

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

車輛行駛軌跡及抑止車輛翻覆之差動式輪胎力矩控制系統



**Vehicle Trajectory Following and Rollover Prevention Control
Systems Using Differential Wheel Torques**

研究生：翁肇鴻

指導教授：陳宗麟 博士

中華民國九十七年九月

車輛行駛軌跡及抑止車輛翻覆之差動式輪胎力矩控制系統

Vehicle Trajectory Following and Rollover Prevention Control Systems Using Differential Wheel Torques

研究生：翁肇鴻

Student: Chao-Hung Weng

指導教授：陳宗麟 博士

Advisor: Dr. Tsung-Lin Chen



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

September 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年九月

車輛行駛軌跡及抑止車輛翻覆之差動式輪胎力矩控制系統

學生：翁肇鴻

指導教授：陳宗麟 博士

國立交通大學機械工程學系 碩士班

摘要

在本篇論文中，我們提出了一套車輛運動控制系統，此系統是藉由控制車輛不同的輪胎力矩，進而產生轉動力矩與降低車速，希望達到維持車輛行駛路徑與抑制車輛翻覆的目的，以確保駕駛者行駛安全。此外，我們提出一種新的參考路徑規劃，此參考路徑乃是根據駕駛者當時的駕駛行為所制定，因此，本論文所提出的軌跡控制將控制車輛至接近駕駛者心中預設的路徑。

爲了探討車輛行駛的動態行為，我們建立了一個具有 20 個系統階數的“完整車輛模型”(full car model)，用來模擬實際車輛動態。但如此複雜的數學模型並不容易爲其設計控制器，因此我們以簡化的模型爲基礎進行控制器設計，接著利用順滑模態控制(sliding mode control)方法，使控制器具有穩健性(robustness)。

最後利用電腦軟體 MATLAB 來驗證本論文所提出的車輛運動控制系統，並且依據模擬結果作詳細的分析與討論。模擬結果顯示：在一個車輛翻覆的例子中，所提出的控制法則可以成功的使車輛免於翻覆，並且控制車輛軌跡。但是當車身側滑角(body side slip angle)太大時（車輛打滑），所提出的控制法則將無法有效的控制車輛軌跡。

Vehicle Trajectory Following and Rollover Prevention Control Systems Using Differential Wheel Torques

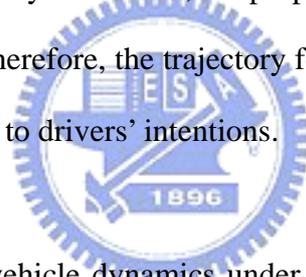
Student: Chao-Hung Weng

Advisor: Dr. Tsung-Lin Chen

Department of Mechanical Engineering National Chiao-Tung University

Abstract

In this thesis, we present a vehicle trajectory following and rollover prevention systems using different wheel torques only. Moreover, we propose a novel reference trajectory design from drivers' maneuverings. Therefore, the trajectory following controls would try to regulate the vehicle to a trajectory close to drivers' intentions.



In order to simulate the vehicle dynamics under various driving conditions, a “full-car model” with 20 system states is constructed. However, a full-car model is too complicate for a controller design. A simplified vehicle model, which neglects pitch motions from the full-car model, is used for controller design. The controller is developed from the “sliding mode control” techniques so that it has the robustness to cope with unmodelled dynamics.

Simulation results indicate that, in a vehicle rollover case, the proposed control systems can achieve both trajectory followings and rollover preventions simultaneously. However, the trajectory followings would fail when the vehicle starts to skid.

誌 謝

本論文得以順利完成，首先要感謝我的指導教授 陳宗麟 老師這二年來的細心指導，並且在與老師討論過程中，令我學習到了如何分析每一件事物其背後的物理現象，所以每當研究遭遇到瓶頸時，都能運用此細膩的思維來找出問題所在，接著依據個人的想法與老師所建議的方向，最後都能將問題一一突破。除了研究上的指導外，每當學生遇到挫折時，老師常以自身經驗來給予適時的鼓勵與肯定，在此衷心銘感。

此外特別感謝博士班紀建宇、蔡俊胤、許齡元學長在研究與課業上的指導，同學彭彥斌與賴益璋在艱困的研究之路上相同扶持與打氣，並且感謝實驗室的學弟們，都能在沉悶的氣氛中帶來許多歡樂，使我在研究之路上並不孤單，得以堅持到底。

最後要感謝父親、母親、哥哥所給予的支持，使我能專心順利地完成研究所學業，並且也感謝大學同學們，在大家的互相鼓勵與幫助下，終能將此論文順利完成。



目錄

摘要.....	ii
Abstract.....	iii
誌謝.....	iv
目錄.....	v
圖表目錄.....	viii
數學符號.....	x
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 相關文獻.....	2
1.2.1 預防車輛翻覆控制系統.....	2
1.2.2 車輛側向控制系統.....	3
1.2.3 差動式煞車控制.....	4
1.3 車輛運動控制系統的架構.....	5
1.4 本論文架構.....	5
第二章 車輛模型.....	6
2.1 完整車輛模型.....	6
2.1.1 車輛運動座標系.....	6
2.1.2 可壓縮質量系統.....	8
2.1.2.1 車輛旋轉運動.....	8
2.1.2.2 車輛線性運動.....	11

2.1.3 不可壓縮質量系統	12
2.1.3.1 轉向系統	12
2.1.3.2 懸吊系統	13
2.1.3.3 非線性輪胎模型	14
2.1.4 總結	17
2.2 簡化車輛模型	18
2.3 輔助車輛模型	20
第三章 車輛運動控制系統	21
3.1 理想路徑的選取方式	21
3.2 維持路徑的方法	22
3.3 控制器設計	24
3.3.1 控制器 I：橫擺與側傾動態控制器	25
3.3.2 控制器 II：橫擺動態控制器	30
3.3.3 輪胎力矩得到的方式	34
3.4 控制器穩定性分析	35
3.4.1 橫擺與側傾動態控制器穩定性分析	35
3.4.2 橫擺動態控制器穩定性分析	38
3.4.3 兩控制器的切換	41
3.5 控制系統方塊圖	42
第四章 模擬結果與討論	43
4.1 例 1(變換車道)	43
4.2 例 2(維持理想路徑)	46

4.3 例 3(維持理想路徑，將參考路徑更改為時間函數來描述).....	50
4.4 例 4(維持理想路徑，將參考側向加速度省略).....	54
4.5 例 5(維持理想路徑，將控制輸入更改為輪胎縱向力).....	57
4.6 例 6(抑制車輛翻覆並維持理想路徑).....	59
4.7 例 7(抑制車輛翻覆並維持給定路徑).....	63
4.8 例 8(抑制車輛翻覆並維持給定路徑，有限制橫擺角速度大小).....	66

第五章 討論.....	69
--------------------	-----------

第六章 結論與未來計劃.....	71
-------------------------	-----------

6.1 結論.....	71
6.2 未來計劃.....	72



參考文獻.....	76
------------------	-----------

圖表目錄

圖 2.1 由地表座標到車體座標間的尤拉轉換	7
圖 2.2 車輛自由體圖	8
圖 2.3 車輛轉向幾何關係圖	13
圖 2.4 被動式懸吊系統	14
圖 2.5 滑動角示意圖	16
圖 2.6 前車輪自由體圖	17
圖 3.1 決定理想路徑流程圖	22
圖 3.2 側向(y)路徑誤差示意圖	23
圖 3.3 車輛運動控制系統方塊圖	42
圖 4.1 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例一)	44
圖 4.2 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例一)	45
圖 4.3 輪胎力矩控制輸入圖 (例一)	45
圖 4.4 受控制與未受控制輪胎縱向力比較圖(例一)	46
圖 4.5 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例二)	48
圖 4.6 受控制與未受控制車輛於地表座標上縱向與側向動態比較圖(例二)	48
圖 4.7 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例二)	49
圖 4.8 輪胎力矩控制輸入圖 (例二)	49
圖 4.9 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例二)	50
圖 4.10 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例三)	51
圖 4.11 受控制與未受控制車輛於地表座標上縱向與側向動態比較圖(例三)	52
圖 4.12 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例三)	52
圖 4.13 輪胎力矩控制輸入圖 (例三)	53
圖 4.14 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例三)	53

圖 4.15 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例四)	55
圖 4.16 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例四).....	55
圖 4.17 輪胎力矩控制輸入圖 (例四)	56
圖 4.18 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例四).....	56
圖 4.19 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例五)	58
圖 4.20 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例五).....	58
圖 4.21 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例五).....	59
圖 4.22 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例六)	61
圖 4.23 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例六).....	61
圖 4.24 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例六).....	62
圖 4.25 受控制與未受控制車輛輪胎角速度比較圖(例六).....	62
圖 4.26 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例七)	64
圖 4.27 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例七).....	64
圖 4.28 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例七).....	65
圖 4.29 受控制與未受控制車輛輪胎角速度比較圖(例七).....	65
圖 4.30 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例八)	67
圖 4.31 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例八).....	67
圖 4.32 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例八).....	68
圖 4.33 車身側滑角示意圖(body side slip angle)	68
表 B.1 完整車輛模型的慣性與幾何參數.....	73
表 B.2 非線性懸吊系統模型係數	74
表 B.3.1 輪胎幾何參數	74
表 B.3.2 非線性輪胎縱向勁度係數	75
表 B.3.3 非線性輪胎側向勁度係數	75

數學記號

變數符號

E^G	: 地表座標
E^{aux}	: 輔助座標
E^B	: 車體座標
Q	: 尤拉轉換矩陣
ψ, ϕ, θ	: 車體座標上的三個尤拉角
x, y, z	: 車體質心的縱向、側向與垂直方向位移
$w_{x,y,z}$: 車體座標上的車輛三軸角速度
w_i	: 輔助座標上第 i 顆輪胎的角速度
M	: 作用在車體重心三軸上的轉動力矩
$F_{x,y,z}$: 作用在四顆輪胎上的三方向有效力
Z_i^{aux}	: 輔助座標上第 i 個懸吊系統長度的變化量
H_i	: 第 i 顆輪胎上的彈簧變形量
r_{ei}	: 第 i 顆輪胎轉動的等效半徑
δ_i	: 第 i 顆輪胎的轉彎角度
λ_i	: 第 i 顆輪胎的滑動率
α_i	: 第 i 顆輪胎的滑動角

車輛參數符號

$m_{vehicle}$: 車輛的總質量
m_s	: 車輛的可壓縮質量
m_{ui}	: 車輛的不可壓縮質量
$I_{x,y,z}$: 車體重心上三軸的轉動慣量
$sb_{1,2}$: 車體前 / 後軸兩輪所夾的長度
$l_{1,2}$: 車體重心到前 / 後軸的長度
h	: 車體垂直方向的長度
Z	: 車體重心與地面間的距離
K	: 彈簧的彈性係數
C_m	: 非線性彈簧常數
D_{damper}	: 阻尼器的阻尼係數
$T_{brake,i}$: 第 i 顆輪胎上的煞車力矩
$T_{motor,i}$: 第 i 顆輪胎上的引擎力矩
g	: 地表重力加速度

輪胎參數符號

r_i	: 第 i 顆輪胎轉動的真實半徑
r_{ei}	: 第 i 顆輪胎轉動的等效半徑
I_{wheel}	: 輪胎的轉動慣量
$K_{vertical}$: 輪胎垂直方向的徑度
κ_i	: 第 i 顆輪胎的側傾轉向係數
B, C, D, E	: 輪胎參數

第一章

緒論

本篇論文所提出的車輛運動控制系統是用來輔助駕駛者修正車輛行駛路徑，並且當有翻覆危險時，也要抑制車輛翻覆，確保駕駛者安全。1.1 節介紹研究動機與目的，1.2 節介紹相關文獻，1.3 節、1.4 節說明本篇論文與控制系統的架構。

1.1 研究動機與目的

汽車雖然為人們帶來了許多便利，但至今全世界每年仍有一百二十萬人死於道路交通事故，約五千萬人受傷。並且根據統計資料顯示[23]，有百分之七十的交通事故是因為駕駛者不當行為所造成，例如：誤判路況使得路徑偏駛、過度操控造成車輛翻覆等。然而在所有死亡交通事故中，有百分之三十三是發生於車輛翻覆，並且在所有 SUV 車輛交通事故中，更高達百分之六十二是發生於車輛翻覆。

近年來已有許多主動式車輛安全系統特別針對人為的不當駕駛或突發狀況而設計，例如：防鎖死煞車系統(Antilock Brake System)、循跡控制系統(Traction Control System)、電子車身動態穩定系統(Electronic-Stability-Program)等，使車輛在主動式安全系統控制下，能確保駕駛者行駛安全。另一方面，在龐大汽車市場競爭下，汽車的舒適性與安全性也將是影響消費者購買意願的重要因素之一。

駕駛者行為常與駕駛者習性有關，在面對不同路況對車輛作操控時，主要可分為以下兩個情況：倘若車輛行駛路徑並不如駕駛者心中所預期，就容易造成車輛偏離應有的行進路徑而發生危險，例如：撞上前方車輛、行人、電線桿或是擦撞護欄等；倘若遇到前方有障礙物、車輛逆向行駛等的突發狀況，駕駛者發現短暫反應時間內急踩煞車，仍

舊有撞上的危險，通常會作一個急轉彎動作來閃避障礙物，但車輛會受到離心力的作用，使得車身向外傾斜翻轉，將可能導致行駛路徑偏移並且發生車輛翻覆，造成嚴重傷亡。由於翻覆進行的很快，駕駛者必須在一秒內做反應，但大多數的駕駛者並不具備處理此緊急情況的反射動作或技巧。所以本論文目的在於建立車輛運動控制系統，用來輔助駕駛者作緊急應變，除了修正車輛行駛路徑至駕駛者所預期的路徑外，當有翻覆危險時，也要能抑制車輛翻覆。

1.2 相關文獻

在這一節中，我們介紹三個主題的相關文獻，分別是：預防車輛翻覆控制系統、車輛側向控制系統、差動式煞車控制。

1.2.1 預防車輛翻覆控制系統

車輛翻覆常發生於駕駛者過度操控或是不良道路狀況，並且重心高度愈高的車輛愈容易發生翻覆。近年來，預防車輛翻覆已是被大家廣泛研究的議題，其中較具代表性的控制策略有以下四種：差動式煞車系統控制[2]-[8]、轉向系統控制[9][10]、轉向系統配合煞車系統控制[11][12]、懸吊系統控制[13][14]。Chen 等人[2]提出了藉由控制外側前輪煞車力的方式，進而產生轉動力矩並且降低車輛行進速度與側向加速度，來減緩車輛翻覆的趨勢。P.Gaspar 等人[8]利用車輛翻覆預測系統，用來預測未來時間內的車輛動態，一旦車輛有翻覆危險，差動式煞車系統將提前介入翻覆控制，並且經過模擬結果指出，提前介入控制可以減低抑制翻覆所需煞車力的大小。Selim Solmaz 等人[9]提出了利用致動器改變駕駛者旋轉方向盤的角度，來影響車輛橫擺力矩，減低車輛翻覆趨勢。而 Dirk Odenthal 等人[11]提出了當車輛有翻覆危機時，除了利用致動器將方向盤往翻覆的反方向旋轉，再加上煞車系統來減低車輛行進速度，以確保車輛可以更快脫離危險性。Hanlong Yang 等人[13]提出了在懸吊系統上加裝致動器，藉由致動器產生一力矩用來抵抗造成車

輛翻轉的力矩，避免車輛發生翻覆，此種裝置也稱為主動式懸吊系統，但需高成本與耗費高能量，所以無法商業化生產。因此 Edwin Stone 等人[14]提出了半主動式防傾桿控制，藉由適當調整前輪防傾桿的側傾剛性，進而降低車輛重心變化，維持車輛穩定，而此裝置所需成本低廉並耗費能量低，能改善主動式懸吊系統的缺點，達到抑止車輛翻覆的目的。

經由本小節文獻回顧得知，目前預防車輛翻覆相關研究，皆僅著重於車輛側傾動態的穩定性控制，而沒有考慮控制後造成車輛偏離車道所面臨的危險。因此本論文的研究除了著重於抑制車輛翻覆的議題外，還加入了控制車輛行駛路徑的議題，希望同時達到預防車輛翻覆與避免車輛偏駛的目的。

1.2.2 車輛側向控制系統

車輛側向控制系統是用來協助駕駛者在操控車輛上更具安全性與穩定性，而此系統主要包含車道保持(lane keeping)[15][16][17]和車道變換(lane change)[18][19]兩部分。

車道保持是針對車輛行駛過程，倘若受到風阻或路面傾斜等因素，而造成行駛路徑偏離車道時，利用控制器輔助駕駛者修正行駛路徑至原車道上。Zhao 等人[15]針對直行的車輛受到風阻影響，而造成車輛產生側向位移誤差與橫擺動態不穩定時，利用差動式煞車改變車輛的橫擺角速度，使得車輛的側向位移、橫擺角、橫擺角速度皆回到穩定狀態，保持車輛直線行駛。

車道變換是事先規畫好一條參考路徑，利用控制器使得車輛可自行隨著參考路徑行駛，並不需要駕駛者旋轉方向盤角度來修正車輛在道路上的相對位置。Pongsathorn Raksincharoensak[17]等人利用直接橫擺力矩控制(direct yaw moment control)，對個別的驅動輪進行驅動力矩或煞車力矩控制，使車身產生轉向力矩，來控制車輛側向位置到某個定

點，缺點是不能確保控制過程中車輛行駛路徑的軌跡。而 Matthias Schorn[18]等人除了控制車輛側向位置到某個定點外，也規劃好整個行駛路徑的軌跡，使車輛在控制過程中會依尋事先設計好的參考路徑行駛到某個定點。

經由本小節文獻回顧得知，目前車輛側向控制系統的相關研究，在修正行駛路徑方面，僅著重於受到風阻的偏駛與事先規畫好的參考路徑。本論文參考路徑的規劃，將以不同的方法來設計，是由駕駛者本身的駕駛行為來決定車輛行駛所應依循的路徑軌跡。

1.2.3 差動式煞車控制

西元 1999 年，Wielenga 就已經提出了利用差動式煞車控制取代傳統的全煞車控制來預防車輛翻覆。而差動式煞車控制的優點在於電子機構裝置簡單、所需成本低廉、可改變車輛轉動力矩、降低車輛行進速度與減低側向加速度，所以已是車輛安全控制系統中，被廣泛研究的方法。在差動式煞車控制方面，主要有以下幾種做法:Chen 等人[2]是利用單獨對左側前輪或右側前輪施與煞車力的方式；P.Gaspar 等人[6][8]則是利用單獨對左側後輪或右側後輪施與煞車力的方式；Chenming Zhao 等人[15]利用分別對左側車輪與右側車輪施與煞車力的方式；Christopher R 等人[12] 利用對四顆車輪皆施與不同煞車力的式。而以上的做法都可以產生轉動力矩並且降低車速來影響車輛動態，達到控制目的。

但在研究車輛翻覆的主題中，常會發生輪胎抬起的情況，但此時對已抬起的輪胎煞車，是無法影響車輛實際動態。因此本論文在差動式輪胎力矩控制方面，將有別於上述文獻的做法，我們會先考慮輪胎實際的狀況，適當調整控制輪胎力矩的個數，再分別施與不同的驅動力矩或煞車力矩，達到控制目的。

1.3 車輛運動控制系統的架構

本論文的車輛運動控制系統主要是針對維持車輛行駛路徑與抑制車輛翻覆兩個目的所設計，因此我們採用差動式輪胎力矩控制系統，分別對輪胎施與不同的驅動力矩或煞車力矩，並且考慮輪胎會發生抬起的情況，適當調整控制輪胎力矩的個數，以達到控制目的。而控制器可以分為兩部份：控制器 I (橫擺與側傾動態控制器)和控制器 II (橫擺動態控制器)。橫擺與側傾動態控制器是當車輛有翻覆危險時，除了控制車輛橫擺動態來修正行駛路徑外，還要加入車輛側傾動態控制，來抑制車輛翻覆；橫擺動態控制器是車輛在正常行駛下，只控制車輛橫擺動態達到修正行駛路徑的目的。控制器的設計皆建立於簡化車輛模型，之後再應用到完整車輛模型，而我們是以車輛側傾角角度的大小作為車輛是否有翻覆危險的指標，並當作兩控制器的切換時機。

1.4 本論文架構

本論文共分為五個章節，第一章介紹研究動機以及先前研究和文獻的回顧。第二章先對車輛的可壓縮質量系統與不可壓縮質量系統作力學分析後，建立起完整車輛模型，並依據不同的目的作簡化，分別選取簡化車輛模型與輔助車輛模型。第三章介紹本論文使用的車輛運動控制系統，包含了設計方法、穩定性分析與控制方塊圖。第四章針對本論文提出的控制方法作數值模擬與分析，並加以討論模擬結果。第五章把本論文歸納整理後作出結論並且對目前的控制方法提出改良建議。



第二章

車輛模型

在這個章節中，我們將介紹三個車輛模型：“完整車輛模型”、“簡化車輛模型”、“輔助車輛模型”。完整車輛模型是用來模擬實際車體動態；簡化車輛模型是用來當作控制器設計的基礎模型，輔助車輛模型是用來決定參考行駛路徑的基礎模型。2.1 節介紹建立完整車輛模型的過程與方法，2.2 節介紹簡化車輛模型的選取方式，2.3 節介紹輔助車輛模型的選取方式。

2.1 完整車輛模型



我們將會建立一個具有 20 個系統階數的完整車輛模型，用來模擬實際車輛動態。而車輛主體可分為兩個部分：“可壓縮質量系統”(sprung-mass system)與“不可壓縮質量系統”(unsprung-mass system)。其中可壓縮質量系統，即為車體，將假設成剛體運動(rigid body motion)，並且依照 Hingwe 的博士論文[25]來推導運動方程式；另一方面，不可壓縮質量系統主要包含轉向系統、懸吊系統、煞車系統與輪胎動態，並且藉由子系統彼此間的相關物理動態，最後整合在一起。

2.1.1 車輛運動座標系

為了完整描述車輛在空間中的運動形態，所以我們將分別建立出三個座標系：地表座標(位於固定地表上)、輔助座標(位於車輪上)、車體座標(位於車輛質心上)，其之間的關係是以尤拉角(Euler angles, ψ 、 θ 、 ϕ)來定義，如圖 2.1 所示。由地表座標開始，首先繞著 z 軸的逆時針方向旋轉橫擺角(yaw angle, ψ)，對準輔助座標，接著繞著 y 軸的逆時針方向旋轉俯仰角(pitch angle, θ)，最後繞著 x 軸的逆時針方向旋轉側傾角(roll

angle, ϕ), 使旋轉後的座標與車體座標對準, 所得到的三個角度即為尤拉角。

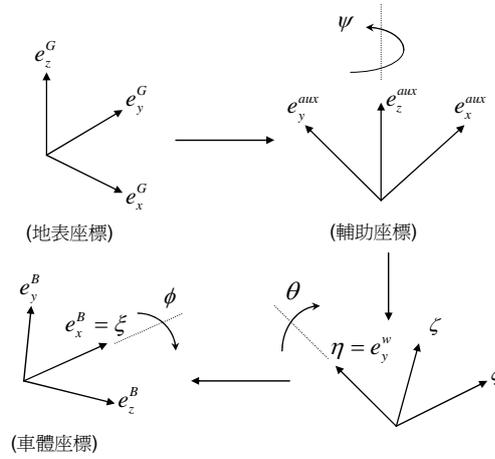


圖 2.1 由地表座標到車體座標間的尤拉轉換

而由地表座標到車體座標之間的轉換矩陣如下：

$$\begin{aligned}
 E^B &= Q \cdot E^G \\
 &= Q_x \cdot Q_y \cdot Q_z \cdot E^G
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

其中

$$Q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Q_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$Q_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此透過尤拉轉換矩陣，我們可以個別使用地表座標、輔助座標、車體座標來描述車輛在空間中的運動形態。

2.1.2 可壓縮質量系統

由於車體假設為剛體運動，並且在空間中共有六個自由度，分別為三軸旋轉運動與三軸線性運動，因此利用尤拉運動方程式(Euler equations of motion)與牛頓第二定律(Newton second law)，即可簡單表示車體相對於地表座標的位置與角度，其車輛自由體圖如圖 2.2。

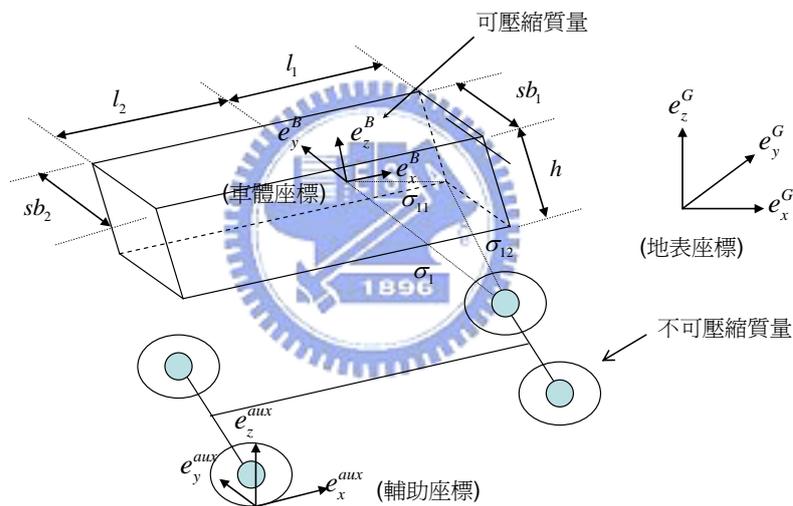


圖 2.2 車輛自由體圖

2.1.2.1 車輛旋轉運動

車輛旋轉運動可先由車體座標觀察得到動態，之後再透過尤拉角(ψ, θ, ϕ)轉換到地表座標，因此車體旋轉運動可以用三個尤拉角來表示：

$$\begin{aligned}
w_x &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
w_y &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\
w_z &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}_x &= \ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\
\dot{w}_y &= \ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\
\dot{w}_z &= -\ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi
\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 w_x 、 \dot{w}_x 表示車體座標上的側傾角速度與側傾角加速度； w_y 、 \dot{w}_y 表示車體座標上的俯仰角速度與俯仰角加速度； w_z 、 \dot{w}_z 表示車體座標上的橫擺角速度與橫擺角加速度。

車輛旋轉運動方程式可用尤拉運動公式得到，並可表示如下：

$$\begin{aligned}
M_x &= I_x \dot{w}_x - (I_y - I_z) w_y w_z \\
M_y &= I_y \dot{w}_y - (I_z - I_x) w_z w_x \\
M_z &= I_z \dot{w}_z - (I_x - I_y) w_x w_y
\end{aligned} \tag{2.4}$$


其中 $M_{x,y,z}$ 是作用在車體重心各軸上的轉動力矩； $I_{x,y,z}$ 表示車體重心上各軸的轉動慣量。

再由(2.2)、(2.3)、(2.4)式，車輛旋轉運動方程式可整理成下式：

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta &= \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\
&+ \frac{M_x}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x} (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \\
\ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi &= \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\
&+ \frac{M_y}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \\
-\ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi &= \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\
&+ \frac{M_z}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

而車體質心各軸上的轉動力矩 $M_{x,y,z}$ 可表示成：

$$\begin{aligned}
 M_x = & \frac{sb_1}{2} \left(F_{x1} \sin \theta \cos \phi - F_{y1} \sin \phi + F_{z1} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & - \frac{sb_1}{2} \left(F_{x2} \sin \theta \cos \phi - F_{y2} \sin \phi + F_{z2} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & - \frac{sb_2}{2} \left(F_{x3} \sin \theta \cos \phi - F_{y3} \sin \phi + F_{z3} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & + \frac{sb_2}{2} \left(F_{x4} \sin \theta \cos \phi - F_{y4} \sin \phi + F_{z4} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & + \frac{h}{2} \left(F_{x1} \sin \theta \sin \phi + F_{y1} \cos \phi + F_{z1} \cos \theta \sin \phi \right) \\
 & + \frac{h}{2} \left(F_{x2} \sin \theta \sin \phi + F_{y2} \cos \phi + F_{z2} \cos \theta \sin \phi \right) \\
 & + \frac{h}{2} \left(F_{x3} \sin \theta \sin \phi + F_{y3} \cos \phi + F_{z3} \cos \theta \sin \phi \right) \\
 & + \frac{h}{2} \left(F_{x4} \sin \theta \sin \phi + F_{y4} \cos \phi + F_{z4} \cos \theta \sin \phi \right) \\
 & + \left\{ -l_1 \sin \theta + \frac{sb_1}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} F_{y1} \cos \theta \\
 & + \left\{ -l_1 \sin \theta - \frac{sb_1}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} F_{y2} \cos \theta \\
 & + \left\{ l_2 \sin \theta - \frac{sb_2}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} F_{y3} \cos \theta \\
 & + \left\{ l_2 \sin \theta + \frac{sb_2}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} F_{y4} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 M_y = & -l_1 \left(F_{x1} \sin \theta \cos \phi - F_{y1} \sin \phi + F_{z1} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & -l_1 \left(F_{x2} \sin \theta \cos \phi - F_{y2} \sin \phi + F_{z2} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & +l_2 \left(F_{x3} \sin \theta \cos \phi - F_{y3} \sin \phi + F_{z3} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & +l_2 \left(F_{x4} \sin \theta \cos \phi - F_{y4} \sin \phi + F_{z4} \cos \theta \cos \phi \right) \\
 & - \frac{h}{2} \left(F_{x1} \cos \theta - F_{z1} \sin \theta \right) - \frac{h}{2} \left(F_{x2} \cos \theta - F_{z2} \sin \theta \right) \\
 & - \frac{h}{2} \left(F_{x3} \cos \theta - F_{z3} \sin \theta \right) - \frac{h}{2} \left(F_{x4} \cos \theta - F_{z4} \sin \theta \right) \\
 & - \left\{ -l_1 \sin \theta + \frac{sb_1}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} \left(F_{x1} \cos \phi - F_{y1} \sin \theta \sin \phi \right) \\
 & - \left\{ -l_1 \sin \theta - \frac{sb_1}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} \left(F_{x2} \cos \phi - F_{y2} \sin \theta \sin \phi \right) \\
 & - \left\{ -l_2 \sin \theta + \frac{sb_2}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} \left(F_{x3} \cos \phi - F_{y3} \sin \theta \sin \phi \right) \\
 & - \left\{ -l_2 \sin \theta + \frac{sb_2}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z-z) \right\} \left(F_{x4} \cos \phi - F_{y4} \sin \theta \sin \phi \right)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
M_z = & l_1 \left(F_{x1} \sin \theta \sin \phi + F_{y1} \cos \phi + F_{z1} \cos \theta \sin \phi \right) \\
& + l_1 \left(F_{x2} \sin \theta \sin \phi + F_{y2} \cos \phi + F_{z2} \cos \theta \sin \phi \right) \\
& - l_2 \left(F_{x3} \sin \theta \sin \phi + F_{y3} \cos \phi + F_{z3} \cos \theta \sin \phi \right) \\
& - l_2 \left(F_{x4} \sin \theta \sin \phi + F_{y4} \cos \phi + F_{z4} \cos \theta \sin \phi \right) \\
& - \frac{sb_1}{2} (F_{x1} \cos \theta - F_{z1} \sin \theta) + \frac{sb_1}{2} (F_{x2} \cos \theta - F_{z2} \sin \theta) \\
& + \frac{sb_2}{2} (F_{x3} \cos \theta - F_{z3} \sin \theta) - \frac{sb_2}{2} (F_{x4} \cos \theta - F_{z4} \sin \theta) \\
& + \left(-l_1 \sin \theta + \frac{sb_1}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z - z) \right) \left(F_{x1} \sin \phi + F_{y1} \sin \theta \cos \phi \right) \\
& + \left(-l_1 \sin \theta - \frac{sb_1}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z - z) \right) \left(F_{x2} \sin \phi + F_{y2} \sin \theta \cos \phi \right) \\
& + \left(l_2 \sin \theta - \frac{sb_2}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z - z) \right) \left(F_{x3} \sin \phi + F_{y3} \sin \theta \cos \phi \right) \\
& + \left(l_2 \sin \theta + \frac{sb_2}{2} \cos \theta \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \theta \cos \phi - (Z - z) \right) \left(F_{x4} \sin \phi + F_{y4} \sin \theta \cos \phi \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $sb_{1,2}$ 表示車體前 / 後軸兩輪所夾的長度； $l_{1,2}$ 表示車體重心到前 / 後軸的長度； $F_{(x,y,z)i}$ 表示作用在四顆輪胎上的有效力； h 表示車體垂直方向的長度； Z 表示初始的車體重心高度； z 表示車體重心高度的變化量，並如圖 2.2 所示。

2.1.2.2 車輛線性運動

車輛線性運動方程式可利用牛頓第二定律推導得到，並可表示如下：

$$\begin{aligned}
m_{vehicle} a_x &= m_{vehicle} (\ddot{x}^{aux} - \dot{y}^{aux} \dot{\psi}) = \sum F_{xi} \\
m_{vehicle} a_y &= m_{vehicle} (\ddot{y}^{aux} + \dot{x}^{aux} \dot{\psi}) = \sum F_{yi} \\
m_{vehicle} a_z &= m_{vehicle} (\ddot{z}) = \sum F_{zi} - g
\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 x, y, z 表示車體質心的縱向、側向與垂直方向； a_x, a_y, a_z 表示輔助座標上的車體三方向加速度； $m_{vehicle}$ 表示車輛的總質量； g 表示地表重力加速度。

2.1.3 不可壓縮質量系統

不可壓縮質量系統包含轉向系統、懸吊系統、煞車系統與輪胎動態，所以我們將分別介紹各個子系統的物理動態，之後再把這些子系統與可壓縮質量系統整合在一起。

2.1.3.1 轉向系統

一般爲了確保車輛在轉彎過程可以較爲平順，都利用亞克曼轉向原理(Ackerman steering principle)來修正前車輪的轉向角度，如圖 2.3 所示。而前內側車輪與前外側車輪的轉向角度在經過亞克曼轉向原理修正後，其之間得幾何關係可表示如下：

$$\cot \delta_{outer} - \cot \delta_{inner} = \frac{sb_1}{l_1 + l_2} \quad (2.10)$$

其中 δ_{outer} 表示前外側輪胎在轉彎時所轉動的角度；其中 δ_{inner} 表示前內側輪胎在轉彎時所轉動的角度。



當確定每顆輪胎角度時，由地面所產生的輪胎黏著力 [20] [21]就可轉換至輔助座標，並當成(2.9)式的作用力來源，其方程式可表示如下：

$$\begin{aligned} F_{xi} &= F_{ai} \cos \delta_i - F_{bi} \sin \delta_i \\ F_{yi} &= F_{ai} \sin \delta_i + F_{bi} \cos \delta_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 δ_i 表示第 i 顆輪胎的轉向角度。在此假設完整車輛模型爲二輪轉向系統 ($\delta_3 = \delta_4 = 0$)，並且配合亞克曼轉向原理來調整 δ_1 與 δ_2 的角度。

最後可將(2.11)式由輔助座標轉換到車體座標，並當成(2.5)式作用力來源。

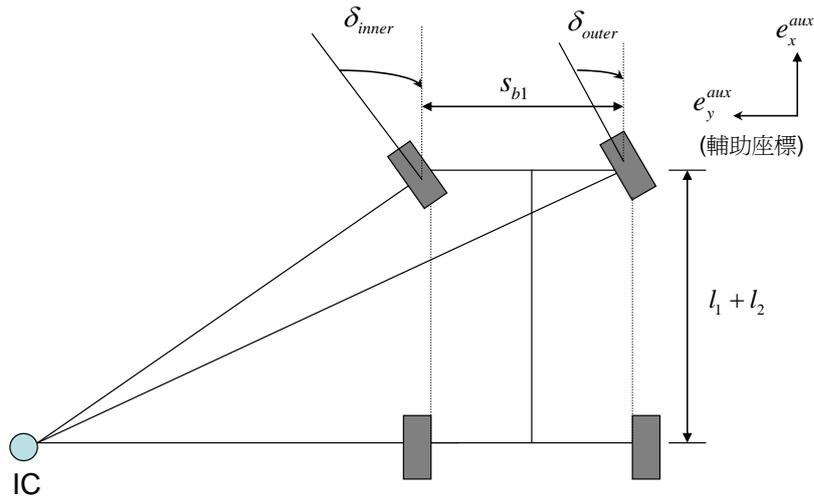


圖 2.3 車輛轉向幾何關係圖

2.1.3.2 懸吊系統

懸吊系統的特性在車輛運動力學分析上佔有重要角色，爲了不失一般性，我們將考慮懸吊系統爲車輛模型中的一部份，而此系統包含了彈簧及阻尼等傳統元件，並無任何外在能量直接提供至此型式的懸吊系統。另一方面，大部份的研究往往使用線性的彈簧係數，但在模擬車輛翻覆的狀況中，此線性彈簧係數的設計並不適用，因爲車輛在逐漸翻覆的過程，會有一側輪胎抬起的情況，而這側的彈簧將會伸長以平衡輪胎的重量，並沒有產生作用力於車體上；另一側被壓縮的彈簧，其長度將會達到壓縮極限，使得彈簧力與變形量不再成正比關係。所以我們將設計非線性的彈性係數，用來模擬車輛翻覆的狀況，其方程式可表示如下：

$$F_{zi} = KH_i + D_{damper} \dot{H}_i + m_{ui} g$$

$$z = \frac{1}{4} \sum H_i$$

$$K = C_1 e^{c_2(H_1 - C_3)}$$

$$H_i = \begin{cases} H_i & , \text{ for } H_i \geq -m_{ui}g / K \\ -m_{ui}g / K & , \text{ for } H_i \leq -m_{ui}g / K \end{cases} \quad (2.12)$$

其中 K 表示彈簧的彈性係數， $C_{m=1,2,3}$ 表示設計的非線性常數， D_{damper} 為阻尼器的阻尼係數， H_i 表示第 i 顆輪胎上的彈簧變形量， m_{ui} 表示為車輛的不可壓縮質量，可視為其中一邊的懸吊系統與輪胎的重量。

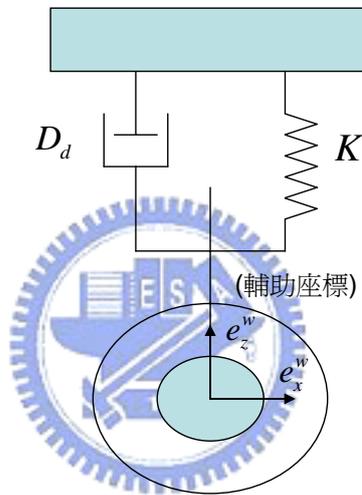


圖 2.4 被動式懸吊系統

2.1.3.3 非線性輪胎模型

輪胎是一個複雜又難以量化的非線性系統，必須藉由實驗數據再對其量化，才可以得到非線性的輪胎模型，因此我們採用 “Magic formula tire model” [20] [21]來獲得輪胎黏著力，並且其相關係數是參考方凱田的博士論文[17]。根據這個非線性輪胎模型，輪胎的縱向力與側向力是以滑動率(slip ratio)、滑動角(slip angle)與會隨著垂直負載變化的輪胎參數來獲得，其方程式可表示如下：

$$\begin{aligned}
F_a &= D_x \sin \left\{ C_x \tan^{-1} \left[B_x \lambda - E_x (B_x \lambda - \tan^{-1} (B_x \lambda)) \right] \right\} \\
F_b &= D_y \sin \left\{ C_y \tan^{-1} \left[B_y \alpha - E_y (B_y \alpha - \tan^{-1} (B_y \alpha)) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 F_a 表示輪胎縱向力； F_b 表示輪胎側向力； λ 表示滑動率； α 表示滑動角； B, C, D, E 表示輪胎參數。

但垂直方向的力會受到懸吊系統的變化而改變，將會影響輪胎等效半徑的大小，並可表示如下：

$$r_{ei} = r_i - \frac{F_{zi}}{K_{vertical}} \tag{2.14}$$

其中 r_{ei} 表示第 i 顆輪胎轉動的等效半徑； r_i 表示第 i 顆輪胎轉動的真實半徑； $K_{vertical}$ 表示輪胎垂直方向的徑度。



而滑動率 λ 是用來分析車速與輪速之間的關係，其方程式可表示如下：

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{r_{ei} w_i - V_i \cos \alpha_i}{\max \{r_{ei} w_i, V_i \cos \alpha_i\}} \\
V_1 &= (\dot{x} - \frac{sb_1}{2} \dot{\psi}) e_x^w + (\dot{y} + l_1 \dot{\psi}) e_y^w \\
V_2 &= (\dot{x} + \frac{sb_1}{2} \dot{\psi}) e_x^w + (\dot{y} + l_1 \dot{\psi}) e_y^w \\
V_1 &= (\dot{x} + \frac{sb_2}{2} \dot{\psi}) e_x^w + (\dot{y} - l_2 \dot{\psi}) e_y^w \\
V_1 &= (\dot{x} - \frac{sb_2}{2} \dot{\psi}) e_x^w + (\dot{y} - l_1 \dot{\psi}) e_y^w
\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 w_i 表示第 i 顆輪胎的角速度； V_i 表示第 i 側的車速； α_i 表示第 i 顆輪胎的輪胎朝向與運動方向之間的夾角，為滑動角；如圖 2.5 所示，並且其方程式可表示如下：

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \delta_i - \beta_i - k_i \phi \\
\beta_1 &= \tan^{-1} \left((\dot{y} + l_1 \dot{\psi}) (\dot{x} - \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^{-1} \right) \\
\beta_2 &= \tan^{-1} \left((\dot{y} + l_1 \dot{\psi}) (\dot{x} + \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^{-1} \right) \\
\beta_3 &= \tan^{-1} \left((\dot{y} - l_2 \dot{\psi}) (\dot{x} + \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^{-1} \right) \\
\beta_4 &= \tan^{-1} \left((\dot{y} - l_2 \dot{\psi}) (\dot{x} - \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^{-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中 β_i 表示第 i 顆輪胎上的側滑角， k_i 表示輪胎側傾轉向的係數。



圖 2.5 滑動角示意圖

另一方面，輪胎轉速主要受到引擎力矩而加速、受到煞車力矩和上述之輪胎縱向力而減速，因此對於輪胎動態我們可簡單的以下列方程式表式：

$$I_{wheel} \dot{\omega}_i = -r_{ei} F_{ai} - T_{brake,i} + T_{motor,i} \tag{2.17}$$

其中 I_{wheel} 表示車輪質量慣量矩； $T_{brake,i}$ 表示煞車產生的力矩； $T_{motor,i}$ 表示引擎產生的力矩，其自由體圖如圖 2.6 所示。

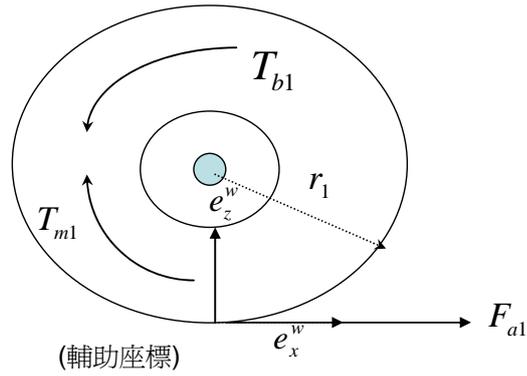


圖 2.6 前車輪自由體圖

利用這個簡單的物理關係，我們即可將動力傳動系統、煞車控制系統與非線性輪胎模型連結至輪胎轉速上。

2.1.4 總結

本節我們整理出完整車輛模型主要的運動方程式。利用(2.9)式與(2.17)式，我們可以得到車輛線性運動方程式和相關的物理動態，並且可表示如下：

$$\begin{aligned}
 m_{vehicle} (\ddot{x}^{aux} - \dot{y}^{aux} \dot{\psi}) &= \sum F_{xi} \\
 m_{vehicle} (\ddot{y}^{aux} + \dot{x}^{aux} \dot{\psi}) &= \sum F_{yi} \\
 m_{vehicle} (\ddot{z}^{aux}) &= \sum F_{zi} - g \\
 I_{wheel} \dot{\omega}_i &= -r_i F_{ai} - T_{brake,i} + T_{motor,i}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

之後利用(2.11)式、(2.12)式、(2.13)式當作輔助，就可簡單地表示車輛線性運動方程式。

接著，利用(2.2)式、(2.3)式、(2.4)式，我們可以得到車輛旋轉運動方程式，並且可表示如下：

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta &= \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\
&+ \frac{M_x}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x} (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \\
\ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi &= \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\
&+ \frac{M_y}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \\
-\ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi &= \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\
&+ \frac{M_z}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

之後利用(2.6)式、(2.7)式、(2.8)式當作輔助，就可簡單地表示車輛旋轉運動方程式。



2.2 簡化車輛模型

由於完整車輛模型過於複雜，對於控制器的設計並不容易，因此我們省略車輛俯仰動態，來當作控制器設計的基礎。在經過上述簡化的動作後並且根據(2.5)式、(2.6)式、(2.7)式、(2.8)式、(2.9)式，可整理成下列動態方程式：

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \frac{M_x}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x} (\dot{\psi} \sin \phi) (\dot{\psi} \cos \phi) \\
\ddot{\psi} &= \left(\frac{M_y}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} (\dot{\phi} \dot{\psi} \cos \phi) \right) \sin \phi + \left(\frac{M_z}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z} (\dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi) \right) \cos \phi \\
m_{\text{vehicle}} (\ddot{x}^{\text{aux}} - \dot{y}^{\text{aux}} \dot{\psi}) &= \sum F_{xi} \\
m_{\text{vehicle}} (\ddot{y}^{\text{aux}} + \dot{x}^{\text{aux}} \dot{\psi}) &= \sum F_{yi} \\
m_{\text{vehicle}} (\ddot{z}^{\text{aux}}) &= \sum F_{zi} - g
\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中

$$\begin{aligned}
M_x = & \frac{sb_1}{2}(-F_{y1} \sin \phi + F_{z1} \cos \phi) - \frac{sb_1}{2}(-F_{y2} \sin \phi + F_{z2} \cos \phi) \\
& - \frac{sb_2}{2}(-F_{y3} \sin \phi + F_{z3} \cos \phi) + \frac{sb_2}{2}(-F_{y4} \sin \phi + F_{z4} \cos \phi) \\
& + \frac{h}{2}(F_{y1} \cos \phi + F_{z1} \sin \phi) + \frac{h}{2}(F_{y2} \cos \phi + F_{z2} \sin \phi) \\
& + \frac{h}{2}(F_{y3} \cos \phi + F_{z3} \sin \phi) + \frac{h}{2}(F_{y4} \cos \phi + F_{z4} \sin \phi) \\
& + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) F_{y1} + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) F_{y2} \\
& + \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) F_{y3} + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) F_{y4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y = & -l_1(-F_{y1} \sin \phi + F_{z1} \cos \phi) - l_1(-F_{y2} \sin \phi + F_{z2} \cos \phi) \\
& + l_2(-F_{y3} \sin \phi + F_{z3} \cos \phi) + l_2(-F_{y4} \sin \phi + F_{z4} \cos \phi) \\
& - \frac{h}{2}(F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4}) \\
& - \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x1} \cos \phi) \\
& - \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x2} \cos \phi) \\
& - \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x3} \cos \phi) \\
& - \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x4} \cos \phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_z = & l_1(F_{y1} \cos \phi + F_{z1} \sin \phi) + l_1(F_{y2} \cos \phi + F_{z2} \sin \phi) \\
& - l_2(F_{y3} \cos \phi + F_{z3} \sin \phi) - l_2(F_{y4} \cos \phi + F_{z4} \sin \phi) \\
& - \frac{sb_1}{2}(F_{x1}) + \frac{sb_1}{2}(F_{x2}) + \frac{sb_2}{2}(F_{x3}) - \frac{sb_2}{2}(F_{x4}) \\
& + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x1} \sin \phi) \\
& + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x2} \sin \phi) \\
& + \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x3} \sin \phi) \\
& + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) (F_{x4} \sin \phi)
\end{aligned}$$

2.3 輔助車輛模型

駕駛者轉彎通常都在低速的情況下進行，因此車輛在低速行駛時的方向盤角度與車輛軌跡間的關係，會深化成一種駕駛習性。但隨著車速的增加，側傾與俯仰動態變化也會愈大，使得行駛路徑偏離駕駛者的預期。因此我們由完整車輛模型省略側傾動態與俯仰動態，得到決定參考行駛路徑的車輛模型。在經過上述的簡化動作後並且根據(2.5)式、(2.6)式、(2.7)式、(2.8)式、(2.9)式，可整理成下列動態方程式：

$$\begin{aligned}
 \ddot{\psi} &= \frac{M_z}{I_z} \\
 m_{vehicle} (\ddot{x}^{aux} - \dot{y}^{aux} \dot{\psi}) &= \sum F_{xi} \\
 m_{vehicle} (\ddot{y}^{aux} + \dot{x}^{aux} \dot{\psi}) &= \sum F_{yi} \\
 m_{vehicle} (\ddot{z}^{aux}) &= \sum F_{zi} - g
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

其中



$$\begin{aligned}
 M_z &= l_1 F_{y1} + l_1 F_{y2} - l_2 F_{y3} - l_2 F_{y4} \\
 &\quad - \frac{sb_1}{2} F_{x1} + \frac{sb_1}{2} F_{x2} + \frac{sb_2}{2} F_{x3} - \frac{sb_2}{2} F_{x4}
 \end{aligned}$$

第三章

車輛運動控制系統

本章所介紹的車輛運動控制系統是用來維持車輛行駛路徑並且抑制車輛翻覆，而車輛所依循的行駛路徑是以當時的車輛動態和方向盤角度輸入至參考車輛模型中預測得到。在經過分析車輛動態後，發現與上述兩個目的最為相關的車輛動態就是橫擺與側傾動態，因此我們將採用差動式輪胎力矩控制系統，控制橫擺動態來修正行駛路徑，控制側傾動態來抑制翻覆。所以我們事先會設定一個指標來判斷車輛是否有翻覆危險，一旦超過這個指標時，控制器將同時控制橫擺與側傾動態；沒有超過這個指標時，控制器將只控制橫擺動態。



3.1 理想路徑的選取方式

當駕駛者轉動方向盤時，系統將會自動把此時的車輛動態和方向盤角度輸入至輔助車輛模型，之後透過輔助車輛模型本身的動態計算，來預測出一段駕駛者預期的行駛路徑；如果駕駛者中途改變方向盤角度，系統重新輸入新的車輛動態和方向盤角度至輔助車輛模型，再次預測出一段新的預期行駛路徑。而其整個預期(參考)路徑選取的流程圖如圖 3.1 所示：

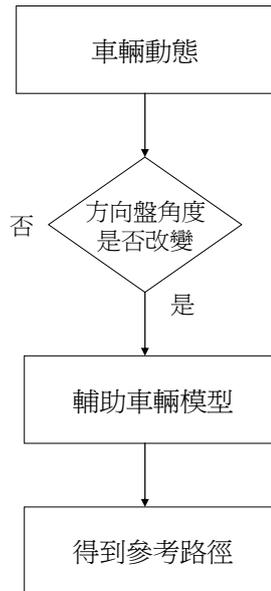


圖 3.1 決定理想路徑流程圖

3.2 維持路徑的方法

車輛行駛路徑是地表座標上縱向(x)與側向(y)的二維平面變化，所以要描述一條路徑的軌跡，可分成縱向位置對時間的變化($x = f_1(t)$)與側向位置對時間的變化($y = f_2(t)$)。因此要準確控制車輛行駛路徑到某個參考路徑上，表示地表座標上車輛的縱向動態變化與側向動態變化都要與這個參考路徑相同。但行駛過程常會有加速與減速的情形發生，我們並不要求車輛行駛路徑對時間點的變化都要與參考路徑相同，只需要維持車輛行駛路徑在參考路徑的軌跡上。因此我們利用了以下的方法將時間的因素消除。

由輔助車輛模型得到參考路徑的縱向位置對時間的變化與側向位置對時間的變化後，先利用 curve fitting 的技巧，來獲得參考路徑側向座標對縱向座標的數學關係，並且可表示如下：

$$y_{ref} = f_3(x_{ref}) \quad (3.1)$$

接著以某個特定時間點下車輛行駛路徑的縱向座標為基準，然後代入(3.1)式中就可以得到相對應的側向座標，並且比較車輛行駛路徑的側向座標與參考路徑的側向座標後，所得到的差值，我們稱為路徑誤差，如圖 3.2 所示。所以只要藉由控制車輛側向動態來減低這個路徑誤差，車輛的行駛路徑就會與參考路徑相同。

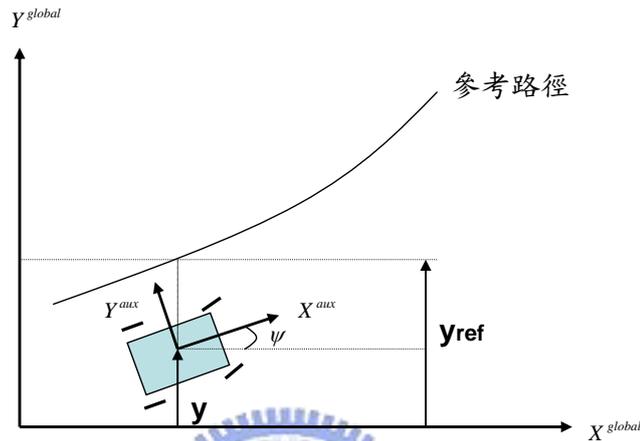


圖 3.2 側向(y)路徑誤差示意圖

在考慮車輛實際的物理運動情形後，我們希望透過車頭轉向以漸進的方式到某個軌跡上，而不是直接產生側滑到某個軌跡上。由(2.9)式可以得到輔助座標上的車輛線性運動方程式，但路徑誤差是以地表座標上側向位移所定義，所以先要得到地表座標上的車輛側向運動方程式，才能透過控制的方式來減低路徑誤差。因此先將輔助座標上的車輛側向線性速度利用座標轉換到地表座標上的車輛側向線性速度，在此忽略位置所造成的速度變化量，所以地表座標上的車輛側向線性速度可表示如下[1]：

$$\dot{y}^{global} = \dot{x}^{aux} \sin \psi + \dot{y}^{aux} \cos \psi \quad (3.2)$$

接著對(3.2)式作一次微分，就可以得到地表座標上的側向加速度，並且表示如下：

$$\ddot{y}^{global} = (\ddot{x}^{aux} \sin \psi + \ddot{y}^{aux} \cos \psi) + \dot{\psi}(\dot{x}^{aux} \cos \psi - \dot{y}^{aux} \sin \psi) \quad (3.3)$$

我們將 \dot{x}^{aux} 、 \dot{y}^{aux} 省略並且視為系統的不確定項，而輔助座標上的速度分量 $(\dot{x}^{aux} \cos \psi - \dot{y}^{aux} \sin \psi)$ 經過座標轉換後會等於地表座標上的縱向速度 (\dot{x}^{global}) ，所以(3.3)式可改寫成如下：

$$\ddot{y}^{global} = \dot{\psi} \dot{x}^{global} \quad (3.4)$$

在得到(3.4)式後，原本可以選用對抗雜訊優良的順滑模態控制法則，簡單地推導出以橫擺角速度 $(\dot{\psi})$ 為控制輸入，來影響地表座標上車輛側向運動的控制器。但橫擺角速度的變化必須透過車輛的其它機構裝置來改變橫擺轉向動量，因此我們將在下節介紹如何控制橫擺角速度到我們所設定的參考值，進而降低路徑誤差。



3.3 控制器設計

在這個章節中我們將介紹控制器的推導過程，而控制器可依車輛是否處於翻覆危險分為兩部分：控制器 I (橫擺與側傾動態控制器)、控制器 II (橫擺動態控制器)，而兩控制器的差別在於是否有車輛側傾動態的控制。

控制器的設計是建立在簡化車輛模型上，之後應用在完整車輛模型，所以我們選用對抗雜訊優良的順滑模態控制法則。並且在控制車輛橫擺動態到參考值的同時，路徑誤差也要能減低，簡單的以數學式子來說，雖然只控制 $x_2 \rightarrow x_{2d}$ ，同時也要 $x_1 \rightarrow x_{1d}$ ，所以我們再搭配多層模態控制(multiple control method)的概念，完成整個控制器的推導。

雖然已經對完整車輛模型作了簡化動作，但複雜的非線性輪胎模型依然使控制器難於設計，因此我們先利用輪胎縱向力當成控制輸入去設計控制器，之後再利用相關物理動態得到輪胎力矩，並且當成系統的控制輸入至完整車輛模型中。

3.3.1 控制器 I：橫擺與側傾動態控制器

在車輛有翻覆危險下，我們利用四輪不同的驅動力矩或煞車力矩，同時控制車輛橫擺和側傾動態，所以根據(2.19)式和(3.4)式，可以將地表座標上車輛側向動態方程式和車輛橫擺與側傾動態方程式改寫成下列式子：

$$\ddot{y}^{global} = \Delta\ddot{y} + \dot{\psi}\dot{x}^{global} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = L + JU \quad (3.6)$$



其中

$$L = [\hat{L} + \Delta L] = \begin{bmatrix} \hat{L}_1 + \Delta L_1 \\ \hat{L}_2 + \Delta L_2 \end{bmatrix}$$

$$J = [\hat{J} + \Delta J] = \begin{bmatrix} \hat{J}_1 + \Delta J_1 \\ \hat{J}_2 + \Delta J_2 \end{bmatrix}$$

$$U = [F_{a1} \quad F_{a2} \quad F_{a3} \quad F_{a4}]^T$$

U 表示系統控制輸入，為四輪輪胎縱向力； L 、 J 表示車輛橫擺與側傾動態方程式中的參數； \hat{L} 、 \hat{J} 表示車輛橫擺與側傾動態方程式經過簡化俯仰動態後的參數； Δy 、 ΔL 、 ΔJ 表示系統的不確定項。

其中

$$\begin{aligned}
\hat{L}_1 = & -\frac{(I_x - I_z)}{I_y}(\dot{\psi} \sin \phi)(\dot{\phi}) + \frac{\sin \phi}{I_y}[l_1 \sin \phi(F_{z1} + F_{z2}) - l_2 \sin \phi(F_{z3} + F_{z4}) \\
& + l_1 F_{b1} \cos \delta_1 \sin \phi + l_1 F_{b2} \cos \delta_2 \sin \phi - l_2 F_{b3} \cos \delta_3 \sin \phi - l_2 F_{b4} \cos \delta_4 \sin \phi \\
& - l_1 F_{z1} \cos \phi - l_1 F_{z2} \cos \phi + l_2 F_{z3} \cos \phi + l_2 F_{z4} \cos \phi \\
& + \frac{h}{2} F_{b1} \sin \delta_1 + \frac{h}{2} F_{b2} \sin \delta_2 + \frac{h}{2} F_{b3} \sin \delta_3 + \frac{h}{2} F_{b4} \sin \delta_4 \\
& + (\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b1} \sin \delta_1 \cos \phi) + (-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b2} \sin \delta_2 \cos \phi) \\
& + (-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b3} \sin \delta_3 \cos \phi) + (\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b4} \sin \delta_4 \cos \phi)] \\
& - \frac{(I_y - I_x)}{I_z}(\dot{\phi})(\dot{\epsilon} \sin \phi) + \frac{\cos \phi}{I_z}[l_1 \sin \phi(F_{z1} + F_{z2}) - l_2 \sin \phi(F_{z3} + F_{z4}) \\
& + l_1 F_{b1} \cos \delta_1 \cos \phi + l_1 F_{b2} \cos \delta_2 \cos \phi - l_2 F_{b3} \cos \delta_3 \cos \phi - l_2 F_{b4} \cos \delta_4 \cos \phi \\
& + \frac{sb_1}{2} F_{b1} \sin \delta_1 - \frac{sb_1}{2} F_{b2} \sin \delta_2 - \frac{sb_2}{2} F_{b3} \sin \delta_3 + \frac{sb_2}{2} F_{b4} \sin \delta_4 \\
& + (\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(-F_{b1} \sin \delta_1 \sin \phi) + (-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(-F_{b2} \sin \delta_2 \sin \phi) \\
& + (-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(-F_{b3} \sin \delta_3 \sin \phi) + (\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(-F_{b4} \sin \delta_4 \sin \phi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}_2 = & \frac{sb_1}{2} F_{z1} \cos \phi - \frac{sb_1}{2} F_{z2} \cos \phi - \frac{sb_2}{2} F_{z3} \cos \phi + \frac{sb_2}{2} F_{z4} \cos \phi + \frac{h}{2} \sin \phi (F_{z1} + F_{z2} + F_{z3} + F_{z4}) \\
& - \frac{sb_1}{2} F_{b1} \cos \delta_1 \sin \phi + \frac{sb_1}{2} F_{b2} \cos \delta_2 \sin \phi + \frac{sb_2}{2} F_{b3} \cos \delta_3 \sin \phi - \frac{sb_2}{2} F_{b4} \cos \delta_4 \sin \phi \\
& + \frac{h}{2} F_{b1} \cos \delta_1 \cos \phi + \frac{h}{2} F_{b2} \cos \delta_2 \cos \phi + \frac{h}{2} F_{b3} \cos \delta_3 \cos \phi + \frac{h}{2} F_{b4} \cos \delta_4 \cos \phi \\
& + (\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b1} \cos \delta_1) + (-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b2} \cos \delta_2) \\
& + (-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b3} \cos \delta_3) + (\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z))(F_{b4} \cos \delta_4) \\
& - \frac{I_z - I_y}{I_x}(\dot{\psi} \sin \phi)(\dot{\psi} \cos \phi)
\end{aligned}$$

$$\hat{J}_1 = [a \quad b \quad c \quad d]$$

$$a = \frac{\sin \phi}{I_y} \left(l_1 \sin \delta_1 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_1 - \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \cos \delta_1 \cos \phi \right) \right)$$

$$+ \frac{\cos \phi}{I_z} \left(l_1 \sin \delta_1 \cos \phi - \frac{sb_1}{2} \cos \delta_1 + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \cos \delta_1 \sin \phi \right)$$

$$b = \frac{\sin \phi}{I_y} \left(l_1 \sin \delta_2 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_2 - \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \cos \delta_2 \cos \phi \right) \right)$$

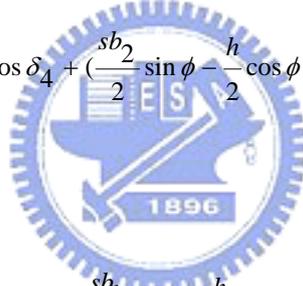
$$+ \frac{\cos \phi}{I_z} \left(l_1 \sin \delta_2 \cos \phi + \frac{sb_1}{2} \cos \delta_2 + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \cos \delta_2 \sin \phi \right)$$

$$c = \frac{\sin \phi}{I_y} \left(-l_2 \sin \delta_3 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_3 - \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \cos \delta_3 \cos \phi \right) \right)$$

$$+ \frac{\cos \phi}{I_z} \left(-l_2 \sin \delta_3 \cos \phi + \frac{sb_2}{2} \cos \delta_3 + \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \cos \delta_3 \sin \phi \right)$$

$$d = \frac{\sin \phi}{I_y} \left(-l_2 \sin \delta_4 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_4 - \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \cos \delta_4 \cos \phi \right) \right)$$

$$+ \frac{\cos \phi}{I_z} \left(-l_2 \sin \delta_4 \cos \phi - \frac{sb_2}{2} \cos \delta_4 + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \cos \delta_4 \sin \phi \right)$$



$$\hat{J}_2 = [e \quad f \quad g \quad h]$$

$$e = \frac{1}{I_x} \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \delta_1 \sin \phi + \frac{h}{2} \sin \delta_1 \cos \phi + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \sin \delta_1 \right)$$

$$f = \frac{1}{I_x} \left(\frac{sb_1}{2} \sin \delta_2 \sin \phi + \frac{h}{2} \sin \delta_2 \cos \phi + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \sin \delta_2 \right)$$

$$g = \frac{1}{I_x} \left(\frac{sb_2}{2} \sin \delta_3 \sin \phi + \frac{h}{2} \sin \delta_3 \cos \phi + \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \sin \delta_3 \right)$$

$$h = \frac{1}{I_x} \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \delta_4 \sin \phi + \frac{h}{2} \sin \delta_4 \cos \phi + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z-z) \right) \sin \delta_4 \right)$$

接著依照順滑模態控制法則的步驟，再搭配多層模態控制的概念，我們就可以推導出控制器的數學模式，其步驟如下：

首先選取適當的順滑函數，讓系統經由不斷切換，滑向目標點，並表示如下：

$$s_1 = (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \tau_1 (y^{global} - y_{ref})$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref} \\ (\dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref}) + \tau_2 (\phi - \phi_{ref}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其中 s_1 表示控制地表座標上的車輛側向動態所選取的順滑函數； S_2 表示控制橫擺與側傾動態所選取的順滑函數； \dot{y}_{ref} 表示參考路徑側向速度； y_{ref} 表示參考路徑側向位置； $\dot{\psi}_{ref}$ 表示參考橫擺角速度； ϕ_{ref} 表示參考側傾角度； $\dot{\phi}_{ref}$ 表示參考側傾角速度； τ_1 、 τ_2 為適當控制係數。

並且對(3.7)式做一次微分後產生控制輸入，可表示如下：

$$\dot{s}_1 = (\Delta y + \dot{\psi} \dot{x}^{global} - \ddot{y}_{ref}) + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref})$$

$$\dot{S}_2 = (\hat{L} + \Delta L) + G + JU \quad (3.8)$$

其中 $G = \begin{bmatrix} -\ddot{\psi}_{ref} \\ -\ddot{\phi}_{ref} + \tau_2 (\dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref}) \end{bmatrix}$

\ddot{y}_{ref} 表示參考路徑側向加速度； $\ddot{\psi}_{ref}$ 表示參考橫擺角加速度； $\ddot{\phi}_{ref}$ 表示參考側傾角加速度。

接著將(3.1)式對時間 t 作微分，配合微積分的鍊鎖率，我們就可以得到上述方程式所需要用的參考路徑側向速度與加速度，並且表示如下：

$$\begin{aligned}\dot{y}_{ref} &= \left. \frac{df(x_{ref})}{dx_{ref}} \frac{dx_{ref}}{dt} \right|_{x_{ref}=x^{global}, \dot{x}_{ref}=\dot{x}^{global}} \\ \ddot{y}_{ref} &= \left. \frac{d^2 f(x_{ref})}{dx_{ref}^2} \left(\frac{dx_{ref}}{dt} \right)^2 + \frac{df(x_{ref})}{dx_{ref}} \frac{d^2 x_{ref}}{dt^2} \right|_{x_{ref}=x^{global}, \dot{x}_{ref}=\dot{x}^{global}, \ddot{x}_{ref}=\ddot{x}^{global}}\end{aligned}\quad (3.9)$$

接著利用多樣順滑模態控制的概念，將(3.7)式移項後可以得到下式：

$$\dot{\psi} = s_{21} + \dot{\psi}_{ref} \quad (3.10)$$

然後將(3.10)式代入(3.8)式中，並可整理成下式：

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= (\Delta y + s_{21} \dot{x}^{global} + \dot{\psi}_{ref} \dot{x}^{global} - \ddot{y}_{ref}) + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) \\ \dot{S}_2 &= (\hat{L} + \Delta L) + G + JU\end{aligned}\quad (3.11)$$

最後決定適當的控制輸入，來保證系統在有限時間內進入順滑模態，並且滑向控制目標，可表示如下：

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{ref} &= -\frac{1}{\dot{x}^{global}} (-\ddot{y}_{ref} + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \lambda_1 s_1) \\ U &= -(\hat{J}^T (\hat{J} \hat{J}^T)^{-1}) (\hat{L} - \ddot{\psi}_{ref} + \lambda_2 S_2)\end{aligned}\quad (3.12)$$

其中 λ_1 、 λ_2 表示適當的控制係數，而 λ_1 、 λ_2 的選取依據是要符合迫近順滑條件，我們將在之後小節詳細討論。

值得注意的是，當輪胎發生抬起的情況，此時對已抬起的輪胎驅動或煞車，是無法影響車輛實際動態。而我們將此情形也列入推導控制器的考量因素，所以(3.6)式將修正為：

$$\begin{aligned}
F_{z1} = 0 &\rightarrow F_{a1} = 0 \\
F_{z2} = 0 &\rightarrow F_{a2} = 0 \\
F_{z3} = 0 &\rightarrow F_{a3} = 0 \\
F_{z4} = 0 &\rightarrow F_{a4} = 0
\end{aligned}$$

表示原本系統有四個控制輸入，當一輪抬起後，系統將只剩下三個控制輸入；當二輪抬起後，系統將只剩下二個控制輸入。

3.3.2 控制器 II：橫擺動態控制器

在車輛正常行駛下，我們僅需利用四輪不同的驅動力矩或煞車力矩，控制車輛橫擺動態，所以根據(2.19)式和(3.4)式，我們可以將地表座標上車輛側向動態方程式和車輛橫擺動態方程式改寫成下列式子：

$$\ddot{y}^{global} = \Delta\ddot{y} + \dot{\psi}\dot{x}^{global} \quad (3.13)$$

$$\ddot{\psi} = L_1 + J_1 U \quad (3.14)$$



其中

$$L_1 = \hat{L}_1 + \Delta L_1$$

$$J_1 = \hat{J}_1 + \Delta J_1$$

$$U = [F_{a1} \quad F_{a2} \quad F_{a3} \quad F_{a4}]^T$$

U 表示系統控制輸入，為四輪輪胎縱向力； L_1 、 J_1 表示車輛橫擺動態方程式中的參數； \hat{L}_1 、 \hat{J}_1 表示車輛橫擺動態方程式經過簡化俯仰動態後的參數； Δy 、 ΔL_1 、 ΔJ_1 表示系統的不確定項。

其中

$$\begin{aligned}
\hat{L}_1 = & -\frac{(I_x - I_z)}{I_y}(\dot{\psi} \sin \phi)(\dot{\phi}) + \frac{\sin \phi}{I_y} [l_1 \sin \phi (F_{z1} + F_{z2}) - l_2 \sin \phi (F_{z3} + F_{z4}) \\
& + l_1 F_{b1} \cos \delta_1 \sin \phi + l_1 F_{b2} \cos \delta_2 \sin \phi - l_2 F_{b3} \cos \delta_3 \sin \phi - l_2 F_{b4} \cos \delta_4 \sin \phi \\
& - l_1 F_{z1} \cos \phi - l_1 F_{z2} \cos \phi + l_2 F_{z3} \cos \phi + l_2 F_{z4} \cos \phi \\
& + \frac{h}{2} F_{b1} \sin \delta_1 + \frac{h}{2} F_{b2} \sin \delta_2 + \frac{h}{2} F_{b3} \sin \delta_3 + \frac{h}{2} F_{b4} \sin \delta_4 \\
& + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(F_{b1} \sin \delta_1 \cos \phi) + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(F_{b2} \sin \delta_2 \cos \phi) \\
& + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(F_{b3} \sin \delta_3 \cos \phi) + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(F_{b4} \sin \delta_4 \cos \phi) \\
& - \frac{(I_y - I_x)}{I_z}(\dot{\phi})(\dot{\epsilon} \sin \phi) + \frac{\cos \phi}{I_z} [l_1 \sin \phi (F_{z1} + F_{z2}) - l_2 \sin \phi (F_{z3} + F_{z4}) \\
& + l_1 F_{b1} \cos \delta_1 \cos \phi + l_1 F_{b2} \cos \delta_2 \cos \phi - l_2 F_{b3} \cos \delta_3 \cos \phi - l_2 F_{b4} \cos \delta_4 \cos \phi \\
& + \frac{sb_1}{2} F_{b1} \sin \delta_1 - \frac{sb_1}{2} F_{b2} \sin \delta_2 - \frac{sb_2}{2} F_{b3} \sin \delta_3 + \frac{sb_2}{2} F_{b4} \sin \delta_4 \\
& + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(-F_{b1} \sin \delta_1 \sin \phi) + \left(-\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(-F_{b2} \sin \delta_2 \sin \phi) \\
& + \left(-\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(-F_{b3} \sin \delta_3 \sin \phi) + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z)\right)(-F_{b4} \sin \delta_4 \sin \phi)
\end{aligned}$$

$$\hat{J}_1 = [a \quad b \quad c \quad d]$$

$$\begin{aligned}
a = & \frac{\sin \phi}{I_y} \left(l_1 \sin \delta_1 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_1 - \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_1 \cos \phi \right) \\
& + \frac{\cos \phi}{I_z} \left(l_1 \sin \delta_1 \cos \phi - \frac{sb_1}{2} \cos \delta_1 + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_1 \sin \phi \right) \\
b = & \frac{\sin \phi}{I_y} \left(l_1 \sin \delta_2 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_2 - \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_2 \cos \phi \right) \\
& + \frac{\cos \phi}{I_z} \left(l_1 \sin \delta_2 \cos \phi + \frac{sb_1}{2} \cos \delta_2 + \left(\frac{sb_1}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_2 \sin \phi \right) \\
c = & \frac{\sin \phi}{I_y} \left(-l_2 \sin \delta_3 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_3 - \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_3 \cos \phi \right) \\
& + \frac{\cos \phi}{I_z} \left(-l_2 \sin \delta_3 \cos \phi + \frac{sb_2}{2} \cos \delta_3 + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_3 \sin \phi \right) \\
d = & \frac{\sin \phi}{I_y} \left(-l_2 \sin \delta_4 \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \delta_4 - \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_4 \cos \phi \right) \\
& + \frac{\cos \phi}{I_z} \left(-l_2 \sin \delta_4 \cos \phi - \frac{sb_2}{2} \cos \delta_4 + \left(\frac{sb_2}{2} \sin \phi - \frac{h}{2} \cos \phi - (Z - z) \right) \cos \delta_4 \sin \phi \right)
\end{aligned}$$

接著依照順滑模態控制法則的步驟，再搭配多層模態控制的概念，我們就可以推導出控制器的數學模式，其步驟如下：

首先選取適當的順滑函數，讓系統經由不斷切換，滑向目標點，並表示如下：

$$\begin{aligned} s_1 &= (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \tau_1 (y^{global} - y_{ref}) \\ s_3 &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref} \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 s_1 表示控制地表座標上的車輛側向動態所選取的順滑函數； s_3 表示控制橫擺動態所選取的順滑函數； \dot{y}_{ref} 表示參考路徑側向速度； y_{ref} 表示參考路徑側向位置； $\dot{\psi}_{ref}$ 表示參考橫擺角速度； τ_1 為適當控制係數。

並且對(3.15)式做一次微分後產生控制輸入，可表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= (\Delta y + \dot{\psi} \dot{x}^{global} - \ddot{y}_{ref}) + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) \\ \dot{s}_3 &= (\hat{L}_1 + \Delta L_1) + G_1 + (J_1 + \Delta J_1)U \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $G_1 = -\ddot{\psi}_{ref}$

\ddot{y}_{ref} 表示參考路徑側向加速度； $\ddot{\psi}_{ref}$ 表示參考橫擺角加速度。

接著將(3.1)式對時間 t 作微分，配合微積分的鍊鎖率，我們就可以得到上述方程式所需要用的參考路徑側向速度與加速度，並且表示如下：

$$\begin{aligned}\dot{y}_{ref} &= \left. \frac{df(x_{ref})}{dx_{ref}} \frac{dx_{ref}}{dt} \right|_{x_{ref}=x^{global}, \dot{x}_{ref}=\dot{x}^{global}} \\ \ddot{y}_{ref} &= \left. \frac{d^2 f(x_{ref})}{dx_{ref}^2} \left(\frac{dx_{ref}}{dt} \right)^2 + \frac{df(x_{ref})}{dx_{ref}} \frac{d^2 x_{ref}}{dt^2} \right|_{x_{ref}=x^{global}, \dot{x}_{ref}=\dot{x}^{global}, \ddot{x}_{ref}=\ddot{x}^{global}}\end{aligned}\quad (3.17)$$

接著利用多樣順滑模態控制的概念，將(3.15)式移項後可以得到：

$$\dot{\psi} = s_3 + \dot{\psi}_{ref} \quad (3.18)$$

然後將(3.18)式代入(3.16)式中，並可整理成下式：

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= (\Delta y + s_3 \dot{x}^{global} + \dot{\psi}_{ref} \dot{x}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \tau(\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) \\ \dot{s}_3 &= (\hat{L}_1 + \Delta L_1) + G_1 + (J_1 + \Delta J_1)U\end{aligned}\quad (3.19)$$

最後決定適當的控制輸入，來保證系統在有限時間內進入順滑模態，並且滑向控制目標，可表示如下：

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{ref} &= -\frac{1}{\dot{x}^{global}} (-\ddot{y}_{ref} + \tau_1(\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \lambda_1 s_1) \\ U &= -\left(\hat{J}_1^T (\hat{J}_1 \hat{J}_1^T)^{-1} \right) \left(\hat{L}_1 - \ddot{\psi}_{ref} + \lambda_3 s_3 \right)\end{aligned}\quad (3.20)$$

其中 λ_1 、 λ_3 表示適當的控制係數，而 λ_1 、 λ_3 的選取依據是要符合迫近順滑條件，我們將在之後小節詳細討論。

值得注意的是，當輪胎發生抬起的情況，此時對已抬起的輪胎驅動或煞車，是無法影響車輛實際動態。而我們將此情形也列入推導控制器的考量因素，所以(3.14)式將修正為：

$$F_{z1} = 0 \rightarrow F_{a1} = 0$$

$$F_{z2} = 0 \rightarrow F_{a2} = 0$$

$$F_{z3} = 0 \rightarrow F_{a3} = 0$$

$$F_{z4} = 0 \rightarrow F_{a4} = 0$$

表示原本系統有四個控制輸入，當一輪抬起後，系統將只剩下三個控制輸入；當二輪抬起後，系統將只剩下二個控制輸入。

3.3.3 輪胎力矩得到的方式

本小節將介紹如何把參考輪胎縱向力 F_{ref} (經由控制法則得到)轉換成相對應的輪胎力矩。我們是以第二章所提到的非線性輪胎模型為基礎，以現在的車輛動態去估算下一個時間點的車輛動態，藉由彼此間相關物理動態來得到相對應的輪胎力矩，其詳細過程如下：



先把由控制法則得到的參考輪胎縱向力代入(2.13)式，並可表示如下：

$$F_a = D_x \sin \left\{ C_x \tan^{-1} \left[B_x \lambda - E_x (B_x \lambda - \tan^{-1} (B_x \lambda)) \right] \right\} \Big|_{F_a = F_{ref}} \quad (3.21)$$

接著將現在這個時間點的輪胎參數 B_x 、 C_x 、 D_x 、 E_x 代入(3.21)式，並且解(3.21)方程式，就可以得到下一個時間點的滑動率 λ_n 。

將 λ_n 代入(2.15)式移項整理後，就可以得到下一個時間點的輪速 w_n 。並且表示如下：

車輛處於加速情況下

$$w_n = \frac{v \cos \alpha}{(r_{ei} - r_{ei} \lambda_n)} \quad (3.22)$$

車輛處於煞車情況下

$$w_n = \frac{v \cos \alpha (\lambda_n + 1)}{r_{ei}} \quad (3.23)$$

其中 r_{ei} 表示現在這個時間點的輪胎等效半徑， α 表示現在這個時間點的滑動角， λ_n 表示下一個時間點的滑動率。

之後利用一階逼近的方式就可以得到車輪角加速度，並且表示如下：

$$\dot{w}_n = \frac{w_n - w_{now}}{dt} \quad (3.24)$$

其中 dt 為取樣時間， w_{now} 表示現在這個時間點的輪速。

最後將(3.24)式與現在這個時間點下的輪胎等效半徑(r_{ei})和輪胎縱向力(F_{ai})代入(2.17)式，我們就可以得到相對應的輪胎力矩並且當作系統的控制輸入至完整車輛模型中。

3.4 控制器穩定性分析

由於在 3.2 節中提到的控制系統存在不確項，所以我們將分別對橫擺與側傾動態控制器和橫擺動態控制器選取適當控制係數，來減低不確定項對系統的干擾，並以里奧波諾夫法(Lyapunov method)來證明兩控制器的穩定性，最後在說明兩控制器切換過程中，依然穩定的原因。

3.4.1 橫擺與側傾動態的控制器穩定性分析

首先先假設控制系統不確定項變動的最大值為已知，再根據(3.5)式和(3.6)式，我們可以將欲控制的車輛動態寫成下列式子：

$$\ddot{y}^{global} = \Delta\ddot{y} + \dot{\psi}\dot{x}^{global} \quad (3.25)$$

$$|\Delta\ddot{y}| \leq \delta y$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = (\hat{L} + \Delta L) + (\hat{J} + \Delta J)U$$

$$\|\Delta L\| \leq \delta L \quad (3.26)$$

$$\|\Delta J \hat{J}^T (\hat{J} \hat{J}^T)^{-1}\| \leq \delta J$$

接著適當選取(3.12)式中的控制係數 λ_1 、 λ_2 ，分別為下列式子：

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{\Phi_1} + \gamma_1 \quad (\Phi_1 > 0)$$

$$k_1 = \delta y + \eta_1$$

$$\gamma_1 \geq \frac{(\dot{x}^{global})^2}{4\mu^2}$$



$$(3.27)$$

其中 Φ_1 為所設計的順滑層； k_1 、 γ_1 為適當參數； η_1 為保證參數； μ 為適當常數。

$$\lambda_2 = \frac{k_2}{\Phi_2} + \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} \quad (\Phi_2 > 0)$$

$$k_2 = \frac{(\delta L + \delta J \|\hat{L} + G\| + \gamma_2 \delta J |s_{21}|) + \eta_2}{(1 - \delta J)} \quad (3.28)$$

$$r_2 \geq \mu^2$$

其中 Φ_2 為所設計的順滑層； k_2 、 γ_2 為適當參數； η_2 為保證參數； μ 為適當常數。

最後依據里奧波諾夫法，選取適當函數並表示如下：

$$V = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}S_2^T S_2 > 0 \quad (3.29)$$

並對(3.29)式做一次微分，並可表示如下：

$$\dot{V} = s_1 \dot{s}_1 + S_2^T \dot{S}_2 \quad (3.30)$$

將(3.5)式、(3.6)式、(3.12)式代入(3.30)式，就可以得到下列式子：

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s_1 \left((\Delta \ddot{y} + \dot{x}^{global} s_{21} - \ddot{y}_{ref} + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref})) - (-\ddot{y}_{ref} + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \lambda_1 s_1) \right) \\ & + S_2^T \left((L + G) - (\hat{J} + \Delta J) (\hat{J}^T (\hat{J}\hat{J}^T)^{-1}) (\hat{L} + G + \lambda_2 S_2) \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$



再把(3.27)式、(3.28)式代入(3.31)式，就可以得到下列式子：

$$\dot{V} = \left(s_1 \dot{x}^{global} s_{21} - \gamma_1 s_1^2 - \gamma_2 s_{21}^2 \right) + \left(\Delta \ddot{y} s_1 - k_1 \frac{s_1^2}{\Phi_1} \right) + \left(\begin{array}{l} s_2^T \Delta L - k_2 \frac{\|S_2\|^2}{\Phi_2} - S_2^T \Delta J (\hat{J}^T (\hat{J}\hat{J}^T)^{-1}) (\hat{L} + G) \\ - S_2^T \Delta J (\hat{J}^T (\hat{J}\hat{J}^T)^{-1}) k_2 \frac{S_2}{\Phi_2} - S_2^T \Delta J (\hat{J}^T (\hat{J}\hat{J}^T)^{-1}) \begin{bmatrix} \gamma_2 s_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) \quad (3.32)$$

同時(3.32)式也可改寫成下列式子：

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \left(-\left(\frac{\dot{x}^{global}}{2\mu} s_1 - \mu s_{21} \right)^2 - \left(\gamma_1 - \frac{(\dot{x}^{global})^2}{4\mu^2} \right) s_1^2 - (\gamma_2 - \mu^2) s_{21}^2 \right) + \left(\delta y |s_1| - \delta y |s_1| \frac{|s_1|}{\Phi_1} - \eta_1 \frac{s_1^2}{\Phi_1} \right) \\ & - \|S_2\| \left(\left((\delta L + \delta J \|\hat{L} + G\| + \gamma_2 \delta J |s_{21}|) \frac{\|S_2\|}{\Phi_2} - (\delta L + \delta J \|\hat{L} + G\| + \gamma_2 \delta J |s_{21}|) \right) + \eta_2 \frac{\|S_2\|}{\Phi_2} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

由(3.33)式我們可以看出，當 $|s_1| \geq \Phi_1$ 並且 $\|S_2\| \geq \Phi_2$ 時， \dot{V} 滿足下式：

$$\dot{V} \leq -\eta_1 \frac{s_1^2}{\Phi_1} - \eta_2 \frac{\|S_2\|^2}{\Phi_2} < 0 \quad (3.34)$$

根據(3.29)式、(3.34)式與里奧波諾夫法則，可以得到此控制系統是穩定的結論。

3.4.2 橫擺動態控制器的穩定性分析

首先先假設控制系統不確定項變動的最大值為已知，再根據(3.13)式和(3.14)式，我們可以將欲控制的車輛動態寫成下列式子：

$$\ddot{y}^{global} = \Delta \ddot{y} + \dot{\psi} \dot{x}^{global} \quad (3.35)$$

$$|\Delta \ddot{y}| \leq \delta y$$

$$\dot{\psi} = (\hat{L}_1 + \Delta L_1) + (\hat{J}_1 + \Delta J_1)U$$

$$|\Delta L_1| \leq \delta L_1 \quad (3.36)$$

$$|\Delta J_1 \hat{J}_1^T (\hat{J}_1 \hat{J}_1^T)^{-1}| \leq \delta J_1$$

接著適當選取(3.20)式中的控制係數 λ_1 、 λ_3 ，分別為下列式子：

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{\Phi_1} + \gamma_1 \quad (\Phi_1 > 0)$$

$$k_1 = \delta y + \eta_1 \quad (3.37)$$

$$\gamma_1 \geq \frac{(\dot{x}^{global})^2}{4\mu^2}$$

其中 Φ_1 為所設計的順滑層； k_1 、 γ_1 為適當參數； η_1 為保證參數； μ 為適當常數。

$$\lambda_3 = \frac{k_3}{\Phi_3} + \gamma_3 \quad (\Phi_3 > 0)$$

$$k_3 = \frac{(\delta L_1 + \delta J_1 |\hat{L}_1 + G_1| + \gamma_3 \delta J_1 |s_3|) + \eta_3}{(1 - \delta J_1)} \quad (3.38)$$

$$r_3 \geq \mu^2$$

其中 Φ_3 為所設計的順滑層； k_3 、 γ_3 為適當參數； η_3 為保證參數； μ 為適當常數。

最後依據里奧波諾夫法，選取適當函數並表示如下：

$$v = \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} s_3^2 > 0 \quad (3.39)$$



並對(3.39)式做一次微分，並可表示如下：

$$\dot{v} = s_1 \dot{s}_1 + s_3 \dot{s}_3 \quad (3.40)$$

將(3.13)式、(3.14)式、(3.20)式代入(3.40)式，就可以得到下列式子：

$$\begin{aligned} \dot{v} = & s_1 \left((\Delta \ddot{y} + \dot{x}^{global} s_3 - \ddot{y}_{ref} + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref})) - (-\ddot{y}_{ref} + \tau_1 (\dot{y}^{global} - \dot{y}_{ref}) + \lambda_1 s_1) \right) \\ & + s_3 \left((L_1 + G_1) - (\hat{J}_1 + \Delta J_1) (\hat{J}_1^T (\hat{J}_1 \hat{J}_1^T)^{-1}) (\hat{L}_1 + G_1 + \lambda_3 s_3) \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

再把(3.37)式、(3.38)式代入(3.41)式，就可以得到下列式子：

$$\dot{v} = \left(s_1 \dot{x}^{global} s_3 - \gamma_1 s_1^2 - \gamma_3 s_3^2 \right) + \left(\Delta \ddot{y} s_1 - k_1 \frac{s_1^2}{\Phi_1} \right) + \left(\begin{array}{l} s_3 \Delta L_1 - k_3 \frac{s_3^2}{\Phi_3} - s_3 \Delta J_1 \left(\hat{J}_1^T (\hat{J}_1 \hat{J}_1^T)^{-1} \right) (\hat{L}_1 + G_1) \\ -s_3 \Delta J_1 \left(\hat{J}_1^T (\hat{J}_1 \hat{J}_1^T)^{-1} \right) k_3 \frac{s_3}{\Phi_3} - s_3 \Delta J_1 \left(\hat{J}_1^T (\hat{J}_1 \hat{J}_1^T)^{-1} \right) \gamma_3 s_3 \end{array} \right) \quad (3.42)$$

同時(3.42)式也可改寫成下列式子：

$$\begin{aligned} v \leq & \left(-\frac{\dot{x}^{global}}{2\mu} s_1 - \mu s_3 \right)^2 - \left(\gamma_1 - \frac{(\dot{x}^{global})^2}{4\mu^2} \right) s_1^2 - (\gamma_3 - \mu^2) s_3^2 + \left(\delta y |s_1| - \delta y |s_1| \frac{|s_1|}{\Phi_1} - \eta_1 \frac{s_1^2}{\Phi_1} \right) \\ & - |s_3| \left(\left((\delta L_1 + \delta J_1 |\hat{L}_1 + G_1| + \gamma_3 \delta J_1 |s_3|) \frac{|s_3|}{\Phi_3} - (\delta L_1 + \delta J_1 |\hat{L}_1 + G_1| + \gamma_3 \delta J_1 |s_3|) \right) + \eta_3 \frac{|s_3|}{\Phi_3} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

由(3.43)式我們可以看出，當 $|s_1| \geq \Phi_1$ 並且 $|s_3| \geq \Phi_3$ 時， \dot{v} 滿足下式：

$$\dot{v} \leq -\eta_1 \frac{s_1^2}{\Phi_1} - \eta_3 \frac{s_3^2}{\Phi_3} < 0 \quad (3.44)$$

根據(3.39)式、(3.44)式與里奧波諾夫法則，可以得到此控制系統是穩定的結論。

3.4.3 兩控制器的切換

橫擺與側傾動態控制器和橫擺動態控制器的切換時機，是以車輛側傾角是否超過事先設計的安全值來判定，而本論文將此安全值設為側傾角 8 度，所以兩控制器的穩定分析可分為無切換與有切換過程。

1.兩控制器無切換的情況：雖然兩控制器都是建立在簡化車輛模型上，但被簡化的車輛俯仰動態是我們事先已知的，所以在設計兩控制器適當控制係數時，就先以被簡化相關車輛動態變動的最大值代入估算得到，因此由 3.4.1 節與 3.4.2 節的介紹，我們可以得知兩控制器分別是穩定的。

2.兩控制器有切換的情況：當車輛側傾角角度尚未超過 8 度時，車輛受到橫擺動態控制器的控制，所以橫擺角速度的變化就會在合理範圍內；而當車輛側傾角角度超過 8 度時，車輛受到橫擺與側傾動態控制器的控制，所以側傾角的最大值會小於 9 度，橫擺角速度的變化也會在合理範圍內。而在兩控制器發生切換的情況下，橫擺角速度一直都受到控制，側傾角也只會在此度上下變動，所以輪胎縱向力就不會突然差異很大，俯仰動態與縱向速度的變化也就不大；橫擺角速度因為受到控制都會在合理範圍，方向盤角度也不會突然增加，所以側向速度的變化也就不大；並且側傾角角度只會在此度上下變動，俯仰動態的變化也很小，所以垂直方向速度的變化也就不大。因此其它相關車輛動態的變化就會在我們預期之內，使得兩控制器切換過程中依然可以保持穩定。

3.5 控制系統方塊圖

圖 3.3 表示車輛運動控制系統的方塊圖。當駕駛者轉動方向盤時，系統將自動把車輛動態與方向盤角度輸入至輔助車輛模型，之後預測出一段參考路徑並送至路徑控制器。路徑控制器在接受到車輛側向位置(y)與參考路徑側向位置(y_{ref})後，接著計算能減低兩路徑誤差的參考橫擺角速度(ψ_{ref})，並且傳送至車輛動態控制器。而車輛動態控制器在接受到參考橫擺角速度(ψ_{ref})後，如果此時車輛側傾角(ϕ)也有超過事先設定的安全值，將再加入側傾動態的控制，也就是同時控制橫擺與側傾動態，反之則只控制橫擺動態，最後車輛動態控制器將計算出適當的輪胎力矩輸入至完整車輛模型，達到控制目標。

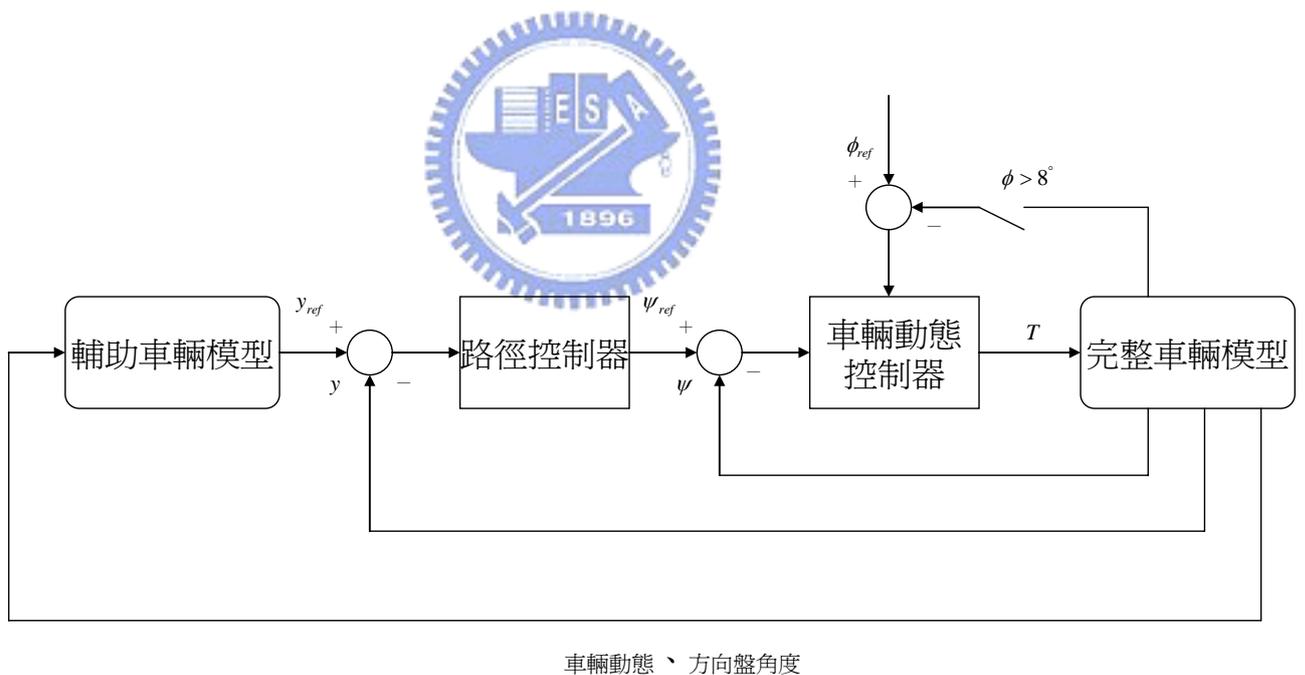


圖 3.3 車輛運動控制系統方塊圖

第四章

模擬結果與討論

針對本論文所提出的車輛運動控制系統，我們將利用電腦軟體 Matlab 對其作演算並繪出相關模擬圖，用來檢視整個控制系統的效能。模擬例子會依據不同的條件與目的，來設定相關初始條件，其中包含了方向盤的角度、車輛行進速度、參考路徑的選取；控制器皆於 4.7 秒啓動，並且以側傾角 8 度當作車輛是否有翻覆危險的指標，也當作橫擺與側傾動態控制器與橫擺動態控制器的切換時機。而控制橫擺動態的順滑層(boundary layer)選定為 0.3；控制橫擺動態與側傾動態的順滑層選定為 0.3；控制車輛側向動態的順滑層選定為 6。在繪製的模擬圖中，藍色虛線表示未受控制的車輛動態，紅色實線表示受控制後的車輛動態，綠色點線表示參考值。



4.1 例一（變換車道）

此例是給定一條參考路徑後，駕駛者本身不需要轉動方向盤，利用控制器的介入就可以讓車輛自行隨著參考路徑行駛。而模擬的車輛初始速度為 60 km/hr、方向盤轉角為 0 度；參考路徑是事先給定並且以 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 的方式來描述。模擬結果顯示於圖 4.1-4.4。

圖 4.1 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖，依序為橫擺角速度、地表座標上的側向位置、控制橫擺動態的順滑層、控制側向動態的順滑層，可以看出受控制後的車輛橫擺角速度成功跟隨到參考橫擺角速度並且車輛的側向位置也跟隨到參考值，而控制橫擺動態與控制側向動態的順滑平面變化也都在所設計的順滑層內。圖 4.2 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，可以看出車輛行駛路徑成功跟隨參考路徑。圖 4.3 表示輪胎力矩控制輸入圖，依序為左前輪輪胎力矩、右前輪輪胎力矩、右後輪輪胎力矩、左

後輪輪胎力矩，在 4.7 秒之前，因為駕駛者並未有踩油門或踩煞車的動作，所以各輪受到的輪胎力矩值為 0；但在 4.7 秒後，控制器介入控制，各輪受到輪胎力矩的最大值約為 400Nm。圖 4.4 表示受控制與未受控制輪胎縱向力比較圖，依序為左前輪輪胎縱向力、右前輪輪胎縱向力、右後輪輪胎縱向力、左後輪輪胎縱向力，在 0 到 0.5 秒間，可以發現輪胎縱向力出現不正常的擾動情形。這是因為在模擬過程中，所有車輛的初始動態無法直接給定，因此所有車輛的動態必須經由一段時間才會穩定下來；而在 4.7 秒到 9 秒的控制過程中，受控後的輪胎縱向力大致上有跟隨到由控制法則得到的參考輪胎縱向力，某些許的誤差主要來自輪胎垂直方向的參數並非是固定值，而是會隨著車輛動態改變。

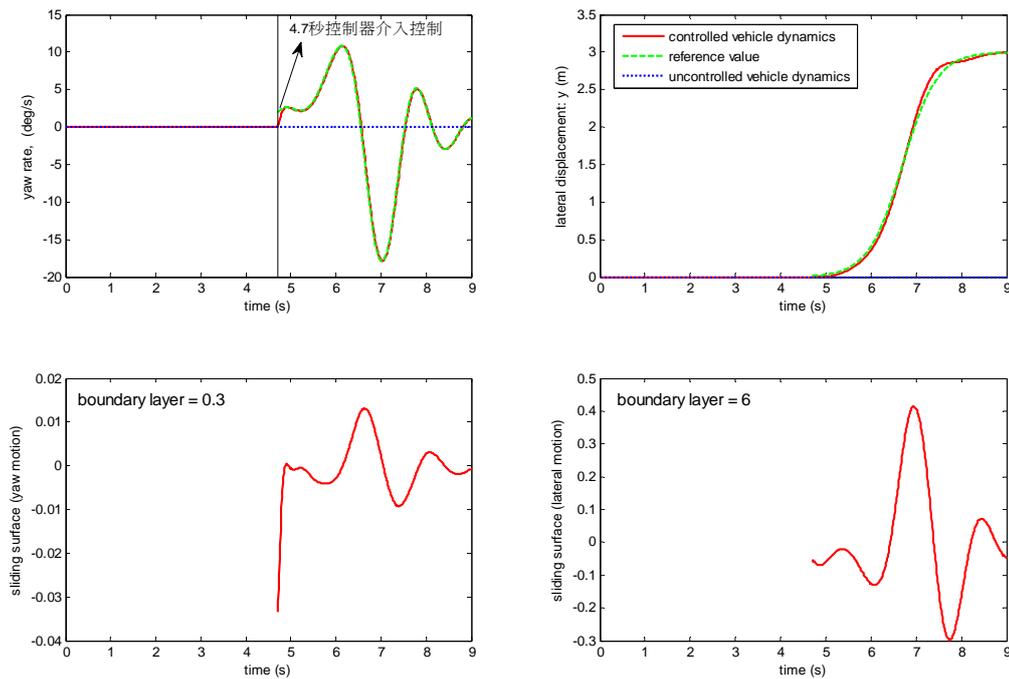


圖 4.1 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例一)

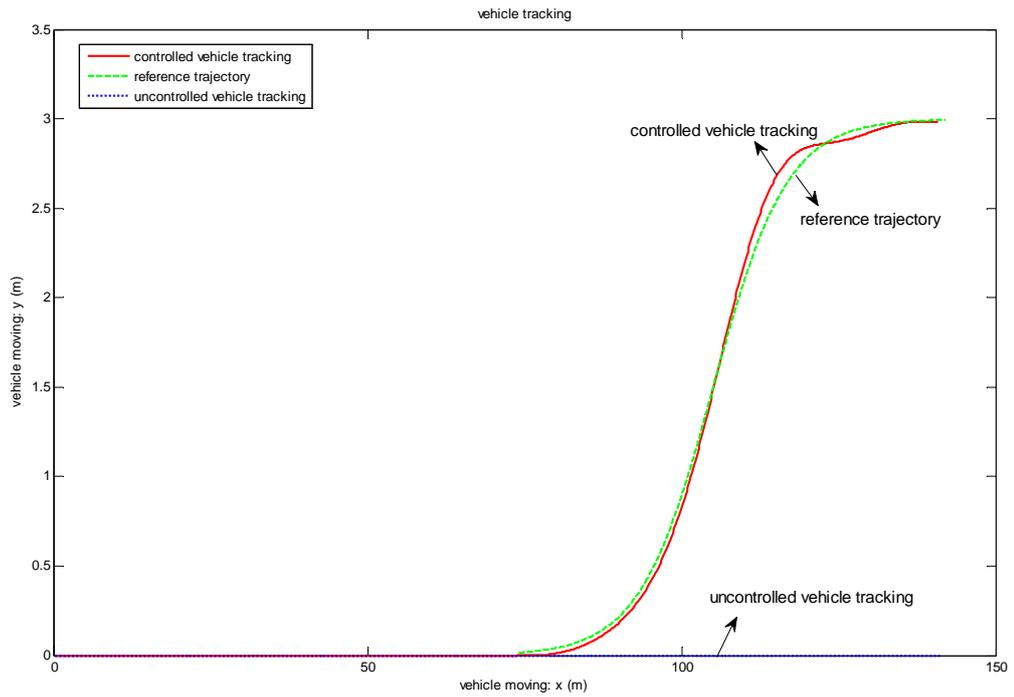


圖 4.2 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例一)

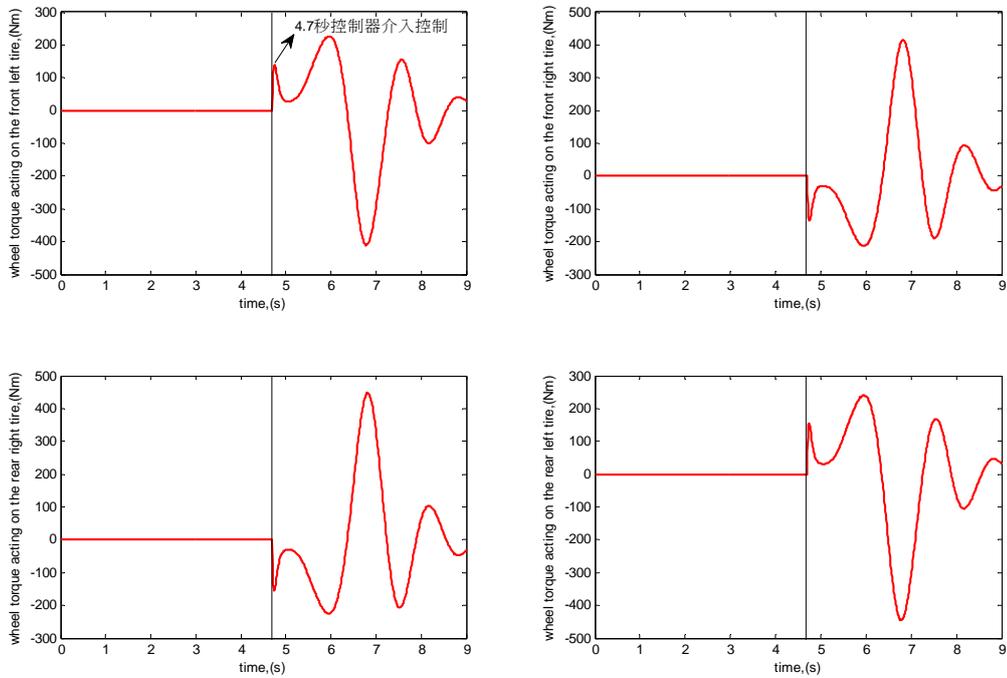


圖 4.3 輪胎力矩控制輸入圖 (例一)

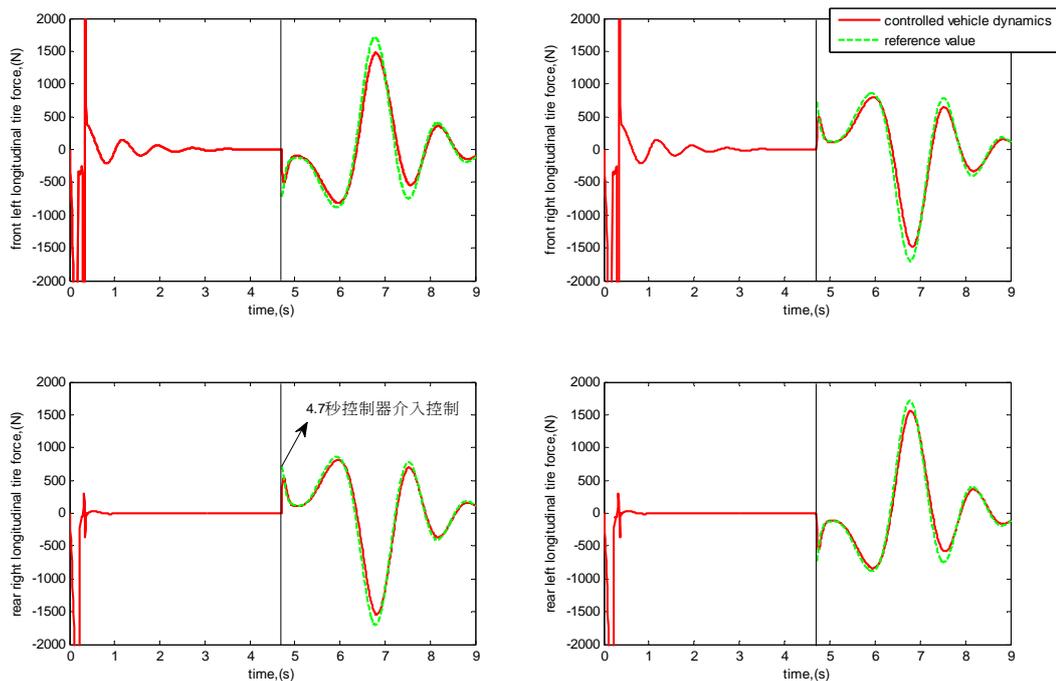


圖 4.4 受控制與未受控制輪胎縱向力比較圖(例一)



4.2 例二（維持理想路徑）

此例是駕駛者在轉彎過程，車輛行駛路徑因為受到側傾與俯仰動態的影響而產生偏移時，利用控制器的介入輔助駕駛者修正行駛路徑。而模擬的車輛初始速度為 60 km/hr、方向盤由 4 秒開始轉動，直到 4.5 秒轉至 90 度，之後就固定為 90 度；參考路徑是由輔助車輛模型得到，並且以 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 的方式來描述。模擬結果顯示於圖 4.5-4.9。

圖 4.5 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖、圖 4.8 表示輪胎力矩控制輸入圖，在 4.7 秒控制器剛介入控制時，可以看出參考橫擺角速度與由控制法則得到的輪胎縱向力變化皆很大，其原因與順滑模態控制收斂速度快有關。而在 6.4 秒後，受控的橫擺角速度並無法跟隨到參考橫擺角速度，並且控制橫擺動態的順滑平面也超出所設計的順滑層外。這是因為輪胎縱向力有最大值的物理限制(2.13)式，圖 4.9 表示受控制與未受控制

車輛輪胎縱向力比較圖，可以明顯看出由控制法則得到的參考輪胎縱向力已超出車輛實際能達到的輪胎縱向力大小，其中黑色虛線表示輪胎縱向力所能達到的最大值範圍。並且在 6.4 秒後，參考橫擺角速度也出現不正常擾動的現象。由(3.12)式或(3.20)式可找出影響參考橫擺角速度的動態，其中包含了車輛縱向速度、參考路徑側向加速度、車輛側向速度與參考路徑側向速度的差值、控制側向動態的順滑平面，並將上述各項響應表示於圖 4.6 中。圖 4.6 表示受控制與未受控制車輛縱向與側向動態比較圖，依序為參考路徑側向加速度、縱向位置、側向速度誤差、縱向速度、控制側向動態的順滑平面、縱向加速度。由 4.6 圖中，可以看出參考路徑側向加速度出現不正常的擾動，並且變化值大於圖 4.6 中其它各物理量的響應，所以參考路徑側向加速度是參考橫擺角速度出現不正常的擾動的主要因素。而參考路徑側向加速度又受到了車輛的縱向位置、縱向速度、縱向加速度影響(3.9)式、(3.17)式，由圖 4.6 可以看出車輛出現瞬間加速、瞬間減速的不規律變化，所以才會使參考路徑的側向加速度出現不正常的跳動，進而使得參考橫擺角速度出現不正常的擾動，迴授回來，導致由控制法則得到的輪胎縱向力出現更大的異常。圖 4.7 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，可以看出對原參考路徑作 curve fitting 所得到的路徑與原參考路徑有些許誤差，但車輛所依循的行駛路徑即為這條對原參考路徑作 curve fitting 所得到的路徑。值得注意的是，在 6.4 秒後橫擺角速度沒有跟隨到參考橫擺角速度，但車輛的行駛路徑並沒有偏離參考路徑，這是因為車輛的動態屬於低頻變化，雖然 6.4 秒後的橫擺角速度沒有跟隨到參考橫擺角速度，但我們可以看出橫擺角速度與參考橫擺角速度變化趨勢是相近的，也可以看作是橫擺角速度有跟隨到參考橫擺角速度低頻變化的部分，所以車輛的行駛路徑才沒有產生偏離。

在這個模擬中，我們可以看出參考橫擺角速度受到參考路徑側向加速度的影響很大，而參考路徑側向加速度又與車輛縱向動態變化有關，但車輛縱向動態變化是我們事先無法預期的，一旦車輛縱向動態有比較不規律的變化時，參考路徑側向加速度易受到影響，也使得參考橫擺角速度出現不正常的擾動，導致控制之後的車輛動態發生異常。

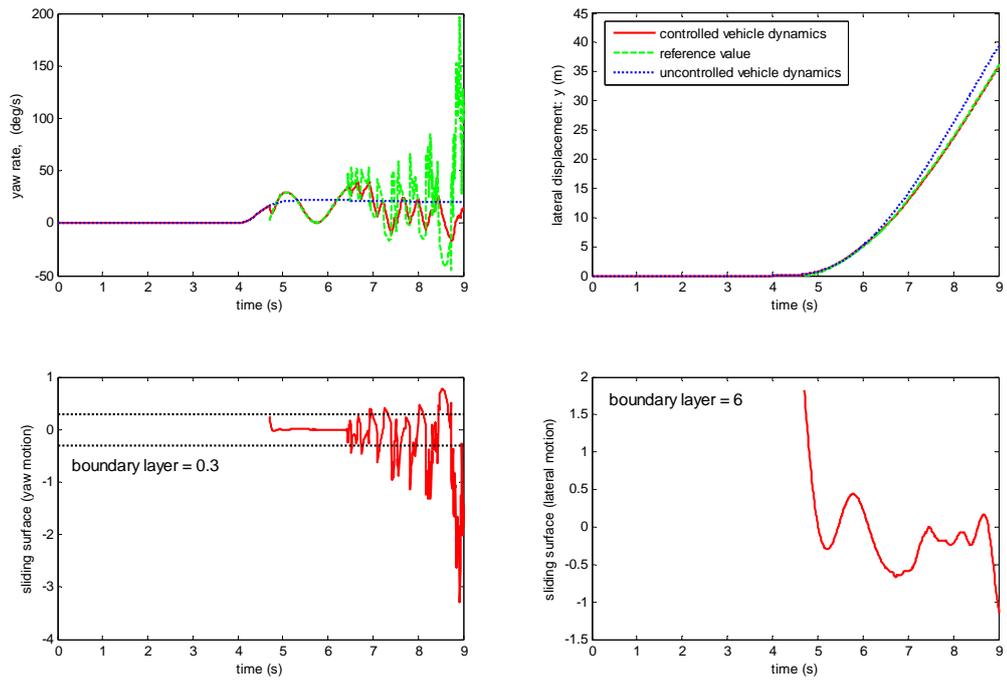


圖 4.5 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例二)

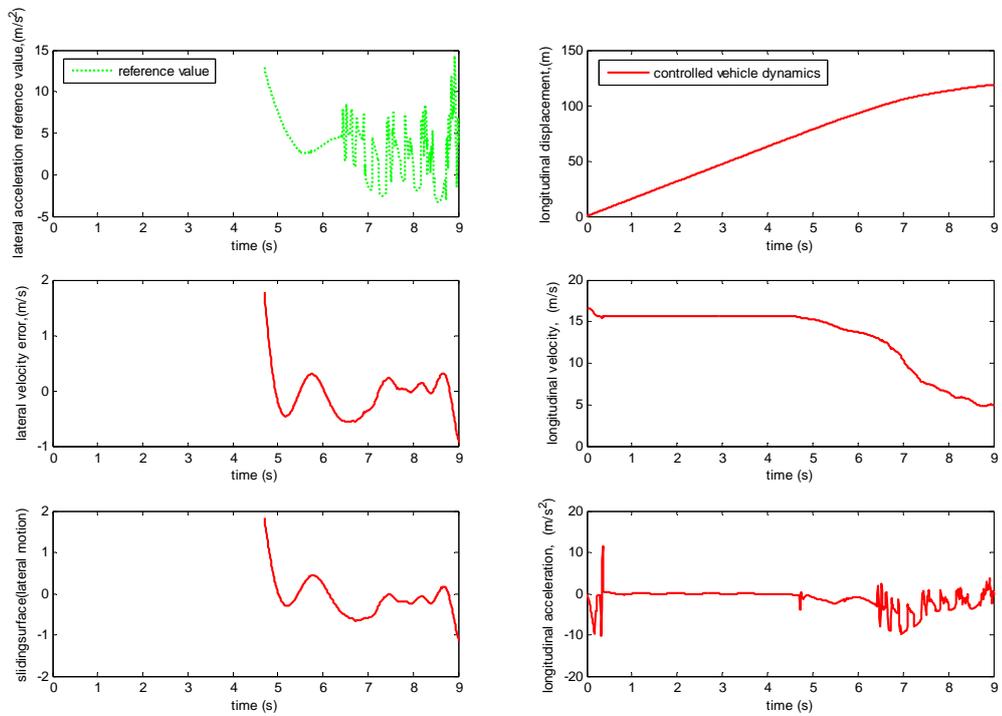


圖 4.6 受控制與未受控制車輛於地表座標上縱向與側向動態比較圖(例二)

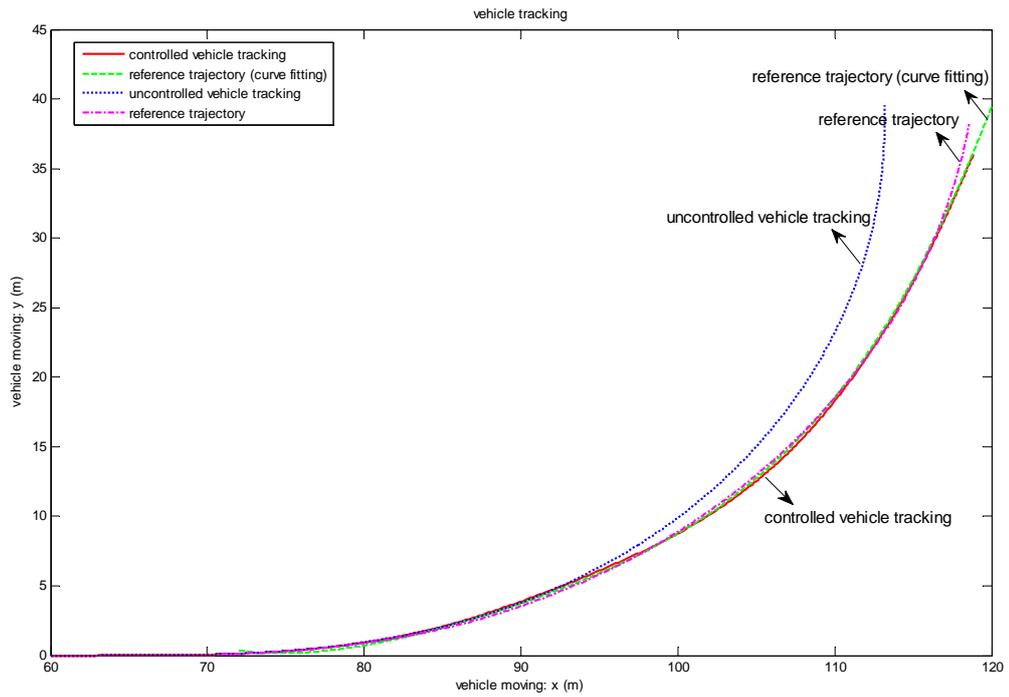


圖 4.7 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例二)

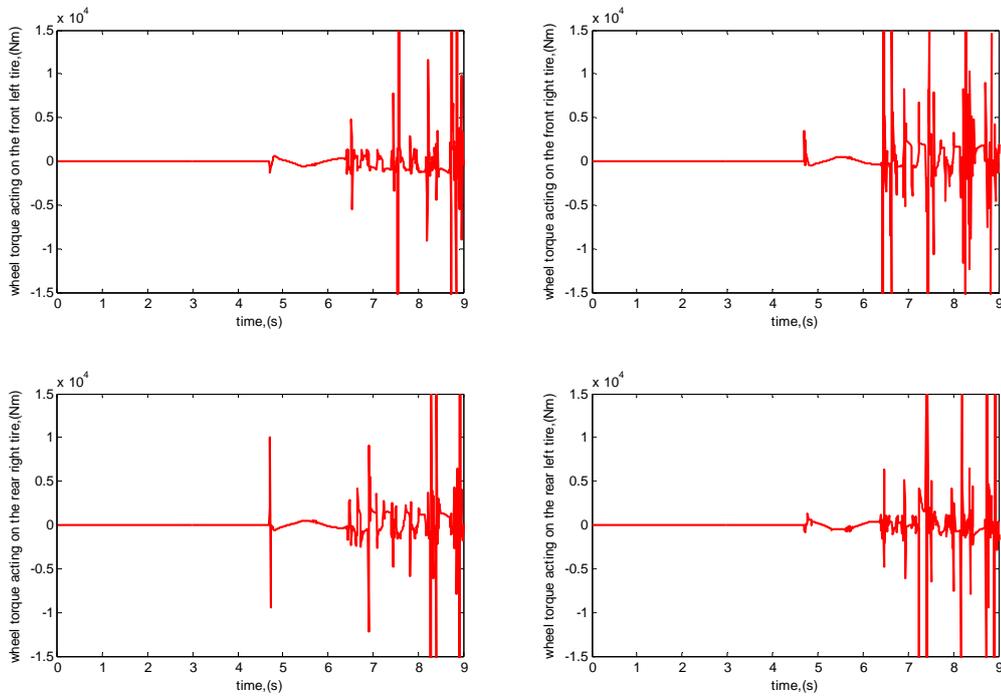


圖 4.8 輪胎力矩控制輸入圖 (例二)

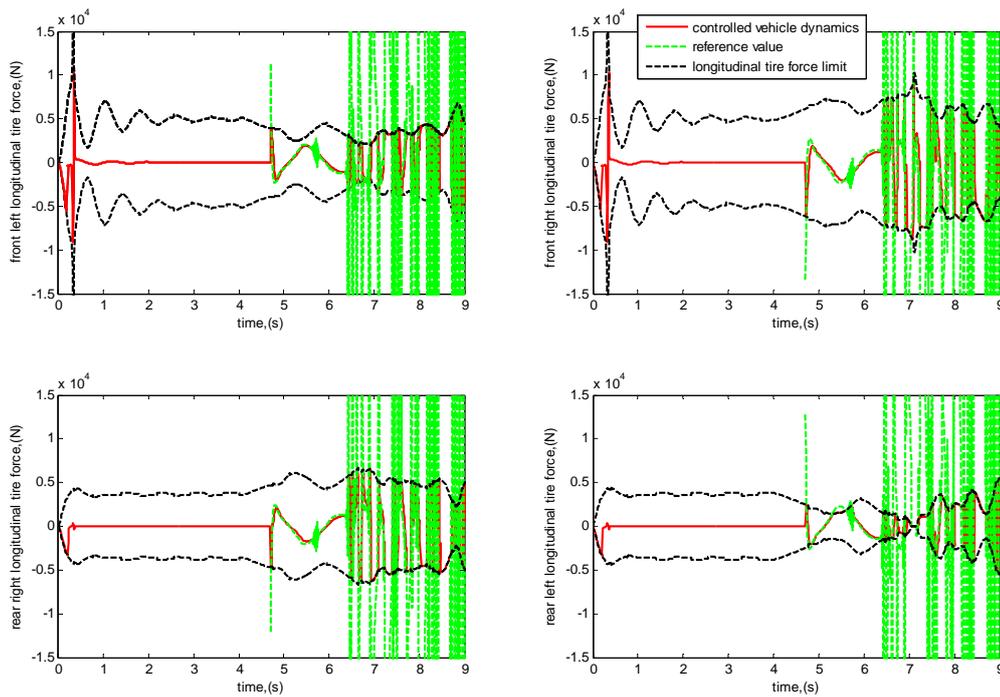


圖 4.9 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例二)

4.3 例三（維持理想路徑，將參考路徑更改為時間函數來描述）

此例主要針對例二所提到參考路徑側向加速度的問題作相關的模擬，所以我們將描述參考路徑的方式由 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 更改為 $y_{ref} = f(t)$ ，這樣參考路徑側向加速度的變化就只與時間有關而與車輛縱向動態無關。模擬的初始條件皆與例二相同，並且模擬結果顯示於圖 4.10-4.14。

圖 4.10 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖，圖 4.11 受控制與未受控制車輛縱向與側向動態比較圖，可以看出受控制後的車輛動態皆有達到控制目標，並且參考路徑側向加速度變的規律許多，使得參考橫擺角速度不在出現不正常的擾動情形。圖 4.12 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，可以看出車輛的行駛路徑有逐漸偏離參考路徑的趨勢，這是因為描述參考路徑的方式由 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 改成 $y_{ref} = f(t)$ 後，控制策略將

只針對車輛側向動態作修正，而沒有考慮車輛縱向動態與參考路徑之間的變化關係。圖 4.13 表示輪胎力矩控制輸入圖、圖 4.14 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖，可以看出由控制法則得到的參考輪胎縱向力皆在車輛實際可達到的輪胎縱向力範圍之內，所以當輪胎力矩控制輸入至車輛系統後，受控後的輪胎縱向力大致上有跟隨到由控制法則得到的參考輪胎縱向力。

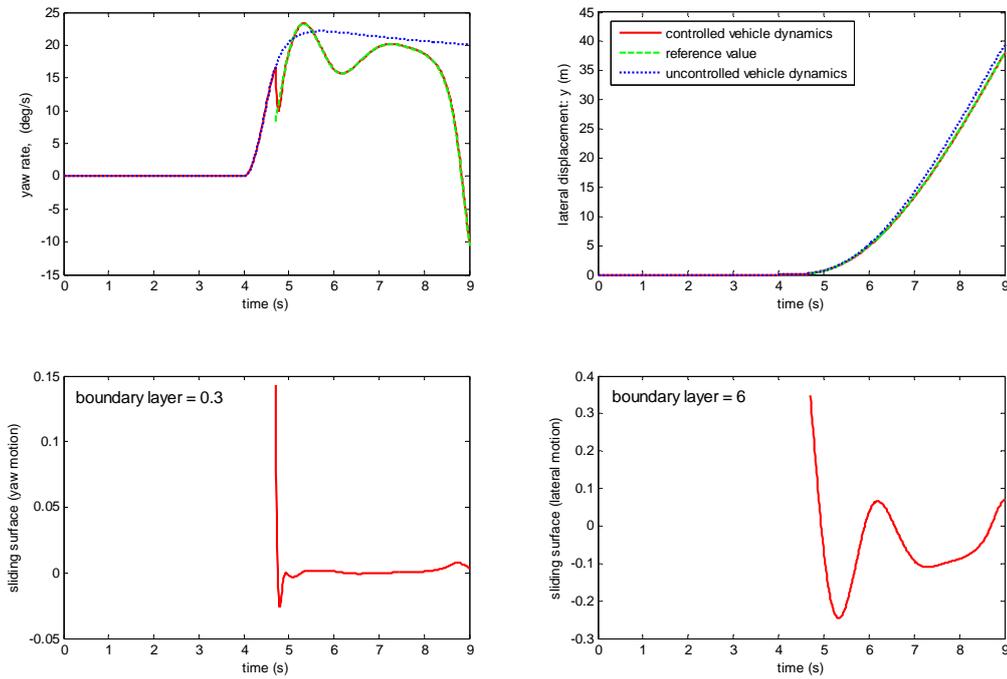


圖 4.10 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例三)

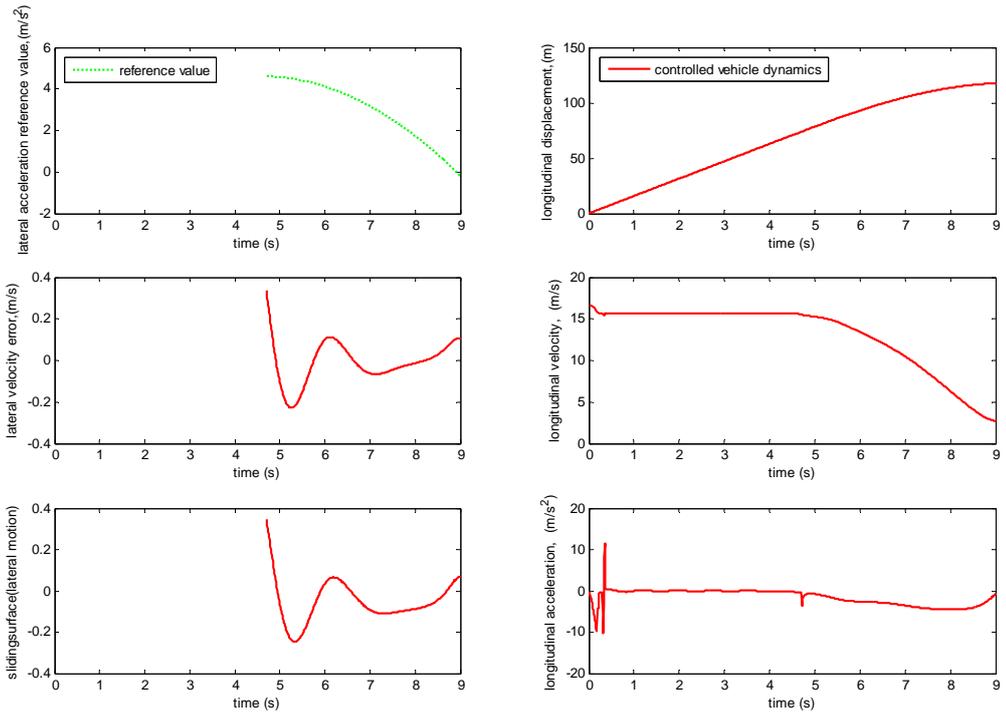


圖 4.11 受控制與未受控制車輛於地表座標上縱向與側向動態比較圖(例三)

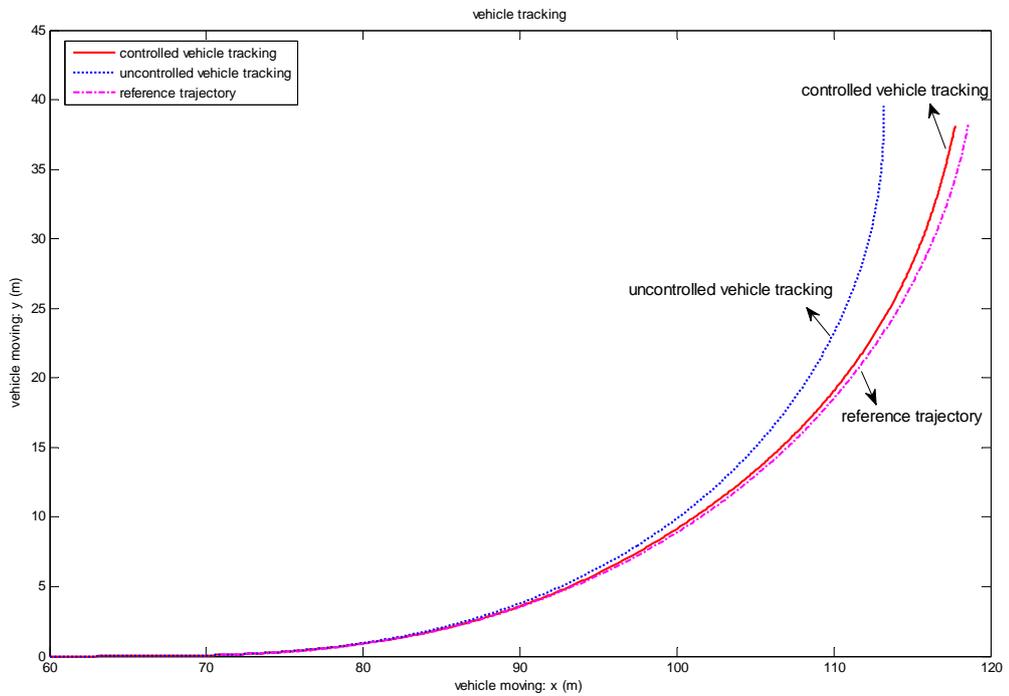


圖 4.12 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例三)

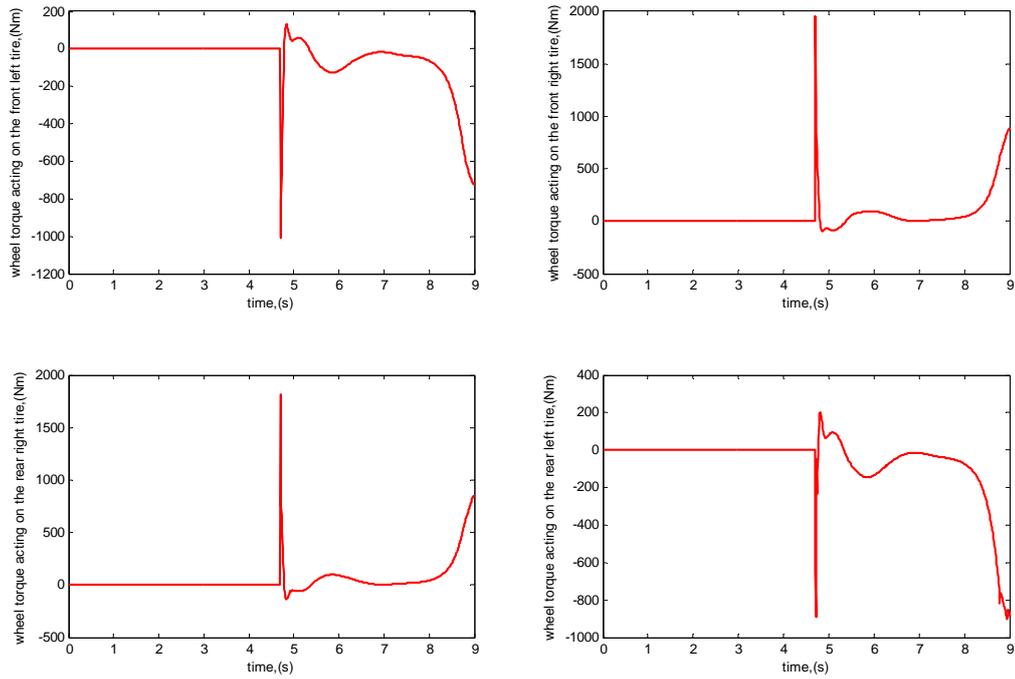


圖 4.13 輪胎力矩控制輸入圖 (例三)

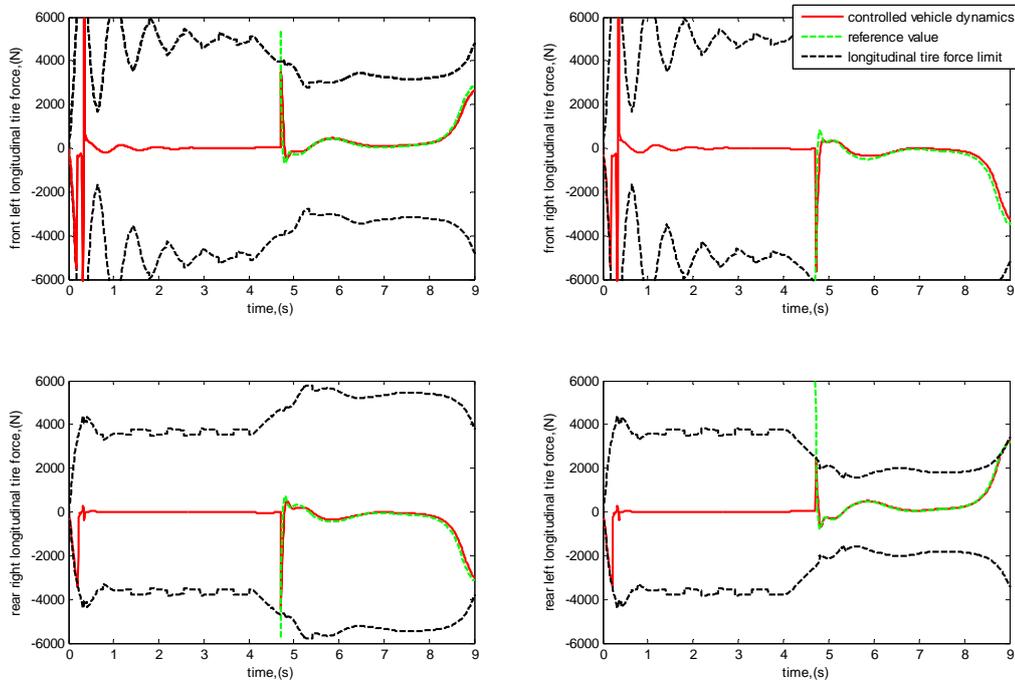


圖 4.14 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例三)

4.4 例四（維持理想路徑，將參考側向加速度省略）

此例主要針對例二與例三的模擬結果對原先設計的控制方法作適當修正，因為當參考路徑側向加速度出現不正常的跳動，就會使參考橫擺角速度出現不正常的擾動。所以我們將(3.12)式與(3.20)式中的參考路徑側向加速度省略，當成系統的不確定項，並且設計適當的控制係數來減低此不確定項對系統的干擾。模擬的初始條件皆與例二相同，並且模擬結果顯示於圖 4.15-4.18。

圖 4.15 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖、圖 4.16 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，可以看出橫擺角速度有跟隨到參考橫擺角度，控制橫擺動態的順滑平面也在所設計的順滑層內，車輛側向位置與參考側向位置有些許誤差，而受控制車輛的行駛路徑也與參考路徑有些誤差，這是因為我們將控制側向動態的方程式多省略了參考側向加速度這個資訊，才會使得收斂效果比較差一點，但控制橫擺動態的順滑平面依然有在設計的順滑層內。圖 4.17 表示輪胎力矩控制輸入圖、圖 4.18 表示受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖，可以看出由控制法則得到的參考輪胎縱向力依然有大於車輛實際能達到的輪胎縱向力的問題，所以會使得橫擺角速度與參考橫擺角速度有些許誤差產生。

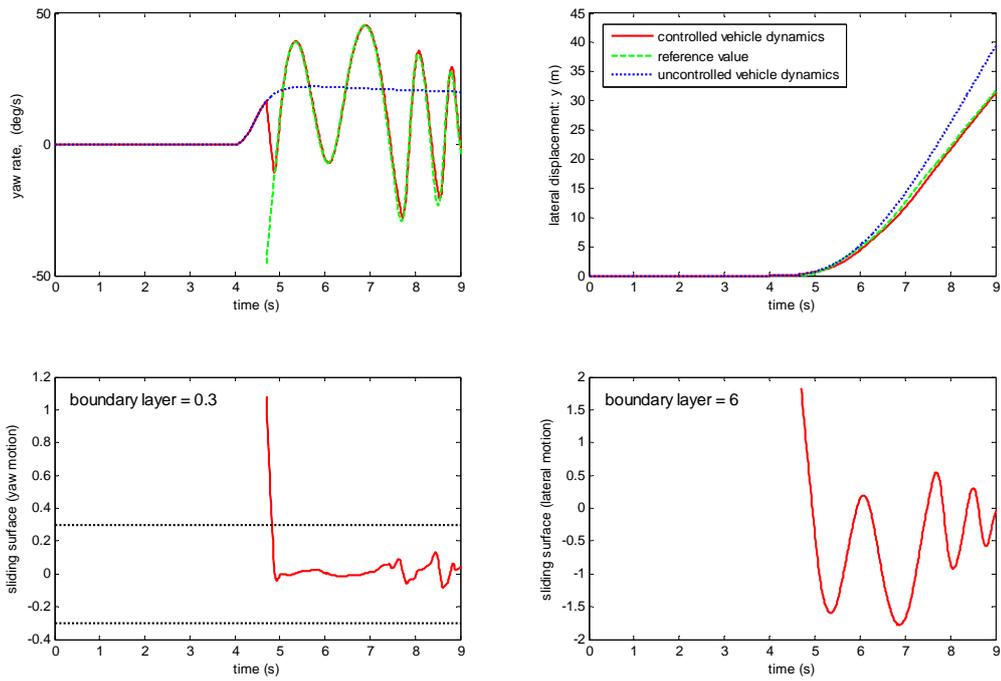


圖 4.15 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例四)

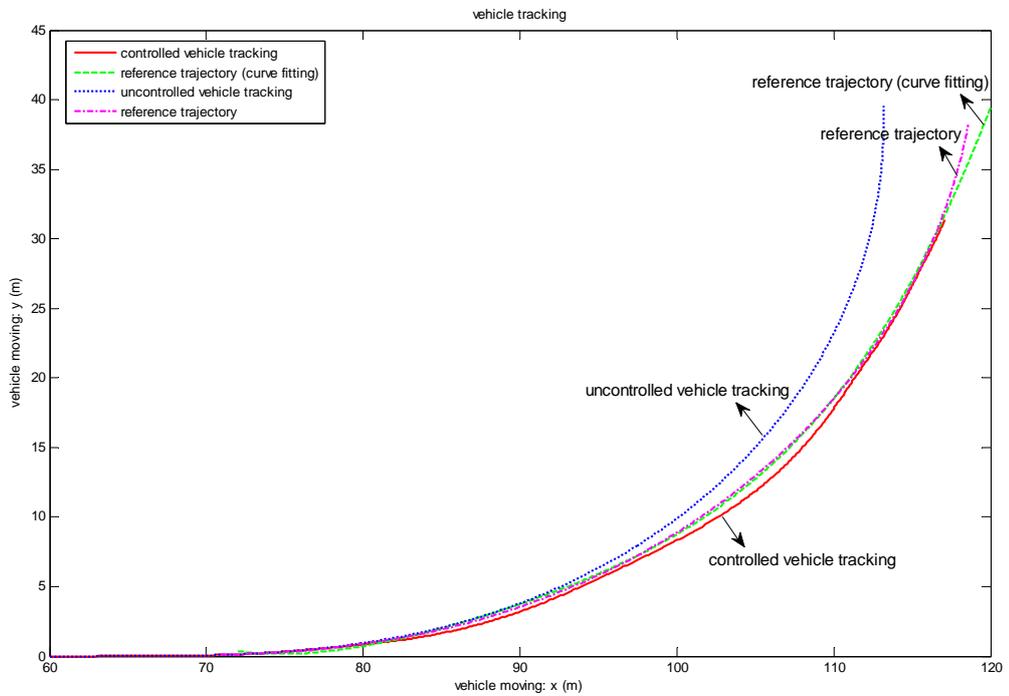


圖 4.16 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例四)

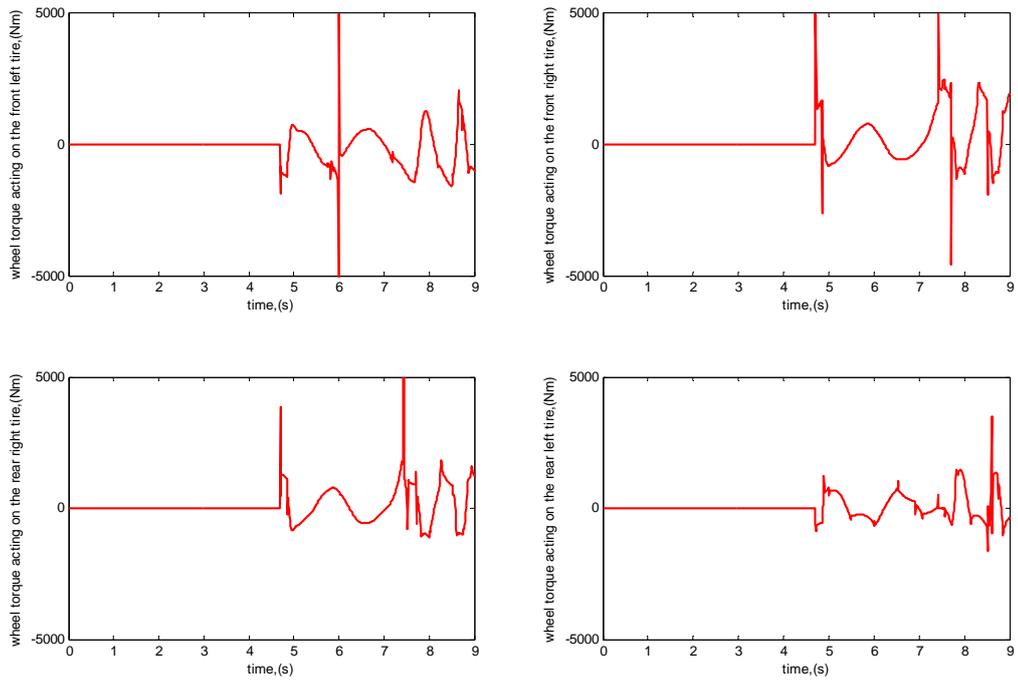


圖 4.17 輪胎力矩控制輸入圖 (例四)

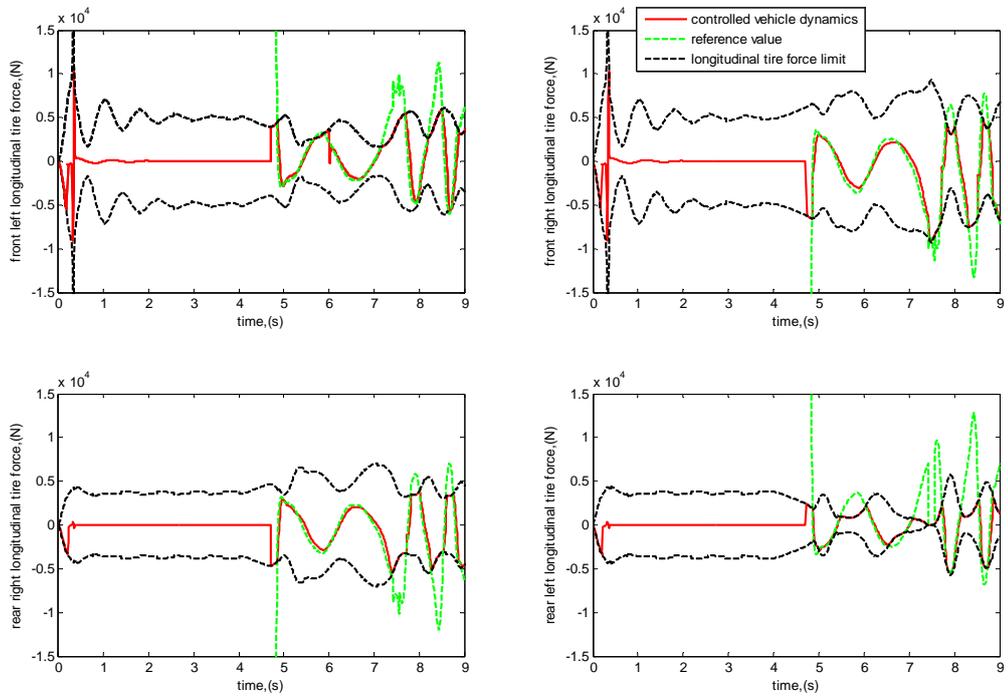


圖 4.18 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例四)

4.5 例五（維持理想路徑，將控制輸入更改為輪胎縱向力）

此例主要針對例二與例四由控制法則得到的參考輪胎縱向力大於車輛實際能達到的輪胎縱向力的問題對控制輸入作修正，雖然例二是受到參考橫擺角速度不正常的擾動才會使得由控制法則得到的參考輪胎縱向力出現異常，但在例四正常的例子中，依然有由控制法則得到的參考輪胎縱向力大於車輛實際能達到的輪胎縱向力的問題存在。但車輛受到實際物理限制是無法避免的，而為了檢視整個控制系統的效能，我們將系統控制輸入由原先的輪胎力矩更改為由控制法則得到的參考輪胎縱向力。模擬的初始條件皆與例二相同，並且模擬結果顯示於圖 4.19-4.21。

圖 4.19 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖、圖 4.20 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，可以看出受控後的車輛動態有達到我們的控制目標。圖 4.21 表示受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖，可以看出由控制法則得到的參考輪胎縱向力有大於車輛實際能達到的輪胎縱向力，但控制輸入改以參考輪胎縱向力代入後，受控後的輪胎縱向力就不會受到實際物理限制而局限在某個範圍內。

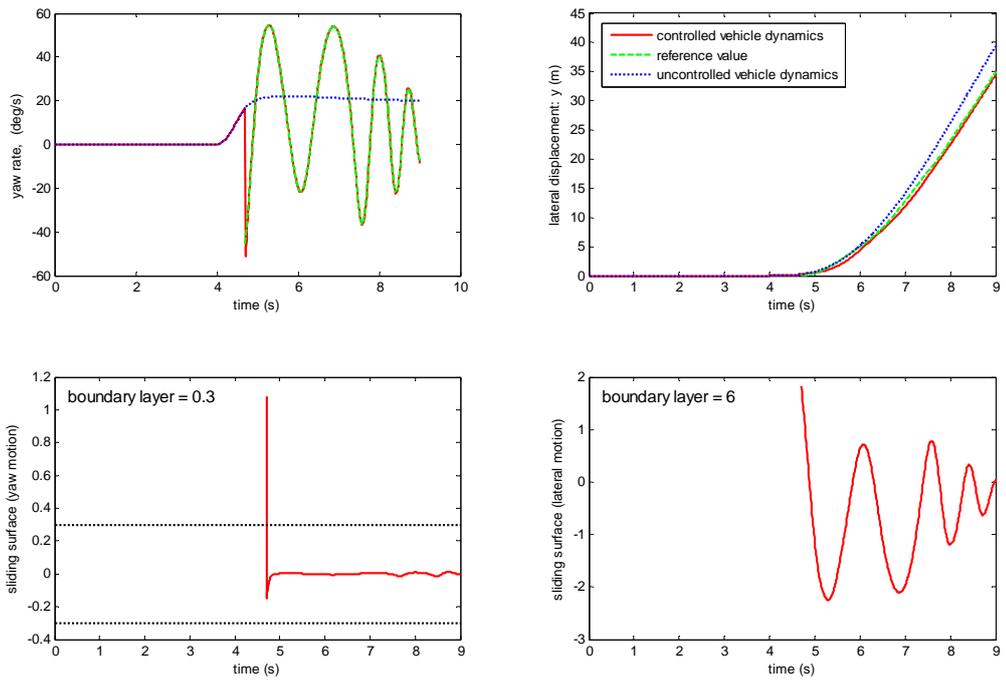


圖 4.19 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例五)

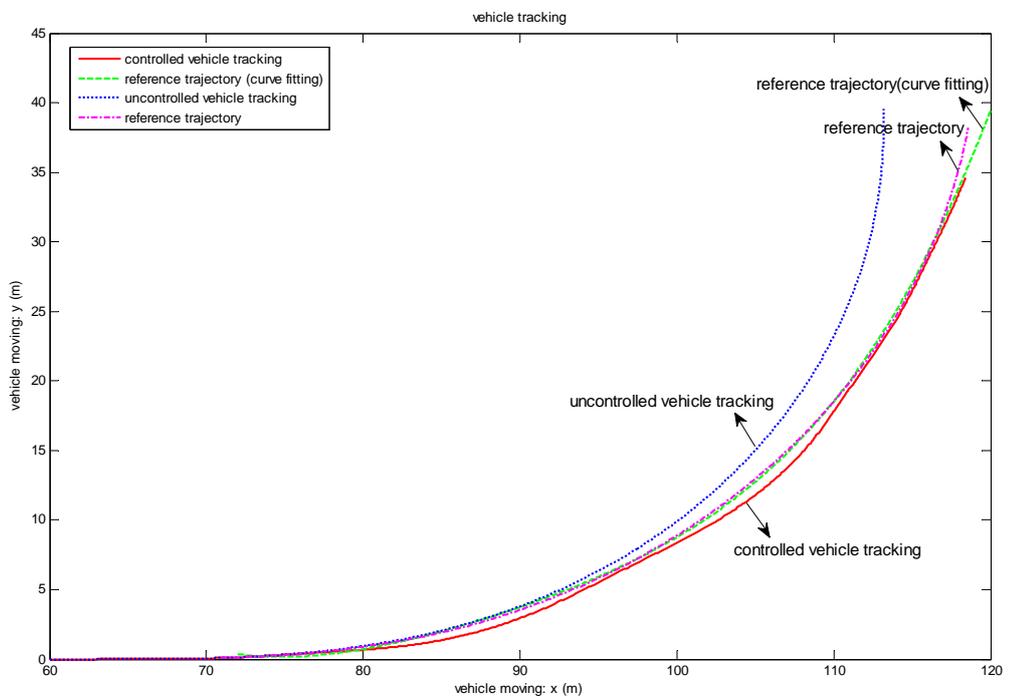


圖 4.20 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例五)

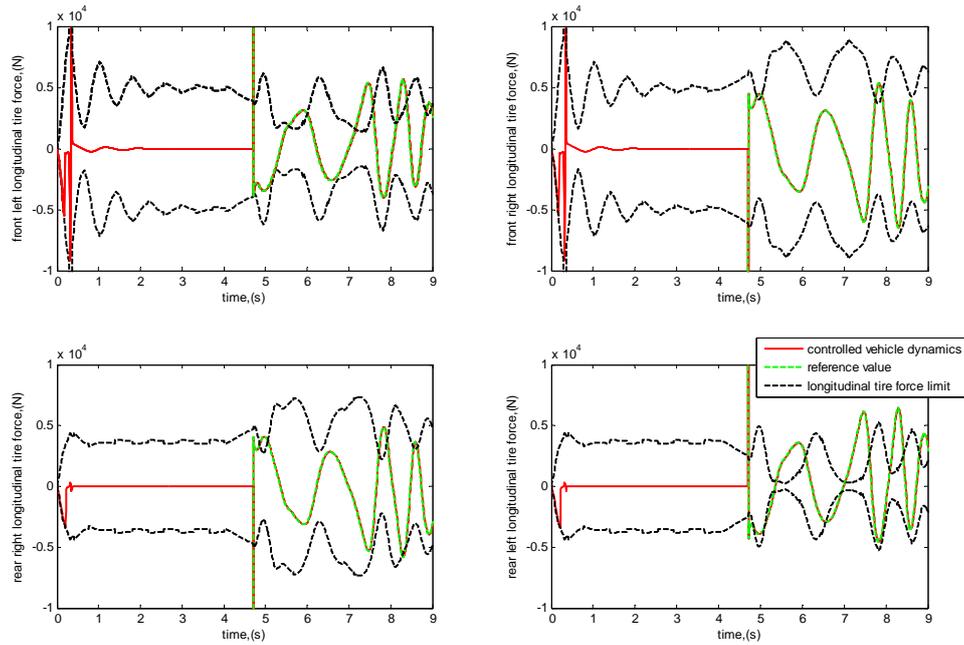


圖 4.21 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例五)

4.6 例六（抑制車輛翻覆並維持理想路徑）

此例是駕駛者在轉彎過程中，行駛路徑受到側傾與俯仰動態的影響，並且有翻覆的危險，利用控制器的介入輔助駕駛者修正行駛路徑和抑制車輛翻覆。而模擬的車輛初始速度為 100 km/hr、方向盤由 4 秒開始轉動，直到 4.5 秒轉至 270 度，之後就固定為 270 度；參考路徑是由輔助車輛模型得到，並且以 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 的方式來描述。而控制輸入為參考輪胎縱向力，控制側向動態的方程式省略參考側向加速度。模擬結果顯示於圖 4.22-4.25。

圖 4.22 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖，依序為橫擺角速度、車身側傾角、地表座標上的側向位置、縱向速度、控制橫擺動態的順滑平面、控制橫擺與側傾動態的順滑平面、控制側向動態的順滑平面，可以看出未受控制的車輛側傾角呈現發散情形，而受控制的車輛側傾角皆有抑制在穩定範圍之內，但參考橫擺角速度呈現發散情形，側向位置的誤差也愈來愈大，而控制橫擺動態的順滑平面、控制橫擺與側傾動態的順滑平

面皆有在所設定的順滑層內，但控制側向動態的順滑平面卻超出所設定的順滑層，並且模擬於 5.7 秒停止。這是因為參考路徑在目前車輛位置的左方，爲了修正車輛行駛路徑至參考路徑，就得再多增加車輛的橫擺角速度，但車輛已處於翻覆危險，此舉動作會增加車輛側向加速度，使得車輛翻覆情形更爲嚴重，而此時就必須降低車輛縱向速度來抑制車輛翻覆，最後於 5.7 秒車輛縱向速度接近於零；在控制側向動態的順滑平面超出所設定的順滑層的問題方面，可以先由圖 4.22 看出車身側滑角(body side slip angle)呈現發散情形，代表車輛此時出現嚴重打滑的現象，車身側滑角如圖 4.33 所示，可看作是車輛行駛軌跡是否與車頭方向一致的指標，圖 4.23 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，其中黑色鏈線表示車頭方向，可以更清楚的看出受控後車輛的車頭皆有朝著參考路徑的方向，但最後車輛的行駛路徑卻沒依照車頭方向前進，使得路徑誤差無法減低，所以控制側向動態的順滑平面才會有發散情形，參考橫擺角速度也就愈來愈大；

而模擬於 5.7 秒停止方面，其原因有以下兩個：

1. 因爲車輛縱向速度已經接近於零，在考量實際煞車對車輛的作用，最多只能將車輛縱向速度減低爲零，而不會出現負的不合理情況。
2. 在正常車輛煞車控制下，必須透過煞車力矩來改變輪速，輪速再來影響輪胎縱向力的變化，最後才影響車輛動態。但在此模擬中，因爲輪胎縱向力受到物理上的最大限制，所以此模擬將控制輸入更改爲參考輪胎縱向力，在這種條件下，可能會使車輛輪速出現異常，其之間關係如(2.17)式。圖 4.24 表示受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖、圖 4.25 表示受控制與未受控制車輛輪胎角速度比較圖，可以看出參考輪胎縱向力超出車輛實際能達到的輪胎縱向力許多，並且車輛輪速也出現了異常。因此在這個模擬中，當車輛縱向速度接近於零時，是無法將控制器放掉，來看之後車輛動態的變化。

在這個模擬中，我們可以看出目前參考路徑的選取方式，並不適用於所有行駛狀態下，例如：車輛在左轉彎過程已有翻覆危險，又要將其導引至更左彎的路徑，只會使得車輛翻覆情形更爲嚴重而已。

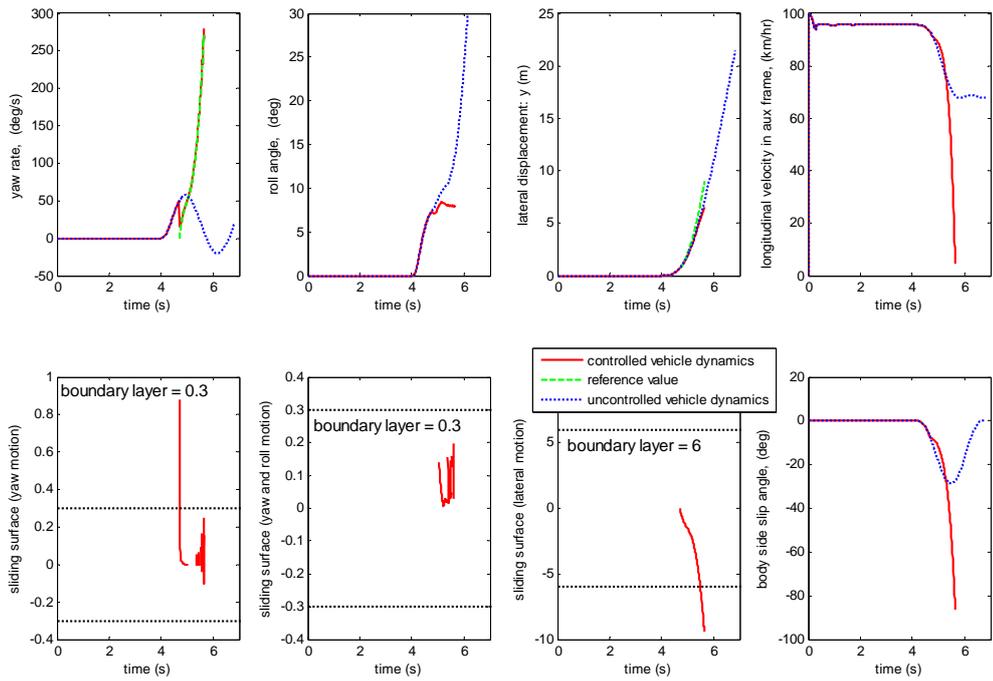


圖 4.22 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例六)

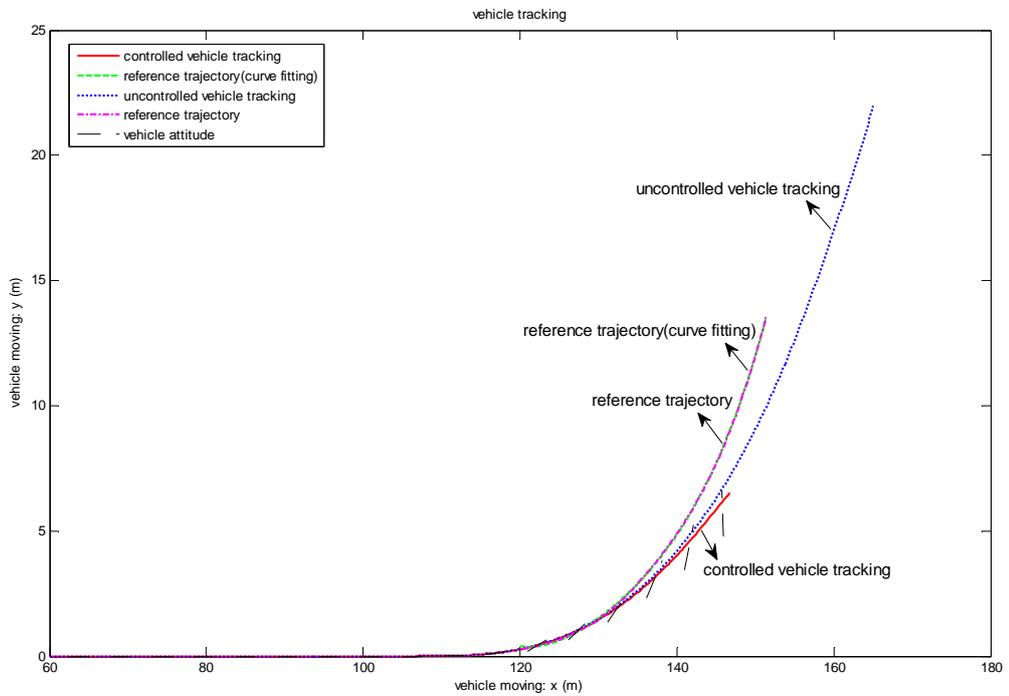


圖 4.23 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例六)

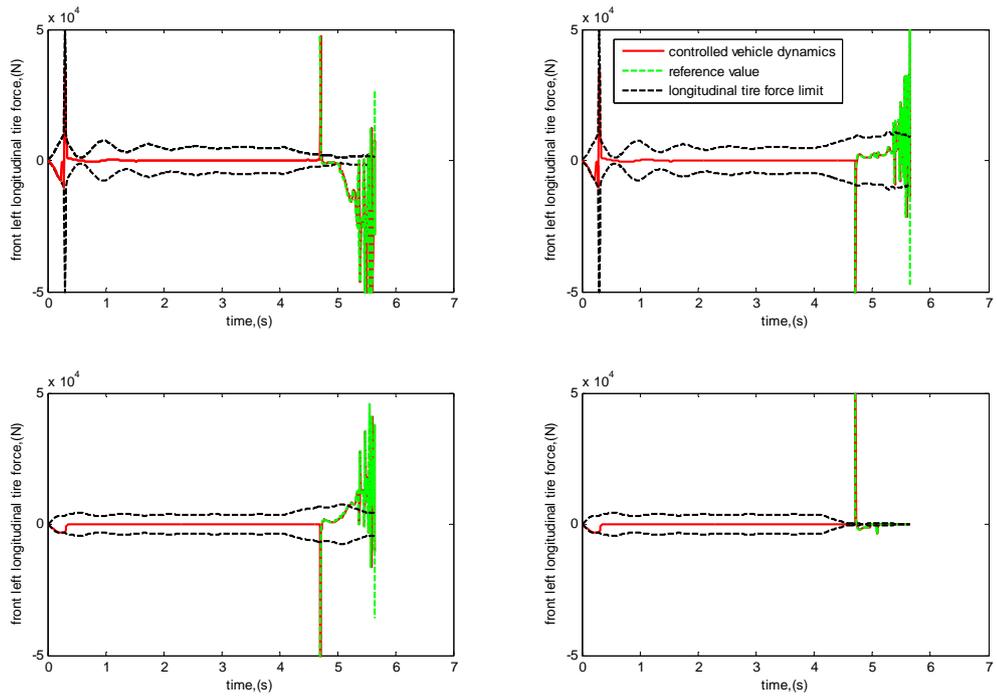


圖 4.24 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例六)

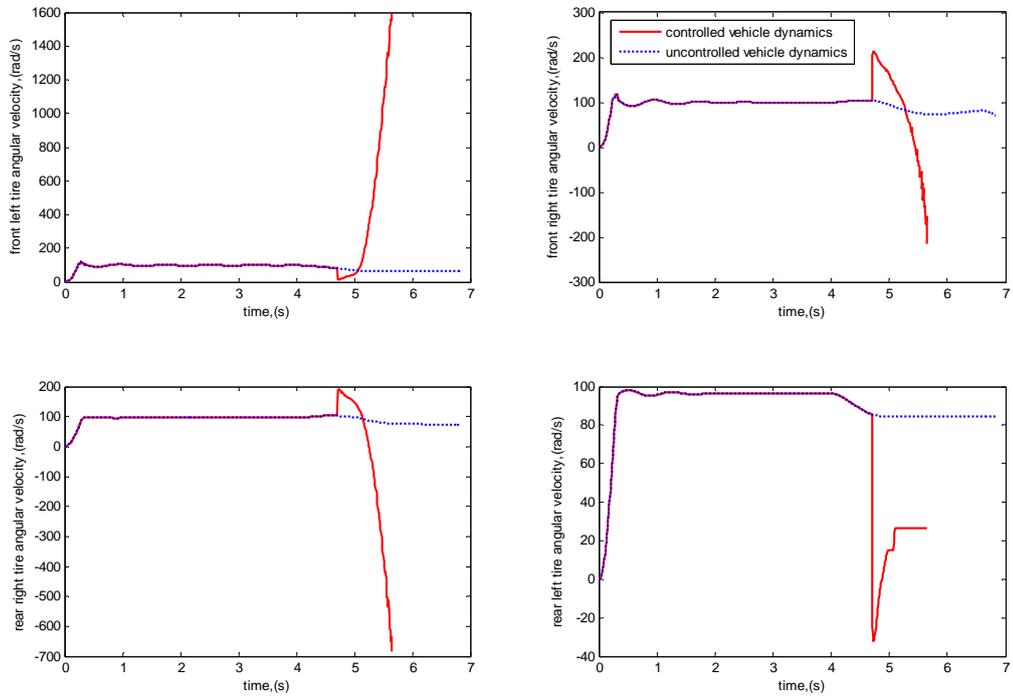


圖 4.25 受控制與未受控制車輛輪胎角速度比較圖(例六)

4.7 例七（抑制車輛翻覆並維持給定路徑）

此例主要針對例六的參考路徑作適當修正，因為如果車輛在左轉彎過程有翻覆危險，直覺上就是要將車輛導引致目前位置的右方路徑來避免翻覆；而在例六透過輔助車輛模型得到的是一條比原始路徑更左彎的參考路徑，這對車輛在左彎過程已有翻覆危險是不適合的路徑，因為要將車輛導引至這條路徑只會使車輛翻覆情形更為嚴重而已。因此我們將事先給定比原始路徑還右方的參考路徑，並且以 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 的方式來描述，而不是透過輔助車輛模型得到。模擬的初始條件皆與例六相同，並且模擬結果顯示於圖 4.26-4.29。

圖 4.26 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖，依序為橫擺角速度、側傾角、側向位置、縱向速度、控制橫擺動態的順滑平面、控制橫擺與側傾動態的順滑平面、控制側向動態的順滑平面、車身側滑角，可以看出未受控制的車輛側傾角呈現發散情形，而受控制的車輛側傾角皆有抑制在穩定範圍之內，控制橫擺動態的順滑平面、控制橫擺與側傾動態的順滑平面皆有在所設定的順滑層內；在 4.7 秒與 6.3 秒之間，車輛動態控制結果皆在理想範圍內，但在 6.3 秒後，參考橫擺角速度逐漸升高、側傾角也一直被抑制在 8 度、側向位置的誤差也逐漸變大、控制側傾動態的順滑平面也有逐漸發散的趨勢。這是因為車身側滑角在 6.3 秒後出現逐漸發散的情形，表示車輛出現嚴重打滑的現象，圖 4.27 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，可以清楚的看出受控後車輛的車頭皆有朝著參考路徑的方向，而一開始車輛的行駛路徑都影依照車頭方向前進，所以能減低路徑誤差，但之後車輛的行駛路徑逐漸偏離車頭方向，所以無法減低路徑誤差，參考橫擺角速度也就愈來愈大，此時就必須降低車輛縱向速度來抑制車輛翻覆，最後於 7.4 秒車輛縱向速度接近於零。圖 4.28 表示受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖，可以看出參考輪胎縱向力超出車輛實際能達到的輪胎縱向力許多。圖 4.29 表示受控制與未受控制車輛輪胎角速度比較圖，可以看出輪速出現了異常。所以程式模擬於 7.4 秒終止的原因，和例六相同，因為車輛縱向速度已接近為零並且車輛輪速出現了異常。

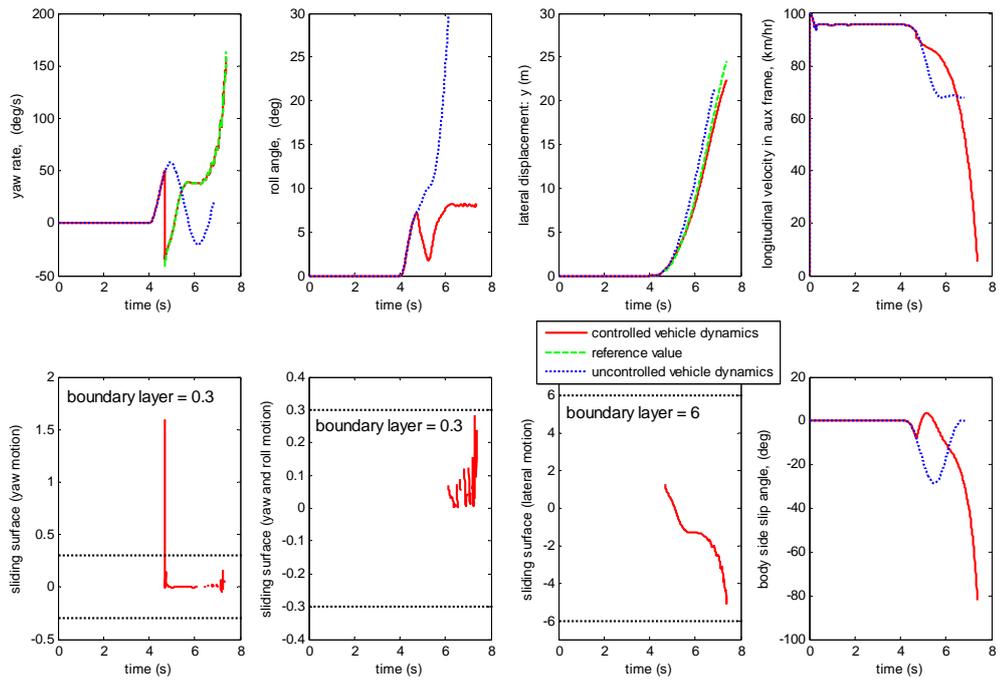


圖 4.26 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例七)

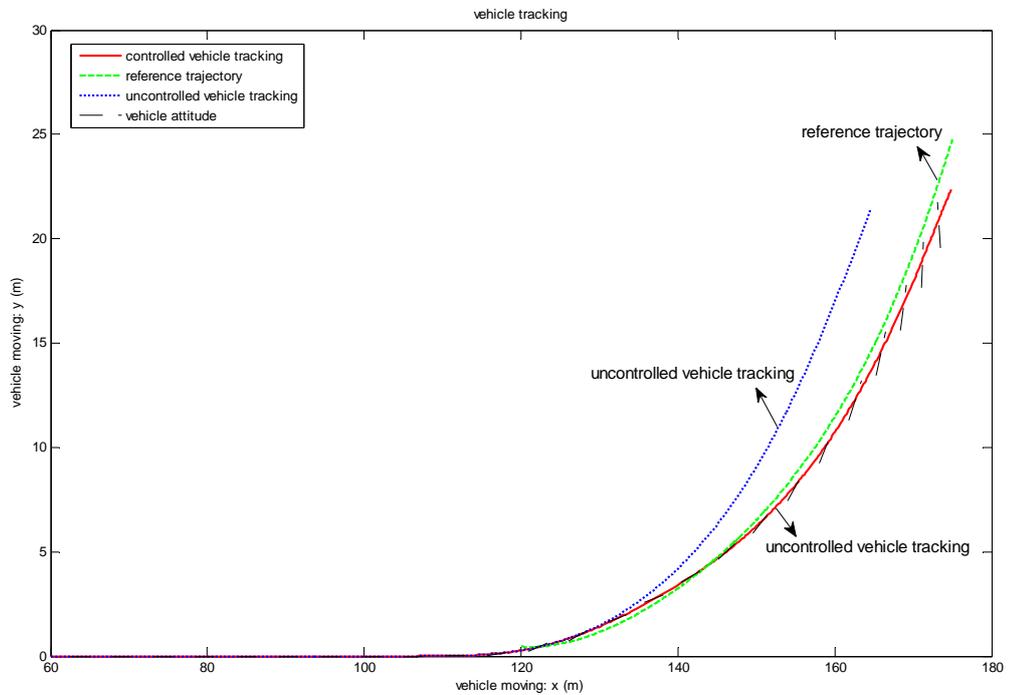


圖 4.27 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例七)

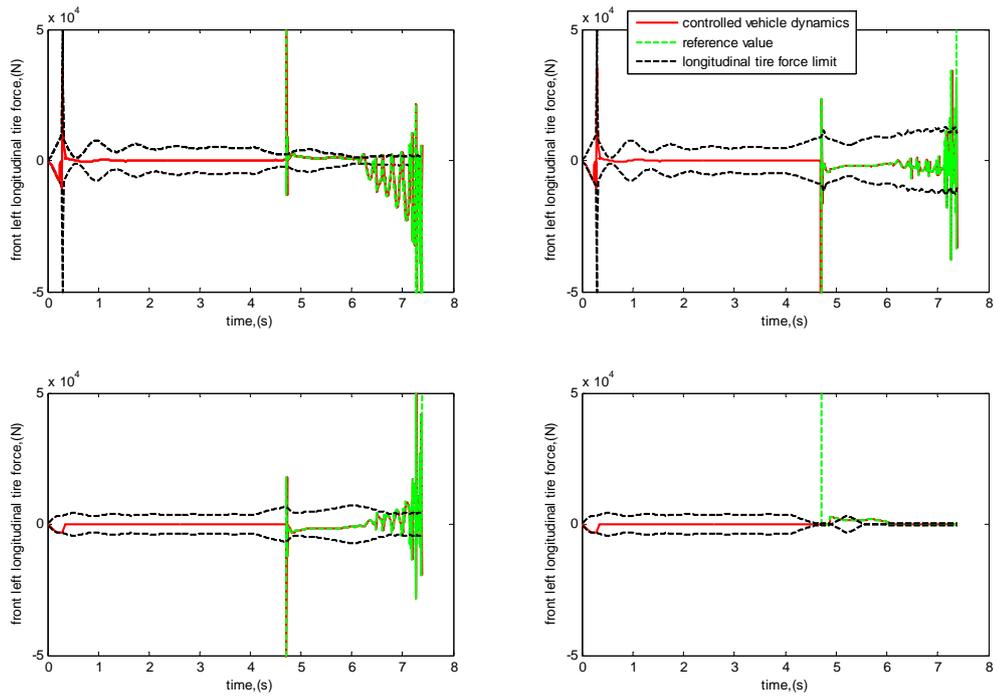


圖 4.28 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例七)

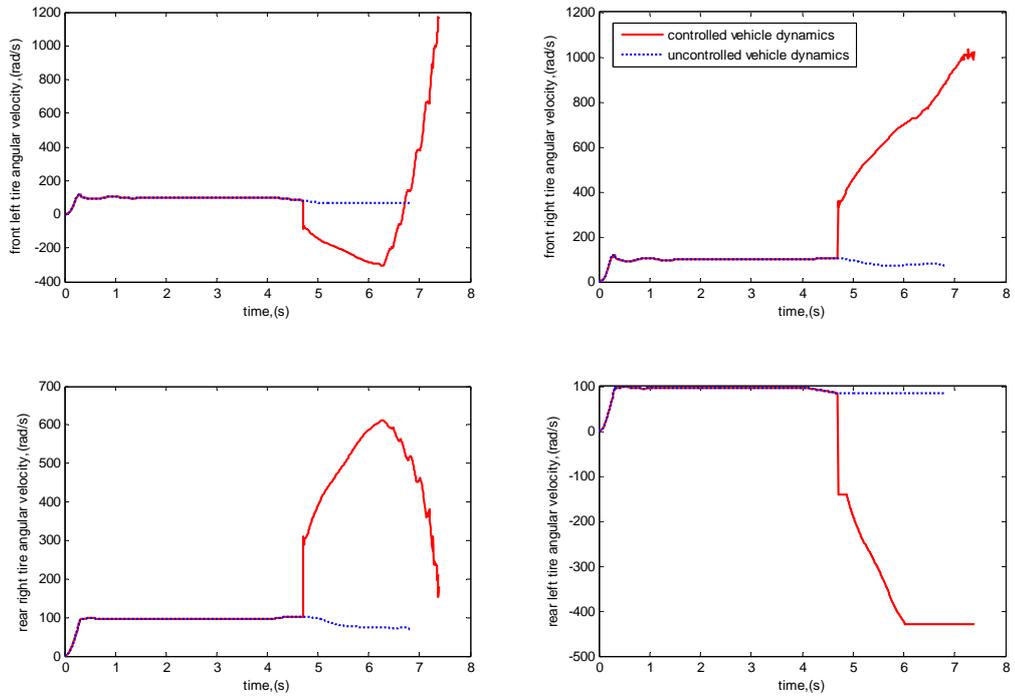


圖 4.29 受控制與未受控制車輛輪胎角速度比較圖(例七)

4.8 例八（抑制車輛翻覆並維持給定路徑，有限制橫擺角速度大小）

此例主要針對例七模擬結果而試著對控制法則增加參考橫擺角速度大小限制的條件，其目的就在減低車輛打滑的情形，看是否車輛行駛方向竟量與車頭方向一致時，修正行駛路徑的效果確實獲得改善。但對控制法則多了限制參考橫擺角速度大小的動作，已破壞原先控制器設計的穩定性，因此我們適當限制參考橫擺角速度大小，使得系統在依然保持穩定的情況下，來探討上述車輛打滑與修正路徑之間的關係。模擬的初始條件皆與例七相同，並且模擬結果顯示於圖 4.30-4.32。

圖 4.30 表示受控制與未受控制車輛動態比較圖，依序為橫擺角速度、側傾角、側向位置、車身側滑角，可以看出未受控制的車輛側傾角呈現發散情形，而受控制受的車輛側傾角皆有抑制在穩定範圍之內，參考橫擺角速度變化的最大範圍被限制在正負 30 度，車身側滑角的變動也在理想範圍內，表示車輛沒有發生嚴重打滑的情形，並且車輛側向位置只與參考側向位置有些許誤差，控制橫擺動態的順滑平面、控制橫擺與側傾動態的順滑平面、控制側向動態的順滑平面皆有在所設定的順滑層內。圖 4.31 表示受控制與未受控制車輛行駛路徑比較圖，更可以清楚看出受控後車輛的車頭皆有朝著參考路徑的方向，並且最後車輛的行駛路徑都有依照車頭方向前進，所以能減低路徑誤差。圖 4.32 表示受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖，可以看出參考輪胎縱向力也有超出車輛實際能達到的輪胎縱向力的情形。

所以由此模擬結果與例七模擬結果，我們可以看出在修正車輛行駛路徑方面，當車身側滑角很大時，表示車輛發生嚴重打滑，此時利用改變車頭方向來修正車輛行駛軌跡的方法，將無法有效改變車輛軌跡。

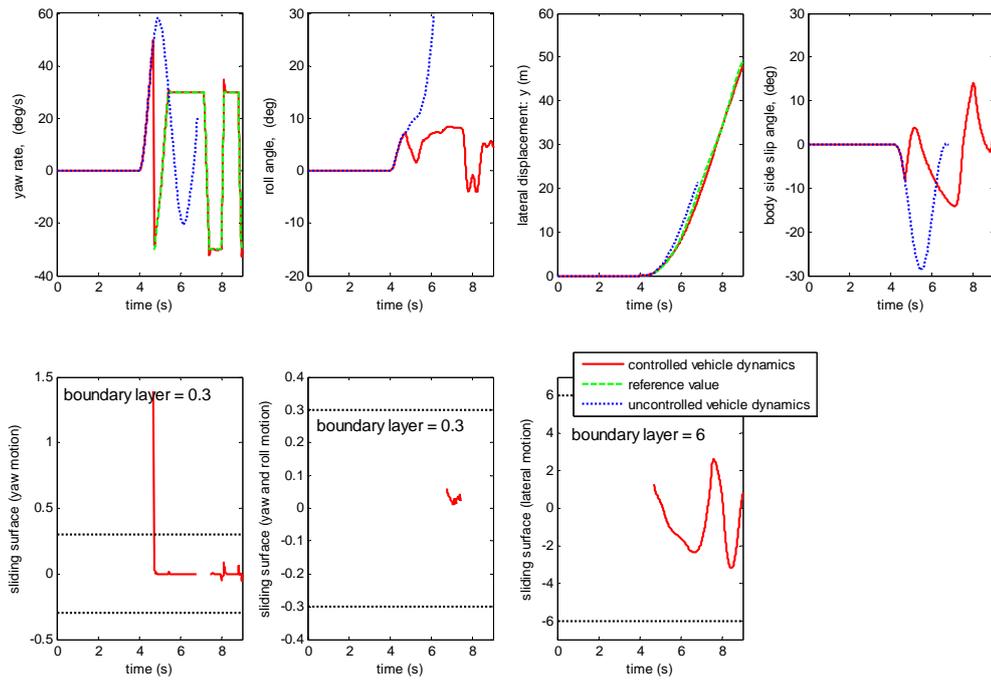


圖 4.30 受控制與未受控制車輛動態比較圖(例八)

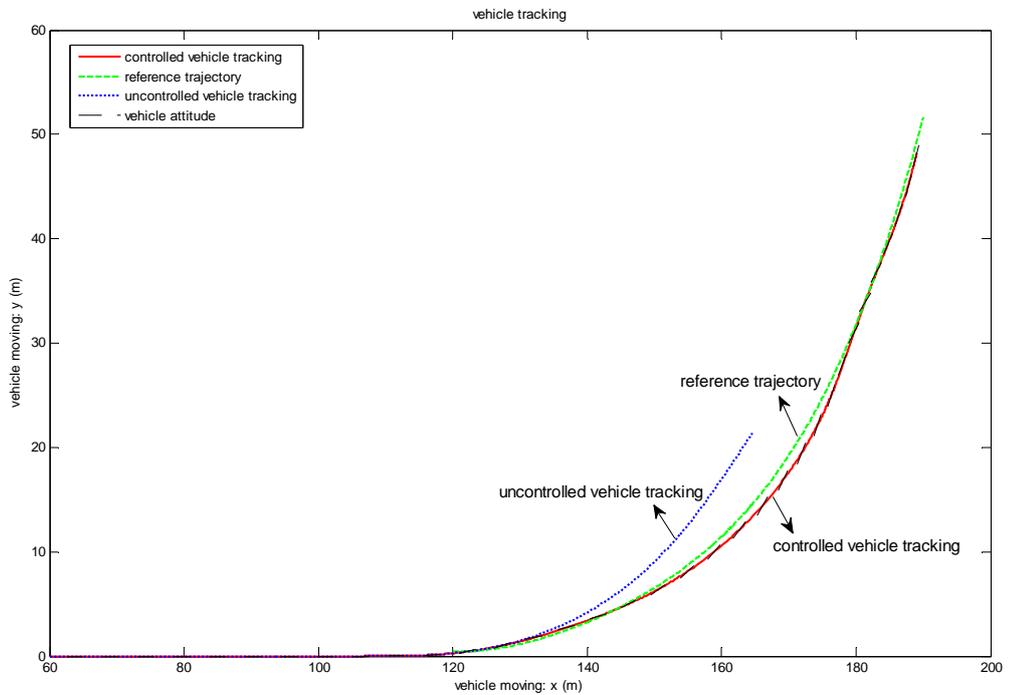


圖 4.31 受控制與未受控制車輛於地表座標上所行駛的路徑比較圖(例八)

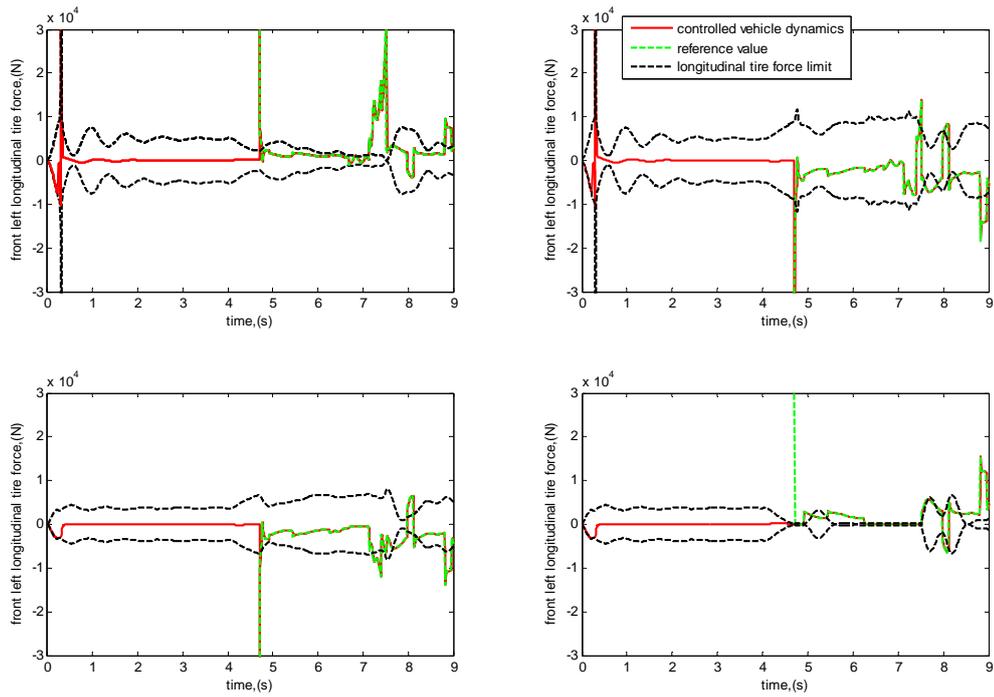


圖 4.32 受控制與未受控制車輛輪胎縱向力比較圖(例八)



$$\text{body side slip angle } (\beta) = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

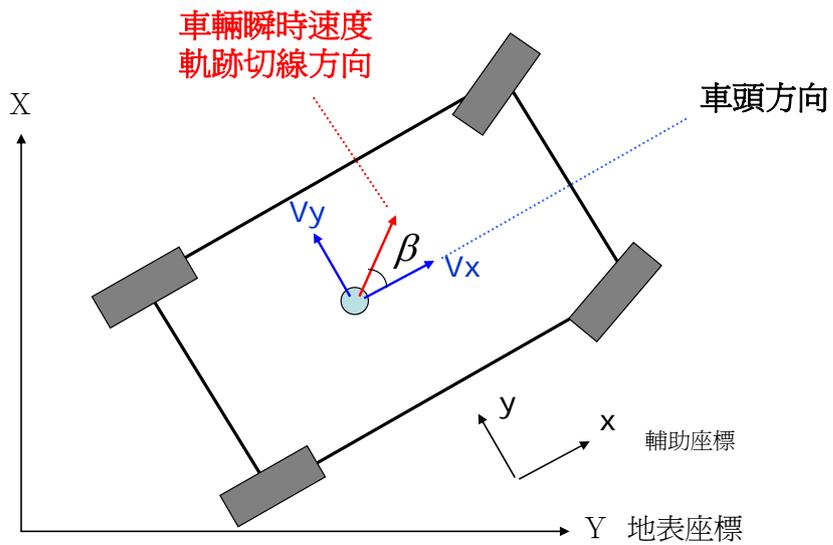


圖 4.33 車身側滑角(body side slip angle)示意圖

第五章

討論

由例二與例三的模擬結果可以看出，參考橫擺角速度易受到參考路徑側向加速度的影響，並且在 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 描述參考路徑的方式下，參考路徑側向加速度會不預期的受到車輛縱向動態變化而出現不正常跳動，進而使得參考橫擺角速度出現不正常擾動，導致控制器會為了追隨此參考值使車輛動態出現異常；而如果將參考路徑改成 $y_{ref} = f(t)$ 的描述方式，參考路徑側向加速度的變化就只與時間有關而與車輛縱向動態無關，所以參考路徑側向加速度就不會受到車輛縱向動態變化而出現不正常跳動，導致參考橫擺角速度出現不正常擾動。但此種控制策略只針對車輛側向動態作修正，而沒有考慮車輛縱向動態與參考路徑之間的變化關係，將會使得車輛行駛軌跡慢慢偏離參考路徑。

由例二與例四的模擬結果可以看出，以 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 描述參考路徑的方式，參考路徑側向加速度相對於參考路徑側向位置與參考路徑側向速度為高頻變化，而控制系統會為了追隨此高頻變化值，所以很容易將系統不確定項的高頻訊號完全激發，以至整個系統出現異常；而如果將參考路徑側向加速度視為系統的不確定項，控制系統就不會為了追隨此高頻訊號，系統不確定項的高頻訊號就不容易被激發，所以系統會穩定。

由例二到例八的模擬結果可以看出，為了達到控制目的所需要的四輪輪胎縱向力大小，常會不預期的大於車輛實際所能達到的輪胎縱向力大小，並且此問題在抑制車輛翻覆的情況下更為嚴重；而車輛實際能達到的輪胎縱向力大小，是會隨著車輛垂直負載的變化而改變。因此以輪胎力矩當作系統控制輸入，將只能改變輪胎縱向力至實際物理限制的最大值；而如果改以輪胎縱向力當作系統控制輸入，就可以避開輪胎縱向力受到物

理限制的因素，來檢視整個控制系統的效能。

由例六到例八的模擬結果可以看出，在修正車輛行駛路徑的方面，只考慮改變車輛的橫擺角速度使其車頭轉向是不夠的，一旦車身側滑角很大時，車輛行駛路徑就不會與車頭方向一致，將導致控制車輛軌跡失敗。

由例六的模擬結果可以看出，目前參考路徑的選取方式，並不適用於所有車輛行駛狀態下，像是左轉彎的車輛已處於翻覆危險時，又要將其導引至一條更左彎的路徑，只會使翻覆情形更為嚴重而已。



第六章

結論與未來計劃

6.1 結論

本論文所提出的車輛運動控制系統主要是希望輔助駕駛者維持車輛行駛路徑與抑制車輛翻覆兩個目的，因此我們採用差動式輪胎力矩控制系統，分別對輪胎施與不同的驅動力或煞車力，並且依據車輛動態來調整控制輪胎力矩的個數，進而產生轉動慣量和降低車輛速度，達到控制目標。

爲了探討車輛行駛的動態行爲，我們建立了一個具有 20 個系統階數的完整車輛模型，用來當作實際車輛動態。但如此複雜的數學模型並不容易爲其設計控制器，因此我們對完整車輛模型作了簡化動作並當作控制器設計的基礎模型，以順滑模態控制法則爲基礎並且搭配多樣順滑模態控制的概念來設計，再利用相關物理動態得到煞車力矩，最後當成系統的控制輸入至完整車輛模型。

爲了達到控制的兩個目的，我們是控制車輛的橫擺動態來維持車輛行駛路徑、控制車輛的側傾動態來抑制車輛翻覆。但因爲車輛側傾動態的控制僅在車輛處於翻覆危險才有控制的必要，所以針對此點，我們發展出二套控制器，分別爲橫擺與側傾動態控制器和橫擺動態控制器，並且以車輛側傾角角度的大小當作是否有翻覆危險的依據，也當作兩控制器適當的切換時機。

我們利用數值分析軟體 MATLAB 對本論文所提出的車輛運動控制系統來驗證其可行性與效能，並且依據模擬結果作詳細的討論與分析，最後發現到目前控制方法仍遭遇到幾個問題：爲了達到控制目標所需要的輪胎縱向力常會不預期的超出車輛實際能達到

的輪胎縱向力大小；以 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 的方式來描述參考路徑時，參考側向加速度不預期的會受到車輛縱向動態變化而出現不正常跳動，也將影響到參考橫擺角速度；目前參考路徑的選取方式，並不適用於所有行駛狀態下；利用橫擺角速度變化來修正車輛行駛路徑的方式，如果車輛側滑角沒有在穩定範圍內，將會導致控制失敗。因此未來在上述幾個問題有明顯改善後，即可採用本方法發展出一套主動式安全車輛控制系統，為駕駛者提供更安全的駕駛保障。

6.2 未來計劃

1.由於車輛輪胎縱向力的大小會受到物理上的限制，所以並無法在所有情況下，都能滿足為達控制目標所需要的輪胎縱向力大小，並且實際能達到的車輛輪胎縱向力大小，是會隨著車輛垂直負載的變化而改變，但這個變化量是我們事先已知的。因此如果能在控制法則裡多增加權重的概念，進而使得可以承受比較大輪胎縱向力變化的輪胎出比較大的驅動力或煞車力，反之則出比較小的驅動力或煞車力，對於輪胎縱向力大小受限的問題，應能有明顯改善。

2.由模擬結果與[24]所述，車輛橫擺角速度與側滑角是影響車輛轉向行為最重要的兩個動態，所以控制法則應多加入車身側滑角變化的考量，盡量在車輛不會發生打滑的情況下，改變橫擺角速度來修正行駛路徑。

3.以目前 $y_{ref} = f(x_{ref})$ 描述路徑的方式，在遇到類似髮夾彎的轉彎路徑時，將會有一個 x 座標對應到兩個 y 座標的情形，因此如果能將目前利用地表座標座標來描述路徑的方式，更改為其它座標來描述，對此問題應可獲得明顯改善。

B.1 車輛慣性與幾何參數

車輛參數	符號	數值	單位
車輛的總質量	$m_{vehicle}$	1740	kg
車輛的可壓縮質量	m_s	1600	kg
車輛前半部的不可壓縮質量	$m_{u1,2}$	40	kg
車輛後半部的不可壓縮質量	$m_{u3,4}$	30	kg
側傾轉動慣量	I_x	420	kg · m ²
俯仰轉動慣量	I_y	2594	kg · m ²
橫擺轉動慣量	I_z	3214	kg · m ²
車體前軸兩輪所夾的長度	sb_1	1.45	m
車體後軸兩輪所夾的長度	sb_2	1.45	m
車體重心到前軸的長度	l_1	1.05	m
車體重心到後軸的長度	l_2	1.4	m
車體質心高度	h	0.6	m
車體質心與地面間的距離	Z	0.7	m
重力加速度	g	9.81	m / s ²

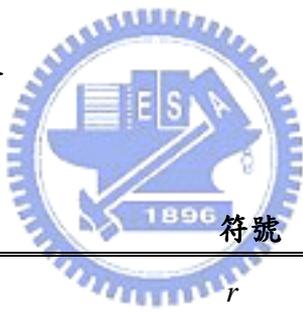
表 B.1 完整車輛模型的慣性與幾何參數

B.2 懸吊系統係數

懸吊系統係數	符號	數值	單位
彈簧勁度係數	C_1	34000	N/m
彈簧勁度係數	C_2	300	N/m
彈簧勁度係數	C_3	0.21	m
阻尼器的阻尼係數	D_{damper}	1200	$N \cdot s/m$

表 B.2 非線性懸吊系統模型係數

B.3 輪胎幾何與實驗參數



輪胎幾何參數	符號	數值	單位
輪胎的真實半徑	r	0.3	m
輪胎的轉動慣量	I_{wheel}	2.03	$kg \cdot m^2$
輪胎垂直方向的徑度	$K_{vertical}$	150000	N/m
前輪胎的側傾轉向係數	$\kappa_{1,2}$	0.01	
後輪胎的側傾轉向係數	$\kappa_{3,4}$	0.03	

表 B.3.1 輪胎幾何參數

非線性輪胎模型參數	符號	數值(行駛)	數值(煞車)
輪胎係數，勁度因子	B_x	$22 + \frac{F_z - 1940}{645}$	$22 + \frac{F_z - 1940}{430}$
輪胎係數，形狀因子	C_x	$1.35 - \frac{F_z - 1940}{16125}$	$1.35 - \frac{F_z - 1940}{16125}$
輪胎係數，極值	D_x	$2000 + \frac{F_z - 1940}{0.956}$	$1750 + \frac{F_z - 1940}{0.956}$
輪胎係數，曲率因子	E_x	-3.6	0.1

表 B. 3. 2 非線性輪胎縱向勁度係數

非線性輪胎模型參數	符號	數值
輪胎係數，勁度因子	B_y	$2.2 + \frac{5200 - F_z}{4000}$
輪胎係數，形狀因子	C_y	$1.26 + \frac{5200 - F_z}{32750}$
輪胎係數，極值	D_y	$-0.0003F_z^2 + 1.8096F_z - 22.73$
輪胎係數，曲率因子	E_y	-1.6

表 B. 3. 3 非線性輪胎側向勁度係數

參考文獻

- [1] Ling-Yuan Hsu, "Vehicle rollover prediction system using states observers," Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, National Chiao Tung University, 2006.
- [2] Chen, B.C. and Peng H., "Differential-Braking-Based Rollover Prevention for Sport Utility Vehicles with Human-in-the-loop Evaluations," *Vehicle System Dynamics* 2001, Vol. 36, No. 4-5, pp. 359-389.
- [3] Selim Solmaz, Martin Corless and Robert Shorten, "A methodology for the design of robust rollover prevention controllers for automotive vehicles: part 1-differential braking," *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control* Manchester Grand Hyatt Hotel San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006.
- [4] Chen, L.K. and Hsu, S.Y., "Investigation of driver-controller interaction in vehicle rollover prevention," *Conference on Systems, Man, and Cybernetics* October 8-11, 2006, Taiwan.
- [5] Selim Solmaz, Mehmet Akar, and Robert Shorten, "Adaptive rollover prevention for automotive vehicles with differential braking," *IFAC World Congress* 2008.
- [6] P. Gaspar, I. Szaszi, and J. Bokor, "Brake control to prevent the rollover of heavy vehicles based on a linear parameter varying model," *European Conference of Control*, Cambridge, 2003.
- [7] Brad Schofield, Tore Haggglund and Anders Rantzer, "Vehicle dynamics control and controller allocation for rollover prevention," *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications* Munich, Germany, October 4-6, 2006.
- [8] P. Gaspar, Z. Szabo, and J. Bokor, "Brake control combined with prediction to prevent the rollover vehicles," *IFAC World Congress*. Praha. 2005.

- [9] Selim Solmaz, Martin Corless and Robert Shorten , “A methodology for the design of robust rollover prevention controllers for automotive vehicles:Part 2-Active steering,” Proceedings of the 2007 American Control Conference Marriott Marquis Hotel at Times Square New York City,USA,July 11-13,2007
- [10] Dirk Wollherr, Jorg Mareczek, Martin uss, and Gunther Schmidt, “Rollover avoidance for steerable vehicles by invariance control,” Proceedings of the 2001 European Control Conference,Porto,Portugal,pp.3522-3527.
- [11] Dirk Odenthal, Tilman Bunte , and Jurgen Ackerman, “Nonlinear steering and braking control for vehicle rollover avoidance,” Proc.European Control Conference,(1999).
- [12] Christopher R. Carlson and J. Christian Gerdes , “Optimal rollover prevention with steer by wire and differential braking,” ASME international Mechanical Engineering Congress and Exposition November 16-21,2003,Washington,D.C.USA.
- [13] Yang H. and Liu,L.Y. , “A robust active suspension controller with rollover prevention,” SAE 2003 World Congress & Exhibition, March 2003.
- [14] Edwin Stone and David Cebon, “A preliminary investigation of semi-active roll control,” 6th International Symposium on Advanced Vehicle Control, AVEC2002 Hiroshima, Japan.
- [15] Chenming Zhao, Weidong Xiang, Paul Richardson , “Vehicle Lateral Control and Yaw Stability Control through Differential Braking,” IEEE ISIE ,July 9-12,2006.
- [16] Tom Pilutti , Galip Ulsoy , and Davor Hrovat, “Vehicle steering intervention through differential braking,” Preceedings of the American Control Conferences Seattle , Washlngton, june 1995.
- [17] Feng K. T., “Vehicle lateral control for driver assistance and automated driving,” Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, 2000.
- [18] Pongsathorn Raksincharoensak,Masao Nagai and Motoki Shino, “Lane keeping control strategy with direct yaw moment control input by considering dynamics of electric vehicle,

System Dynamics Vol.44,Supplement,2006,192-201.

- [19] Matthias Schorn , Ulrich Stahlin , Ali Khanafer and Rolf Isermann, “Nonlinear trajectory following control for automatic steering of a collision avoiding vehicle, ” Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis,Minneapolis,Minnesota,USA,June 14-16,2006.
- [20] Pacejka H. B. and Besselink I. J. M., “Magic formula tyre model with transient properties,” Vehicle System Dynamics Supplement, Vol. 27, pp. 234-249, 1997.
- [21] Pacejka H. B. and Bakker E., “The magic formula tyre model,” Vehicle System Dynamics Supplement, Vol. 21, pp. 1-18, 1993.
- [22] Porcel, A., Laurence, P., Basset, M. and Gissinger, G. L., “Tyre model for vehicle simulation: Overview and real time solution for critical situations,” Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, pp. 817-822, September 2001.
- [23] K.Hwang , “Driving behavior and traffic order ,” Proceedings of Academic and Educational Conference on Automotive Safe Driving. Pp.53-66,1992.
- [24] Cong Geng,Toshiyuki Uchida and Yoichi Hori, “Body Slip Angle Estimate and Control for Electric Vehicle with In-Wheel Motors,” The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society(IECON) Nov.5-8,2007,Taipei,Taiwan.
- [25] Hingwe P., “Robustness and performance issues in the lateral control of vehicle in automated highway system” , Ph.D. Thesis,Department of Mechanical Engineering, University of California,Berkeley,1997.