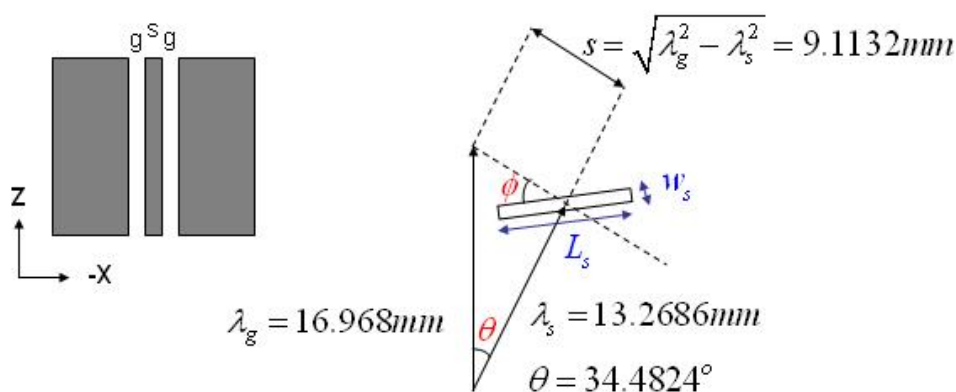


圖 5-1 PPW 波偏離角度示意圖

利用 λ_g 與 λ_s 的三角關係，我們可以得到 s 的長度。圖 5-1 為針對 CBCPW 中右半邊基板內的表面波行徑方向，圖中還標示了一旋轉 ϕ 角度的槽孔位於一倍波長的位置。

5.1.2 槽孔等效電路萃取

有了該結構中表面波偏離的角度後，我們可以開始設定單位細胞(cell)來模擬槽孔等效電路。Cell 的大小為 $a \times d \times L = h \times 2s \times \lambda_s = 1.524 \times 18.23 \times 13.27$ (mm)，我們固定槽孔的寬度為 0.5mm，並重複 4.2 節的步驟，最後可以得到如圖 5-2 的曲線。

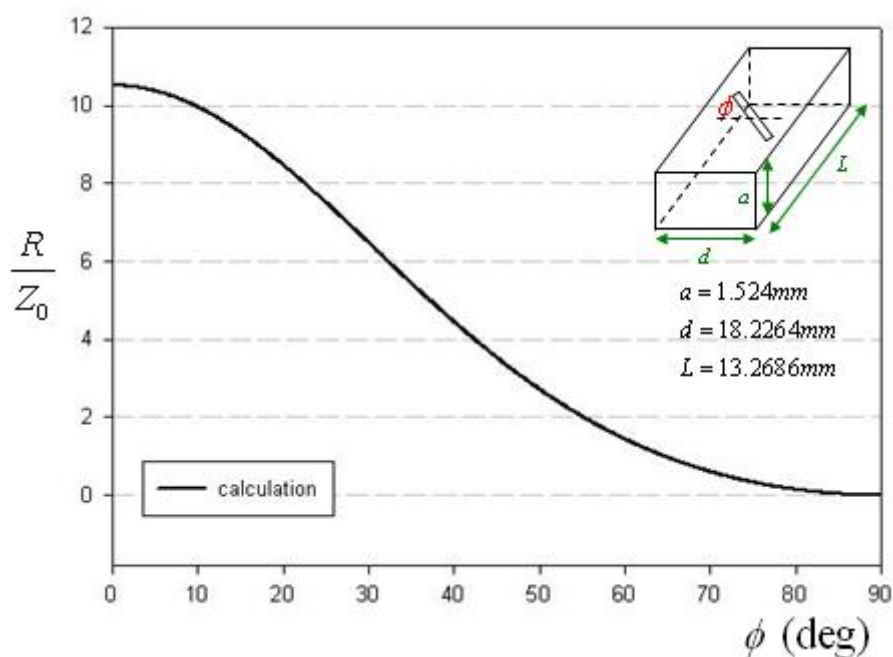


圖 5-2 天線上槽孔旋轉角度對應的串接阻抗值

圖 5-2 為槽孔旋轉的角度對應其等效電阻值的曲線，而槽孔共振的長度約為 8.5mm。在這裡我們先提及之後的設計只會用到 R/Z_0 小於 1 的部份，使用到的旋轉角度及對應電阻值如表 5-1。

$\bar{R}$	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167	0.143	0.125
ϕ	64.5°	71.7°	75°	77°	78.2°	79°	80.2°	80.5°
$\bar{R}$	0.111	0.1	0.091	0.083	0.077	0.071	0.067	0.063
ϕ	81.2°	81.6°	82°	82.4°	82.8°	83.3°	83.4°	83.9°

表 5-1 串接阻抗值對應之旋轉角度

5.1.3 槽孔擺設位置

在 R. Elliott 的天線理論一書中曾經介紹矩形金屬波導上的槽孔陣列設計。在矩形金屬波導的寬邊上蝕刻縱向的矩形槽孔，利用偏移中線的多寡取決等效導納值，如圖 5-3。設計概念是在波導末端短路，經過四分之一波長後末端短路轉換成開路，於是輸入端看進去的導納值便是所有槽孔等效的導納值相加，假若設計所有槽孔等效的導納值總和為 1，便可解決匹配的問題，如圖 5-4 所示。

圖 5-3 中，槽孔的間隔為二分之一波長而不是一倍波長，原因在於矩形金屬波導中的主模為 TE_{10} ，在波導寬面上 X 方向的電流一過了 $x=0.5a$ 就會開始反向，所以雖然槽孔間距是二分之一波長，其相位相差 180 度，但靠著槽孔蝕刻位置呈鋸齒狀交互放置在 $x=0.5a$ 的上下兩側，最終可使每個槽孔內的電場方向一致，場形在邊射方向(broadside)有最大的建設性干涉。由於波導的二分之一波長小於空氣的波長，更可有效減少 grating lobe。



圖 5-3 矩形金屬波導饋入縱向槽孔天線示意圖

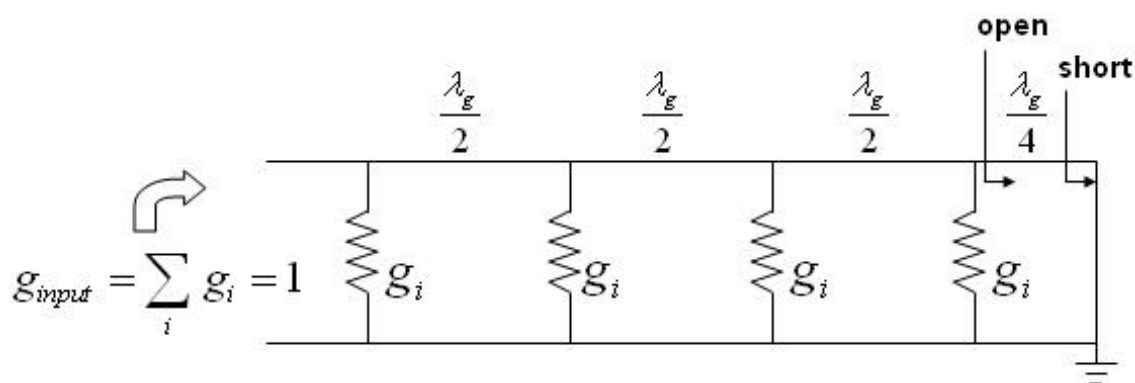


圖 5-4 矩形金屬波導饋入縱向槽孔的等效電路

我們仿效 R. Elliott 的作法，電路從並聯的阻抗變成串聯的阻抗，因為由本論文第四章我們知道平板金屬波導饋入槽孔的等效電路為串接的阻抗值。我們利用類似方法，在平板金屬波導上每隔一波長(介質中 PPW 的等效波長 λ_s)放置一旋轉 ϕ 角度的矩形槽孔，在這裡我們只能以一波長為間距，因為平板金屬波導的主模為 TEM 波，上層金屬板的電流全為 Z 方向的流向，只有隔整數倍波長才會等相位，接著在波導的末端給予短路的邊界條件(將上下板以鍍銅方式導通)，示意如圖 5-5，其等效電路如圖 5-6。

在本天線設計裡，我們讓每列槽孔輻射的能量相同，所以第 i 列槽孔旋轉的角度皆為 ϕ_i ，而旋轉角度 ϕ_i 的大小取決於槽孔的數量多寡，目的為讓輸入端的阻抗能匹配到 Z_0 (此 Z_0 為 PPW 的傳輸線特性阻抗)。舉例如下：假若同一列的槽孔數量為五，則每個槽孔正規化後的阻抗值為 0.2，接著對照表 5-1，可知旋轉角度為 78.2 度，以此類推。

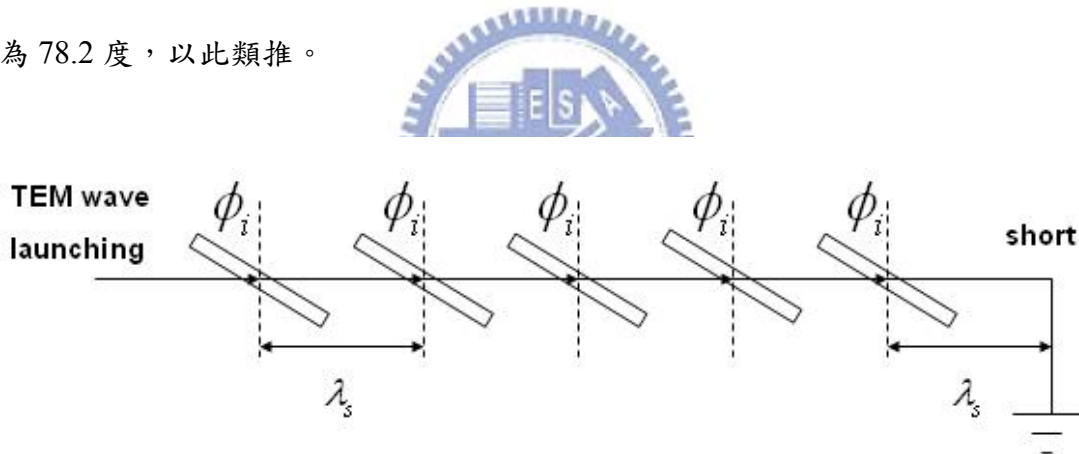


圖 5-5 平板金屬波導饋入旋轉槽孔天線示意圖

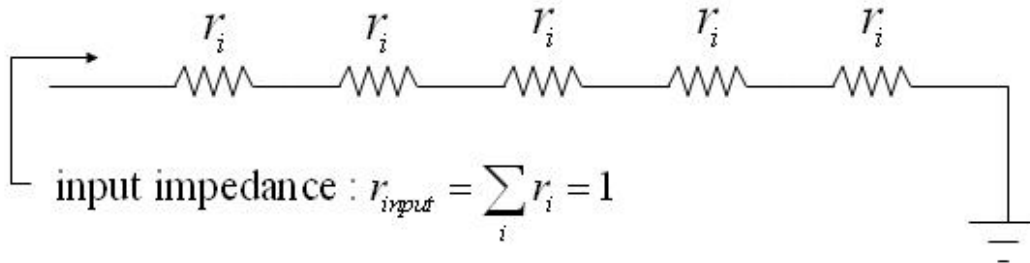


圖 5-6 平板金屬波導饋入旋轉槽孔的等效電路

接下來，我們要把矩形槽孔置放在背接金屬共平面波導的上層金屬地。由 5.1.1 節我們已經得到在 CBCPW 上 TEM 波行進時偏離的角度，所以放置槽孔時也得順著這個角度，如圖 5-7 所示。圖 5-7 的虛線部份為 CBCPW 最原始的輪廓，不過為了順著 PPW 表面波行進的方向，我們將形狀改成如圖 5-8 的扇形，扇形的張角為兩倍 θ ，為的是能在末端加上短路的邊界條件，而短路的地方離最近的槽孔距離為 λ_s 。

從圖 5-8 不難發現左右基板呈現直角三角形的形狀，表示槽孔能擺放的個數隨著 Z 方向的列數增加而逐一遞減，例如：假設第一列有 16 個槽孔，第二列則為 15 個，一直到第十六列為 1 個槽孔。同一列上的槽孔旋轉角度都相同，旋轉角度稍早提過，根據同一列上槽孔多寡對應表 5-1 決定。

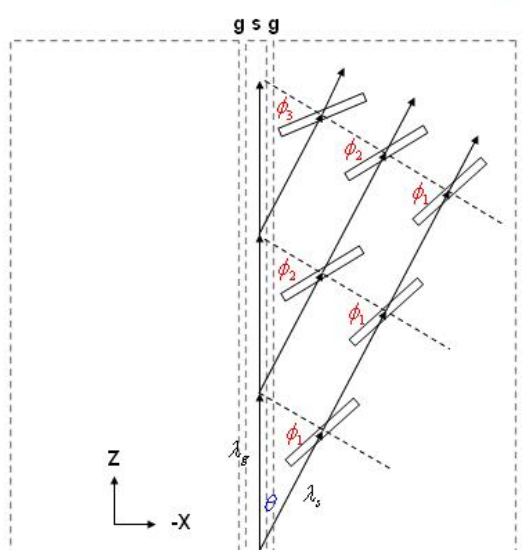


圖 5-7 原始 CBCPW 架構

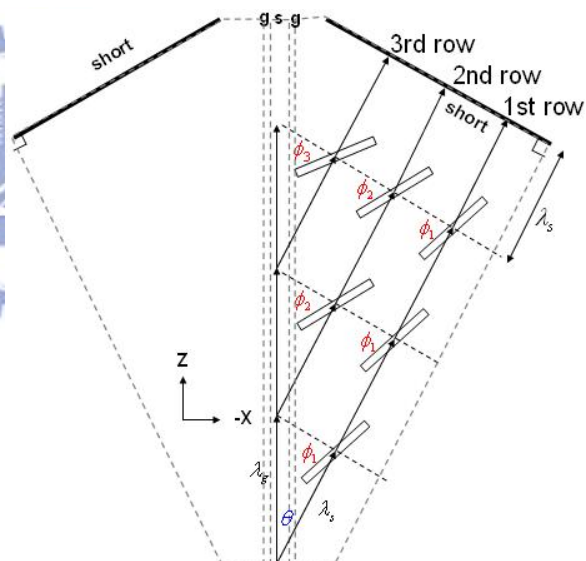


圖 5-8 調整後 CBCPW 架構

5.2 天線模擬與量測結果

5.2.1 天線模擬

設計的天線大小必須夠大，一來為了得到較高的輻射增益，二來因為 CBCPW 的傳播距離增長，基板中的表面波更能完全向兩側傳遞，在 CPW 線的開路末端反射也會減少(因為能量大部份分散到兩側由槽孔輻射出去)。在這裡我

們以第一列共 16 個槽孔開始做設計，如圖 5-9，最後總共有 272 個矩型槽孔。16 列上的槽孔旋轉角度依據表 5-1 做調整，在圖 5-9 上標示了 PPW 行進波的終點放置了短路的邊界條件，希望能達到電路上的接地效果。圖 5-10 為天線饋入端附近的參數表示，由於輸入端的特性阻抗約為 100 歐姆，我們必須再設計一阻抗轉換電路，才能用 50 歐姆的 SMA 接頭來實現。

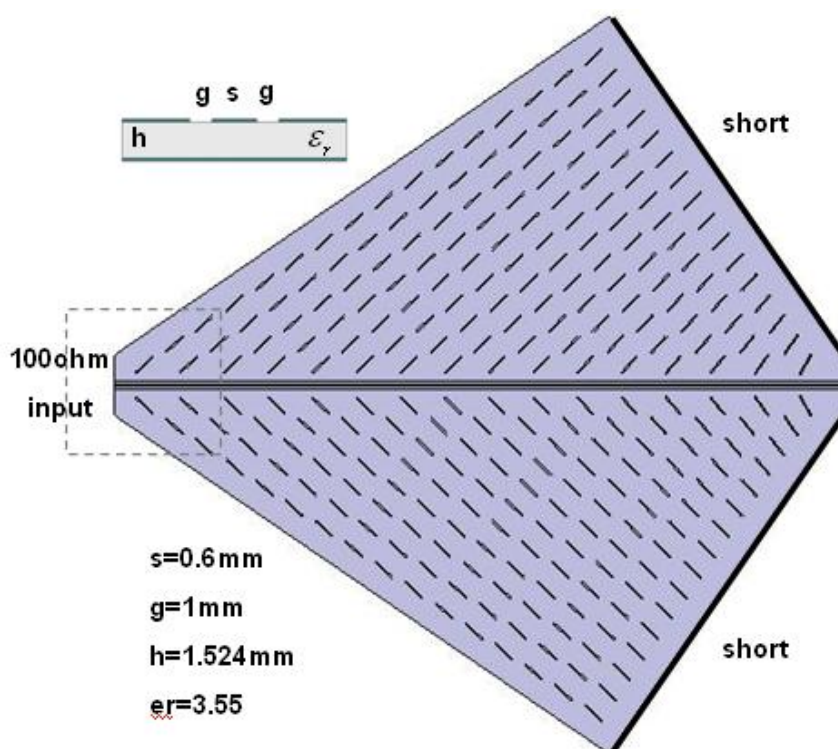


圖 5-9 模擬天線示意圖

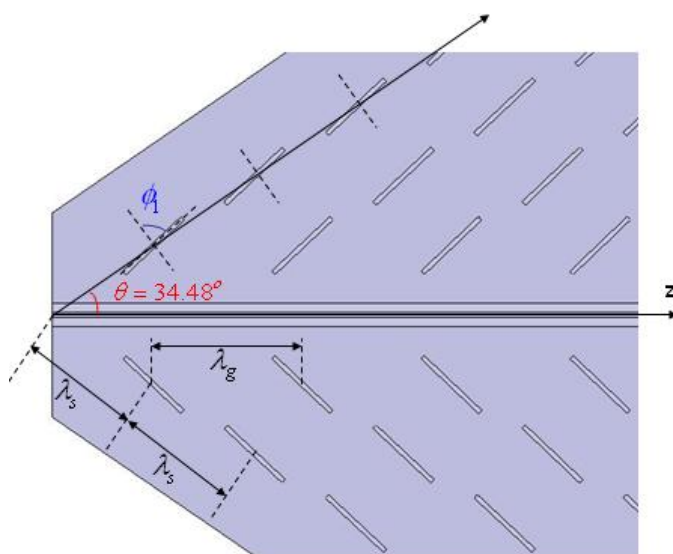


圖 5-10 天線饋入端放大圖

5.2.2 饋入電路

圖 5-9 的天線輸入端為 100 歐姆，我們利用線寬緩變(taper)將阻抗拉大到 50 歐姆，通常在微帶線中上層火線線寬愈寬代表阻抗愈低，在 CBCPW 中也有相同結論。固定 g 的大小為 1mm， s 的大小由 0.6mm 緩變至 2.9mm，如圖 5-11 所示，側視圖為圖 5-12。由側視圖中可以看見我們在靠近 gap 的附近打了一整排的 via，為的是讓能量在饋入結構中能集中不要散到旁邊基板，有效傳遞到天線前端，在本論文第二章簡述過其機制。圖 5-13 為饋入電路模擬出來的 S 參數結果， S_{11} 在該頻段小於 -20dB， S_{21} 接近 0dB，能量可視為由埠 1 完全打入埠 2。

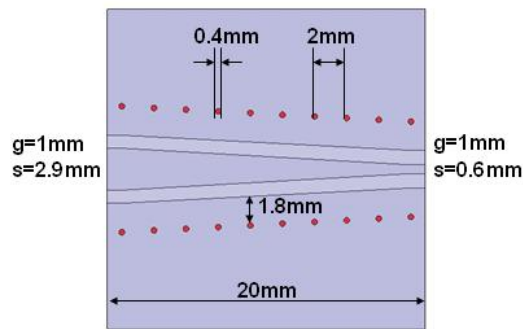


圖 5-11 饋入結構俯視圖

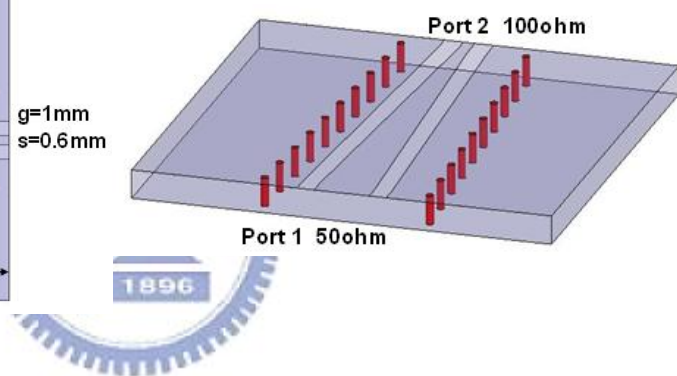


圖 5-12 饋入結構側視圖

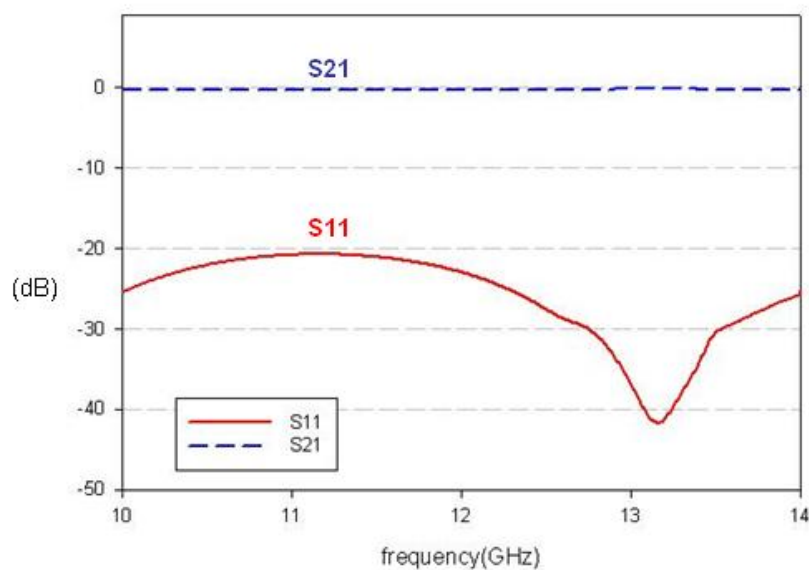


圖 5-13 饋入結構 S 參數模擬結果

5.2.3 天線與饋入電路

將前兩小節的天線與饋入架構合併，其尺寸及電路示意如圖 5-14。

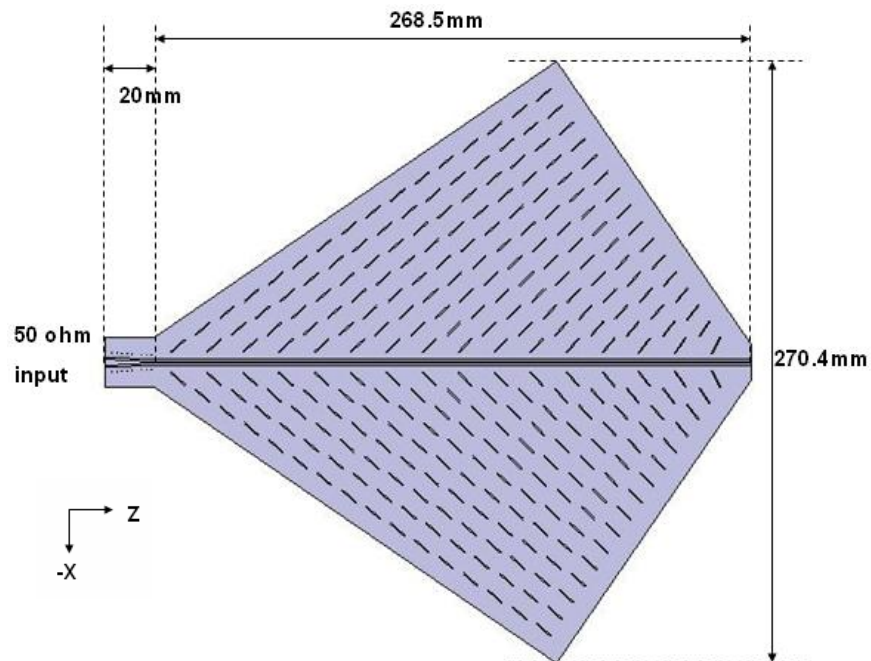


圖 5-14 天線與饋入架構合併示意電路

5.2.4 天線 S 參數模擬與量測結果

圖 5-15 為實作電路的 S 參數模擬與量測結果。模擬與量測的頻寬如圖所示，於 12GHz 量測的 return loss 為-18.1 dB。

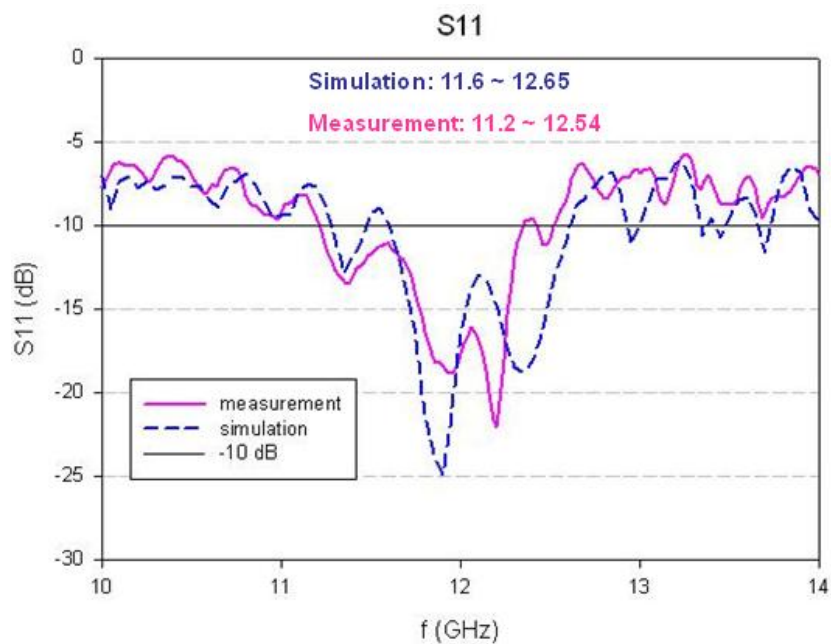


圖 5-15 天線 S 參數模擬與量測結果

5.2.5 天線場形模擬與量測結果

在討論天線輻射場形之前，我們必須先知道槽孔內的電場分佈情形。圖 5-16 中，假設 PPW 裡有一 TEM 波朝 Z 方向傳遞，在 Z 軸上放置一矩形槽孔(長邊不與 Z 軸正交)，若矩形槽孔的 $L_s \gg W_s$ ，內部的電場會如圖 5-16 標示的只存在 ξ 方向。我們可以設想矩形槽孔為一能量朝 Y 方向傳遞的矩形金屬波導，內部的 TE_{10} 電場分佈就如圖所示，一旦 W_s 增加槽孔內可能會伴隨其他模態產生 ζ 方向的電場，所以 W_s 必須夠小才行。

由以上得知只要槽孔的 W_s 夠小，內部的電場就會是 ξ 方向，所以對我們的天線而言，圖 5-17 上半部的槽孔可以視為有一總電場指向右下方向，而下半部的槽孔可視為有一總電場指向右上方向。接下來我們將電場分解成 X 方向及 Z 方向，便可開始討論天線的輻射場形。

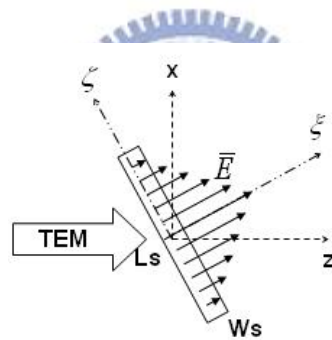


圖 5-16 旋轉槽孔內電場分佈

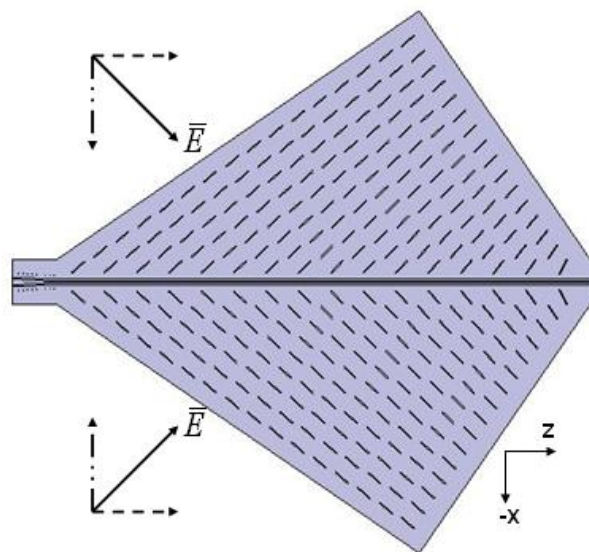


圖 5-17 天線槽孔內電場分解

圖 5-18 為 12GHz 時的 YZ 切面輻射場形。圖 5-17 中標示的電場在 Z 方向為同向，在 X 方向為互相抵消，所以 theta 極化(z-pol)會得到一 broadside 輻射場形，量測增益為 20.32 dBi；而 phi 極化(x-pol)會很小(小於-15dBi)。

圖 5-19 及圖 5-20 分別為 12GHz 時 XY 切面的 phi 極化(z-pol)及 theta 極化(x-pol)。對 phi 極化而言，由於收到 Z 方向同向的電場，會得到一 broadside 輻射場形；對 theta 極化而言，由於收到 X 方向反向的電場，0 度時會有 null 點，在偏離約正負 5 度時會有建設性干涉。我們可由圖 5-21、圖 5-22 量測的 3D 立體場形來更了解 phi、theta 輻射的場形。

圖 5-23 為 YZ 切面 theta 極化隨頻率變化的輻射場形。我們可以明顯看出，場形的主波束會隨頻率上升往順時針方向轉動，且在 12GHz 附近才有完整集中的輻射場形。隨頻率變化的數值整理在表 5-2。

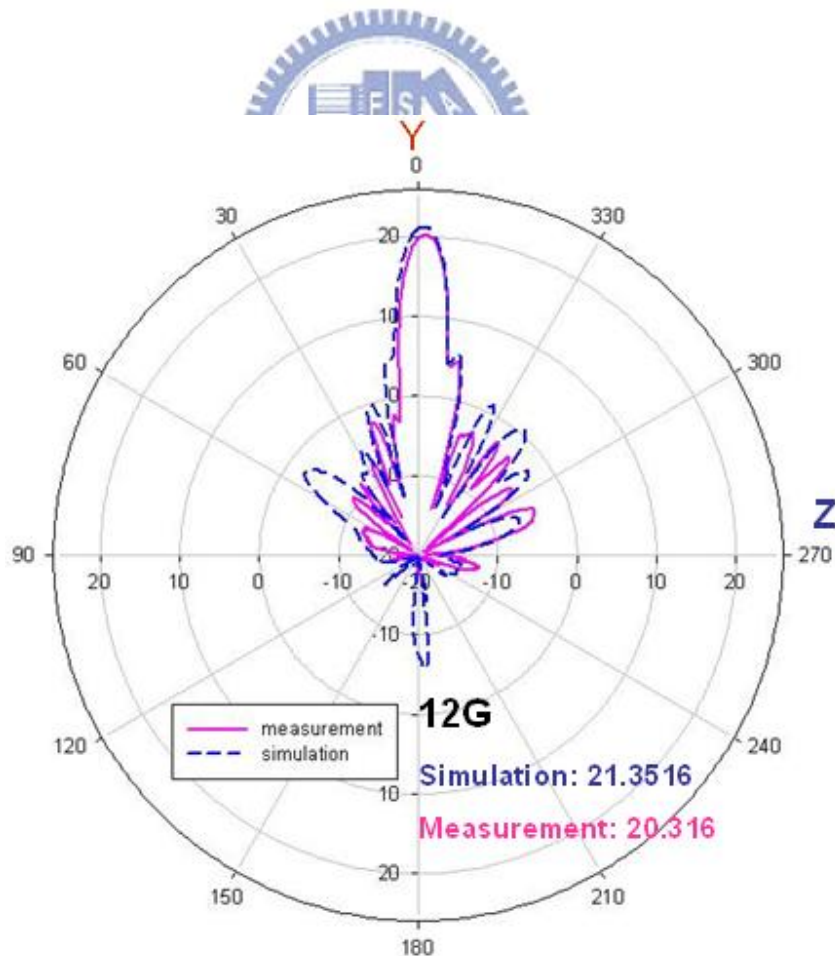


圖 5-18 12GHz YZ 切面輻射場形

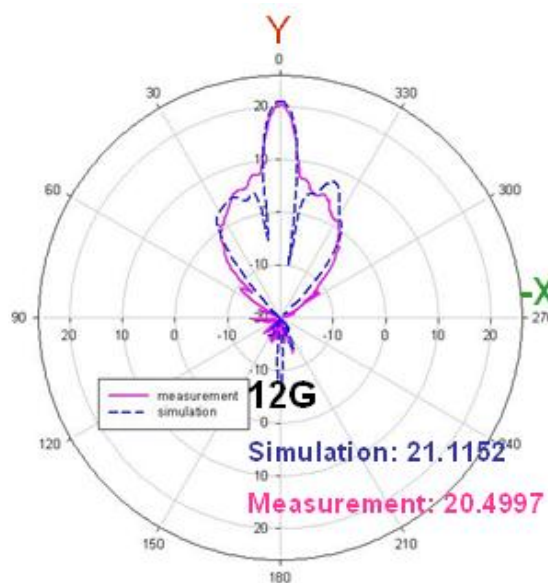


圖 5-19 12GHz XY 切面 phi 極化

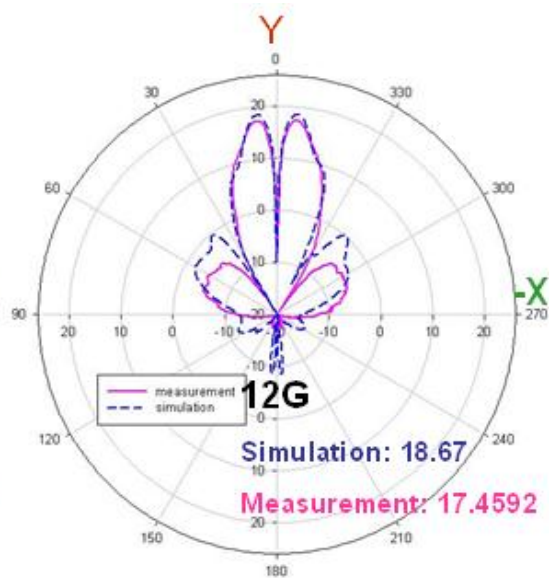


圖 5-20 12GHz XY 切面 theta 極化

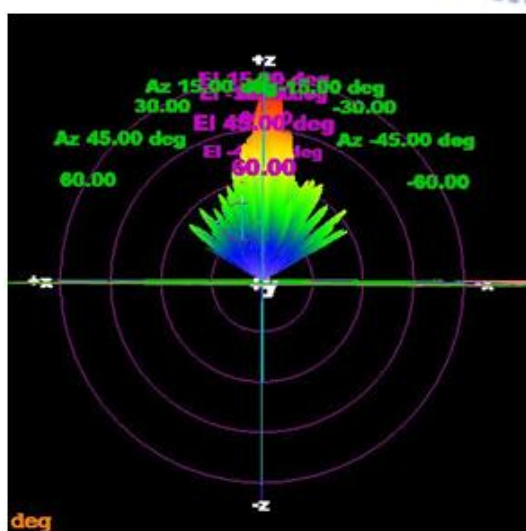


圖 5-21 12GHz phi 極化 3D 場形

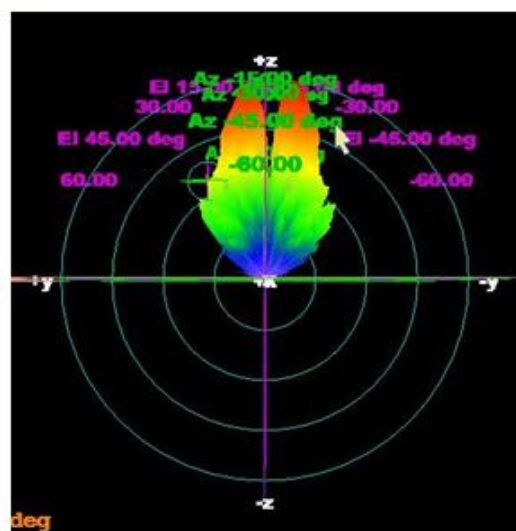


圖 5-22 12GHz theta 極化 3D 場形

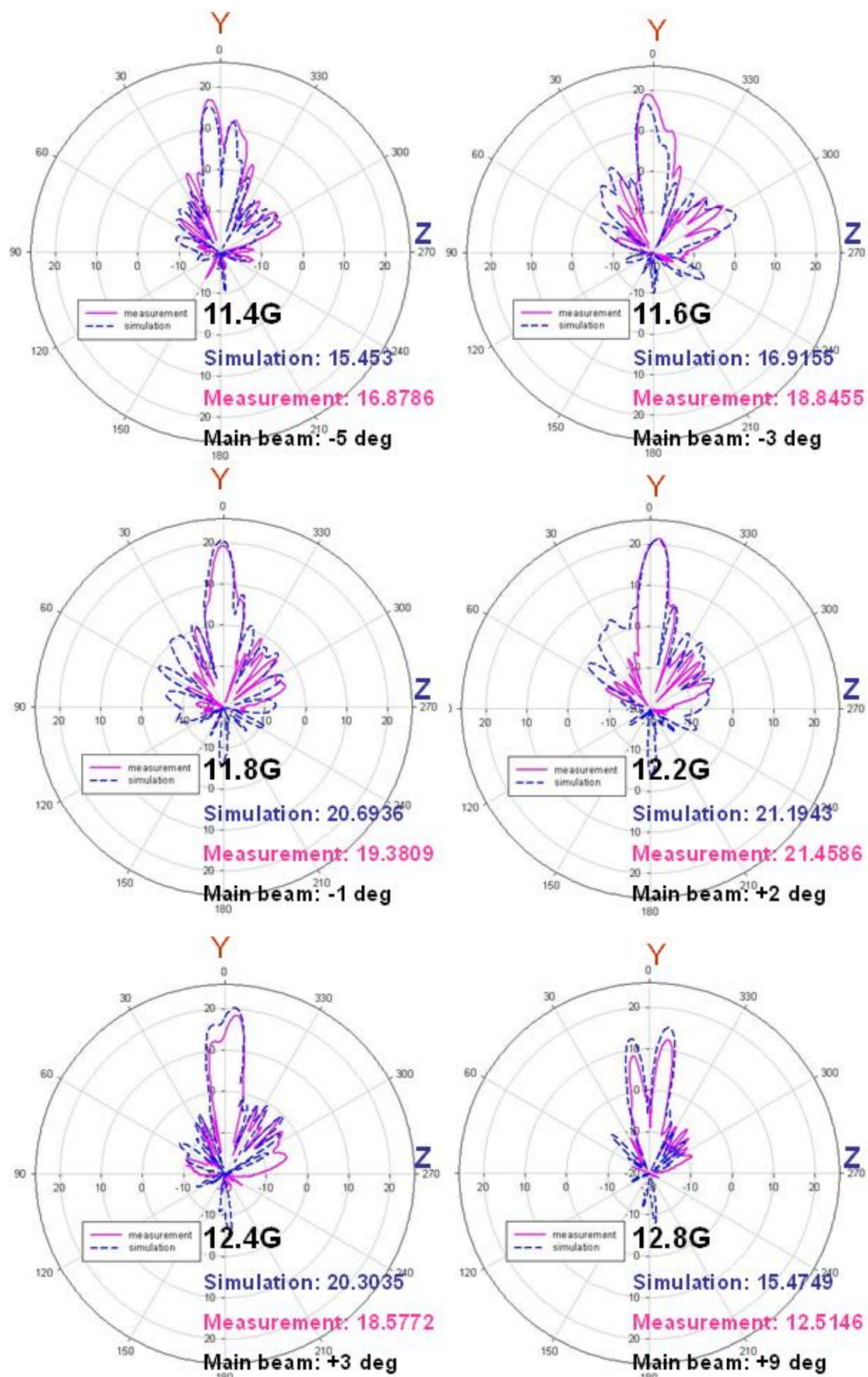


圖 5-23 YZ 切面隨頻率變化的 theta 極化輻射場形

Freq (GHz)	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.8
Simulation Gain (dBi)	15.45	16.91	20.69	21.19	20.30	15.47
measurement Gain (dBi)	16.88	18.85	19.38	21.46	18.58	12.51
Main beam Angle (deg)	-5	-3	-1	+2	+3	+9

表 5-2 YZ 切面隨頻率變化的 theta 極化輻射增益數值整理

5.2.6 天線實際照片

圖 5-24 為電路正面照片。圖 5-25、圖 5-26 為饋入電路的正反面照片。圖 5-27 為電路側面鍍銅導通的照片。

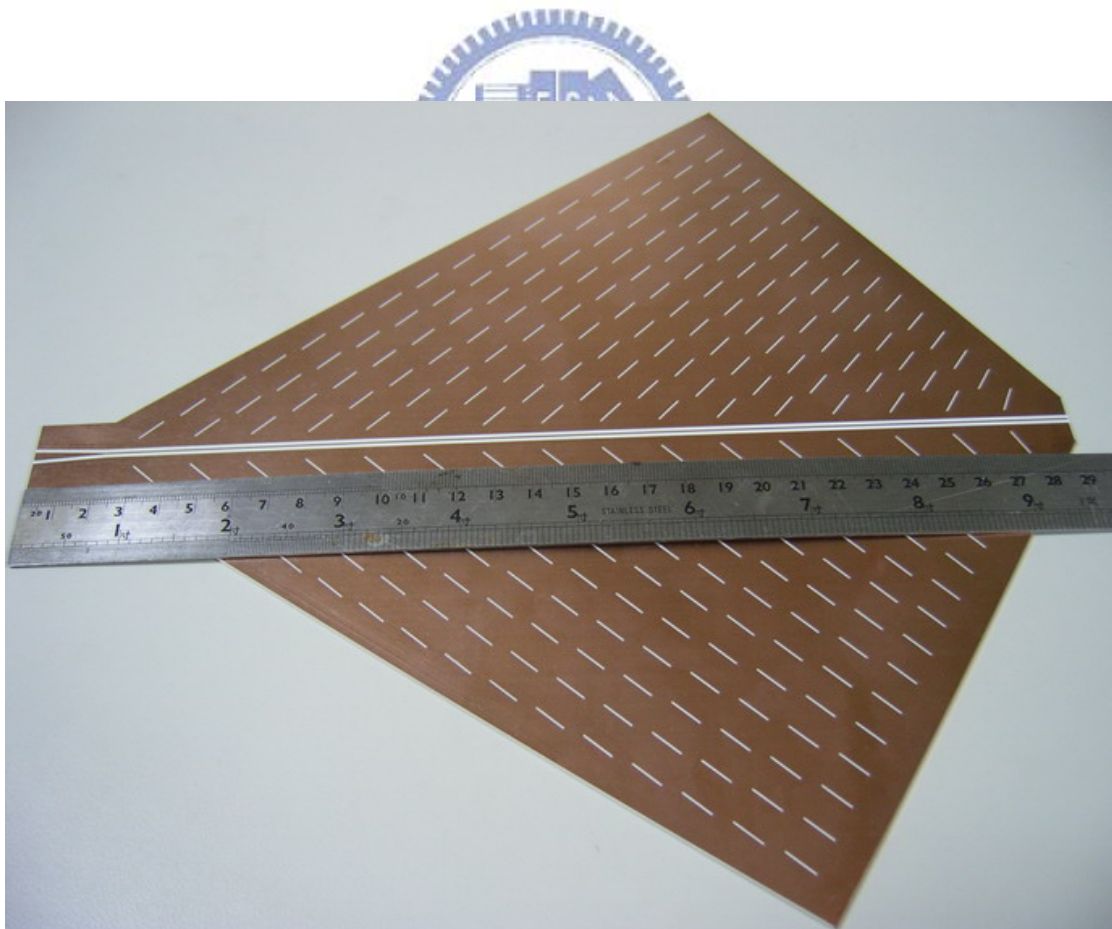


圖 5-24 電路正面照片

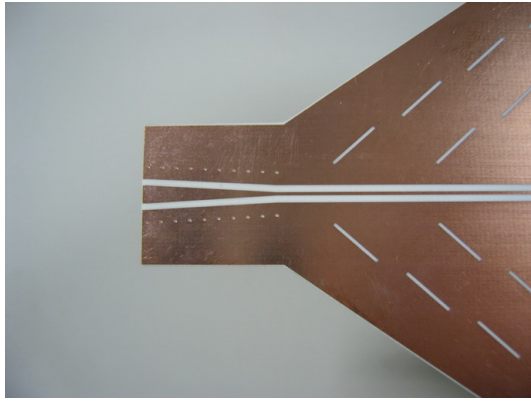


圖 5-25 饋入電路的正面照片

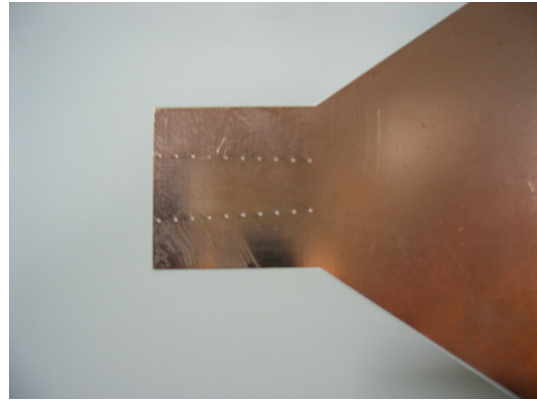


圖 5-26 饋入電路的反面照片

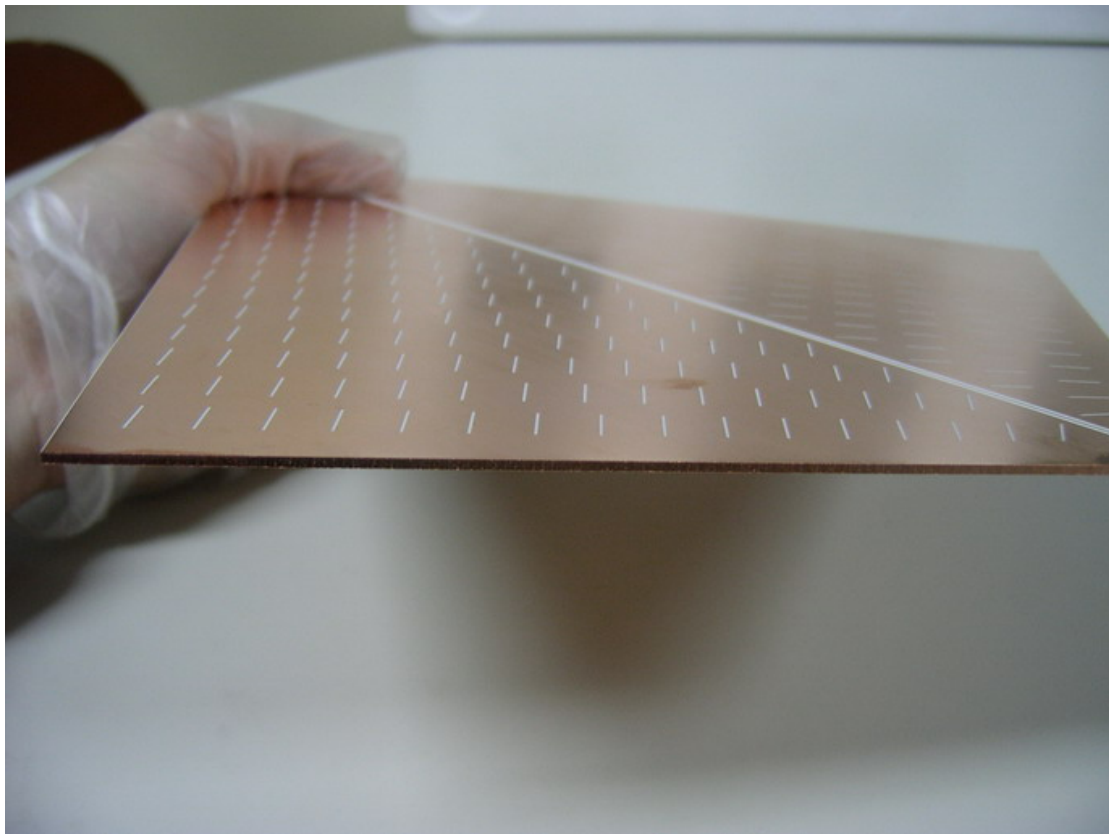


圖 5-27 電路側面鍍銅導通照片

5.3 天線應用延伸

5.3.1 天線應用延伸動機

5.2 節我們模擬也實際量測了設計的天線。由於 CBCPW 本身表面波傳播的角度固定，加上爲了匹配槽孔的旋轉角度不能過大，使得設計出來的天線沒有辦法呈現鉛筆束(pencil beam)的輻射場形，如圖 5-20 XY 切面 theta 方向(z-pol)的極化呈現一 conical 的場形。於是本論文繼續探討，利用四片天線組成的陣列讓電場的向量和在 YZ、XY 切面上，抵消後只剩一個方向。

5.3.2 槽孔的平移

圖 5-5 表示了波導末端的短路離最後一個槽孔為一倍 λ_g 。從傳輸線理論我們知道，對阻抗而言每隔二分之一波長就會重複，不需要到一倍的波長，所以我們可以將槽孔向短路邊緣靠近二分之一波長，這樣仍可維持阻抗的匹配，不過槽孔內的電場與之前的設計會呈現反向的效果，如圖 5-28 所示。

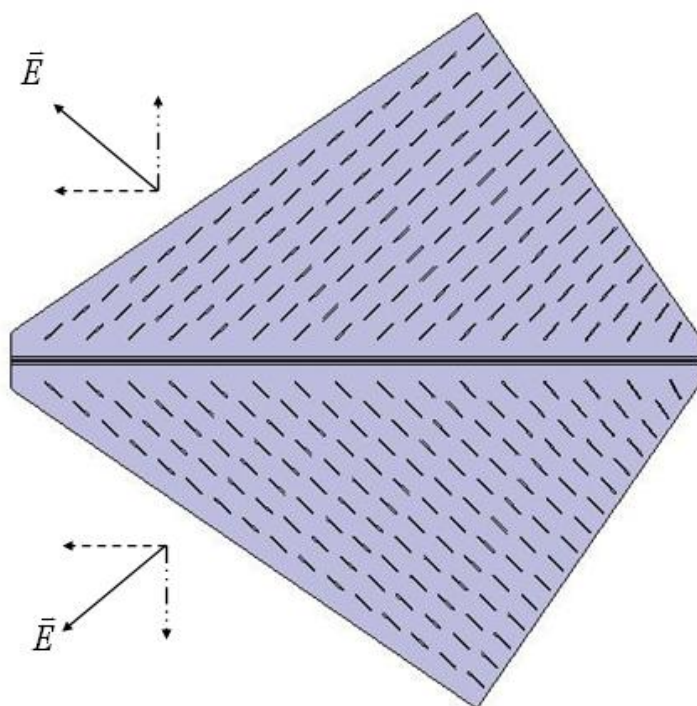


圖 5-28 全部槽孔向短路端平移 0.5 波長示意圖

圖 5-28 中標示了槽孔內電場的方向，與圖 5-17 相比剛好為反向。接下來我們再觀察只將下半部的槽孔向短路邊緣靠近二分之一波長，其槽孔的電場分佈如圖 5-29。

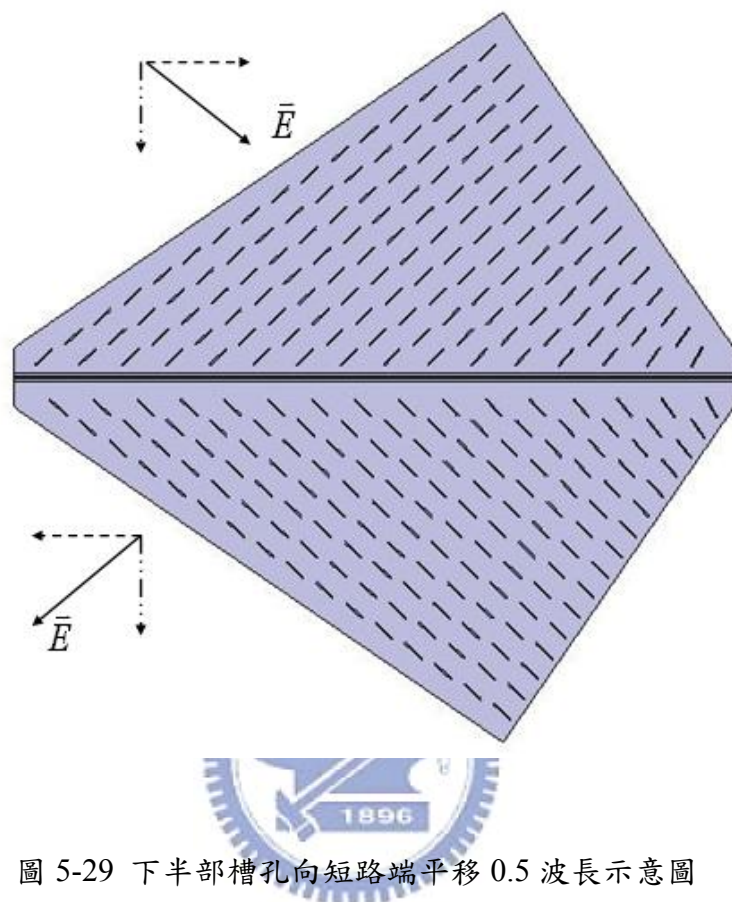


圖 5-29 下半部槽孔向短路端平移 0.5 波長示意圖

5.3.3 天線陣列設計

由上一小節我們知道控制槽孔的位置可以決定槽孔內電場的極化，利用這個方法可以發展出如圖 5-30 的陣列。圖 5-30 為由四片扇型天線組成的天線示意圖，為了讓最後槽孔的電場抵消只剩同一方向，我們必須改變四片天線上槽孔的位置。假設四片天線同相位饋入，標示 1 的天線，槽孔位置不改變；標示 2 的天線，右半邊的槽孔向短路端平移 $0.5\lambda_g$ ；標示 3 的天線，所有槽孔都要向短路端平移 $0.5\lambda_g$ ；標示 4 的天線，右半邊槽孔向短路端平移 $0.5\lambda_g$ 。最後圖形會呈現上下完全對稱，每一面天線上槽孔內的電場也標示在圖上。我們不難發現將這些電場分解成 X、Z 方向後，Z 方向上的電場會全部同向，而 X 方向上的電場則會呈現左右、上下相反對稱，所以可以預期在 YZ 切面與 XY 切面的輻射場形只會有一個方向的極化。

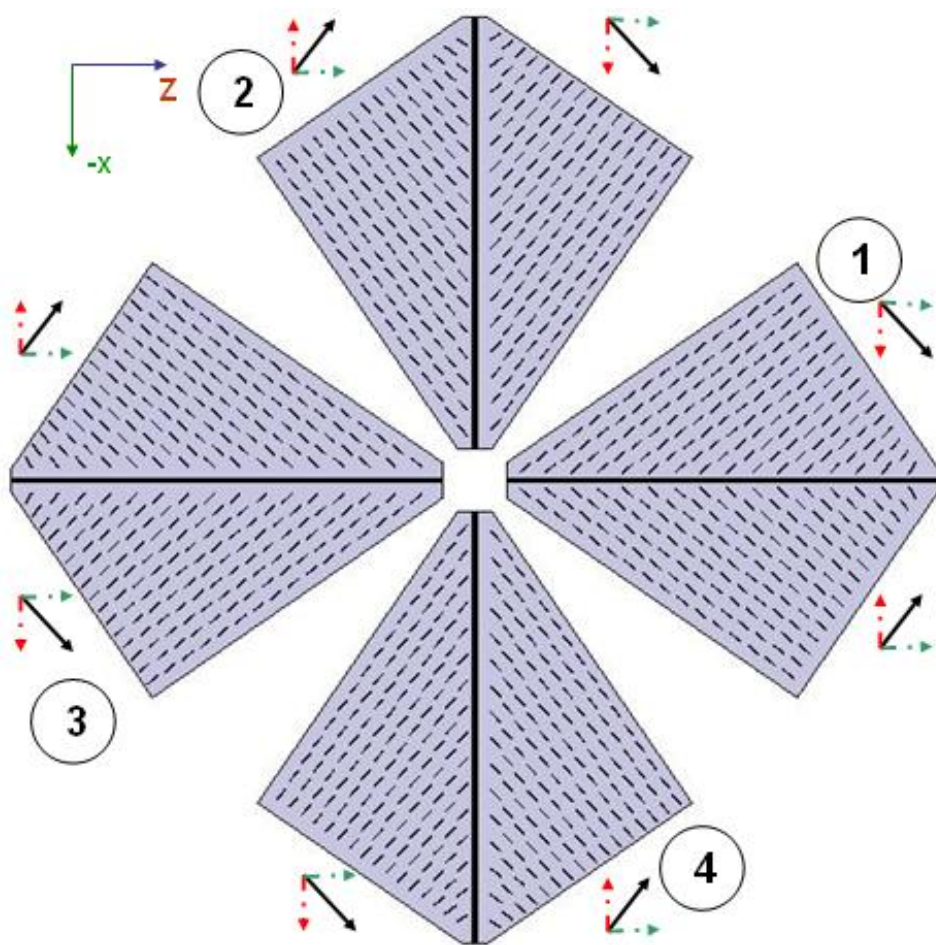


圖 5-30 四片扇型天線組成的天線陣列及槽孔內電場分解示意圖

5.3.4 饋入電路設計

不同於 5.2.2 節的饋入電路，要運用在圖 5-30 的天線饋入必須是一分四的分配電路，且必須使用 50 歐姆的同軸電纜接到 4 片輸入阻抗為 100 歐姆的天線端。從電路並聯觀點來看，天線本來該設計在 200 歐姆，但是對 CBCPW 來說 200 歐姆阻抗線的 s 為 0.1mm，過細的電路不容易實現，所以我們仍舊維持在 100 歐姆，匹配的部份就用四分之一波長轉換來實現。

要使用四分之一波長轉換將 100 歐姆匹配到 200 歐姆，需要的是特性阻抗 141 歐姆的傳輸線，其 $s=0.18\text{mm}$ 、 $g=1\text{mm}$ 。12GHz 的訊號在該尺寸的傳輸線上波長為 16.23mm，四分之一波長約為 4.06mm。圖 5-31、5-32 為分配電路的俯視圖及側視圖。圖 5-33 為模擬的 S 參數， S_{11} 在該頻段全小於 -15dB，而 S_{21} 、 S_{31} 、 S_{41} 、 S_{51} 則約為 -6dB，代表能量達到一分四的效果。

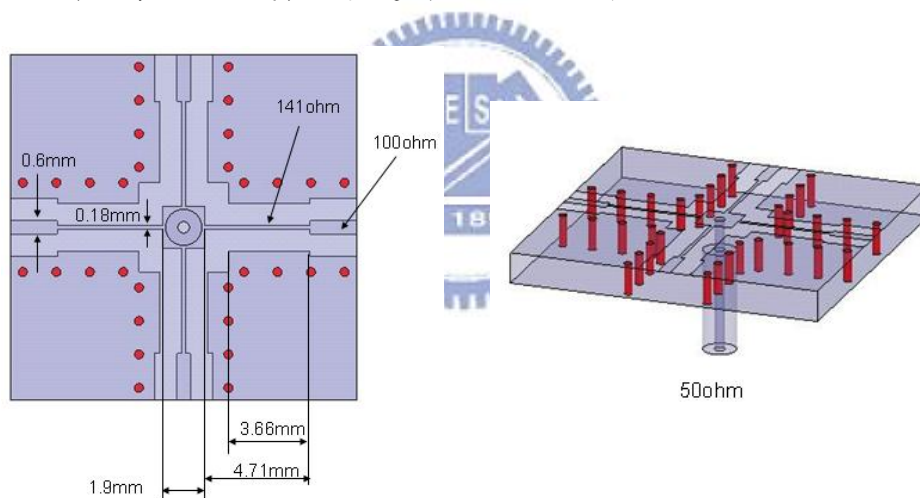


圖 5-31 饋入電路俯視圖

圖 5-32 饋入電路側視圖

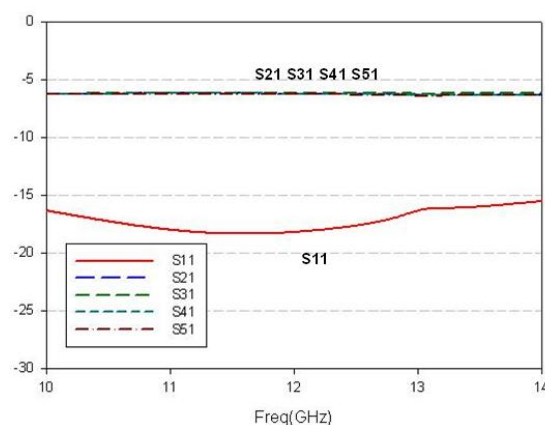


圖 5-33 饋入電路 S 參數模擬

5.3.5 天線與饋入電路示意圖

圖 5-34 為我們將饋入電路及天線做結合後的示意圖，並把圖 5-30 中天線跟天線之間的空白用基板補起來，另外在圖上也標示了鍍銅將上下兩板連接導通的地方。

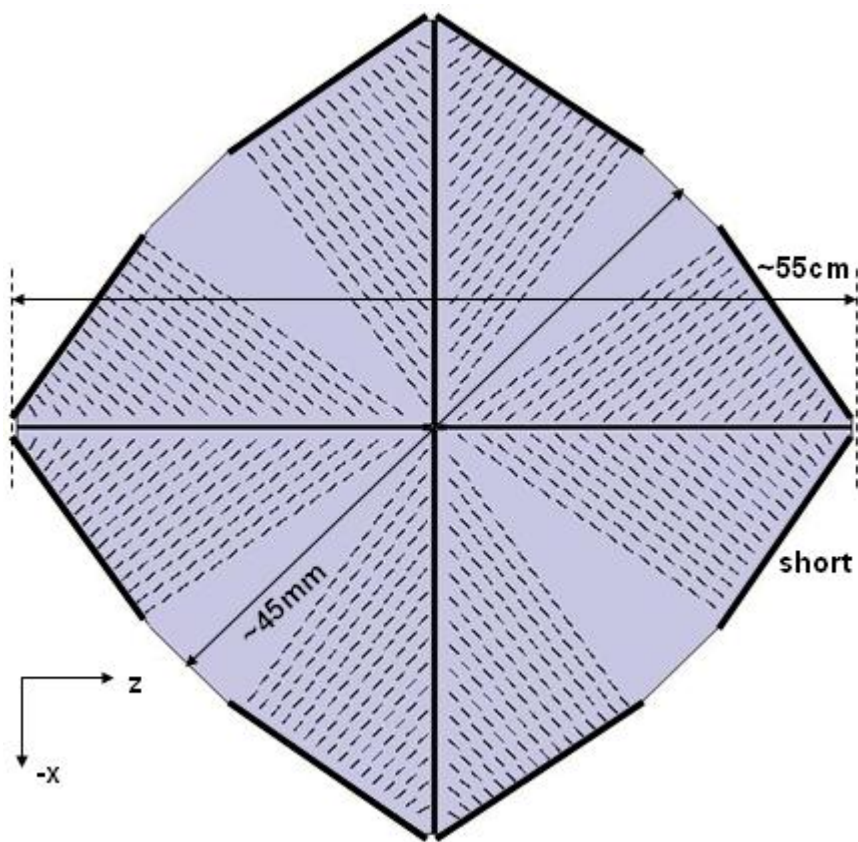


圖 5-34 天線與饋入電路合併示意圖

5.3.6 天線 S 參數模擬與量測

圖 5-35 為最後天線的 S 參數模擬與量測結果，在 12GHz 的地方 S11 約為 -15dB，頻寬約 920MHz。

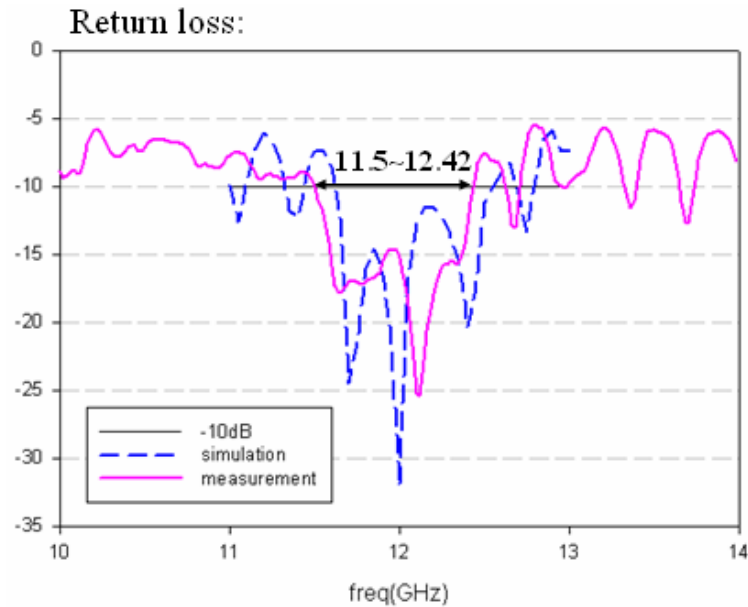


圖 5-35 天線 S 參數模擬與量測結果

5.3.7 天線輻射場形模擬與量測

圖 5-36 為 12GHz 時 YZ 切面的輻射場型，這個切面只存在 theta(z-pol)的極化，其量測增益為 25.98dBi；圖 5-37 為 12GHz 時 XY 切面的輻射場型，這個切面只存在 phi(z-pol)的極化，其量測增益為 25.0dBi。

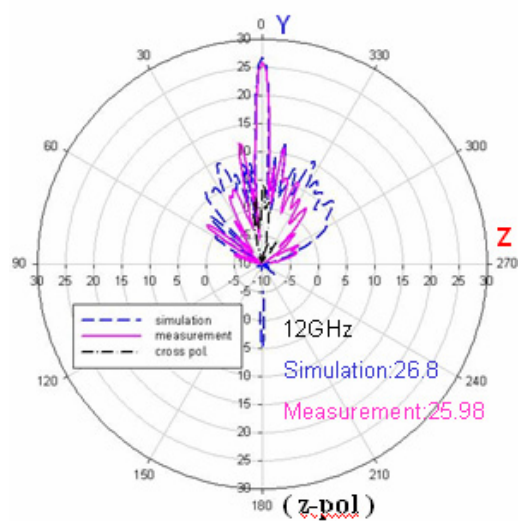


圖 5-36 12GHz YZ 切面輻射場型

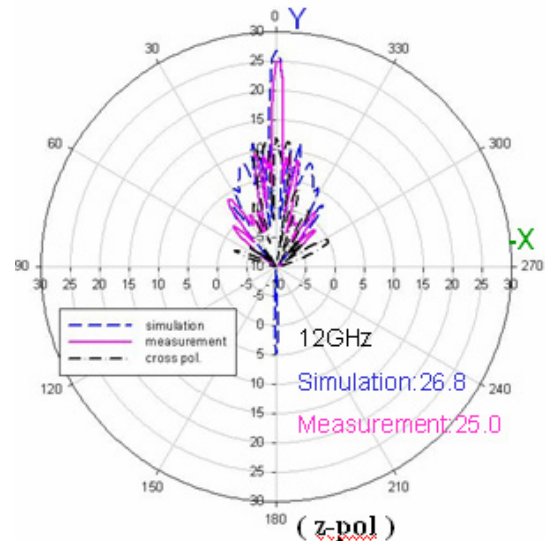


圖 5-37 12GHz XY 切面輻射場型

由圖 5-36 及圖 5-37 我們不難發現組合起來的 3D 場形為一指向 broadside 的鉛筆束場形，原因在於這兩個切面上只會收到 Z 方向的電場，而 X 方向的電場因為上下、左右的反對稱而被抵銷，如此一來可以提高天線的指向性，其 3dBi 的波束寬約為 4 度。圖 5-38 為隨頻率變化的 YZ 切面輻射場形，我們發現場形只有輻射增益隨頻率變化，主波束角度始終維持在 broadside 方向。

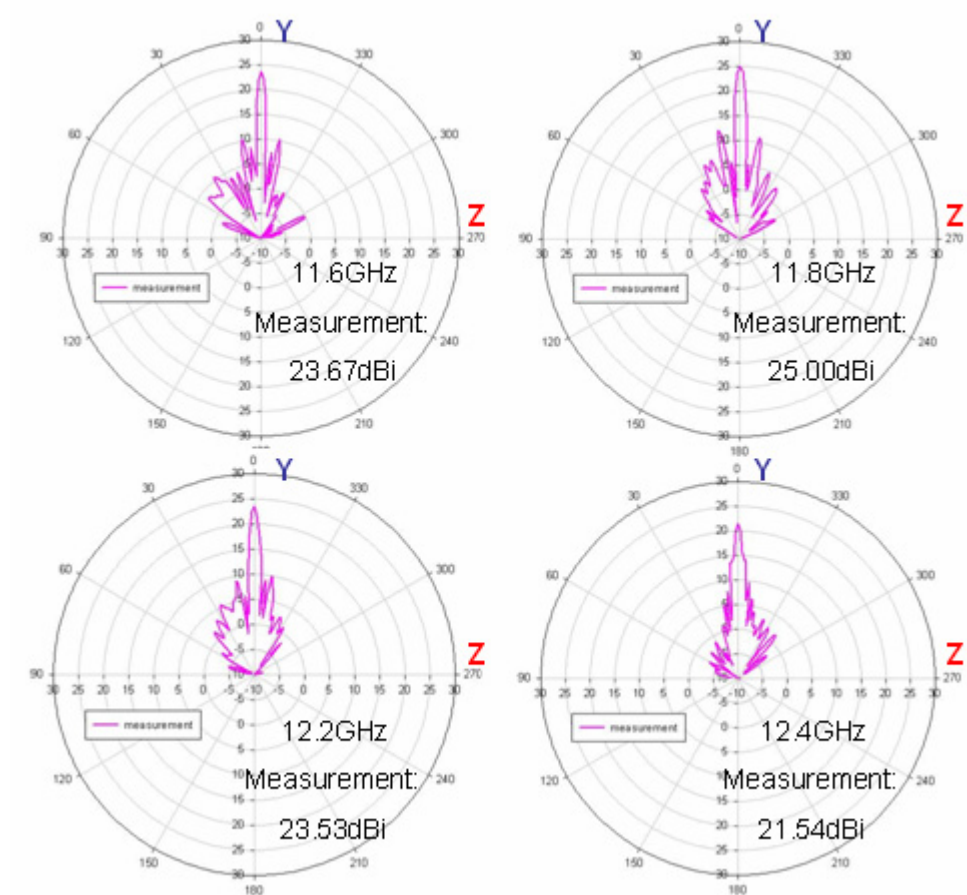


圖 5-38 隨頻率變化的 YZ 切面量測輻射場形

5.3.7 天線實體照片

圖 5-39 為電路的俯看圖；圖 5-40 為電路的側視圖；圖 5-41 為天線板材邊緣鍍銅；圖 5-42 為電路背面使用同軸電纜饋入。

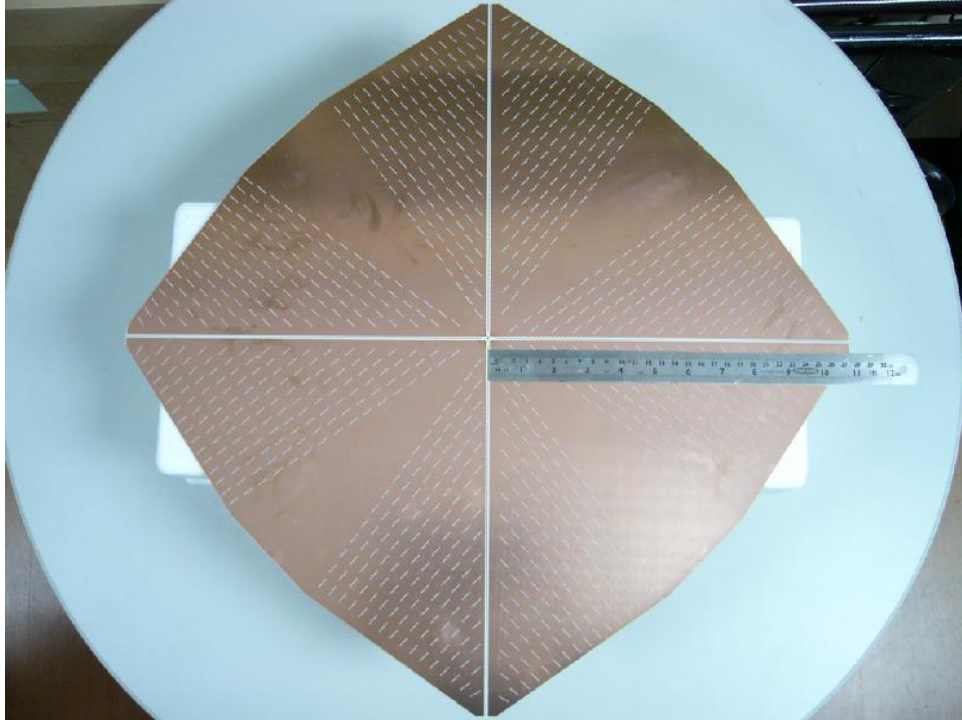


圖 5-39 電路俯看圖

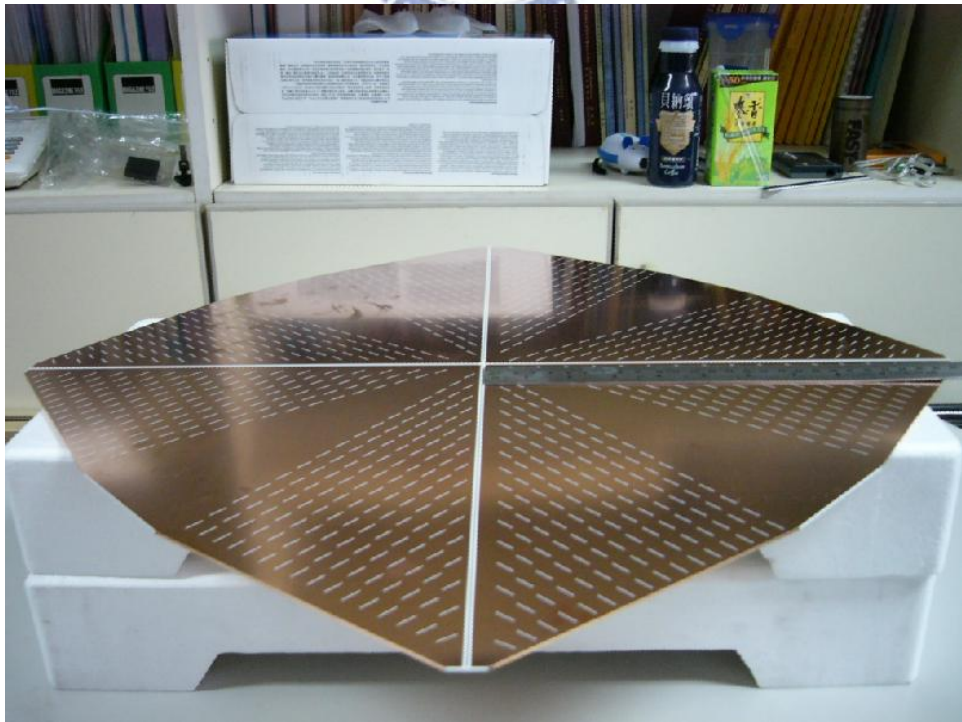


圖 5-40 電路側視圖

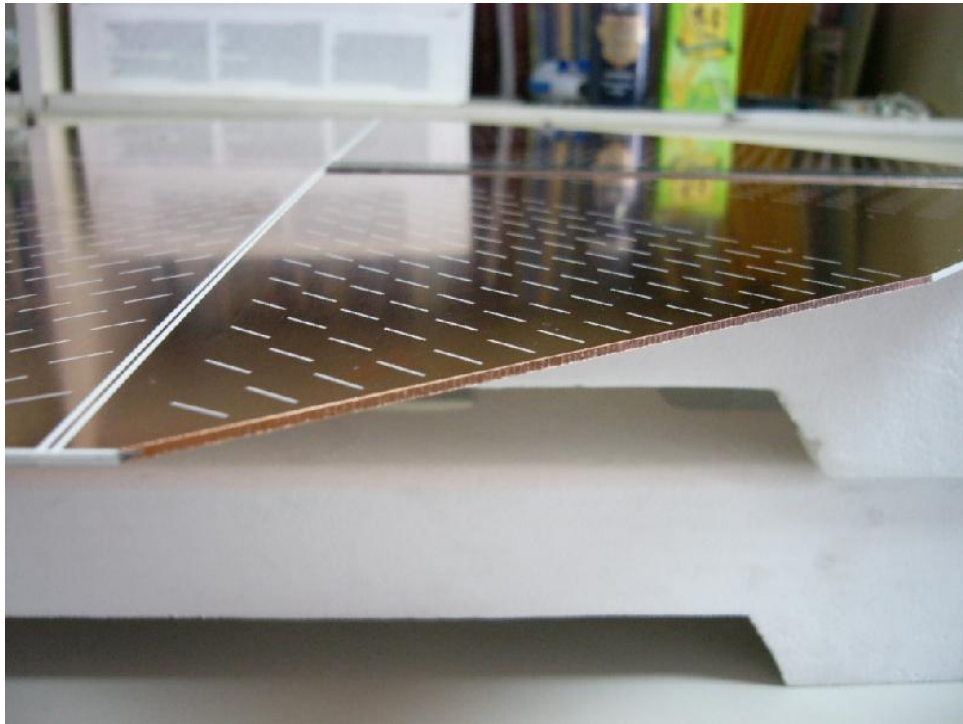


圖 5-41 天線板材邊緣鍍銅

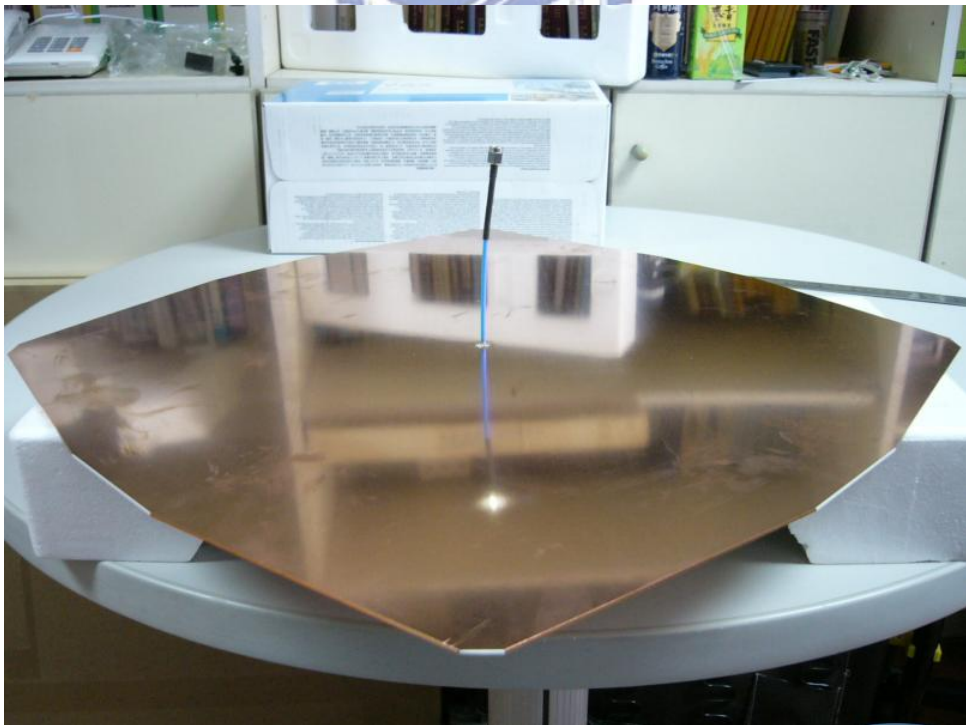


圖 5-42 電路背面使用同軸電纜饋入

第六章 結論

利用全波分析(SDA)可以求得背接金屬共平面波導的傳播常數以及了解其表面洩露波特性和在 CBCPW 上層金屬地適當位置蝕刻矩形槽孔，由於所有槽孔被同相位激發，在 broadside 方向會有建設性干涉，但是由於槽孔設計的侷限，還不能得到指向性高的鉛筆束(pencil beam)輻射場形。藉由分析矩形槽孔等效電路，適當的設計能讓輸入端匹配到 50 歐姆，並且用 SMA 接頭或同軸電纜實現。

爲了克服輻射場形不集中的問題，我們延伸一片天線至輻射狀的四片天線，改變每片天線上槽孔的位置來得到適當的電場分佈，向量抵銷後在主要的切面上我們得到同一方向的電場總和，最終可得一指向性高的鉛筆束(pencil beam)輻射場形。



参 考 文 献

- [1] T. Itoh and R. Mittra, "Spectral-domain approach for calculating the dispersion characteristics of microstrip lines," *IEEE Trans. Microwave theory Tech.*, vol. MTT-21, pp. 496-499, July 1973.
- [2] W. Menzel, "A new traveling-wave antenna in microstrip," *Arch. Electron. Ubertrag. Tech.*, vol. 33, pp. 137-140, 1979.
- [3] A. A. Oliner and K. S. Lee, "The nature of the leakage from higher-order modes on microstrip line," in *Proc. 1986 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, Baltimore, MD, pp. 57-60, 1986.
- [4] Y. C. Shih, T. Itoh, "Analysis of conductor-backed coplanar waveguide," *Electron. Lett.*, vol.18, n.18, pp. 538-540, June 1982.
- [5] R. J. Stevenson, "Theory of slots in rectangular waveguides," *J. App. Phys.*, vol. 19, 1948, pp. 24-38.
- [6] Reuven Shavit, "Impedance characteristics of a slot antenna fed by a parallel-plate waveguide," *Microwave Opt Technol Lett.*, vol. 14, no.2, Feb. 1997.
- [7] M. Ando, K. Sakurai, N. Goto, K. Arimura and Y. Itoh, "A radial line slot antenna for 12 GHz satellite TV reception," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 12, pp.1347-1353, Dec. 1985.
- [8] Kyoung-Hwan Oh and Jong-In Song, "Investigation of parallel plate mode suppression in UC-PBG FW-CBCPW by using a transient electrooptic field-mapping," *Microwave Photonics.*, pp. 277- 280, 2005.
- [9] Jen-Feng Huang and Chih-Wen Kuo, "More investigations of leakage and nonleakage conductor-backed coplanar waveguide," *IEEE Trans Electromagn., Compat EMC-40*, pp. 257-261, 1998.

- [10] R. S. Elliott, *Antenna theory and design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
- [11] R. Shavit and R. S. Elliott, "Design of an array of transverse slots fed by a boxed stripline," *IEEE Tran. Antennas Propagat.*, Vol. AP-31, NO. 1, 1983.



Appendix (A)

將(3-9)式代入(3-10)式可得到以下四式：

$$jk_x \gamma_{y1} A^e - jk_z A^h = -jk_x \gamma_{y3} D^e \sinh \gamma_3 h - jk_z D^h \sinh \gamma_3 h \quad (\text{A-1})$$

$$jk_z \gamma_{y1} A^e + jk_x A^h = -jk_z \gamma_{y3} D^e \sinh \gamma_3 h + jk_x D^h \sinh \gamma_3 h \quad (\text{A-2})$$

$$jk_z D^e \cosh \gamma_3 h - jk_x \gamma_{z3} D^h \cosh \gamma_3 h - jk_z A^e - jk_x \gamma_{z1} A^h = \tilde{J}_z \quad (\text{A-3})$$

$$-jk_x D^e \cosh \gamma_3 h - jk_z \gamma_{z3} D^h \cosh \gamma_3 h + jk_x A^e - jk_z \gamma_{z1} A^h = -\tilde{J}_x \quad (\text{A-4})$$

將 (A-1)乘 k_x 加上 (A-2)乘 k_z 得：

$$j(k_x^2 + k_z^2) \gamma_{y1} A^e = -j(k_x^2 + k_z^2) \gamma_{y3} D^e \sinh \gamma_3 h \quad (\text{A-5})$$

將 (A-3)乘 k_x 減去 (A-4)乘 k_z 得：

$$j(k_x^2 + k_z^2) A^h = j(k_x^2 + k_z^2) D^h \sinh \gamma_3 h \quad (\text{A-6})$$

整理(A-5)、(A-6)可得係數：

$$D^e = -\frac{\gamma_{y1} A^e}{\gamma_{y3} \sinh \gamma_3 h} \quad (\text{A-7})$$

$$D^h = -\frac{A^h}{\sinh \gamma_3 h} \quad (\text{A-8})$$

接下來為了方便，我們令以下參數：

$$c_3 = \cosh \gamma_3 h \quad s_3 = \sinh \gamma_3 h \quad t_3 = \tanh \gamma_3 h \quad ct_3 = \csc \gamma_3 h$$

我們繼續將(A-7)、(A-8)求得的係數代回(A-1)、(A-2)整理得：

$$-jk_x A^h \left[\frac{\gamma_{z3}}{t_3} + \gamma_{z1} \right] - jk_z A^e \left[\frac{\gamma_{y1}}{\gamma_{y3} t_3} + 1 \right] = \tilde{J}_z \quad (\text{A-9})$$

$$-jk_z A^h \left[\frac{\gamma_{z3}}{t_3} + \gamma_{z1} \right] + jk_x A^e \left[\frac{\gamma_{y1}}{\gamma_{y3} t_3} + 1 \right] = -\tilde{J}_x \quad (\text{A-10})$$

$$\text{再令 } F_1 = \left[\frac{\gamma_{z3}}{t_3} + \gamma_{z1} \right] \quad F_2 = \left[\frac{\gamma_{y1}}{\gamma_{y3} t_3} + 1 \right]$$

將 (A-9)乘 k_x 加上 (A-10)乘 k_z 得：

$$-j(k_x^2 + k_z^2)A^h F_1 = k_x \tilde{J}_z - k_z \tilde{J}_x \quad (\text{A-11})$$

將 (A-9)乘 k_z 減去 (A-10)乘 k_x 得：

$$-j(k_x^2 + k_z^2)A^e F_2 = k_z \tilde{J}_z + k_x \tilde{J}_x \quad (\text{A-12})$$

整理(A-11)、(A-12)可得係數：

$$A^h = -\frac{k_x \tilde{J}_z - k_z \tilde{J}_x}{j(k_x^2 + k_z^2)F_1} \quad (\text{A-13})$$

$$A^e = -\frac{k_z \tilde{J}_z + k_x \tilde{J}_x}{j(k_x^2 + k_z^2)F_2} \quad (\text{A-14})$$

從(A-7)、(A-8)、(A-13)、(A-14)有了四個係數後，將他們代回(3-9)式裡的 $\tilde{E}_{x1}$ 與 $\tilde{E}_{z1}$

$$\tilde{E}_{x1} = jk_x \gamma_{y1} A^e - jk_z A^h = jk_x \gamma_{y1} \left(-\frac{k_z \tilde{J}_z + k_x \tilde{J}_x}{j(k_x^2 + k_z^2)F_2} \right) - jk_z \left(-\frac{k_x \tilde{J}_z - k_z \tilde{J}_x}{j(k_x^2 + k_z^2)F_1} \right) \quad (\text{A-15})$$

$$\tilde{E}_{z1} = jk_x \gamma_{y1} A^e - jk_z A^h = jk_x \gamma_{y1} \left(-\frac{k_z \tilde{J}_z + k_x \tilde{J}_x}{j(k_x^2 + k_z^2)F_2} \right) - jk_z \left(-\frac{k_x \tilde{J}_z - k_z \tilde{J}_x}{j(k_x^2 + k_z^2)F_1} \right) \quad (\text{A-16})$$

整理上兩式：

$$\tilde{E}_{z1} = \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left[\frac{k_z^2 \gamma_{y1}}{F_2} + \frac{k_x^2}{F_1} \right] \tilde{J}_z + \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left[\frac{k_x k_z \gamma_{y1}}{F_2} - \frac{k_x k_z}{F_1} \right] \tilde{J}_x \quad (\text{A-17})$$

$$\tilde{E}_{x1} = \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left[\frac{k_x k_z \gamma_{y1}}{F_2} - \frac{k_x k_z}{F_1} \right] \tilde{J}_z + \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left[\frac{k_x^2 \gamma_{y1}}{F_2} + \frac{k_z^2}{F_1} \right] \tilde{J}_x \quad (\text{A-18})$$

將(A-17)、(A-18)整理成矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{z1} \\ \tilde{E}_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left(\frac{k_z^2 \gamma_{y1}}{F_2} + \frac{k_x^2}{F_1} \right) & \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left(\frac{k_x k_z \gamma_{y1}}{F_2} - \frac{k_x k_z}{F_1} \right) \\ \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left(\frac{k_x k_z \gamma_{y1}}{F_2} - \frac{k_x k_z}{F_1} \right) & \frac{-1}{k_x^2 + k_z^2} \left(\frac{k_x^2 \gamma_{y1}}{F_2} + \frac{k_z^2}{F_1} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{bmatrix} \quad (\text{A-19})$$

將 F_1 、 F_2 代回(A-19)，最後可得(3-11)。

Appendix (B)

(4-11) 中

$$\int_{-w}^w \int_{-\ell}^{\ell} \frac{V_s}{2w} \frac{\sin k_s(\ell - |\zeta|)}{\sin k_s \ell} \tilde{\xi} \times \tilde{x} \frac{1}{\eta} e^{-jkz} \cdot \tilde{y} d\zeta d\xi \quad (\text{B-1})$$

其中向量的內外積結果及向量分解為：

$$\tilde{\xi} \times \tilde{x} = \tilde{\xi} \times (-\tilde{\xi} \sin \phi + \tilde{\zeta} \cos \phi) = \cos \phi \tilde{y}$$

$$z = \xi \cos \phi + \zeta \sin \phi$$

將上兩式代入(B-1)，一系列運算如下：

$$\begin{aligned} &= \int_{-w}^w \int_{-\ell}^{\ell} \frac{V_s}{2w} \frac{\sin k_s(\ell - |\zeta|)}{\sin k_s \ell} \frac{1}{\eta} \cos \phi \cdot e^{-jk\xi \cos \phi} e^{-jk\zeta \sin \phi} d\zeta d\xi \\ &= \frac{V_s \cos \phi}{2w\eta \sin k_s \ell} \int_{-w}^w e^{-jk\xi \cos \phi} d\xi \cdot \int_{-\ell}^{\ell} \sin k_s(\ell - |\zeta|) e^{-jk\zeta \sin \phi} d\zeta \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

$$= \frac{V_s \cos \phi}{2w\eta \sin k_s \ell} \left[\frac{-2j \sin(kw \cos \phi)}{-jk \cos \phi} \right] \cdot 2 \int_0^{\ell} \sin k_s(\ell - \zeta) \cos(k\zeta \sin \phi) d\zeta \quad (\text{B-3})$$

(B-2)中利用奇偶函數的特性可簡化成(B-3)，又(B-3)裡的積分式結果為：

$$\int_0^{\ell} \sin k_s(\ell - \zeta) \cos(k\zeta \sin \phi) d\zeta = \frac{k_s [\cos k_s \ell - \cos(k\ell \sin \phi)]}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \quad (\text{B-4})$$

最後(B-3)可得：

$$= \frac{2V_s \sin(kw \cos \phi)}{kw\eta} \frac{k_s}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \frac{\cos k_s \ell - \cos(k\ell \sin \phi)}{\sin k_s \ell} \quad (\text{B-5})$$

將(B-5)分子分母同乘 $\cos \phi$ 可得(4-11)式

$$= \frac{2V_s \cos \phi}{\eta} \sin c(kw \cos \phi) \frac{k_s}{k^2 \sin^2 \phi - k_s^2} \frac{\cos k_s \ell - \cos(k\ell \sin \phi)}{\sin k_s \ell} \quad (\text{4-11})$$

Appendix (C)

(4-24)中將電場及磁場帶入並做半球面的積分，其運算過程如下：

$$\begin{aligned}
 P_f &= \iint \vec{S} \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{1}{2} k_0 \omega \varepsilon_0 \frac{V_s^2}{\sin^2 k_s \ell} \frac{k_s^2}{\pi^2} \int_{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{1}{k_s^4} \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{\frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta - 1} \right]^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= \frac{1}{2} \frac{V_s^2}{\sin^2 k_s \ell} k_0 \omega \varepsilon_0 \frac{k_s^2}{\pi^2} 2\pi \frac{1}{2} \frac{1}{k_s^4} \int_0^{\pi} \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta \\
 &= k_0 \omega \varepsilon_0 \frac{V_s^2}{2\pi \sin^2 k_s \ell} \frac{1}{k_s^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{V_s^2}{2\pi \eta_0 \sin^2 k_s \ell} \frac{k_0^2}{k_s^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{\cos k_s \ell - \cos(k_0 \ell \cos \theta)}{1 - \frac{k_0^2}{k_s^2} \cos^2 \theta} \right]^2 \sin^3 \theta d\theta \tag{4-24}
 \end{aligned}$$