

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法

Co-rotational formulation for the triangular plane
element with drilling degrees of freedom

研究生：林育丞

指導教授：蕭國模 博士

中華民國九十七年九月

具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法
Co-rotational formulation for the triangular plane element
with drilling degrees of freedom

研究生：林育丞

Student：Yu-Cheng Lin

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學
機械工程學系
碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

September 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年九月

具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法

研究生：林育丞

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究提出一個具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法，本方法可以用來分析具大旋轉但小應變之二維平面的幾何非線性問題。本研究採用的元素為 3 節點 18 個自由度的 QST (quadratic strain triangle) 元素，該元素的節點參數為兩個節點位移分量、一個節點旋轉及三個節點應變分量，節點應變是定義於一個剛接在該節點的基礎座標上。元素的變形及方程式都是定義於一個建立在當前元素變形位置的元素座標上。本研究提出一個元素的運動過程，以決定元素在當前變形位置及當前元素座標上的節點參數值。

本研究以文獻上常用的線性例題探討本研究採用之元素的性能，同時探討不同的邊界條件及負荷型態對於線性解之收斂速率及精確度的影響。

本研究採用基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc-length control)法的增量迭代法來解非線性平衡方程式。本研究以數值例題說明本文提出的方法的正確性及功效。

Co-rotational formulation for the triangular plane element
with drilling degrees of freedom

Student : Yu-Cheng Lin

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT



A co-rotational formulation of triangular plane element with drilling degrees of freedom is presented for the nonlinear analysis of two-dimensional plane problems with large rotations but small strains. The element employed here to implement the present method is a 3-node quadratic strain triangle (QST) element. The element nodal parameters are chosen to be two components of nodal displacement vector, one nodal drilling rotation, and three nodal strain components. The nodal strains are defined in a nodal base coordinates which is rigidly tied to the corresponding node. Element deformations and element equations are defined in terms of element coordinates which are constructed at the current configuration of the element. A motion process of the element is proposed to determine the values of the element nodal parameters corresponding to the current deformation of the element in the current element coordinates.

Benchmark examples in the literature for linear analysis are studied to investigate the performance of the employed element. The effects of boundary conditions and load types on the convergence rate and accuracy of solution are

also investigated. Numerical results show that the performance of the QST element employed here is excellent.

An incremental-iterative method based on Newton-Raphson method and arc-length control method is used for solving nonlinear equilibrium equations. Numerical examples are studied to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年碩士班期間的指導與教誨，使本論文得以順利的完成。老師在研究上嚴謹的態度及日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的謝意與敬意。感謝蔡佳霖老師、蔣長榮老師及葉孟考老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝蔡明旭、劉峰成、楊水勝、黃孝衡學長的照顧，同學顏宏儒以及學弟周裕淳在學業上的砥礪與成長。

感謝父母親等關心我的朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母以及所有關心我的人。



目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iv
目錄	v
表目錄	vii
圖目錄	viii
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	5
2.1 基本假設	5
2.2 座標系統	5
2.3 三角平面元素的變形描述	6
2.4 元素節點內力與元素剛度矩陣	9
2.5 座標系統轉換	11
2.6 元素節點變形參數的決定方法	13
2.7 系統平衡方程式與收斂準則	14
第三章 數值計算方法與程序	16
3.1 增量迭代法	16
3.2 弧長控制法	18
3.3 數值程序	18
第四章 數值分析與結果	21
4.1 線性分析	21
4.1.1 懸臂梁受到彎矩作用(線性分析)	21
4.1.2 懸臂梁受到剪力作用(線性分析)	23
4.1.3 Cook 例題	24

4.1.4 簡支梁受到兩端彎矩作用(線性分析).....	25
4.2 幾何非線性分析.....	25
4.2.1 簡支梁受到兩端彎矩作用(非線性分析).....	25
4.2.2 懸臂梁受到彎矩作用(非線性分析).....	26
4.2.3 懸臂梁受到剪力作用(非線性分析).....	29
4.2.4 直角構架受到端點剪力作用.....	30
4.2.5 半圓環受到單點集中力作用.....	31
第五章 結論與展望.....	32
5.1 結論.....	32
5.2 未來研究方向.....	33
參考文獻.....	34
附錄 A 面積座標.....	70
附錄 B 不完整三階埃爾米特元素的形狀函數及其微分.....	73
附錄 C 等效節點外力.....	75



表目錄

表 4.1	懸臂梁受到彎矩作用下端點 C 的側向位移 V_C	39
表 4.2	懸臂梁受到剪力作用下端點 C 的側向位移 V_C	40
表 4.3	Cook 題目端點 C 的垂直位移 V_C	41
表 4.4	Cook 題目 A 點的最大主應力 $\sigma_{A(\max)}$ 與 B 點的最小主應力 $\sigma_{B(\min)}$	42
表 4.5	簡支梁受到兩端彎矩作用下的中心位移與端點轉角	43



圖目錄

圖 1.1	(a)CST 元素節點位置與節點參數 (b)LST 元素節點位置與節點參數 (c)QST-10/20C 元素節點位置與節點參數	44
圖 2.1	固定總體座標、元素座標與節點基礎座標.....	45
圖 2.2	元素變形示意圖	46
圖 4.1	網格示意圖 (a)4x2x2 網格 (b) 4x1x2 網格	47
圖 4.2	懸臂梁受到彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b) M11 網格 8x2 示意圖 (c)M12 網格 8x2 示意圖 (d)負荷 LNS 示意圖 (e)負荷 M1S 示意圖	48
圖 4.3	懸臂梁受到剪力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 8x2 示意圖 (c)扭曲網格 4x1 ^D 示意圖	49
圖 4.4	懸臂梁受到剪力作用不同網格下在 $X = 12$ 處的應力分佈 (a) σ_x (b) σ_y (c) τ_{xy}	50
圖 4.5	懸臂梁受到剪力作用不同網格下在 $X = 24$ 處的應力分佈 (a) σ_x (b) σ_y (c) τ_{xy}	51
圖 4.6	懸臂梁受到剪力作用不同網格下在 $X = 36$ 處的應力分佈 (a) σ_x (b) σ_y (c) τ_{xy}	52
圖 4.7	Cook 題目 (a)結構尺寸示意圖 (b)2x2 網格示意圖.....	53
圖 4.8	簡支梁受到兩端彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 M41、M42 與 M43 示意圖 (c)負荷 CM、M4V 與 LNS 示意圖	54
圖 4.9	簡支梁受到兩端彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 8x1 示意圖 (c)負荷 LNS 示意圖	

(d)負荷 M4V 示意圖.....	55
圖 4.10 簡支梁受到兩端彎矩(LNS)作用，不同網格下之 無因次負荷位移曲線圖。.....	56
圖 4.11 簡支梁(Mesh 20×1)受到兩端彎矩作用，不同負荷型態下之 無因次負荷位移曲線圖。.....	56
圖 4.12 簡支梁(Mesh 20×1)受到兩端彎矩(LNS)作用，不同蒲松比 下之無因次負荷位移曲線圖。.....	57
圖 4.13 懸臂梁受到彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)M61 網格 8×1 與 8×2 示意圖 (c)M62 網格 8×1 與 8×2 示意圖 (d)負荷 LNS 示意圖 (e)負荷 M2V 示意圖	58
圖 4.14 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層網格下的 $M - U_C$ 曲線圖。.....	59
圖 4.15 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層網格下的 $M - V_C$ 曲線圖。.....	59
圖 4.16 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層網格下的 $M - \theta_C$ 曲線圖。.....	60
圖 4.17 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用， 不同單層及雙層網格下的 $M - U_C$ 曲線圖。.....	60
圖 4.18 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用， 不同單層及雙層網格下的 $M - V_C$ 曲線圖。.....	61
圖 4.19 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用， 不同單層及雙層網格下的 $M - \theta_C$ 曲線圖。.....	61
圖 4.20 懸臂梁($L = 10000$)受到彎矩(LNS)作用，不同網格下之 無因次負荷位移曲線圖。.....	62

圖 4.21 懸臂梁($L = 1000$ 、M61 網格 100×1)受到彎矩作用， 不同負荷型態下之無因次負荷位移曲線圖。.....	62
圖 4.22 懸臂梁($L = 1000$ 、M61 網格 100×1)受到彎矩(LNS)作用， 不同蒲松比下之無因次負荷位移曲線圖。.....	63
圖 4.23 懸臂梁受到剪力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)M71 網格 8×1 示意圖 (c)M72 網格 8×1 示意圖 (d)二次分佈負荷示意圖	64
圖 4.24 懸臂梁受到剪力作用，不同網格下之 無因次負荷位移曲線圖。.....	65
圖 4.25 懸臂梁(M71 網格 20×1)受到剪力作用，不同蒲松比下之 無因次負荷位移曲線圖。.....	65
圖 4.26 直角構架受到端點剪力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 M81 與網格 M82 示意圖	66
圖 4.27 直角構架受到端點剪力作用，不同網格下之負荷位移曲 線圖。.....	67
圖 4.28 半圓環受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格示意圖	68
圖 4.29 半圓環受到單點集中力作用下之負荷位移曲線圖.....	69

第一章 緒論

用有限元素法分析平面應力或平面應變的問題時，最常使用的元素為平面三角形元素或平面四邊形元素，對工程結構進行分割。對任何不規則形狀的平面結構，我們都可以輕易地將其切割成有限的三角形組合，但不一定適合將其切割成四邊形的組合，故三角形元素在文獻上被廣泛的探討及使用。

最早出現的三角形元素為 CST 元素(constant strain triangle element)[1]，其節點數目與節點參數如圖 1.1(a)所示。CST 元素是利用拉格朗日插值法(Lagrange interpolation)將位移場假設為 x 與 y 的一次完整多項式，故在 CST 元素內部的應變及應力都是常數，這通常與實際情況不符，因此使用 CST 元素時，如需較精確的結果通常需要很密的網格。同樣地利用拉格朗日插值法將位移場假設為 x 與 y 的二次完整多項式，可以得出 LST 元素(linear strain triangle element)[2]，其節點數目與節點參數如圖 1.1(b)所示。LST 元素內部的應變與應力都是線性變化，所以精度較 CST 元素佳。同樣地利用拉格朗日插值法將位移場假設為 x 與 y 的三次完整多項式，可以得到 QST 元素(quadratic strain triangle element)[3]，其節點數目與節點參數如圖 1.1(c)所示。根據其節點數目與節點參數，文獻[4]中將其命名為 QST-10/20C 元素。在拉格朗日元素(Lagrange elements)中，隨著位移場多項式的次數增高可以提升精度，但是其元素節點不會單純的位於三角形的頂點上，且節點參數缺少物理上對應的旋轉自由度(drilling degree of freedom)。

節點參數為何需要旋轉自由度？文獻[4]對於加入旋轉自由度的原因提到：改善元素的性能並避免使用到三角形邊上的節點，因為邊上的節點會影響到網格生成，而且在模擬非線性分析與動態分析時較為困難；當三角平面元素與三角板元素疊加時，能滿足物理上一個節點有 3 個旋轉自由度

的要求；三角形元素與殼元素、板元素或是梁元素同時使用時，能使接合簡單化。在有限元素法發展的過程中，有一個積極的目標是如何去創造高性能(high-performance)的元素。文獻[5]中對高性能元素的定義為『簡單的元素在粗糙的網格下卻可以擁有工程上的精度』。至於『簡單的元素』，文獻[5]中的定義為『元素只有位於頂點的節點以及物理上定義的自由度』，一般物理上定義的自由度是指位移和旋轉。

基於上述理由，在 1964 至 1983 年期間，許多人在研究如何在 3 節點的平面三角形元素上加入節點旋轉自由度，希望能得到一個 3 節點 9 個自由度且具節點旋轉自由度的平面三角平面元素，但是都沒有得出可用的元素。一直到 1984 年文獻[6]與 1985 年文獻[7]才成功的得出帶有旋轉自由度 3 節點 9 個自由度的三角形元素。

從 1984 年至今，有許多具旋轉自由度三角形元素被提出[4,6-20]。其中除了文獻[19]的 DLST 元素是 12 個自由度外，其餘的元素都是 3 個節點 9 個自由度的元素。文獻上用來測試具旋轉自由度之三角形元素性能的例題通常有：懸臂梁受彎矩[7]、懸臂梁受端點剪力[3]及 Cook 例題[21](一懸臂梯形平板受端點剪力)。從文獻上的結果可以發現當元素網格很密時，所有元素的結果都差不多，但使用 2×2 的網格分析懸臂梁受彎矩的例題時，僅有文獻[4]中之 OPT 元素有很好的結果。使用 2×2 的網格分析 Cook 例題時，除了文獻[19]的 DLST 元素外，其他元素的結果都不太好。文獻[19]稱 DLST 元素的性能和 LST 元素的性能差不多。由文獻的結果可發現在使用同樣數目的元素網格時，LST 元素的結果比具旋轉自由度之 3 節點 9 個自由度的元素的結果好，這應是合理的，因 LST 元素有 12 個自由度。

QST 元素在很多有限元素法的書上[22-25]都有提到，文獻[4]中將 QST 元素分成 20 個自由度和 18 個自由度兩大類。20 個自由度的 QST 元素之位移場是完整的三次多項式[22]，18 個自由度的 QST 元素之位移場是不完整

的三次多項式[22,26]，QST 元素可以使用不同數目的節點及不同的節點參數[4,23]。文獻上使用 QST 元素分析例題的結果甚為少見，這可能是因為 QST 元素不滿足簡單元素的要求，且現在的趨勢是使用低階元素。但由文獻[26]的例題，可以發現 QST 元素有很好的性能。3 節點 18 個自由度的 QST 元素中有一種的節點自由度為 2 個位移、1 個旋轉及 3 個應變，在文獻[4]中稱其為 QST-3/18RS 元素。廣義的來說，應變也是物理上的自由度，所以該 QST 元素應可稱為高階的簡單元素。因文獻上缺乏用 QST 元素分析例題的結果，故本研究的目的之一為用 QST-3/18RS 元素分析文獻上的例題，以探討其性能。

造成幾何非線性的原因主要為剛體的大位移及旋轉，若用共旋轉法[27]將剛體位移及旋轉從總位移及旋轉中扣除，則剩下的變形位移及旋轉仍為小位移及旋轉。所以若使用共旋轉法，則在線性分析使用的元素可以用在大位移小應變問題之幾何非線性分析。共旋轉法在梁與殼結構的幾何非線性分析已經被廣泛的使用[27-34]，但在平面應變的問題，則很少見到被使用。據本人所知，僅有文獻[35]提出一個 4 節點平面元素的共旋轉推導法，並成功地使用在平面問題的幾何非線性分析。文獻[35]使用的 4 節點元素並不具旋轉自由度。據本人所知，文獻上並沒有具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉法被提出，所以本研究的主要目的是提出一具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法，將 QST-3/18RS 元素應用於平面應變問題的幾何非線性分析，本研究擬採用類似文獻[27]中的共旋轉法來描述 QST-3/18RS 元素的變形，並提出一運動過程來決定當前元素座標的元素節點位移、節點變形角及節點應變。

因文獻上並無現成 QST-3/18RS 元素的形狀函數可以用，本文將在第二章利用文獻[22]中以節點位移及位移的一次微分為節點參數之 QST 元素(文獻[4]中稱其為 QST-3/18G 元素)的形狀函數推導 QST-3/18G 元素的剛度矩

陣，然後推導不同元素節點參數間的轉換關係，再利用不同等效節點參數的轉換關係求出 QST-3/18RS 元素的剛度矩陣及元素的節點內力。本文並將在第二章說明如何使用共旋轉法來決定元素變形參數。在第三章中將介紹本文的數值計算方法及程序。在第四章中將先以線性例題探討 QST-3/18RS 元素的性能，再以非線性例題說明本文提出的共旋轉法及決定元素節點變形參數的方法是可行的。本文也將測試不同的邊界條件、元素網格及元素形狀對於數值結果的影響。



二、理論推導

本章中將提出一個具旋轉自由度(drilling degree of freedom)之三角平面元素(triangular plane element)的共旋轉推導法(co-rotational formulation)，本章中採用文獻[22]中 3 節點 18 個自由度埃爾米特元素(Hermite elements)的形狀函數(shape functions)，但轉換其節點參數，使其具旋轉自由度。在本章將描述元素變形的位移場與節點參數，推導元素節點內力與元素剛度矩陣，亦將提出一個決定元素節點變形參數的方法。

2.1 基本假設

本文中對三角平面元素的變形做如下的假設：

元素的變形位移及旋轉為小位移及小旋轉。

2.2 座標系統

為了描述系統的運動及元素的變形，本文定義了三組座標系統：

(a) 固定總體座標系統(global coordinate system)： $X_i^G (i=1,2)$

如圖 2.1 所示，結構體所有節點的座標、系統的邊界條件與其他座標系統的基底，以及結構的平衡方程式，均在此座標系統中定義。在 X_i^G 座標系統內之座標值以 (X, Y) 表示。

(b) 元素座標系統(element coordinate system)： $x_i^E (i=1,2)$

如圖 2.1 所示，此座標系統是建立在每一個元素變形後的最新位置上，其座標原點為元素節點 1， x_1^E 軸為元素節點 1 與元素節點 2 在元素平面上的連線， x_2^E 軸是在元素平面上垂直於 x_1^E 軸，且朝著元素節點 3 的方向。元素的位移、元素變形、元素節點內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由座標轉換，將其轉換至總體座標系統及基礎座標系統。本文中 ${}^0x_i^E$

表示初始未變形時的元素座標， ${}^I x_i^E$ 表示第 I 個增量迭代收斂後的元素座標， x_i^E 表示當前變形位置的元素座標。在 x_i^E 座標系統內之座標值以 (x, y) 表示。

(c) 節點基礎座標系統(base coordinate system)： $x_{ij}^B (i = 1, 2)(j = 1, 2, 3)$

如圖 2.1 所示，此座標系統的原點是剛接在結構離散後的每一個節點，並與對應的節點一起移動及旋轉。本文中其初始位置與固定總體座標系統一致，節點的應變是在此座標系統中定義。本文中 ${}^0 x_{ij}^B$ 表示元素節點 j 在初始未變形時的節點基礎座標， ${}^I x_{ij}^B$ 表示元素節點 j 在第 I 個增量迭代收斂後的節點基礎座標， x_{ij}^B 表示元素節點 j 在當前變形位置的節點基礎座標。

2.3 三角平面元素的變形描述

本文採用的三角平面元素為文獻[22]中不完整三階埃爾米特元素 (incomplete cubic Hermite element)，其位移場為三次變化，應變場則為二次變化，因此又稱為 QST 元素 (quadratic strain triangle element)。此元素有 3 個節點，每個節點有 6 個自由度，此元素可使用彼此間能互相轉換的不同節點參數。本文中採用的節點參數為節點 j 在元素座標 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量 u_j 、 v_j ，應變分量 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 及逆時鐘方向的旋轉 θ_j 。但為了方便推導，本文在元素推導時使用的節點參數是節點 j 在 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量 u_j 、 v_j 以及 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量分別對面積座標 (area coordinates) ξ 、 η 的微分 $u_{,\xi j}$ 、 $u_{,\eta j}$ 、 $v_{,\xi j}$ 、 $v_{,\eta j}$ ，面積座標的介紹詳見附錄 A。本章中將推導不同節點參數間的轉換關係，再推導元素節點內力及元素剛度矩陣。此元素的位移場可表示為[22]：

$$u = \mathbf{N}_u^t \mathbf{q}_\xi \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_v^t \mathbf{q}_\xi \quad (2.2)$$

$$\mathbf{q}_\xi = \{\mathbf{q}_{\xi 1} \quad \mathbf{q}_{\xi 2} \quad \mathbf{q}_{\xi 3}\} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{N}_u = \{N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad N_3 \quad 0 \quad 0 \\ N_4 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad 0 \quad N_7 \quad 0 \quad N_8 \quad N_9 \quad 0 \quad 0\} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{N}_v = \{0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad N_3 \\ 0 \quad N_4 \quad 0 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad N_7 \quad 0 \quad 0 \quad N_8 \quad N_9\} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{q}_{\xi j} = \{u_j \quad v_j \quad u_{,\xi j} \quad u_{,\eta j} \quad v_{,\xi j} \quad v_{,\eta j}\} \quad (2.6)$$

其中 $u = u(\xi, \eta)$ 、 $v = v(\xi, \eta)$ 分別為在 x_1^E 、 x_2^E 軸的位移分量， \mathbf{N}_u 為對應於 u 的形狀函數， \mathbf{N}_v 為對應於 v 的形狀函數， \mathbf{q}_ξ 為節點參數向量， N_i ($i=1,2,3,\dots,9$) 為面積座標的三次函數，其表示式詳見附錄 B，另外本文中 $\{ \}$ 表行矩陣。

由小變形的假設，元素內任意點的正應變、剪應變及逆時鐘方向的剛體旋轉可表示為[36]：

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (2.9)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) \quad (2.10)$$

因 u 、 v 都是 ξ 、 η 的顯函數，所以 $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 與 $u_{,\xi}$ 、 $u_{,\eta}$ 及 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$ 與 $v_{,\xi}$ 、 $v_{,\eta}$ 的關係可表示成(詳見附錄 A)：

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi x} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi y} \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}_{\xi x} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (2.14)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (2.15)$$

其中 x_j 、 y_j 分別是元素節點 j 在元素座標系統的座標值。

令節點參數向量 \mathbf{q}_x 與 \mathbf{q}_θ 分別為：

$$\mathbf{q}_x = \{\mathbf{q}_{x1} \quad \mathbf{q}_{x2} \quad \mathbf{q}_{x3}\} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q}_\theta = \{\mathbf{q}_{\theta1} \quad \mathbf{q}_{\theta2} \quad \mathbf{q}_{\theta3}\} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{q}_{xj} = \{u_j \quad v_j \quad u_{,xj} \quad u_{,yj} \quad v_{,xj} \quad v_{,yj}\} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{q}_{\theta j} = \{u_j \quad v_j \quad \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \quad \theta_j\} \quad (2.19)$$

其中 $u_{,xj}$ 、 $u_{,yj}$ 、 $v_{,xj}$ 、 $v_{,yj}$ 分別為 $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 、 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$ 在元素節點 j 之值， ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 、 θ_j 分別為 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 、 θ 在元素節點 j 之值。由(2.11)式與(2.12)

式，可求得(2.3)式中 \mathbf{q}_ξ 與(2.16)式中 \mathbf{q}_x 的關係：

$$\mathbf{q}_\xi = \mathbf{T}_{\xi x} \mathbf{q}_x \quad (2.20)$$

$$\mathbf{T}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{R}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{31} & y_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

由(2.7)至(2.10)式可求得(2.16)式中 \mathbf{q}_x 與(2.17)式中 \mathbf{q}_θ 的關係：

$$\mathbf{q}_x = \mathbf{T}_{x\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.23)$$

$$\mathbf{T}_{x\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{R}_{x\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

將(2.20)式與(2.23)式代入(2.1)式與(2.2)式可得：

$$u = \mathbf{N}_u^t \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.26)$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.27)$$

$$\mathbf{T}_{\xi\theta} = \mathbf{T}_{\xi x} \mathbf{T}_{x\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi\theta} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{R}_{\xi\theta} = \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & y_{21}/2 & -y_{21} \\ 0 & 0 & x_{31} & 0 & y_{31}/2 & -y_{31} \\ 0 & 0 & 0 & y_{21} & x_{21}/2 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 & y_{31} & x_{31}/2 & x_{31} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

2.4 元素節點內力與元素剛度矩陣

將(2.26)式、(2.27)式代入(2.7)至(2.9)式可得：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \right\} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^t \\ \mathbf{N}_{v,y}^t \\ \mathbf{N}_{u,y}^t + \mathbf{N}_{v,x}^t \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

其中 $\mathbf{N}_{u,x}^t$ 、 $\mathbf{N}_{u,y}^t$ 、 $\mathbf{N}_{v,x}^t$ 、 $\mathbf{N}_{v,y}^t$ 的表示式詳見附錄 B。在平面應力狀態，等向性線彈性材料的應力應變關係為：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

其中 E 是楊氏模數(Young's modulus)， ν 是蒲松比(Poisson's ratio)。將(2.30)式代入(2.33)式可得：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.36)$$

由虛功原理可得[37]：

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.37)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{\mathbf{f}_{\theta 1} \quad \mathbf{f}_{\theta 2} \quad \mathbf{f}_{\theta 3}\} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{f}_{\theta j} = \{f_{xj} \quad f_{yj} \quad m_{\varepsilon xj} \quad m_{\varepsilon yj} \quad m_{\gamma j} \quad m_j\} \quad (2.39)$$

其中 \mathbf{f}_θ 為對應於 \mathbf{q}_θ 的元素節點內力， f_{xj} 、 f_{yj} 分別為對應於 u_j 、 v_j 的節點力， $m_{\varepsilon xj}$ 、 $m_{\varepsilon yj}$ 、 $m_{\gamma j}$ 分別為對應於 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 的廣義節點力矩， m_j 為對應於 θ_j 的節點傳統力矩， V 為元素體積。由於應變的因次(dimension)與旋轉相同，因此應變所對應的節點力 $m_{\varepsilon xj}$ 、 $m_{\varepsilon yj}$ 、 $m_{\gamma j}$ 應與力矩有相同的因次為一廣義節點力矩，而非應力。將(2.30)式、(2.36)式代入(2.37)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.40)$$

由(2.40)式可得：

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{k}_\theta \mathbf{q}_\theta \quad (2.41)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \mathbf{T}_{\xi\theta}^T \mathbf{k}_\xi \mathbf{T}_{\xi\theta} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{k}_\xi = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (2.43)$$

其中 \mathbf{k}_ξ 、 \mathbf{k}_θ 分別為應於 \mathbf{q}_ξ 、 \mathbf{q}_θ 的元素剛度矩陣。

2.5 座標系統轉換

為了建立結構的平衡方程式，必須將元素節點參數 \mathbf{q}_θ 中的 u_j 、 v_j 轉換到固定總體座標的位移分量， ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 轉換成對應於節點基礎座標的分量，才能將各元素節點內力組合成結構系統節點內力以及將元素剛度矩陣疊加成結構系統剛度矩陣。如圖 2.1 所示，令 X_1^G 軸與 x_1^E 軸的夾角為 α_E ， x_1^E 軸與 x_1^B 軸的夾角為 α_{Bj} 。在元素座標的節點位移 u_j 、 v_j 與在固定總體座標的節點位移之關係式為：

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_E & s_E \\ -s_E & c_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$c_E = \cos \alpha_E \quad s_E = \sin \alpha_E \quad (2.45)$$

其中 U_j 、 V_j 分別為在 X_1^G 、 X_2^G 軸的位移分量。在元素座標的節點應變 ε_{xj} 、 ε_{yj} 、 γ_{xyj} 與在節點基礎座標的節點應變之關係式為[36]：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{A}_{EB} \boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.46)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \left\{ \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \right\} \quad (2.47)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \left\{ \varepsilon_{xj}^B \quad \varepsilon_{yj}^B \quad \gamma_{xyj}^B \right\} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{A}_{EB} = \begin{bmatrix} c_{Bj}^2 & s_{Bj}^2 & -c_{Bj}s_{Bj} \\ s_{Bj}^2 & c_{Bj}^2 & c_{Bj}s_{Bj} \\ 2c_{Bj}s_{Bj} & -2c_{Bj}s_{Bj} & c_{Bj}^2 - s_{Bj}^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$c_{Bj} = \cos \alpha_{Bj} \quad s_{Bj} = \sin \alpha_{Bj} \quad (2.50)$$

其中 ε_{xj}^B 、 ε_{yj}^B 、 γ_{xyj}^B 為對應於節點基礎座標 x_{1j}^B 、 x_{2j}^B 軸的應變分量。節點旋轉 θ_j 無論在元素座標、固定總體座標或節點基礎座標平面其定義都是相同，可表示為：

$$\theta_j = \theta_j^G = \theta_j^B \quad (2.51)$$

其中 θ_j^G 為在固定總體座標的逆時鐘旋轉， θ_j^B 為在節點基礎座標的逆時鐘旋轉。將(2.44)式、(2.46)式、(2.51)式代入(2.17)式可得：

$$\mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{EB} \mathbf{q}_B \quad (2.52)$$

$$\mathbf{T}_{EB} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{EB1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{EB2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{EB3} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{q}_B = \{\mathbf{q}_{B1} \quad \mathbf{q}_{B2} \quad \mathbf{q}_{B3}\} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{R}_{EBj} = \begin{bmatrix} c_E & s_E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_E & c_E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{Bj}^2 & s_{Bj}^2 & -c_{Bj}s_{Bj} & 0 \\ 0 & 0 & s_{Bj}^2 & c_{Bj}^2 & c_{Bj}s_{Bj} & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{Bj}s_{Bj} & -2c_{Bj}s_{Bj} & c_{Bj}^2 - s_{Bj}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{q}_{Bj} = \{U_j \quad V_j \quad \varepsilon_{xj}^B \quad \varepsilon_{yj}^B \quad \gamma_{xyj}^B \quad \theta_j^B\} \quad (2.56)$$

由反梯度法則(contragradient law)[23]及(2.52)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.57)$$

$$\mathbf{f}_B = \{\mathbf{f}_{B1} \quad \mathbf{f}_{B2} \quad \mathbf{f}_{B3}\} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{f}_{Bj} = \{F_{xj} \quad F_{yj} \quad m_{\varepsilon_{xj}^B}^B \quad m_{\varepsilon_{yj}^B}^B \quad m_{\gamma_{xyj}^B}^B \quad m_j^B\} \quad (2.59)$$

其中 \mathbf{f}_B 為對應於 \mathbf{q}_B 的元素節點內力， F_{xj} 、 F_{yj} 分別為對應於 U_j 、 V_j 的節點力， $m_{\varepsilon_{xj}^B}^B$ 、 $m_{\varepsilon_{yj}^B}^B$ 、 $m_{\gamma_{xyj}^B}^B$ 分別為對應於 ε_{xj}^B 、 ε_{yj}^B 、 γ_{xyj}^B 的廣義節點力矩， m_j^B 為對

應於 θ_j^B 的節點傳統力矩。將(2.41)式、(2.52)式代入(2.57)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{k}_B \mathbf{q}_B \quad (2.60)$$

$$\mathbf{k}_B = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{k}_\theta \mathbf{T}_{EB} \quad (2.61)$$

其中 \mathbf{k}_B 是對應於 \mathbf{q}_B 的元素剛度矩陣。

2.6 元素節點變形參數的決定方法

本文中採用增量迭代法解非線性平衡方程式，假設第 I 個位置已知，此處的第 I 個位置，是指第 I 個增量迭代收斂後的平衡位置。 ${}^I \mathbf{x}_j$ 為元素在第 I 個位置的元素座標， ${}^I \mathbf{X}_j$ 、 ${}^I x_{ij}^B$ 、 $\Delta \mathbf{U}_j$ 、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 以及 $\Delta \theta_j^B$ 分別為元素節點 j 在固定總體座標中第 I 個位置的位置向量、節點基礎座標軸、增量位移向量、增量應變向量以及增量旋轉。本文中假設元素節點受 $\Delta \mathbf{U}_j$ 、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 以及 $\Delta \theta_j^B$ 作用後的變形過程如下：

1. 節點 j 受 $\Delta \mathbf{U}_j$ 的作用由第 I 個位置 ${}^I \mathbf{X}_j$ 平移到節點當前的位置 \mathbf{X}_j ，在移動過程中，節點 j 無剛體旋轉，即元素各邊在節點的切線方向維持不變，剛接在其上的節點基礎座標的方位亦不變。
2. 節點 j 及剛接在其上的節點基礎座標軸 ${}^I x_{ij}^B$ 受到 $\Delta \theta_j^B$ 作用，逆時鐘方向旋轉到當前的位置 x_{ij}^B 。
3. 節點 j 在當前位置的節點基礎座標上之應變分量增加一增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 。

由上述的變形過程可知節點 j 當前的固定總體座標 \mathbf{X}_j 可以由 ${}^I \mathbf{X}_j$ 加上 $\Delta \mathbf{U}_j$ 得到，由 \mathbf{X}_j 可以利用元素座標定義求出當前的元素座標 \mathbf{x}_j 。如圖 2.2 所示，將元素變形後當前元素座標 x_i^E 與初始未變形元素座標 ${}^0 x_i^E$ 重疊，則元素節點變形參數可決定如下：

- (1) 節點位移 \mathbf{u}_j

節點位移 \mathbf{u}_j 可由當前元素座標 \mathbf{x}_j 與初始未變形元素座標 ${}^0\mathbf{x}_j$ 的差得出：

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j - {}^0\mathbf{x}_j \quad (2.62)$$

$$\mathbf{u}_j = \{u_j \quad v_j\} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{x}_j = \{x_j \quad y_j\} \quad (2.64)$$

$${}^0\mathbf{x}_j = \{{}^0x_j \quad {}^0y_j\} \quad (2.65)$$

(2) 節點應變 $\boldsymbol{\varepsilon}_j$

利用第 I 個位置在節點基礎座標上的節點應變向量 ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 加上增量應變向量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 可以求出當前節點基礎座標上的節點應變向量：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = {}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.66)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \{\Delta\varepsilon_{xj}^B \quad \Delta\varepsilon_{yj}^B \quad \Delta\gamma_{xyj}^B\} \quad (2.67)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 為當前基礎節點座標上的節點應變向量。由(2.46)式即可將 $\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 轉換至元素座標上的節點應變 $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 。

(3) 節點變形角 θ_j

因節點基礎座標剛接在該節點上，所以節點 j 的變形轉角即為節點基礎座標軸從圖 2.2 中 ${}^0x_{1j}^B$ 到 x_{1j}^B 的轉角。令 ${}^0\alpha_{Bj}$ 為節點 j 在初始未變形時的元素座標軸 ${}^0x_1^E$ 與節點基礎座標軸 ${}^0x_{1j}^B$ 之夾角， α_{Bj} 為節點 j 在當前變形位置元素座標軸 x_1^E 與節點基礎座標軸 x_{1j}^B 之夾角，則節點變形角可表示為：

$$\theta_j = \alpha_{Bj} - {}^0\alpha_{Bj} \quad (2.68)$$

2.7 系統平衡方程式與收斂準則

結構系統受外力負荷時，其平衡方程式可表示為

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda\mathbf{P} = 0 \quad (2.69)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 為系統不平衡力向量，系統節點內力 \mathbf{F} 可由(2.58)式的元素節點內力

\mathbf{f}_B 疊加得出， \mathbf{Q} 為系統位移向量， λ 為負荷參數， \mathbf{P} 為參考外力負荷向量。若外力為與變形位置相關(configuration dependent)的外力，則 \mathbf{P} 在每一個變形位置都須更新。本文以不平衡力 Ψ 的 weighted Euclidean norm 做為平衡迭代時的誤差度量，且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{|\lambda|\sqrt{N}\|\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (2.70)$$

其中 N 代表離散系統的自由度總數， e_{tol} 為一給定的容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文解(2.69)式的非線性平衡方程式所使用平衡迭代的數值計算方法是採用文獻[38]中所提出基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。為了本文的完整性，以下將簡單介紹文獻[38]中提出的增量迭代數值計算方法與程序。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，令其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數為 λ_I ，則第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可以利用尤拉預測值(Euler predictor)求得[39]

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_T = (\mathbf{K}_T^I)^{-1} \mathbf{P} \quad (3.2)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， \mathbf{K}_T^I 為第 I 個平衡位置的系統切線剛度矩陣。(3.1)式中的 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出[38]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta l / (\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T)^{1/2} \quad (3.3)$$

其中正負符號決定方法為，當第 $I-1$ 與 I 個增量收斂時，其系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 Δl 表示第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定[38]

$$\Delta l = \Delta l_I (J_D / J_I)^{1/2} \quad (3.4)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量迭代至平衡所使用的迭代次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。本文第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{max} |r_c|} \quad (3.5)$$

上式中 R_{max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考外力負荷向量 \mathbf{P} 作用下的系統線性解之 Euclidean norm， I_{max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量之絕對值。

在平衡迭代時若第 I 個位置的增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ 及增量位移負荷參數 $\Delta \lambda$ 已知時，由 $\mathbf{Q}_{I+1} = \mathbf{Q}_I + \Delta \mathbf{Q}$ ， $\lambda_{I+1} = \lambda_I + \Delta \lambda$ ，及 2.3 節與 2.6 節的方法，則可以求得系統中各元素在當前的元素座標、節點位移、節點變形角。再利用 2.4 節的方法求得當前元素座標上的節點內力及剛度矩陣，再由 2.5 節中提到的座標轉換轉到固定總體座標與節點基礎座標的節點內力及剛度矩陣。當系統內力及外力求得後，系統不平衡力向量可以由(2.69)式求得：

$$\Psi_{I+1} = \Psi(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{I+1}) - \lambda_{I+1} \mathbf{P} \quad (3.6)$$

將(2.69)式在 $\lambda = \lambda_{I+1}$ ， $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{I+1}$ 時用泰勒展開式展開為

$$\Psi = \Psi_{I+1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \delta \lambda + \mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = 0 \quad (3.7)$$

其中 $\mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1})$ 為二次以上的高次項， $\delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量， $\delta \lambda$ 為負荷參數修正量。根據(2.69)式，(3.7)式中的 $\partial \Psi / \partial \mathbf{Q}$ 與 $\partial \Psi / \partial \lambda$ 可表示為

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{K}_T \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -\mathbf{P} \quad (3.9)$$

依牛頓法，忽略(3.7)式中二次以上的高次項，並將(3.8)式與(3.9)式代入，可以得出

$$\Psi_{I+1} + \mathbf{K}_T \mathbf{r} - \delta \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{r} = \delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量，整理(3.10)式，可得到位移修正量

$$\mathbf{r} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\Psi_{I+1} - \delta\lambda\mathbf{P}) = \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.11)$$

其中 $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{K}_T^{-1}\Psi_{I+1}$ 為標準牛頓法的位移修正量， \mathbf{r}_T 在(3.2)式中已定義。

3.2 弧長控制法

(3.11)式中的負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 可利用文獻[38]中所提出的定弧長控制法決定，其方法在每一個增量中固定其增量位移向量的 Euclidean norm 為一定值 Δl ，由新的增量位移向量 $(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})$ 可以得到

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}) \quad (3.12)$$

將(3.11)式代入(3.12)式可以得到

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T) \quad (3.13)$$

(3.13)式經過整理後可以得到 $\delta\lambda$ 的二次方程式

$$a_1\delta\lambda^2 + a_2\delta\lambda + a_3 = 0 \quad (3.14)$$

其中

$$a_1 = \mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T \quad (3.15)$$

$$a_2 = 2(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t \mathbf{r}_T \quad (3.16)$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0) - \Delta l^2 \quad (3.17)$$

將(3.11)式求得之增量位移修正量 \mathbf{r} 以及(3.14)式求得之負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 加入上次迭代之 $\Delta\mathbf{Q}$ 與 $\Delta\lambda$ 中，可以得到新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次迭代，迭代過程將一直重複至(3.6)式中的系統不平衡力向量滿足(2.70)式的收斂準則為止。

3.3 數值程序

本文使用的增量迭代法之數值程序可以分為三個主要部分：

1. 輸入並計算開始分析所需的資料

- (a)輸入結構資料、邊界條件與負荷參數。
- (b)選擇一個參考自由度，並給定期望此自由度應達到的位移。
- (c)給定最大增量次數、最大迭代次數、期望迭代次數與容許誤差值。
- (d)形成系統剛度矩陣並求得(3.5)式中的 \mathbf{R}_0 。
- (e)利用(3.1)式、(3.3)式與(3.5)式計算初始增量位移向量、初始增量負荷參數與第一次增量弧長。

2. 使用迭代法求增量的收斂解

(a)由 2.6 節的方法，利用已知的增量位移求得當前元素的變形向量 \mathbf{q}_θ ，並計算(2.41)式中元素節點內力 \mathbf{f}_θ ，接著由 2.5 節座標轉換將 \mathbf{f}_θ 利用(2.57)式轉換至 \mathbf{f}_B ，然後將元素節點內力 \mathbf{f}_B 組合成結構系統節點內力 \mathbf{F} 。

(b)計算(2.69)式的不平衡力 Ψ 。

(c)檢查(2.70)式的收斂準則，若滿足則進入第 3 部分；否則檢查迭代數，如果小於給定之最大迭代次數，則進行步驟(d)；否則減少增量弧長並以(3.1)式與(3.3)式計算新的增量位移向量與增量負荷參數，回到步驟(a)重新計算。

(d)利用(3.11)式與(3.14)式計算增量位移修正量與增量負荷參數修正量，回到步驟(a)重新計算。

3. 計算下一次增量所需的資料

(a)檢查參考自由度的位移及進行的增量次數是否已達給定值，若已達到給定值則停止分析工作；否則進行步驟(b)。

(b)計算(3.11)式中的切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 。本文中 \mathbf{K}_T 的計算方法是利用當前變形位置的元素座標重新計算(2.42)式中的元素剛度矩陣 \mathbf{k}_θ ，本文中忽略元素其他的幾何變形與內部應力對元素剛度矩陣造成的影響，再利用 2.5 節座標轉換將 \mathbf{k}_θ 利用(2.61)式轉換至 \mathbf{k}_B ，然

後將元素剛度矩陣 \mathbf{k}_B 疊加成結構系統剛度矩陣 \mathbf{K}_T 。

(c)利用(3.1)式、(3.3)式與(3.4)式計算下一次增量的增量位移向量、增量負荷參數與增量弧長。

(d)回到第 2 部分進行迭代工作。



第四章 數值分析與結果

本章分為線性分析及幾何非線性分析兩部分，在線性分析的部分將以第二章中推導的三角平面元素，用不同的網格分析文獻上的例題，並與文獻上的結果比較，以了解本文採用之三角平面元素的收斂性及準確性。在幾何非線性的部分，將以本文在第三章中提到的數值方法與程序及在 2.6 節中提出的元素節點變形參數之決定方法分析具大位移、大旋轉，但為小應變的平面應變問題並與文獻上用梁元素分析的結果比較，以說明本文 2.6 節中提出的方法之可行性與正確性。

圖 4.1 為本章之網格的示意圖，本文中稱由圖 4.1 中粗線圍成的最小四邊形為一網格單位，稱圖 4.1(a)為 $4 \times 2 \times 2$ 網格，圖 4.1(b)為 $4 \times 1 \times 2$ 網格。本章中將每一網格單位的對角線連接，將其分割成兩個三角形元素，如圖 4.1 所示。為了與文獻上網格劃分比較，本章及圖表中 $I \times J$ 網格即為本文之 $I \times J \times 2$ 網格。本章中外力為分佈力時，都使用附錄 C 的方法，將其轉換成等效節點力。本章中提到之文獻上的元素都是三節點的三角形元素或是四節點的四邊形元素，除了 CST 元素外，每一種元素的節點參數都是兩個位移及一個旋轉。

4.1 線性分析

4.1.1 懸臂梁受到彎矩作用(線性分析)

圖 4.2(a)為懸臂梁結構示意圖及其所受到之彎矩負荷圖，本例題是文獻 [7]提出的例題，懸臂梁長度 $L = 32$ ，高度 $h = 2$ ，厚度 $t = 1$ ，楊氏係數 $E = 768$ ，蒲松比 $\nu = 0.25$ 。如圖 4.2(a)所示，懸臂梁左端為固接(fixed end)，右端為自由端(free end)，依尤拉梁(Euler beam)理論懸臂梁自由端受彎矩 $M = 100$ 作用時，自由端中點 C 的垂直位移可表示為[40]

$$V_c = \frac{ML^2}{2EI} = 100 \quad (4.1)$$

如圖 4.2(b)與圖 4.2(c)，本例題使用的網格可分為兩種型式，M11 網格為上下與左右對稱的網格劃分，M12 網格則為單一方向的網格劃分。當梁受純彎矩作用時，梁內的應力分佈與圖 4.2(d)的分佈力相同，為了模擬梁受純彎矩作用，本例題考慮了兩種外力負荷：負荷 LNS 為圖 4.2(d)之分佈力；負荷 M1S 則為圖 4.2(e)中的傳統集中力矩，作用於自由端中點 C，其所對應節點參數即為(2.56)式中的 θ_j^B 。

本例題在固定端的水平位移、轉角以及剪應變皆為零，因不同的元素有不同的節點參數，故有些元素無法滿足所有的邊界條件。例如 ALL-3I[9]、FF84[7]、LST-Ret[4]以及 OPT[4]元素都是三節點的三角形元素，其節點參數為兩個位移及一個旋轉，故其邊界條件設定為 BC12： $U = \theta = 0$ 在 $X = 0$ 及 $V = 0$ 在 $X = Y = 0$ 。CST[1]元素的節點參數為兩個位移，故其邊界條件設定為 BC11： $U = 0$ 在 $X = 0$ 及 $V = 0$ 在 $X = Y = 0$ 。本文使用的元素其節點參數為兩個位移、一個旋轉以及三個應變，故能設定各種邊界條件。本文元素的邊界條件最合適的應為 BC13： $U = \gamma_{xy} = \theta = 0$ 在 $X = 0$ 及 $V = 0$ 在 $X = Y = 0$ 或是 BC14： $U = \theta = 0$ 在 $X = 0$ 、 $\gamma_{xy} = 0$ 在 $(X, Y) = (0, \pm h/2)$ 及 $V = 0$ 在 $X = Y = 0$ 。依梁理論的解析解本例題在固定端之反力的分佈與圖 4.2(d)之作用力的分佈相同，若為使固定端能有一致性的等效節點力，應將固定端上對應於等效節點反力不為零的節點參數固定。依此準則，由附錄 C 可得本例題的邊界條件應為 BC13。

表 4.1 為本例題用不同網格、負荷以及邊界條件的結果並與文獻上的結果比較。由表 4.1 可以發現本文的各種結果與梁理論的解析解都相當接近，網格的種類對本文元素的結果影響不大，負荷 LNS 與梁受純彎矩的應力分佈一致，所以如同預期的，負荷為 LNS 且邊界條件為 BC13 時，本文的結

果與梁理論的解析解一樣。文獻[4]中為消除元素網格的方向性，將每一單位網格分成兩個一半厚度的單位網格，再沿著交錯的對角線將每個半厚度的單位網格各分成兩個三角形元素，即每個單位網格由 4 個半厚度的重疊三角形(four half-thickness overlaid triangles)元素組成。當元素網格單位為長方形，文獻[4]提到 OPT 元素受純彎矩作用時有正確解，所以由表 4.1 可以發現 OPT 元素在本例題有很好的結果。由表 4.1 亦可發現除了 OPT 元素外，文獻上其他元素的結果都不是很好。

4.1.2 懸臂梁受到剪力作用(線性分析)

圖 4.3(a)為懸臂梁結構示意圖及其所受到之剪力負荷圖，本例題是文獻[3]首先提出的例題，懸臂梁長度 $L=48$ ，高度 $h=12$ ，厚度 $t=1$ ，楊氏係數 $E=30000$ ，蒲松比 $\nu=0.25$ 。如圖 4.3(a)所示，懸臂梁左端為固接，右端為自由端，在懸臂梁自由端施加一個向上的二次分佈力，其合力大小為 $P=40$ ，則在平面應力的假設下自由端中點 C 的垂直位移可表示為[40]

$$V_C = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(4+5\nu)PL}{2Eht} = 0.3553 \quad (4.2)$$

其左端之反力的分佈為二次的分佈剪力以及一次的分佈正向力。本例題使用的網格劃分有兩種：圖 4.3(b)的規則網格及圖 4.3(c)所示的 4×1^D 扭曲網格。本例題的剪力負荷為二次分佈力。理論解(4.2)式採用的邊界條件並非固定端，文獻上用不同的元素分析本例題時採用了各種不同的邊界條件，如文獻[4,41]使用邊界條件 BC21： $U=V=0$ 在 $X=0$ ，文獻[42,43]採用邊界條件 BC22： $U=V=0$ 在 $(X,Y)=(0,-h/2)$ 及 $U=0$ 在 $(X,Y)=(0,h/2)$ 。本文中考慮了兩種邊界條件，即 BC23： $U=V=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=\theta=0$ 在 $X=0$ 及 BC24： $U=V=\varepsilon_y=\theta=0$ 在 $X=0$ 及 $\gamma_{xy}=0$ 在 $(X,Y)=(0,\pm h/2)$ 。邊界條件 BC23 是將理論解(4.2)式之反力的等效節點力中不為零的節點參數固定。邊界條件 BC24 是一所謂固定端的邊界條件，並考慮梁之上下表面在固

定端的剪應變為零。

表 4.2 為本文的分析結果及文獻上的結果，文獻[4]分析本例題時，與例題 4.1.1 一樣，每一網格單位都是由四個半厚度的重疊三角形組成。在表 4.2 中可以看到本例題採用邊界條件 BC23 及 BC24，在網格切割較多時與(4.2)式中的理論解很接近。由表 4.2 亦可發現本文採用邊界條件 BC21 時的結果與理論解的差異較大，但文獻[4]使用 OPT 元素及邊界條件 BC21 時，其結果與理論解很接近。另外比較 4×1 與 4×1^D 網格所得到的結果可以看出扭曲網格對於本文中所使用三角平面元素的影響不大。圖 4.4 至圖 4.6 為網格 16×4 及 32×8 分別在 $X = 12$ 、 24 、 36 處沿著 Y 方向的應力分佈，因在總體座標系統的三個應變分量為本文的系統節點參數，故將節點的三個應變分量代入(2.33)式中即可得出該節點上的三個應力分量。由圖 4.4 至圖 4.6 可以發現本文的結果與理論解相當接近。



4.1.3 Cook 例題[21]

圖 4.7(a)為結構示意圖及其所受到之剪力負荷圖，此例題是文獻[21]為了測試非長方形的四邊形元素提出的。此例題也可以反應剪力作用下的行為，以及網格歪曲所造成的影響。圖 4.7(b)為本例題使用的 2×2 網格，文獻[4]網格劃分的方式與本例題相同，且僅將每一網格單位分成與本例題一樣的兩個三角形元素。本例題的剪力負荷為均勻分佈力，考慮的邊界條件有三種，BC31： $U = V = 0$ 在 $X = 0$ ；BC32： $U = V = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ 在 $X = 0$ ；BC33： $U = V = \varepsilon_y = \theta = 0$ 在 $X = 0$ 及 $\gamma_{xy} = 0$ 在 $(X, Y) = (0, 0), (0, 44)$ 。表 4.3 及表 4.4 為本文及文獻[4]的結果，由表 4.3 可以發現當網格較密時各種邊界條件以及不同元素的結果都很接近，但網格較疏時僅本文的元素可以得到相當精確的結果。邊界條件 BC32 將等效節點反力不為零的節點參數全部固定，故其結果會較快收斂。表 4.4 為 A 點的最大主應力 $\sigma_{A(max)}$

與 B 點的最小主應力 $\sigma_{B(min)}$ 的比較，由表 4.4 可見當網格較密時，各種元素的結果都很接近，但在 2×2 網格時，以本文元素在邊界條件 BC32 時的結果最好。

4.1.4 簡支梁受到兩端彎矩作用(線性分析)

圖 4.8(a)為簡支梁結構示意圖及其所受到之彎矩負荷圖，簡支梁長度 $L=10$ ，高度 $h=1$ ，厚度 $t=1$ ，楊氏係數 $E=100$ ，蒲松比 $\nu=0$ 。簡支梁左端下方為絞接(hinge)，右端下方為滾子(roller)，在左右兩端的邊上各施加一個彎矩 $M=1$ ，根據尤拉梁理論中心點垂直位移與 C 點轉角分別為：

$$V = \frac{ML^2}{8EI} = 1.5 \quad (4.3)$$

$$\theta_C = -\frac{ML}{2EI} = -0.6 \quad (4.4)$$

本例題使用了 3 種不同的網格，如圖 4.8(b)所示，其中 M41 為 6×1 網格，M42 則是扭曲的 6×1 網格，M43 是 2×1 網格。在外力負荷方面，本例題考慮了 3 種等效外力，圖 4.8(c)中的負荷 CM 與負荷 M4V 分別是力偶與集中彎矩，負荷 LNS 則是使用與梁受純彎矩時之應力分佈一致的線性分佈力。表 4.5 為本文與一些文獻上的結果，由於負荷 CM 與負荷 M4V 都非負荷 LNS 的一致性等效節點力，所以不能得出梁受純彎矩的正確解。由表 4.5 可發現無論使用哪個網格劃分，負荷 LNS 的結果都與(4.3)式及(4.4)式受純彎矩的正確解相同。另外比較網格 M41 與 M42 的結果可以發現網格扭曲對本例題的結果影響不大。

4.2 幾何非線性分析

4.2.1 簡支梁受到兩端彎矩作用(非線性分析)

圖 4.9(a)為簡支梁結構示意圖及其所受到之彎矩負荷圖，簡支梁長度

$L = 1000$ ，高度 $h = 10$ ，厚度 $t = 1$ ，楊氏係數 $E = 10^5$ ，蒲松比 $\nu = 0$ 及 $\nu = 0.25$ 。簡支梁左端下方為絞接，右端下方為滾子，在左右兩端的邊上各施加一個彎矩 M 。圖 4.9(b) 為本例題網格 8×1 的示意圖，本例題分析時所使用的網格有： 20×1 、 50×1 、 100×1 三種。本例題考慮兩種負荷型態：負荷 LNS 為圖 4.9(c) 中的分佈力，負荷 M4V 為圖 4.9(d) 中作用於四個頂點上的集中力矩。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} ，圖 4.10 是比較在不同網格下的精準程度，使用的是負荷 LNS 與 $\nu = 0$ 進行分析。在網格 20×1 的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在網格 50×1 的分析過程中使用了 4 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6；在網格 100×1 的分析過程中使用了 3 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10。由圖 4.10 可見本例題的結果與梁元素分析的結果幾乎重合。另外圖 4.11 是比較在不同負荷型態下的結果，使用的是網格 20×1 與 $\nu = 0$ 進行分析。在負荷 LNS 的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在負荷 M4V 的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9。由圖 4.11 的結果可知負荷 LNS 與負荷 M4V 對結果影響不大。圖 4.12 則是比較在不同蒲松比下的結果，使用的是網格 20×1 與負荷 LNS 進行分析。在 $\nu = 0$ 的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在 $\nu = 0.25$ 的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10。由圖 4.12 的結果可知蒲松比對結果的影響不大。

4.2.2 懸臂梁受到彎矩作用(非線性分析)

圖 4.13(a) 為懸臂梁結構示意圖及其所受到之彎矩負荷圖，懸臂梁長度 $L = 1000$ 及 10000 ，高度 $h = 10$ ，厚度 $t = 1$ ，楊氏係數 $E = 10^5$ ，蒲松比 $\nu = 0$ 及 $\nu = 0.25$ 。懸臂梁左端為固接，右端為自由端，在自由端施加一個彎矩 M 。本例題採用兩種網格劃分，圖 4.13(b) 為 M61 網格 8×1 與 8×2 示意圖，

圖 4.13(c)為 M62 網格 8×1 與 8×2 示意圖。本例題考慮兩種負荷型態，負荷 LNS 為圖 4.13(d)所示分佈力，負荷 M2V 為圖 4.13(e)所示兩個集中力矩分別作用於 A 點與 B 點上。負荷 LNS 為一與變形位置相關(configuration dependent)的負荷，其方向與在當前之變形位置的 AB 邊垂直，但其分佈型態不變。邊界條件是採用例題 4.1.1 中的 BC13： $U = \theta = \gamma_{xy} = 0$ 在 $X = 0$ 及 $V = 0$ 在 $X = Y = 0$ 。本例題採用單層網格時，自由端中點 C 位移及轉角的結果都是取自由端兩端點 A、B 之位移及轉角的平均值。

本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} ，圖 4.14 至圖 4.16 是 $L = 1000$ 、 $\nu = 0$ 之懸臂梁受負荷 LNS 時用不同單層網格分析的結果與理論解的比較。本例題在網格 20×1 (M61) 的分析過程中使用了 43 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 19；在網格 20×1 (M62) 的分析過程中使用了 55 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 17；在網格 50×1 (M61) 的分析過程中使用了 26 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在網格 50×1 (M26) 的分析過程中使用了 22 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在網格 100×1 (M61) 的分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在網格 100×1 (M62) 的分析過程中使用了 20 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 8。以上的數據顯示本例題在元素較少時需要較多的增量及迭代次數。由圖 4.14 至圖 4.16 可看出當 M61 及 M62 網格為 20×1 在 $ML/EI \leq 2$ 時，本文的結果與理論解相當吻合；當網格為 50×1 在 $ML/EI \leq 4$ 時，本文的結果與理論解相當吻合；當網格為 100×1 在 $ML/EI \leq 6$ 時，本文的結果與理論解相當吻合。因本研究假設元素的變形位移及旋轉是小位移及小旋轉，所以當元素較少時，隨著位移及旋轉的增加，其結果會漸漸偏離正確解。

圖 4.17 至圖 4.19 為 $L = 1000$ 、 $\nu = 0$ 之懸臂梁在不同單層與雙層網格下的分析結果，採用的網格為 M61 網格 20×1 、 20×2 、 40×1 及 40×2 ，使用的負荷為 LNS 負荷。本例題網格 20×1 及 40×2 的元素有相同的邊長比(aspect

ratio)，此處邊長比是指如圖 4.13(b)與圖 4.13(c)的網格劃分時，直角三角形的長直角邊與短直角邊的比值。在網格 20×1 (M61)的分析過程中使用了 43 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 19；在網格 20×2 (M61)的分析過程中使用了 51 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 14；在網格 40×1 (M61)的分析過程中使用了 28 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在網格 40×2 (M61)的分析過程中使用了 36 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 8。以上數據顯示單層和雙層網格分析時，所需要的總迭代次數差不多，但增加懸臂梁軸方向的元素數目可以減少所需的迭代次數，這一點和圖 4.14 至圖 4.16 的結果是一致的。在圖 4.17 至圖 4.19 中可以看出網格 20×1 (M61)與網格 40×2 (M61)的元素雖然有相同的邊長比，但是結果差距很大，這應表示影響結果精確度的主要原因並非元素的邊長比，而是前面所提到的元素變形位移與旋轉。另外比較 40×1 (M61)與 40×2 (M61)的結果也可看出若將網格的層數增加，也會讓結果更準確。

圖 4.20 是懸臂梁長度 $L = 10000$ 、蒲松比 $\nu = 0$ ，受負荷 LNS 的結果。在網格 50×1 (M61)的分析過程中使用了 175 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 18；在網格 100×1 (M61)的分析過程中使用了 224 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在網格 200×1 (M61)的分析過程中使用了 108 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 8。上述的數據顯示使用較多的元素時，所需的迭代次數較少，此結果與 $L = 1000$ 懸臂梁之結果的趨勢是一致的。網格為 50×1 (M61)、 100×1 (M61)及 200×1 (M61)時，元素的邊長比分別為 20、10 及 5。由圖 4.20 中可看出當懸臂梁長度 $L = 10000$ 時，當在 $\theta_c = ML/EI \leq 2$ 時，網格 50×1 (M61)的結果就足夠準確；當 $\theta_c = ML/EI \leq 4$ 時，網格 100×1 (M61)的結果已足夠準確；當 $\theta_c = ML/EI \leq 2\pi$ 時，必須使用網格 200×1 (M61)的結果才足夠準確。另外比較長度 $L = 10000$ 與 $L = 1000$ 的分析結果也可得知，當懸臂梁長度增加為 10 倍時，網格劃分不需要增加

為 10 倍，即可得相同精度，此結果再度說明本文結果的精度並非由元素的邊長比決定。

圖 4.21 是比較懸臂梁長度 $L=1000$ 、蒲松比 $\nu=0$ ，網格為 100×1 (M61) 在不同負荷型態下的結果。在負荷 LNS 的分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在負荷 M2V 的分析過程中使用了 20 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 8。由圖 4.20 的結果可知負荷 LNS 與負荷 M2V 對結果影響不大。另外圖 4.22 是比較懸臂梁長度 $L=1000$ ，網格為 100×1 (M61) 受負荷 LNS 在不同蒲松比下的結果。在 $\nu=0$ 的分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在 $\nu=0.25$ 的分析過程中使用了 22 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9。由圖 4.22 的結果可知蒲松比對結果的影響不大。

4.2.3 懸臂梁受到剪力作用(非線性分析)

圖 4.23(a) 為懸臂梁結構示意圖及其所受到之剪力負荷圖，懸臂梁長度 $L=1000$ ，高度 $h=10$ ，厚度 $t=1$ ，楊氏係數 $E=10^5$ ，蒲松比 $\nu=0$ 及 $\nu=0.25$ 。懸臂梁左端為固接，右端為自由端，在右端邊上施加一個如圖 4.23(d) 所示之二次分佈剪力的等效節點力，該分佈剪力的大小為 P 。其等效節點力是用附錄 C 的方法在變形前的位置上決定。本例題考慮兩種不同的網格，圖 4.23(b) 為 M71 網格 8×1 示意圖，圖 4.23(c) 為 M72 網格 8×1 示意圖。本例題假設固定端的邊界條件為例題 4.1.2 的 BC23： $U=V=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=\theta=0$ 在 $X=0$ 。本例題自由端 C 點之位移及轉角的結果都是取自由端兩端點 A、B 之位移及轉角的平均值。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} ，圖 4.24 是蒲松比 $\nu=0$ 之懸臂梁使用不同網格下的分析結果。在網格 20×1 (M71) 的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在網格 20×1 (M72) 的分析過程中使用了 13 個增量，每個

增量的平均迭代次數約為 9；在網格 50×1(M71)的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在網格 50×1(M72)的分析過程中使用了 6 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 11；在網格 100×1(M71)的分析過程中使用了 5 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9；在網格 100×1(M72)的分析過程中使用了 5 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9。以上數據顯示本例題在元素較少時需要較多的增量及迭代次數。由圖 4.24 可以看出此例題所有不同網格的結果都很接近且與梁元素的結果亦非常相近，此處梁元素的結果是本文採用文獻[27]使用 10 個元素分析的結果。另外圖 4.25 是比較在不同蒲松比下的結果，使用的是網格 20×1(M71)進行分析。在 $\nu = 0$ 的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 10；在 $\nu = 0.25$ 的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9。由圖 4.25 可知蒲松比對結果的影響不大。

4.2.4 直角構架受到端點剪力作用

圖 4.26(a)為直角構架示意圖及其所受到之剪力負荷圖，結構左下端為固接，右上端受一均勻分佈的剪力作用，其等效節點力是用附錄 C 的方法在變形前的位置上決定。本例題考慮兩種不同的網格，分別為圖 4.26(b)的網格 M81 與網格 M82。網格 M81 使用了 38 個三角平面元素，網格 M82 使用了 152 個三角平面元素。本例題假設固定端的邊界條件為例題 4.1.2 的 BC23： $U = V = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ 在 $X = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} ，圖 4.27 是本文在不同網格下的結果與 Battini[35]的結果，其中 Battini[35]的結果是使用了 304 個四角平面元素得到的結果，本文網格 M81 的 U_A 是取自由端之兩節點水平位移的平均值。在網格 M81 的分析過程中使用了 9 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6；在網格 M82 的分析過程中使用了 9 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5。由圖 4.27 可以看出

網格 M81 在 $F/10000 \leq 1$ 時，本文的結果與 Battini[35] 的結果相當吻合；網格 M82 在 $F/10000 \leq 4$ 時，本文的結果與 Battini[35] 的結果相當吻合。

4.2.5 半圓環受到單點集中力作用

圖 4.28(a) 為半圓環示意圖及其所受到之集中力負荷圖，半圓環兩端為固接，在圓環上端受到一個單點的集中力 $2F$ 。由於結構為左右對稱，因此本文僅考慮一半結構來進行分析，網格的劃分如圖 4.28(b) 所示，使用了 36 個三角平面元素。本文假設在結構對稱處 $X = 0$ 之邊界條件為 $U = 0$ ，固接端的邊界條件採用類似於例題 4.1.2 的 BC23，但是由於固接端的方向不同，因此邊界條件設定為 $U = V = \varepsilon_x = \gamma_{xy} = \theta = 0$ 在 $X = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 10^{-4} ，圖 4.29 是本文的結果與 Battini[35] 的結果，其中 Battini[35] 的結果是使用了 320 個四角平面元素得到的結果。本文元素的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 12。由圖 4.29 可以看出本文的結果與 Battini[35] 的結果非常相近。

第五章 結論與展望

5.1 結論

本文提出一個具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法與在當前變形位置決定元素節點變形參數的方法。本文中採用之元素為 3 節點 18 個自由度的二次應變三角形(QST)元素，其節點自由度為 2 個節點位移、1 個節點旋轉及 3 個節點應變。本文中將節點應變定義於一個剛接在節點上，隨節點一起平移及旋轉的基礎座標上，在本文元素當前的變形位置上建立當前的元素座標，再由當前的元素座標及基礎座標的關係求出元素節點變形轉角，及在元素座標上的節點應變分量，然後再利用不同的等效節點參數在小變形時的關係，求出對應於不同等效節點參數之元素節點內力還有元素剛度矩陣的關係。本文先用虛功原理求出對應於一組元素節點參數的元素剛度矩陣，再將其轉換成對應於不同等效節點參數的元素剛度矩陣。

在幾何非線性分析時，由於元素變形為小變形，所以在當前變形位置的元素切線剛度矩陣可以使用初始未變形時的元素剛度矩陣來近似，但是本研究發現在結構形狀改變太大時，使用此近似的元素切線剛度矩陣會造成平衡迭代不易收斂。本研究發現在忽略元素其他的幾何變形與內部應力的影響下以 3 個元素節點在當前變形位置連線形成的三角形之元素剛度矩陣來近似當前變形位置之元素切線剛度矩陣，可以有效地改善平衡迭代的收斂速度。本研究在幾何非線性分析時元素節點內力的計算方法是用初始未變形的元素剛度矩陣與元素節點總變形參數向量相乘得出定義在當前元素座標的元素節點內力向量，再將定義在元素座標的元素節點內力中，對應於節點位移的廣義節點力轉換至固定總體座標系統，對應於節點應變的廣義節點力轉換至節點基礎座標系統，然後將各個元素的元素節點內力組成結構系統節點內力。

本文先以線性的例題來測試本文使用之元素的性能及精度，再以幾何非

線性的例題來說明本文提出之共旋轉法及決定元素節點變形參數之方法的可行性及準確性。由本文分析之數值例題的結果，可得以下結論：

1. 本文中採用之平面三角平面元素有 18 個自由度，為高階(high-order)的元素，所以在相同的網格下其精度較 3 節點 9 自由度之平面三角形元素高。
2. 本文所使用決定元素變形參數的方法，可以確實應用在幾何非線性分析上，並有正確的結果。
3. 本文採用之三角平面元素的節點參數有位移、旋轉及應變，在邊界條件的設定上，將分佈反力不為零之等效節點力所對應之節點參數固定時，其結果最接近彈性力學的解析解，且最快收斂。

5.2 未來研究方向

由於本文的元素切線剛度矩陣為一近似剛度矩陣，這也許會影響平衡迭代的收斂速度，因此以後研究可以考慮以非線性理論推導元素的切線剛度矩陣，並探討其對平衡迭代的影響。因本研究使用的三角平面元素具面內旋轉自由度及高精度，如果將此三角平面元素與三角板元素疊加成三角殼元素，應可提高薄殼結構之幾何非線性分析的精度。

參考文獻

- [1] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, Journal of Aeronautical Science, 23, 805-823, 1965.
- [2] B. M. Fraeijis de Veubeke, “Displacement and equilibrium models in the finite element method”, Stress Analysis (O. C. Zienkiewicz, G. Holister, eds.), 145-197, John Wiley & Sons, 1965.
- [3] C. A. Felippa, “Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures”, University of California, Ph. D. Dissertation, 1966.
- [4] C. A. Felippa, “A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 2125-2168, 2003.
- [5] C. A. Felippa, C. Militello, “Developments in variational methods for high performance plate and shell elements”, Analytical and Computational Models for Shells, The American Society of Mechanical Engineers, 3, 191-216, 1989.
- [6] D. J. Allman, “A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis”, Computers and Structures, 19, 1-8, 1984.
- [7] P. G. Bergan, C. A. Felippa, “A triangular membrane element with rotational degrees of freedom”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 50, 25-69, 1985.
- [8] D. J. Allman, “The constant strain triangle with drilling rotations : a simple prospect for shell analysis”, The Mathematics of Finite Elements and Applications, 6, 233-240, 1987.

- [9] D. J. Allman, "Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 26, 2645-2655, 1988.
- [10] D. J. Allman, "Variational validation of a membrane finite element with drilling rotations", Communications in Numerical Methods in Engineering, 9, 345-351, 1993.
- [11] C. A. Felippa, "The extended free formulation of finite elements in linear elasticity", Journal of Applied Mechanics, 56, 609-616, 1989.
- [12] K. Alvin, H. M. de la Fuente, B. Haugen, C. A. Felippa, "Membrane triangles with corner drilling freedoms : I. The EFF element", Finite Elements in Analysis and Design, 12, 163-187, 1992.
- [13] C. A. Felippa, C. Militello, "Membrane triangles with corner drilling freedoms : II. The ANDES element", Finite Elements Analysis and Design, 12, 189-201, 1992.
- [14] C. A. Felippa, S. Alexander, "Membrane triangles with corner drilling freedoms : III. Implementation and performance evaluation", Finite Elements Analysis Design, 12, 203-239, 1992.
- [15] A. B. Sabir, "A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom", Proceedings of the second International Conference on Variational Methods in Engineering, 17-25, 1985.
- [16] R. D. Cook, "A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1, 24, 1499-1508, 1987.
- [17] R. D. Cook, "Modified formulations for nine-dof plane triangles that include vertex rotations", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 31, 825-835, 1991.
- [18] R. Piltner, R. L. Taylor, "Triangular finite elements with rotational degrees of freedom and enhanced strain modes", Computers and Structures, 75, 361-368, 2000.

- [19] L. Damkilde, M. Gronne, “An improved triangular element with drilling rotations”, Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics, 135-138, 2002.
- [20] P. Fajman, “New triangular plane element with drilling degrees of freedom”, Journal of Engineering Mechanics, 128, 413-418, 2002.
- [21] R. D. Cook, “Improved Two-Dimensional Finite Element”, Journal of the Structural Division, 100, 1851-1863, 1974.
- [22] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, The Finite Element Method Displayed, John Wiley & Sons, 1984.
- [23] D. J. Dawe, Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures, Clarendon Press, 1984.
- [24] Thomas J. R. Hughes, The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall , 1987.
- [25] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, The Finite Element Method : The Basis, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [26] I. Holand and P. G. Bergan, “Higher order finite element for plane stress”, Discussion, Journal of the Engineering Mechanics Division, 2, 698-702, 1968.
- [27] K. M. Hsiao, “Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element”, Computers and Structures, 25, 665-675, 1987.
- [28] C. Pacoste, “Co-rotational flat facet triangular element for shell instability”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 156, 75-110, 1998.
- [29] K. D. Kim, G. R. Lomboy, S. C. Han, “A co-rotational 8-node assumed strain shell element for postbuckling analysis of laminated composite plates and shells”, Computational Mechanics, 30, 330-342, 2003.
- [30] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of local element frame for corotational triangular shell elements”, Communications in Numerical Methods in Engineering, 20, 819-825, 2004.

- [31] Y. Urthaler, J. N. Reddy, “A corotational finite element formulation for the analysis of planar beams”, Communications in Numerical Methods in Engineering, 21, 553-570, 2005.
- [32] K. M. Hsiao, H. J. Horng, Y. R. Chen, “A corotational procedure that handles large rotation of spatial beam structures”, Computers and Structures, 27, 769-781, 1987.
- [33] K. M. Hsiao, “Corotational total Lagrangian formulation for three-dimensional beam element”, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 30, 797-804, 1992.
- [34] K. M. Hsiao, “A co-rotational finite element formulation for buckling and postbuckling analyses of spatial beams”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188, 567-594, 2000.
- [35] J. M. Battini, “A non-linear corotational 4-node plane element”, Mechanics Research Communications, 35, 408-413, 2008.
- [36] A. P. Boresi, K. P. Chong, Elasticity In Engineering Mechanics, John Wiley & Sons, 1999.
- [37] R. D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1981.
- [38] M. A. Crisfield, “A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'”, Computers and Structures, 13, 55-62, 1981.
- [39] M. A. Crisfield, Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons, 1991.
- [40] Herbert Reismann, Peter S. Pawlik, Elasticity Theory and Applications, John Wiley & Sons, 1980.
- [41] R. D. Cook, “On the Allman triangle and a related quadrilateral element”, Computers and Structures, 22, 1065-1067, 1986.
- [42] A. Ibrahimbergovic, F. Frey, “Membrane quadrilateral finite elements with rotational degrees of freedom”, Engineering Fracture Mechanics, 43, 13-24, 1992.

- [43] S. L. Sun, M. W. Yuan, and P. Chen, “A practical quadrilateral membrane element with drilling degrees of freedom”, Acta Mechanica Solida Sinica, 10, 179-188, 1997.



表 4.1 懸臂梁受到彎矩作用下端點 C 的側向位移 V_C

Element	Mesh		Load Type	Mesh subdivisions					
	Type	BC		1×2	2×2	4×2	8×2	16×2	32×2
ALL-3I [4]	-	BC12	LNS	-	0.39	5.42	38.32	76.48	87.08
CST [4]	-	BC11	LNS	-	1.28	4.82	15.75	36.36	54.05
FF84 [4]	-	BC12	LNS	-	96.27	96.34	96.58	97.17	98.36
LST-Ret [4]	-	BC12	LNS	-	9.46	28.93	59.58	81.04	89.05
OPT [4]	-	BC12	LNS	-	100.07	99.96	99.99	99.99	99.99
Present	M11	BC11	LNS	100.09	99.95	100.54	101.32	102.49	104.14
	M11	BC11	M1S	100.39	100.55	100.90	101.52	102.65	104.37
	M12	BC11	LNS	100.09	100.12	100.49	101.10	102.18	103.81
	M12	BC11	M1S	100.45	100.52	100.70	101.24	102.33	104.01
	M11	BC12	LNS	100.02	100.04	100.03	100.12	100.47	101.16
	M11	BC12	M1S	100.37	100.64	100.39	100.33	100.64	101.39
	M12	BC12	LNS	100.03	100.06	100.04	100.11	100.39	100.97
	M12	BC12	M1S	100.43	100.45	100.25	100.25	100.53	101.17
	M11	BC13	LNS	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	M11	BC13	M1S	100.33	100.60	100.36	100.21	100.17	100.23
	M12	BC13	LNS	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	M12	BC13	M1S	100.38	100.41	100.21	100.14	100.15	100.21
	M11	BC14	LNS	100.00	99.99	99.99	100.02	100.09	100.22
	M11	BC14	M1S	100.33	100.58	100.35	100.23	100.26	100.44
	M12	BC14	LNS	100.00	99.99	99.99	100.03	100.12	100.29
	M12	BC14	M1S	100.38	100.40	100.20	100.17	100.27	100.49
BC11	$U = 0$ at $X = 0$ and $V = 0$ at $X = Y = 0$								
BC12	$U = \theta = 0$ at $X = 0$ and $V = 0$ at $X = Y = 0$								
BC13	$U = \gamma_{xy} = \theta = 0$ at $X = 0$ and $V = 0$ at $X = Y = 0$								
BC14	$U = \theta = 0$ at $X = 0$, $\gamma_{xy} = 0$ at $(X, Y) = (0, \pm h/2)$, and $V = 0$ at $X = Y = 0$								
LNS	linear distributed normal stresses at free end, see figure 4.1(d).								
M1S	concentrated moment applied at mid-point of the side, see figure 4.1(e).								
ALL-3I [9]	Allman triangle element integrated by 3-point interior rule, published in 1988.								
CST [1]	constant strain triangle element.								
FF84 [7]	free formulation triangle element, published in 1984.								
LST-Ret [4]	retrofitting linear strain triangle element.								
OPT [4]	optimal membrane triangle element.								

表 4.2 懸臂梁受到剪力作用下端點 C 的側向位移 V_C

Element	BC	Mesh subdivisions						
		2x1	2x2	4x1	8x2	16x4	32x8	4x1 ^D
ALL-3I [4]	BC21 [*]	-	0.1514	-	0.3432	0.3510	0.3546	-
CST [4]	BC21	-	0.0635	-	0.1961	0.2940	0.3379	-
FF84 [4]	BC21	-	0.3179	-	0.3530	0.3550	0.3555	-
LST-Reta [4]	BC21 [*]	-	0.2019	-	0.2523	0.3243	0.3485	-
OPT [4]	BC21	-	0.3284	-	0.3620	0.3571	0.3561	-
Present	BC21	0.3574 [†]	0.3561	0.3729 [†]	0.4073	0.3804	0.3641	0.3709 [†]
	BC23	0.3331 [†]	0.3325	0.3474 [†]	0.3529	0.3549	0.3556	0.3459 [†]
	BC24	0.3331 [†]	0.3350	0.3474 [†]	0.3572	0.3558	0.3557	0.3459 [†]
AQ [42]	BC21	-	-	0.3283	-	-	-	0.3379
MQ3 [43]	BC22	-	-	0.3491	0.3524	0.3545	-	0.3212
SD6 [44]	BC22	-	-	0.3514	-	-	-	0.3454
BC21	$U = V = 0$ at $X = 0$							
BC22	$U = V = 0$ at $(X, Y) = (0, -h/2)$ and $U = 0$ at $(X, Y) = (0, h/2)$							
BC23	$U = V = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ at $X = 0$							
BC24	$U = V = \varepsilon_y = \theta = 0$ at $X = 0$ and $\gamma_{xy} = 0$ at $(X, Y) = (0, \pm h/2)$							
ALL-3I [9]	Allman triangle element integrated by 3-point interior rule, published in 1988.							
CST [1]	constant strain triangle element.							
FF84 [7]	free formulation triangle element, published in 1984.							
LST-Ret [4]	retrofitting linear strain triangle element.							
OPT [4]	optimal membrane triangle element.							
AQ [42]	Allman-type quadrilateral obtained from an eight-node quadrilateral.							
MQ3 [43]	quadrilateral element with cubic displacement interpolation.							
SD6 [44]	a practical quadrilateral membrane element.							

^{*} Requires one drilling freedom to be fixed, else stiffness is singular.

[†] $V_C = (V_A + V_B)/2$

表 4.3 Cook 題目端點 C 的垂直位移 V_C

Element	BC	Mesh subdivisions						
		1x1	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
ALL-3I [4]	BC31 [*]	-	21.61	23.00	23.66	23.88	23.94	-
CST [4]	BC31	-	11.99	18.28	22.02	23.41	-	-
FF84 [4]	BC31	-	20.36	22.42	23.41	23.79	23.91	-
LST-Reta [4]	BC31 [*]	-	19.82	22.62	23.58	23.86	23.94	-
OPT [4]	BC31	-	20.56	22.45	23.43	23.80	23.91	23.95
Present	BC31	32.93 [†]	25.65	24.86	24.29	24.08	24.01	23.98
	BC32	23.00 [†]	23.59	24.00	23.99	23.97	23.97	23.97
	BC33	23.00 [†]	23.08	23.78	23.89	23.93	23.95	23.96
BC31	$U = V = 0$ at $X = 0$							
BC32	$U = V = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ at $X = 0$							
BC33	$U = V = \varepsilon_y = \theta = 0$ at $X = 0$ and $\gamma_{xy} = 0$ at $(X, Y) = (0, 0), (0, 44)$.							
ALL-3I [9]	Allman triangle element integrated by 3-point interior rule, published in 1988.							
CST [1]	constant strain triangle element.							
FF84 [7]	free formulation triangle element, published in 1984.							
LST-Ret [4]	retrofitting linear strain triangle element.							
OPT [4]	optimal membrane triangle element.							

^{*} Requires one drilling freedom to be fixed, else stiffness is singular.

[†] $V_C = (V_D + V_E)/2$

表 4.4 Cook 題目 A 點的最大主應力 $\sigma_{A(max)}$ 與 B 點的最小主應力 $\sigma_{B(min)}$

Element	BC	$\sigma_{A(max)}$			$\sigma_{B(min)}$		
		2x2	4x4	8x8	2x2	4x4	8x8
CST [4]	BC31	0.0760	0.1498	0.1999	-0.0360	-0.1002	-0.1567
FF84 [4]	BC3	0.1700	0.2129	0.2309	-0.1804	-0.1706	-0.1902
Present	BC32	0.2302	0.2380	0.2386	-0.1724	-0.2047	-0.2039
	BC33	0.2301	0.2331	0.2363	-0.1861	-0.2066	-0.2041
	BC34	0.2077	0.2322	0.2364	-0.1914	-0.2067	-0.2040
SD6 [44]	BC31	0.1955	0.2308	0.2360	-0.1856	-0.1930	-0.1998
BC31	$U = V = 0$ at $X = 0$						
BC32	$U = V = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ at $X = 0$						
BC33	$U = V = \varepsilon_y = \theta = 0$ at $X = 0$ and $\gamma_{xy} = 0$ at $(X, Y) = (0, 0), (0, 44)$.						
CST [1]	constant strain triangle element.						
FF84 [7]	free formulation triangle element, published in 1984.						
SD6 [44]	a practical quadrilateral membrane element.						

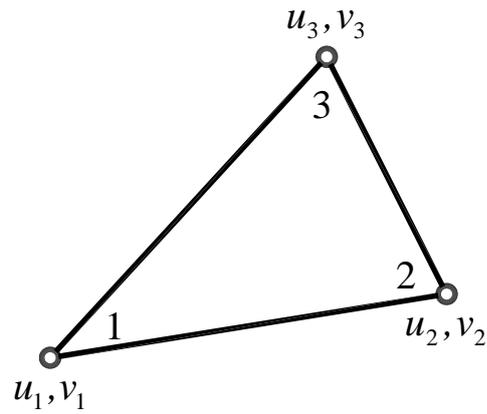


表 4.5 簡支梁受到兩端彎矩作用下的中心位移與端點轉角

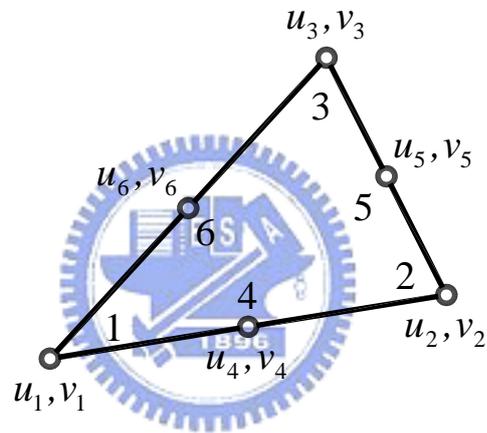
Element	Mesh	Load	Center displacement	End rotation
MQ3 [43]	M41	CM	1.5000	0.6000
	M42	CM	1.2625	0.6172
	M41	M4V	1.5003	0.7056
	M42	M4V	1.4160	0.6843
SD6 [44]	M41	CM	1.5000	0.6000
	M42	CM	1.4473	0.5879
	M41	M4V	1.5104	0.6519
	M42	M4V	1.4556	0.6595
Present [†]	M41	CM	1.5036	0.6301
	M42	CM	1.5078	0.6342
	M43	CM	1.5098	0.6117
	M41	M4V	1.5343	0.7451
	M42	M4V	1.5435	0.7651
	M43	M4V	1.5710	0.6518
	M41	LNS	1.5000	0.6000
	M42	LNS	1.5000	0.6000
	M43	LNS	1.5000	0.6000
CM	couple moment applied at two ends of beam, see figure 4.7(c).			
M4V	concentrated moment applied at the four vertices, see figure 4.7(c).			
LNS	linear distributed normal stress, see figure 4.7(c).			
MQ3 [43]	quadrilateral element with cubic displacement interpolation.			
SD6 [44]	shear wall element of six degrees of freedom.			

[†] Center displacement = $(V_A + V_B)/2$, End rotation = $-\theta_C$.

(a)



(b)



(c)

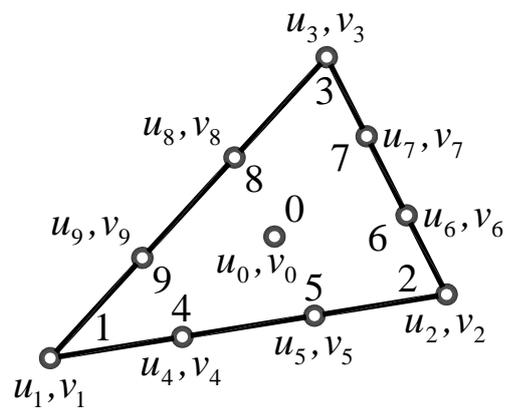


圖 1.1 (a)CST 元素節點位置與節點參數 (b)LST 元素節點位置與節點參數
(c)QST-10/20C 元素節點位置與節點參數

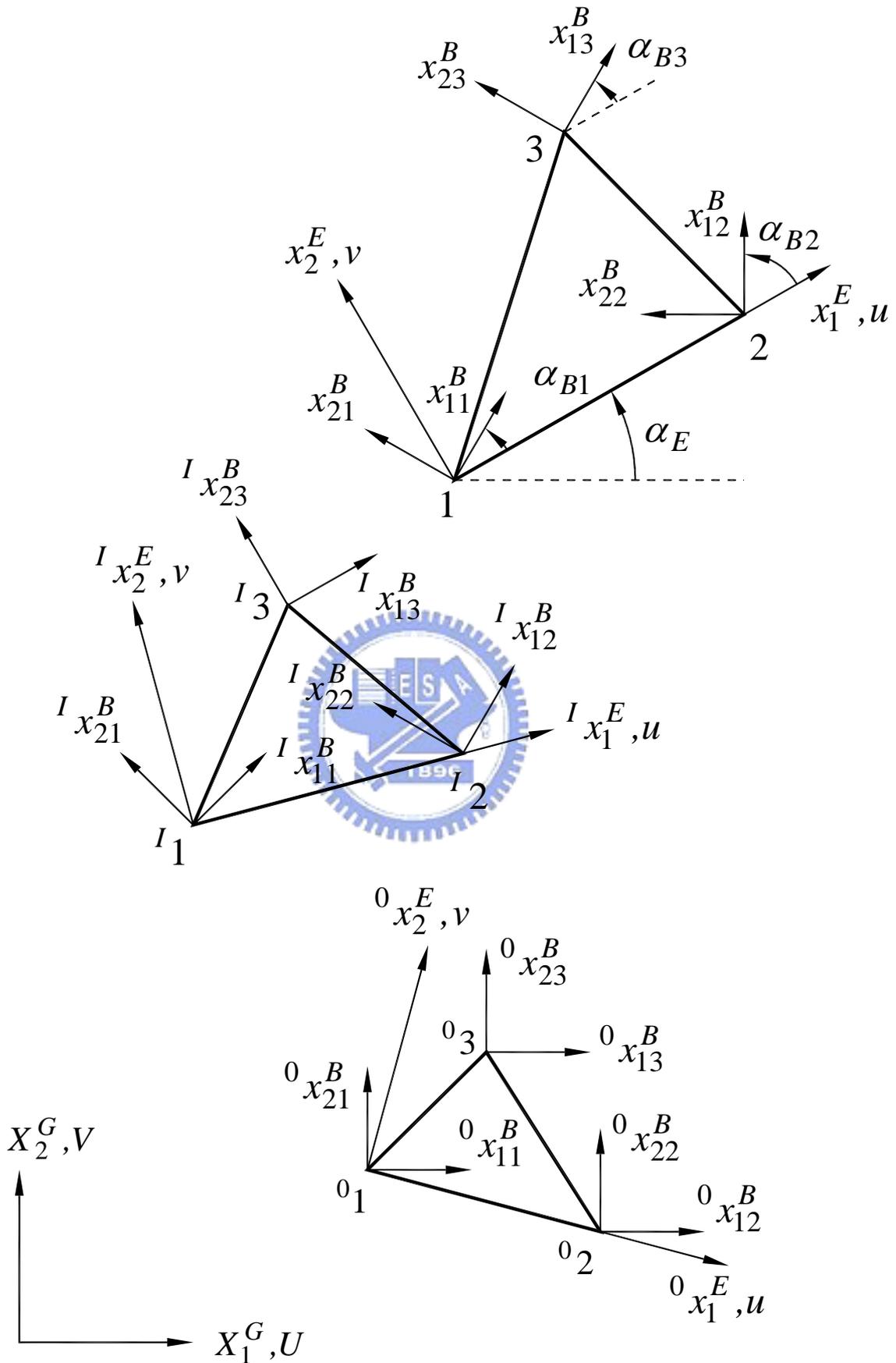


圖 2.1 固定總體座標、元素座標與節點基礎座標

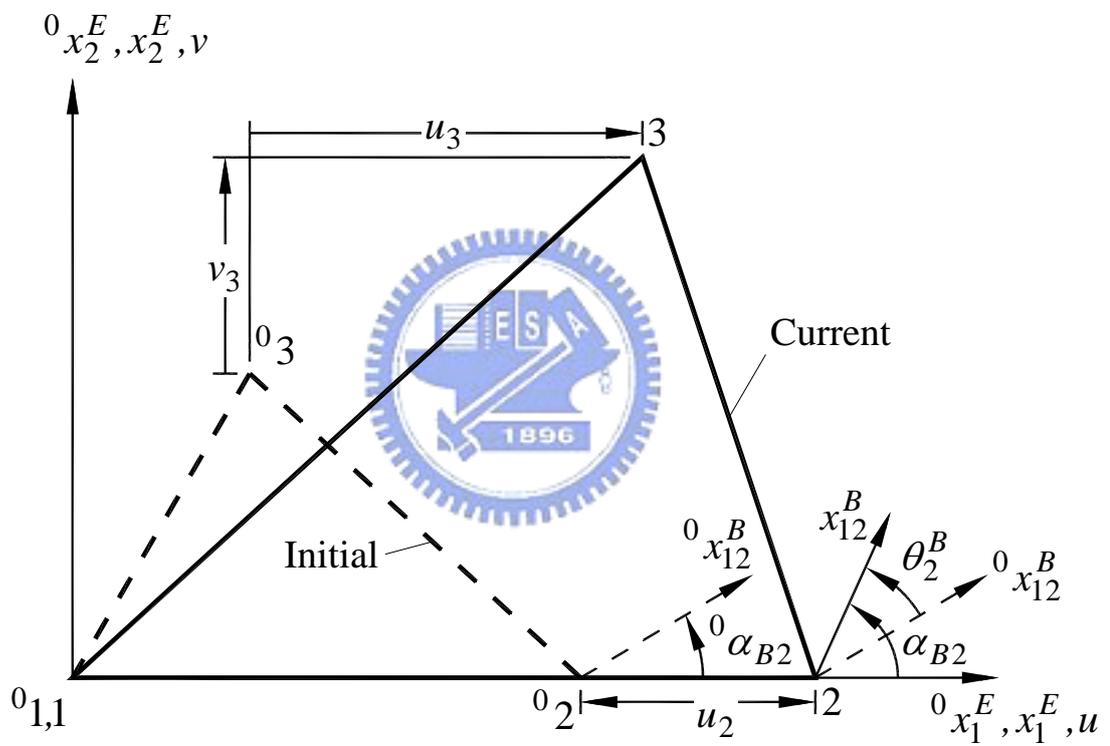
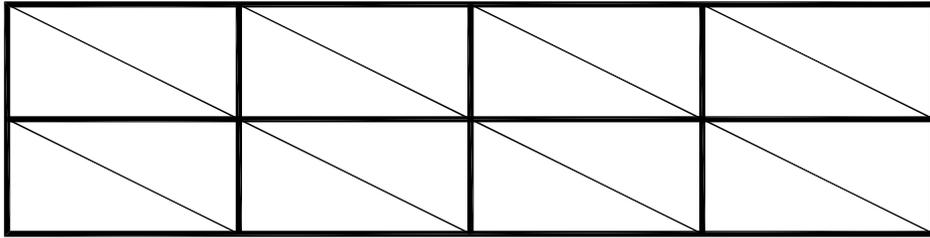


圖 2.2 元素變形示意圖

(a)



(b)

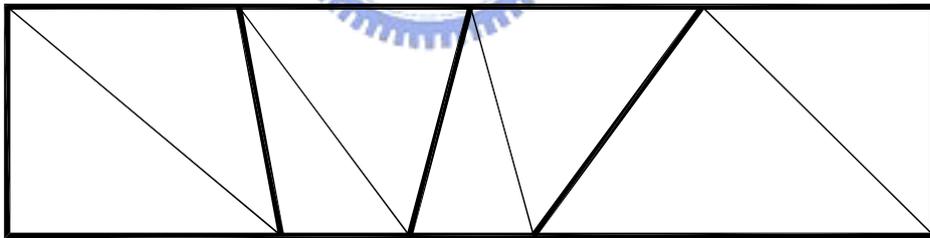
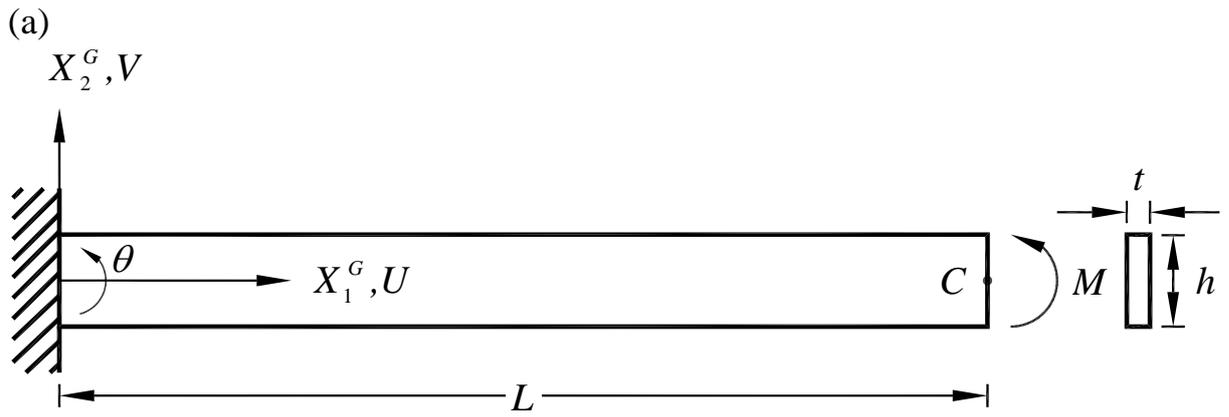


圖 4.1 網格示意圖 (a)4x2x2 網格 (b) 4x1x2 網格



$$L = 32, h = 2, t = 1, E = 768, \nu = 0.25$$

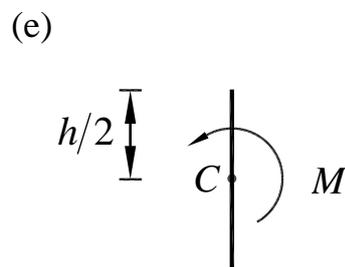
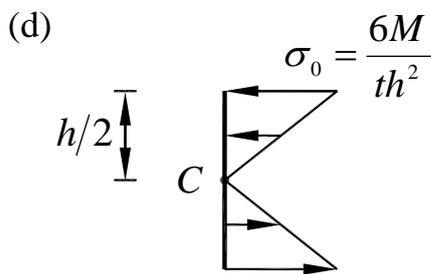
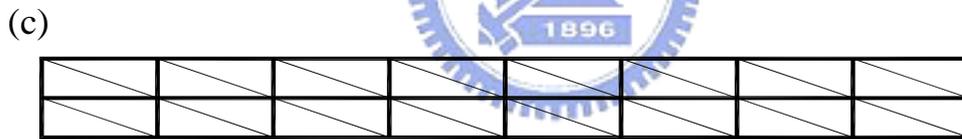
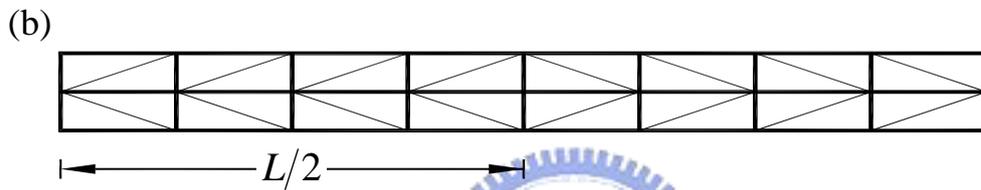
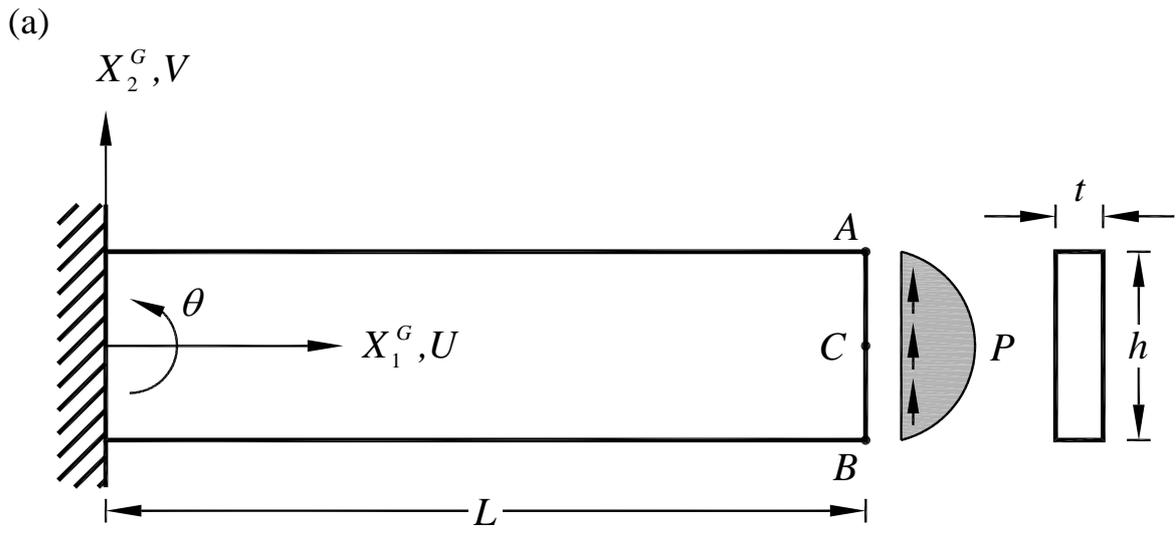


圖 4.2 懸臂梁受到彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b) M11 網格 8x2 示意圖
(c)M12 網格 8x2 示意圖 (d)負荷 LNS 示意圖 (e)負荷 M1S 示意圖



$L = 48, h = 12, t = 1, E = 30000, \nu = 0.25$

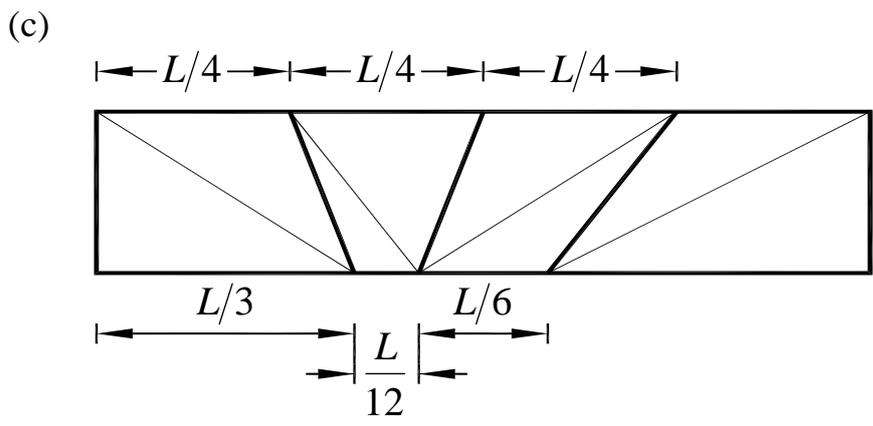
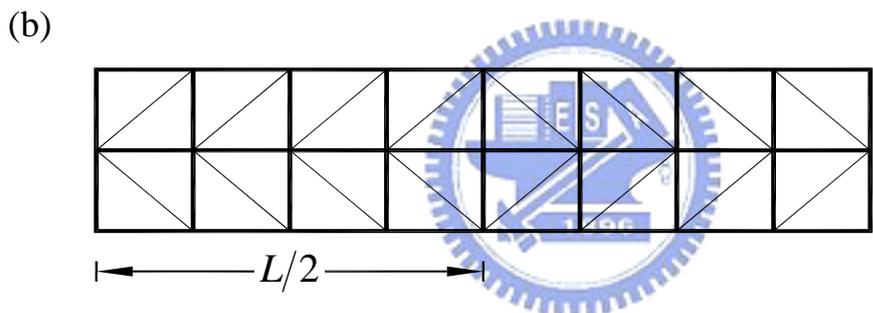
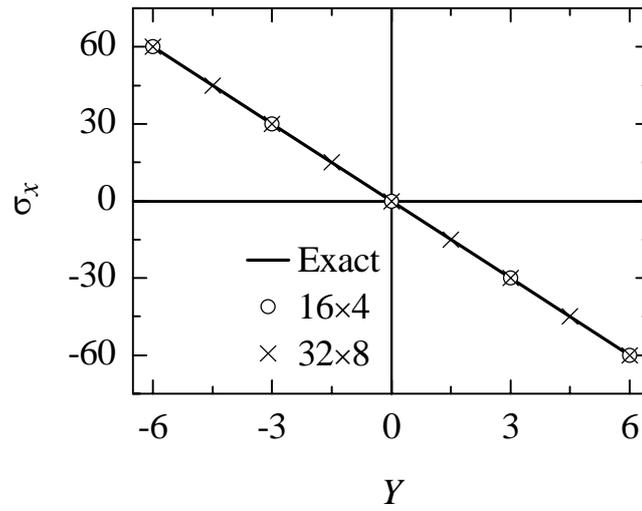
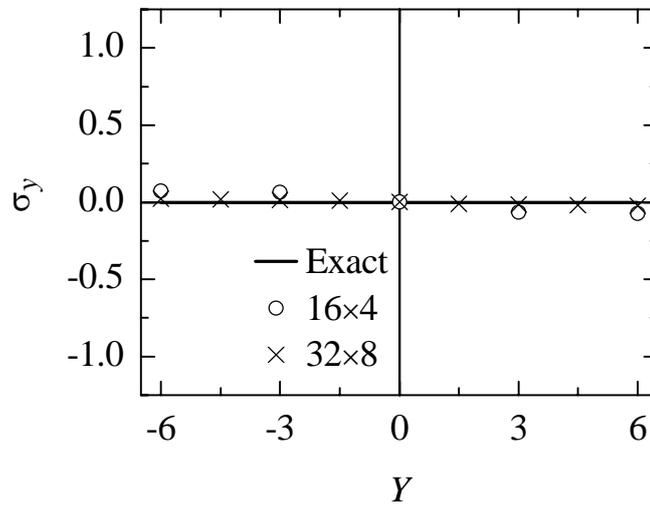


圖 4.3 懸臂梁受到剪力作用 (a)結構尺寸示意圖
 (b)網格 8x2 示意圖 (c)扭曲網格 4x1^D 示意圖

(a)



(b)



(c)

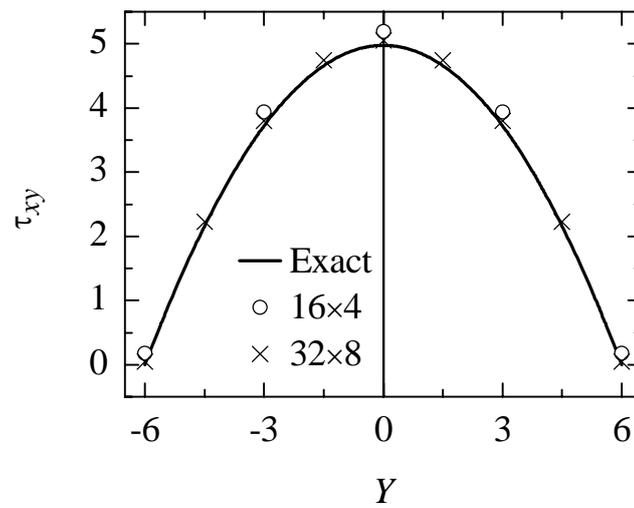
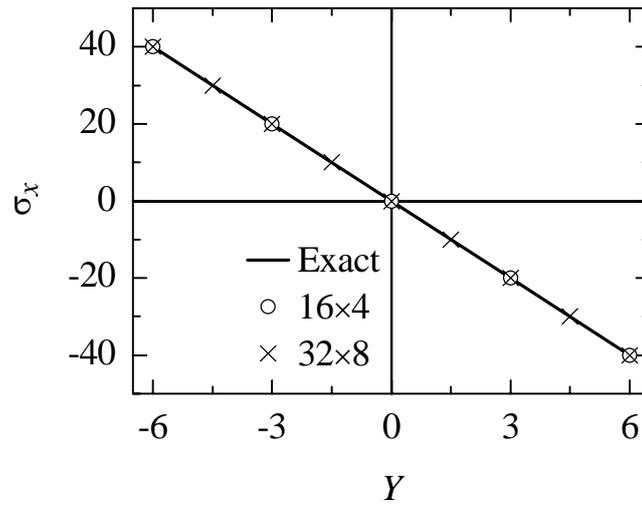
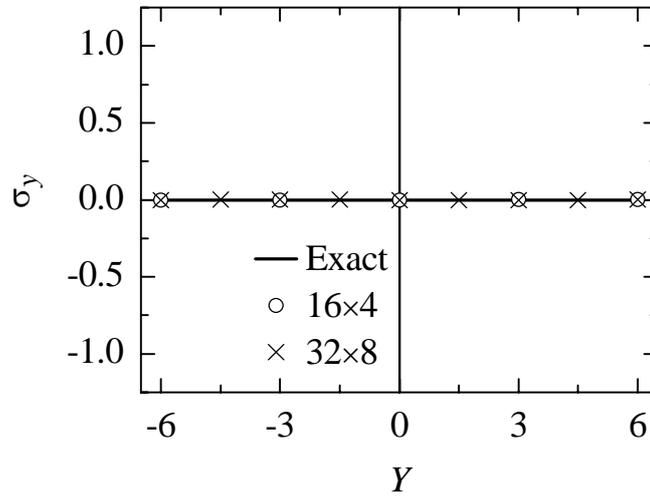


圖 4.4 懸臂梁受到剪力作用不同網格下在 $X = 12$ 處的應力分佈
(a) σ_x (b) σ_y (c) τ_{xy}

(a)



(b)



(c)

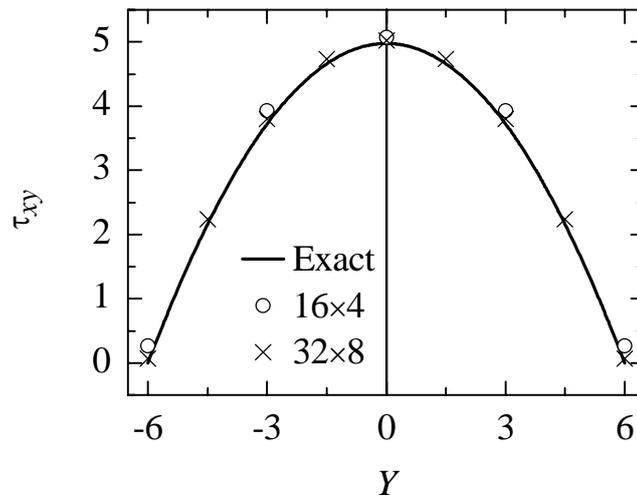
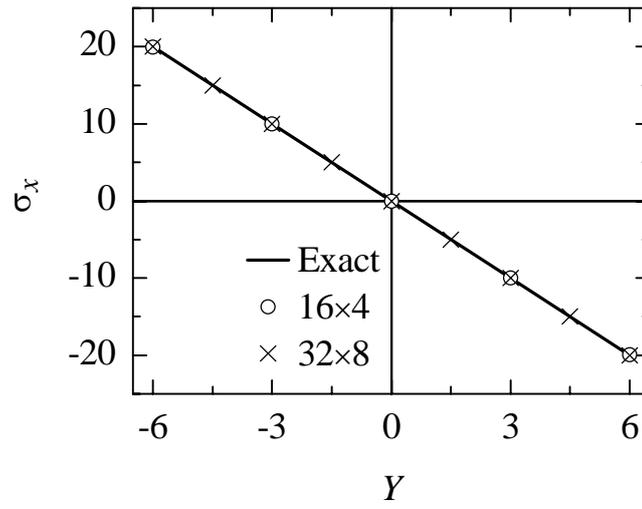
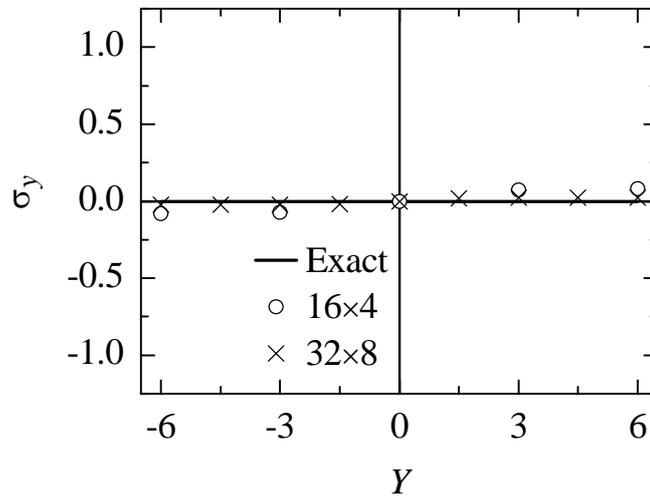


圖 4.5 懸臂梁受到剪力作用不同網格下在 $X = 24$ 處的應力分佈
(a) σ_x (b) σ_y (c) τ_{xy}

(a)



(b)



(c)

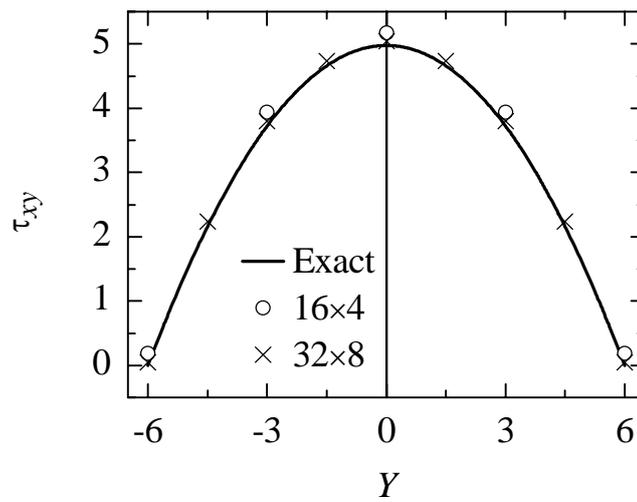
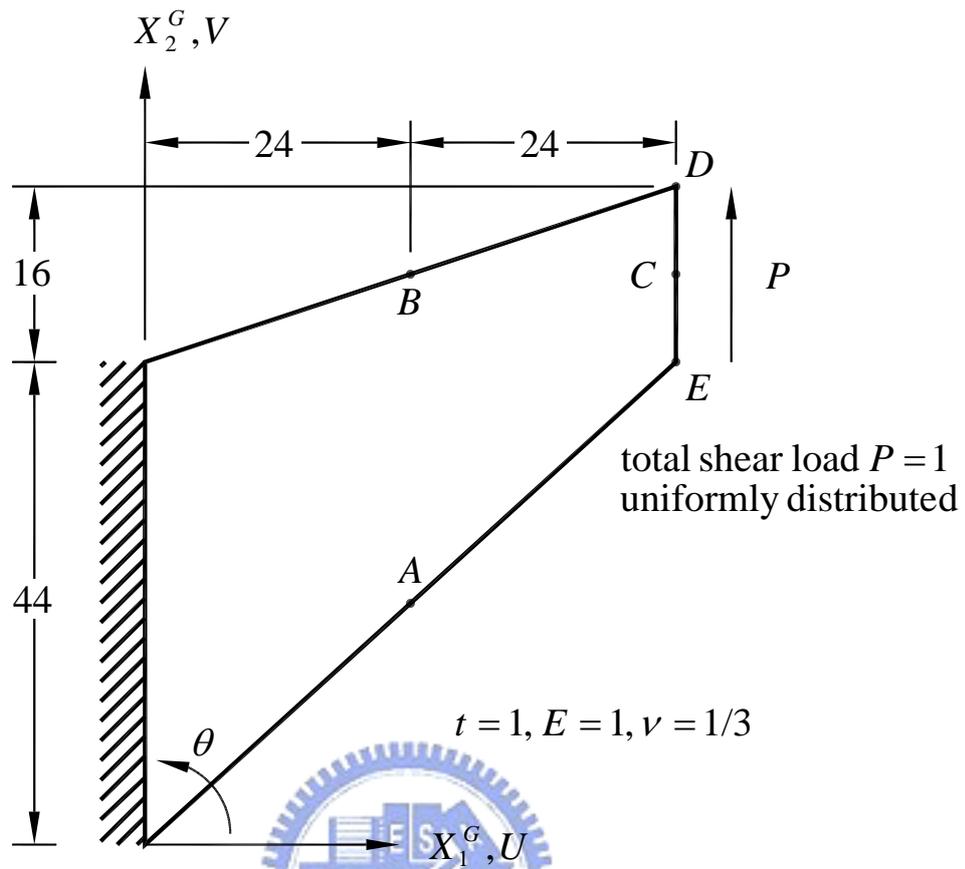


圖 4.6 懸臂梁受到剪力作用不同網格下在 $X = 36$ 處的應力分佈

(a) σ_x (b) σ_y (c) τ_{xy}

(a)



(b)

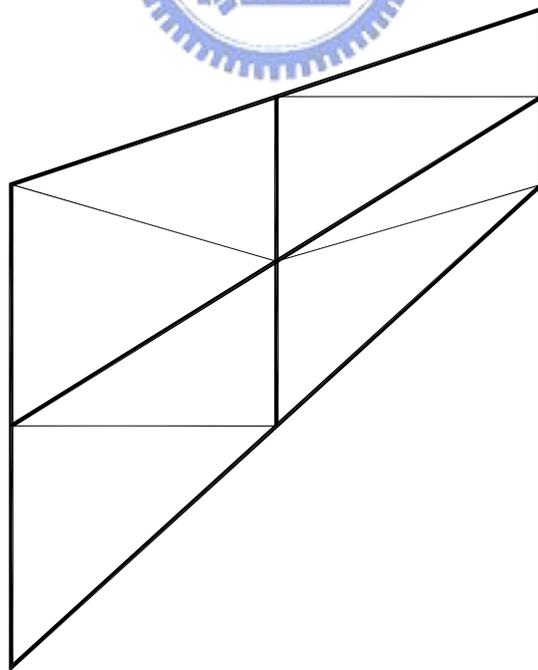


圖 4.7 Cook 題目 (a)結構尺寸示意圖 (b)2x2 網格示意圖

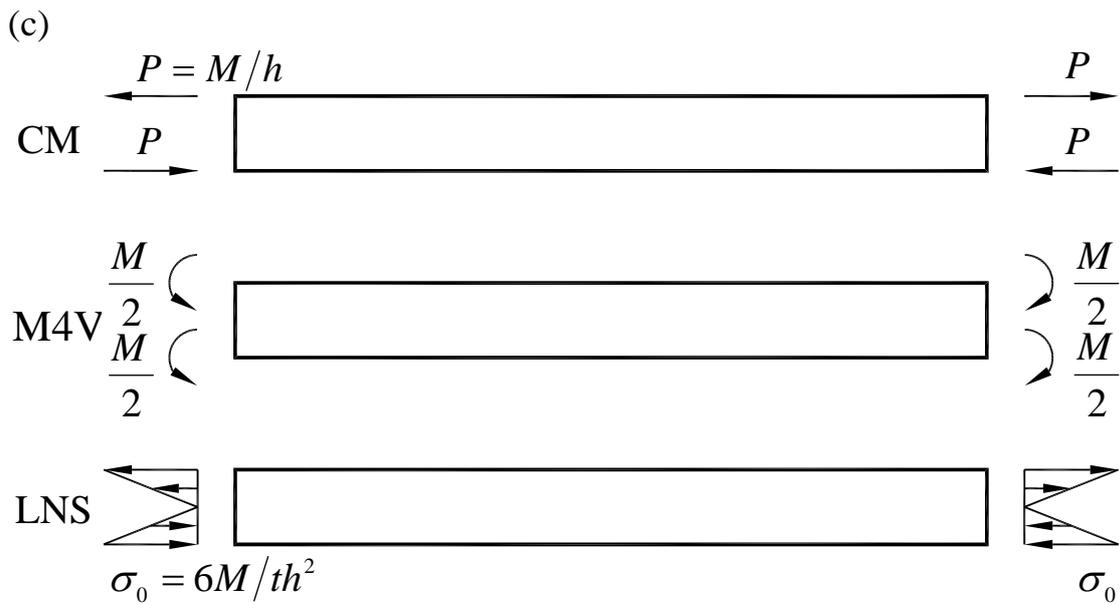
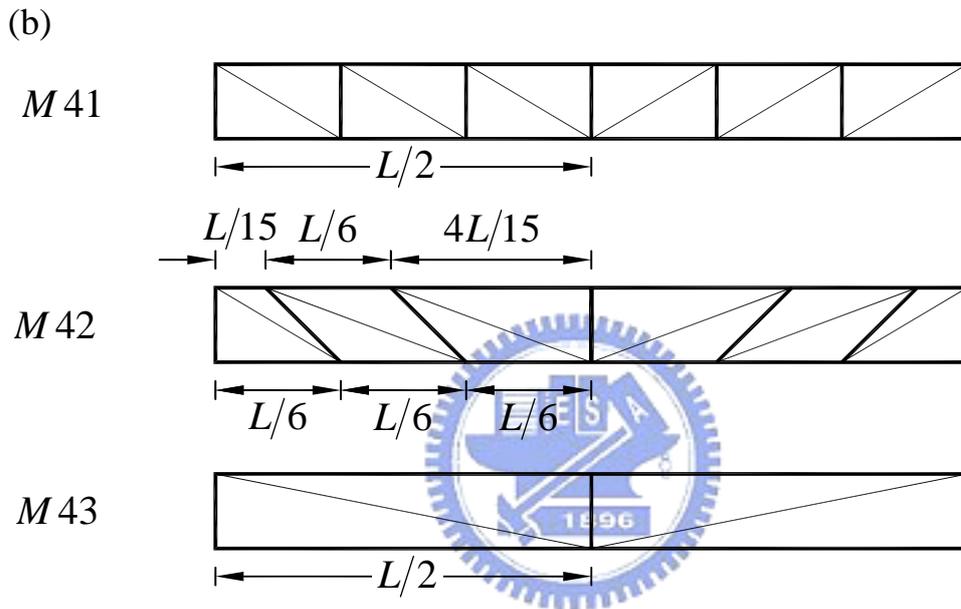
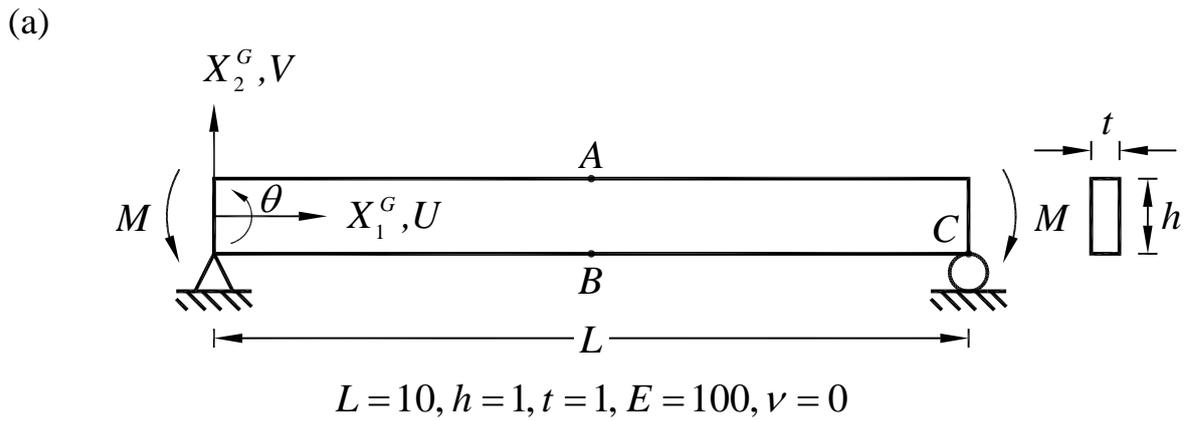
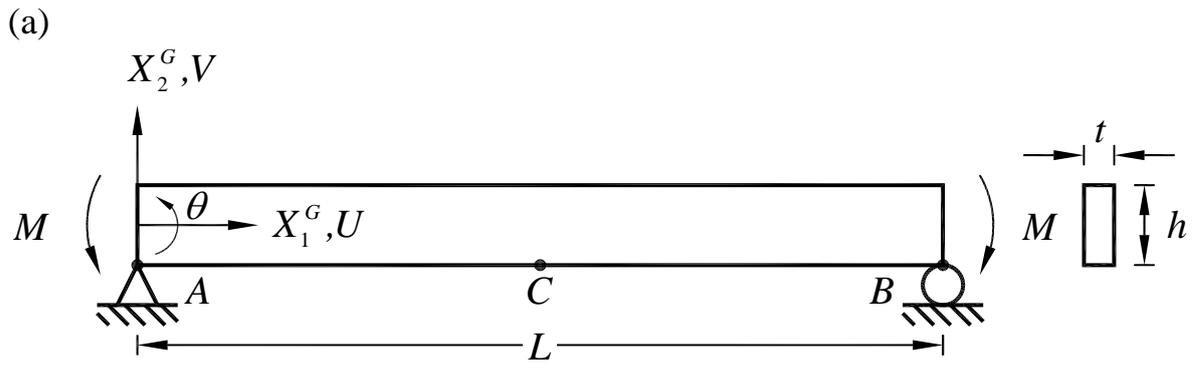


圖 4.8 簡支梁受到兩端彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖
 (b)網格 M41、M42 與 M43 示意圖 (c)負荷 CM、M4V 與 LNS 示意圖



$L = 1000, h = 10, t = 1, E = 10^5, \nu = 0$ and $\nu = 0.25$

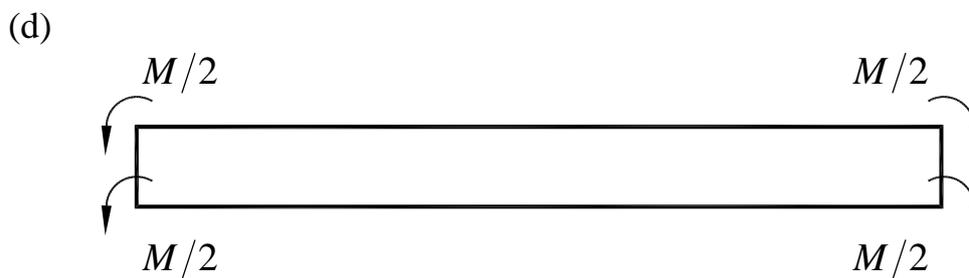
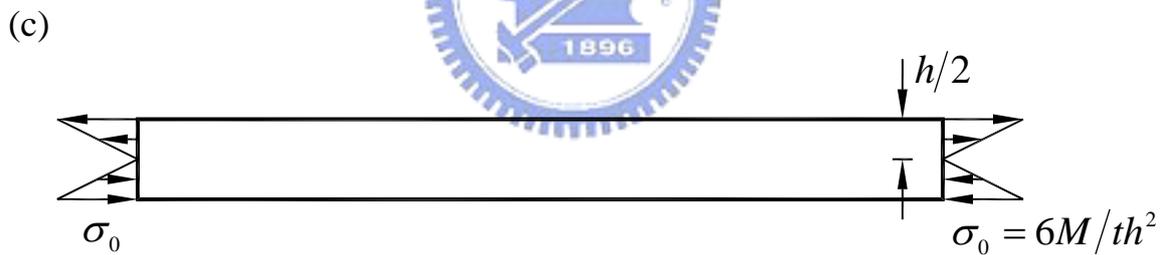
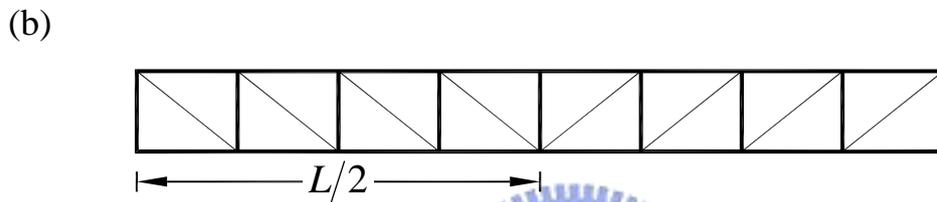


圖 4.9 簡支梁受到兩端彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 8x1 示意圖 (c)負荷 LNS 示意圖 (d)負荷 M4V 示意圖

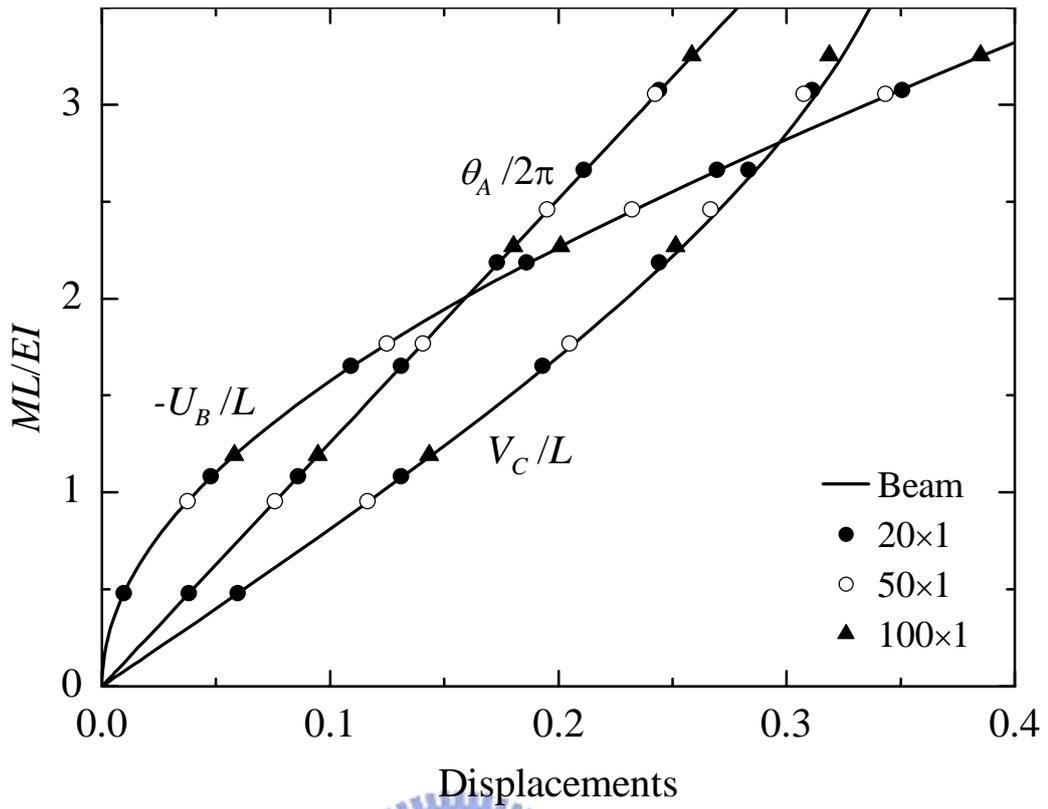


圖 4.10 簡支梁受到兩端彎矩(LNS)作用，不同網格下之無因次負荷位移曲線圖。

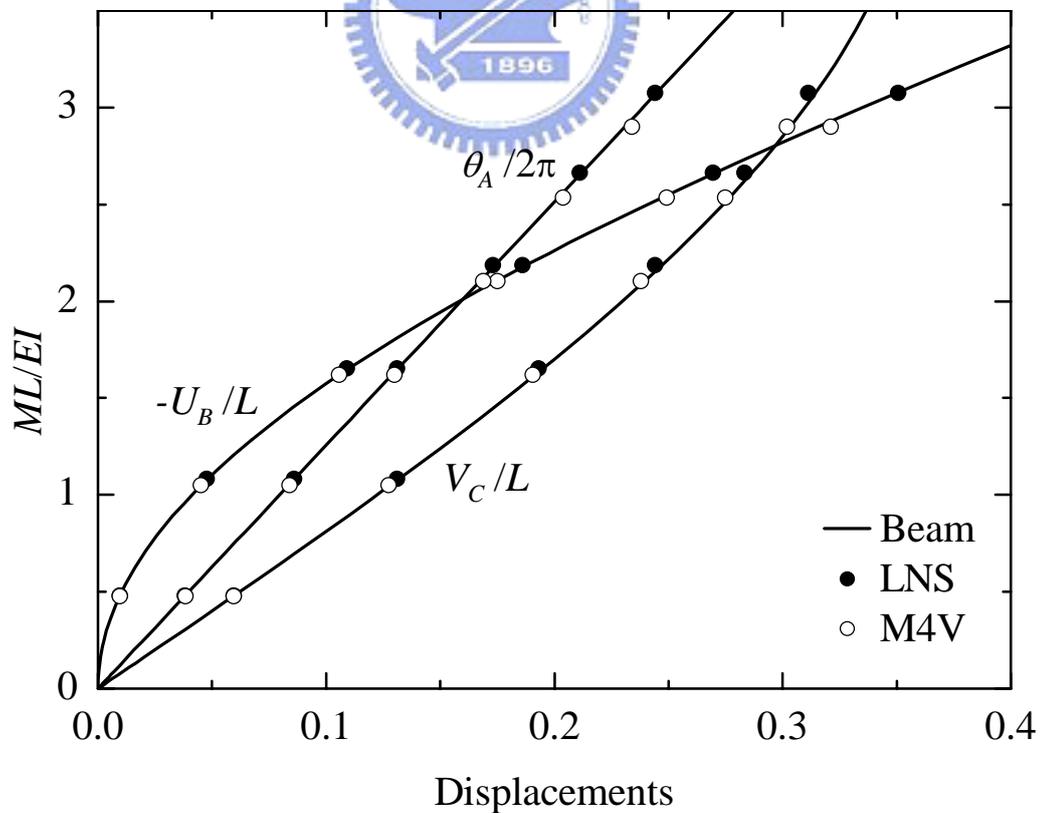


圖 4.11 簡支梁(Mesh 20x1)受到兩端彎矩作用，不同負荷型態下之無因次負荷位移曲線圖。

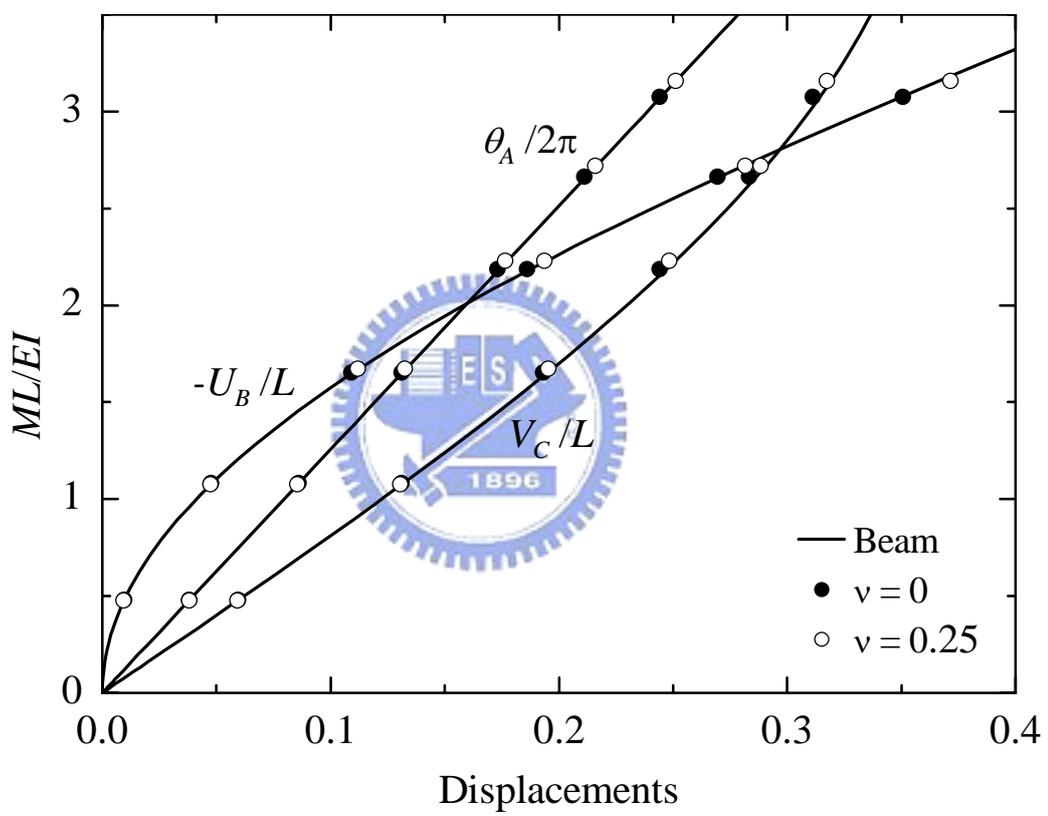
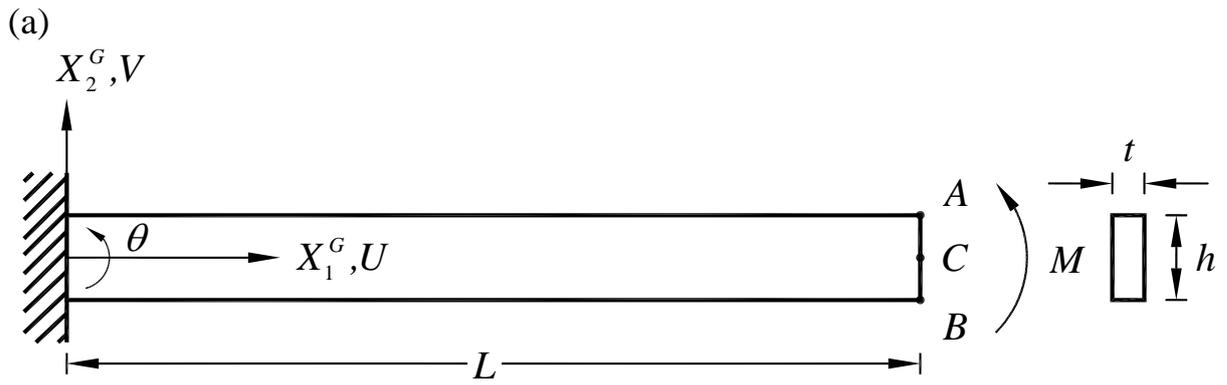


圖 4.12 簡支梁(Mesh 20×1)受到兩端彎矩(LNS)作用，不同蒲松比下之無因次負荷位移曲線圖。



$L = 1000$ and $L = 10000$, $h = 10$, $t = 1$, $E = 10^5$, $\nu = 0$ and $\nu = 0.25$

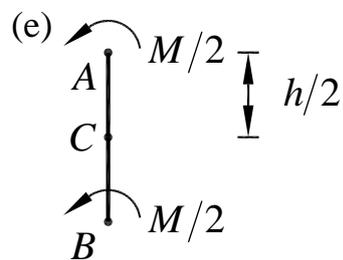
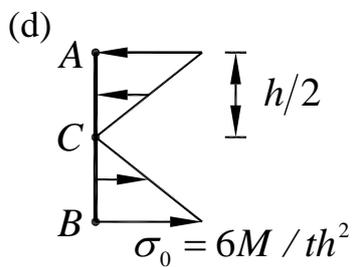
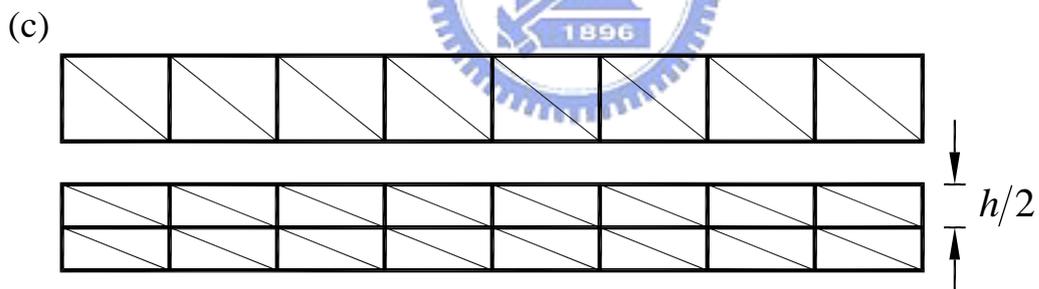
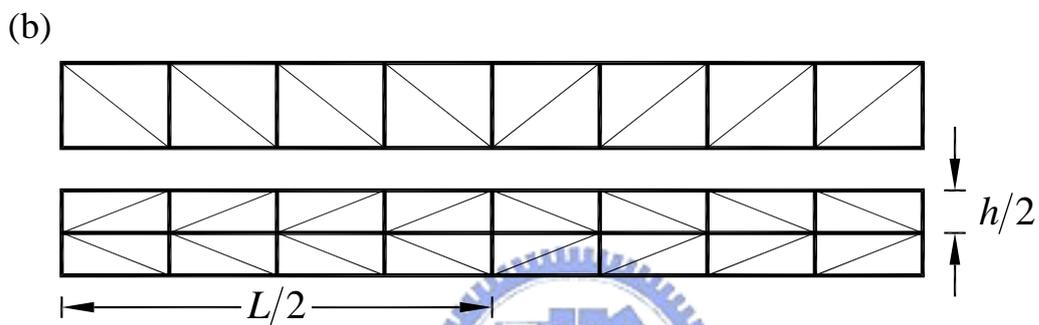


圖 4.13 懸臂梁受到彎矩作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)M61 網格 8x1 與 8x2 示意圖 (c)M62 網格 8x1 與 8x2 示意圖 (d)負荷 LNS 示意圖 (e)負荷 M2V 示意圖

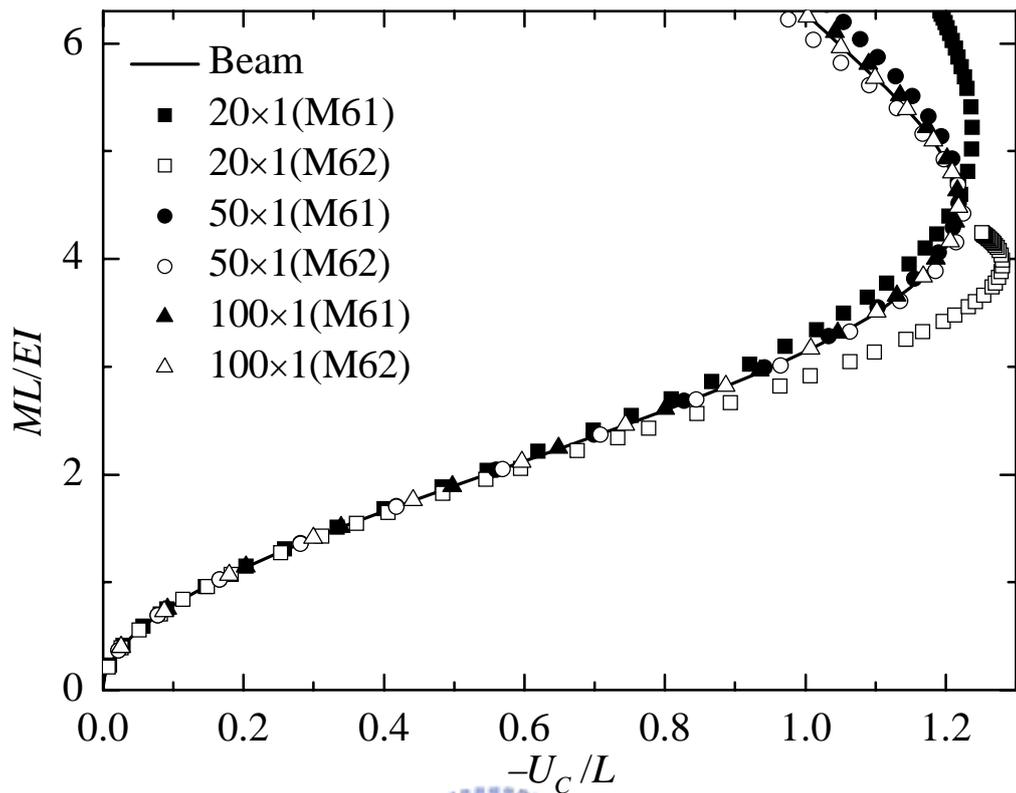


圖 4.14 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層網格下的 $M-U_c$ 曲線圖。

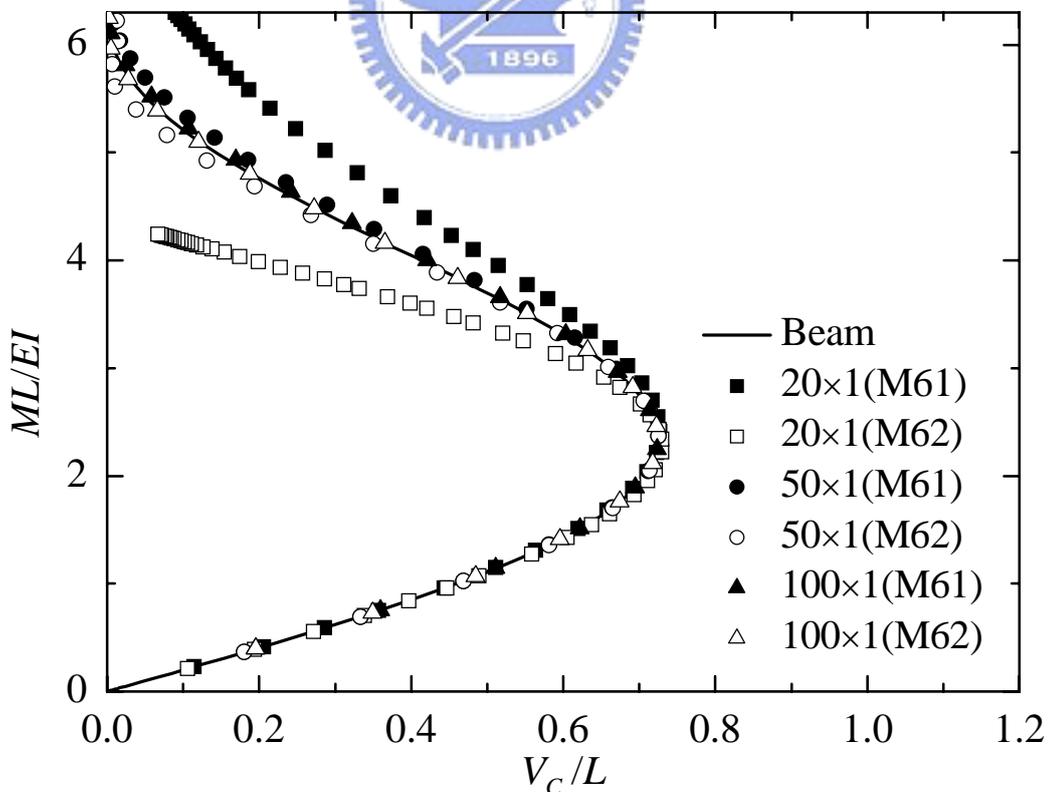


圖 4.15 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層網格下的 $M-V_c$ 曲線圖。

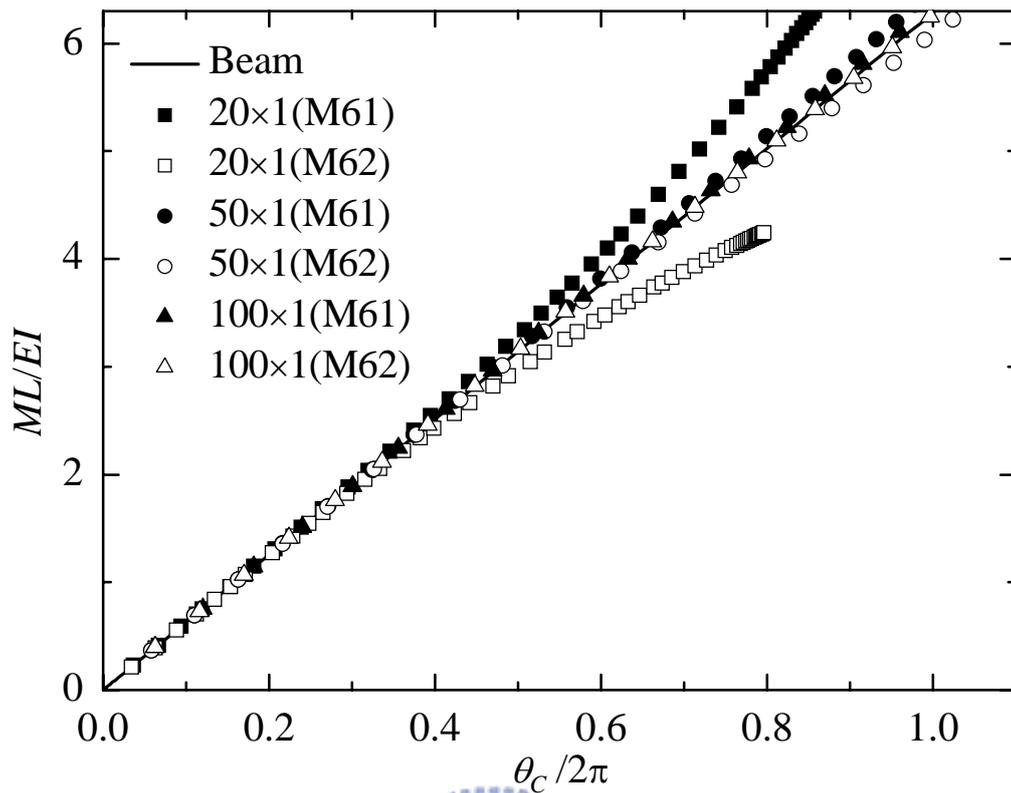


圖 4.16 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層網格下的 $M - \theta_c$ 曲線圖。

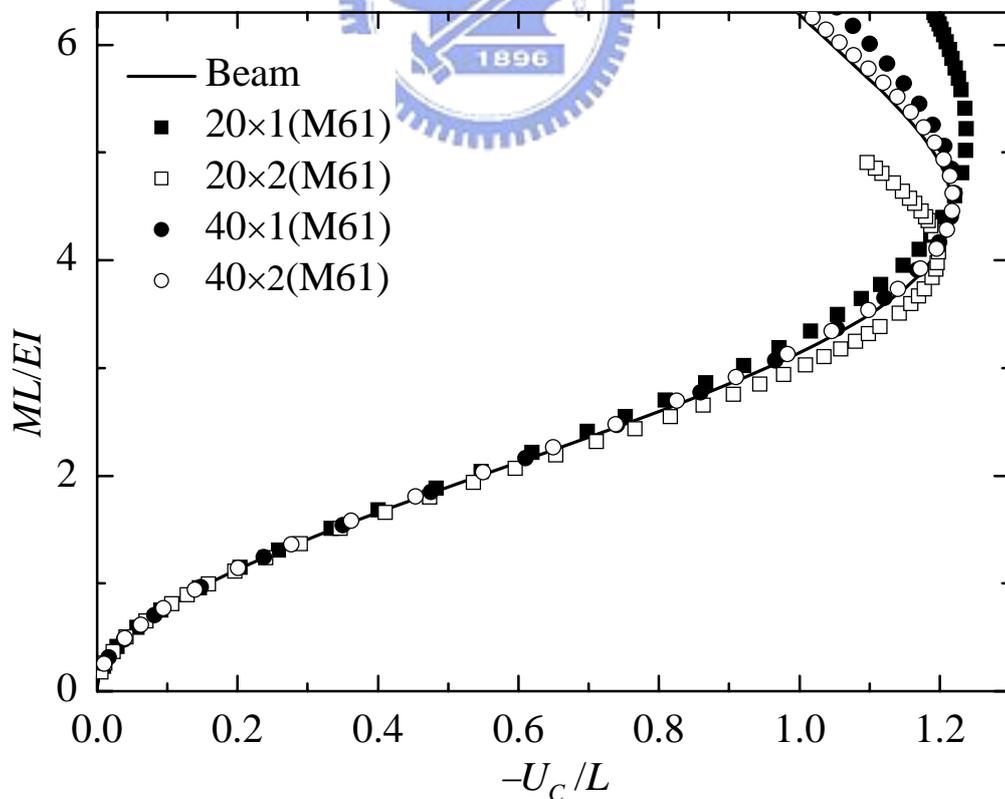


圖 4.17 懸臂梁($L = 1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層及雙層網格下的 $M - U_c$ 曲線圖。

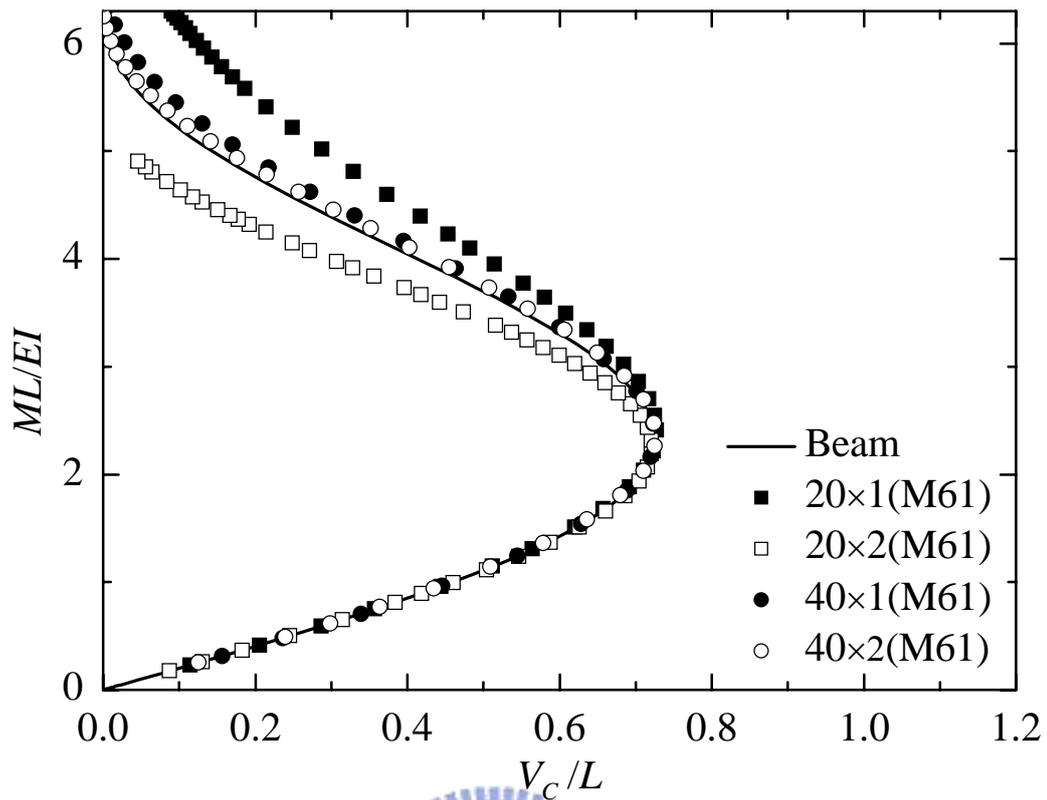


圖 4.18 懸臂梁($L=1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層及雙層網格下的 $M-V_C$ 曲線圖。

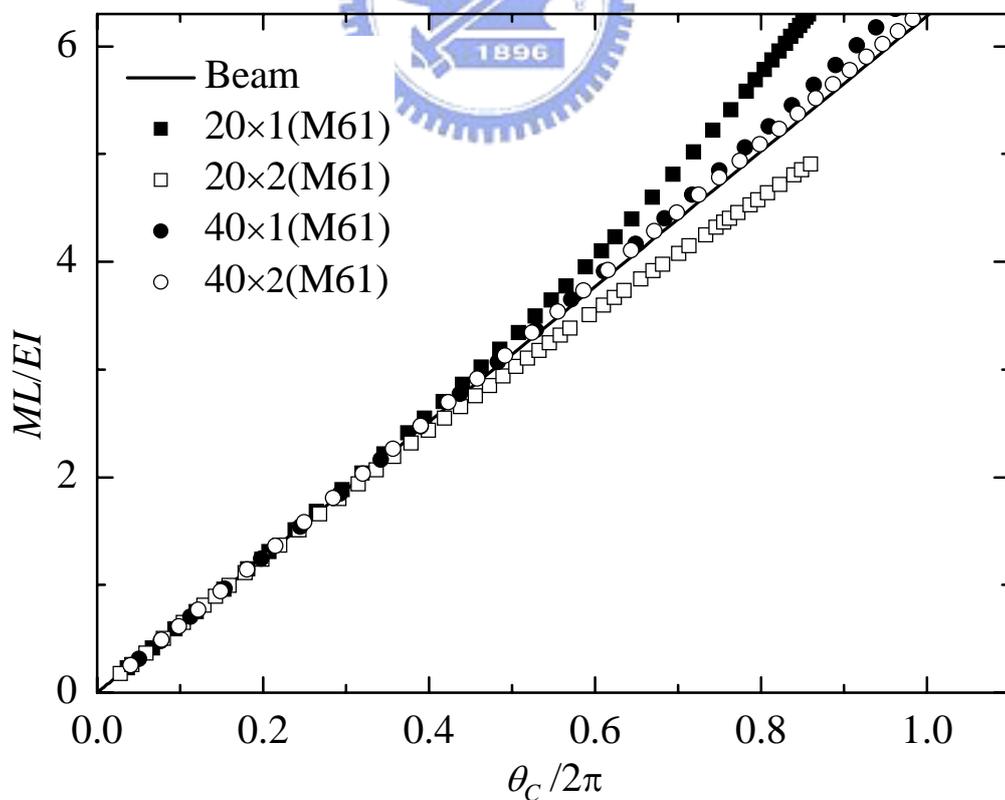


圖 4.19 懸臂梁($L=1000$)受到彎矩(LNS)作用，不同單層及雙層網格下的 $M-\theta_c$ 曲線圖。

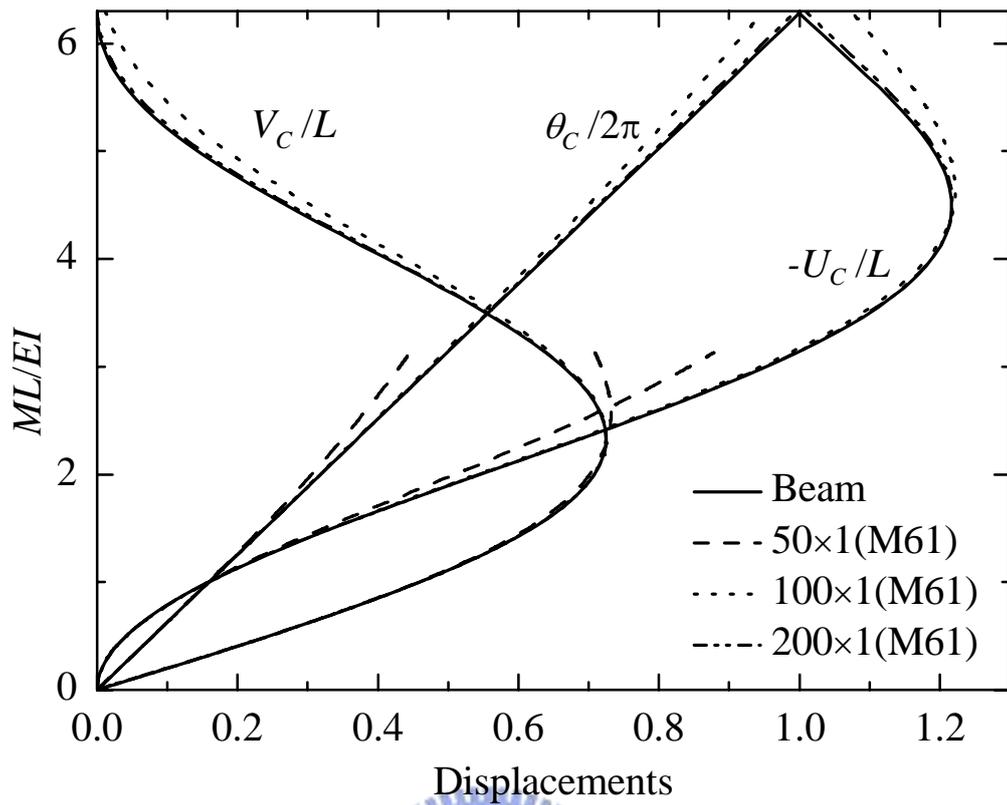


圖 4.20 懸臂梁($L = 10000$)受到彎矩(LNS)作用，不同網格下之無因次負荷位移曲線圖。

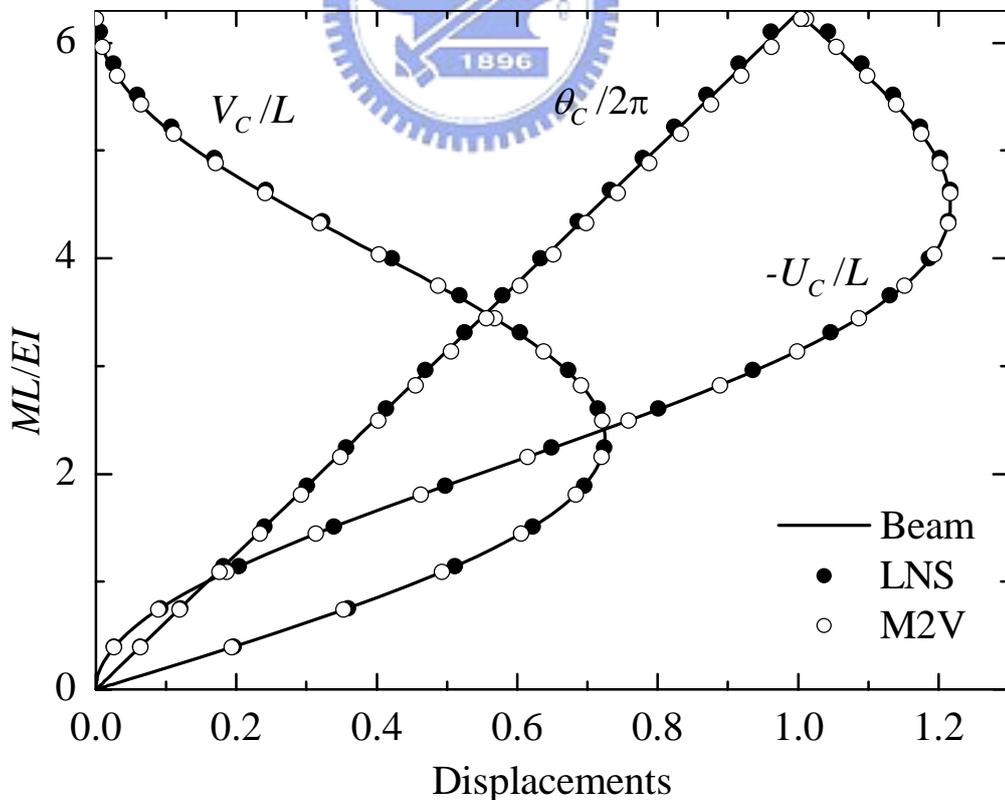


圖 4.21 懸臂梁($L = 1000$ 、M61 網格 100×1)受到彎矩作用，不同負荷型態下之無因次負荷位移曲線圖。

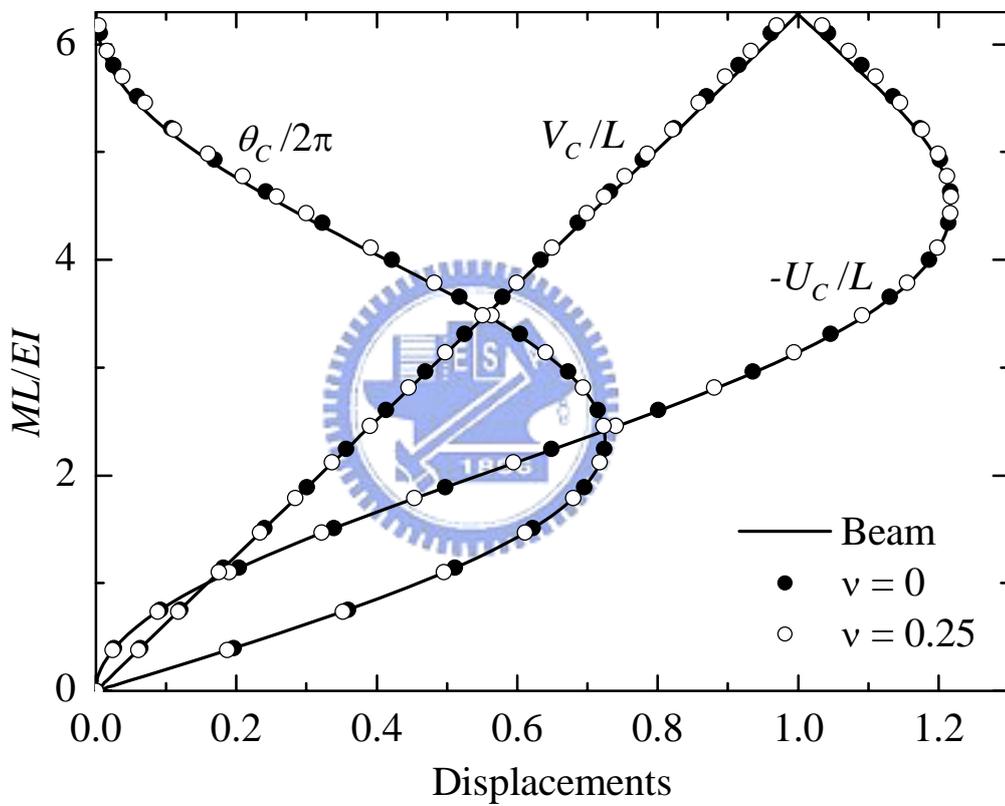
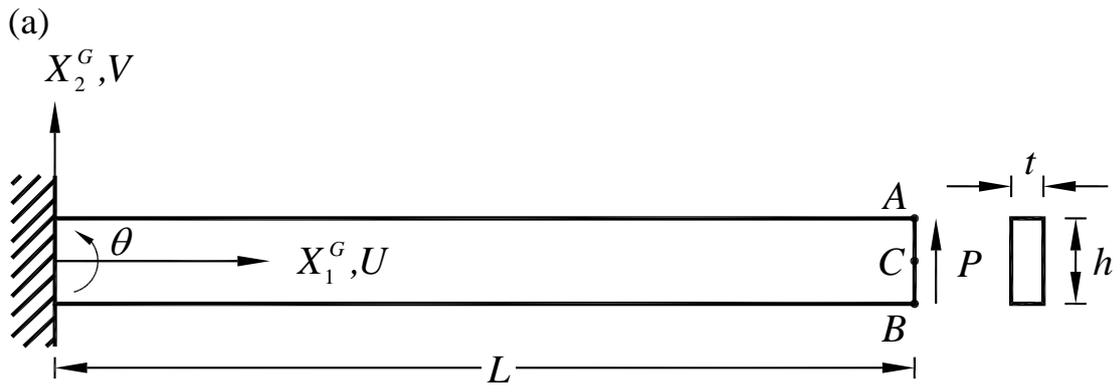


圖 4.22 懸臂梁($L=1000$ 、M61 網格 100×1)受到彎矩(LNS)作用，不同蒲松比下之無因次負荷位移曲線圖。



$L = 1000, h = 10, t = 1, E = 10^5, \nu = 0$ and $\nu = 0.25$

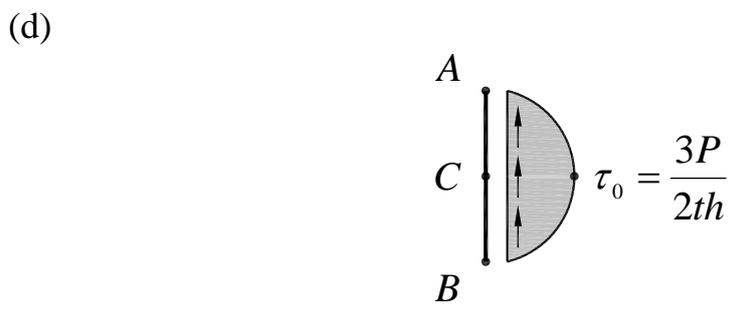
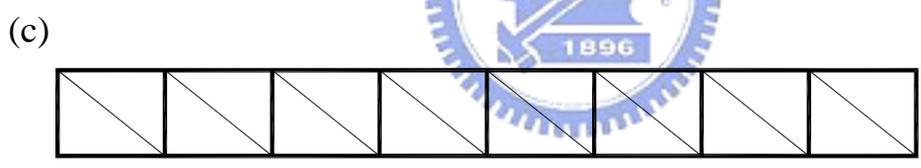
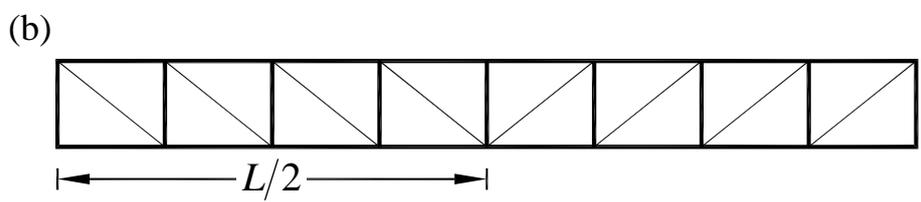


圖 4.23 懸臂梁受到剪力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)M71 網格 8×1 示意圖 (c)M72 網格 8×1 示意圖 (d)二次分佈負荷示意圖

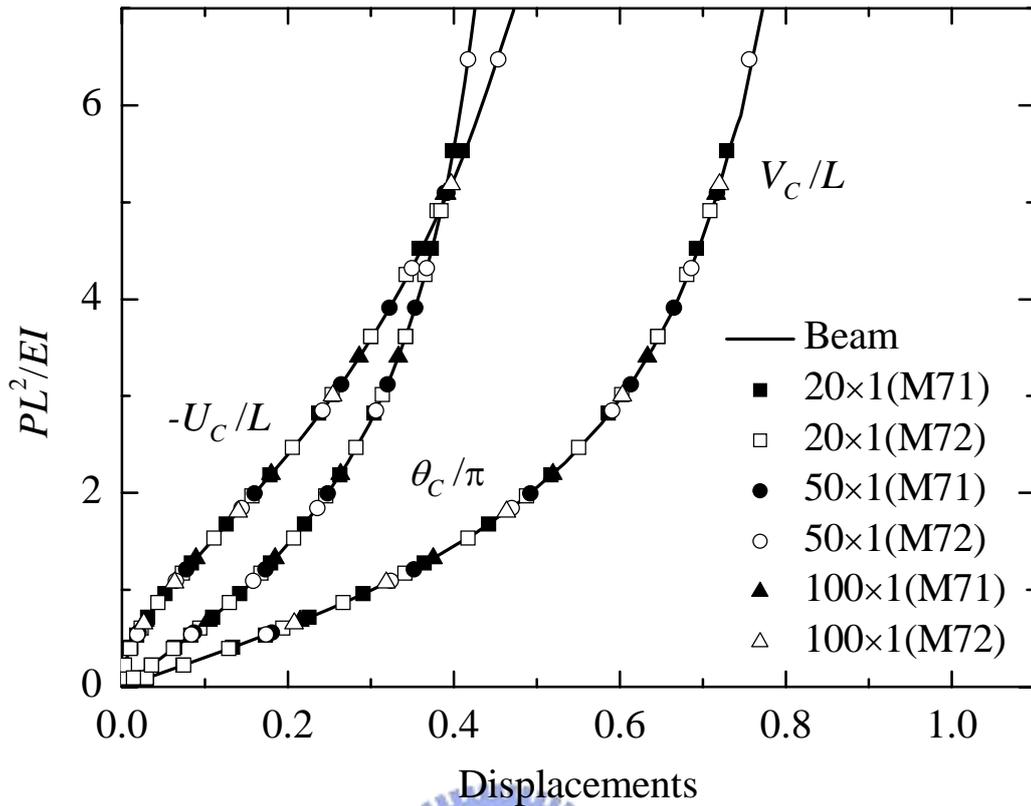


圖 4.24 懸臂梁受到剪力作用，不同網格下之無因次負荷位移曲線圖。

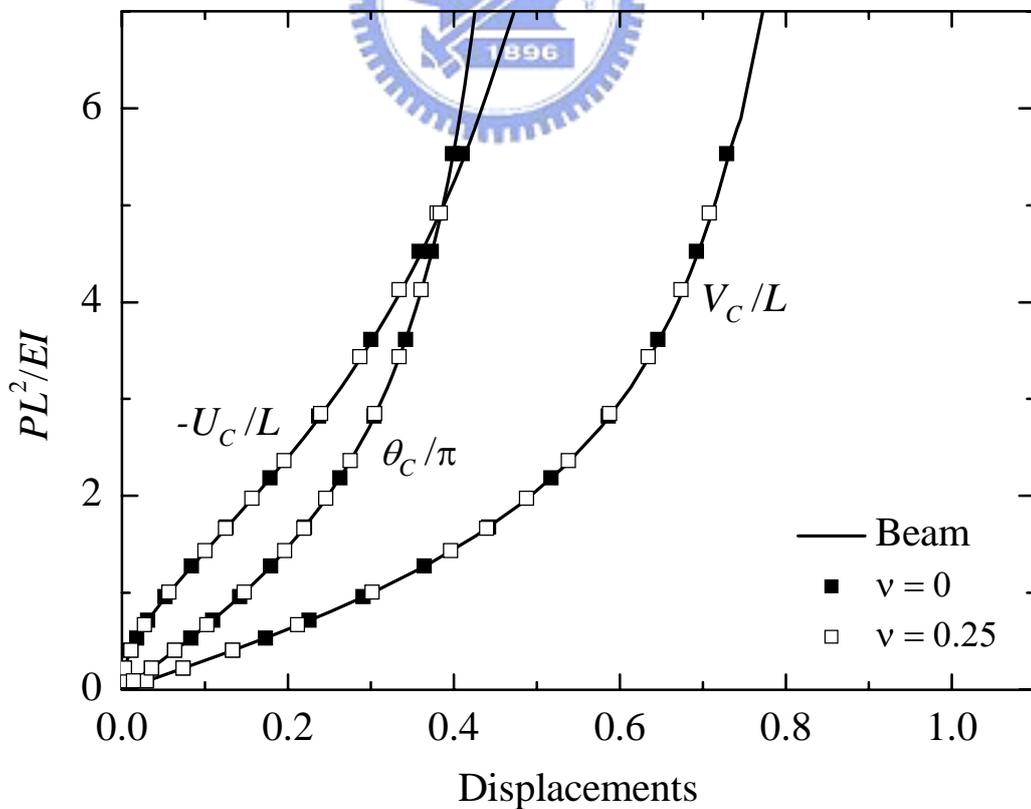
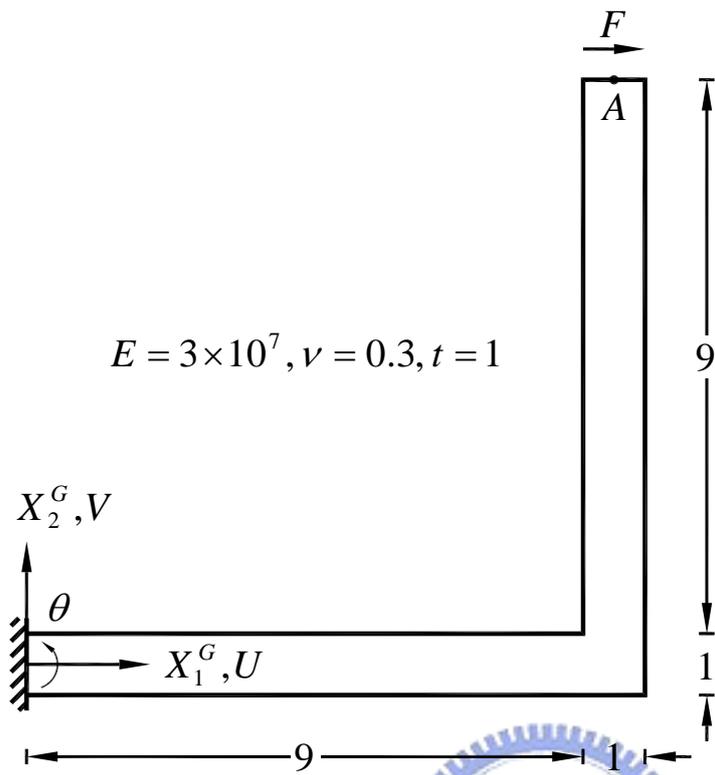


圖 4.25 懸臂梁(M71 網格 20×1)受到剪力作用，不同蒲松比下之無因次負荷位移曲線圖。

(a)



(b)

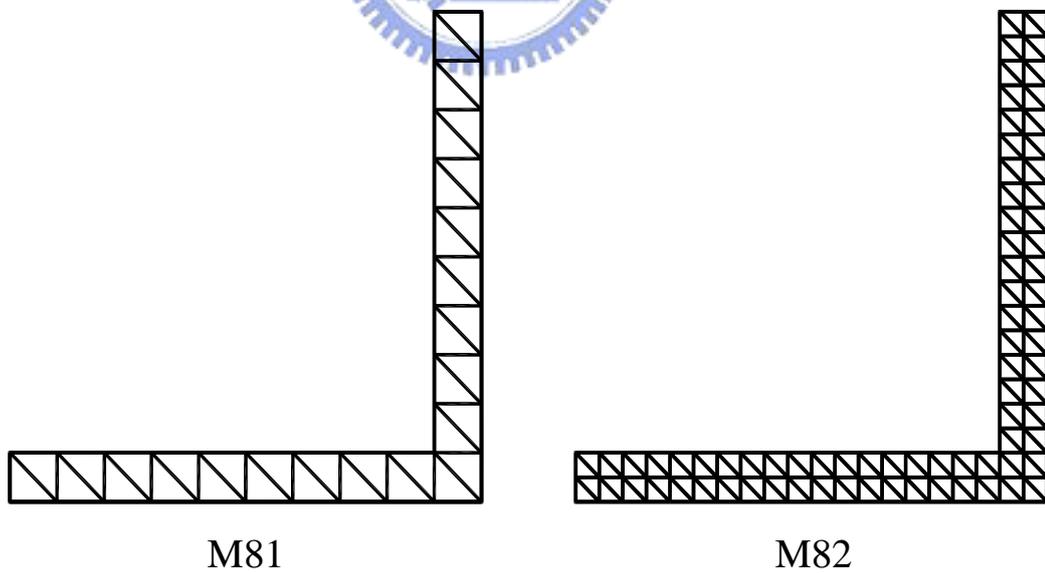


圖 4.26 直角構架受到端點剪力作用 (a)結構尺寸示意圖
(b)網格 M81 與網格 M82 示意圖

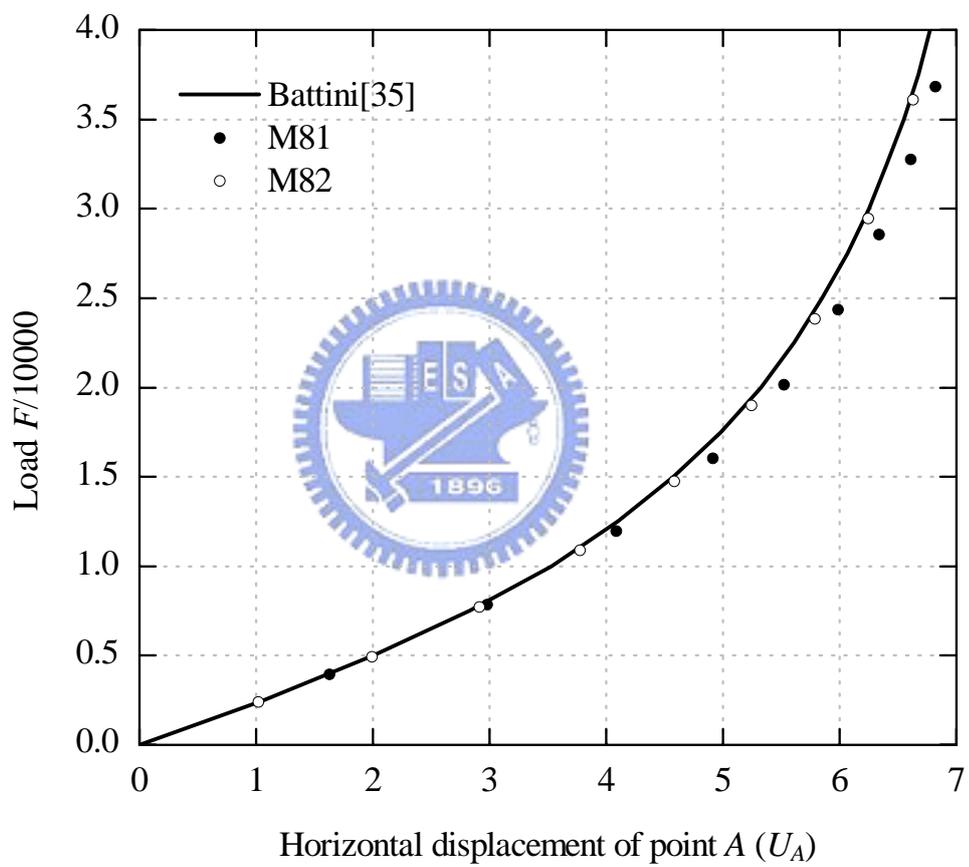
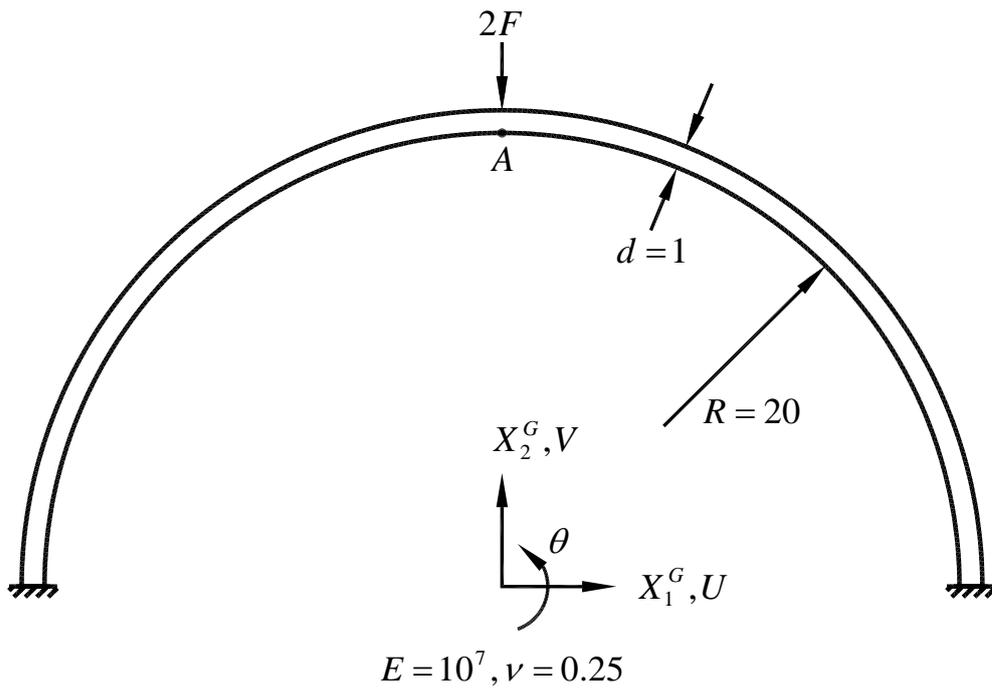


圖 4.27 直角構架受到端點剪力作用，不同網格下之負荷位移曲線圖。

(a)



(b)

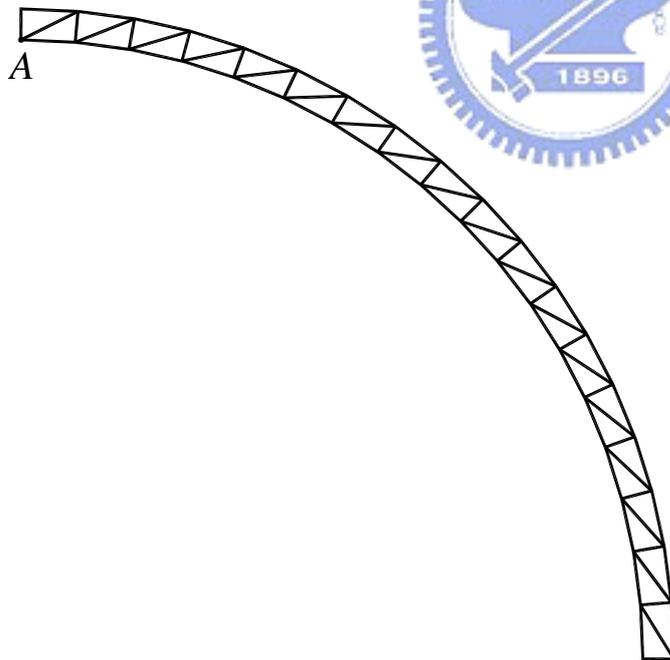


圖 4.28 半圓環受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格示意圖

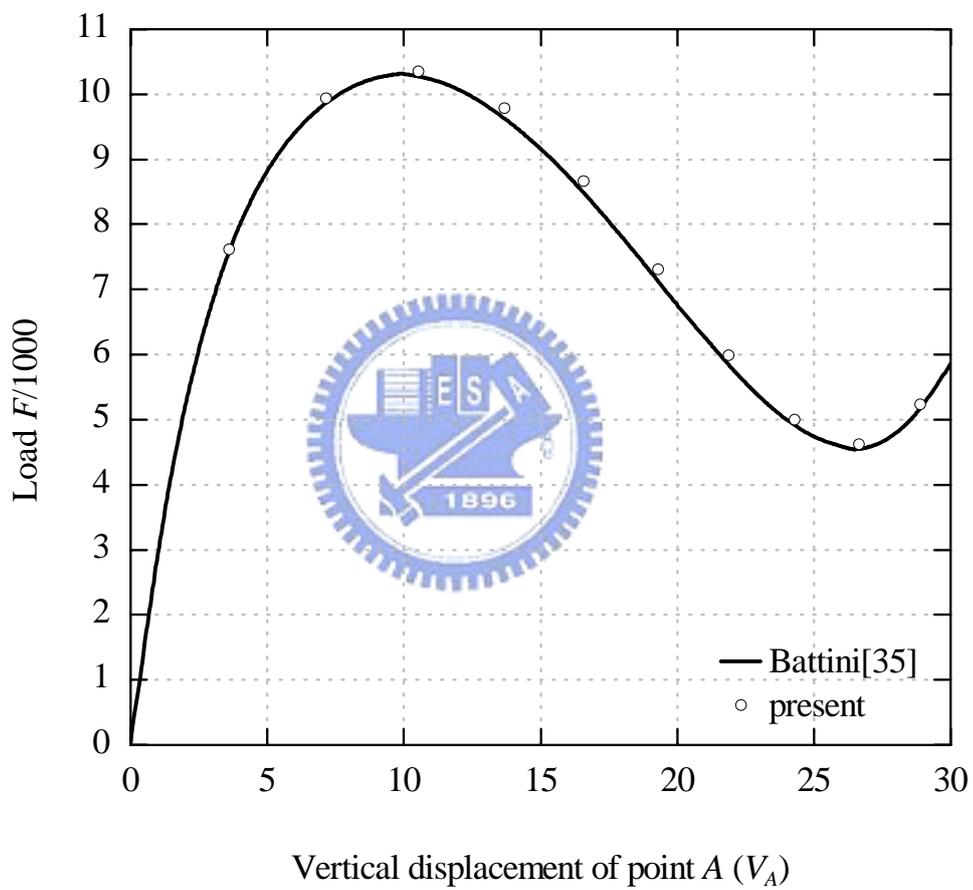


圖 4.29 半圓環受到單點集中力作用下之負荷位移曲線圖。

附錄 A 面積座標(area coordinates)

A.1 面積座標的定義

如圖 A.1 所示， x 、 y 為三角形中任一點 P 在直角座標中的座標值，將 P 點與三角形的三個頂點作連線，就形成了三個小三角形，三個頂點 1、2、3 相對應的三個小三角形的面積分別為 A_1 、 A_2 、 A_3 ，令面積座標

$$\lambda = \frac{A_1}{A} \quad (\text{A.1})$$

$$\xi = \frac{A_2}{A} \quad (\text{A.2})$$

$$\eta = \frac{A_3}{A} \quad (\text{A.3})$$

$$A = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}) \quad (\text{A.4})$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (\text{A.5})$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (\text{A.6})$$



其中 A 為三角形 123 的面積， x_i 、 y_i 代表三角形頂點 i 的 x 和 y 座標。 λ 、 ξ 、 η 稱為三角形中 P 點的面積座標，固

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad (\text{A.7})$$

由(A.1)式至(A.3)式與(A.7)式可以得出

$$\lambda + \xi + \eta = 1 \quad (\text{A.8})$$

因 λ 、 ξ 、 η 之間不是互相獨立的，因此在本文中僅用 ξ 、 η 表示三角形中任意點的面積座標，如圖 A.2。

A.2 面積座標與直角座標的關係

P 點之面積座標與直角座標之間的關係可表示成[37]

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

與

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

若任意函數 $\phi = \phi(\xi, \eta)$ 為面積座標函數，則其對 x 或 y 的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \phi, x \\ \phi, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi, \xi \\ \phi, \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

在(A.11)式中的 ξ, x 、 η, x 、 ξ, y 、 η, y 可以利用(A.10)式微分得出

$$\begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

反之，若任意函數 $\varphi = \varphi(x, y)$ 為直角座標函數，其對 ξ 或 η 的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \varphi, \xi \\ \varphi, \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi, x \\ \varphi, y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

在(A.13)式中的 x, ξ 、 y, ξ 、 x, η 、 y, η 可以利用(A.9)式微分得出

$$\begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

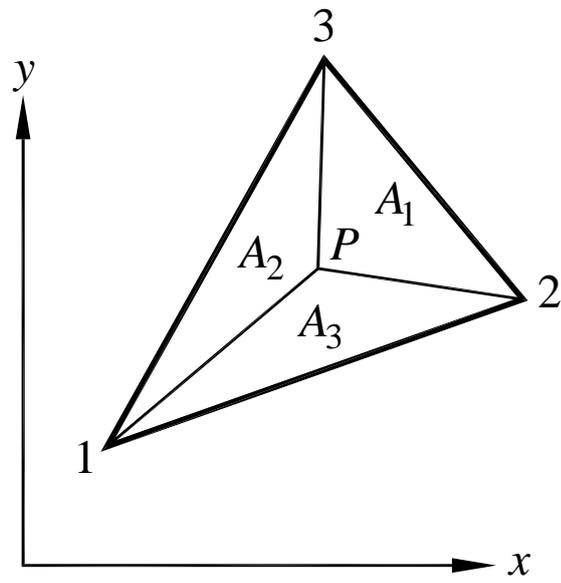


圖 A.1 面積座標表示方法

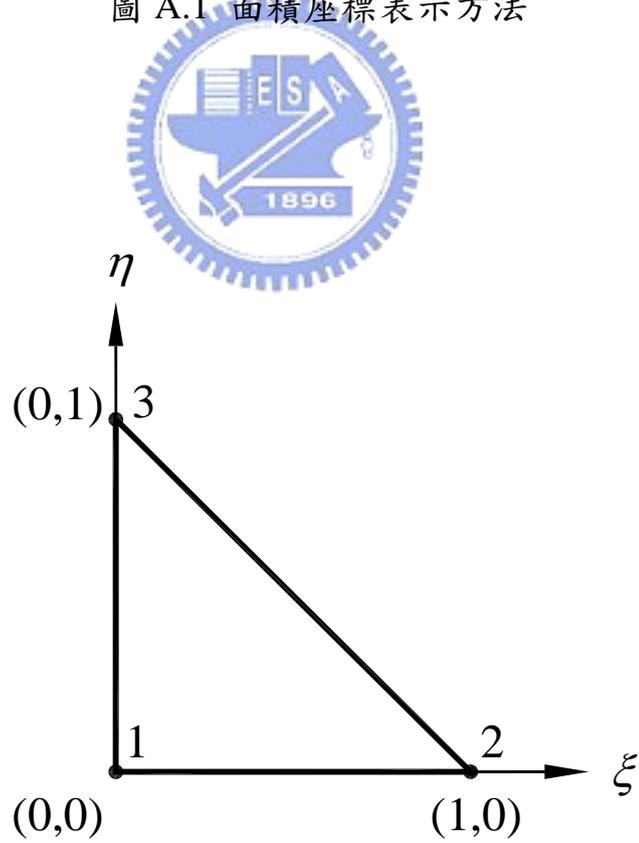


圖 A.2 面積座標示意圖

附錄 B 不完整三階埃爾米特元素的形狀函數及其微分

在(2.4)式與(2.5)式中的 N_i ($i=1, \dots, 9$) 及其對 ξ 、 η 的偏微分，可表示為[22]：

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\lambda^2(3-2\lambda)+2a$	$6\lambda(-1+\lambda)+2b$	$6\lambda(-1+\lambda)+2c$
2	$\xi\lambda^2+a/2$	$\lambda(\lambda-2\xi)+b/2$	$-2\xi\lambda+c/2$
3	$\eta\lambda^2+a/2$	$-2\lambda\eta+b/2$	$\lambda(\lambda-2\eta)+c/2$
4	$\xi^2(3-2\xi)+2a$	$6\xi(1-\xi)+2b$	$2c$
5	$\xi^2(-1+\xi)-a$	$\xi(-2+3\xi)-b$	$-c$
6	$\xi^2\eta+a/2$	$2\xi\eta+b/2$	$\xi^2+c/2$
7	$\eta^2(3-2\eta)+2a$	$2b$	$6\eta(1-\eta)+2c$
8	$\xi\eta^2+a/2$	$\eta^2+b/2$	$2\xi\eta+c/2$
9	$\eta^2(-1+\eta)-a$	$-b$	$\eta(-2+3\eta)-c$

其中

$$\lambda = 1 - \xi - \eta \quad (\text{B.1})$$

$$a = \xi\eta\lambda \quad (\text{B.2})$$

$$b = \eta(\lambda - \xi) \quad (\text{B.3})$$

$$c = \xi(\lambda - \eta) \quad (\text{B.4})$$

在(2.32)式中的 $\mathbf{N}_{u,x}$ 、 $\mathbf{N}_{u,y}$ 、 $\mathbf{N}_{v,x}$ 、 $\mathbf{N}_{v,y}$ 為：

$$\mathbf{N}_{u,x} = \xi_{,x} \mathbf{N}_{u,\xi} + \eta_{,x} \mathbf{N}_{u,\eta} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{N}_{u,y} = \xi_{,y} \mathbf{N}_{u,\xi} + \eta_{,y} \mathbf{N}_{u,\eta} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{N}_{v,x} = \xi_{,x} \mathbf{N}_{v,\xi} + \eta_{,x} \mathbf{N}_{v,\eta} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{N}_{v,y} = \xi_{,y} \mathbf{N}_{v,\xi} + \eta_{,y} \mathbf{N}_{v,\eta} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{N}_{u,\xi} = \begin{Bmatrix} N_{1,\xi} \\ 0 \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{4,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\xi} \\ N_{6,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{7,\xi} \\ 0 \\ N_{8,\xi} \\ N_{9,\xi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{u,\eta} = \begin{Bmatrix} N_{1,\eta} \\ 0 \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{4,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\eta} \\ N_{6,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{7,\eta} \\ 0 \\ N_{8,\eta} \\ N_{9,\eta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{v,\xi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{1,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ 0 \\ N_{4,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\xi} \\ N_{6,\xi} \\ 0 \\ N_{7,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{8,\xi} \\ N_{9,\xi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{v,\eta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{1,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ 0 \\ N_{4,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\eta} \\ N_{6,\eta} \\ 0 \\ N_{7,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{8,\eta} \\ N_{9,\eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

其中 $\xi_{,x}$ 、 $\eta_{,x}$ 、 $\xi_{,y}$ 、 $\eta_{,y}$ 已在附錄 A 中之(A.12)式定義。

附錄 C 等效節點外力(equivalent external nodal force)

C.1 元素等效節點外力

考慮元素邊 12 受到在元素平面上平行於邊 12 的分佈力 t_t 與垂直於邊 12 的分佈力 t_n ，如圖 C.1(a)與圖 C.1(b)所示。其中 t_t 的方向以元素節點 1 與元素節點 2 的連線方向為正， t_n 的方向以朝元素外的方向為正。則邊 12 上所受到的分佈力，可以寫成 x_1^E 、 x_2^E 方向的分量

$$t_x = t_t \quad (C.1)$$

$$t_y = -t_n \quad (C.2)$$

邊 12 上的位移場可以將面積座標 $\eta = 0$ 代入(2.26)式與(2.27)式得出

$$\bar{u} = \bar{\mathbf{N}}_u^t \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (C.3)$$

$$\bar{v} = \bar{\mathbf{N}}_v^t \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (C.4)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_u = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_4 & 0 & \bar{N}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (C.5)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_v = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & \bar{N}_1 & 0 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_4 & 0 & 0 & \bar{N}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (C.6)$$

$$\bar{N}_1 = (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \quad (C.7)$$

$$\bar{N}_2 = \xi(1 - \xi)^2 \quad (C.8)$$

$$\bar{N}_3 = (3 - 2\xi)\xi^2 \quad (C.9)$$

$$\bar{N}_4 = (\xi - 1)\xi^2 \quad (C.10)$$

其中 $0 \leq \xi \leq 1$ ，另外(C.3)式與(C.4)式中的 $\mathbf{T}_{\xi\theta}$ 在(2.28)式已有定義，該矩陣有些項的值雖與元素節點 3 的座標值有關，但是與這些項對應的形狀函數皆為 0，所以 \bar{u} 、 \bar{v} 不受元素節點 3 的位置影響。由虛功原理可得[37]

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_p = \int_A (\delta \bar{u}^t t_x + \delta \bar{v}^t t_y) dA \quad (C.11)$$

將(C.1)至(C.4)式代入(C.11)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_P = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_A (t_t \bar{\mathbf{N}}_u - t_n \bar{\mathbf{N}}_v) dA \quad (\text{C.12})$$

由(C.12)式可得

$$\mathbf{f}_P = \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_A (t_t \bar{\mathbf{N}}_u - t_n \bar{\mathbf{N}}_v) dA \quad (\text{C.13})$$

在(C.13)式中的受力面積 dA 為

$$dA = tL_{12} d\xi \quad (\text{C.14})$$

其中 L_{12} 為邊 12 的長度。將(C.14)式代入(C.13)式可得

$$\mathbf{f}_P = tL_{12} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_0^1 (t_t \bar{\mathbf{N}}_u - t_n \bar{\mathbf{N}}_v) d\xi \quad (\text{C.15})$$

C.2 結構分佈力之等效節點外力

如圖 C.2、圖 C.3 與圖 C.4 所示，考慮邊 AB 被 $m+1$ 個節點由節點 A 向節點 B 離散成等長的 m 段，則邊 AB 的長度與(C.15)式中的 L_{12} 之關係為

$$L_{AB} = mL_{12} \quad (\text{C.16})$$

將(C.16)式代入(C.15)式中，並將 t_t 與 t_n 分開寫成

$$\mathbf{f}_t = \frac{tL_{AB}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_0^1 t_t \bar{\mathbf{N}}_u d\xi \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{f}_n = -\frac{tL_{AB}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_0^1 t_n \bar{\mathbf{N}}_v d\xi \quad (\text{C.18})$$

在本文例題中負荷分佈情形最高為二次變化，因此以下將就不同負荷分佈作分類：

1. 均勻分佈力(uniform distributed surface traction)

(1) 邊 AB 受到平行於邊的均勻分佈力，如圖 C.2(a)所示，其合力大小為 f_{ut} ，則第 k 段所受分佈力可表示成：

$${}^k t_t = \frac{f_{ut}}{tL_{AB}} \quad (\text{C.19})$$

將(C.19)式代入(C.17)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{ut}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_1 \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{F}_1 = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1/2 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.21})$$

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{ut}}{m} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1/2 & 0 & x_{21}/12 & 0 & y_{21}/24 & -y_{21}/12 & 1/2 & 0 & -x_{21}/12 & 0 & -y_{21}/24 & y_{21}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.22})$$

(2)邊 AB 受到垂直於邊的均勻分佈力，如圖 C.2(b)所示，其合力大小為 f_{un} ，則第 k 段所受分佈力可表示成：

$${}^k t_n = \frac{f_{un}}{tL_{AB}} \quad (\text{C.23})$$

將(C.23)式代入(C.18)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{un}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_2 \quad (\text{C.24})$$

$$\mathbf{F}_2 = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.25})$$

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{un}}{m} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1/2 & 0 & y_{21}/12 & x_{21}/24 & x_{21}/12 & 0 & 1/2 & 0 & -y_{21}/12 & -x_{21}/24 & -x_{21}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.26})$$

2.二次分佈力(quadratic distributed surface traction)

(1)邊 AB 受到平行於邊的二次分佈力，如圖 C.3(a)所示，其合力大小為 f_{qt} ，且在 A 點與 B 點的分佈力大小為 0，則第 k 段所受分佈力可用面積座標 ξ 表示成：

$${}^k t_t = \frac{6f_{qt}}{tm^2 L_{AB}} (k + \xi - 1)(m - k - \xi + 1) \quad (C.27)$$

將(C.27)式代入(C.17)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{qt}}{m^3} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_3 \quad (C.28)$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{10} \{ a_1 \quad 0 \quad a_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ a_3 \quad 0 \quad a_4 \quad 0 \} \quad (C.29)$$

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{qt}}{10m^3} \{ a_1 \quad 0 \quad a_2 x_{21} \quad 0 \quad a_2 y_{21}/2 \quad -a_2 y_{21} \\ a_3 \quad 0 \quad a_4 x_{21} \quad 0 \quad a_4 y_{21}/2 \quad -a_4 y_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \quad (C.30)$$

$$a_1 = -30k^2 + 30km + 42k - 21m - 16 \quad (C.31)$$

$$a_2 = -5k^2 + 5km + 6k - 3m - 2 \quad (C.32)$$

$$a_3 = -30k^2 + 30km + 18k - 9m - 4 \quad (C.33)$$

$$a_4 = 5k^2 - 5km - 4k + 2m + 1 \quad (C.34)$$

(2)邊 AB 受到垂直於邊的二次分佈力，如圖 C.3(b)所示，其合力大小為 f_{qn} ，且在 A 點與 B 點的分佈力大小為 0，則第 k 段所受分佈力可用面積座標 ξ 表示成：

$${}^k t_n = \frac{6f_{qn}}{tm^2 L_{AB}} (k + \xi - 1)(m - k - \xi + 1) \quad (C.35)$$

將(C.35)式代入(C.18)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{qn}}{m^3} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_4 \quad (C.36)$$

$$\mathbf{F}_4 = \frac{1}{10} \{ 0 \quad a_1 \quad 0 \quad 0 \quad a_2 \quad 0 \\ 0 \quad a_3 \quad 0 \quad 0 \quad a_4 \quad 0 \} \quad (C.37)$$

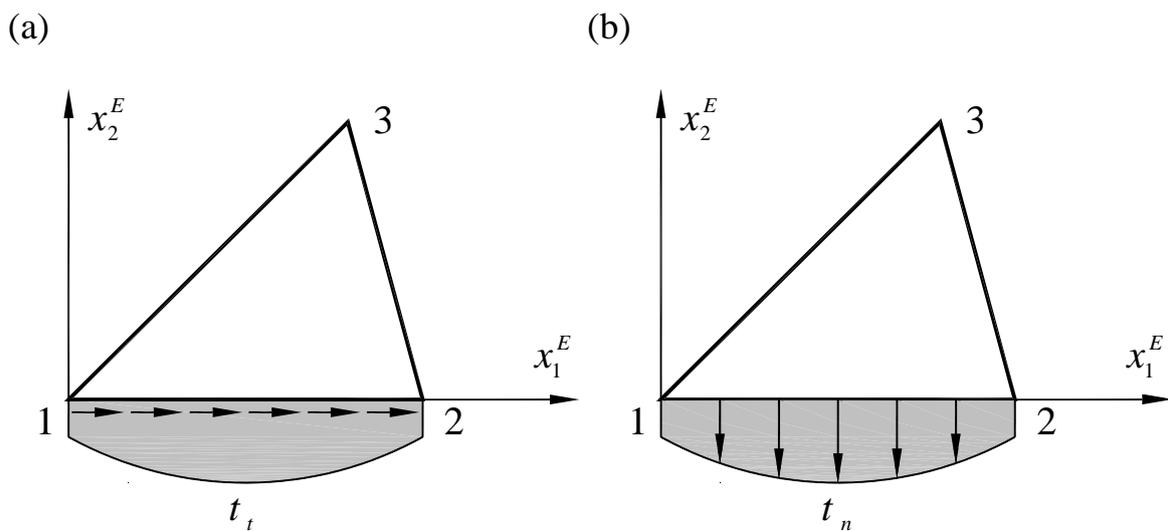


圖 C.1 元素受力示意圖 (a) σ_t (b) σ_n

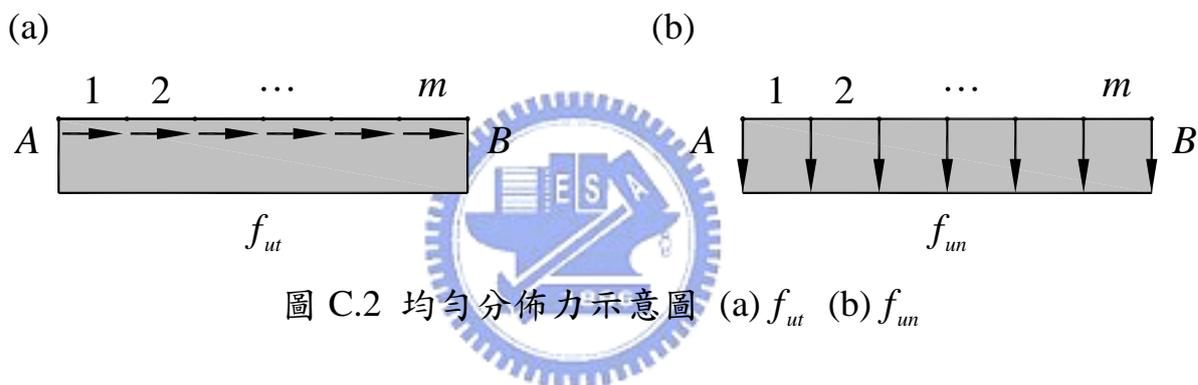


圖 C.2 均勻分佈力示意圖 (a) f_{ut} (b) f_{un}

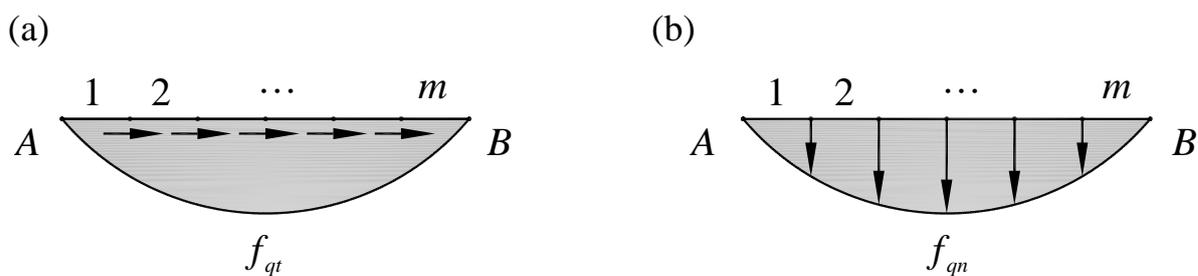


圖 C.3 二次分佈力示意圖 (a) f_{qt} (b) f_{qn}

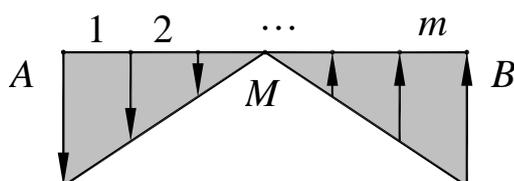


圖 C.4 純彎分佈力示意圖