

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

渦卷設計逆向工程曲線擬合之研究

Study on Curve Fitting in Reverse  
Engineering of Scroll Design



研究生：林育生

指導教授：洪景華 教授

中華民國九十七年八月

# 渦卷設計逆向工程曲線擬合之研究

研究生：林育生

指導教授：洪景華 教授

國立交通大學機械工程學系

## 摘要

本文主旨在建立渦卷設計之逆向工程曲線擬合理論，及其電腦輔助應用程式。將量測的渦卷原始座標點資料，進行前處理，經兩階段曲線擬合及兩階段座標旋轉，求取渦卷擬合設計參數，並計算擬合誤差，透過區域擬合降低渦卷頭部及尾部特殊設計對渦卷曲線擬合所造成的誤差。

本研究系統實現是以Visual basic 2005為應用程式開發工具，發展一套同時擁有渦卷逆向工程曲線擬合及渦卷製造誤差檢測之視窗化物件導向式電腦輔助分析系統。針對經由三次元量測儀或影像檢測系統所取得之渦卷外型座標點資料，擬合求取原設計參數，並重新建立設計模型，提供渦卷設計者分析其設計優劣。應用程式亦可輸入設計參數，檢測渦卷製造過程所產生之誤差。

# **Study on Curve Fitting of Scrolls**

## **In Reverse Engineering of Scroll Design**

Student: Yusheng Lin

Advisor: Chinghua Hung

Institute of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

### **ABSTRACT**

The main purpose of this research is to construct the theory for curve fitting of scrolls in reverse engineering of scroll design and the corresponding application program based on the theory. The original measured coordinate data of scroll was rearranged and two stages of curve fitting and coordinate rotations were conducted after fitting parameters were specified. Finally, an area curve fitting method was adopted to reduce the fitting error for scrolls with specially modified head and tails. The system is implemented into an executable computer program by using developing tool Visual basic 2005. Two major functions, curve fitting of scrolls in reverse engineering of scroll design and scroll manufacturing error measurement, can be performed with this program. Several sets of scroll data measured by coordinate measuring machine were tested by this developed program. Good agreements were obtained by comparing known design parameters of tested scrolls.

## 誌謝

本論文可以順利完成，首先感謝指導教授 洪景華博士在研究及論文寫作上的指導與關切，衷心地感謝您這一年對學生的照顧，讓我得以完成碩士學業。同時，亦感謝國立交通大學 徐瑞坤教授和 國立清華大學 賀陳弘教授擔任本論文的口試委員，並提出許多寶貴的意見，使本論文能更趨完備。

再來，感謝這兩年來朝夕相處的實驗室伙伴們。感謝學長們總是能在我研究中遭遇困難時，適時地伸出援手，不厭其煩的讓我發問、尋求解答；而同學們間的互相砥礪，更是論文得以順利進行的助力。當然，更要感謝陪我走過這苦悶研究生涯的每一位好朋友，沒有你們我難以渡過煎熬。所以，我在此誠心誠意期盼我認識的每個人都能事事順心。

最後感謝我的父母親，由於您們不間斷的鼓勵和日常生活上的幫助，使我無後顧之憂地全心投入於求學及研究工作上，謝謝您們，希望您們永保健康、快樂。

# 目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	viii
圖目錄.....	ix
符號說明.....	xiii
<b>第一章 緒論.....</b>	<b>1</b>
1.1 前言.....	1
1.2 渦卷式壓縮機結構.....	3
1.3 研究動機與目的.....	6
1.4 本文架構.....	7
<b>第二章 文獻探討.....</b>	<b>9</b>
2.1 前言.....	9
2.2 延伸漸開線形渦卷之幾何數學模式.....	9
2.2.1 延伸漸開線之數學式.....	9

2.3.2	延伸漸開線形渦卷幾何模式.....	12
2.3.3	渦卷之數學模式.....	14
2.3	標準漸開線之創成.....	20
<b>第三章 渦卷曲線擬合理論推導.....</b>		<b>23</b>
3.1	前言.....	23
3.2	第一階段曲線擬合.....	25
3.2.1	面積最小平方法.....	25
3.2.2	資料前處理.....	29
3.3	第二階段曲線擬合.....	31
3.3.1	不偏倚最小平方法.....	32
3.3.2	特殊區域擬合.....	33
3.4	擬合誤差.....	36
3.4.1	座標歸零.....	36
3.4.2	第一階段座標旋轉.....	37
3.4.3	第二階段座標旋轉.....	39
3.4.4	輸出設計參數.....	41

3.4.5	擬合誤差輸出.....	43
<b>第四章</b>	<b>應用程式建立與案例分析.....</b>	<b>46</b>
4.1	應用程式建立與模擬測試.....	46
4.1.1	第一階段曲線擬合程式介面.....	48
4.1.1.1	第一階段曲線擬合.....	48
4.1.1.2	資料前處理.....	49
4.1.2	第二階段曲線擬合程式介面.....	50
4.1.2.1	第二階段曲線擬合.....	50
4.1.2.2	特殊區域擬合.....	51
4.1.3	擬合誤差程式介面.....	52
4.1.3.1	座標歸零及第一階段座標旋轉.....	52
4.1.3.2	第二階段座標旋轉與擬合半徑微調.....	53
4.1.3.3	輸出設計參數.....	54
4.1.3.4	擬合誤差輸出.....	55
4.2	應用案例測試.....	56
4.2.1	案例分析(一).....	56

4.2.2 案例分析(二) .....	65
4.2.3 案例結果討論.....	75
4.3 製造誤差檢測.....	76
<b>第五章 結論與未來發展方向.....</b>	<b>85</b>
5.1 結論.....	85
5.2 未來發展方向.....	86
<b>參考文獻.....</b>	<b>87</b>



# 表目錄

表 1.1 常見的壓縮機種類及其特性.....	1
表 4.1 案例渦卷之設計參數及量測方式.....	56
表 4.2 檔案 0077AA_Main.csv 渦卷擬合設計參數及擬合誤差分析.....	64
表 4.3 檔案 0900_Main.csv 渦卷擬合設計參數及擬合誤差分析(一).....	73
表 4.4 檔案 0900_Main.csv 渦卷擬合設計參數及擬合誤差分析(二).....	74
表 4.5 檔案 0077AA_Main.csv 擬合誤差及製造誤差檢測結果比較.....	84



# 圖目錄

圖 1.1 渦卷式壓縮機.....	3
圖 1.2 渦卷式壓縮機之主要構成元件.....	4
圖 1.3 渦卷式壓縮機之工作原理.....	5
圖 2.1 延伸漸開線展開示意圖.....	10
圖 2.2 刀具在空間中將銑切出延伸漸開線形渦卷.....	12
圖 2.3 銑削渦卷之刀具座標系圖.....	13
圖 2.4 繞動渦卷旋轉一角度 $\Psi$ .....	17
圖 2.5 繞動渦卷做繞動半徑為 $L$ 之圓周運動.....	18
圖 2.6 以 $\alpha$ 為創成角之標準漸開線曲線.....	20
圖 2.7 渦卷創成設計圖形及設計參數.....	22
圖 3.1 最小平方回歸.....	23
圖 3.2 曲線內插.....	24
圖 3.3 渦卷曲線擬合理論推導流程圖.....	24
圖 3.4 三點擬合成一圓弧.....	25
圖 3.5 三點擬合圓弧之圓心在基圓圓周上.....	28
圖 3.6 所有小圓弧之擬合圓心分布在基圓圓周上.....	29
圖 3.7 基圓之第二階段曲線擬合.....	31
圖 3.8 第一階段曲線擬合圓心與基圓圓周的垂直距離誤差.....	33
圖 3.9 區域擬合範圍 $R_1^2 < x_i^2 + y_i^2 < R_2^2$ .....	34

圖 3.10 實際區域擬合範圍.....	35
圖 3.11 渦卷外型座標點資料與標準漸開線之角度誤差.....	36
圖 3.12 將渦卷外型座標點資料旋轉至標準漸開線附近.....	37
圖 3.13 標準漸開線展開原理 $\beta_i$ 與 $\phi_i$ 的關係.....	40
圖 3.14 座標旋轉角與創成角之關係(1) .....	42
圖 3.15 座標旋轉角與創成角之關係(2) .....	43
圖 3.16 渦卷座標點資料與擬合渦卷標準漸開線相對關係.....	45
圖 4.1 渦卷曲線擬合應用程式流程圖.....	47
圖 4.2 第一階段曲線擬合圓心分布情形.....	48
圖 4.3 渦卷外型座標點資料資料前處理.....	49
圖 4.4 第二階段曲線擬合結果.....	50
圖 4.5 區域擬合結果.....	51
圖 4.6 座標歸零及第一階段座標旋轉.....	52
圖 4.7 第二階段座標旋轉與擬合半徑微調.....	53
圖 4.8 輸出創成角與渦卷厚度等設計參數.....	54
圖 4.9 渦卷外型座標點資料與擬合渦卷標準模型間之誤差值.....	55
圖 4.10 檔案 0077AA_Main.csv 之第一、第二階段曲線擬合結果.....	57
圖 4.11 檔案 0077AA_Main.csv 區域擬合結果.....	58
圖 4.12 檔案 0077AA_Main.csv 兩階段旋轉及擬合半徑微調結果.....	59
圖 4.13 檔案 0077AA_Main.csv 沒有區域擬合之擬合設計參數與擬合誤差....	60
圖 4.14 檔案 0077AA_Main.csv	

區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差.....	61
圖 4.15 檔案 0077AA_Main.csv	
區域擬合(擬合範圍:200 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差.....	62
圖 4.16 擬合基圓之圓心偏移示意圖.....	63
圖 4.17 檔案 0900_Main.csv 第一階段曲線擬合散佈.....	65
圖 4.18 檔案 0900_Main.csv 第一、第二階段曲線擬合結果.....	66
圖 4.19 檔案 0900_Main.csv 隔 3 點取點	
沒有區域擬合之擬合設計參數與擬合誤差.....	67
圖 4.20 檔案 0900_Main.csv 隔 3 點取點	
區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差.....	68
圖 4.21 檔案 0900_Main.csv 隔 3 點取點	
區域擬合(擬合範圍:200 度~700 度)之擬合設計參數與擬合誤差.....	69
圖 4.22 檔案 0900_Main.csv 隔 4 點取點	
區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差.....	70
圖 4.23 檔案 0900_Main.csv 隔 5 點取點	
區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差.....	71
圖 4.24 渦卷製造誤差檢測流程圖.....	76
圖 4.25 渦卷製造誤差檢測之設計參數輸入.....	77
圖 4.26 標準渦卷模型製造誤差檢測.....	78
圖 4.27 檔案 0077AA_Main.csv 製造誤差檢測.....	79
圖 4.28 檔案 0077AA_Main.csv(範圍:200 度~800 度)製造誤差檢測.....	80

圖 4.29 檔案 0077AA\_Main.csv

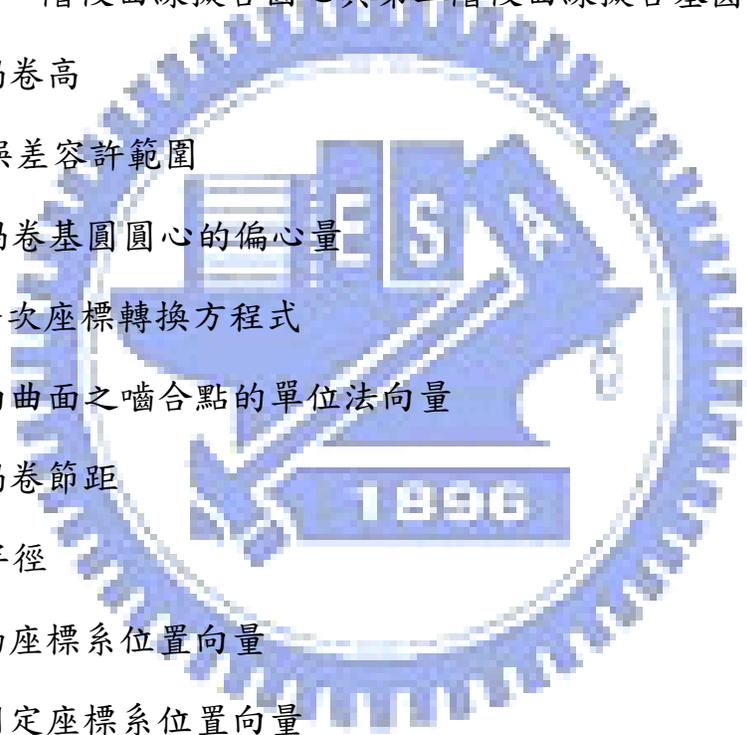
區域擬合(範圍:200 度~800 度)外渦卷基圓圓心微調之擬合誤差...82

圖 4.30 檔案 0077AA\_Main.csv

區域擬合(範圍:200 度~800 度)內渦卷基圓圓心微調之擬合誤差...83



## 符號說明



$a$	基圓半徑
$d_i$	擬合誤差
$E$	延伸漸開線之延伸量
$E_i$	渦卷座標點資料 $(x_i'', y_i'')$ 與標準漸開線之最小距離平方
$e_i$	第一階段曲線擬合圓心與第二階段曲線擬合基圓圓周的垂直距離
$h$	渦卷高
$K$	誤差容許範圍
$L$	渦卷基圓圓心的偏心率
$M_{1a}$	齊次座標轉換方程式
$n$	兩曲面之嚙合點的單位法向量
$p$	渦卷節距
$R$	半徑
$R_a$	動座標系位置向量
$R_l$	固定座標系位置向量
$R_c$	刀具座標系位置向量
$R_{lc}$	刀具之固定座標系位置向量
$R_{fo}$	固定渦卷之外緣外形幾何方程式
$R_{fi}$	固定渦卷之內緣外形幾何方程式
$R_{mo}$	固定渦卷之外緣外形幾何方程式

$R_{mi}$	固定渦卷之內緣外形幾何方程式
$r$	圓柱型刀具半徑
$S_1(X_1, Y_1)$	固定座標系
$S_a(X_a, Y_a)$	動座標系
$S_c(X_c, Y_c)$	刀具座標系
$t$	渦卷壁厚度
$v$	相對速度
$(x_i, y_i)$	渦卷座標
$(\bar{x}, \bar{y})$	渦卷基圓中心座標
$(x_m, y_m)$	內外渦卷資料點選取最接近渦卷頭部之座標點
$(x_c, y_c)$	$(x_m, y_m)$ 轉至標準漸開線的相對點
$(x'_i, y'_i)$	渦卷第一階段座標旋轉後之座標
$(x''_i, y''_i)$	渦卷第二階段座標旋轉後之座標
$\alpha$	創成角
$\phi$	漸開線之展開角
$\phi_m$	座標點 $(x_m, y_m)$ 之展開角
$\phi_c$	座標點 $(x_c, y_c)$ 之展開角
$\theta$	銑刀刀緣上任意點之極座標角度參數



- $\theta'$  渦卷之第一階段座標旋轉角
- $\theta''$  渦卷之第二階段座標旋轉角
- $\theta_{out}$  外渦卷第一及第二階段座標旋轉角和
- $\theta_{in}$  內渦卷第一及第二階段座標旋轉角和
- $\psi$  渦卷組裝時的相位角



# 第一章 緒論

## 1.1 前言

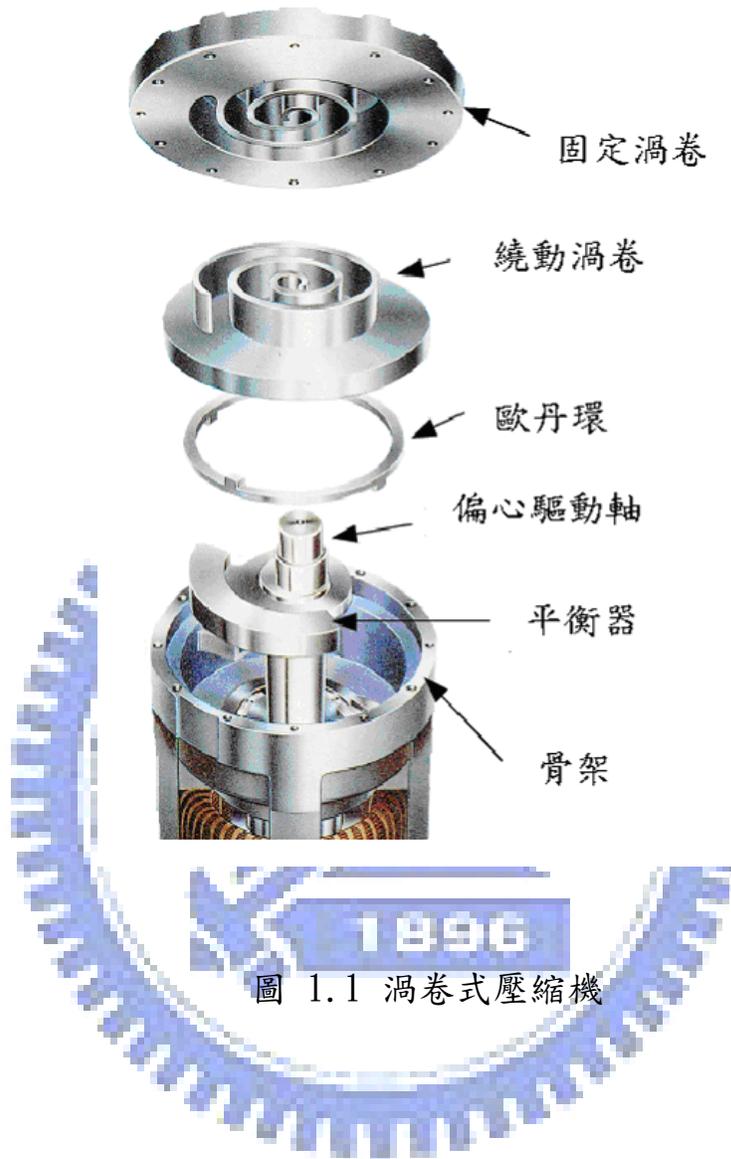
因科技及人類物質文明的進步，使得壓縮機被使用的數量不斷提高，目前已經成為我們生活中不可或缺的一部分，不論是電冰箱、冷氣機或是交通工具等日常用品，皆需壓縮機來助其產生效用。常見的壓縮機種類有往復式壓縮機、迴轉葉片式壓縮機、離心式壓縮機、螺旋式壓縮機、渦卷式壓縮機，其特性如下（表 1.1）

表 1.1 常見的壓縮機種類及其特性

壓縮機種類	特性
往復式壓縮機	優點：使用壓力及馬力範圍廣泛，適用多樣氣體。 缺點：餘隙空間大、耗能比值差、活塞環及閥組需經常維修與更換、噪音及震動大、佔地面積亦大。
迴轉葉片式壓縮機	優點：迴轉方向為圓周運動適用於高速迴轉、運轉時因無往復運動，因此很順暢噪音小震動小、體積小不佔空間、因接觸為旋轉接觸磨損小、冷凍油幫助排出冷媒冷卻因此排氣溫度較低。 缺點：馬達線圈沒有冷媒冷卻容易造成過熱而燒毀、因區軸

	箱內為高壓高溫之氣態冷媒，需裝置油散熱器只適合小容量壓縮機不適合大型冷凍機。
離心式壓縮機	優點：耗能比值最優、排氣穩定、適合大型機組使用。 缺點：購置及維護費用甚高、無法進行容量調整、相關售服務與技術支援通常只能仰賴國外原廠。
螺旋式壓縮機	優點：可高轉速操作。 缺點：氣缸冷效果差、容積效率低、較浪費能源。
渦卷式壓縮機	優點：運動元件少，可靠度耐久性較好、效率比各種壓縮機都高、扭力變動較小約為往覆式與迴轉式的十分之一故振動小、啟動時不壓縮氣體，故啟動扭力較小、氣流脈動小氣流造成的噪音較小、無吸排氣閥故振動噪音低可靠度高、比往復式迴轉式更適合變頻控制可獲得較大的變頻範圍、新的環保冷媒對渦卷式壓縮機造成的影響最小。 缺點：需高精密度加工，所以價格高。

近年來由於環保意識抬頭，對於能源的節約愈趨重視，因此，構造簡單、效率及可靠度高、噪音又較低的渦卷式壓縮機（圖 1.1）就被寄予相當大的厚望，盼藉其優點以達到節省寶貴資源和創造更高效能的目標。



## 1.2 渦卷式壓縮機結構

渦卷式壓機的發展，早於西元 1905 由法國人 Lean Creux 首先在美國提出渦卷式壓縮機的設計構想並獲得美國專利[1]，但此型壓縮機並未大量生產，原因在於渦卷本體加工精度未能符合要求，而且渦卷間的洩漏問題亦無法有效解決，直到 1970 年代自動補償油封機構確定後，才有實用型的渦卷式壓縮機上市。在 1980 年代，由於 CNC 精密加工母機的快速發展，使得加工精度大幅

提昇，才大大提昇渦卷式壓縮機的性能，使其在商業上的應用越來越廣泛。

渦卷式壓縮機主要之構成元件分別為固定渦卷 (Fixed Scroll)、繞動渦卷 (Orbiting Scroll)、歐丹環 (Oldam Ring)、偏心驅動軸 (Crank Shaft)、馬達、骨架與外殼，其中前四項如(圖 1.2)所示。

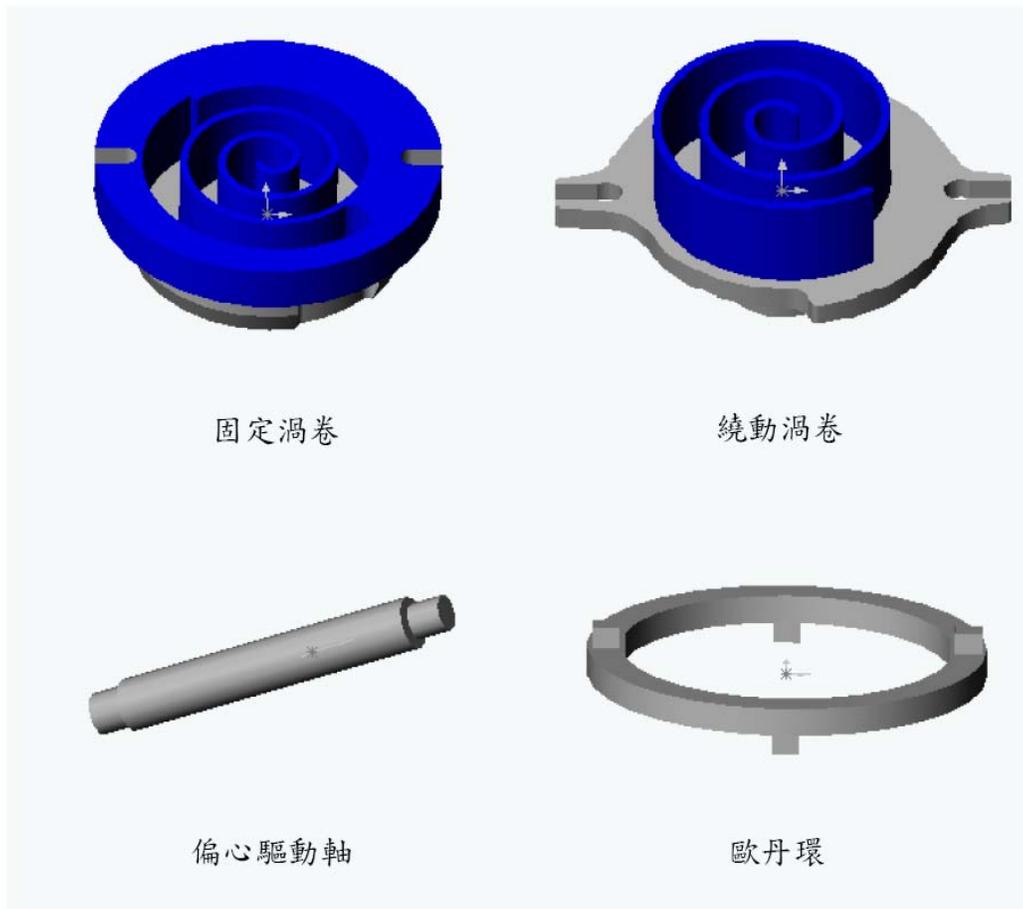


圖 1.2 渦卷式壓縮機之主要構成元件

渦卷式壓縮機元件間的運動主要藉由馬達驅動偏心軸，使偏心軸上之偏心銷帶動繞動渦卷底端的軸頸軸承，以一固定繞動半徑繞固定渦卷進行相對運動，渦卷機構之運動原理如（圖 1.3）所示。

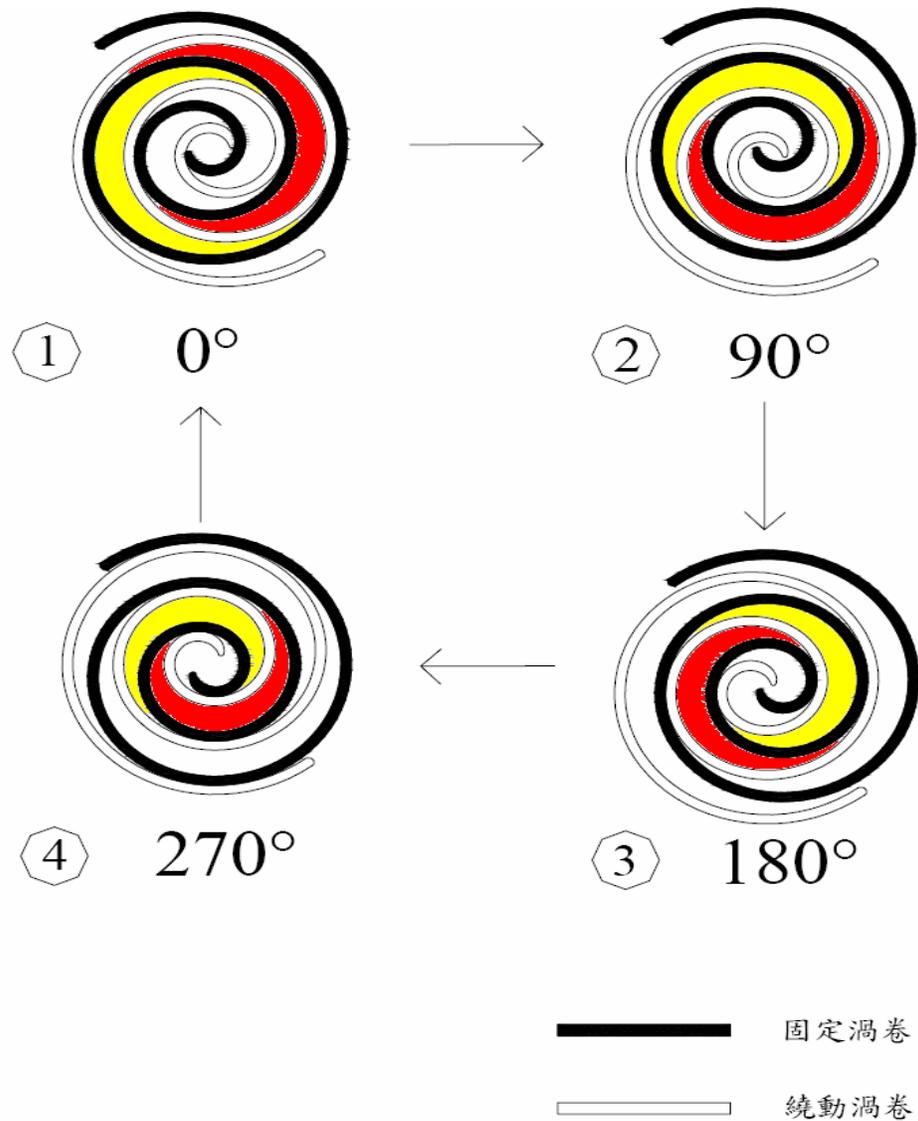


圖 1.3 渦卷式壓縮機之工作原理

於運轉過程中，歐丹環置於繞動渦卷與骨架承靠面之間，且歐丹環上設有上下兩方型凸鍵，上方凸鍵與繞動渦卷底盤鍵槽相嵌接，下方凸鍵與骨架承座上鍵槽相嵌接，當繞動渦卷運轉的同時，歐丹環便以往復式的直線運動於骨架承座面上，而其上方凸鍵則限制了繞動渦卷的運動方式，使其僅能公轉而不自轉，藉由此相對運動之嚙合情形，當低壓冷媒由外圍吸入後，經由固定與繞動渦卷之嚙合運動，冷媒將因壓縮室之體積由輸入端至輸出端漸減而導致冷媒逐漸被壓縮至高壓，再由中央排氣口排出，如此週而復始，即可達到壓縮冷媒的效果。

在壓縮過程中，密閉室的密合效果將直接影響其工作效能，因此，渦卷式壓縮機為確保其工作效率，在製造上就要克服其壓縮室形狀複雜且加工精度要求極高的困難，方能在生產上有穩定的品質出現。

### 1.3 研究動機與目的

面對知識經濟時代的來臨，產業技術提升，產品需求多樣化，產品之研發、創新至產銷，時效上的掌控極其重要，如何在最短時間完成產品設計與製造，取得市場先機是產業界致勝與生存的關鍵。

設計製造作業流程除了傳統依需求而設計製造程序外，逆向工程 (Reverse Engineering, RE) 為從實物、模型或樣品原型中，重建產品模型或產品複製的一種技術，與傳統設計做反向進行的工程，依據現有的實物原型或成品，建構出相對應的模型之過程。在現今產品設計製造的過程中，應用逆向工程來研究及探討產品設計之優缺點已是被廣泛使用之方式。例如，早期工業技術研究院 (ITRI) 曾利用包絡線方式對渦卷之設計參數曲線擬合，並以 Quick Basic 語

言程式在DOS模式下撰寫應用程式[2]，但由於曲線擬合理論不完整，只能對某些特定渦卷進行曲線擬合求取設計參數，且DOS模式程式介面操作程序繁瑣，故沒有後續的研究發展。

本研究係針對未知設計規格之渦卷，推導出一套渦卷曲線擬合理論，並應用接觸式的三次元量測儀或非接觸式的影像檢測系統，擷取渦卷工件輪廓資料點，透過渦卷曲線擬合理論對渦卷外型座標點資料做曲線擬合，求得渦卷幾何設計參數，如此一來即可對其產品設計之優缺利弊做檢討並加以改良。

本研究並以Visual basic2005應用程式作為開發工具，利用渦卷曲線擬合理論，發展一套擁有渦卷設計逆向工程及渦卷製造誤差檢測分析功能之視窗化物件導向式電腦輔助分析系統。利用此電腦輔助分析系統，可對未知設計規格之渦卷產品求取其產品設計參數。此外，對於已知設計參數之渦卷產品，電腦輔助分析系統可對其進行製造誤差檢測分析。

## 1.4 本文架構

本論文之架構分為五章，其概要分述如下。

第一章說明渦卷式壓縮機結構及本研究之動機與目的

第二章是針對本研究需求，採用相關之理論作探討與回顧，包括延伸漸開線形渦卷之幾何數學模式，標準漸開線之創成理論。

第三章為渦卷曲線擬合理論推導，利用兩階段曲線擬合，及兩階段座標旋轉，計算出擬合參數及擬合誤差。透過資料前處理及區域擬合提高擬合精確度。

第四章為應用程式建立與案例分析，以Visual basic2005應用程式將渦卷曲線擬合理論建立為程式介面，進行其流程操作，並對量測所得之渦卷外型座標點資料做案例探討。

第五章為研究結論及未來發展方向，總結本論文所提方法之優缺點，並提出未來研究方向。



## 第二章 文獻探討

### 2.1 前言

目前常見的渦卷線形，幾乎都是以圓的標準漸開線來創成為最多[3]，因其具有所創成出之兩曲線必定互相嚙合的優點。但交通大學機械研究所的陳俊榕[4]、賴慶峰[5]及石伊蓓[6]等以圓的延伸漸開線來推導渦卷線形，並加以分析後發現：延伸量的應用能改善標準漸開線形渦卷的部分弱點，而李運仁[7]以電腦模擬的方式認為延伸量不為零時之延伸漸開線間並無共軛關係，將會有間隙出現，對其氣密性會有很大影響，但可依據石伊蓓[6]的研究推翻此論點，據其所述延伸量的出現反而會減少線形因氣體壓力所造成的間隙值，且延伸漸開線有可以減少加工上的精度要求而降低生產成本的優點。

雖然目前的渦卷式壓縮機中，大部份的渦卷外形乃是由標準漸開線所創成。但是由數學的觀點得知，標準漸開線僅為延伸漸開線的一個特例，但為了能更廣義的了解漸開線原理，故以延伸漸開線之幾何數學模式說明。

### 2.2 延伸漸開線形渦卷之幾何數學模式

以下針對文獻[4]~[6]所提及之延伸漸開線形理論，加以整理並完整說明延伸漸開線形渦卷之幾何數學模式。

#### 2.2.1 延伸漸開線之數學模式

在建立延伸漸開線形渦卷之幾何外形數學模式時，首先定義漸開線展開時

之基圓半徑  $a$ ，漸開線展開角  $\phi$  以及延伸量  $\overline{O_a M_a} = E$ ，如（圖 2.1）所示

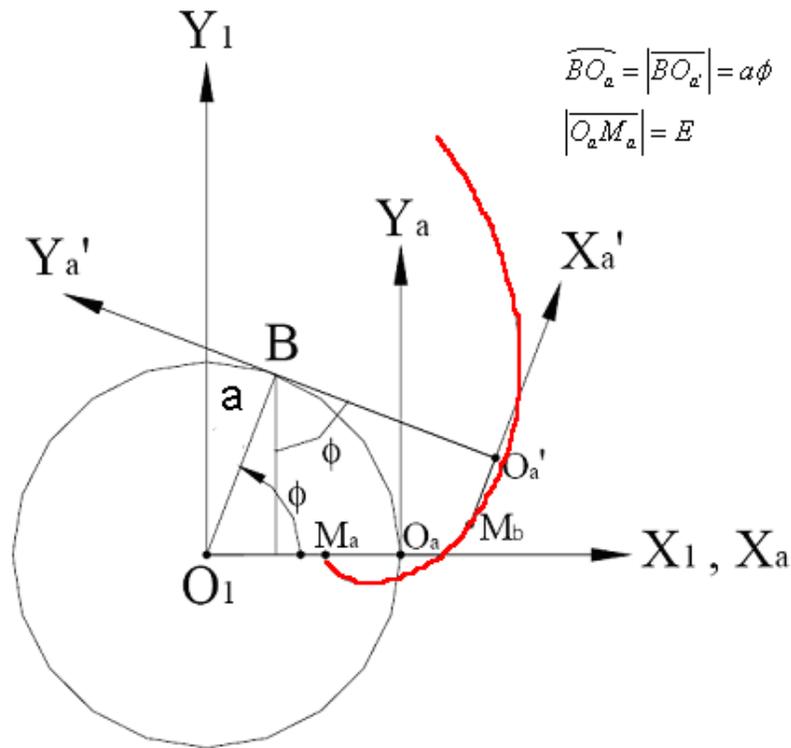


圖 2.1 延伸漸開線展開示意圖

在上圖中，當  $M_a$  點對半徑為  $a$  的基圓展開，則展開所得之曲線  $\overline{M_a M_b}$  即為延伸漸開線，若選取延伸量參數  $\overline{O_a M_a} = 0$ ，則 前述之曲線即成為標準漸開線。

其（圖 2.1）中  $S_1(X_1, Y_1)$  座標系為固定座標系，亦即參考座標系，而座標系  $S_a(X_a, Y_a)$  則為繞基圓旋轉之動座標系。 $M_a$  點為  $S_a$  座標系上於負  $X_a$  軸上距離  $S_a$  座標原點  $O_a$  為  $E$  之點，若令  $S_a$  座標系之  $Y_a$  軸在基圓上滾動但不滑動，則於固定座標系  $S_1$  上觀察動座標系上之點  $M_a$  其所展開之軌跡  $\overline{M_a M_b}$  即為所謂之延伸漸開線。由於點  $M_a$  可以用二維齊次座標(Homogeneous Coordinate)位

置向量表示在  $S_a$  動座標系，如下所示：

$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} -E \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

又  $Y_a$  軸在基圓(半徑為之圓)上作純滾動，所以

$$\overline{BO}_a = \overline{BO}_{a'} = a\phi \quad (2.2)$$

因為  $S_a$  動座標原點  $O_a$  點表示在固定座標系  $S_1(X_1, Y_1)$  之  $X_1$  及  $Y_1$  方向之座標分別為

$$O_{ax'} = a \cos \phi + a\phi \sin \phi \quad (2.3)$$

$$O_{ay'} = a \sin \phi - a\phi \cos \phi \quad (2.4)$$

上式中的  $\phi$  是為延伸漸開線之展開角

因此，利用齊次座標轉換方程式(Homogeneous Coordinate Transformation Equation)將  $S_a(X_a, Y_a)$  座標系轉換至座標系  $S_1(X_1, Y_1)$  之位置向量可表示為：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1a} \mathbf{R}_a \quad (2.5)$$

其中

$$\mathbf{M}_{1a} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & a \cos \phi + a \sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & -a \sin \phi - a \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由方程式(2.5)可求得延伸漸開線之軌跡方程式，亦即  $M_a$  點在  $S_1(X_1, Y_1)$  座標系之運動軌跡方程式可表示如下：

$$\begin{aligned} X_1 &= -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi \\ Y_1 &= -E \sin \phi + a \sin \phi - a\phi \cos \phi \end{aligned} \quad (2.6)$$

上式即為延伸漸開線的方程式，若我們想知道標準漸開線的方程式為何，只要把上式的延伸量  $E$  設定為零，就能得到標準漸開線的方程式。

### 2.3.2 延伸漸開線形渦卷幾何模式

今假設有一圓柱型刀具其半徑為  $r$ ，若此刀具之中心沿著方程式(2.6)所推導之延伸漸開線軌跡移動，則此刀具在空間中將銑切出渦卷式壓縮機之延伸漸開線形渦卷，如（圖 2.2）所示。

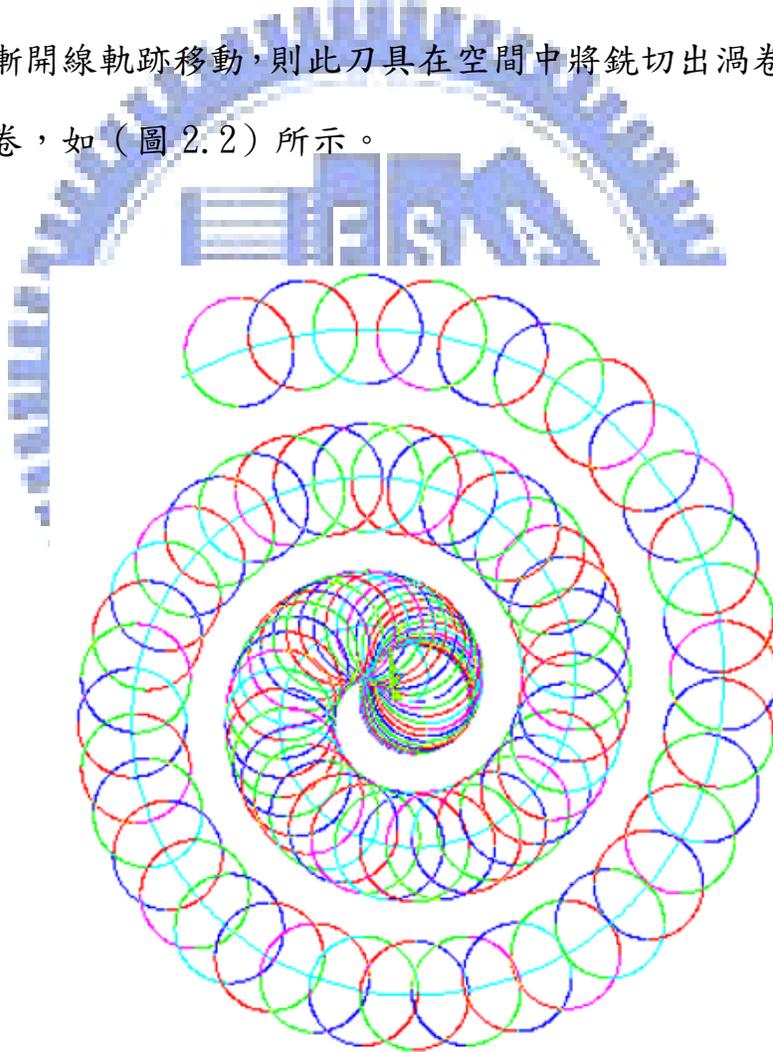


圖 2.2 刀具在空間中將銑切出延伸漸開線形渦卷

為簡化推導過程，渦卷式壓縮機之渦卷可視為二維（Two-Dimensional）之問題來加以處理，而上述刀具運動軌跡之包絡線，其推導過程亦詳述於下。

已知圓柱形刀具之中心軌跡，如（圖 2.3）所示。

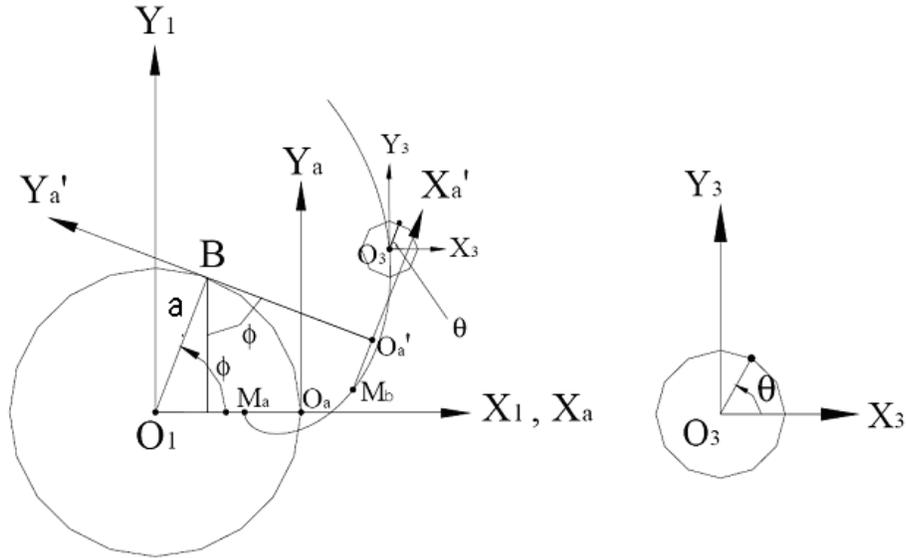


圖 2.3 銑削渦卷之刀具座標系圖

此軌跡表示於固定座標系  $S_1(X_1, Y_1)$  為

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi \\ -E \sin \phi + a \sin \phi - a\phi \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

又刀具上任一點在刀具座標  $S_c(X_c, Y_c)$  之位置向量可表示為

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

上式中  $r$  為刀具之半徑， $\theta$  表示銑刀刀緣上任意點之極座標角度參數，但此參數與渦卷葉片銑製時之刀具路徑無關。

刀刃上任一點之座標轉換至固定座標系  $S_1(X_1, Y_1)$  為

$$\mathbf{R}_{1c} = \begin{bmatrix} X_1 + r \cos \theta \\ Y_1 + r \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi + r \cos \theta \\ -E \sin \phi + a \sin \phi - a\phi \cos \phi + r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

此即為渦卷的銑刀方程式。

由於渦卷片之線形是由刀具銑削出來的，故刀具之邊緣將與渦卷之曲線線形相嚙合，因此，渦卷線形曲線上的每一點都可以利用銑刀邊緣上之極座標得到，亦即渦卷的線形幾何方程式，應為刀具上的  $S_c$  座標系之位置向量將之轉換至渦卷線形之  $S_l$  座標系之位置向量方程式。至於渦卷前端線形，在實務上不一定以原來之延伸漸開線來創成，通常為了讓渦卷片的強度增強且提升渦卷之效能，各設計者無不發揮巧思進行研究，目前有很多的專利皆著墨其上，盼能得到一最佳的設計，此為眾家高手汲汲營營突破的重點之一。

### 2.3.3 渦卷之數學模式

渦卷壓縮機是利用兩渦卷片進行嚙合運動，以達到壓縮流體之功效，根據齒輪原理[8]，可以利用下列圓柱形銑切刀具與渦卷間之嚙合方程式(Equation of Meshing)，來推導渦卷線形的數學模式。

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}_{(12)} = 0 \quad (2.10)$$

依據嚙合方程式的定義，需先求得兩曲面之嚙合點的單位法向量  $\mathbf{n}$  和相對速度  $\mathbf{v}_{(12)}$ 。在此先將被銑削之工件視為固定不動，即工件上每一點相對於  $S_l$  座標系之絕對速度  $\mathbf{v}_{(1)}$  為零，則刀具上任意點表示在  $S_l$  座標系的絕對速度為：

$$\mathbf{v}_{(2)} = \frac{d\mathbf{R}_{1c}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{1c}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\theta} = \omega \begin{bmatrix} E \sin \phi + a\phi \cos \phi \\ E \cos \phi + a\phi \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

其中  $\omega$  是銑刀沿著延伸漸開線相對於  $S_1$  座標系的角速度。

因此銑刀和渦卷工件間的相對速度  $\mathbf{v}_{(12)}$

$$\mathbf{v}_{(12)} = \mathbf{v}_{(1)} - \mathbf{v}_{(2)} = -\omega \begin{bmatrix} E \sin \phi + a\phi \cos \phi \\ E \cos \phi + a\phi \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

柱形銑刀的單位法向量  $\mathbf{n}$  則可表示為

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

分別將方程式(2.12)及(2.13)代入方程式(2.10)中，即可得到渦卷與圓柱形銑刀之嚙合方程式為：

$$\theta = \phi + \arctan\left(\frac{a\phi}{E}\right) \quad (2.14)$$

此式之物理意義為確認銑刀與渦卷工件是互相嚙合。

將銑刀方程式(2.9)與嚙合方程式(2.14)聯立，即可得到銑刀與渦卷每一瞬間之接觸點方程式，而此接觸點方程式轉換至渦卷基圓上之  $S_1$  座標系，就可得到渦卷曲線的其中一邊之線形方程式，由於渦卷曲線的另一邊將位於圓柱形銑刀直徑的另一邊，所以有  $\pi$  的相位角差，故其幾何方程式需將銑刀方程式中的參數  $\theta$  以  $(\theta + \pi)$  替代而得，因此：

1. 固定渦卷之外緣外形幾何方程式為：

$$\mathbf{R}_{fo} = \begin{bmatrix} -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi + r \cos \theta \\ -E \sin \phi + a_b \sin \phi - a\phi \cos \phi + r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

其中

$$\theta = \phi + \arctan\left(\frac{a\phi}{E}\right) \quad (2.16)$$

2. 固定渦卷之內緣外形幾何方程式為

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{fi} &= \begin{bmatrix} -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi + r \cos(\theta + \pi) \\ -E \sin \phi + a \sin \phi - a\phi \cos \phi + r \sin(\theta + \pi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi - r \cos \theta \\ -E \sin \phi + a \sin \phi - a\phi \cos \phi - r \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中

$$\theta = \phi + \arctan\left(\frac{a\phi}{E}\right) \quad (2.18)$$

在建立渦卷內外緣幾何形狀之方程式後，便可模擬固定渦卷與繞動渦卷配對嚙合運動時之接觸情形。首先將固定渦卷固聯於固定座標系，而繞動渦卷則在旋轉一角度 $\Psi$ 後，使其渦卷中心繞固定渦卷中心，做繞動半徑為  $L$  之圓周運動，如（圖 2.4）、（圖 2.5）所示。

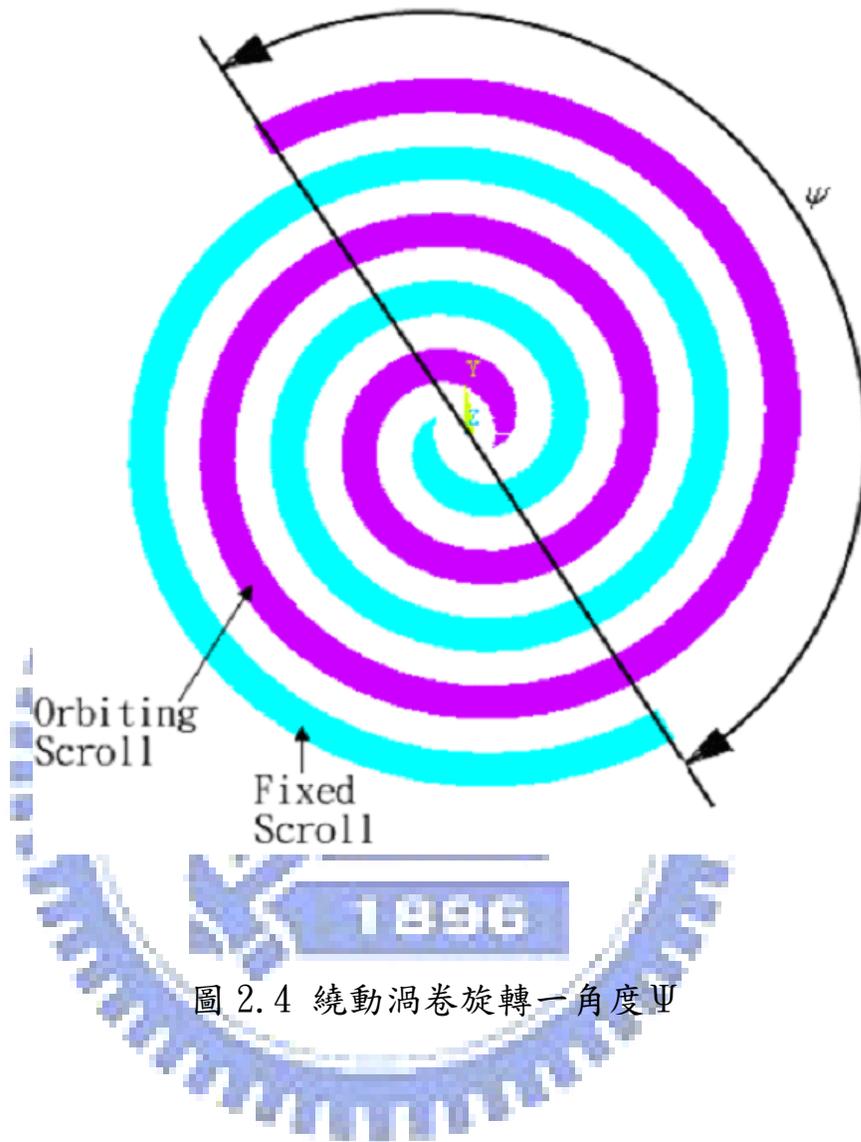


圖 2.4 繞動渦卷旋轉一角度 $\Psi$

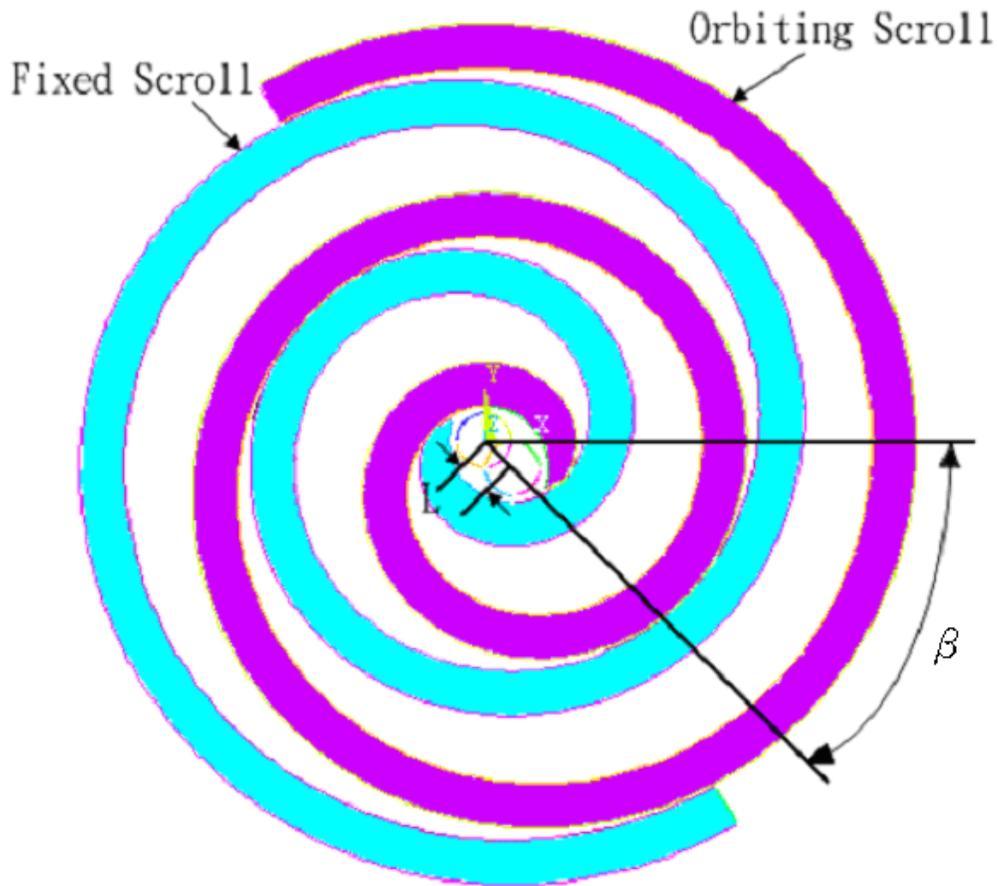


圖2.5 繞動渦卷做繞動半徑為L之圓周運動

同時，也需考慮到繞動渦卷因繞動角度的不同，在固定座標系 $S_1$ 上會有不同的座標值，所以亦將繞動角度 $\beta$ 在繞動渦卷的方程式中加以考慮。因此繞動渦卷之外形幾何方程式可表示如下：

3. 繞動渦卷之外緣外形幾何方程式為

$$\mathbf{R}_{mo} = \mathbf{M}_{\psi} \begin{bmatrix} -E \cos \phi + a \cos \phi + a\phi \sin \phi + r \cos \theta \\ -E \sin \phi + a \sin \phi - a\phi \cos \phi + r \sin \theta \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{\beta}$$

$$= \begin{bmatrix} -E \cos(\phi + \psi) + a \cos(\phi + \psi) + a\phi \sin(\phi + \psi) + r \cos(\phi + \psi) + L \cos \beta \\ -E \sin(\phi + \psi) + a \sin(\phi + \psi) - a\phi \cos(\phi + \psi) + r \sin(\phi + \psi) + L \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

其中

$$\theta = \phi + \arctan\left(\frac{a\phi}{E}\right) \quad (2.20)$$

至於(2.19)式中為了考慮組裝相位角而出現的轉換矩陣 $[\mathbf{M}_\psi]$ 和表示繞動渦卷的移動向量之 $[\mathbf{R}_\alpha]$ 則分別如下所示

$$\mathbf{M}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} L \cos \beta \\ L \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

4. 繞動渦卷之內緣外形幾何方程式為

$$\mathbf{R}_{mi} = \begin{bmatrix} -E \cos(\phi + \psi) + a \cos(\phi + \psi) + a\phi \sin(\phi + \psi) - r \cos(\phi + \psi) + L \cos \beta \\ -E \sin(\phi + \psi) + a \sin(\phi + \psi) - a\phi \cos(\phi + \psi) - r \sin(\phi + \psi) + L \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

其中

$$\theta = \phi + \arctan\left(\frac{a\phi}{E}\right) \quad (2.24)$$

## 2.3 標準漸開線之創成

在實際渦卷加工程序中，並不是直接利用銑刀對基材加工，而是對一渦卷錐型材料加以修整，由於標準漸開線所創成出之兩曲線必定互相嚙合，使其數學模式簡單許多，所以目前的渦卷式壓縮機中，大部份的渦卷外形乃是由標準漸開線所創成。

在（圖 2.6）中，渦卷外形輪廓是以  $\alpha$  為創成角展開之標準漸開線曲線，其中創成角為漸開線展開時之始點角，當基圓以一對創成角  $\alpha$  同時展開，其兩漸開線所構成之形狀即為渦卷外型。

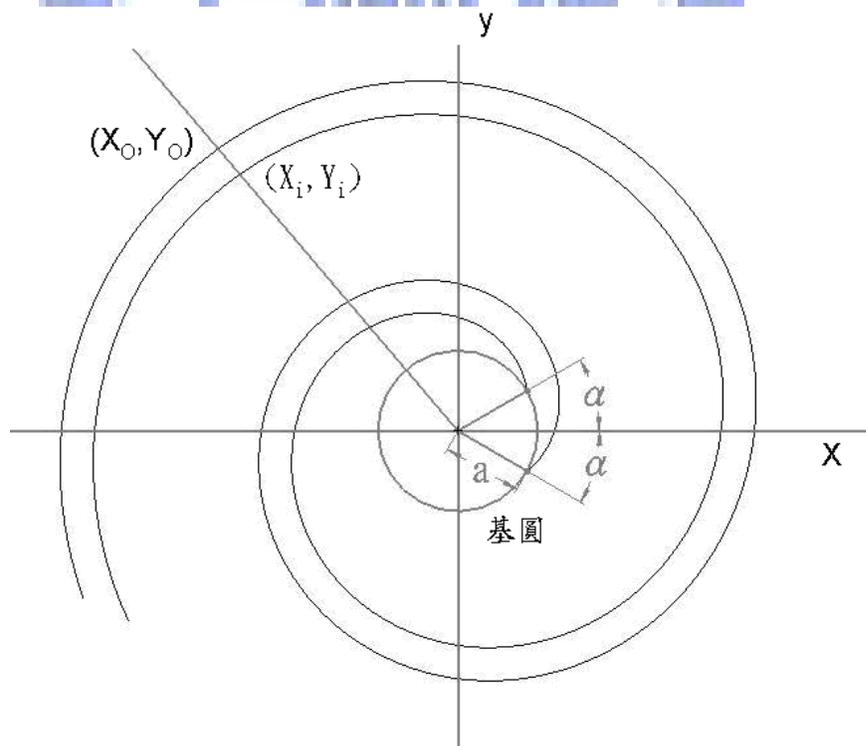


圖 2.6 以  $\alpha$  為創成角之標準漸開線曲線

其創成之內、外渦卷座標可表示為：

$$\begin{aligned}x_o &= a \left[ \cos(\phi_o - \alpha) + \phi \sin(\phi_o - \alpha) \right] \\y_o &= a \left[ \sin(\phi_o - \alpha) - \phi \cos(\phi_o - \alpha) \right] \\x_i &= a \left[ \cos(\phi_i + \alpha) + \phi \sin(\phi_i + \alpha) \right] \\y_i &= a \left[ \sin(\phi_i + \alpha) - \phi \cos(\phi_i + \alpha) \right]\end{aligned}\tag{2.26}$$

由於其幾何特性容易創成，所以現今市面之渦卷產品幾乎皆是以此方法為之。

其它渦卷創成設計之主要設計參數如下：

$$\text{渦卷節距 } p = 2a\pi\tag{2.27}$$

$$\text{渦卷壁厚度 } t = 2a\alpha\tag{2.28}$$

渦卷高  $h$

整體渦卷創成設計及其設計參數示意圖如（圖 2.7）

由上一節所推導之延伸漸開線及何模式，以及這一節所推導之標準漸開線模式，可以了解渦卷設計參數與渦卷座標之關係。雖然標準漸開線為延伸漸開線之特例，但基於大部份的渦卷外形乃是由標準漸開線所創成，故本研究是以標準漸開線為理論基礎，進行渦卷設計逆向工程曲線擬合之研究。希望未來，能夠將理論推展至延伸漸開線，使整體理論更加完整。

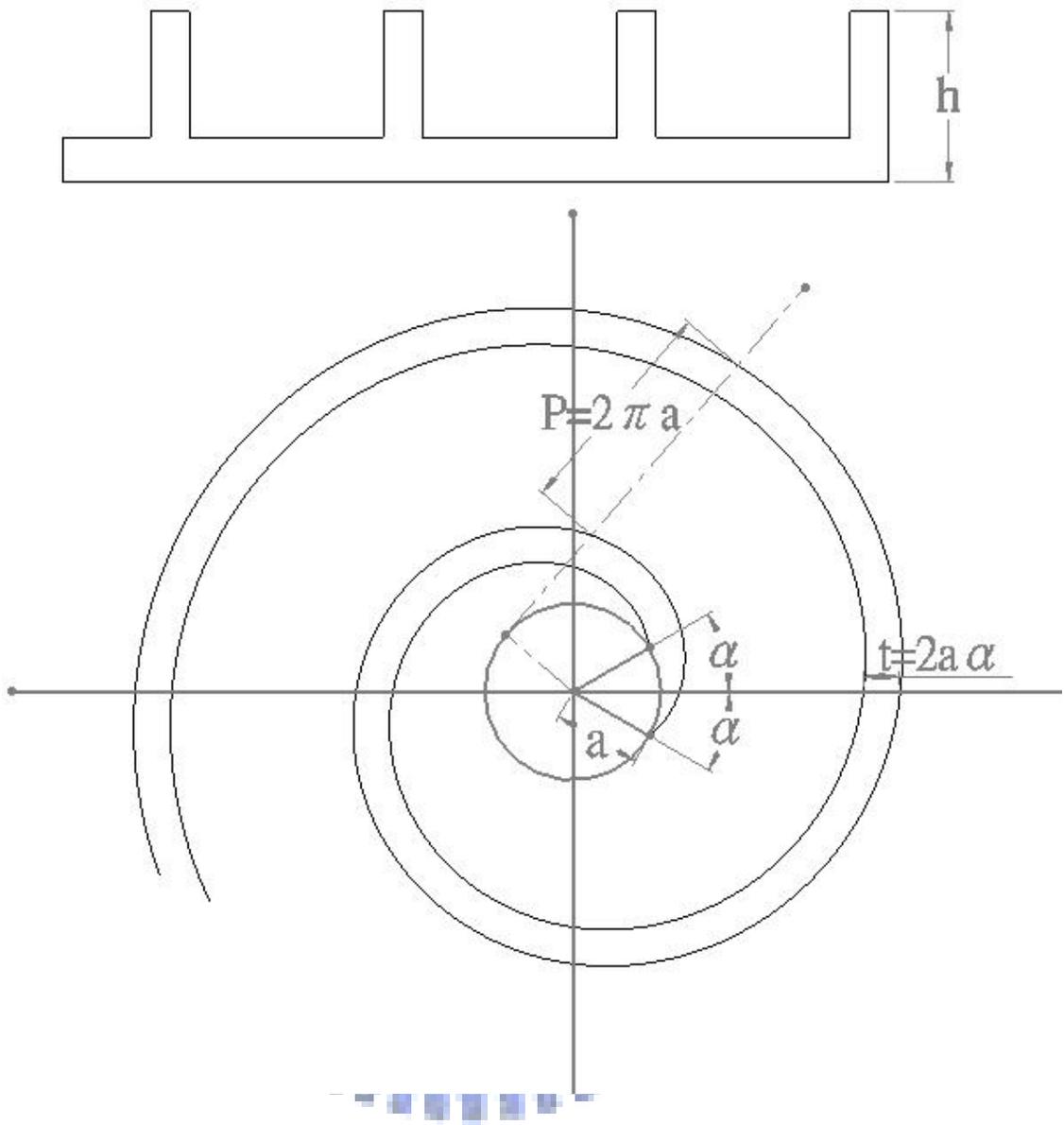


圖2.7 渦卷創成設計圖形及設計參數

## 第三章 渦卷曲線擬合理論推導

### 3.1 前言

本研究可分為渦卷曲線擬合理論推導及應用程式建立兩部份，本章將介紹渦卷曲線擬合理論推導部分，其研究重心在於將三次元量測儀或影像檢測系統所取得的渦卷外型座標點資料進行曲線擬合分析。

文獻[9]中提到，藉由資料的誤差總和，可將曲線擬合的資料分為兩種。首先，當資料點含有較明顯程度的誤差時，在策略上會選擇繪製出一條滿足資料分布趨勢的單一曲線，這是由於資料本來就多少會有一點誤差，所以在設計上曲線不需通過每一個資料點，而是要清楚的表示出分布趨勢。最小平方回歸 (Least - Squar Eregression) 就屬於這類的方法之一，如 (圖 3.1)。

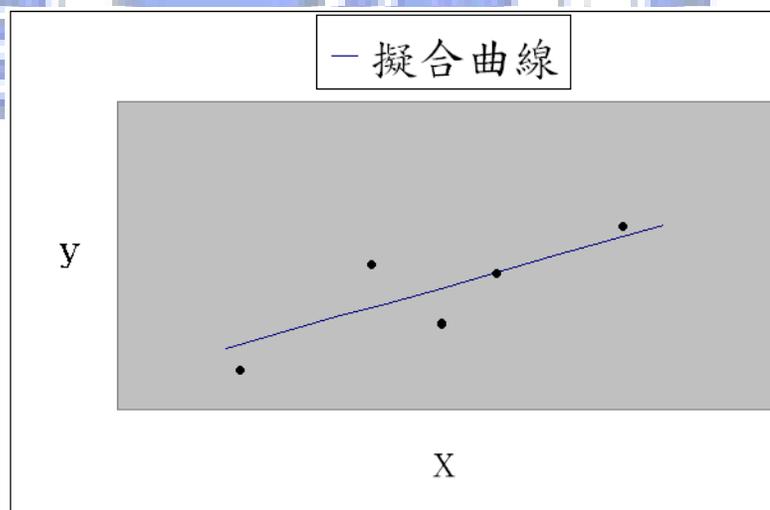


圖 3.1 最小平方回歸

第二種情況是，所提供的資料是完全正確的數字，擬合的方式是以一條或多條的曲線將所有的資料點連接起來。至於藉於資料點間的取值方法可採用內插法，如 (圖 3.2)。

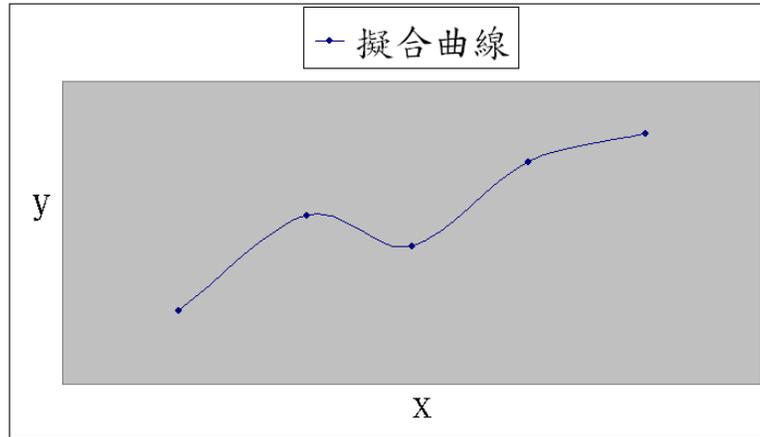


圖 3.2 曲線內插

由於渦卷之標準漸開線為非線性曲線，且渦卷製造誤差及量測誤差是存在且需被重視的，故本研究是以最小平方回歸的方式將經由三次元量測儀或影像檢測系統所取得的渦卷外型座標點資料，透過對其兩階段曲線擬合及兩階段旋轉，以獲得渦卷設計參數及擬合標準曲線與渦卷外型座標點資料的誤差，其流程如圖（圖 3.3）。

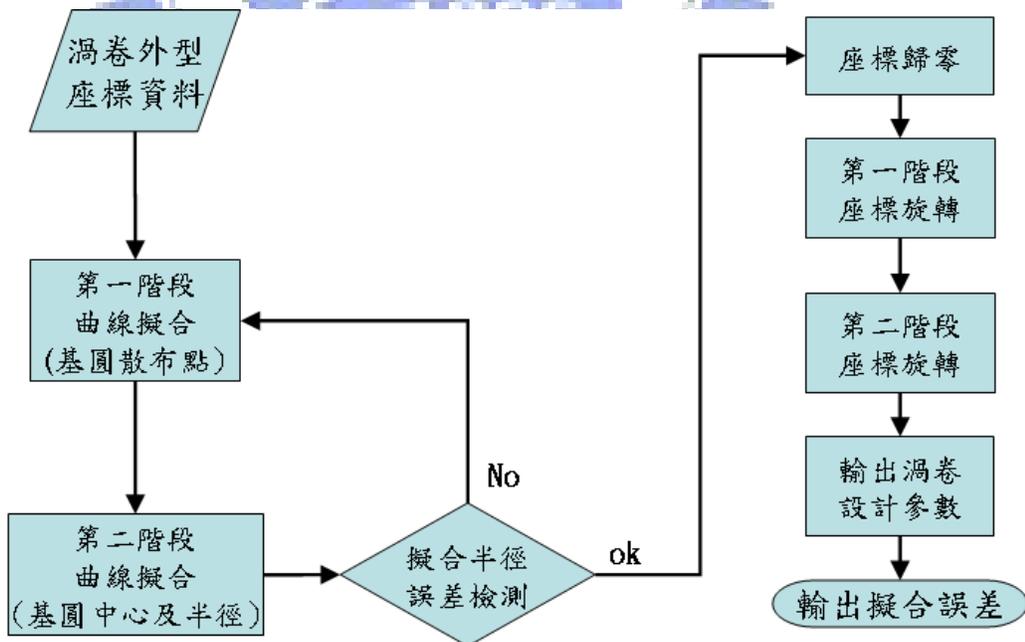


圖 3.3 渦卷曲線擬合理論推導流程圖

## 3.2 第一階段曲線擬合

渦卷外型之漸開線曲線可視為由無限多個圓弧所組成，而最簡單的圓弧擬合方式便是將每三點擬合為一小圓弧，如（圖 3.4）所示，渦卷外型座標點資料經過選取後，利用每三點擬合的方法將三點擬合成一圓弧，再將所有圓弧連接即為渦卷外型。

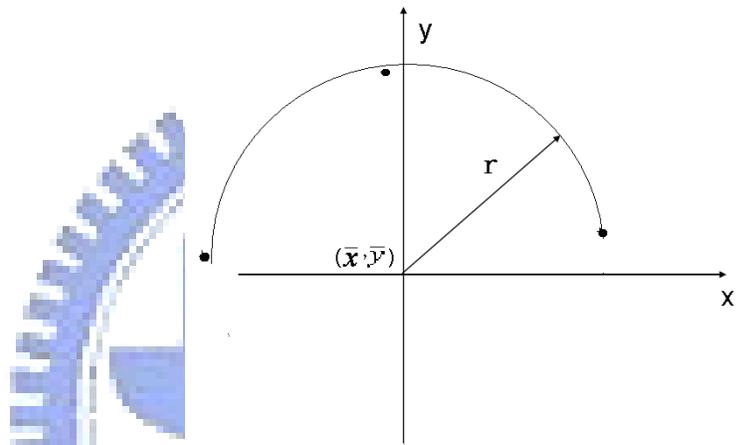


圖 3.4 三點擬合成一圓弧

一般曲線擬合在圓或圓弧的部分，常用的有面積最小平方法（Least Mean Square Methods）[10]~[14]、不偏倚最小平方法（Unbiased Least Square Method）[15]等二種方法較常見。本研究之第一階段擬合是利用面積最小平方法做曲線擬合。

### 3.2.1 面積最小平方法

文獻[14]中，以二元二次方程式表示曲線，並將所有樣本點資料代入方程式中，以最小平方誤差的觀念解此方程式中的各項參數，圓是二元二次方程式中的特例，因此可用此法來求得圓心及半徑。

假設一圓或圓弧影像有  $N$  個邊緣點，且其每個邊緣點座標為：

$$P = \{p_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, N\}$$

若此圓的圓心位置為  $(\bar{x}, \bar{y})$ 、半徑為  $R$ ，故此圓面積為  $\pi R^2$ 。而任一邊緣點與半徑  $R$  的及圓心  $(\bar{x}, \bar{y})$  的關係式如下式：

$$R = \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.1)$$

但是因為半徑  $R$  及圓心  $(\bar{x}, \bar{y})$  為未知的估算值，所以將平方誤差 (Square Error) 的目標函數  $e(R, \bar{x}, \bar{y})$ ，設為  $\pi R^2$  與估計之半徑所算出之面積差的平方和，定義為下式：

$$e(R, \bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^N \left\{ \pi R^2 - \pi \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\}^2 \quad (3.2)$$

而目標函數可改寫為：

$$J(R, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{e}{\pi^2} = \sum_{i=1}^N \left\{ R^2 - \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\}^2 \quad (3.3)$$

以最小面積誤差法估算半徑及圓心，可將  $J(R, \bar{x}, \bar{y})$  分別對  $R, \bar{x}, \bar{y}$  做偏微分，因

為微分值應為零，即  $\frac{\partial J}{\partial R} = 0$ ， $\frac{\partial J}{\partial \bar{x}} = 0$ ， $\frac{\partial J}{\partial \bar{y}} = 0$ ，則下列三式須成立：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial R} &= 2 \sum_{i=1}^N \left\{ R^2 - \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\} (2R) = 0 \\ \Rightarrow NR^2 &= \sum_{i=1}^N \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{x}} = 2 \sum_{i=1}^N \left\{ R^2 - \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\} (-2)(x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow R^2 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] x_i \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{y}} = 2 \sum_{i=1}^N \left\{ R^2 - \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] \right\} (-2)(y_i - \bar{y}) = 0$$

$$\Rightarrow R^2 \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N \left[ (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right] y_i \quad (3.6)$$

展開式(3.4)、(3.5)、(3.6)，可得下列結果：

$$NR^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N x_i \bar{x} + N\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^N y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N y_i \bar{y} + N\bar{y}^2 \quad (3.7)$$

$$R^2 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i^3 - 2 \sum_{i=1}^N x_i^2 \bar{x} + \sum_{i=1}^N x_i \bar{x}^2 + \sum_{i=1}^N x_i y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N x_i y_i \bar{y} + \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}^2 \quad (3.8)$$

$$R^2 \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i - 2 \sum_{i=1}^N x_i y_i \bar{x} + \sum_{i=1}^N y_i \bar{x}^2 + \sum_{i=1}^N y_i^3 - 2 \sum_{i=1}^N y_i^2 \bar{y} + \sum_{i=1}^N y_i \bar{y}^2 \quad (3.9)$$

解式(3.7)、(3.8)、(3.9) 三式，以矩陣方程式表示：

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\text{可求得： } \bar{x} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (3.11)$$

$$\bar{y} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (3.12)$$

$$\text{其中 } a_1 = 2 \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - 2N \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad b_1 = 2 \left( \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N x_i y_i \right)$$

$$a_2 = 2 \left( \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N x_i y_i \right), \quad b_2 = 2 \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 - 2N \sum_{i=1}^N y_i^2$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N x_i^3 + \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i^2 - N \sum_{i=1}^N x_i y_i^2$$

$$c_2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N y_i^3 + \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N y_i^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i$$

將  $\bar{x}, \bar{y}$  代入式(3.7)，可得

$$R = \sqrt{\frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i + N\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^N y_i^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^N y_i + N\bar{y}^2 \right)} \quad (3.13)$$

將邊緣點座標帶入式(3.11)、(3.12)及(3.13)，即可求出圓弧之圓心估計值  $(\bar{x}, \bar{y})$  及半徑  $R$  值。

依渦卷之漸開線是由基圓展開的原理，當三點擬合成一圓弧時，若三點的距離夠接近，則擬合圓心  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  應該在基圓之圓周上，如(圖 3.5)。利用此原理，將所有渦卷座標資料每三點做曲線擬合時，每一圓弧之擬合中心將組成分布在基圓圓周上之資料點座標，如(圖 3.6)。

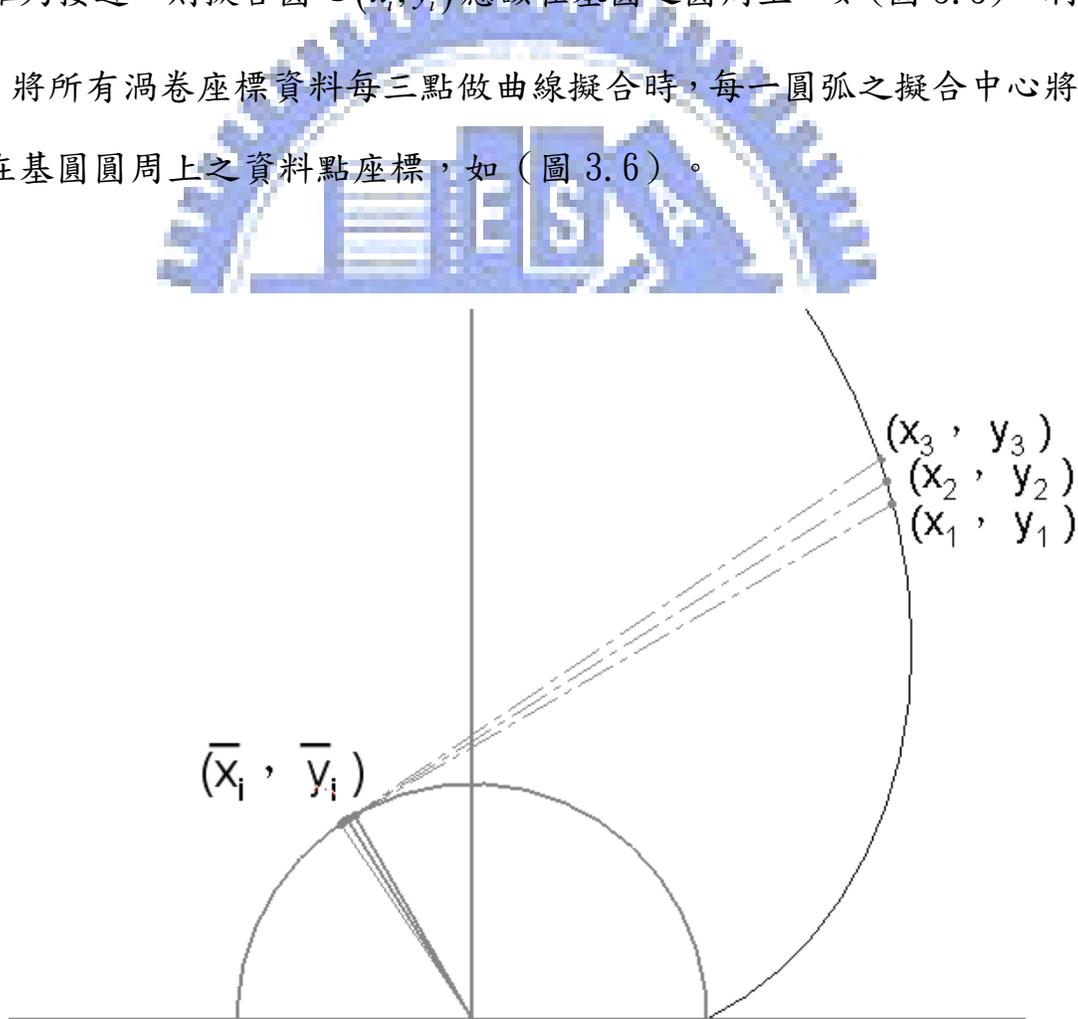


圖 3.5 三點擬合圓弧之圓心在基圓圓周上

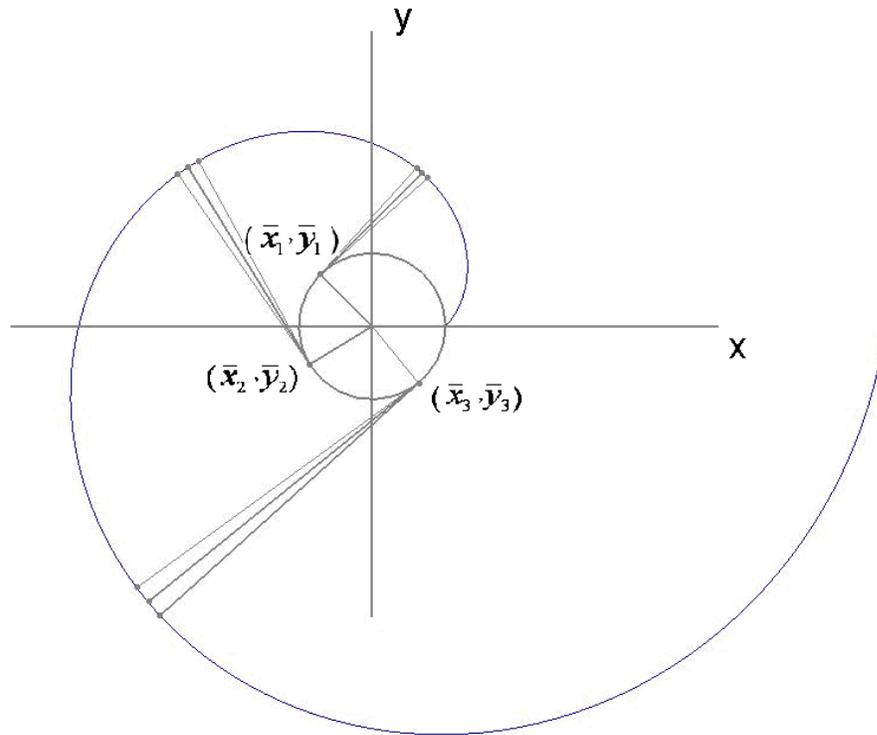


圖3.6 所有小圓弧之擬合圓心分布在基圓圓周上

### 3.2.2 資料前處理

當渦卷外型座標點資料進行第一階段曲線擬合時，每一小圓弧上三個座標點之間的距離，都可能影響擬合後擬合圓心的散佈位置。當過於稀疏時，會違反第一階段曲線擬合的原理，而過密時，會使渦卷外型座標點資料在製造或量測過程中所產生的誤差對於第一階段曲線擬合所造成之結果被放大，無論過密或過疏，都會使的第一階段曲線擬合的散佈結果，而無法進行第二階段曲線擬合。因此我們並不需要對所有的資料點做曲線擬合處理，此時我們必須視第一

階段曲線擬合的散布結果將資料點予以前處理，資料點重新簡化的方法，一般來說有以下幾種：

1. 平均取點法(Sampling Uniform ) [16]

將所有資料點依固定間隔重新取樣 (Sample) 。

2. 倍率法(Divide by Factor ) [16]

將所有資料點數除上一個因子(Factor)，達到減少資料點的目的 。

3. 間距法(Space Sampling ) [16]

此方法的原理是利用使用者，定一個容許值( Tolerance), 如果相鄰兩點間的距離大於容許值資料點才予以保留，否則予以去除。

4. 弦線偏差法(Chordal Deviation ) [16]

此方法是利用兩個參數值：最大偏差角 (Maximum Angle)及最大距離 (Maximum Distance)來決定資料點的保留與否。

各方法的之優劣如下：

1. 平均取點法：

此方法不適合小圓弧，若干平均取點，則造成小圓弧點過少，幾何圖形失真，但在本研究中，平均取點間格由程式介面輸入，並不會造成小圓弧點過少。

2. 倍率法：

此方法亦不適合小圓弧，亦造成幾何圖形失真。

3. 間距法：

若間距設太小，則資料點無從簡化，太大亦會造成幾何圖形失真。

#### 4. 弦線偏差法：

此方法易導致兩點間分離太遠，造成擬合圓弧失真。

由於渦卷外型座標點資料簡化的目的，只在於找到座標點間最適當的間距，使其進行第一階段曲線擬合時，擬合圓心 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 散佈在基圓圓周上，故為了程式設計的便利性，在本研究中所用的資料簡化方法為平均取點法。

### 3.3 第二階段曲線擬合

由第一階段擬合的結果可知，渦卷座標資料每三點作曲線擬合，其圓心座標 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 將分布在基圓圓周上，利用面積最小平方法對所有擬合之圓弧圓心 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 做第二階段曲線擬合，則可擬合出基圓之圓心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 及基圓半徑  $a$ ，如圖(3.7)。此兩項即為曲線擬合所要獲得之參數。

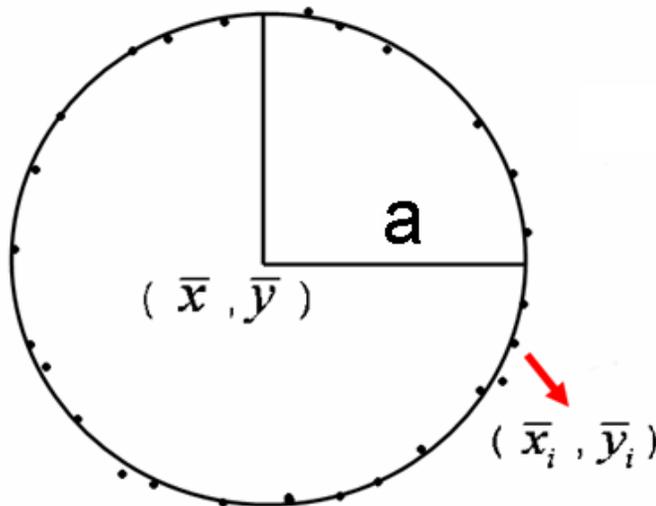


圖 3.7 基圓之第二階段曲線擬合

由於渦卷本身設計、渦卷製造精準度及渦卷外型座標點資料的量測精準度都可能影響第一階段曲線擬合的結果，故必須限制第二階段曲線擬合的誤差範圍，將超出範圍的第一階段曲線擬合資料點去除，以增加第二階段曲線擬合精準度。

### 3.3.1 不偏倚最小平方法

文獻[15]針對上述之最小平方法，其所得之參數估計值產生較大的誤差作改善，提出不偏倚最小平方法（Unbiased Least Squares Method），此方法的觀念是以從資料點到預估之圓弧的垂直距離為誤差項，並對圓心和半徑作微量之變動來修正使得誤差減小，再用更迭法來逼近最佳解，進而可得到不偏倚的參數估計（Unbiased Estimator）。本研究即是利用此法進行擬合修正。

經過兩階段曲線擬合，已求得基圓之圓心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 及基圓半徑 $a$ ，定義第一階段曲線擬合圓心 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 與第二階段曲線擬合基圓圓周的垂直距離為誤差項 $e_i$ ，如圖(3.8)。

令誤差容許範圍 $K$ ，其方程式如下：

$$e_i = \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_i)^2} - a \quad (3.14)$$

$$\left| \frac{e_i}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_i)^2} - a}{a} \right| < K \quad (3.15)$$

其中誤差容許範圍 $K$ 依擬合不同渦卷座標點資料做調整，較精密渦卷所得之座標點資料， $K$ 可較小。

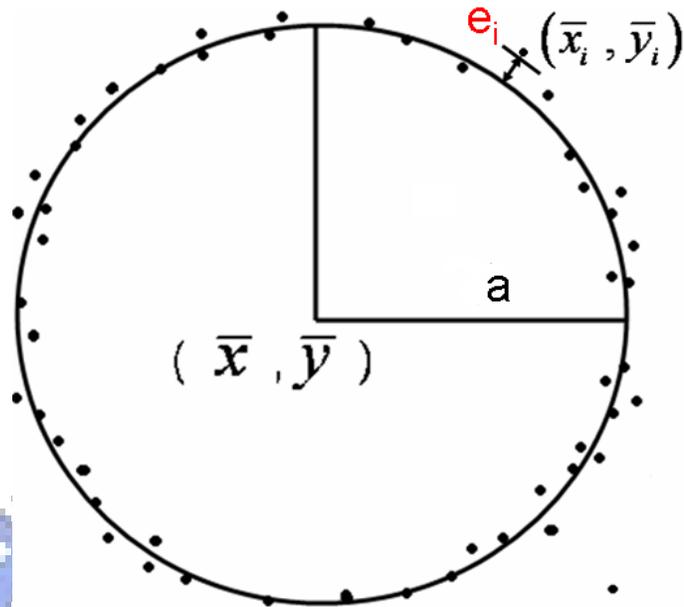


圖 3.8 第一階段曲線擬合圓心與基圓圓周的垂直距離誤差

$$\text{若 } \left| \frac{e_i}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_i)^2} - a}{a} \right| > K$$

則不考慮此座標點 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ，利用更迭法重複進行第二階段曲線擬合，求取基圓中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 及基圓半徑 $a$ 的最佳解。

### 3.3.2 特殊區域擬合

由於渦卷本身在頭部及尾部的設計上，可能因為其他目的而特別設計，這些部分的渦卷座標資料點在做第一及第二階段曲線擬合時，會影響整體擬合結果，故只對渦卷沒有做特別設計的部份做區域擬合，可增加擬合結果的精準度。

假設基圓半徑  $a$  為，第二階段曲線擬合的初步結果，而區域擬合的展開角範圍為  $\phi_1 \sim \phi_2$ ，則：

$$R_1 = a\sqrt{1 + \phi_1^2} \quad (3.16)$$

$$R_2 = a\sqrt{1 + \phi_2^2} \quad (3.17)$$

則其區域擬合範圍：

$$R_1^2 < x_i^2 + y_i^2 < R_2^2 \quad (3.18)$$

區域擬合範圍如圖(3.9)所示為：

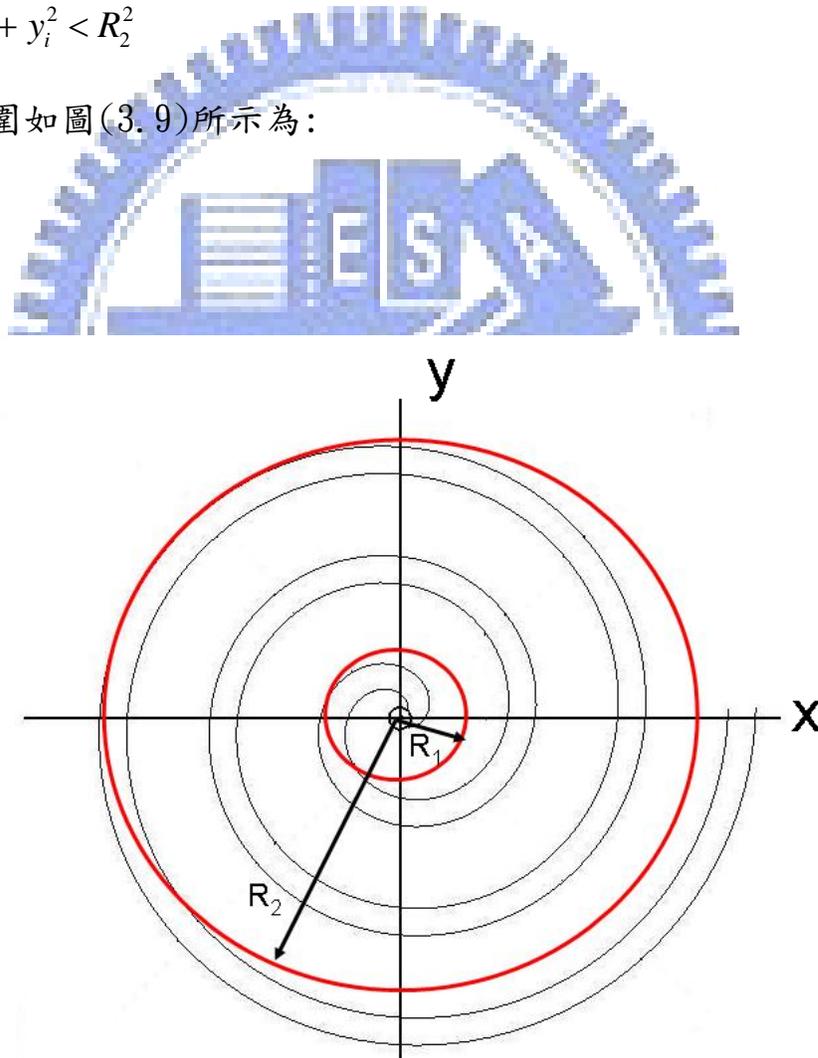


圖 3.9 區域擬合範圍  $R_1^2 < x_i^2 + y_i^2 < R_2^2$

將所有渦卷外型座標點資料 $(x_i, y_i)$ 代入(3.18)中，即可排除掉區域擬合範圍外的渦卷外型座標點資料，如圖(3.10)。

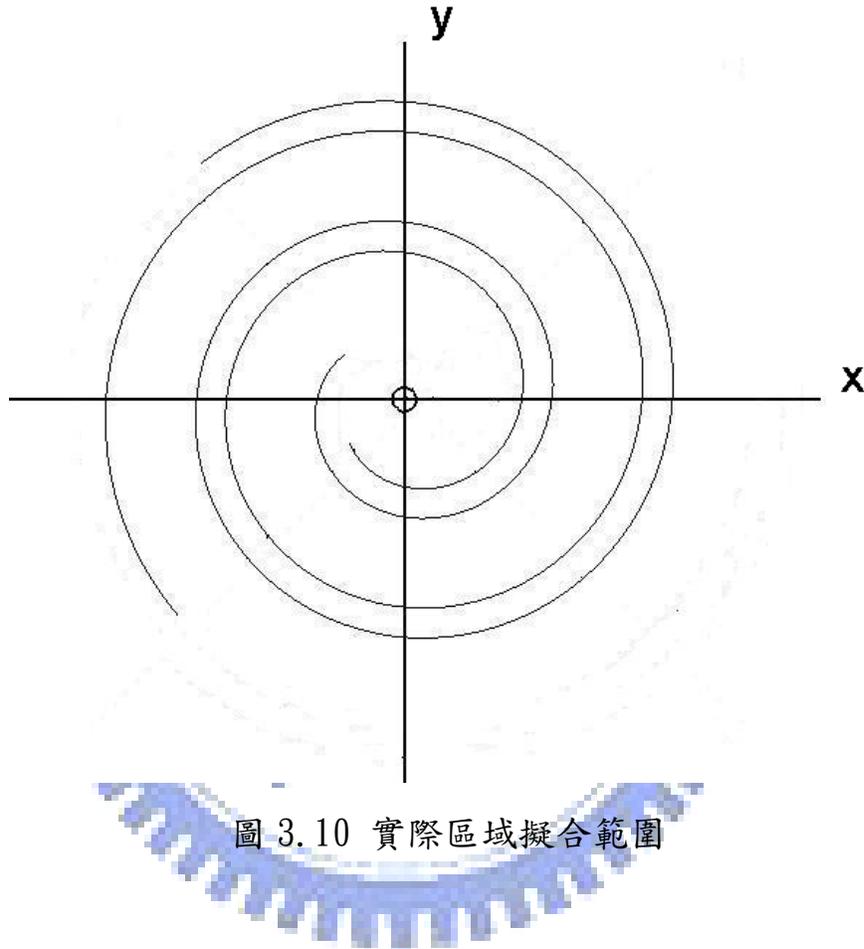


圖 3.10 實際區域擬合範圍

最終，對符合區域擬合範圍的渦卷外型座標點資料做第一、第二階段曲線擬合，及利用不偏倚最小平方法做擬合修正，得到區域擬合的基圓圓心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 及基圓半徑  $a$ 。

### 3.4 擬合誤差

由於渦卷外型座標點資料經由三次元量測儀或影像檢測系統所取得時，並無法確實做好角度定位，所量得之渦卷外型座標點資料必定與利用擬合所得之基圓中心及基圓半徑所展開之標準漸開線存在一角度誤差，如圖(3.11)。

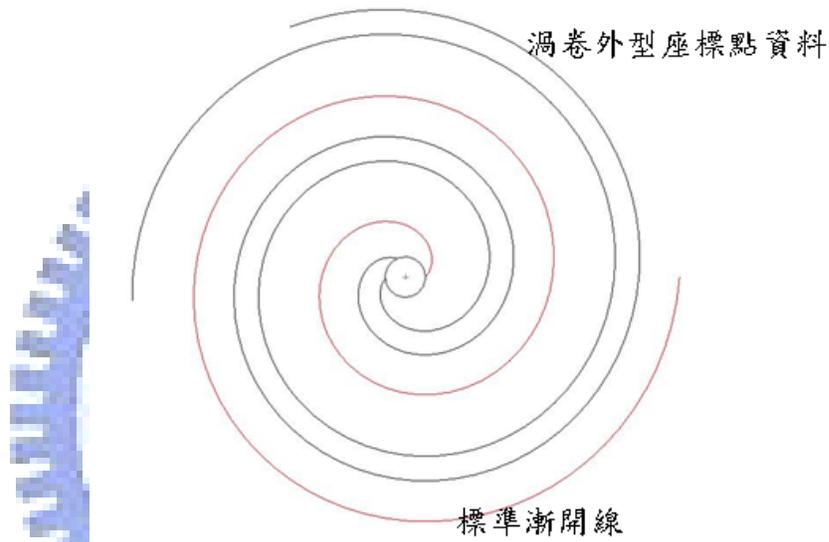


圖 3.11 渦卷外型座標點資料與標準漸開線之角度誤差

文獻[17]中提到, 渦卷外型可由一圓的標準漸開線，經平行線定理求得。本研究利用此原理，經過兩階段座標旋轉，分別將內、外渦卷外型座標點資料，旋轉至標準漸開線上，以便計算渦卷外型座標點資料與標準漸開線之間的擬合誤差及其他渦卷設計參數。

#### 3.4.1 座標歸零

由於渦卷外型座標點資料可經由三次元量測儀或影像檢測系統所取得時

之量測中心未必為基圓圓心，故在進行座標旋轉前必須對所有渦卷外型座標點資料做座標歸零。

$$x_z = x_i - \bar{x} \quad (3.19)$$

$$y_z = y_i - \bar{y} \quad (3.20)$$

其中  $x_z, y_z$  分別為歸零後之渦卷外型座標點資料。

### 3.4.2 第一階段座標旋轉

在第一階段旋轉座標中，目的是分別將內、外渦卷外型座標點資料初步旋轉至標準漸開線附近，以便第二階段座標旋轉微轉動。利用渦卷外型座標點資料上任意一點相對於標準漸開線上之相對點之間的角度差，將所有渦卷外型座標點資料旋轉至標準漸開線附近。本研究分別對內外渦卷資料點選取最接近渦卷頭部之座標點  $(x_m, y_m)$  作為參考點，將其轉至標準漸開線的相對點  $(x_c, y_c)$  上，如圖(3.12)。

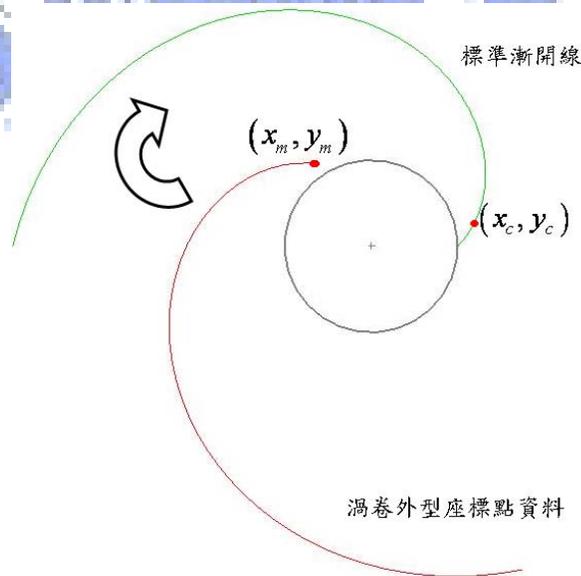


圖 3.12 將渦卷外型座標點資料旋轉至標準漸開線附近

依標準漸開線展開公式

$$\begin{aligned}x_m &= a(\cos \phi_m + \phi_m \sin \phi_m) \\y_m &= a(\sin \phi_m - \phi_m \cos \phi_m) \\ \Rightarrow x_m^2 + y_m^2 &= a^2(1 + \phi_m^2)\end{aligned}\quad (3.21)$$

其中  $\phi_m$  為座標點  $(x_m, y_m)$  之展開角

$$\begin{aligned}x_c &= a(\cos \phi_c + \phi_c \sin \phi_c) \\y_c &= a(\sin \phi_c - \phi_c \cos \phi_c)\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$\Rightarrow x_c^2 + y_c^2 = a^2(1 + \phi_c^2)\quad (3.23)$$

其中  $\phi_c$  為座標點  $(x_c, y_c)$  之展開角

$$\text{由於 } \phi_m = \phi_c \quad (3.24)$$

故由 (3.21)、(3.23) 及 (3.24) 可知

$$\phi_c = \left( \frac{x_m^2 + y_m^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

將 (3.25) 帶回 (3.22) 可求得  $(x_c, y_c)$ ，接著對  $(x_m, y_m)$  做座標轉換

$$\begin{aligned}x'_m &= x_c = x_m \cos \theta' - y_m \sin \theta' \\y'_m &= y_c = x_m \sin \theta' + y_m \cos \theta'\end{aligned}\quad (3.26)$$

其中  $\theta'$  為渦卷之第一階段座標旋轉角

由 (3.26) 可求得外渦卷之第一階段座標旋轉角  $\theta'_{out}$  及內渦卷之第一階段座標旋轉角  $\theta'_{in}$ ，將所有外渦卷座標點資料旋轉  $\theta'_{out}$ ，所有內渦卷座標點資料旋轉  $\theta'_{in}$  如

下：

$$\begin{aligned}x'_{iout} &= x_{iout} \cos \theta'_{out} - y_{iout} \sin \theta'_{out} \\y'_{iout} &= x_{iout} \sin \theta'_{out} + y_{iout} \cos \theta'_{out}\end{aligned}\quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}x'_{iin} &= x_{iin} \cos \theta'_{in} - y_{iin} \sin \theta'_{in} \\y'_{iin} &= x_{iin} \sin \theta'_{in} + y_{iin} \cos \theta'_{in}\end{aligned}\quad (3.28)$$

### 3.4.3 第二階段座標旋轉

經過第一階段座標旋轉，渦卷座標點資料 $(x'_i, y'_i)$ 已經與標準漸開線相當接近，繼續對其做座標旋轉

$$\begin{aligned}x''_i &= x'_i \cos \theta'' - y'_i \sin \theta'' \\y''_i &= x'_i \sin \theta'' + y'_i \cos \theta''\end{aligned}\quad (3.29)$$

其中 $\theta''$ 為渦卷之第二階段座標旋轉角

令 $E_i$ 為渦卷座標點資料 $(x''_i, y''_i)$ 與標準漸開線之最小距離平方

$$E_i = d_i^2 = [x''_i - a(\cos \phi_i + \phi_i \sin \phi_i)]^2 + [y''_i - a(\sin \phi_i - \phi_i \cos \phi_i)]^2 \quad (3.30)$$

$$\text{因 } \frac{\partial E_i}{\partial \phi} = 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & 2[x''_i - a(\cos \phi_i + \phi_i \sin \phi_i)][-a(\phi_i \cos \phi_i)] + \\& 2[y''_i - a(\sin \phi_i - \phi_i \cos \phi_i)][-a(\phi_i \sin \phi_i)] = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [x''_i - a(\cos \phi_i + \phi_i \sin \phi_i)]\phi_i \cos \phi_i + [y''_i - a(\sin \phi_i - \phi_i \cos \phi_i)]\phi_i \sin \phi_i = 0 \text{ 因}$$

為標準漸開線之展開角必大於零， $\phi_i > 0$

$$\Rightarrow x''_i \cos \phi_i - a \cos^2 \phi_i + y''_i \sin \phi_i - a \sin^2 \phi_i = 0$$

$$\Rightarrow x_i'' \cos \phi_i + y_i'' \sin \phi_i = a \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \frac{x_i''}{\sqrt{x_i''^2 + y_i''^2}} \cos \phi_i + \frac{y_i''}{\sqrt{x_i''^2 + y_i''^2}} \sin \phi_i = \frac{a}{\sqrt{x_i''^2 + y_i''^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \beta_i \cos \phi_i + \sin \beta_i \sin \phi_i = \frac{a}{\sqrt{x_i''^2 + y_i''^2}}$$

$$\Rightarrow \cos(\beta_i - \phi_i) = \frac{a}{\sqrt{x_i''^2 + y_i''^2}} \quad (3.33)$$

$$\text{其中 } \beta = \tan^{-1} \left( \frac{y_i''}{x_i''} \right) \quad (3.34)$$

由標準漸開線展開原理得知  $\beta_i < \phi_i$ ，且  $0^\circ < (\phi_i - \beta_i) < 90^\circ$ ，如圖(3.13)。

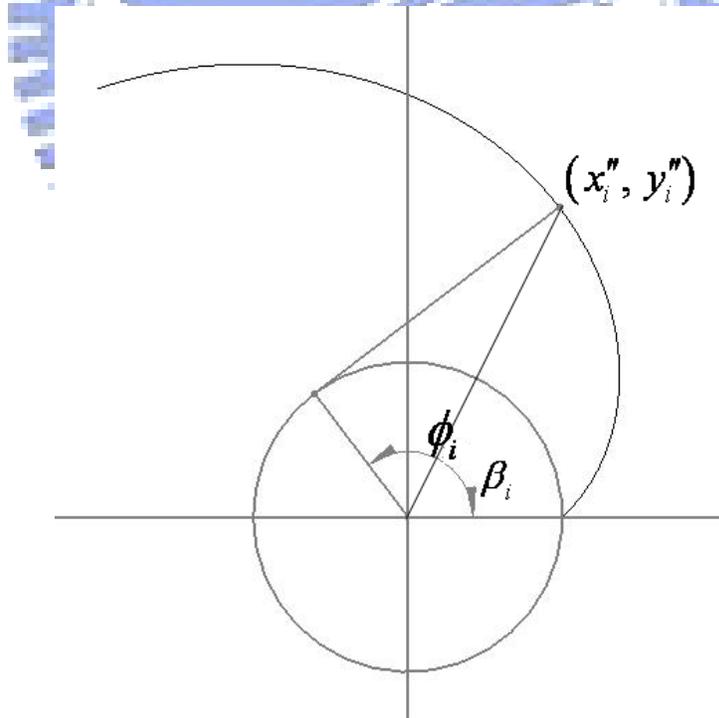


圖 3.13 標準漸開線展開原理  $\beta_i$  與  $\phi_i$  的關係

故 (3.33) 可改寫為

$$\phi_i = \beta_i + \cos^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{x_i''^2 + y_i''^2}} \right) \quad (3.35)$$

由於  $\phi_i$  的範圍大於  $180^\circ$ ，所以必須做角度補償其邊界條件如下：

$$x_i'' > 0, -\frac{1}{2}\pi a + 2n\pi < (x_i''^2 + y_i''^2 - a^2) < \frac{3}{2}\pi a + 2n\pi, \phi_i = \phi_i + 2n\pi \quad (3.36)$$

$$x_i'' < 0, \frac{1}{2}\pi a + 2n\pi < (x_i''^2 + y_i''^2 - a^2) < \frac{5}{2}\pi a + 2n\pi, \phi_i = \phi_i + (2n+1)2\pi$$

分別將經過第二階段座標旋轉的內、外渦卷座標點資料  $(x_i'', y_i'')$  代入式 (3.35) 中，求得每一渦卷座標點資料所對應之  $\phi_i$ ，再將其代回式 (3.30) 求得  $E_i$ ，並分別將內、外渦卷之  $E_i$  加總後，先微調式 (3.29) 中之第二階段旋轉角  $\theta''$ ，使  $\sum E_i$  達到最小值時，再將式 (3.30)、(3.32)、(3.33)、(3.35)、(3.36) 中之基圓半徑  $a$  做微調，重覆微調第二階段座標旋轉角  $\theta''$ ，直到  $\sum E_{in}$  及  $\sum E_{out}$  皆為最小值，求得最精準的擬合半徑  $a$  及內、外渦卷之第二階段座標旋轉角  $\theta''_{in}$  與  $\theta''_{out}$ 。

#### 3.4.4 輸出設計參數

除了基圓中心  $(\bar{x}, \bar{y})$ 、半徑  $a$ ，渦卷還有其他設計參數包括創成角  $\alpha$  及渦卷厚度  $t$ 。將第一及第二階段座標旋轉角相加，令

$$\theta_{out} = \theta'_{out} + \theta''_{out} \quad (3.37)$$

$$\theta_{in} = \theta'_{in} + \theta''_{in} \quad (3.38)$$

若  $0^\circ < |\theta_{in} - \theta_{out}| < 180^\circ$ ，則

$$\text{創成角 } \alpha = \frac{|\theta_{in} - \theta_{out}|}{2} \quad (3.39)$$

其原理如圖(3.14)。

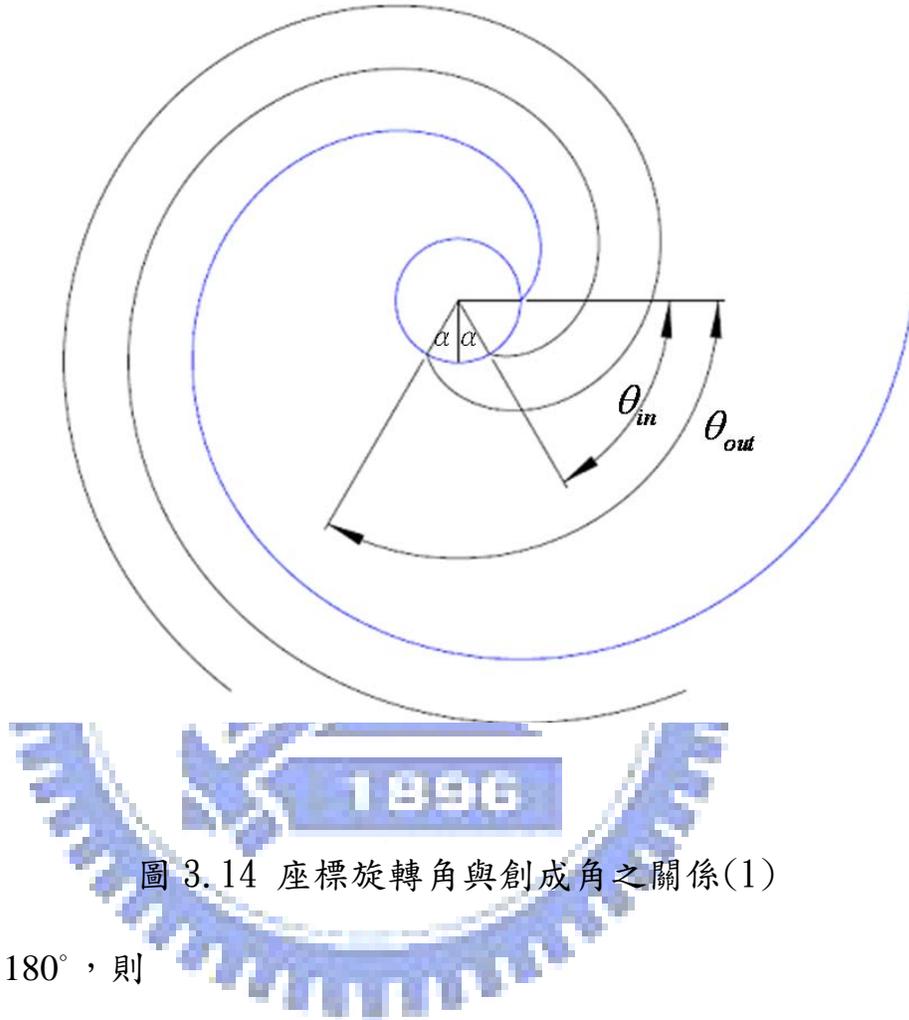


圖 3.14 座標旋轉角與創成角之關係(1)

若  $|\theta_{in} - \theta_{out}| > 180^\circ$ ，則

$$\text{創成角 } \alpha = \frac{360^\circ - |\theta_{in} - \theta_{out}|}{2} \quad (3.40)$$

其原理如圖(3.15)。

而渦卷厚度可由基圓半徑及創成角表示

$$\text{渦卷厚度 } t = 2a\alpha \quad (3.41)$$

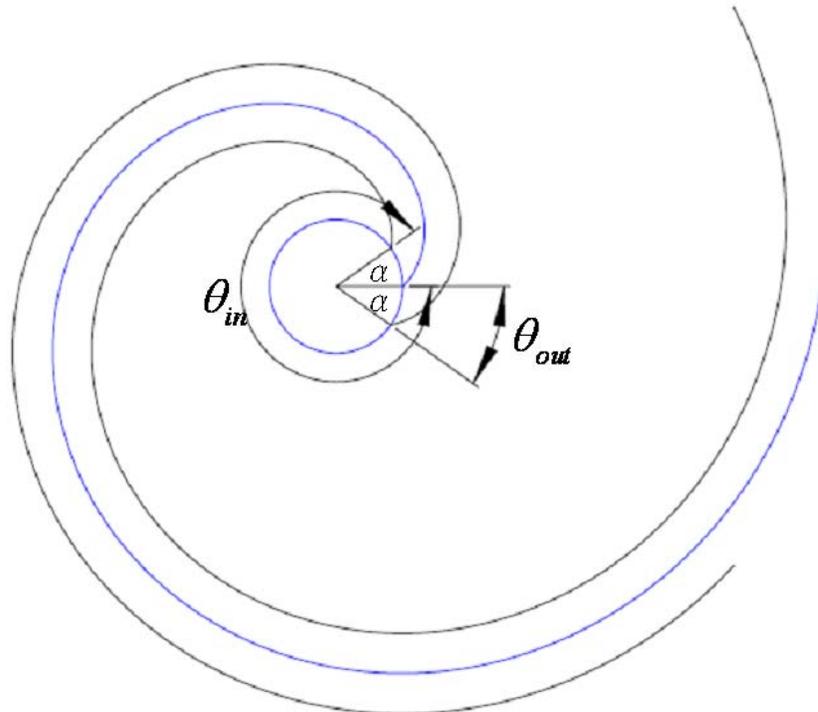


圖 3.15 座標旋轉角與創成角之關係(2)

### 3.4.5 擬合誤差輸出

經過兩階段座標旋轉後，渦卷座標點資料已精確的旋轉至標準漸開線上，而  $\min \sum E_i$  中的  $E_i$  即為渦卷座標點資料與擬合標準漸開線之間的擬合誤差平方，由式(3.30)得知，擬合誤差  $d_i$  表示如下：

$$d_i = \pm \sqrt{E_i} \quad (3.42)$$

其中正負號由渦卷座標點資料與標準漸開線相對應展開點之關係判斷。

假設外渦卷座標點資料  $(x_i'', y_i'')$  對應標準漸開線展開角為  $\phi_i$ ，則其對應之展開點

$(x_{iout}, y_{iout})$  為：

$$\begin{aligned} x_{iout} &= a(\cos \phi_i + \phi_i \sin \phi_i) \\ y_{iout} &= a(\sin \phi_i - \phi_i \cos \phi_i) \end{aligned} \quad (3.43)$$

若  $x_i''^2 + y_i''^2 > x_{iout}''^2 + y_{iout}''^2$  則

$$d_i = +\sqrt{E_i} \quad (3.44)$$

相對的若  $x_i''^2 + y_i''^2 < x_{iout}''^2 + y_{iout}''^2$  則

$$d_i = -\sqrt{E_i} \quad (3.45)$$

假設內渦卷座標點資料  $(x_i'', y_i'')$  對應標準漸開線展開角為  $\phi_i$ ，則其對應之展開點

$(x_{iin}, y_{iin})$  為：

$$\begin{aligned} x_{iin} &= a(\cos \phi_i + \phi_i \sin \phi_i) \\ y_{iin} &= a(\sin \phi_i - \phi_i \cos \phi_i) \end{aligned} \quad (3.46)$$

若  $x_i''^2 + y_i''^2 > x_{iin}''^2 + y_{iin}''^2$  則

$$d_i = -\sqrt{E_i} \quad (3.46)$$

相對的  $x_i''^2 + y_i''^2 < x_{iin}''^2 + y_{iin}''^2$  則

$$d_i = +\sqrt{E_i} \quad (3.47)$$

總而言之，式 (3.42) 中之正號代表渦卷座標點資料在擬合渦卷外部；負號代表渦卷座標點資料在擬合渦卷內部，如圖(3.16)。



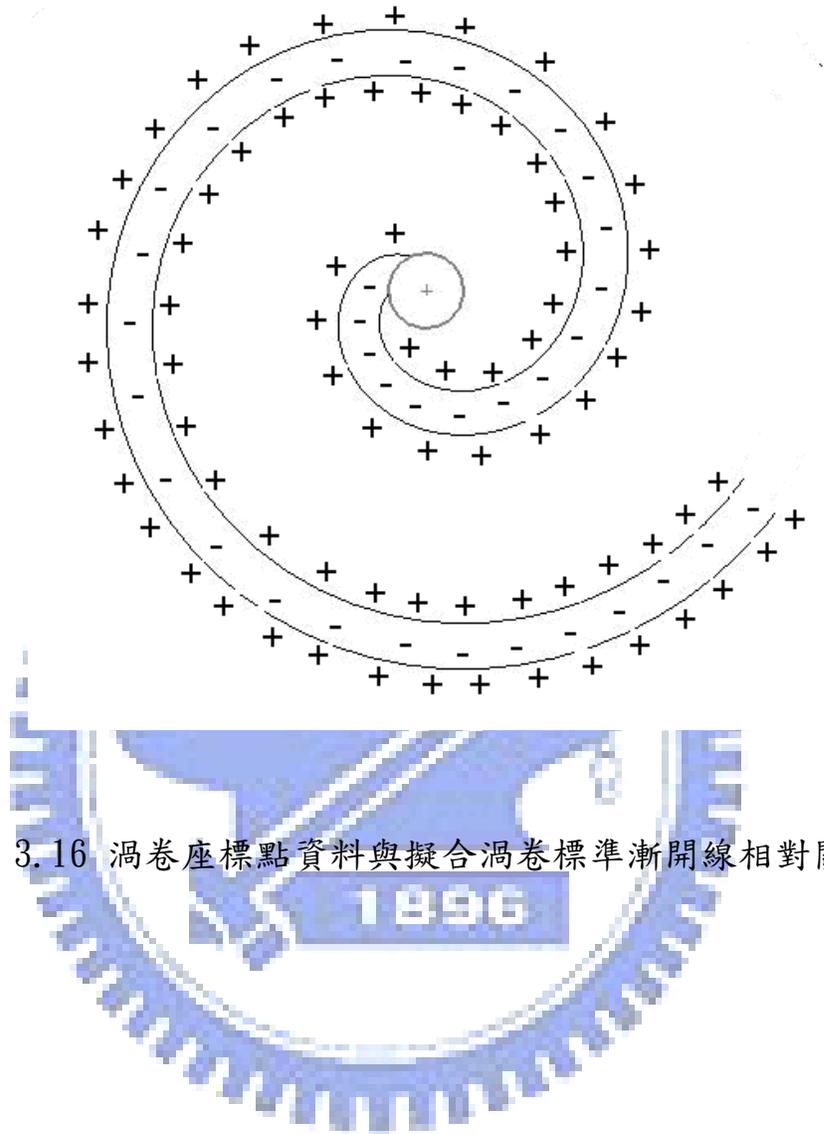


圖 3.16 渦卷座標點資料與擬合渦卷標準漸開線相對關係

## 第四章 應用程式建立與案例分析

本研究應用程式建立部份是以 Visual basic 2005 應用程式作為開發工具，依前一章所推導的渦卷曲線擬合理論，發展出一套同時擁有渦卷設計逆向工程曲線擬合，及渦卷製造誤差檢測之視窗化物件導向電腦輔助分析系統。本章中將先對應用程式介面做介紹，並同時以標準渦卷模型座標資料進行模擬測試，確認渦卷曲線擬應用程式的可行性，而後再對實際由三次元量測儀所得的渦卷外型座標點資料進行案例分析，並對其討論之。最終，藉由程式介面輸入設計參數模式，進行渦卷製造誤差檢測。

### 4.1 應用程式建立與模擬測試

將第三章渦卷曲線擬合理論推導建立成應用程式，並以流程圖方式展現如後（圖 4.1）。利用模擬分析一標準渦卷模型座標點資料(0435150\_Main.csv)做為程式介面及模擬測試說明。其標準渦卷設計參數為：

基圓半徑 = 4mm、基圓圓心座標(0, 0)、創成角= 35 度，由基圓 150 度處開始展開，每 1 度展開角產生一座標點資料。

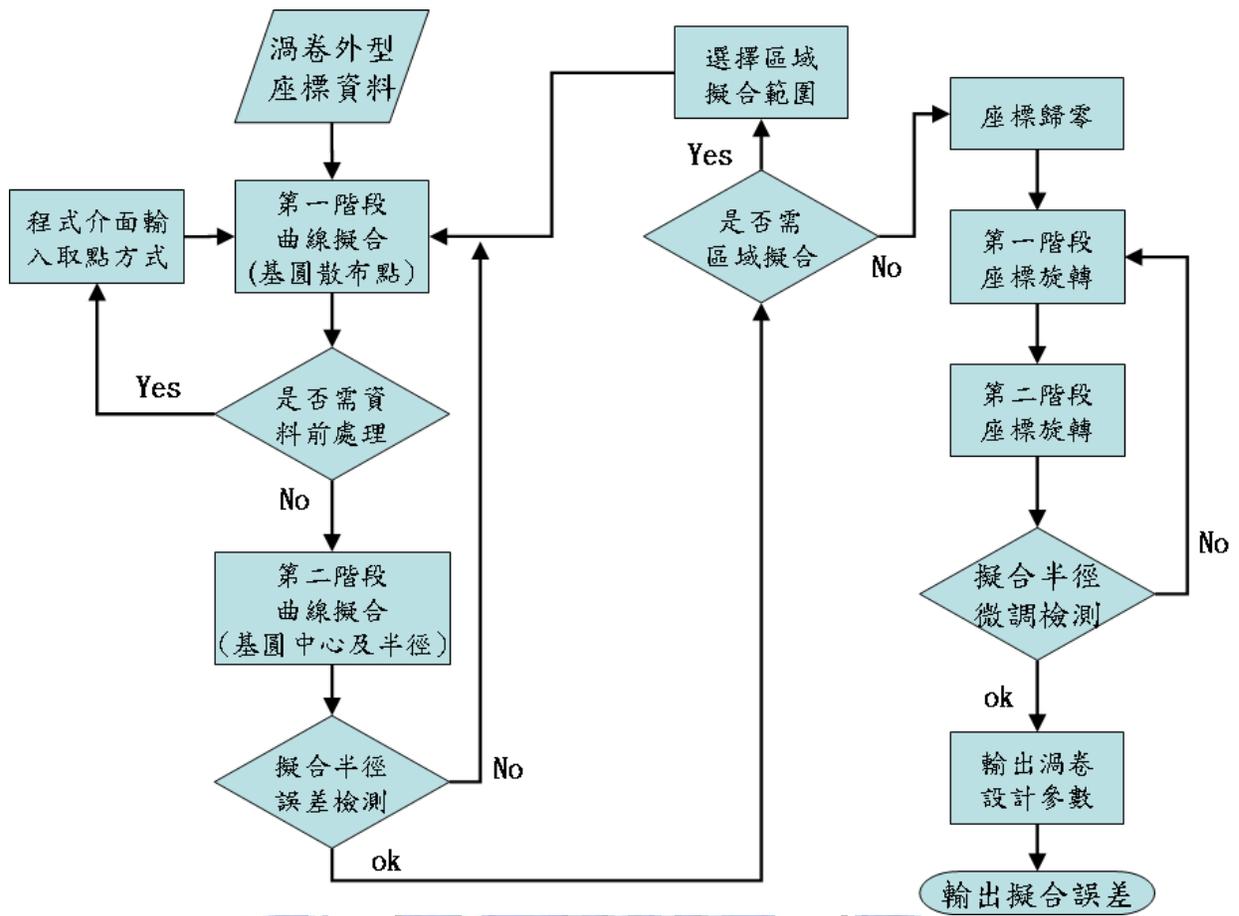


圖 4.1 渦卷曲線擬合應用程式流程圖

## 4.1.1 第一階段曲線擬合程式介面

### 4.1.1.1 第一階段曲線擬合

利用應用程式開啟由三次元量測儀或影像檢測系統所取得渦卷外型座標點資料檔，檔名格式為:檔名\_Main.csv，將渦卷外型座標點資料顯示在程式螢幕上，並對其進行第一階段曲線擬合，擬合圓心 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 的散佈情形亦可由程式螢幕顯示，如(圖 4.2)所示。其散布結果與理論謀合，幾乎都在基圓周圍。

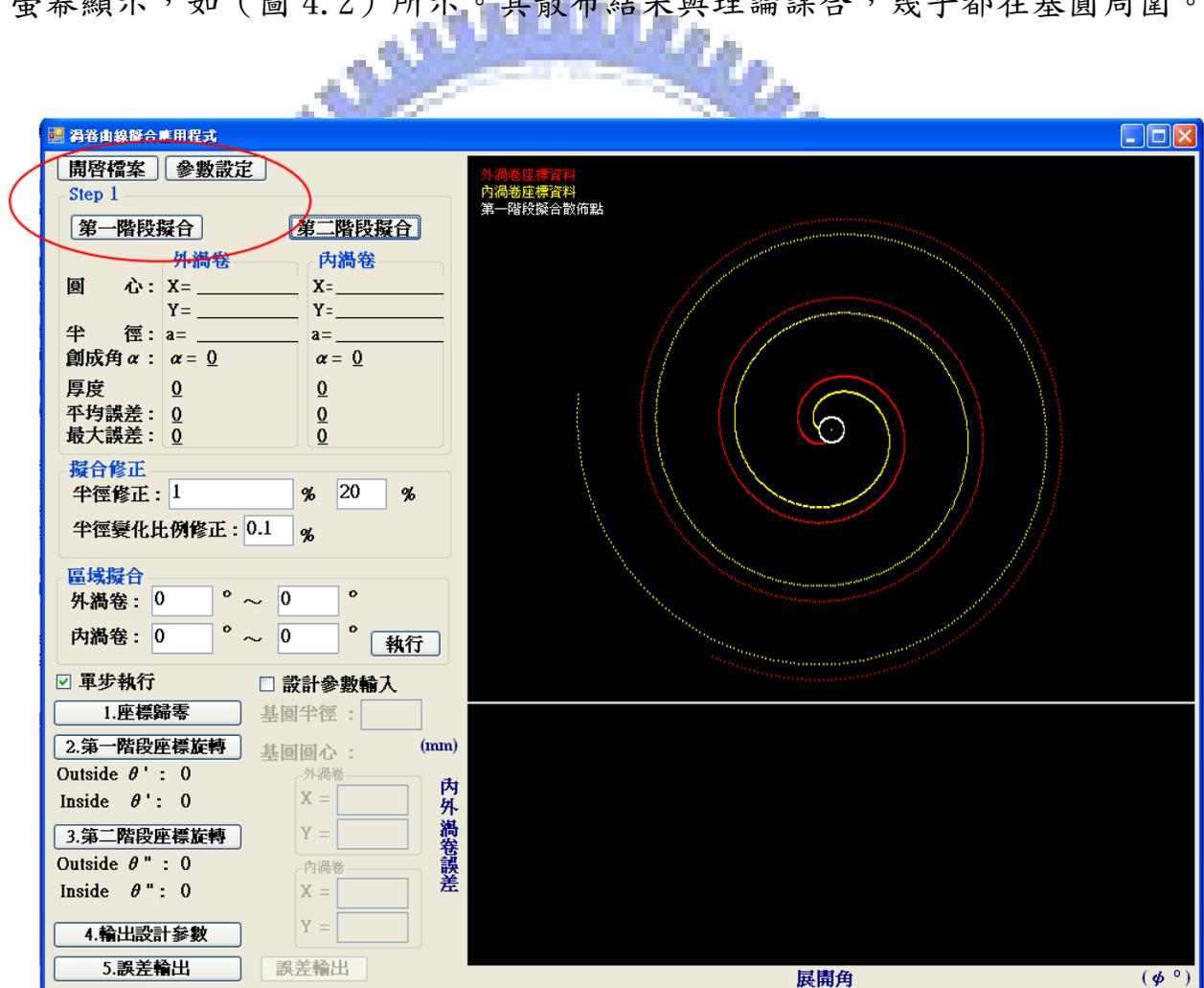


圖 4.2 第一階段曲線擬合圓心分布情形

### 4.1.1.2 資料前處理

若渦卷外型座標點資料過密，則需做資料前處理，應用程式中藉由平均取點法(3.2 節)對渦卷外型座標點資料簡化，其取點方式可由程式介面輸入(參數設定)。此處將渦卷外型座標點資料每隔 3 點取點，並重新對其進行第一階段曲線擬合，結果如(圖 4.3)所示。



圖 4.3 渦卷外型座標點資料資料前處理

## 4.1.2 第二階段曲線擬合程式介面

### 4.1.2.1 第二階段曲線擬合

在應用程式介面中，對第一階段曲線擬合所得的擬合圓心散布點進行第二階段曲線擬合，並對其做擬合修正(擬合修正範圍可由應用程式介面輸入)，輸出擬合圓心及擬合半徑，結果如圖(4.4)。其擬合圓心與設計參數相同，而擬合半徑為 4.0002 也相當接近設計參數，(以上輸出皆為程式計算之有效位數)。

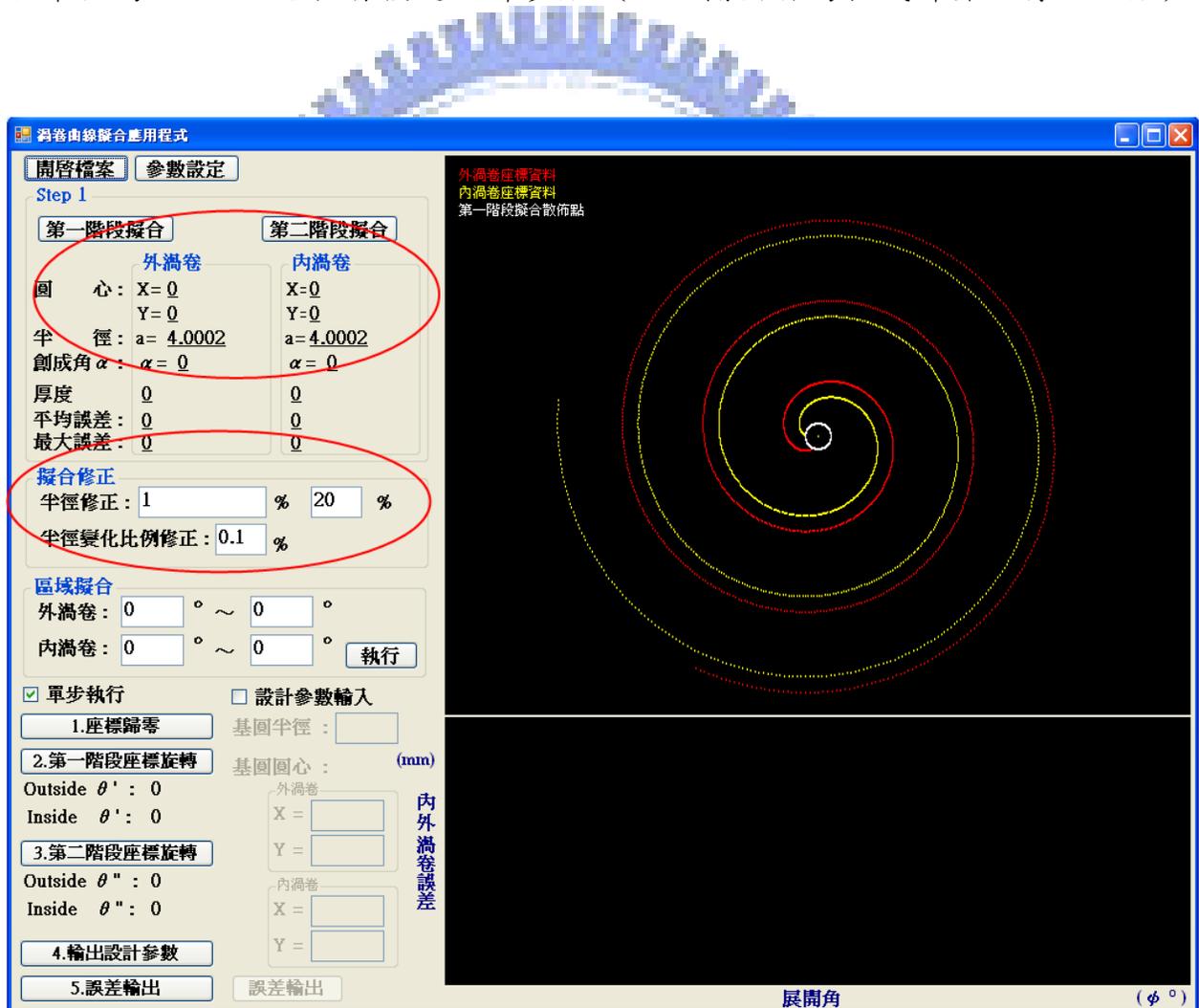


圖 4.4 第二階段曲線擬合結果

### 4.1.2.2 特殊區域擬合

經第二階段曲線擬合後，已獲得渦卷之擬合基圓中心及擬合基圓半徑，為必免渦卷頭部及尾部的座標點資料因特殊設計，而影響第二階段曲線擬合結果，故在程式介面上輸入區域擬合範圍（此處擬合範圍為 200 度~800 度），對其進行區域擬合，其結果如圖(4.5)。由於必須確認擬合之精確度，故需對渦卷座標點資料進行旋轉，以便計算擬合誤差及其餘渦卷設計參數。

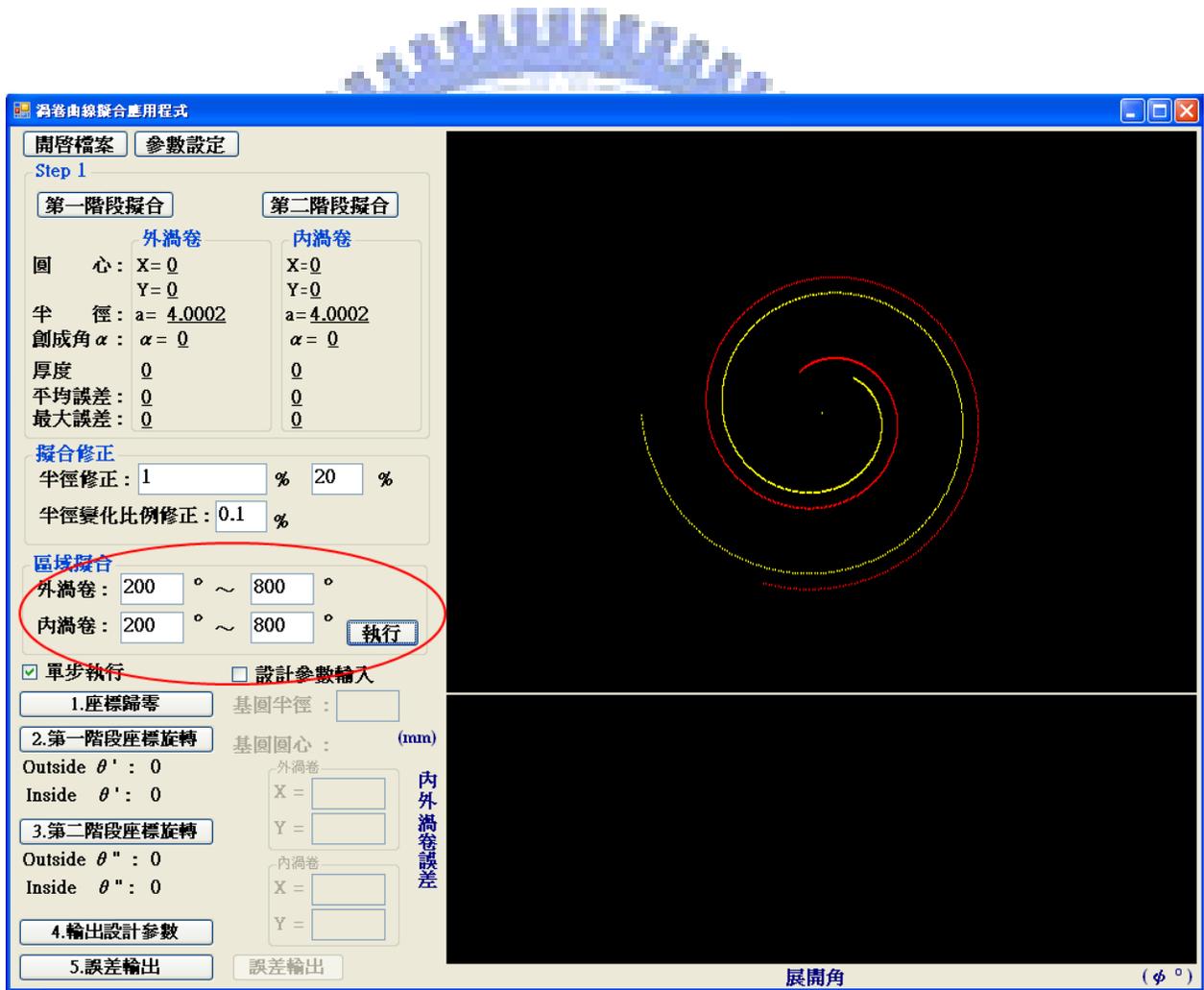


圖 4.5 區域擬合結果

### 4.1.3 擬合誤差程式介面

#### 4.1.3.1 座標歸零及第一階段座標旋轉

由於渦卷外型座標點資料必定與擬合所得之基圓中心及基圓半徑所展開之標準漸開線存在一角度誤差，應用程式必須先將渦卷外型座標點資料座標歸零到擬合基圓中心，並進行第一階段座標旋轉，將渦卷外型座標點資料旋轉至標準漸開線附近，其結果如圖(4.6)。內、外渦卷第一階段座標旋轉角分別為245度及175度。

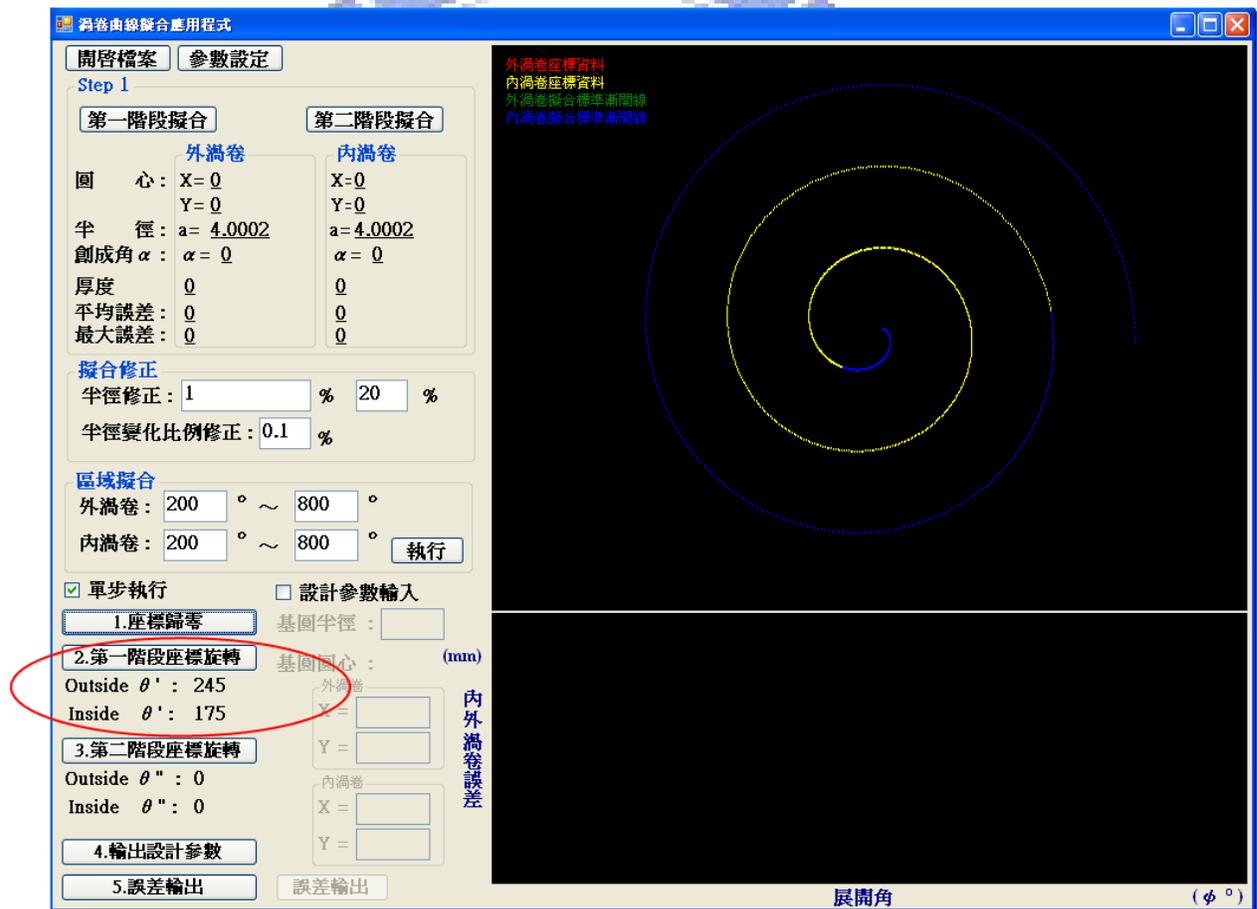


圖 4.6 座標歸零及第一階段座標旋轉

#### 4.1.3.2 第二階段座標旋轉與擬合半徑微調

在應用程式中繼續對渦卷外型座標點資料做第二階段座標旋轉微調，直到渦卷外型座標點資料與擬合標準漸開線之間的誤差為最小，再將擬合半徑做微調，配合重覆微調第二階段座標旋轉旋轉角，求得正確之擬合半徑及第二階段座標旋轉旋轉角，結果如圖(4.7)。由結果可得內、外渦卷第二階段座標旋轉角皆為 0.0125 度，而擬合半徑微調成 4mm 與設計值相同。

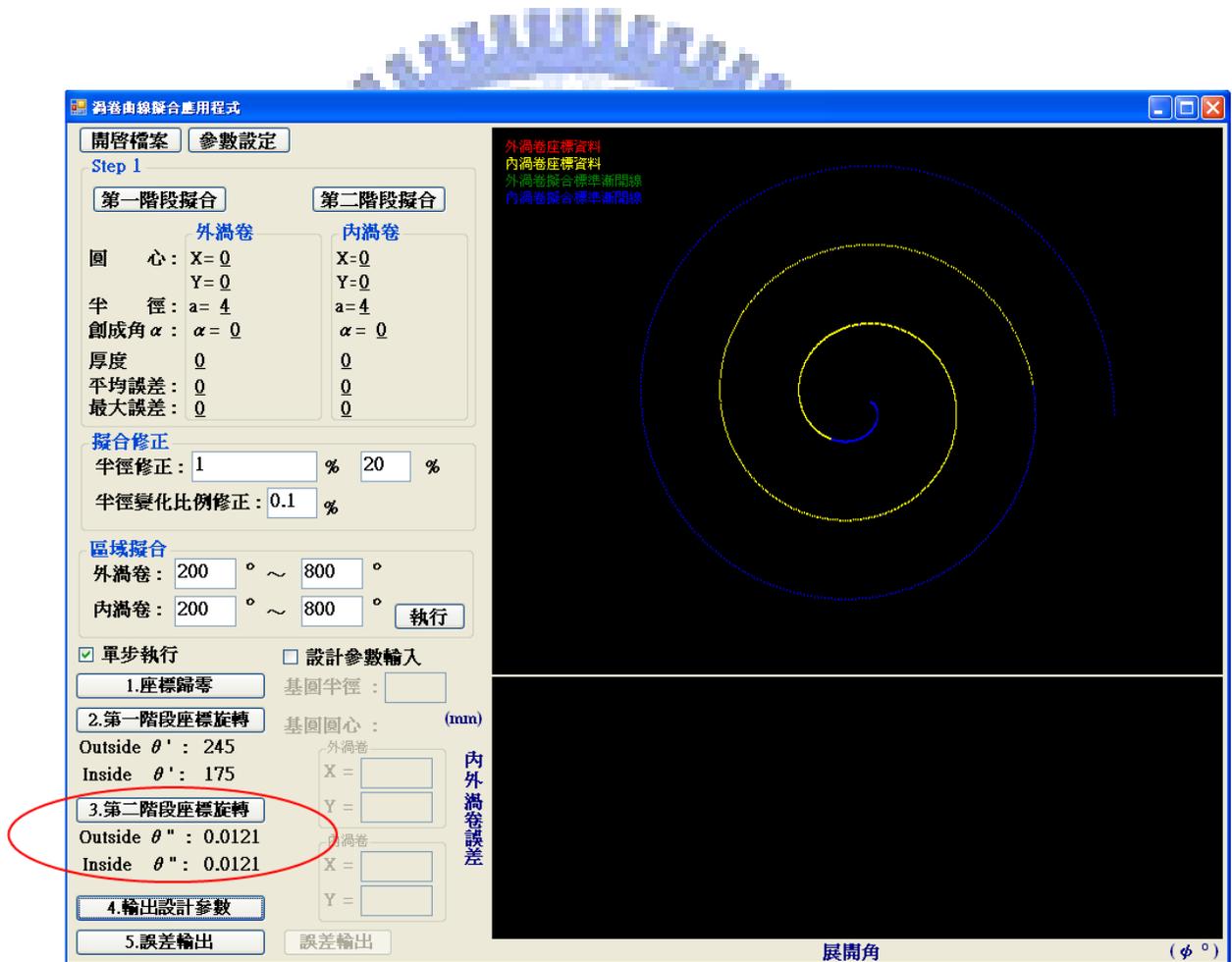


圖 4.7 第二階段座標旋轉與擬合半徑微調

### 4.1.3.3 輸出設計參數

利用內、外渦卷外型座標點資料兩階段座標旋轉角總合的關係，可由應用程式計算出渦卷設計參數中的創成角  $\alpha$  及渦卷厚度  $t$ ，結果如圖(4.8) 所示。

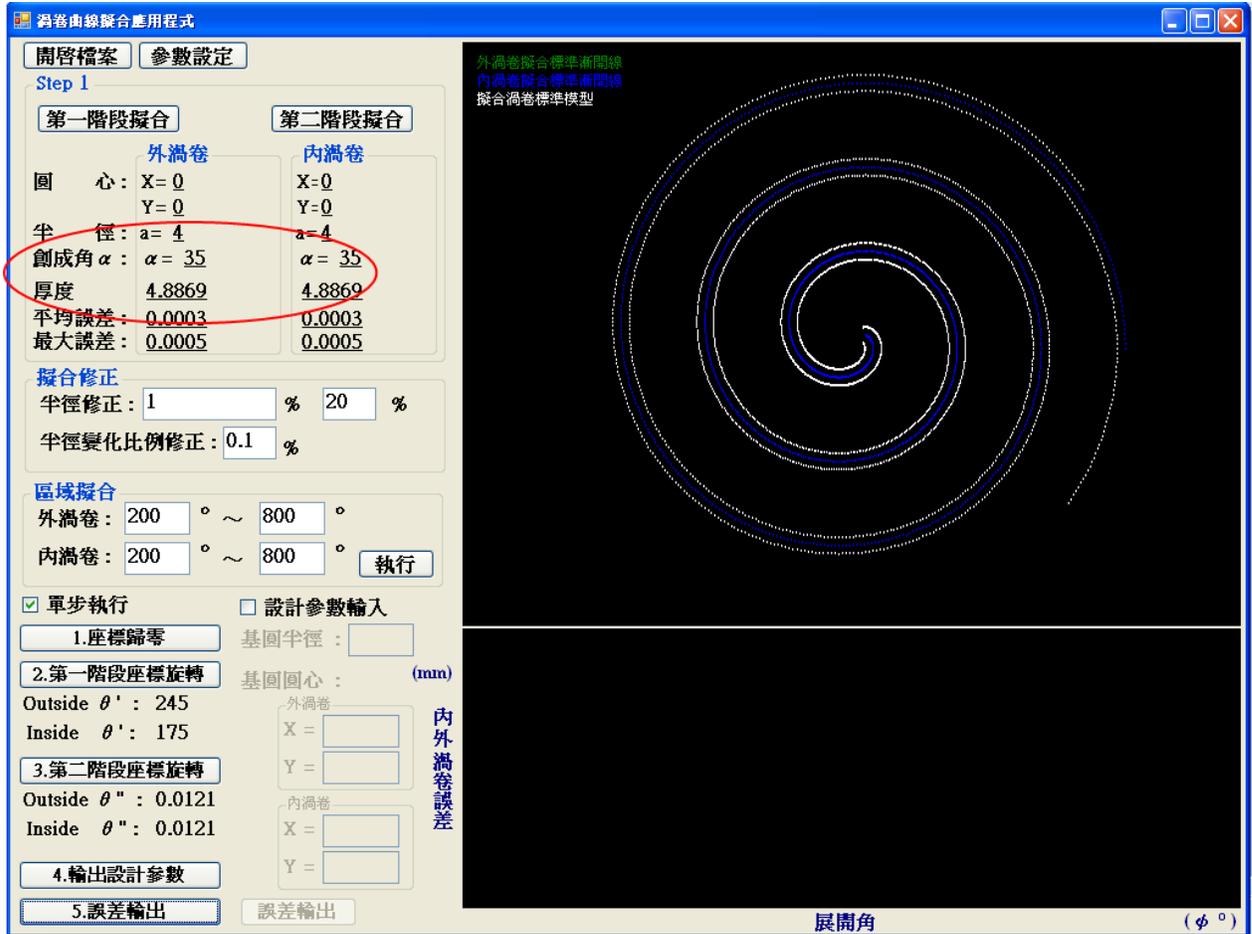


圖 4.8 輸出創成角與渦卷厚度等設計參數

#### 4.1.3.4 擬合誤差輸出

藉由渦卷外型座標點資料兩階段座標旋轉，可求得各渦卷外型座標點資料與擬合渦卷標準模型間之誤差值，將其展現在應用程式的介面上，以供分析討論，結果如圖(4.9)。其最大擬合誤差約為 0.0005mm(其誤差為程式計算過程之有效位數所產生，由於經過旋轉，故擬合誤差呈對稱分佈)，與渦卷製造精度 5 $\mu$ m 相較小了許多。

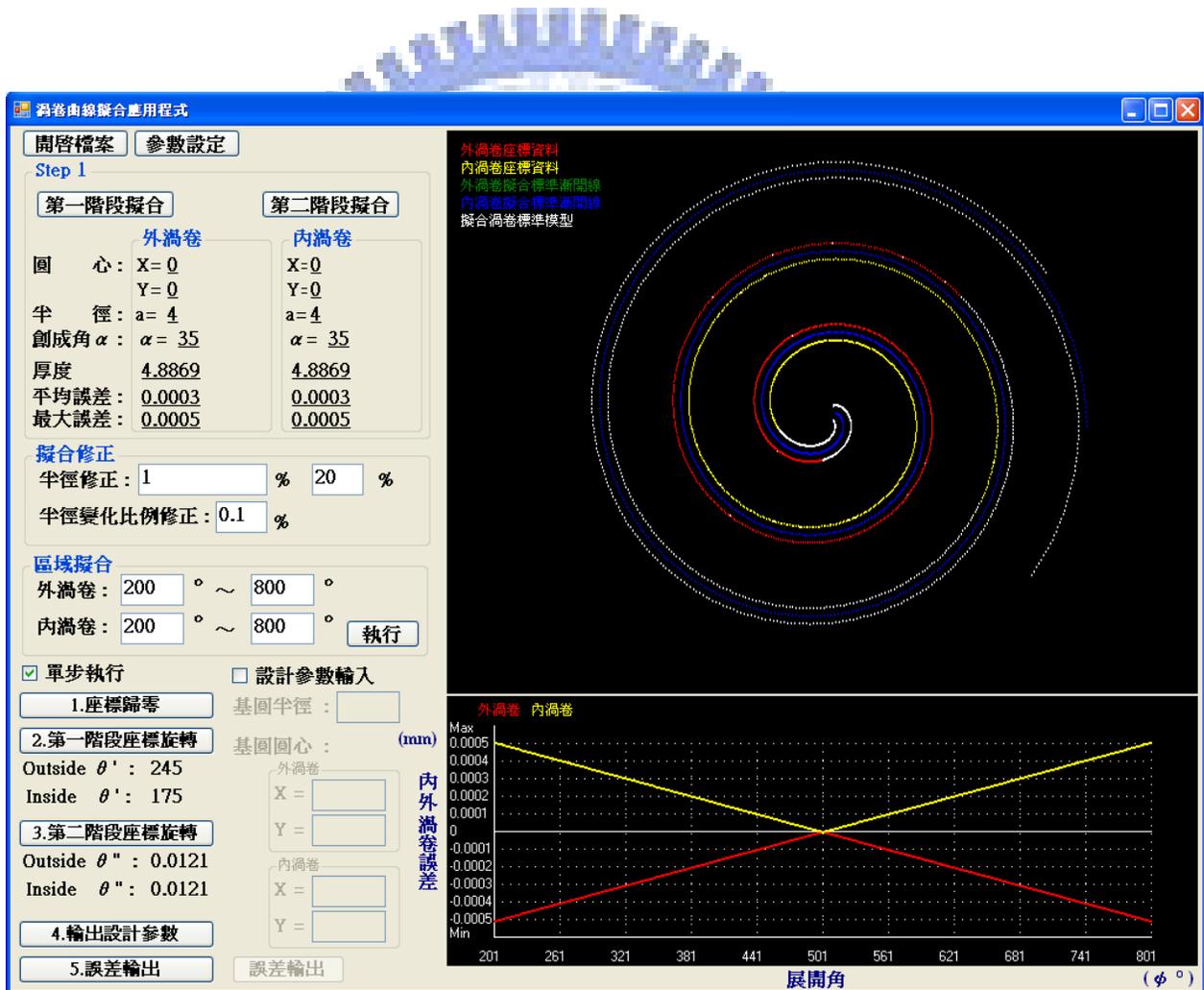


圖 4.9 渦卷外型座標點資料與擬合渦卷標準模型間之誤差值

經過以上應用程式介面說明及模擬測試結果，已證明了前一章之渦卷曲線擬合理論推導對於標準渦卷外型座標點資料擬合的正確性與可行性。

## 4.2 應用案例測試

在這一節中，將利用應用程式分別對兩組由三次元量測儀所量得之渦卷外型座標點資料(0077AA\_Main.csv)及(0900\_Main.csv)做案例分析。其渦卷原設計參數如表(4.1)。

表 4.1 案例渦卷之設計參數及量測方式

渦卷座標點資料名稱	座標點資料產生方式	基圓半徑 (mm)	創成角 (度)	座標點資料數	座標點均勻度
0077AA_Main.csv (2.75 圈)	三次元量測儀	2.06	36.9	461	低
0900_Main.csv (2.75 圈)	三次元量測儀	1.75	45.8	2463	高

### 4.2.1 案例分析(一)

開啟三次元量測儀所量測之渦卷外型座標點資料檔案 0077AA\_Main.csv，並對其進行第一、第二階段曲線擬合，如圖(4.10)。由應用程式介面中，可輕易發現第一階段曲線擬合點分散沒有相當均勻，但仍可判別其輪廓，而第二階段曲線擬合因渦卷頭部及尾部的特殊設計關係，已造成內、外渦卷產生相當誤差的擬合結果。

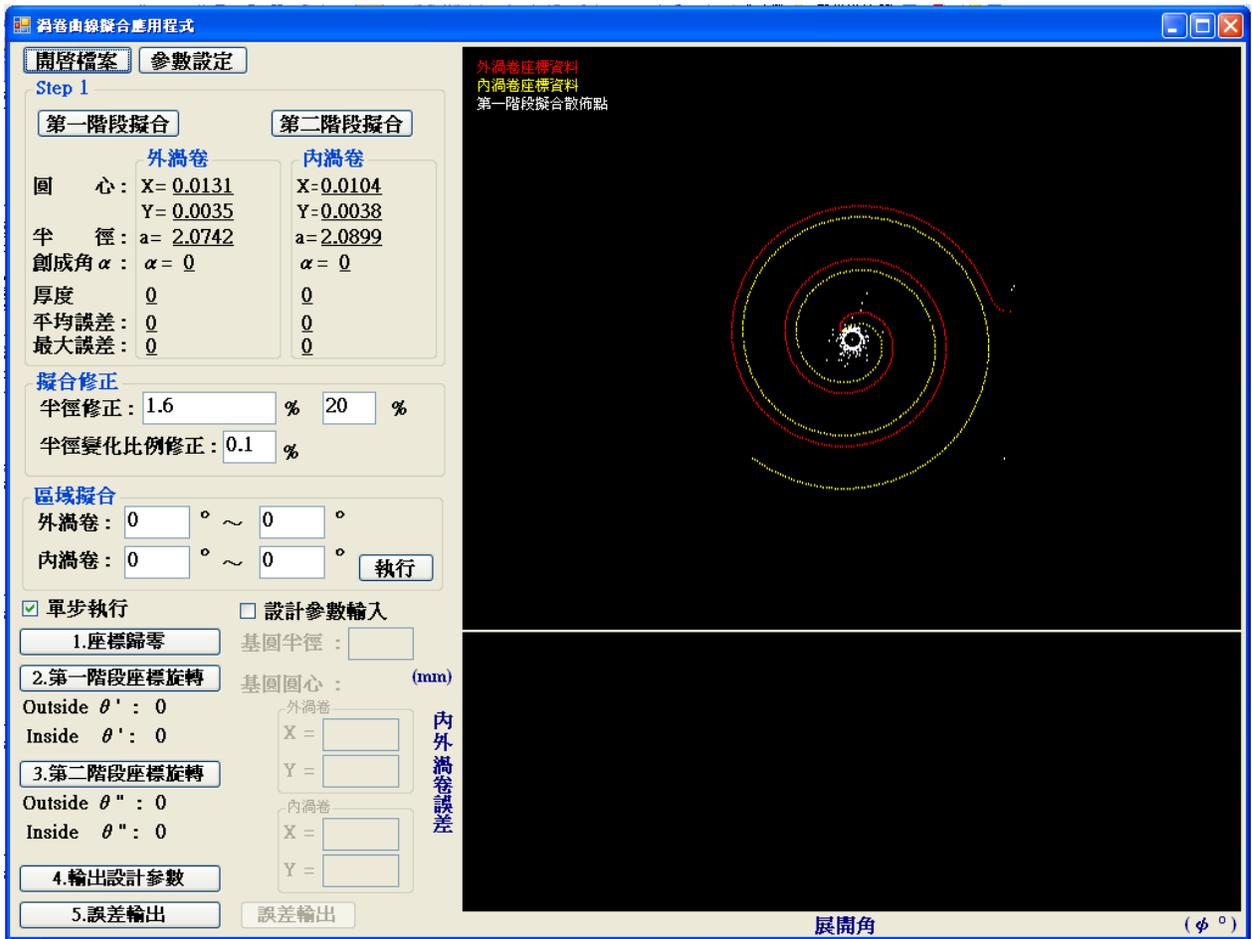


圖 4.10 檔案 0077AA\_Main.csv 之第一、第二階段曲線擬合結果

由於第一、第二階段曲線擬合時，內、外渦卷產生相當誤差的擬合結果，必須對其進行區域擬合，經區域擬合後，可明顯改善第一階段曲線擬合之散佈，且內、外渦卷第二階段曲線擬合的誤差也明顯的減小，如圖(4.11)。

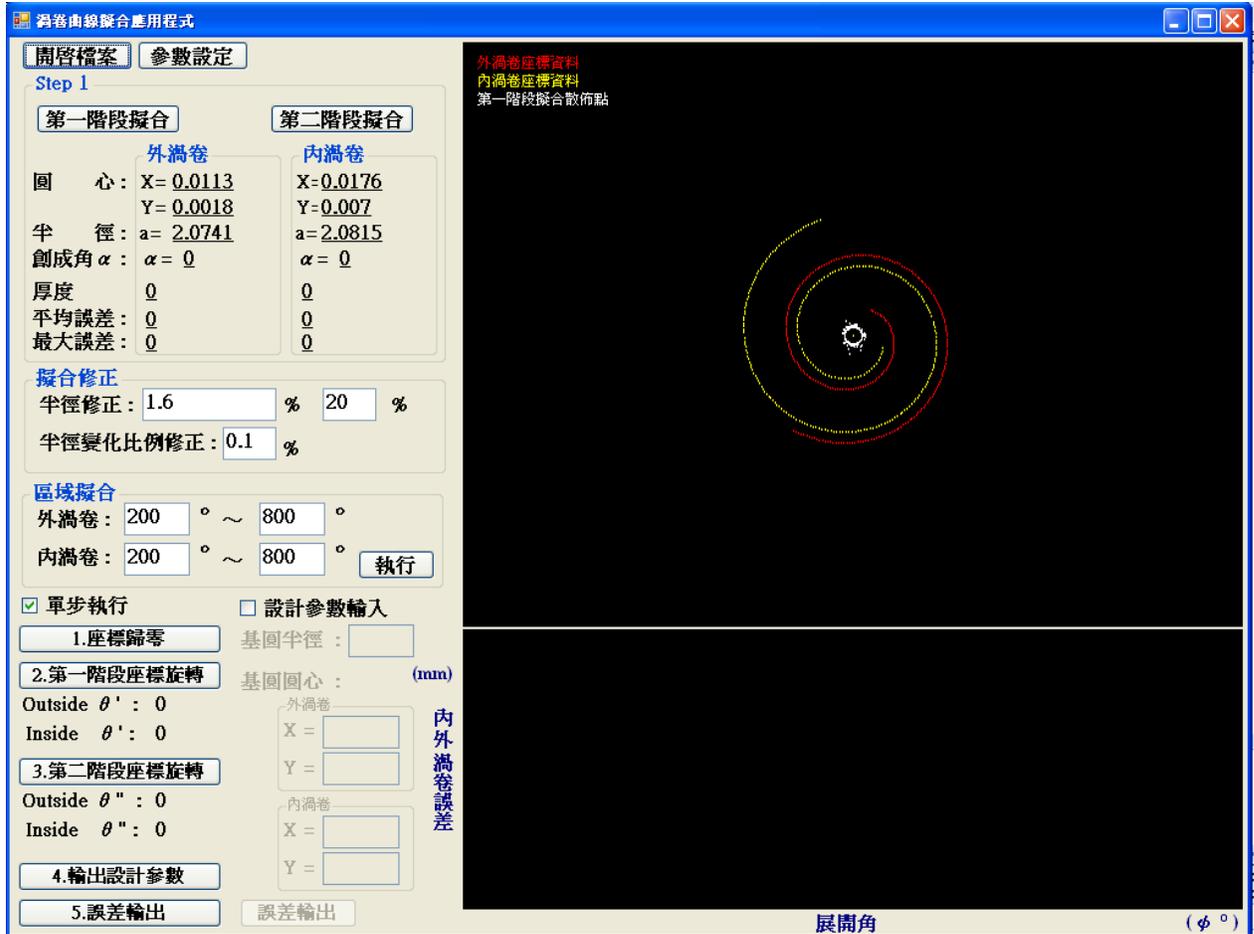


圖 4.11 檔案 0077AA\_Main.csv 區域擬合結果

將區域擬合結果座標歸零，使進行第一及第二階段座標旋轉，內、外渦卷之擬合半徑經過第二階段座標旋轉半徑微調後，已明顯修正統一至精確值，如圖(4.12)。

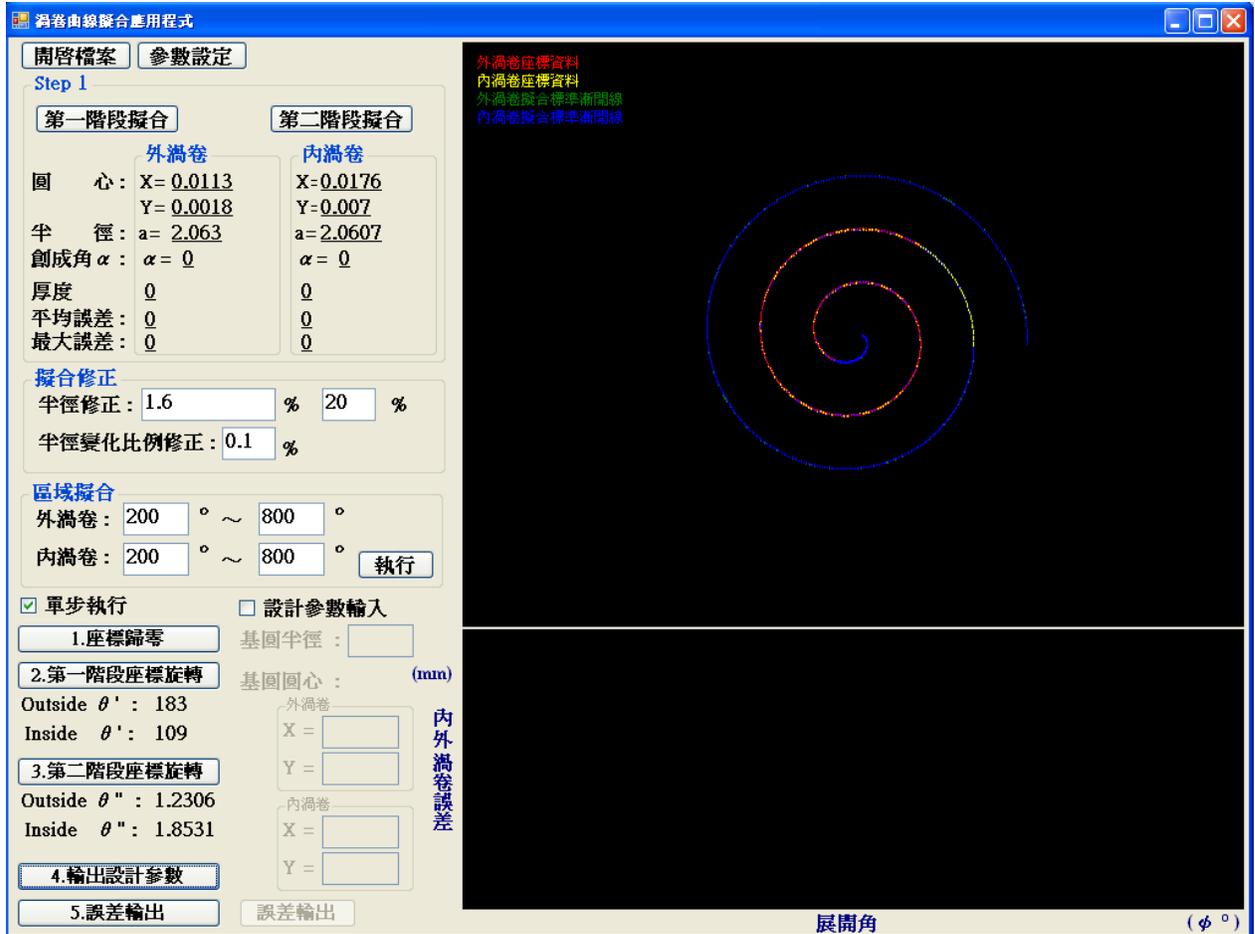


圖 4.12 檔案 0077AA\_Main.csv 兩階段旋轉及擬合半徑微調結果

分別將以下條件之渦卷擬合設計參數及擬合誤差輸出，並對其結果進行分析討論。

1. 沒有區域擬合，如圖(4.13)。
2. 區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)，如圖(4.14)。
3. 區域擬合(擬合範圍:200 度~800 度)，如圖(4.15)。

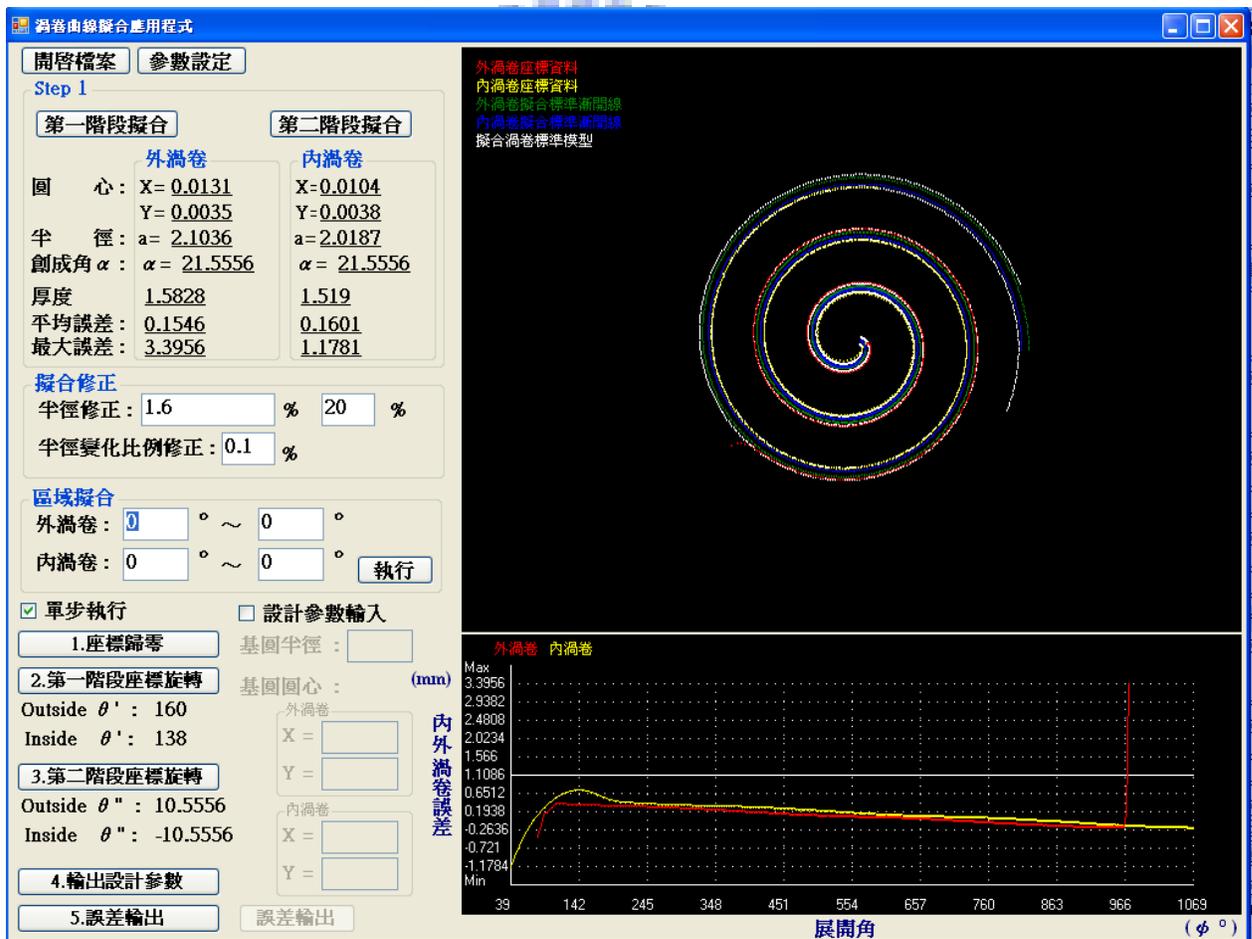


圖 4.13 檔案 0077AA\_Main.csv 沒有區域擬合之擬合設計參數與擬合誤差

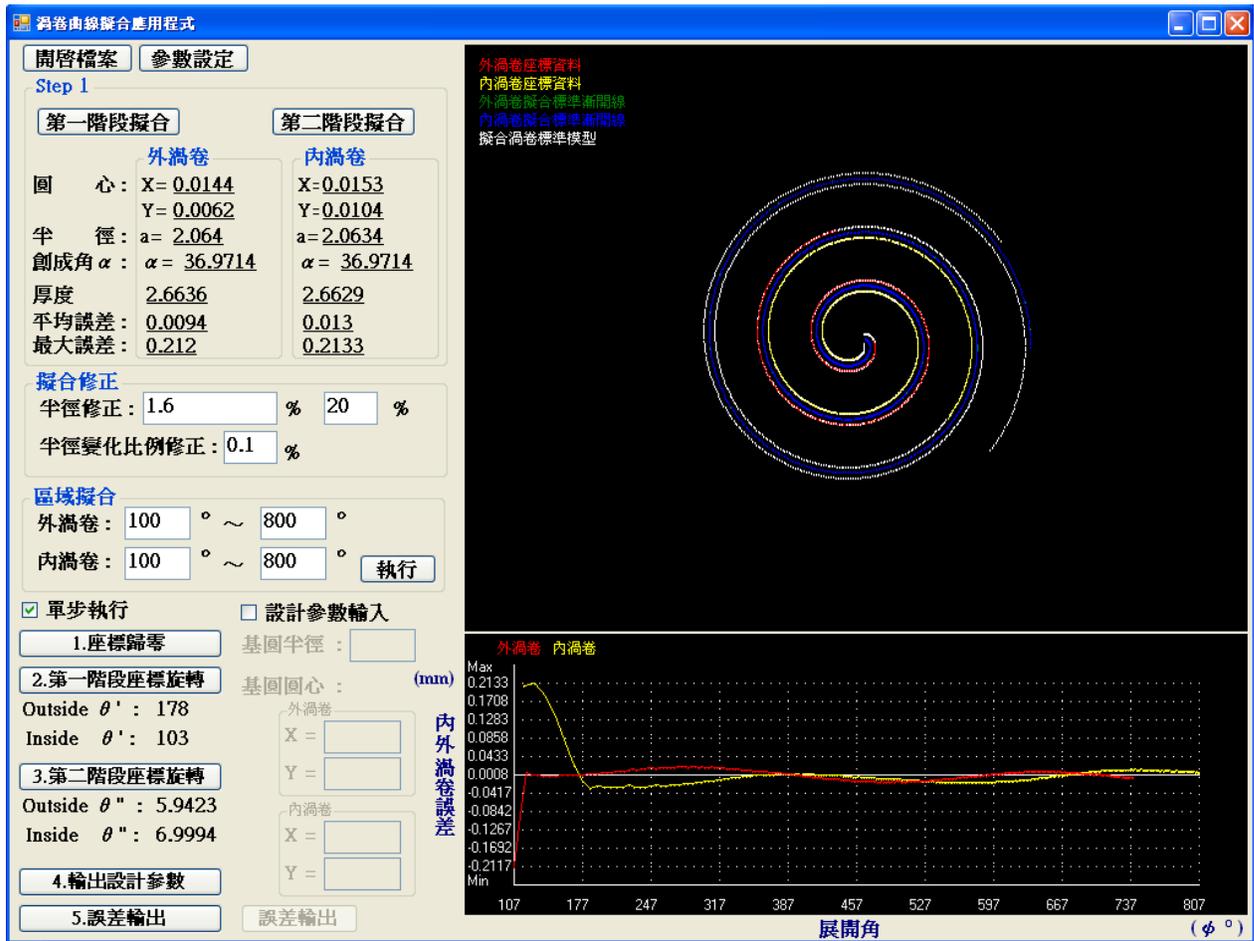


圖 4.14 檔案 0077AA\_Main.csv

區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差

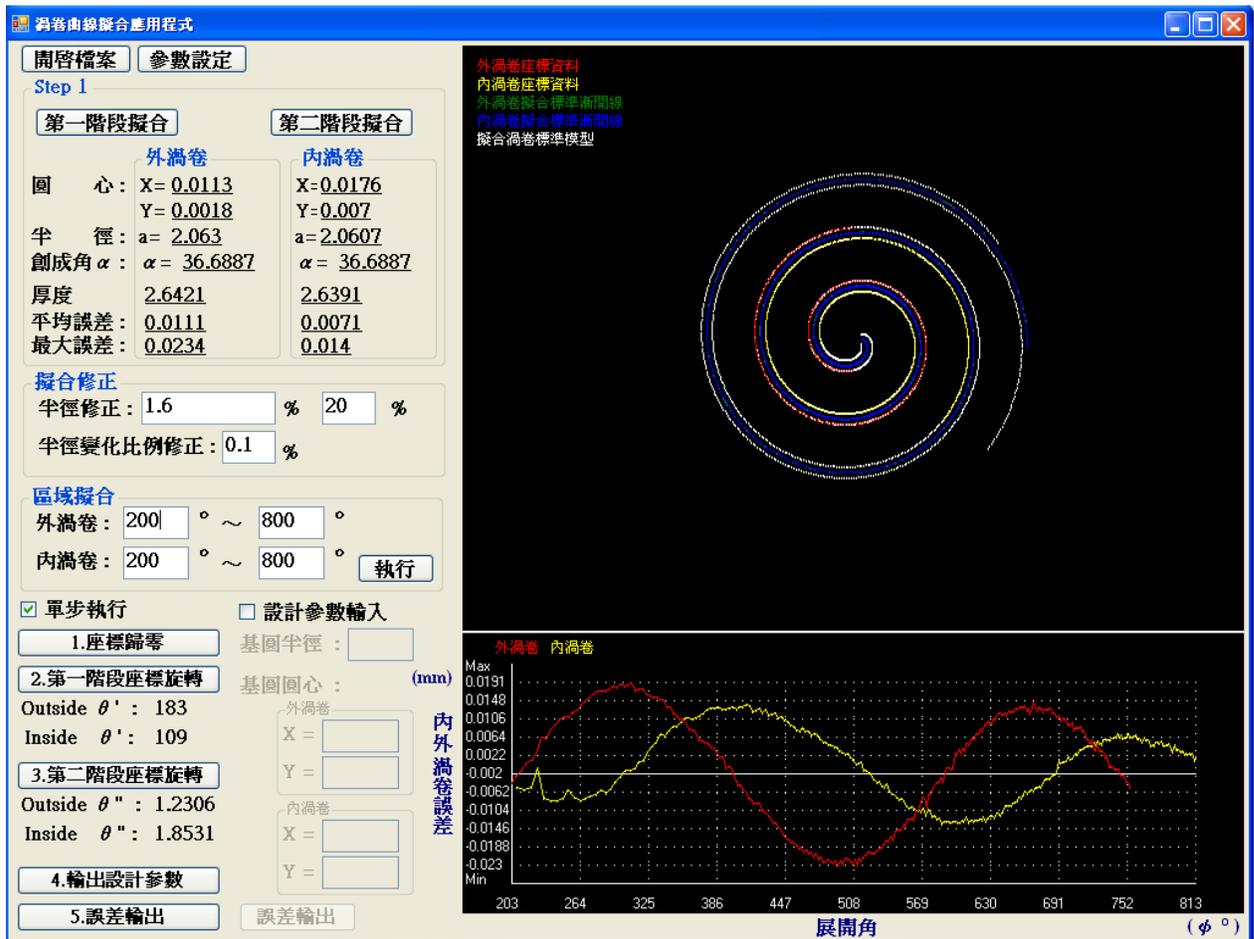


圖 4.15 檔案 0077AA\_Main.csv

區域擬合(擬合範圍:200 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差

由圖(4.13)中可清楚發現，渦卷頭部及尾部與整體渦卷誤差相當大，導致座標旋轉時，旋轉角判定錯誤，無法將渦卷外型座標點資料正確旋轉到擬合標準漸開線上，是故無法計算出正確的擬合設計參數，且擬合誤差值相當大。

在圖(4.14)中，經過初步區域擬合後，雖然渦卷頭部之誤差點仍然存在，但渦卷尾部之誤差點已被消除，對座標旋轉影響變小，已可將渦卷外型座標點資料較正確地旋轉到擬合標準漸開線上，且由平均擬合誤差值可知，擬合設計參數與原設計參數已相當接近。

在圖(4.15)中，繼續縮小區域擬合範圍，使渦卷頭部之誤差點亦被消除，渦卷外型座標點資料能夠更正確地旋轉到擬合標準漸開線上，由平均擬合誤差值及最大擬合誤差值可知，擬合設計參數與原設計參數已趨近相同，雖然其中仍存在擬合誤差值，但這些擬合誤差呈現波形對稱於擬合標準漸開線軸，且具有週期性，所以誤差很可能是由於擬合基圓之圓心偏移，如圖(4.16)所示，或受製造誤差及量測誤差所累加影響造成。若誤差確定由擬合基圓之圓心偏移所造成，可藉由後續所介紹之設計參數輸入，調整擬合基圓之圓心。

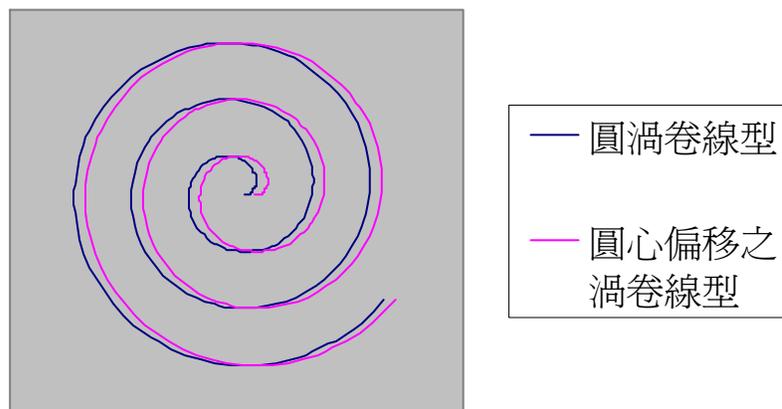


圖 4.16 擬合基圓之圓心偏移示意圖

將圖(4.13)、(4.14)、(4.15) 渦卷擬合設計參數及擬合誤差整理，並與渦卷原設計值做比較，如表(4.2)所示。由表中可發現，區域擬合可提高渦卷曲線擬合的精準度，且是必要的程序。至於區域擬合之範圍，沒有規定可循，以消除較大誤差資料為主要目的，此步驟需仰賴工程師依個案進行判斷。

表 4.2 檔案 0077AA\_Main.csv 渦卷擬合設計參數及擬合誤差分析

資料名稱	基圓半徑 a (mm)	創成角 $\alpha$ (度)	最大擬合誤差 (mm)	平均擬合誤差 (mm)
渦卷設計值	2.062	36.9		
無區域擬合 之外渦卷	2.1036	21.5556	3.3956	0.1546
無區域擬合 之內渦卷	2.0187	21.5556	1.1781	0.1601
區域擬合 (100 度~800 度) 之外渦卷	2.064	36.9714	0.212	0.0094
區域擬合 (100 度~800 度) 之內渦卷	2.0634	36.9714	0.2133	0.0123
區域擬合 (200 度~800 度) 之外渦卷	2.063	36.6887	0.0234	0.0111
區域擬合 (200 度~800 度) 之內渦卷	2.0607	36.6887	0.014	0.0071

## 4.2.2 應用案例測試(二)

開啟三次元量測儀所量測之渦卷外型座標點資料檔案 0900\_Main.csv，並對其進行第一階段曲線擬合，如圖(4.17)。由程式介面中，可輕易發現第一階段曲線擬合點成開放性分散，導致無法進行第二階段曲線擬合。

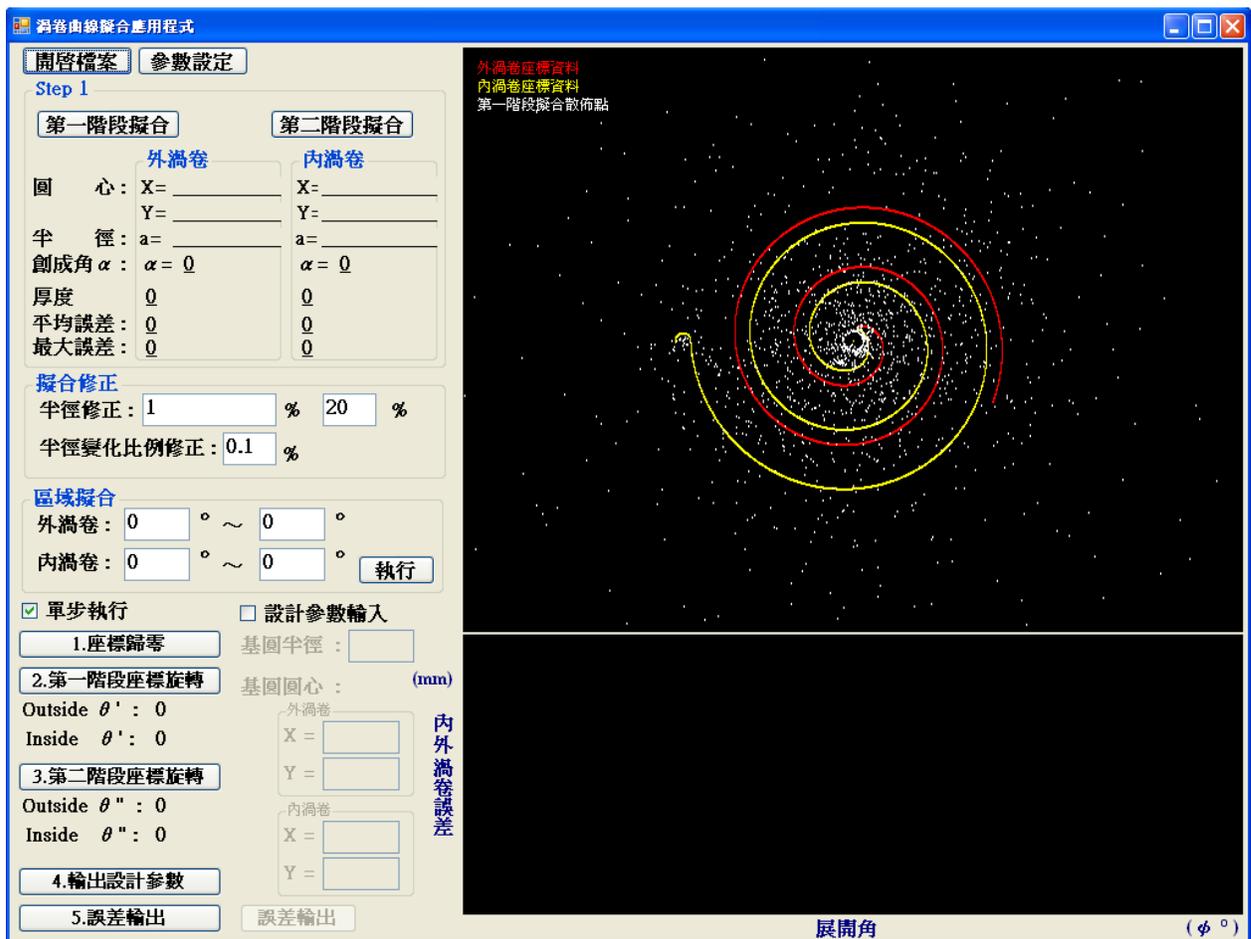


圖 4.17 檔案 0900\_Main.csv 第一階段曲線擬合散佈

由參數設定功能，設定取點方式為每隔三點取點，將渦卷座標點資料做資料簡化處理，重新進行第一、第二階段曲線擬合，由程式介面可知第一階段曲線擬合結果已經大幅度改善，如圖(4.18)所示。

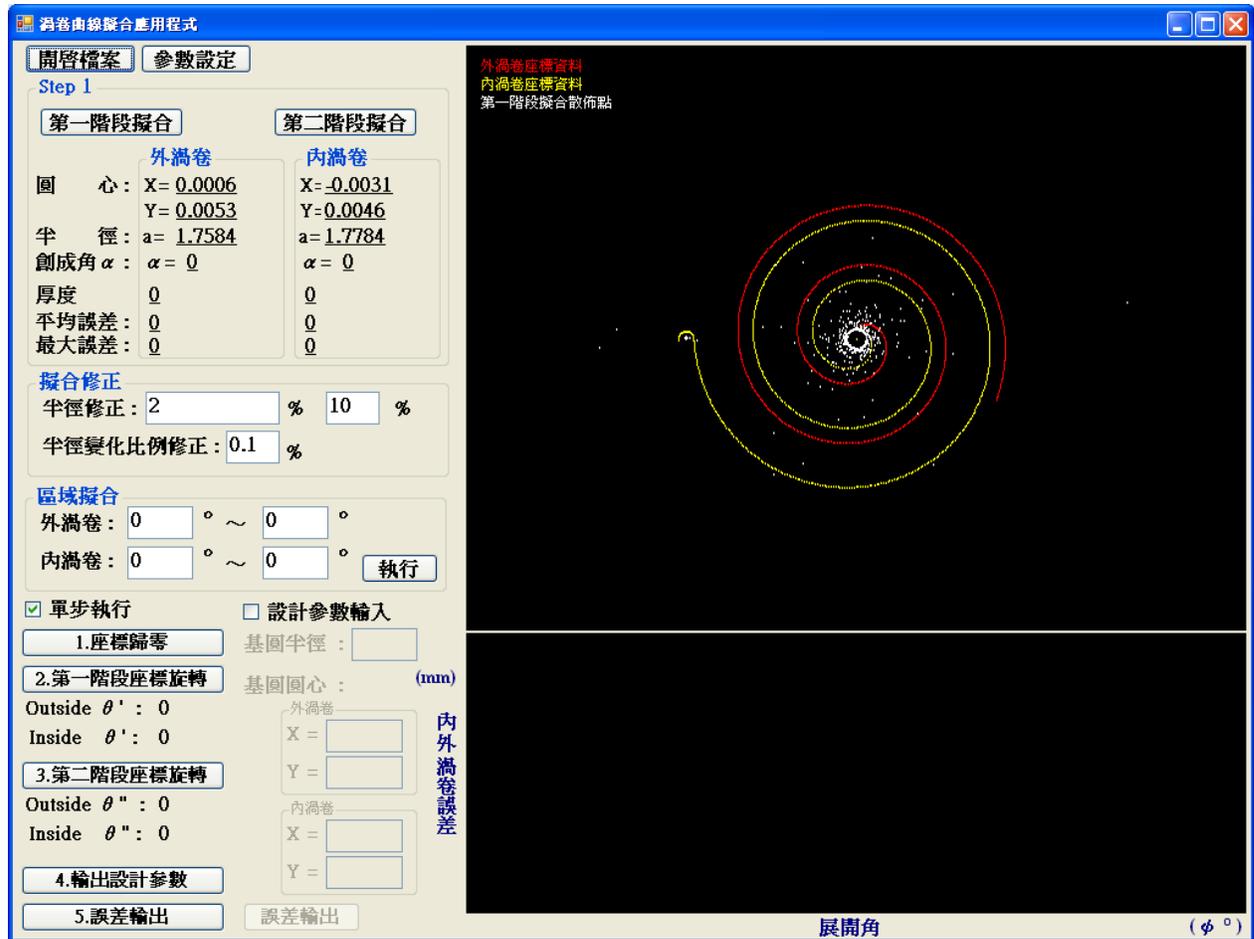


圖 4.18 檔案 0900\_Main.csv 第一、第二階段曲線擬合結果

資料繼續進行區域擬合、座標歸零、第一及第二階段座標旋轉等處理，並分別將以下條件之渦卷擬合設計參數及擬合誤差輸出並對其結果進行分析討論。

1. 隔 3 點取點，沒有區域擬合，如圖(4.19)。
2. 隔 3 點取點，區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)，如圖(4.20)。
3. 隔 3 點取點，區域擬合(擬合範圍:200 度~700 度)，如圖(4.21)。
4. 隔 4 點取點，區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)，如圖(4.22)。
5. 隔 5 點取點，區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)，如圖(4.23)。

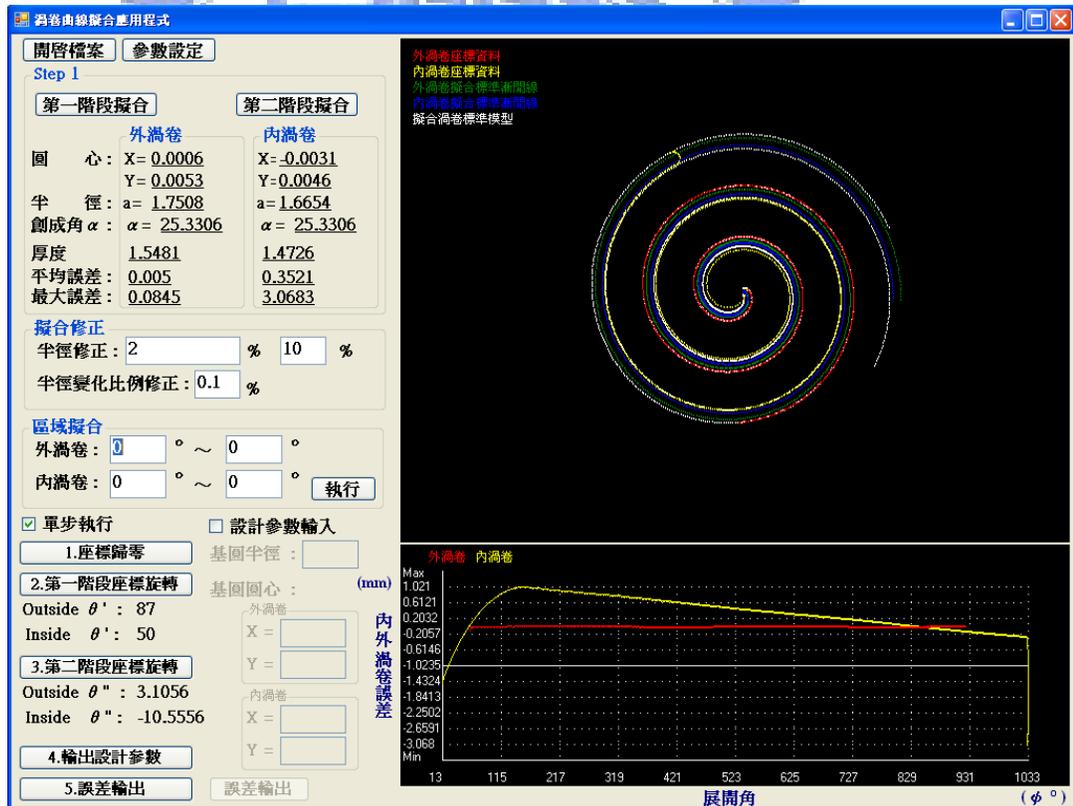


圖 4.19 檔案 0900\_Main.csv

隔 3 點取點，沒有區域擬合之擬合設計參數與擬合誤差

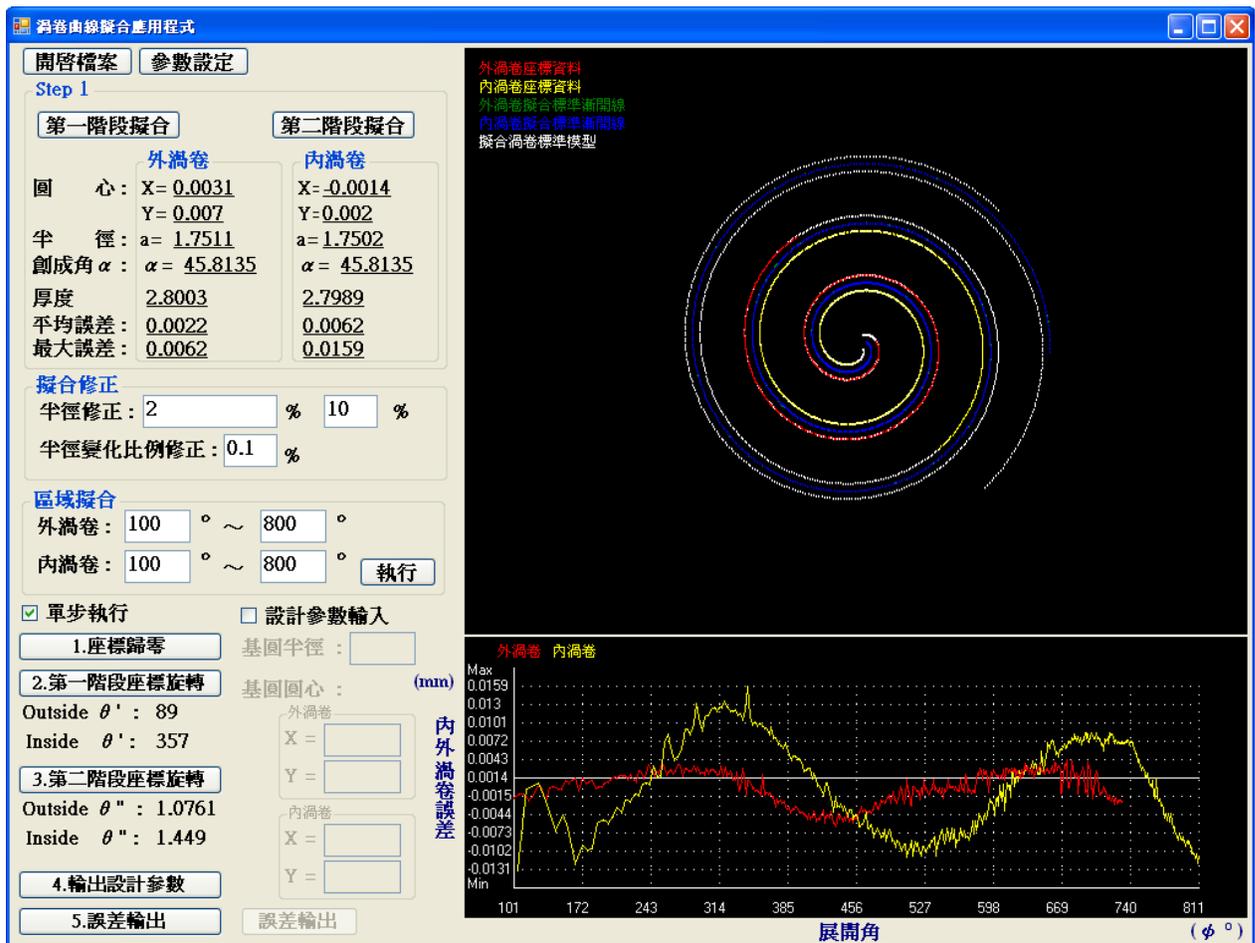


圖 4.20 檔案 0900\_Main.csv

隔 3 點取點，區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差

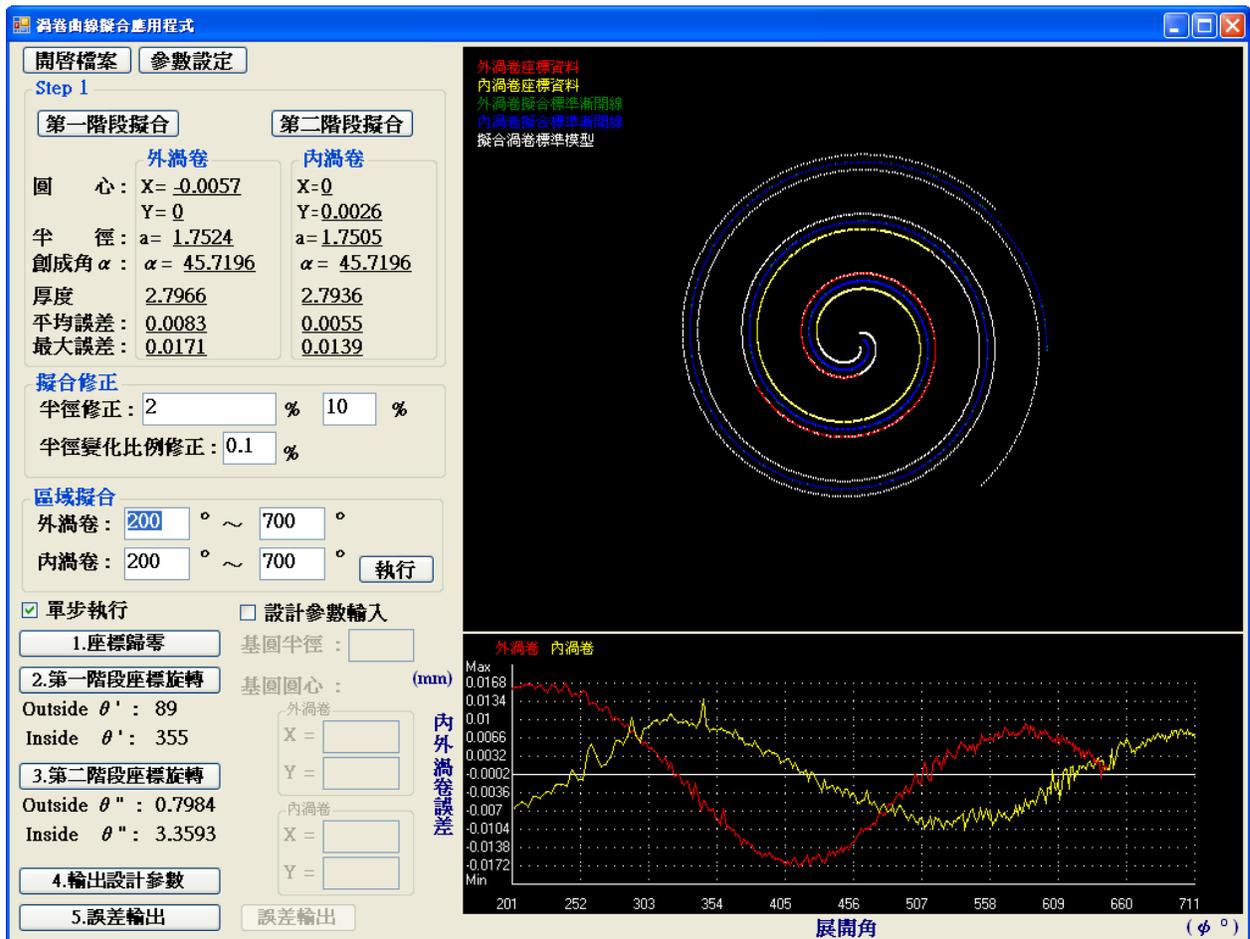


圖 4.21 檔案 0900\_Main.csv

隔 3 點取點，區域擬合(擬合範圍:200 度~700 度)之擬合設計參數與擬合誤差

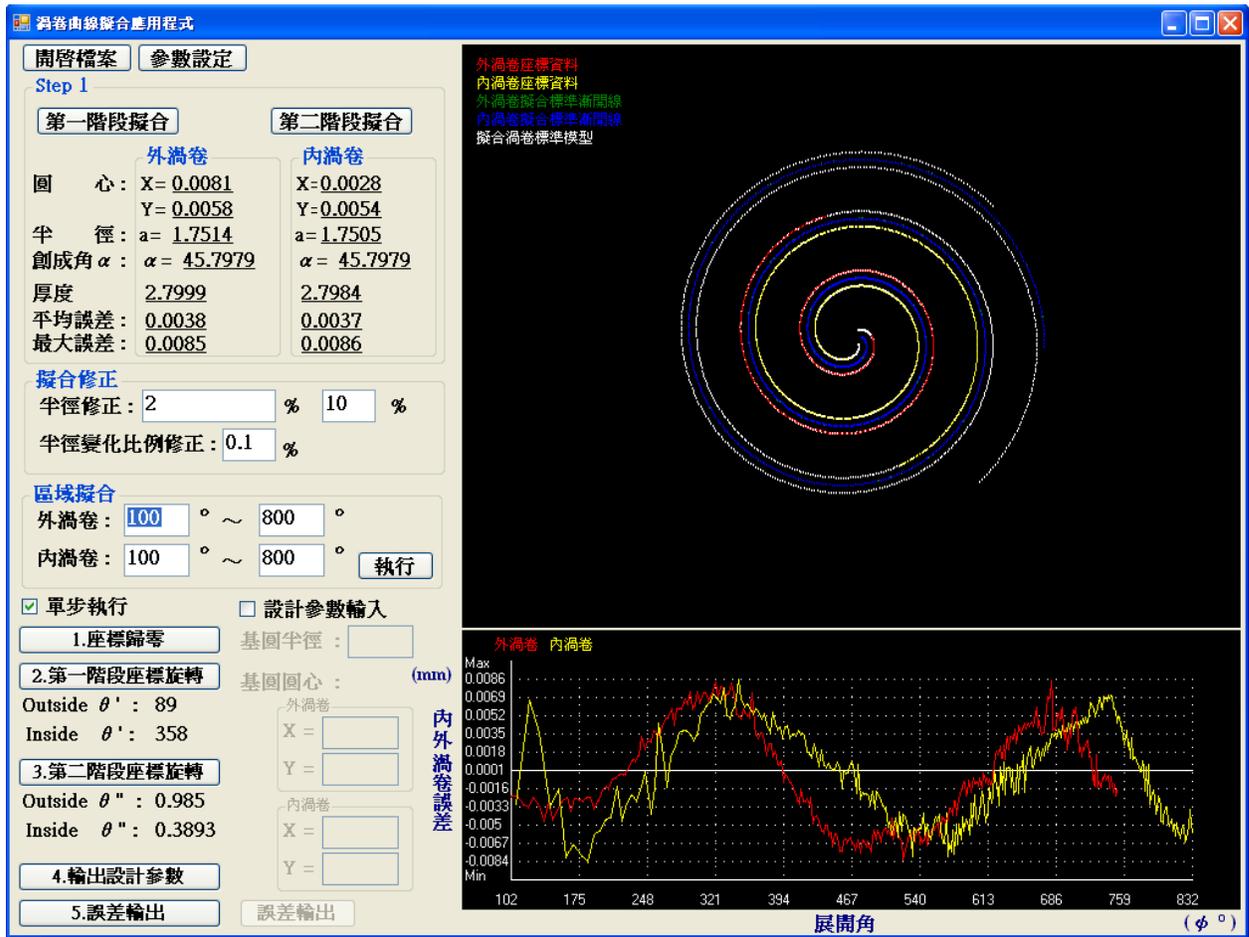


圖 4.22 檔案 0900\_Main.csv

隔 4 點取點，區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差

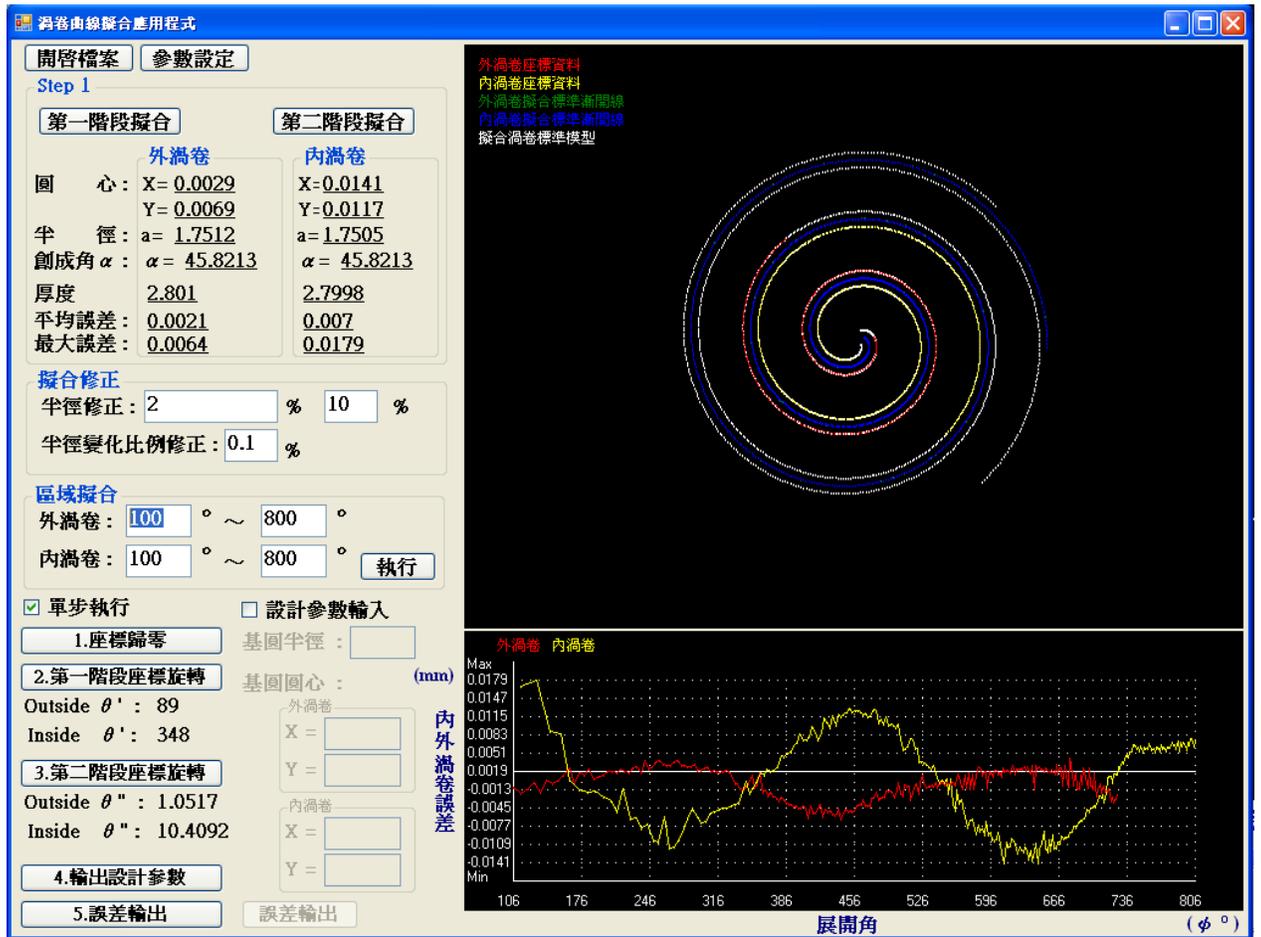


圖 4.23 檔案 0900\_Main.csv

隔 5 點取點，區域擬合(擬合範圍:100 度~800 度)之擬合設計參數與擬合誤差

由圖(4.19)中可清楚發現，內渦卷頭部及尾部座標資料與整體渦卷誤差相當大，而外渦卷卻沒有較大誤差處，是故座標旋轉時，內渦卷座標旋轉角判定錯誤，無法正確旋轉到內渦卷擬合標準漸開線上，而外渦卷已正確旋轉到外渦卷擬合標準漸開線上，但由於創成角是由內、外渦卷座標旋轉角之相對關係產生，故仍無法計算出正確的擬合設計參數。

由圖(4.20)中可清楚發現，內渦卷頭部及尾部座標資料之渦誤差經區域擬合後已消除，是故內、外渦卷皆可正確旋轉到渦卷擬合標準漸開線上，其中外渦卷之最大擬合誤差僅有 0.0062mm，而平均擬合誤差可達到 0.0022mm，小於渦卷製造精度規定的  $5\mu\text{m}$ ，可見其曲線擬合相當精準。

在圖(4.21)中，繼續縮小區域擬合範圍，內、外渦卷皆可正確旋轉到渦卷擬合標準漸開線上，發現雖然內渦卷之最大擬合誤差及平均擬合誤差皆略為下降，但外渦卷之最大擬合誤差及平均擬合誤差卻都升高許多，且內、外渦卷之擬合誤差較圖(4.20)更明顯呈現波形對稱於擬合標準漸開線軸，推論其原因是由於區域擬合範圍縮小，導致擬合之基圓圓心偏移所造成。

在圖(4.22)及圖(4.23)中，分別放大取點範圍到相隔 4 點及相隔 5 點，內、外渦卷仍皆可正確旋轉到渦卷擬合標準漸開線上。

將圖(4.19)、圖(4.20)、圖(4.21)中渦卷擬合設計參數與標準設計參數比較，如表(4.3)，其資料型式皆為間隔 3 點取點。表中區域擬合明顯提升了渦卷擬合參數精準度，且由擬合誤差數據顯示，區域擬合(100 度~800 度)較區域擬合(200 度~800 度)更為精確，可見較小之區域擬合範圍並不會提昇擬合精準度。

表 4.3 檔案 0900\_Main.csv 渦卷擬合設計參數及擬合誤差分析 (一)

資料形式	基圓半徑 a (mm)	創成角 $\alpha$ (度)	基圓圓心 (x, y)	最大擬合誤 差 (mm)	平均擬合 誤差 (mm)
渦卷設計值	1.75	45.8	(0, 0)		
無區域擬合 之外渦卷	1.7508	25.3306	(0.0006, 0.0053)	0.0845	0.005
無區域擬合 之內渦卷	1.6654	25.3306	(-0.0031, 0.0046)	3.0683	0.3531
區域擬合 (100 度~800 度) 之外渦卷	1.7511	45.8135	(0.0031, 0.007)	0.0062	0.0022
區域擬合 (100 度~800 度) 之內渦卷	1.7502	45.8135	(-0.0014, 0.002)	0.0159	0.0062
區域擬合 (200 度~800 度) 之外渦卷	1.7524	45.7196	(-0.0057, 0)	0.0171	0.0083
區域擬合 (200 度~800 度) 之內渦卷	1.7505	45.7196	(0, 0.0026)	0.0139	0.0055

將圖(4.20)、圖(4.22)、圖(4.23)中渦卷擬合設計參數與標準設計參數比較，如表(4.4)，其中資料形式皆為區域擬合(100度~800度)。表中間隔3點取點之外渦卷的擬合誤差雖然最精準，但相對的，間隔3點取點之內渦卷的擬合誤差較大，相較之下，間隔4點取點方式之內外渦卷擬合誤差較為相近，而間隔5點取點之內、外渦卷擬合誤差結果與間隔3點取點相似，相差較大。由於內、外渦卷為獨立擬合分析，是故選取間隔3點取點之外渦卷的擬合參數較為恰當。

表 4.4 檔案 0900\_Main.csv 渦卷擬合設計參數及擬合誤差分析 (二)

資料形式	基圓半徑 a (mm)	創成角 $\alpha$ (度)	最大擬合誤差 (mm)	平均擬合誤差 (mm)	座標資料 總數
渦卷設計值	1.75	45.8			
間隔 3 點取點 之外渦卷	1.7511	45.8135	0.0042	0.0022	388
間隔 3 點取點 之內渦卷	1.7502	45.8135	0.0159	0.0062	388
間隔 4 點取點 之外渦卷	1.7514	45.7979	0.0085	0.0038	325
間隔 4 點取點 之內渦卷	1.7505	45.7979	0.0086	0.0037	325
間隔 5 點取點 之外渦卷	1.7515	45.7917	0.0064	0.0021	260
間隔 5 點取點 之內渦卷	1.7505	45.7917	0.179	0.007	260

### 4.2.3 案例結果討論

由以上兩案例中得到得下結論：

1. 一般渦卷設計時，基圓半徑之設計最小位數為小數點下兩位(單位為 mm)，創成角之設計最小位數為小數點下一位(單位為度)，兩案例之擬合結果皆與渦卷標準設計參數相當接近。
2. 過密的渦卷座標點資料明顯造成第一階段擬合誤差，必須資料前處理，其最佳取點方式會因為不同渦卷而相異，必須以應用程式介面輸入，並由擬合結果判斷，在本研究案例範圍內中，最佳取點方式為每一度渦卷展開角取一點最為恰當。
3. 區域擬合明顯可刪除渦卷頭部及尾部特殊設計，避免對擬合結果造成影響，在本研究案例範圍內中，最佳區域擬合範圍為 200 度~800 度。
4. 案例(二)之曲線擬合結果明顯較案例(一)精準，可見渦卷座標點資料量測時，取點總數及取點均勻度將直接影響曲線擬合結果。
5. 擬合之基圓圓心偏移會造成擬合誤差且呈現波形對稱。

### 4.3 製造誤差檢測

渦卷在製造過程中，極有可能會因為铣刀刀具磨損…等原因，造成渦卷成品與設計模型之間存在製造誤差，因此，檢測製造誤差並對其加以分析，是渦卷製造程序中相當重要的一環。

在誤差檢測過程中，由於三次元量測儀或影像檢測系統所取得渦卷外型座標資料與標準渦卷模型間，因量測定位點誤差需座標歸零修正，因量測定位角度差異需座標旋轉修正，此與求取渦卷曲線擬合誤差步驟相同。

在渦卷曲線擬合應用程式介面上，加入渦卷設計參數輸入功能，如圖(4.25)所示。分別輸入渦卷設計基圓半徑及基圓中心座標，替代擬合基圓半徑及擬合基圓中心做誤差運算，結果即為渦卷製造誤差，其應用程式運算流程如圖(4.24)所示。

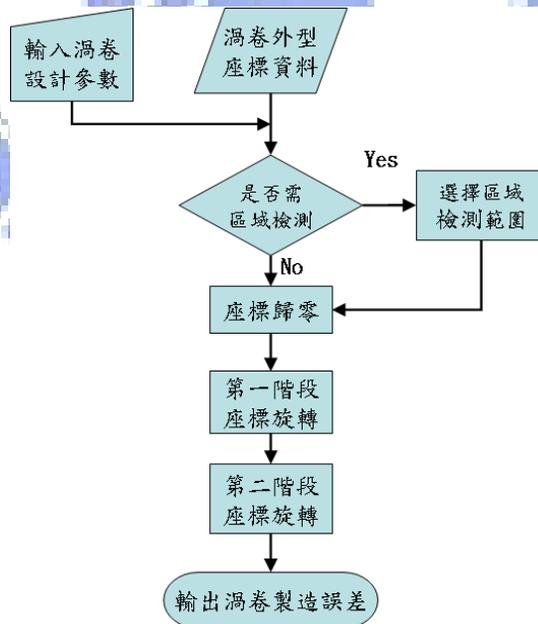


圖 4.24 渦卷製造誤差檢測流程圖

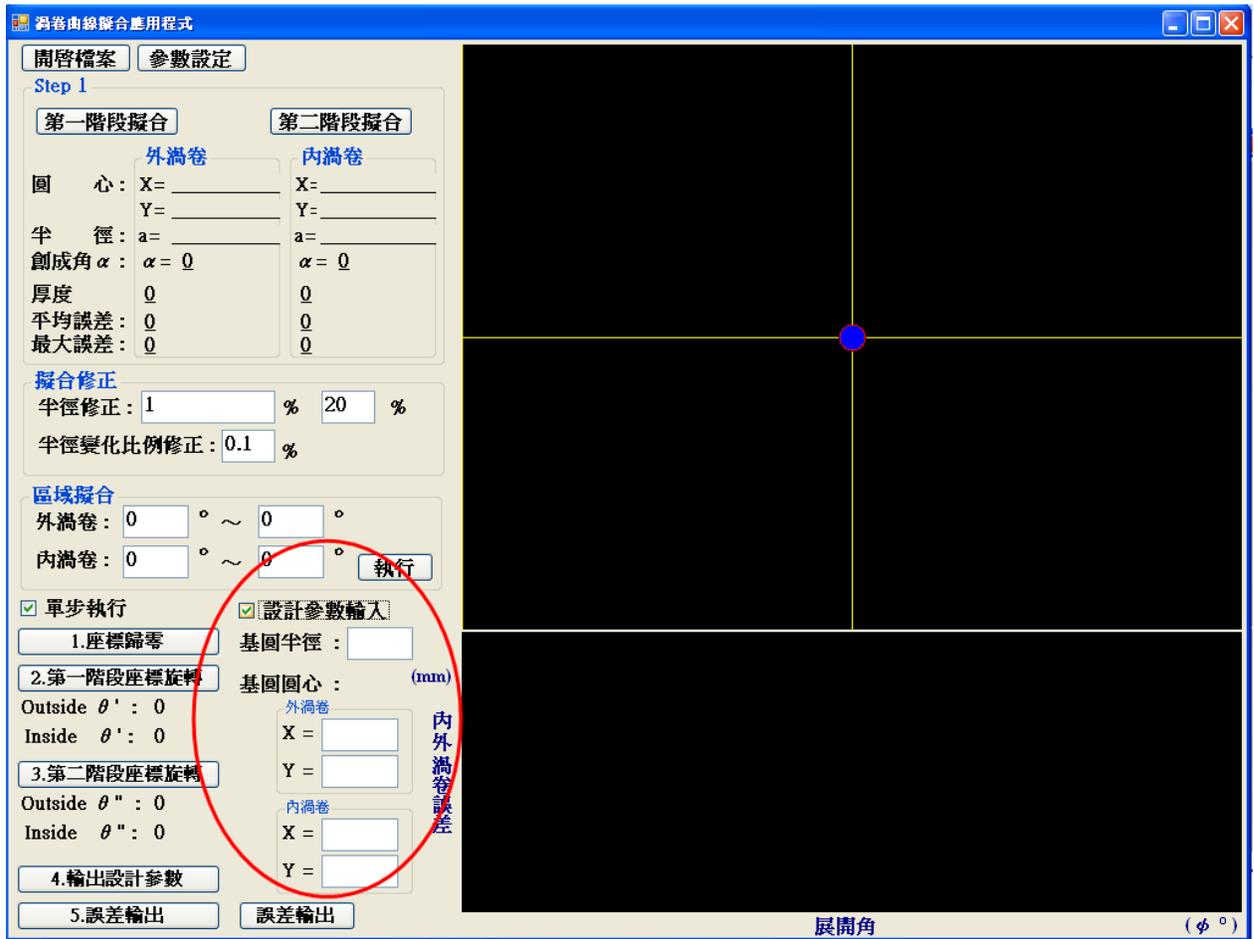


圖 4.25 渦卷製造誤差檢測之設計參數輸入

將 4.1 節中模擬測試之標準渦卷模型外型座標點資料，由渦卷曲線擬合應用程式開啟，並輸入基圓半徑及基圓中心座標，如圖(4.26)所示，由於標準渦卷模型沒有製造及量測誤差產生，故誤差值皆為零。

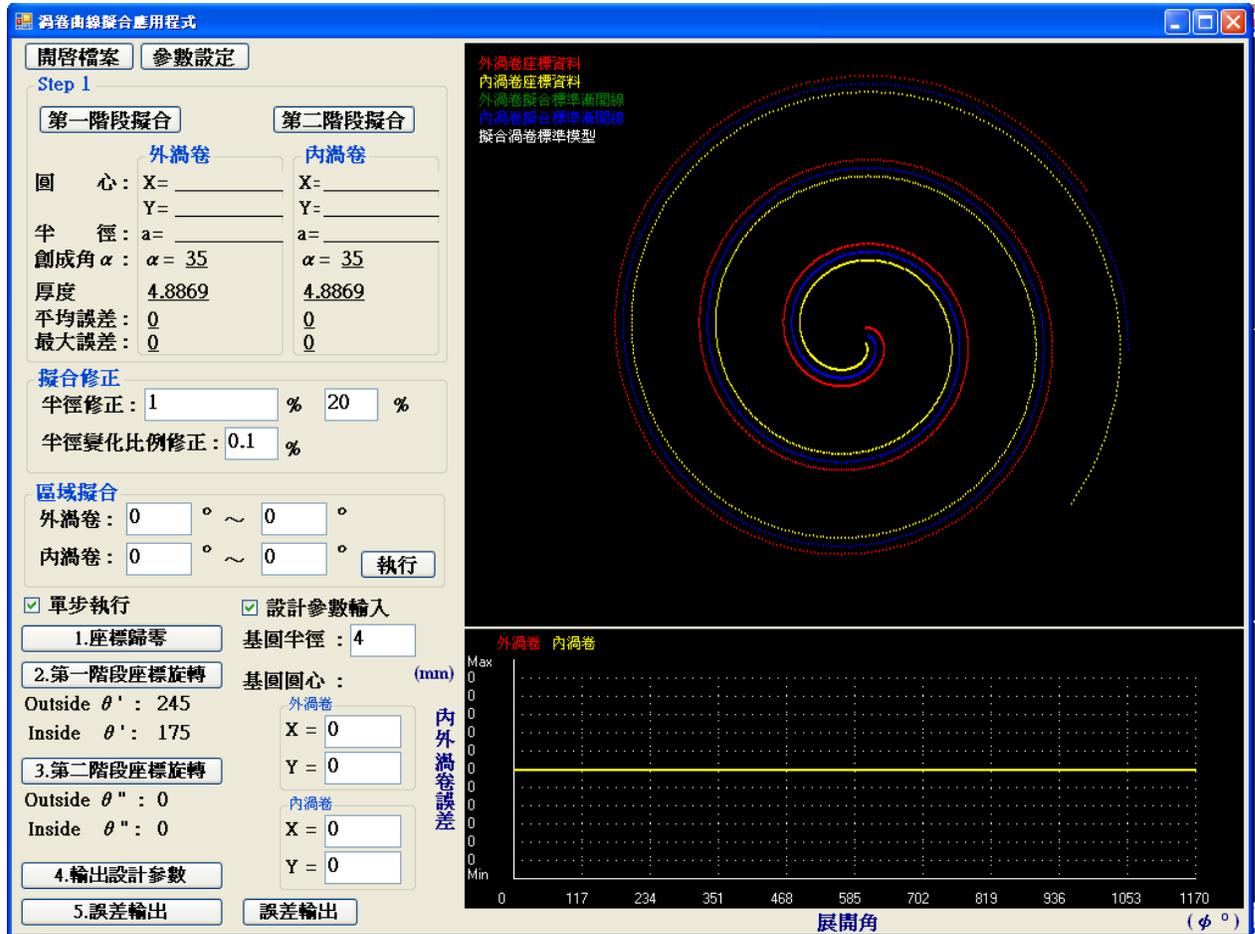


圖 4.26 標準渦卷模型製造誤差檢測

將 4.2 節中應用案例測試渦卷(檔案 0077AA\_Main.csv)之外型座標點資料，由渦卷曲線擬合應用程式開啟，並輸入基圓半徑及基圓中心座標，如圖 (4.27)，由圖中數據明顯發現渦卷頭部之特殊設計，造成渦卷無法準確地進行座標旋轉，故其製造誤差檢測資料並無參考價值。

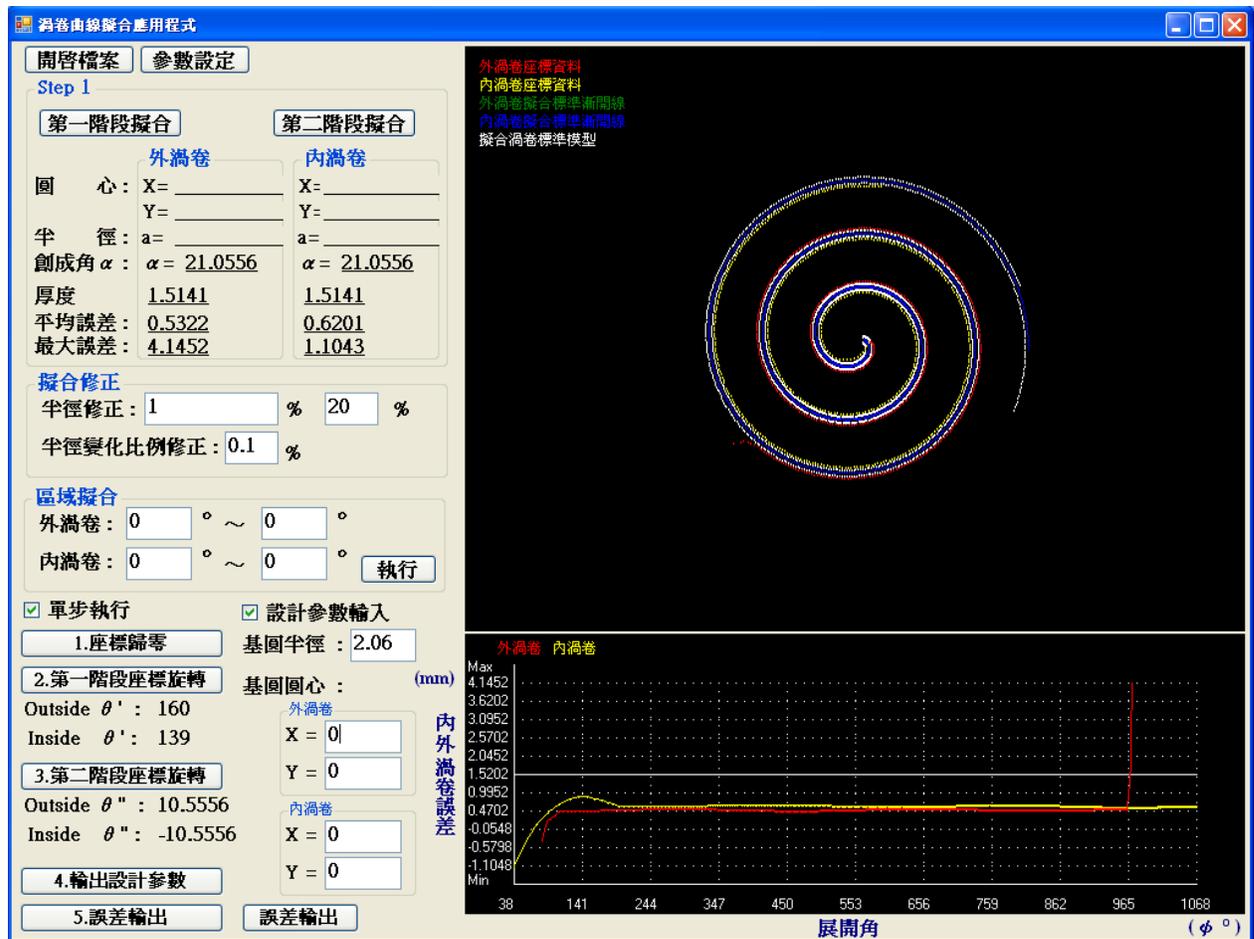


圖 4.27 檔案 0077AA\_Main.csv 製造誤差檢測

利用區域擬合功能，對渦卷(檔案 0077AA\_Main.csv) 之外型座標點資料進行區域切割，重新輸入基圓半徑並調整基圓中心座標，其製造誤差輸出結果如圖(4.28)所示，由圖可知渦卷外型座標點資料已正確地進行座標歸零及座標旋轉校正。

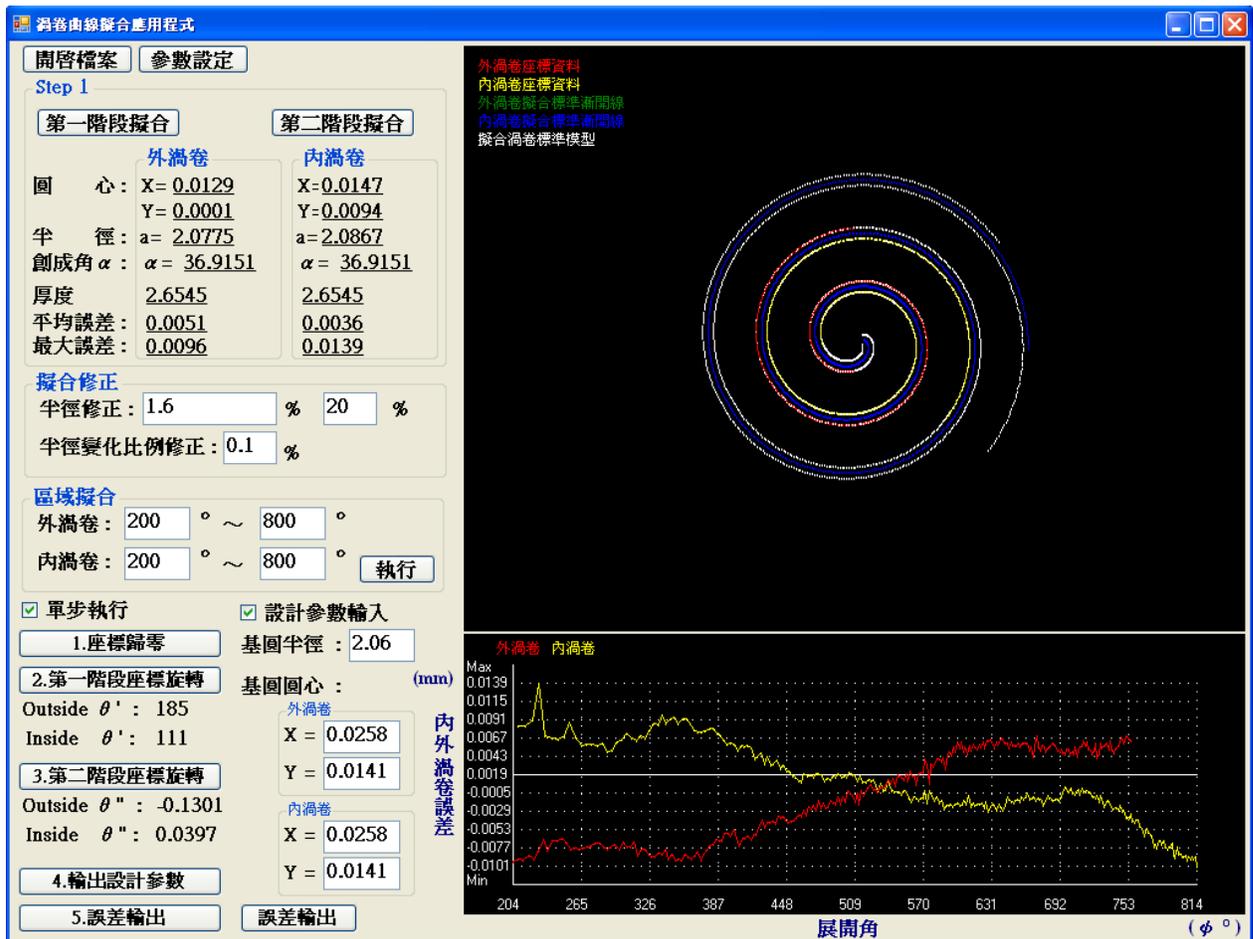


圖 4.28 檔案 0077AA\_Main.csv(範圍:200 度~800 度)製造誤差檢測

由上述之結果，證明利用渦卷曲線擬合誤差模式進行渦卷製造誤差檢測是可行的，其中由應用程式介面調整基圓中心座標是必要的，若直接利用程式微調基圓中心座標計算製造誤差，其結果恐過於理想化(例如：內渦卷之製造誤差相當微小，但外渦卷之製造誤差由於基圓中心偏移，而呈現波形分佈)，故由人工在應用程式介面調整基圓中心，並藉由執行者判斷其內、外渦卷值之製造誤差相對關係，決定渦卷基圓中心座標較為恰當。

由於應用程式介面調整基圓中心座標可避免基圓中心偏移，故將應用案例測試渦卷(檔案 0077AA\_Main.csv)之區域擬合(擬合範圍:200 度~800 度)結果進行基圓中心座標調整，並重新輸出擬合誤差，其結果如圖(4.29)及圖(4.30)所示。



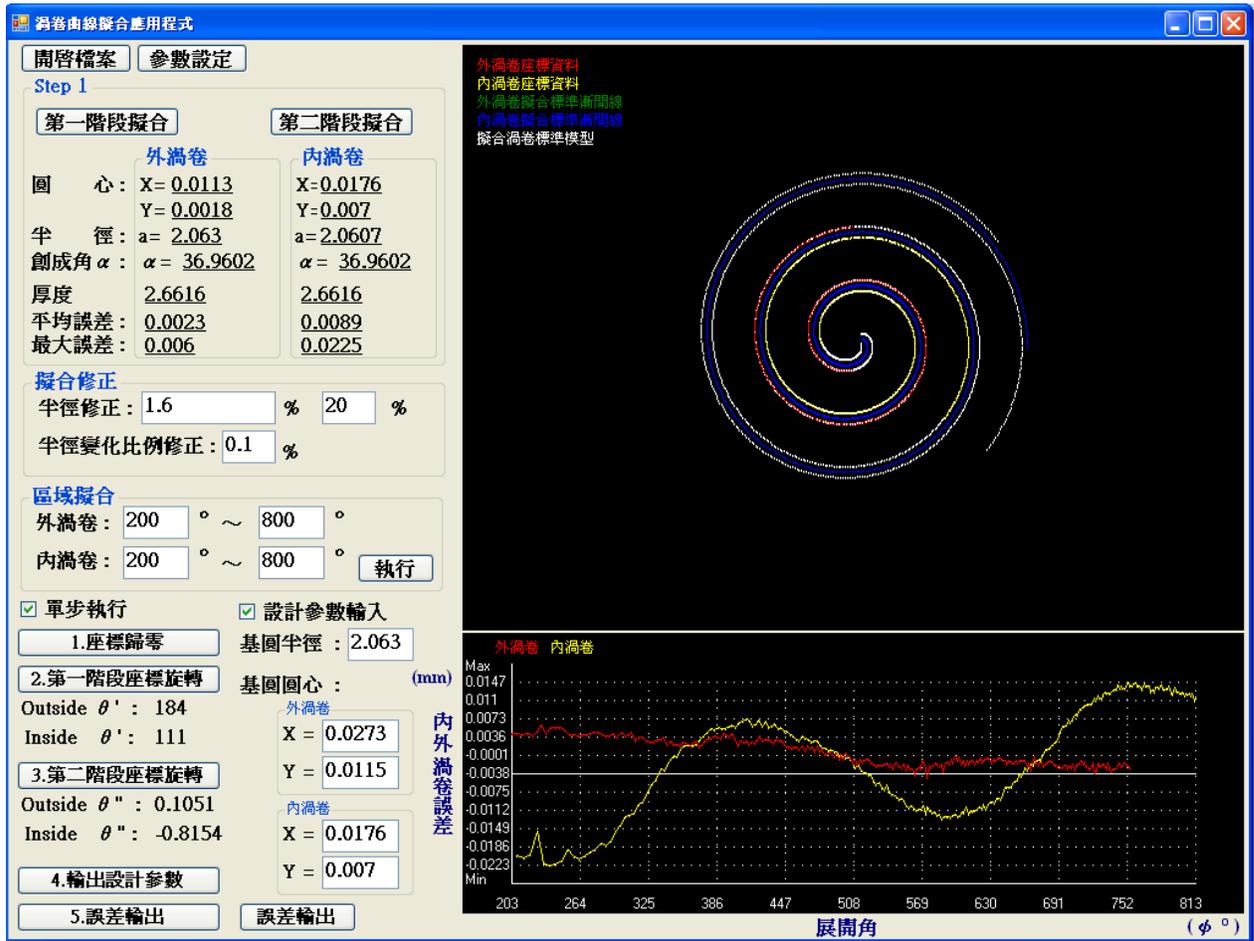


圖 4.29 檔案 0077AA\_Main.csv

區域擬合(範圍:200度~800度)外渦卷基圓圓心微調之擬合誤差

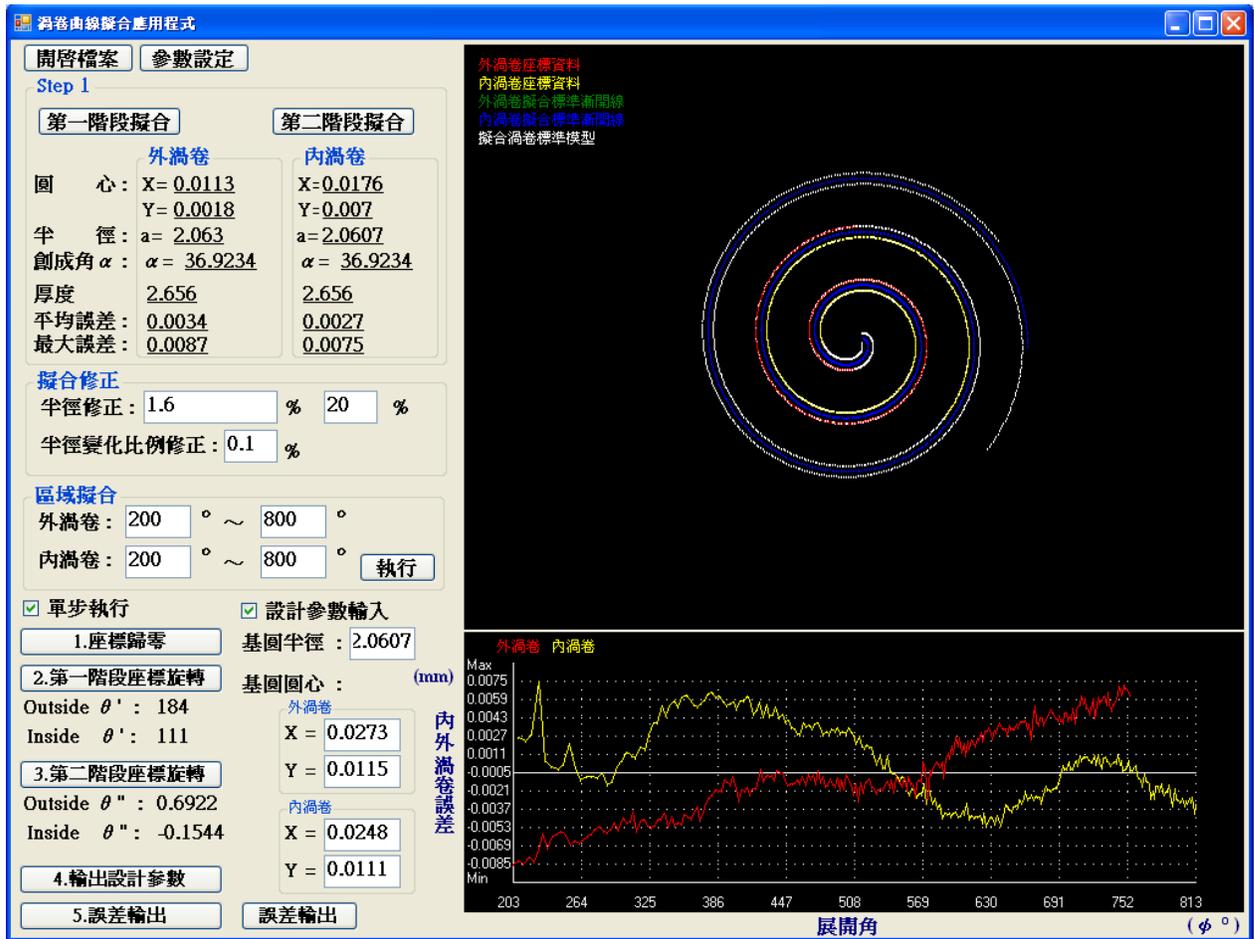


圖 4.30 檔案 0077AA\_Main.csv

區域擬合(範圍:200度~800度)內渦卷基圓圓心微調之擬合誤差

將案例測試渦卷(檔案 0077AA\_Main.csv)區域擬合(擬合範圍:200 度~800 度)基圓中心座標調整之擬合誤差結果與其製造誤差檢測結果比較,如表(4.5)所示。

表 4.5 檔案 0077AA\_Main.csv 擬合誤差及製造誤差檢測結果比較

資料形式	最大擬合誤差 (mm)	平均擬合誤差 (mm)
外渦卷之擬合誤差	0.006	0.0023
內渦卷之擬合誤差	0.0075	0.0027
外渦卷之製造誤差	0.0096	0.0051
內渦卷之製造誤差	0.0139	0.0036

由表(4.5)可知,渦卷曲線擬合之最大誤差及平均誤差皆小於渦卷製造擬合檢測結果,故得以下結論:

1. 渦卷曲線擬合誤差為渦卷座標點量測資料與擬合渦卷標準模型間之誤差,雖然受製造及量測之精準度所影響,但並沒有絕對關係。
2. 渦卷製造誤差檢測結果為渦卷座標點量測資料與渦卷設計標準模型間之誤差,包含製造誤差及量測誤差,其之間為加乘關係,故惟有由精準座標量測系統所產生之座標資料才能精確進行製造誤差檢測,在本研究中所使用的量測儀器為三次元量測儀,配合電腦自動追跡,以避免人工量測所造成之誤差,量測誤差可視為極小。

## 第五章 結論與未來發展方向

### 5.1 結論

本研究主要在建立渦卷設計的逆向工程，及其電腦輔助應用程式，依據現有的渦卷實物外型座標點資料，建構出相對應的標準模型，以達到分析渦卷設計參數的目標。本研究著眼於推導渦卷外型擬合理論，並將其撰寫為應用程式，透過兩階段曲線擬合及兩階段座標旋轉，求得各項渦卷設計參數。

經由應用程式及測試結果數據可驗證，本研究所提曲線擬合理論及運算分析為可行之方法。在渦卷外型座標點資料曲線擬合分析及製造誤差檢測上，可獲致以下結論：

1. 透過理論簡易的兩階段曲線擬合及兩階段座標旋轉運算，可精準分析渦卷設計參數。
2. 以曲線擬合理論所建立的應用程式，可快速的分析出原始渦卷設計參數，並建立模型，供設計人員參考。
3. 利用資料前處理，可避免渦卷外型座標點資料過於密集，取得最佳間距進行擬合，但過於稀疏的外型座標點資料去無從修正，故量測資料數必須達一定基數。
4. 對區域化的渦卷外型座標點資料進行區域擬合，可避免渦卷頭部及尾部特殊設計對渦卷曲線擬合所造成得誤差。

5. 利用渦卷曲線擬合誤差中座標平移及旋轉方式，並直接由應用程式介面輸入渦卷設計參數，可精確檢測渦卷製造誤差。
6. 藉由應用程式介面調整擬合基圓圓心，可修正擬合基圓圓心偏移所造成之波形誤差分佈。
7. 當透過三次元量測儀或非接觸式的影像檢測系統取得渦卷外型座標點資料時，量測的精準度及量測間隔均勻度將影響曲線擬合結果，精準量測及均於間隔將有助於曲線擬合理想化。

## 5.2 未來發展方向

因為本研究之最終目的為，提供渦卷設計者快速及準確之逆向工程曲線擬合系統，與渦卷製造誤差檢測技術，為達成目標尚須努力朝下列方向研究發展：

1. 將目前只適用於標準漸開線渦卷的曲線擬合理論發展至延伸漸開線渦卷。
2. 研發區域擬合多重化，可針對渦卷各部位同時進行曲線擬合，以便對渦卷頭部及尾部之特殊設計分析。
3. 利用自動資料前處理判斷，取代現今介面輸入調整。
4. 應用程式可由渦卷製造誤差檢測結果自動判別製造誤差產生因素。
5. 將曲線擬合應用程式與座標量測系統、CAD/CAM 系統結合，一貫作業完成渦卷逆向工程設計。

## 參考文獻

1. Creux, L., "Retary Engine" United State Patent Office No. 801,182. Patented OCT. 3.1905.
2. 渦卷設計參數曲線擬合應用程式，工研院。
3. 森下悅生、杉原正浩，「漸開線渦卷式壓縮機幾何理論」，吳慶輝譯，機械月刊，第十六卷第八期，82-92 頁，民國 78 年 8 月
4. 陳俊榕，「延伸漸開線形渦卷式壓縮機渦卷之應力與應變分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國 82 年。
5. 賴慶峰，「延伸漸開線形渦卷曲線之最佳化研究」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國 83 年。
6. 石伊蓓，「延伸漸開線渦卷密合度的最佳化設計」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國 84 年。
7. 李運仁，「螺旋式與渦卷式壓縮機之幾何暨熱流與動力分析」，國立台灣大學機械工程研究所，博士論文，民國 85 年。
8. 林坦蔚，「鋁合金渦卷式壓縮機渦卷之應力與動力分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國 91 年。
9. Chapra, S. C., Canale, R. P., "Numerical Method for Engineers With Software and Programming", 4E, McGraw-Hill Companice, (2002).
10. Landau, U., "Estimation of a circular arc center and its radius", Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol. 38, pp. 317-326, (1987).

11. Thomas, S.M., Chan, Y.T., “A simple approach for the estimate of circular arc center and its radius” , Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol.45, pp.362-370, (1989).
12. Gerald, C. F., Whertley, P. D., “Applied Numerical Analysis,” 3<sup>rd</sup>.
13. 杜維昌，「平面曲線之多圓弧近似法」國立清華大學資訊科學研究所博士論文，民國84年。
14. Bookatein, F.L. , “Fitting conic sections to scattered data “ , Computer Graphics and Image Processing 9, pp.56-71, (1979).
15. Joseph, S.H., “Unbiased least square fitting of circular arcs “ , GVGIP:Graphical Models and Image Processing, Vol. 456, pp.424-432, (1994).
16. 王銀添博士“製造業自動化專題-機械人學”  
<http://edurnfg.ie.nthu.tw/all/thu2>.
17. Bukac, H., “The theory of scroll profile “,International Compressor Engineering Conference at Purdue, July 17-20, (2006).