

不確定環境下之選擇權評價模型

研究生：王詩韻

指導教授：李正福
曾國雄

國立交通大學管理科學系博士班

摘 要

選擇權評價模型(option pricing model)係由 Black 及 Scholes 於 1973 年聯合提出，而過去在處理選擇權之定價問題時都是假設變數是明確的(crisp)，所以大多數之研究集中在如何放鬆 B-S 模型之假設，因為無風險利率和股價波動性被認為是隨機過程而非常數，在放鬆這些假設後，就能建立一個新的模型。本文即應用模糊理論(Fuzzy Theory)的觀念，針對 Black-Scholes (1973)選擇權評價模式，採用模糊決策理論的主張，在實際選擇權評價分析中，輔以模糊狀態、模糊樣本訊息、模糊行動及評價函數之四項維度所構成的決策空間，來描述投資者於模糊環境下之決策，推論出若不考慮模糊因素則：(1)將高估風險利率之期望值，造成買權價格偏離的現象；(2)將高估股價變動性之期望值，高估投資人之獲利空間，易造成市場之不穩定性；(3)除非投資者已掌握完全訊息或客觀環境已確定情況下，否則投資者估計 B-S 選擇權評價模式中相關變數時，在價內($S > K$)及價平($S = K$)時，將高估買權價格期望值，而在價外($S < K$)時，將低估買權價格期望值，此舉將導致訂價決策之錯誤，造成投資人之損失。

為了驗證以上模型之推導，本研究更進一步地應用模糊集合理論於二項式選擇權評價模型中，亦即 CRR (Cox, Ross and Rubinstein, 1979)模型，據以建立模糊二項式選擇權評價模型。此模型能提供合理之選擇權歸屬函數和價格區間，使許多投資者可藉此套利或避險，故我們若能預測合理之選擇權價格區

間，不同風險偏好之投資者就能從中獲利。然 CRR 模型或 Black-Scholes 模型亦僅能提供一個理論之參考值，在以上模型假設中，不論是無風險利率或股價報酬波動性皆為估計值，亦即隱含不確定性，故我們可以將模糊集合理論應用於 CRR 模型中，求算出三角模糊數，則投資者就可根據三角模糊數中極左值或極右值之選擇權價格區間來修正其投資組合策略，就不同風險偏好之投資者而言，亦能據此作出正確之投資判斷。

針對 B-S 模型、CRR 模型及模糊二項式模型之比較，茲以 S&P500 股價指數選擇權為例，於價外($S < K$)時，其市價皆比 B-S 模型與 CRR 模型所求算之理論價還高，權證之價值有被低估之現象。大致而言，B-S 模型所求出之理論價格比 CRR 模型及模糊二項式模型所求算之理論價格還低，且誤差較大。而模糊二項式模型所求算之理論價格在敏感度較高之情況下，比一般 CRR 模型更接近實際值，且也較其收斂，同時又可創造出一個買權價格區間，提供不同風險偏好者做投資選擇。

關鍵詞：模糊決策空間、模糊集合理論、CRR 模型、Black-Scholes 模型、模糊二項式模型、三角模糊數。



The option pricing model under uncertainty environment

Student: Shin-Yun Wang

Advisors: Dr. Cheng-Few Lee
Dr. Gwo-Hshiung Tzeng

Department of Management Science
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The Black-Scholes Option Pricing Model (OPM) developed in 1973 has always been taken as the cornerstone of option pricing model. The generic applications of such a model are always restricted by its nature of not being suitable for fuzzy environment since the decision-making problems occurring in the area of option pricing are always with a feature of uncertainty. When an investor faces an option-pricing problem, the outcomes of the primary variables depend on the investor's estimation. It means that a person's deduction and thinking process uses a non-binary logic with fuzziness. Unfortunately, the traditional probabilistic B-S model does not consider fuzziness to deal with the aforementioned problems. The purpose of this study is to adopt the fuzzy decision theory and Bayes' rule as a base for measuring fuzziness in the practice of option analysis. This study also employs "Fuzzy Decision Space" consisting of four dimensions, i.e. fuzzy state, fuzzy sample information, fuzzy action, and evaluation function, to describe the decision of investors, which is used to derive a fuzzy B-S OPM and to determine an optimal pricing for option under fuzzy environment. Finally, this study finds that the over-estimation exists in the expected value of risk interest rate, the expected value of variation stock price, and the expected value of the call price of in the money and at the money, but under-estimation exists in the expected value of the call price of out of the money without a consideration of the fuzziness.

To prove above conclusions, we apply fuzzy set theory to the Cox, Ross and Rubinstein (CRR) model to set up the fuzzy binomial OPM. The model can provide reasonable ranges of option prices, which many investors can use it for arbitrage or hedge. Because of the CRR model can provide only theoretical reference values, it is expected that the fuzzy volatility and riskless interest rate replace the crisp values, which were used in generalized CRR model. In the fuzzy binomial OPM, investors can correct their portfolio strategy according to the right and left value of triangular fuzzy number and they can interpret the optimal difference, according to their individual risk preferences.

Finally, this study compares with B-S model, CRR model and fuzzy binomial OPM. We use an empirical analysis of S&P 500 index options to find that the call prices of three models are lower than the market price, the call price of B-S model is lower than that of CRR model and fuzzy binomial model, and that of the fuzzy binomial OPM is much closer to the reality and more convergent than that of the generalized CRR model when the sensitivity is large.



Keywords: fuzzy set theory, fuzzy decision space, Black–Scholes model, generalized CRR model, fuzzy binomial OPM, triangular fuzzy number.

誌 謝

畢業是要來感謝一些曾經幫你度過難關的人，比如是你的父母、老師、或是你的朋友們。而本論文得以完成，至為感謝指導教授李正福。為了能當他的學生，於是寫下：「為此我在佛前求了五百年，佛把我變成一棵樹種在他必經的道旁，陽光下灑滿了火紅的花朵，朵朵是我前世的期盼，當他無視地走過，那掉落一地的花瓣是我破碎的心...」。我想我是幸運的，因為他總是在最後的關頭拉我一把，猶如茫茫人海中的一顆浮木，讓我重獲生機...。恩師李正福教授，以淵博的學識與循循善誘的指導，總能拯救學生陷於紛亂的迷思中，省卻了為許多自以為是的謬思所付出的代價，面對他我既是感激又是敬畏。在博士班期間，泰半授課於另外一位指導教授曾國雄，曾教授治學嚴謹，學識紮實，授課認真，其滔滔不絕的口才，迷人的自信風采以及謙沖自牧的處事態度令每位學生印象深刻，從他身上我學到做學問的樂趣，這也是莘莘學子學習的典範。恩師們總是給予無限的耐心與寬容，舉凡題目之訂正，觀念之釐清，架構之建立，迄用字遣詞之潤飾及斧正，均親承恩師們不厭其煩的指正。擁有此兩位講座教授的指導，可謂前世修來的福，對於他們的細心教誨，我非常感激。

論文口試期間，承蒙游伯龍、楊千、許元春、王小璠、葉仕國、張焯然等幾位教授撥冗於繁忙的公務中，詳盡悉心地審閱拙作並給予建議，使得本論文更臻完善充實。尤其游伯龍教授在口試前給學生的鼓勵及信心，更是永銘肺腑。

沒有巨石的阻礙，水流就激不起燦爛的浪花;沒有歷經困阻磨練，生命也激發不出耀眼的光輝。感謝同窗在我人生旅途上扮演如此重要角色，使我體驗出生命的冷暖，更加激勵我發揮無限潛能的機會。

我更要感激我的好友們-岳牧、海晏、捷盛、郁婷、文婷-默默幫助，鼓勵和支持，因為有你們在我心中，陪我擋風遮雨，還來不及傷心，天已晴。

最後，我要感激我的父母這幾十年來愛我、照顧我、教育我。沒有您們的愛，我也不能有今天的成就!我的堅持是為完成您們對我的期望，我非常愛您們就如同您們對我的愛。

王詩韻 謹識於交大管科所

民國九十四年五月

目 錄

	頁次
中文提要.....	I
英文提要.....	III
誌 謝.....	V
目 錄.....	VI
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	IX
符號說明.....	X
第一章 緒論	1
1.1 選擇權評價模型.....	2
1.1.1 Black-Scholes 選擇權評價模式.....	2
1.1.2 Black-Scholes選擇權評價模式之基本假設.....	4
1.1.3 實務上運用B-S選擇權評價模式之限制.....	6
1.1.4 B-S選擇權評價模式變數所引起之誤差.....	6
1.2 二項式選擇權評價模型.....	8
1.3 實務上運用選擇權評價模式之限制.....	11
1.3.1 無風險利率假設之評論.....	11
1.3.2 股價報酬波動性之評論.....	13
1.4 研究動機及目的.....	16
1.5 文獻探討.....	17
1.5.1 文獻研究特色.....	17
1.5.2 過去文獻之評論.....	18
1.6 論文結構及研究流程.....	20
第二章 模糊環境下之Black-Scholes 選擇權評價模型	22
2.1 選擇權評價模式之模糊環境.....	22
2.1.1 模糊事件機率.....	23
2.1.2 模糊樣本訊息空間.....	24
2.1.3 模糊狀態空間.....	24
2.1.4 模糊行動.....	25
2.1.5 模糊決策空間.....	25
2.1.6 模糊行動之期望值.....	26
2.2 模糊Black-Scholes 選擇權評價模式之導出.....	27
2.2.1 變數之估計.....	27
2.2.2 模糊Black-Scholes 選擇權評價模式.....	29
2.3 模糊Black-Scholes 選擇權評價模式與傳統機率Black-Scholes 選擇權評價模式之比較.....	30
2.3.1 模糊選擇權評價模式與B-S選擇權評價模式所決定第 t 期風險利率期望值之比較.....	31
2.3.2 模糊選擇權評價模式與B-S選擇權評價模式所決定第 t 期股價報酬率波動度期望值之比較.....	31
2.3.3 模糊選擇權評價模式與B-S選擇權評價模式買權價格期望值之比較.....	31
2.4 釋例.....	32

2.4.1 模糊決策空間.....	32
2.4.2 模糊B-S選擇權評價模式健全性之分析與討論	36
2.5 結論.....	37
第三章 模糊二項式選擇權評價模型	39
3.1 背景與問題.....	39
3.2 模糊集合理論.....	39
3.2.1 模糊數.....	39
3.2.2 模糊數之運算.....	41
3.2.3 模糊關係.....	44
3.3 模糊二項式選擇權評價模型.....	44
3.3.1 $t=1$ 至 $t=2$ 期之模糊二項式選擇權評價模型	45
3.3.2 $t=2$ 至 $t=3$ 期之模糊二項式選擇權評價模型	47
3.3.3 多期模糊二項式選擇權評價模型.....	48
3.4 變數和資料描述.....	50
3.5 股票價格之模糊樹.....	50
3.6 買權價格之模糊樹.....	53
3.7 一般與模糊二項式選擇權評價模型之比較.....	55
3.8 討論.....	56
第四章 總結	58
4.1 結論.....	58
4.2 未來研究方向.....	59
參考文獻	60
附 錄 一.....	69
附 錄 二.....	70
附 錄 三.....	71
附 錄 四.....	73
附 錄 五.....	75
附 錄 六.....	77
附 錄 七.....	78
自 傳.....	83



表目錄

- 表 1-1 : 股價分配所引起之評價誤差
- 表 1-2 : Black-Scholes 評價模型之實證文獻彙整表
- 表 1-3 : 選擇權中風險利率之修正模型
- 表 1-4 : 計算報酬率(r_t)於連續和不連續情況下之二種作法
- 表 1-5 : 選擇權中股價報酬波動度之修正模型
- 表 1-6 : 模型驅動型選擇權評價理論之優缺點
- 表 1-7 : 資料驅動型選擇權評價理論之優缺點
- 表 1-8 : 模型驅動型選擇權評價理論之文獻回顧與評論
- 表 1-9 : 資料驅動型選擇權評價理論之文獻回顧與評論
- 表 2-1 : $\mu_{\tilde{F}_k(S_i)}$ 及 $P(S_i)$
- 表 2-2 : $P(x_r|S_i)$
- 表 2-3 : $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r)$ 及 $P(x_r)$
- 表 2-4 : $\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_t)$
- 表 2-5 : $R_t(\tilde{F}_k)$
- 表 3-1 : 模糊二項式模型之買權價格區間和敏感度分析
- 表 3-2 : CRR 模型之買權價格變化與敏感度分析
- 表 4-1 : B-S 模型、CRR 模型，及模糊二項式模型之買權價格分析

圖目錄

- 圖 1-1 : 三項式評價模型之圖解
- 圖 1-2 : 研究流程圖
- 圖 3-1 : 梯形模糊數 $\tilde{A} = (c, a, b, d)$ 之隸屬函數
- 圖 3-2 : 三角模糊數 $\tilde{A} = (c, a, d)$ 之隸屬函數
- 圖 3-3 : 三角模糊數之歸屬函數
- 圖 3-4 : 在 Δt 時間下股價波動之模糊二項式選擇權評價模型
- 圖 3-5 : 股票價格之模糊樹
- 圖 3-6 : 買權價格之模糊樹



符號說明

C	:	買權目前理論價值
S	:	目前股價
K	:	履約價格(exercise price)
R	:	無風險利率
T	:	到期日之長短 (expiration date)
σ	:	股價報酬波動度
ln	:	自然對數
$N(\cdot)$:	標準常態分配之累積機率密度函數
\wedge	:	取小運算
\vee	:	取大運算
min	:	取小運算
max	:	取大運算
V_H	:	資產組合
h	:	避險比率
μ	:	股票瞬間預期報酬率
dz	:	韋那過程
$\mu_{\tilde{A}}$:	模糊集合 \tilde{A} 之歸屬函數
C_A	:	明確集合 A 之特性函數
\tilde{B}	:	模糊決策空間
S	:	狀態集合
\tilde{F}	:	模糊狀態集合
\tilde{F}_k	:	模糊狀態
D	:	行動、方案集合
\tilde{A}	:	模糊行動集合
\tilde{A}_n	:	模糊行動
$C(\tilde{A}, \tilde{F})$:	評價函數
X	:	樣本訊息空間
\tilde{M}	:	模糊樣本訊息空間
\tilde{M}_j	:	模糊樣本訊息
τ	:	距到期日期間



u	: 1 加上股價上漲之百分比
d	: 1 加上股價下跌之百分比
n	: 二項式模型之到期期間
q	: 股利
r_t	: 第 t 期之股價報酬率
R_l	: 為無風險利率中三角模糊數之最小值
R_m	: 為無風險利率中三角模糊數之中間值
R_h	: 為無風險利率中三角模糊數之最大值
$P(\tilde{A})$: 模糊事件 \tilde{A} 之事前機率
Δ_u	: 股價最大波動下可購買之股票張數
B_u	: 在股價最大波動下，投資債券的數量
S_{ur}	: 股價向上波動之最大值
S_{um}	: 股價向上波動之平均值
S_{ul}	: 股價向上波動之最小值
S_{dr}	: 股價向下波動之最大值
S_{dm}	: 股價向下波動之平均值
S_{dl}	: 股價向下波動之最小值
$e^{R_h \Delta t}$: 無風險利率折現因子
$e^{R_h \Delta t} \cdot B_u$: 在股價最大波動下，債券折現值之和
ρ	: 敏感度分析

第一章 緒論

選擇權商品目前已普遍存在於國際及國內之金融市場，而當前國內選擇權市場也正蓄勢待發，我們實有必要把選擇權的基本內涵，尤其是其訂價方式儘可能從其在目前尚未完全理想的狀態提昇到一個足以標準化的階段，以便完全消除其內涵架構中可能的人為疏忽因素。以往，許多學者已在選擇權之評價方式上作了相當多的努力，也有豐碩之成果(Barone-Adesi & Whaley, 1987; Cox *et al.*, 1979; Hull, 1993; Rabinovitch, 1989; Kenneth & Kroner, 1996)。而過去處理選擇權之定價問題時都假設變數是明確的(crisp)，所以大多數之研究集中在如何改善 B-S 模型(Black-Scholes Model)和 CRR 模型之基本假設，因為無風險利率和股價報酬波動性被認為是隨機過程而非常數，在改良這些假設後，就能建立一個新模型。例如，Cox & Ross (1975)引進股價報酬波動度為固定彈性之觀念; Hull & White (1987)改善標的資產價格分佈和股價報酬波動度為常數之假設; 另外 Amin (1993) 與 Scott (1997) 則認為股價及其波動度符合跳躍性擴散之隨機過程。

在現實環境中，由於缺乏足夠之資訊，未來發生的情況亦不可知，故投資時常面臨不確定或不明確之狀況。當我們考慮投資環境為不確定性時，即不適用模型中無風險利率及股價報酬波動度為固定不變之假設，而模型之適用性也會受影響。本文即應用模糊理論於 B-S 模型和 CRR 模型，來處理選擇權架構中假設明確性之問題，俾便改善先前研究之複雜模型。針對 B-S 選擇權評價模式，採用模糊決策理論之主張，認為實際選擇權評價之分析須輔以模糊狀態、模糊樣本訊息、模糊行動及評價函數四項維度所構成之決策空間 (Watson, 1979)，方能充分描述投資者於模糊環境 (Bellman & Zadeh, 1970)下之決策，並期能建立一個更理想的選擇權評價模式。而於 CRR (Cox, Ross and Rubinstein, 1979) 選擇權模型中，擬分析實務上合理之選擇權價格區間，並建立模糊二項式選擇權評價模型，以消除投資者於選擇權評價模式中主觀判斷之模糊性，此模型同時也較 CRR 模型或 B-S 模型更符合選擇權定價之實際狀況，使不同風險偏好之投資者能從中套利和避險。

1.1 選擇權評價模型

截至目前為止，最著名之選擇權評價模型是由 Black-Scholes (1973) 和 Cox、Ross & Rubinstein (1979) 分別所提出之模型。B-S 模型推導出一個連續時間下封閉之數學式，而 CRR 模型則使用二項式模型來推導不連續時間下之選擇權評價問題。當時間被分割成無數段之小區間時，CRR 模型就很接近 B-S 模型。但此兩種模型有其實務應用上之限制，因為其模型必須對無風險利率及股價報酬之波動性 (R, σ) 作估計，故投資者在使用模型時即隱含不確定性。惟考量投資環境之不確定性，故本文擬應用模糊集合理論於 B-S 及 CRR 模型上，以推算合理之買權價格區間。

1.1.1 Black-Scholes 選擇權評價模式

選擇權(option)是一種契約，買方有權利在未來某一段期間內，以事先約定好的價格向賣方買入或賣出某一數量之標的資產。依買入或賣出之權利可分為買權(call option)及賣權(put option)兩種。買權賦予持有人買入某標的資產之權利，而賣權反之。另外選擇權又可依履約時間之不同，分為美式選擇權及歐式選擇權。美式選擇權(American option)可在到期日前(含)的任何一天履約，向賣方買入或賣出股票或約定的標的資產；而歐式選擇權(European option)僅能在到期日當天履約，以下為針對 Black-Scholes 歐式買權所推導之公式。

令 h 為股票購買的數量， S 為每股的價格， C 為買權價格。假設在第零期賣出一張買權並買進 h 股之股票，則可形成一個對沖的資產組合 V_H ，即

$$V_H = hS - C \quad (1.1)$$

而此對沖資產組合之變動可表示為下式，

$$dV_H = h dS - dC \quad (1.2)$$

(1.2)式也意謂，當股票價格變動 ΔS 時，將使買權價格 C 變動 $\frac{\partial C}{\partial S} \Delta S$ ，為使買與賣

之變動效果相互抵消，每買入一張股票就必須賣出 $\frac{-1}{\frac{\partial C}{\partial S}}$ 個選擇權合約，因為

$$\frac{\partial C}{\partial S} \Delta S \frac{-1}{\frac{\partial C}{\partial S}} = -\Delta S \quad (1.3)$$

將 h 定義為避險比例，則

$$h = \frac{\partial C}{\partial S} \quad (1.4)$$

同時，若股票之行為是服從幾何布朗運動(Geometric Brownian motion)，則股票報酬可表示為(1.5)式，

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1.5)$$

其中 μ 是股票瞬間預期報酬率， σ 為股票報酬瞬間標準差， dt 表極小的時間增量， dz 為韋納過程 (Wiener process)，又因選擇權之價格為股票價格的函數，其變化又與股票價格之變化量息息相關，所以可用 $C(S, \tau)$ 表示這層關係，即隱含買權 (C) 為股價 (S) 及距到期日 τ 的函數，又因股價行為是幾何布朗過程，便可運用伊藤引理(Ito's Lemma)，即利用泰勒展開式(Taylor Series Expansion)將其展開可得

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial t} \Delta S \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots \quad (1.6)$$

$$\text{因為 } \Delta S = \mu(S, t)S\Delta t + \sigma(S, t)S\Delta z$$

設 $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ ，且 $\varepsilon \sim N(0,1)$ ，則

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2 &= (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z)^2 \\ &= \mu^2 S^2 (\Delta t)^2 + 2\mu S^2 \sigma \Delta t \Delta z + \sigma^2 S^2 (\Delta z)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 \Delta t \end{aligned} \quad (1.7)$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時， $\varepsilon^2 \Delta t$ 變成非隨機項(nonstochastic)，其值等於其預期值 Δt 。

$$\text{又 } \Delta S \Delta t = (\mu(S, t)S\Delta t + \sigma(S, t)S\Delta z)\Delta t = 0$$

所以當 $\Delta S \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ 時，

可將 $C(S, \tau)$ 表示成以下之隨機微分方程，即

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2 \\ &= \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

將上述方程式代入(1.2)式，可得(1.9)式

$$dV_H = h dS - \left[\frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \right] \quad (1.9)$$

倘若資本市場是有效率的，即

$$\frac{dV_H}{V_H} = R_f dt \quad (1.10)$$

則此對沖之資產組合應可獲得無風險報酬率。

將(1.10)式代入可得

$$dV_H = R_f V_H dt = \frac{\partial C}{\partial S} dS - \left[\frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \right] \quad (1.11)$$

方程式可再整理成(1.12)式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -R_f V_H - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \quad (1.12)$$

將 $V_H = hS - C$ 代入(1.12)式，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= -R_f (hS - C) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \\ &= R_f C - R_f S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

此即著名的 Black-Scholes 偏微分方程式，此偏微分方程式配合以下之邊界條件，即可充分描述買權價格，此偏微分解即為 Black-Scholes 選擇權評價公式。

$$\begin{aligned} C(S, 0) &= \max(S - K, 0) \\ \text{和 } C(0, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

方程式意涵，在到期日時 ($t = T, \tau = 0$)，買權價格必等於零或是內涵價值的最大值，若非如此，則有套利現象產生，而(1.14)式表示當標的資產股價為零，即使距到期日很長，買權價格仍為零。而 Black-Scholes 則將此偏微分方程式轉換為物理學上的熱傳導方程式來解買權價格。

$$C = S \cdot N(d_1) - Ke^{-RT} N(d_2) \quad (1.15)$$

其中 $d_1 = \left[\ln(S/K) + (R + \sigma^2/2)T \right] / \sigma\sqrt{T}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

1.1.2 Black-Scholes 選擇權評價模式之基本假設

Black-Scholes 選擇權評價模式 (B-S OPM) 係由兩位美國財務經濟學家 Fischer Black 及 Myron Scholes 於 1973 年聯合提出。此一公式之推出，奠定了衍生性金融商品定價的理論基礎，亦影響後來財務工程的迅速發展，此理論並於 1997 年榮獲諾貝爾經濟學獎。他們指出，影響買權價格的主要因素有標的資產股票價

格、履約價格、到期期間、股票報酬之波動性以及無風險利率，而它們彼此間的關係可用下列方程式來表示：

$$C = S \cdot N(d_1) - Ke^{-RT} N(d_2)$$
$$d_1 = \left[\ln(S/K) + (R + \sigma^2/2)T \right] / \sigma\sqrt{T}; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

其中： C ：買權目前理論價值；

S ：目前股價；

K ：履約價格(exercise price)；

R ：無風險利率；

T ：到期日之長短 (expiration date)；

σ ：股價報酬波動度；

\ln ：自然對數；

$N(\cdot)$ ：標準常態分配之累積機率密度函數。

此模式雖廣泛地用來評價買權之合理價格，協助投資人決定選擇權或其他衍生性金融商品的價值，惟此分析模式之正確性及可靠性係建立於以下基本假設 (Black & Scholes, 1973) 之上：

- (1) 無風險利率存在，且在存續期間固定不變；
- (2) 無現金股利；
- (3) 對賣空不限制；
- (4) 股票報酬率標準差為固定值；
- (5) 無風險套利機會不存在；
- (6) 股價是連續的，且為隨機漫步 (random walk)，股價為對數常態分配；
- (7) 無交易成本，亦無稅；
- (8) 證券可無限制分割。

依 B-S 選擇權評價模式之基本假設而言，此模式對無風險利率、股票報酬率標準差等要素均作了強而有力之假設，若有違反該等假設，則 B-S 選擇權評價模式之正確性及可靠性，將受重大影響。惟選擇權之價格在不確定情況下為一區間，若欲以此確定模式描述選擇權價格時，將無法精確算出選擇權價格，因此使用 B-S 選擇權評價模式之投資者，必須經常對無風險利率、股價報酬之波動性等因素予以估計與預測以為分析之依據。惟投資者之估計與預測，不可避免地將受

制於不同程度之不確定性所影響，因此本文試圖建立不確定環境下之選擇權評價模型，期能解決投資決策中不確定性因素之問題，提升選擇權評價模式於實務運用之可行性。

1.1.3 實務上運用 B-S 選擇權評價模式之限制

Black-Scholes 運用物理學上的熱傳導原理推導出選擇權評價模型，其方法為同時買入選擇權及放空股票，在無套利機會下，創造出一個無風險之股資組合，而此即隱含著無風險投資組合應與無風險資產具有相同的報酬，利用此種無套利觀念，再加一些假設條件，於是推導出 B-S 模型，但此模型受限因素包括：(1)對數常態分配之合理性，(2)借貸與避險活動，(3)流動性之影響，(4)初級市場之限制，(5)利率變動，(6)交易成本，(7)融資成本，(8)漲跌幅限制，(9)股利的存在等，因此在證券市場環境下，B-S 模型所計算出之買權價格只是參考價格，應針對以上諸多因素進行調整。

雖然 B-S 選擇權評價模式，無論在學理或實務上均獲致許多便利及好評，可惜的是，該模型在實證資料的佐證卻面臨價格偏誤的窘境。因為 B-S 選擇權評價模式係屬確定性評價模型，此定價模型係建立於二個基本假設已知：(1)無風險利率，(2)股價報酬波動性在選擇權存續期間為常數計算出來。投資者實際運用時須確保模式中之參數即 R 、 σ 之屬性均符該模式之假設，否則評價之正確性令人置疑。惟考量投資環境之不確定性，投資者所面臨之 R 、 σ 屬性，不但與 B-S 選擇權評價模式之基本假設不符，甚至存在違反其適用範圍者，本文擬自投資實務面分析，以檢驗實務上使用 B-S 選擇權評價模式之可行性。

1.1.4 B-S 選擇權評價模式變數所引起之誤差

選擇權之買權(call option)為買方有權利在未來某一段期間內，以事先約定好的價格向賣方買入某一數量之標的資產。故由以上陳述可知：履約價格與到期日在訂契約時就已經決定，股價則反映在每個時點，但風險利率則決定於貨幣市場的利率，而股票報酬之波動度非直接觀察所得，而是來自歷史資料和情境分析的估計得來，所以 R 、 σ 的估計隱含著不確定性，故在使用 B-S 選擇權評價模式計算選擇權價格時可能會產生誤差。大部分的文獻在討論選擇權價格時，不論是對數常態分配的假設或是 Poisson 分配，都已經事先對股價分配做了有母數分配的

假設，但事實上股價變動是不是屬於一個已知的分配模式，或者縱使它屬於某一種分配，可是穩定與否亦未可知，而股價分配所引起之評價誤差如表 1-1 所示。

表 1-1 股價分配所引起之評價誤差

股價分配特徵	評價誤差			
	價內買權	價外買權	價內賣權	價外賣權
兩尾端較對數常態瘦	Δ	Δ	Δ	Δ
左端較對數常態胖	∇	Δ	Δ	∇
右端較對數常態瘦				
右端較對數常態胖	Δ	∇	∇	Δ
左端較對數常態瘦				
兩尾端較對數常態胖	∇	∇	∇	∇

註: Δ 代表高估, ∇ 代表低估, 資料來源:Hull (1993), p.438

因為股價報酬的分配型態尚未有定論，若可以證實股價報酬波動度服從某一種分配，則可利用統計學和一些數學上的技巧，求出精確之選擇權價格。但以 B-S 模型而言，對於其中的二階偏微分方程求解，是在其股價報酬服從對數常態分配之假設下，才能求得一封閉解，如果股價分配違反對數常態分配，就無法求得封閉解。但是，股價分配究竟為何，並不易求出，甚至可能不是已知的某一種統計分配。

另外，對於居於價內與價外之選擇權而言，其理論價與市價之差異並不因時間之經過而減少，同時也不因標的股票報酬波動之大小而有所不同，其模式與實際價格之差異如表 1-2 所示。

表 1-2 Black-Scholes 評價模型之實證文獻彙整表

發表年度	作者	選擇權狀態				
		波動性低	波動性高	價內	價平	價外
1972	Black-Scholes	∇	Δ			
1975	Black			Δ	-	∇
1976	Merton			∇	Δ	∇
1978	Finnerty	∇	Δ			
1979	MacBeth and Merville			∇	-	Δ
1982	Gultekin, et al.	∇	Δ	Δ	-	∇

1982	Whaley	▽	△		
1985	Rubinstein			▽	-
1985	Ball and Torous			▽	△
1987	Jordan et al.	▽	-		
1988	Jorion			△	△
1990	Lauterbach and Schultz	-	△		
1992	Kremer and Roenfeldt			▽	▽
1994	Choi and Wohar	▽	△		
1996	Bates			-	-
1996	Corrado and Su			▽	▽
1997	Bakshi, Cao, and Chen			▽	▽
1998	Sabbatini and Linton			▽	-

註: △代表高估, ▽代表低估, -代表無一致結論。

1.2 二項式選擇權評價模式

本節將簡短地介紹如何應用二項式評價法來求解選擇權價格。以考慮一個不支付股利之歐式買權為例。

1. 單期模型

假設在第零期時股票價格為 S ，則在第一期時，股價不是上漲至 S_u ，就是下跌至 S_d ；同理，在第零期時，若該歐式買權之價格為 C ，則在第一期結束時，買權價格不是上漲至 C_u 就是下跌至 C_d ，一個理性之履約政策應使買權成為 $C_u = \max(0, S_u - K)$ 或 $C_d = \max(0, S_d - K)$ 。另一方面，投資者之避險策略是相當重要的，例如，一個理性的投資者在第一期應如何避險呢？假設投資者在第零期之對沖資產組合為 $hS - C$ ，即賣一張買權及買進 h 股之股票，就可形成一個對沖的資產組合，在風險中立的原則下，第一期之對沖資產組合應滿足 $hS_u - C_u = hS_d - C_d$ ，也就是避險比例 $h = (C_u - C_d) / (S_u - S_d)$ 。在無風險條件下投資報酬率應等於無風險報酬率，即

$$\frac{\text{Gross payoff}}{\text{investment}} = 1 + R_f = \frac{hS_u - C_u}{hS - C} \quad (1.16)$$

故買權價值為

$$C = \frac{mC_u + (1-m)C_d}{1+R_f} \quad (1.17)$$

其中 $m = \frac{1+R_f-d}{u-d}$; d 為 1 加上股價下跌之百分比; u 為 1 加上股價上漲之百分比。此式亦隱含在一個風險中立的世界中，買權價值對未來預期值之折現。

2. 二期模型

二期模型之解法如同單期一般，所以我們可沿用單期模型之公式，因為在第一期結束時，買權之存續期間只剩一期，所以

$$C_u = \frac{mC_{uu} + (1-m)C_{ud}}{1+R_f}, C_d = \frac{mC_{ud} + (1-m)C_{dd}}{1+R_f} \quad (1.18)$$

故二期歐式買權價格為， $C = \frac{mC_u + (1-m)C_d}{1+R_f}$ ，同理，面對一期歐式買權，我們

亦可得到單期模型解為 $h = \frac{P_u - P_d}{S_u - S_d}$ ，及二期模型解為 $P = \frac{mP_u + (1-m)P_d}{1+R_f}$ 。

其中， $P_u; P_d$ ，分別代表資產價格在每一時點可能上升或下跌之機率。

$C_{uu}; C_{ud}; C_{dd}$ ，分別代表買權價格連續上漲二次;上漲及下跌各一次;下跌二次。

3. 多期模型

考慮一個距到期日(τ)有 n 期之二項式選擇權評價模型，而 u 及 d 分別為， $u = e^{\sigma\sqrt{\tau/n}}$ ， $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}}$ ，應用回溯法，由到期日向前推，可得 Cox, Ross and Rubinstein (CRR)模型(1979)在固定變數下之二項式選擇權評價模型，其 n 期之二項式選擇權評價模型解為

$$C = \frac{1}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \text{Max}[0, u^k d^{n-k} S - K] \quad (1.19)$$

其中

C ：第 n 期之買權價格;

K ：選擇權之履約價格;

S ：目前股價;

n ：期數;

d ：下跌幅度;

u ：上漲幅度;

R ：無風險利率;

p ：上漲機率。

考慮 $u > r > d$ ，因此， $0 < p < 1$ 。令 m 為期間 則 $u^{m-1}d^{n-(m-1)}S \leq K < u^m d^{n-m}S$ 。

當時間增量很小時，即 $\Delta t \rightarrow 0$ ，Cox, Ross and Rubinstein (CRR) 多期之二項式選擇權評價模型會收斂至 B-S 之選擇權評價模型。

故由以上可知，二項式評價模型因其概念簡明易懂，容易為實務界人士所接受。不管何時履約，應用二項式選擇權評價模型，仍能輕易地解出選擇權價值。可惜的是，其模型面臨計算上複雜性之難題。

3. 三項式評價模型

三項式評價模型可視為二項式模型之延伸，其一般型式如圖 1-1 所示，若 p_u, p_m, p_d ，分別代表資產價格在每一點可能上升、持平、或下跌之機率， Δt 代表每一期間長短，則對一個未支付股利之股票而言， $u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$ ，而機率值為：

$$\begin{cases} p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}(R - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{1}{6} \\ p_m = \frac{2}{3} \\ p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}(R - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{1}{6} \end{cases} \quad (1.20)$$

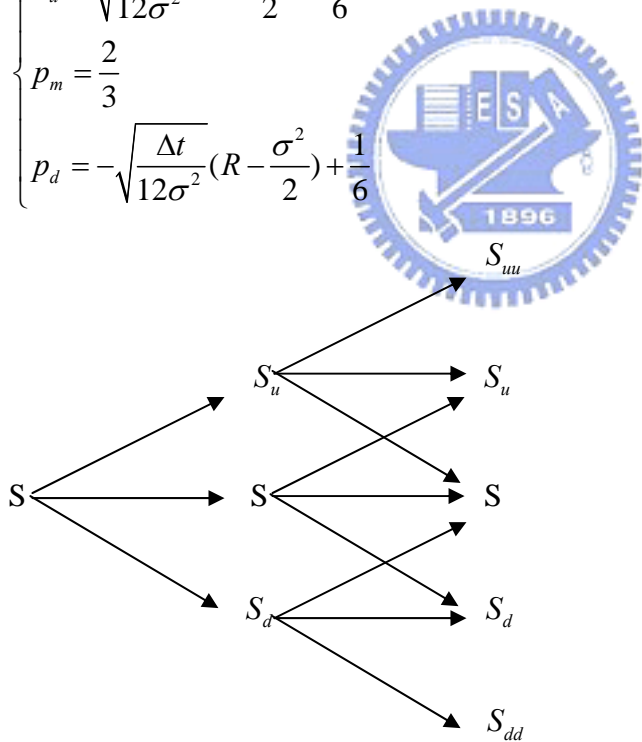


圖 1-1 三項式評價模型之圖解

對於連續支付股利(q)的股票而言，上述方程式中 R 用 $R-q$ 代替。三項式評價模型已被證明和顯示差分法是相同的，但三項式評價模型比二項式模型更符合實際價格變動情況 (Hull,1993)。

1.3 實務上運用選擇權評價模式之限制

選擇權評價模型之修正，原則上均架構在 B-S 模型理論基礎下。整體而言，以無套利為主軸之選擇權評價理論，即是透過無風險避險投資組合之創造，據以決定選擇權之均衡價格。但由於 Black and Scholes (1973) 定義之完美市場假設過於嚴格，因此，此後學者修正之方向大致可歸納為：(1) 修正資產報酬變異數固定之假設，同時探討波動性有效估計方法，(2) 修正利率常數項，水平期間結構之假設，以下即展開對於無風險利率及股價報酬波動性之評論。

1.3.1 無風險利率假設之評論

風險中立性假設為架構 B-S 選擇權評價模式之基礎，但是這個假設只具有一個「瞬間有效性」之效力而已。在超過一個「瞬間」的時間長度時，則此假設不存在，或者延續此假設有效性之做法根本不合實際。更重要的是，在財務經濟領域中，「風險中立性」之觀點應只針對股市的「需求面」來談而已，並非一如 B-S 模式中把它和股市的「均衡股價」結果聯結在一起。

B-S 模型在推導初始是將股票和其相對應的選擇權，依適當比例在目前組成一個無風險之投資組合。問題是這個投資組合的無風險狀態只存在於一瞬間而已。Hull (1993) 認為對於一個具有相當時間長度之選擇權而言，先驗式之說法並不能拿來推論整個選擇權之實質內涵。當我們把選擇權期滿時股價依無風險利率折現時，就無異於明白宣示所有不同種類的股票都將會以一個無風險利率之速度成長，而這必然是個有偏差的觀點。

當然，在 B-S 模式中其可宣告以「風險中立性」觀點作為分析之最主要架構基礎，便是在於能夠把和「風險偏好」有關的因素，也就是股票的預期回收率完全排除於其整個推導過程之外；誠然，我們在一般「風險偏好」理論上的主要認知為股票之預期回收水平和風險偏好程度呈負相關。問題是，可以把股票預期回收率從 B-S 模式推導過程中完全排除，並不表示我們便可把整個訂價模式所屬的研究分析環境當成是一個「風險中立」的世界，表 1-3 為學者針對風險利率所做之修正模型。

表 1-3 選擇權中風險利率之修正模型

修正模型	發表年度	作者	主要內容
隨機利率模型 (Stochastic-interest-rate model)	1973	Merton	以債券報酬率隨機過程結合 B-S 標的資產理論模式，進而提出隨機利率模型。然而多數實證結果顯示，利率隨機性僅對存續期間較長之選擇權有解釋力，對於一年到期之選擇權則無顯著影響。
	1992	Amin and Jarrow	
單因子平衡模型(One-factor equilibrium model)	1997	Gifford and Vasicek	假設股價服從幾何布朗運動，運用伊藤引理，我們可藉由利率模型導出債券價格之隨機模型。
	1978	Dothan	
	1980	Rendleman and Bartter	
	1982	Courtadon	
多因子平衡模型(Mutli-factor equilibrium model)	1978	Richard and Robert	模型包括短期利率因子及短期波動度因子，債券折現公式隱含波動度與期間結構性質有關。
	1979	Brennan <i>et al.</i>	
	1980	Langtieg	
	1984	Schaefer <i>et al.</i>	
單因子非套利模型 (One-factor no-arbitrage model)	1986	Ho and Lee	探討離散型態之選擇權定價模型，表示數值解法被用來架構馬可夫與最初利率期間結構一致之短期單因子利率模型。
	1990	Black <i>et al.</i>	
	1993	Hull and White	
多因子非套利模型 (Mutli-factor no-arbitrage model)	1992	Heath, Jarrow and Morton	債券價格隨機利率評價過程，可藉由平衡型蒙地卡羅技巧，使用最初利率和潛在隨機過程為後續動差。在無套利條件下，限制利率敏感性債券定價過程，並無明確依賴市場風險價格。
GARCH 模型(Discrete time model)/GARCH model)	1979	Brennan	離散隨機波動修正之基礎，於無套利定價之探討，提出結構較完整之 GARCH 選擇權評價模型。
	1992	Engle and Mastafa	
	1993	Amin and Ng	
	1995	Duan	
	1999	Ritchken and Trevor	

如要修正 B-S (1973) 模式中把所有投資者都當成「風險中立性」的人假設——亦即把所屬之研究環境當作係一「風險中立性」之世界，而在進行選擇權訂價時，最佳方式便是把此假設直接定義成一種「客觀性」之觀點，如此便可以爰用到每一位投資者，然每位投資者在作決策時，都具有主觀性，並以主觀解讀後之行為來描述客觀性之問題，簡而言之，「風險偏好」觀點為一因人而異的內涵，它不具備一種完全的「客觀性」或「標準性」特質。故無法衡量個別投資者對個股在任一方面之偏好行為^{註1}。所以以往討論「風險偏好」的理論，依據於某種完全「客觀性」的觀點下應該不能成立，而「風險中立性」解釋並不等於客觀上之「無風險」。基於投資環境中經濟景氣、經濟持平與經濟不景氣下之風險利率，因此本文引進三角模糊數來描述無風險利率，並以其最小，平均及最大值為三角模糊數 (R_l, R_m, R_h) 之區間。

1.3.2 股價報酬波動性之評論

股價波動性基本上表示股價之「短期浮動」情形，甚至被用來當作「風險」之直接解釋。事實上，對於選擇權評價之方式有許多看法，有人認為在 B-S 選擇權評價模式中，假設其為外生變數是不合理的。另有些學者認為此標準差是隨著選擇權的價值不同而成動態性之變動，稱為「隱含波動(implied volatility)」，而國外學者也發現同樣的股票，由價內及價外選擇權所求算出來之隱含波動度(implied standard deviation, ISD)常常不一樣，通常價內的 ISD 會高於價外的 ISD，一般稱為微笑波幅(volatility smile)，然股票選擇權之訂價根本依據之一為其標的股(underlying stock)於選擇權未來之股價變動結果，而股價波動性在任何選擇權評價中，理論上應該是未來之波動性。假如未來之波動性已知，我們就能知道選擇權價格分配和其真實價格。因此，不少學者使用許多方法來估計股價未來之波動性，一些常用的方法描述於下。

(1) 歷史波動性

假設過去股價波動性等同未來股價之波動性，我們就能使用過去股價報酬之波動性去估計未來股價報酬之波動性，一般作法為加權移動平均法。

註¹如前所言，除非這種需求影響因素為全面存在的可適用在每一位投資者身上，我們便須將之作股票訂價的標準化處理。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2} \quad (1.21)$$

r_t : 第 t 期之股價報酬率

\bar{r} : 1 至 t 期之平均股價報酬率

表 1-4 計算報酬率(r_t)於連續和不連續情況下之二種作法

連續情況	不連續情況
$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$	$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$
考慮股利發放	不考慮股利發放
因為報酬率是靜態所以 σ 比較小	因為報酬率不是靜態所以 σ 比較大

S_t : 第 t 期之收盤價; S_{t-1} : 第 $t-1$ 期之收盤價。

(2) 隱含波動性(Implied Standard Deviation)

在 B-S 選擇權評價模型是正確的情況下，我們就能藉此反推隱含之波動性，但價外和價內之波動性皆比價平時之波動性還大，這稱作微笑波幅。

(3) 帕金森方法(Parkinson method)

Parkinson (1980) 認為只使用收盤價無法反映目前實際情況，所以使用最高和最低價來代替收盤價。

(4) Garman 和 Klass 方法

Garman 和 Klass (1980) 修飾 Parkinson 之方法，增加開盤價及收盤價於其中，並同時使用四個變數來估計股價報酬率之波動性。

(5) 時間序列分析法(GARCH method)

Bloorslev (1986) 提出時間序列分析來處理股價之波動性。其認為股價波動性會隨著時間之變動而改變，所以並不是常數。且股價具有聚集之特性，在選擇權評價模型中，目前股價報酬之波動性(σ_t^2)反映過去之股價報酬(r_{t-1}^2)之波動性。

所以估計股價未來之波動性有許多方法，而表 1-5 將介紹學者針對股價報酬波動性所做之修正模型。

表 1-5 選擇權中股價報酬波動度之修正模型

修正模型	發表年度	作者	主要內容
固定彈性變異模型 (Constant-Elasticity-of-Variance model)	1975	Cox and Ross	認為股價之波動性與股價變動呈反向關係，說明市場中普遍存在低價位的股價有較大波動、而高價位的股價有波動僵固現象。
純粹跳躍/跳躍擴散模型(Pure-Jump/Jump-diffusion model)	1976 1976	Cox and Ross Merton	假設股價服從連續純粹跳躍之隨機過程，離散時點資產價格異常之變動與風險，提出其具有 Poisson 跳動混合之跳躍擴散過程。
複合選擇權 (Compound-option model)	1979 1979	Geske Breedon	假設股價為企業資產價值之特定函數，歐式買權價格則為標的股價之特定函數。由於股價之變動取決於企業資產市值代表資產價值之瞬間波動，相對上標的股價之波動性並非常數。
Displaced 擴散模型(Displaced-diffusion model)	1983	Rubinstein	假設企業僅持有 w 單位風險性與 $(1-w)$ 單位非風險性兩種資產，其非風險性資產每年間斷報酬率為 r ，且服從瞬間波動性之對數常態擴散過程。
隨機波動模型 (Stochastic-Volatility model)	1987 1987 1987 1991 1993 1997	Johnson <i>at al.</i> Wiggins Hull and White Scott Stein Heston Romano and Touzi	透過標的資產波動過程之假設，結合並修正 B-S 理論隨機過程。
連續隨機波動模型 (Stochastic-Volatility jump-diffusion model)	1996 1997	Bates Scott	連續時點隨機波動之定價模型歷經多位學者修正。除維持股價隨機過程服從幾何布朗運動假設外，另定義股價變異數具有平均數復歸平方根過程。
隨機波動和利率模型(Stochastic-Volatility and Stochastic-interest-rate model)	1993 1997 1997	Amin and Ng Bakshi and Chen Scott	結合跳躍擴散與隨機波動之選擇權模型，亦將相同觀念應用於隨機利率之探討，進而求得包含隨機波動、隨機利率與跳躍擴散之選擇權一般化封閉解。
隨機波動和利率跳躍擴散模型 (Stochastic-Volatility and Stochastic-interest-rate jump-diffusion model)	1997	Bakshi, Cao, and Chen	假設即期利率服從獨立於股價與股價波動性之平均數復歸平方根過程，且利率變動之風險貼水與即期利率呈固定比率。模型中所有參數均建立於風險中立而非實際機率測度之下。

既然各股票的變動情形鮮少會呈現完全相同的型態，我們也就不可能採用劃一的想法將所有不同股價變動情形在某種回收觀點上一視同仁。且由於股價波動性係受許多因素所影響，雖然也有不少研究在探討股價之影響因素及其變動趨勢，然而在目前而言仍屬不確定的，所以它的評價因素也應該是個不確定值，而非一如在 B-S 選擇權評價模式中股價報酬率標準差為固定值，然此動態性波動，難以長期大數法則之機率統計來估算標準差，似乎可視為在模糊環境下之問題，而本文主要利用歷史波動度再加上模糊集合理論之方法來衡量股價報酬率之波動性，並以此來設定模糊區間。

1.4 研究動機及目的

在財務研究上目前一個極困難之問題，即是如何評價複雜之金融商品，如衍生性金融商品，其因在於我們必須先知道標的物資產行為的一些統計量，在這些參數已知，如無風險利率及股價報酬波動性固定之情況下，才能評價衍生性金融商品的價格。當這些參數非固定常數且選擇權非歐式時，則 B-S 評價公式便立於無用之地。也因此後續之相關研究，提出許多數值分析法來解決。過去以 B-S 選擇權評價模型為主的演算法，不論是其修正模型或近似模型，雖然都有其適用性及不錯之評價績效，但泰半的模型均是假設在模式之結構訊息已知下求解，也就是說，這些模式的建構，使得問題成為在一種既定模型下結構化參數之估計問題。在這樣的前提下，許多困難於焉產生，如當真實體系之結構訊息未知、不明確、或是模式錯誤，亦或政治結構與金融環境變得複雜時，甚至出現有所謂之結構改變時，而貿然地以某特定模式來對事實描述，不論其模式結構有多完美，均難以表徵真實體系之行為。因此，考慮應用某一些無特定結構訊息之假設而以資料驅動型之無母數方法來描述非線性之選擇權價格實有絕對之必要，這即是本文研究的主要動機。而本研究主要目的在於修正股價報酬波動性及無風險利率固定之假設，同時利用模糊集合理論於選擇權評價模型中，以建立模糊選擇權評價模型，希冀此模型所求算之買權價格區間更接近實際值。

國外實務界對於選擇權之評價，依其性質可分成二類(Freedman and Giorgio, 1996)，一類是傾向於模型驅動型理論，另一類為傾向於資料驅動型理論，當然模型中有資料運算，而資料中有模型推導，本文僅就其牽涉部分之多寡，將其區分為以上二類。其中最常用之評價模型為模型驅動型理論中之 B-S 選擇權評價模

型。此類模型主要建構在許多重要假設之下，當這些假設成立時，則選擇權的價格可用如 Black-Scholes 偏微分方程來表示，而後再利用數值解法求算出。另一方面，資料驅動型理論也已在財務工程領域上萌芽，並有日趨蓬勃的態勢。近年來國外學者逐漸將資料驅動理論中之類神經網路應用在選擇權評價問題上，且研究結果顯示，資料驅動型顯著優於模型驅動型選擇權評價理論之績效。又因模糊二項式選擇權評價模型為結合模糊集合理論與二項式模型，應用簡單直覺式數學來求解選擇權之價格，亦算是一種以資料驅動型之選擇權評價模型，故本研究不僅比較一般 CRR 模型與模糊二項式選擇權評價模型之差異，同時也利用此模型求算選擇權價格區間，以符合實務所需。

1.5 文獻探討

模型驅動型理論早於資料驅動型理論在財務工程領域上萌芽，而近年來資料驅動型理論並有日趨蓬勃的態勢，將機器學習技術應用在衍生性金融商品之訂價，應是目前財務應用上最困難及複雜，亦是最富挑戰性之問題。茲將模型驅動型理論與資料驅動型理論介紹與說明於下。



1.5.1 文獻研究特色

選擇權評價之方法大致可分為模型驅動型理論及資料驅動型理論二大類，以下即針對此二大類模型之優缺點做比較。

1. 模型驅動型選擇權評價理論

表 1-6 模型驅動型選擇權評價理論之優缺點

種類	B-S 選擇權評價模型; 蒙地卡羅模擬法; 有限差分法; 二項式評價模型; 擴散模型; 隨機利率模型; GARCH 模型; 蓋拉金法; 偏態及峰態法; 分析趨近法。
主要性質	有明確標的物資產模型結構可供估計，其模型建構在許多重要假設下，大部分模型視市場價格為真實價格。
優點	具有適用性及不錯的評價績效，計算上較不複雜。
缺點	當假設發生錯誤，財務資料集擴大或結構改變時，其估計必然產生偏誤及困難; 當金融環境變為複雜時，其模型便無法使用。

2. 資料驅動型選擇權評價理論

因為模型驅動型選擇權在評價上面臨價格偏誤之窘境，故許多數值演算法 (numerical algorithms) 便因應而生，這些方法一則源自對其基本模型之修正，一則是屬於逼近之數值解，其主要性質及優缺點如表 1-7 所示。

表 1-7 資料驅動型選擇權評價理論之優缺點

種類	人工神經網路; 遺傳規畫法; 遺傳演算法。
主要性質	藉由機器學習，不需要依賴任何嚴格的假設，建構在天擇及進化的原則下，由極大的搜尋空間找出最適解。
優點	無需依賴任何假設，適用於各式資料的處理，使用上相當具有彈性，且績效良好，能反應政治結構或資料結構的改變，具有適應性學習能力。
缺點	績效依賴於大樣本的資料，執行上較耗費時間，參數設定涵義不明，模型也不穩定。

1.5.2 過去文獻之評論

關於選擇權評價理論，許多學者著墨甚多，以下僅將選擇權評價理論依模型驅動型理論及資料驅動型理論分成二部分，並將其文獻內容及評論整理成下表。

1. 模型驅動型選擇權評價理論

表 1-8 模型驅動型選擇權評價理論之文獻回顧與評論

模型名稱	提出年度	作者	文獻內容摘要與評論
Black-Scholes 選擇權評價模型(B-S OPM)	1973	Black-Scholes	假設股票價格呈對數常態分配，運用物理學上的熱傳導方程式，在非套利之條件下導出歐式買權封閉解，提供了標的資產之訂價基礎。但許多假設與現實世界不合，如無風險利率及股價報酬波動性為固定，以致在實證研究上會出現價格偏誤等現象。
蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo Simulation Method)	1996	Molle and Fernando	藉由模擬標的物資產行為之過程，並在風險中立性假設下求算選擇權價格。當風險利率與股價報酬波動性隨機變動時，可用此法求算選擇權價格，亦提供另一種數值解，但在計算上，卻是相當耗時。
有限差分法(Finite Difference)	1977	Schwartz	將 B-S 偏微分方程轉換為一組差分方程式，並重複求解差分方程，進而求出選擇權之價格。但當 B-S 模型無法適用時，便可用有限
	1978	Brennan and Schwartz	

Method)	1982	Curtadon	差分做近似解，同樣在計算上非常耗時。
	1984	Geske	
CEV 模型 (Constant Elasticity Variance Model)	1976	Cox and Ross	放寬 B-S 模型中股價報酬變異數為固定之假設。
二項式評價 模型 (Binomial Method)	1979	Cox, Ross and Rubinstein	此模型假設時間是不連續的，且在無套利機會，以合成選擇權法得證，當期數趨近無窮大時，多期之二項式模型與 B-S 模型是相通的，且適用於歐式及美式選擇權之評價。當變數增加時，此法是相當耗時的。
	1996	Hilliard <i>et al.</i>	
	1998	Hull	
擴散模型 (Diffusion Model)	1975	Cox	將波動性設定為隨機過程，修正 B-S 模型之定價，雖然能解釋波動性的效果，但卻面臨波動性難以估計的窘境。
	1976	Merton	
	1987	Hull and White	
	1997	Lagnado	
隨機利率模 型(Interest Rate Dyn- amic Model)	1990	Hull and White	假設利率為隨機過程，雖可充分解釋市場利率，但卻面臨利率模型參數難以估計之情況。
	1997	Chen, L.	
	1999	Bjork and Christensen	
GARCH 模型	1997	Duan	設定標的資產報酬服從 GARCH(1,1) 模式，且 B-S 選擇權評價模型及二項式評價模型皆為其特例。可解釋 B-S 模型為何釀成系統上偏誤的原因，稱得上是風險中立性之一般評價模型，但無避險參數之估計。
	1999	Ritchken and Trevor	
	2002	Bauwens and Lubrano	
	2003	Yung and Zhang	
蓋拉金法 (Galerkin Method)	1996	Barucci, Cherubini and Landi	以 B-S 偏微分方程為基礎，令近似解之殘差與加權值積分為零，求算出選擇權之價格。提供一個數值分析法，但在函數上並無嚴謹理論可供參考。
	1997	Lee	
偏態及峰態 法(Skewness and Kurtosis)	1997	Charles and Su	加入偏態及峰態之調整項於 B-S 模型中，並導出修正之模型。其能解釋波動性微笑效果及非常態機率結構之現象。
	1997	Paulson <i>et al.</i>	
	2002	Brown and Robinson	
分析趨近法 (Analytic Approxim- ation)	1984	Geske and Johnson	提供另一種數值分析法，可估計出避險參數，然而這些避險參數之估計卻是相當粗糙的。
	1986	Barone-Adesi, Whaley	
	1986	Macmillan	
	1997	Zhang	

2. 資料驅動型選擇權評價理論

表 1-9 資料驅動型選擇權評價理論之文獻回顧與評論

模型名稱	提出年度	作者	文獻內容摘要及評論
人工神經網路(Neural Network)	1994	Hutchinson,	不須依賴任何嚴格之參數假設，可適應任何資料結構改變之問題，相當有彈性，且具有大量平行運算，亦是一種全域之近似方法，唯黑箱作業，參數設定涵義不明且不具穩定性。
	1996	Lo, and	
	1997	Poggio	
	2002	White	
	2003	Lajbeygier and Connor	
	2003	Zapart and Christopher	
	2003	Amilon and Henrik	
遺傳規畫(Genetic Programmin g)	1997	Noe and Wang	用樹狀程式表示，在定價上提供一個極大的空間，可搜尋真正的市場定價模式，亦不須依賴任何假設。但函數型式可能過於複雜，參數設定涵義不明，執行較耗時，模型也不穩定。
	1997	Trigueros	
	1998	Chen, Lee and Yeh	
遺傳演算法(Genetic Algorithm)	1997	Chen and Lee	在物競天擇，適者生存之原則下，選擇特性較好之母代，並隨機性的相互交換彼此的位元資訊，以產生更優秀之子代。其主要運算子為複製、交配與突變。搜尋出最佳之定價模型，亦不須任何嚴格假設，但參數設定涵義不明，執行上也較耗時。

1.6 論文結構及研究流程

本文章結構如下：第一章為緒論，簡要地介紹選擇權評價模型，包括 B-S 模型與 CRR 模型，及其對假設修正的一些文獻回顧與評論，並將選擇權評價理論分成模型驅動型及資料驅動型二種理論。第二章將探討模糊環境下之模型驅動型 B-S 選擇權評價理論，針對 B-S 模型，採用模糊決策理論主張，在實際選擇權評價分析中輔以模糊狀態、模糊樣本訊息、模糊行動及評價函數四項維度所構成之決策空間，來描述投資者於模糊環境下的投資決策，並建立一個在模糊環境下之選擇權評價模式，據以比較兩種選擇權評價模式及推導。接下來第三章將建立資料驅動型模糊二項式選擇權評價模型，應用模糊集合理論於 CRR 模型中，來推論及建立模糊二項式選擇權評價模型，再舉例予以驗證並比較一般 CRR 與模糊二項式模型之差異。最後，第四章為結論部分。

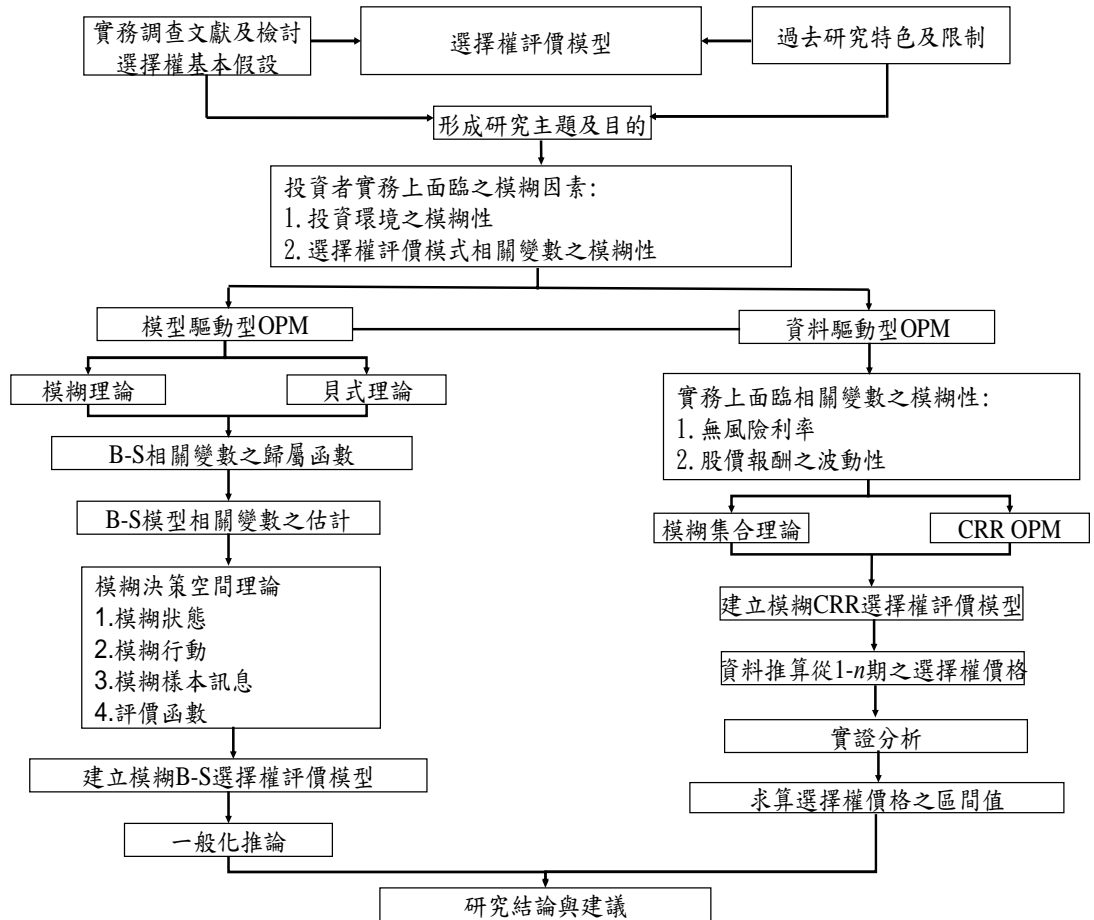


圖 1-2 研究流程圖

第二章 模糊環境下之 Black-Scholes 選擇權評價模型

Black-Scholes 選擇權評價模型雖然具有適用上不錯之績效，然而在實務應用上卻面臨價格偏誤的窘境，本章以模糊數學證明的方式，來推論 Black-Scholes 選擇權評價模型於價內 ($S > K$)、價平 ($S = K$) 及價外 ($S < K$) 時變數及買權價格所產生之偏誤。

2.1 選擇權評價模式之模糊環境

早在 1972 年以前，股票選擇權由美國櫃檯買賣自營商創建及交易，但由於缺乏完善之交易制度，選擇權價格不僅相當程度地高估，買方甚至時常面臨賣方違約之風險，自營商在投資者身上亦賺取大量的利潤。截至 1973 年，個股型歐式買權於芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 正式掛牌交易，同年，Black and Scholes (1973) 在股價服從幾何布朗運動之假設下推導出合理之評價模型。標準化契約規格及合理化選擇權價格後，挾帶其高財務槓桿、有效避險及低持有成本等優點，選擇權交易自此絡繹不絕，賣權合約與其他不同標的物之選擇權亦相繼開始交易。

基本上，我們進行一般財務投資時之主要動機並不能看成只是單純地局限於投資回收上的考量而已。因為，到目前為止，追求「高投資報酬」與「避免投資風險」都仍然可以當成是我們進行投資時的兩個最主要目標。如此一來，我們所須採用之研究分析環境便得選擇在一個二度空間的「報酬—風險」世界中，才能充分有效地建立一個能合併解釋此兩種主要投資動機的「股票選擇權」訂價模式。可是，若打算在一個一度空間的「報酬」環境中架構一個「股票選擇權」訂價模式，則整個模式之組成內涵便將不只包括如回收報酬、投資成本、機會成本等不同的一次元計量單位而已^{註2}。當避免不確定性之「風險」早已成了我們在股票投資上與追求最大回收報酬幾乎同等重要之訴求時，我們便得在原來的一度空間「報酬」世界中另外增添一個空間度量，以反映與解釋在不確定性之「風險」方面的考量。而「風險」及「報酬」在投資上既是互相抵換也充滿著曖昧性，故

^{註2} 時間單位可以直接附加入整個訂價模式之中，而無需另外增添一度空間來容納與描述它。因為在個別計算所有回收報酬或機會成本等單位時，便已把相同的時間單位包括在其度量之內

在此種模糊環境下，我們輔以以下各小節來說明選擇權評價模式所面臨之不確定性，期使研究分析的結論，更實際地符合一般所謂「既賺」、「且穩」的投資訴求。

早在 1970 年 Bellman and Zadeh 即提出有關模糊環境下決策問題之研究，用模糊目標與模糊限制式之交集表示模糊決策，求解確定及隨機系統之模糊動態規劃問題及環境中之不確定性應如何處理等問題，故本研究採用模糊理論來處理選擇權評價模式於不確定情況下之問題。面對投資環境之模糊性，以下針對 B-S 選擇權評價模型在模糊狀態、模糊樣本訊息、模糊行動及評價函數四項維度所構成之決策空間做一個說明。

2.1.1 模糊事件機率

投資者於處理不確定情況下之選擇權評價模式時，限於主觀感認估計主要變數之參數分配，將隱含模糊性存在，若以機率論之觀點來度量此等不精確性因素係有其困難 (Zadeh, 1965)，其主要原因乃機率論處理者為隨機現象，而隨機者係關乎一事件之發生或不發生，而模糊者則關乎歸屬於某主題(或事件)之程度 (Bellman and Zadeh, 1970)，因此提出模糊決策理論 (Fuzzy Decision Theory)，以探討投資者於模糊環境中之決策特性。投資者主觀估計其所面臨之不確定性現象，係由隨機及模糊二因素組合而成，此現象指出投資者處於不確定性情況下，仍須參考歷史資料，惟投資者須依其主觀判斷而將異常樣本予以剔除，此時投資者之主觀判斷即含模糊性存在。因此模糊事件機率可定義為：模糊集合係用以規範不具精確範圍事物之集合，且以歸屬函數 $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ ，此表示為 X 集合中之元素 x ，歸屬於模糊集合 \tilde{A} 之程度，對要素 $x \in X$ ，則 $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ 。 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 表示 x 屬於模糊集合 \tilde{A} 之程度或歸屬等級，且 $\mu_{\tilde{A}}$ 值愈大表歸屬程度愈高。依模糊集合之概念，可定義在無額外樣本訊息之下，模糊事件 \tilde{A} 之事前機率 $P(\tilde{A})$ ：

$$P(\tilde{A}) = \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{A}}(x_r) P(x_r) \quad (2.1)$$

設 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 為樣本訊息空間 (Sample Information Space)，若當狀態 S_i 發生下： x_r 樣本訊息 (不具模糊性) 被獲得之事前機率 $P(x_r | S_i)$ 為已知，則定義在獲得樣本訊息 x_r 之事後機率依貝氏定理 [Bayes' Rule] 為：

$$P(S_i|x_r) = \frac{P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{P(x_r)} \quad (2.2)$$

上式表示在樣本訊息 x_r 存在下，狀態 S_i 發生之機率。

2.1.2 模糊樣本訊息空間

實務上，投資者於估計選擇權評價模式中相關變數時，依Mowen (1972) 之實務調查研究顯示，投資者會先觀察其相關之歷史樣本資料，此時投資者對某個變數之參數分配將有了某種程度之瞭解、認識，此時參數之分配係屬事前機率分配。惟投資者進一步進行選擇權評價時，將面臨相關樣本訊息，此樣本訊息將使投資者增進其對母體之認知，進而形成事後機率分配。樣本訊息會影響投資者對變數之估計，故仍將涉及主觀判斷問題，在此等樣本訊息具模糊性情況下，其事後機率定義為：設樣本訊息空間 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 且 $\{x_r\}, r=1, 2, \dots, m$ 為獨立事件， $\tilde{M} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_J\}$ 為 X 上之模糊樣本訊息空間，模糊集合 $\tilde{M}_j, j=1, 2, \dots, J$ 稱為模糊樣本訊息，在獲得 \tilde{M}_j 後可依貝氏定理，定義其事後機率為：

$$P(S_i|\tilde{M}_j) = \frac{P(\tilde{M}_j|S_i) \cdot P(S_i)}{P(\tilde{M}_j)} \quad (2.3)$$

其中： $P(\tilde{M}_j|S_i) = \sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)$

$P(\tilde{M}_j) = \sum_{r=1}^m P(x_r) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)$ ，故

$$P(S_i|\tilde{M}_j) = \frac{\sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \quad (2.4)$$

(2.4)式說明在模糊樣本訊息空間存在下，狀態 S_i 發生之機率，可用來描述投資者面臨不同資料時，所產生之不確定性。

2.1.3 模糊狀態空間

投資者於處理實際選擇權評價時，不僅面臨具模糊性之樣本訊息空間，其所處之狀態空間亦具模糊性。實務上投資者進行選擇權評價時，除了考量股價、風

險利率、股價報酬變動性、履約價格、到期期間等變數外，其次應考量一般經濟景氣與產業榮枯情況，例如投資者預測風險時可按「經濟景氣」、「經濟持平」與「經濟不景氣」三種狀況分別評估其可能之風險，惟何狀態下可視為「經濟景氣」、「經濟持平」與「經濟不景氣」，此種「景氣」、「持平」與「不景氣」三者曖昧性模糊語意仍有賴投資者之主觀判斷，因此投資者面臨之狀態空間亦隱含模糊性存在。

2.1.4 模糊行動

投資者所擬定行動方案不同，將導致選擇權之價格有差異，惟考量投資者所處之環境變動不居、投資時效之急迫性及此等投資無法試行等因素，故實務上對不同行動下變數之估計仍須投資者判斷為之。因此，投資者於處理不確定情況下選擇權評價問題時，擬採行之方案亦具模糊性存在。例如，投資者如大量買進或賣出股票選擇權時，會造成其在市場上助漲助跌之現象；然此「大量」為多少量才算「大量」？此門檻估為多少？此為存在模糊性之決策行動。

2.1.5 模糊決策空間

由以上分析可知，投資者實際處理選擇權評價問題時，係由一個模糊狀態、模糊樣本訊息、模糊行動及評價函數四項維度所構成之決策問題。按此四項維度，則選擇權評價問題可以模糊決策空間 (Fuzzy Decision Space)

$\tilde{B} = \{\tilde{F}, \tilde{A}, P(\tilde{F}), C(\tilde{A}, \tilde{F})\}$ 以描述之，其中：

$\tilde{F} = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_K\}$ 表模糊狀態特徵的集合， $\tilde{F}_k, k=1, 2, \dots, K$ 表 S 上之某一模糊集合， $S = \{S_1, S_2, \dots, S_I\}$ 表狀態集合， $S_i, i=1, 2, \dots, I$ 表狀態集合中某一狀態。

$\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_N\}$ 表模糊行動集合， $\tilde{A}_n, n=1, 2, \dots, N$ 表 D 上之某一模糊集合，

$D = \{d_1, d_2, \dots, d_L\}$ 表行動集合。 $D_l, l=1, 2, \dots, L$ 表投資者可採行之某一行動或方案。

$P(\tilde{F}_k) = \tilde{F}_k$ 之事前機率

$C(\tilde{A}, \tilde{F}) = \hat{A} \times \tilde{F}$ 之評價函數 則：

1. 模糊狀態 \tilde{F}_k 之事前機率定義為：

$$P(\tilde{F}_k) = \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \quad (2.5)$$

2. 模糊狀態 \tilde{F}_k 之事後機率:

設 $\tilde{M} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_J\}$ 表 X 上之模糊樣本訊息空間，模糊集合 $\tilde{M}_j, j=1, 2, \dots, J$ 為模糊樣本訊息， $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 表樣本訊息空間，且 $x_r, r=1, 2, \dots, m$ 為獨立事件。當獲得模糊樣本訊息 \tilde{M}_j 時，模糊狀態 \tilde{F}_k 之事後機率代入(2.4)式，按貝氏定理推論模糊事件事後機率為:

$$\begin{aligned} P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) &= \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i | \tilde{M}_j) \\ &= \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \frac{\sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(S_i)}{P(\tilde{M}_j)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

若獲得多個模糊樣本訊息，例 \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 ，則模糊狀態 \tilde{F}_k 之事後機率 $P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$ 按貝氏定理可得:

$$P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \sum_{q=1}^Q \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(x_r | S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_2}(x_r) \cdot \mu_{\tilde{M}_1}(x_q) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \sum_{q=1}^Q \mu_{\tilde{M}_1}(x_r) \cdot P(x_r) \cdot \mu_{\tilde{M}_2}(x_q) \cdot P(x_q)} \quad (2.7)$$

2.1.6 模糊行動之期望值

投資者處於某模糊狀態 \tilde{F}_k 且獲得模糊樣本訊息 \tilde{M}_j 情況下，須進一步考量報酬而擬定可行方案之行動 \tilde{A}_n ，由本文分析可知，投資策略不同將導致選擇權評價模式之買權價格差異。投資者亦須估計模糊行動 \tilde{A}_n 、模糊狀態 \tilde{F}_k 之下所發生之風險及股價變動性，以求算買權價格，即為評價函數 $C(\tilde{A}, \tilde{F})$ 之函數值 $C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k)$ ，故 \tilde{A}_n 之買權價格可定義為:

$$C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j) = \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) \quad (2.8)$$

並藉 $C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j)$ 釐定應採取之最適行動 \tilde{A}_n^* 。最適模糊行動 \tilde{A}_n^* 之買權價格為

$$C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) = \bigwedge_{n=1}^N C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j) \quad (2.9)$$

上式意涵為投資者在樣本訊息存在情況下，所選擇的買權價格愈低，損失愈小。

2.2 模糊 Black-Scholes 選擇權評價模式之導出

針對 B-S 選擇權評價模式未臻完善之部分修正其不足使之更趨近完美，以下採用模糊理論之方法，並導出模糊選擇權評價模式。

2.2.1 變數之估計

選擇權評價模式中主要變數為現行股價、風險利率、股價報酬波動度、履約價格、到期期間等變數，其中於不確定性情況下，風險利率、股價報酬波動度之期望值均有賴投資者估計之，惟投資者之主觀估計將隱含模糊性因素存在，故投資者於估計各變數時，應將主觀判斷之模糊因素納入考量，在此情況下各變數之估計方法說明如下：

1. 風險利率(R)期望值之估計

- (1) 令 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_I\}$ 表狀態集合， $S_i, i=1, 2, \dots, I$ 表過去風險利率， $P(S_i)$ 表 S_i 之前機率。
- (2) 投資者在預測風險利率時，須判斷未來景氣之變化，此判斷將存在模糊性。令 $\tilde{F} = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_K\}$ 表投資者對經濟景氣狀態之判斷，為模糊狀態集合， $\tilde{F}_k, k=1, 2, \dots, K$ 表 S 上之某一模糊狀態集合。
- (3) 風險利率除受經濟景氣變化影響外，投資者須估計風險利率的未來走勢，令 $\tilde{M} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_J\}$ 表投資者對風險利率成長幅度之估計，係 X 上之模糊樣本訊息空間， $\tilde{M}_j, j=1, 2, \dots, J$ 為模糊樣本訊息。而 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 為一樣本訊息空間， $x_r, r=1, 2, \dots, m$ ，表利率成長率，惟成長幅度大小亦有賴投資者估計之。
- (4) $S_i, i=1, 2, \dots, I$ 之狀態下第 t 期風險利率之期望值 $R_t(S_i)$:

$$R_t(S_i) = S_i \cdot [1 + \sum_{r=1}^m x_r \cdot P(x_r | S_i)] \quad (2.10)$$

(5) 依(2.1)及(2.10)式可得 \tilde{F}_k 之下第 t 期各風險利率之期望值 $R_t(\tilde{F}_k)$:

$$P(\tilde{F}_k) = \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \quad (2.11)$$

$$R_t(\tilde{F}_k) = P(\tilde{F}_k) \cdot R_t(S_i)$$

(2.11)式說明在不同的經濟景氣狀態下，具有不同的風險利率。

2. 股價報酬波動性 (σ) 期望值之估計

股價變動之未來趨勢為投資人擬定購買決策之主要依據，預期股價上漲或股價波動愈大則買進選擇權愈有利，惟應用上股價之波動度有賴投資者評估，因投資人無法待股價穩定或確定後，方擬定其購買決策，所以投資者對股價變化之評估，係具模糊因素存在。因此第 t 期股價變動係屬隨機漫步，不同期間之股價變動均有所不同，均須仰賴投資者估計之，其估計則具模糊性。若 $\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_N\}$ 表模糊行動集合， $\tilde{A}_n, n=1,2,\dots,N$ 表 D 上之某一模糊行動集合， $u=1,2,\dots,v$ 代表在 σ_u 上不同的波動度。即 \tilde{A}_n 表投資者對股價波動的估計，例如投資者預期股價波動度很高，則會買進選擇權，反之則否。因為波動度愈大，投資者愈可從中獲利，故波動度之大小，則會影響購買決策， \tilde{A}_n 行動下 σ 期望值之估計為:

$$E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t) = \sum_{u=1}^v \sigma_u \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u) \quad (2.12)$$

(2.12)式說明股價波動度之期望值如果愈大，投資人愈可從中獲利。

3. 模糊選擇權評價模式

投資者處理選擇權評價模式之實際情境，係一個由模糊狀態、模糊樣本訊息、模糊行動及評價函數四項維度所構成的決策空間，可以模糊決策空間 $\tilde{B} = \{\tilde{F}, \tilde{A}, P(\tilde{F}), C(\tilde{A}, \tilde{F})\}$ 描述之。其中 $C(\tilde{A}, \tilde{F})$ 表 $\tilde{A} \times \tilde{F}$ 之評價函數，就選擇權評價模式而言，結合上式及(1.15)式，可計得 \tilde{A}_n 行動下之評價函數值 $C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k)$:

$$C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) = S \cdot N \left[\ln(S/K) + (\tilde{R} + \tilde{\sigma}^2/2)T \right] / \tilde{\sigma}\sqrt{T} - Ke^{-\tilde{R}T} \cdot N(d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T})$$

$$= S \cdot N \left\{ \frac{\left[\ln(S/K) + \left\{ \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_i(S_i) + \left[\sum_{u=1}^v \sigma_u \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u) \right]^2 / 2 \right\} T \right]}{\left[\sum_{u=1}^v \sigma_u \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u) \right] \sqrt{T}} \right\} - Ke^{-\sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_i(S_i) T}$$

$$N \left\{ \frac{\left[\ln(S/K) + \left\{ \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_i(S_i) + \left[\sum_{u=1}^v \sigma_u \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u) \right]^2 / 2 \right\} T \right]}{\left[\sum_{u=1}^v \sigma_u \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u) \right] \sqrt{T}} \right\} - \left[\sum_{u=1}^v \sigma_u \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u) \right] \sqrt{T} \quad (2.13)$$

\tilde{A}_n 行動係基於獲得模糊樣本訊息 \tilde{M}_j 而定，故 \tilde{A}_n 行動之買權價格 $C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j)$ 可定義為：

$$C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j) = \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) \quad (2.14)$$

故 $C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j)$ 可定義為：

$$C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j) = \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i | \tilde{M}_j)$$

$$= \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \quad (2.15)$$

投資者最後得藉 $C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j)$ 以釐定應採取之最適行動 \tilde{A}_n^* ，最適行動 \tilde{A}_n^* 之買權價格 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 可定義為：

$$C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) = \bigwedge_{n=1}^N C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j) \quad (2.16)$$

2.2.2 模糊 Black-Scholes 選擇權評價模式

本節擬比較 B-S 與加入模糊概念之選擇權評價模式之差異性，說明模糊性因素對選擇權分析決策之影響，以描述在模糊環境下之選擇權評價模式。

一、模糊選擇權評價模式與 B-S 選擇權評價模式之比較

按 Zadeh (1965) 對模糊集合之定義，若為 X 集合上的一個模糊集合，則 $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ ， $\mu_{\tilde{A}}$ 為 \tilde{A} 之歸屬函數，亦即當 $x \in X$ ，則 $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ 。當歸屬函數之值域予以改變為 $\{0,1\}$ 時， \tilde{A} 即轉化明確之集合 A ， $\mu_{\tilde{A}}$ 轉化成明確之特性函數 C_A 。此種轉化就投資者於選擇權評價中之意涵，係代表投資者於判斷選擇權評價模式中相關變數 (S, K, R, σ, T) 之變化時，不具任何模糊性存在，亦即 $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ 或

0。在此情況下，因 $\mu_{\tilde{A}}(x) = C_A(x) = 1$ ，假如 $x \in A$ ， $C_A(x) = 0$ ，假如 $x \notin A$ 。則模糊事件 \tilde{A} 發生之機率可定義為：

$$P(\tilde{A}) = \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{A}}(x_r) \cdot P(x_r) = \sum_{r=1}^m C_A(x_r) \cdot P(x_r) = P(A) \quad (2.17)$$

依 B-S 選擇權評價模式而言，投資者面臨之決策空間為 $B = \{S, D, P(S_i), C(d_i, S_i)\}$ ，就 B-S 模式而言 $C(d_i, S_i)$ 即 C 值，故於 S_i 狀態且獲得 x_r 樣本訊息之下，其最適方案之買權價格 $C(d_i^* | x_r)$ 可定義為：

$$\begin{aligned} C(d_i^* | x_r) &= \text{Min}_i \left\{ \sum_{i=1}^l C(d_i, S_i) \cdot P(S_i | x_r) \right\} \\ &= \bigwedge_{i=1}^l \sum_{i=1}^l C(d_i, S_i) \cdot P(S_i | x_r) \end{aligned} \quad (2.18)$$

依模糊選擇權評價模式而言，投資者面臨之決策空間為 $\tilde{B} = \{\tilde{F}, \tilde{A}, P(\tilde{F}), C(\tilde{A}, \tilde{F})\}$ ，若於模糊狀態 \tilde{F}_k 且獲得模糊樣本訊息空間 $\tilde{M} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_j\}$ 下最適方案之買權價格 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 可定義為：

$$\begin{aligned} C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) &= \text{Min}_j \left\{ \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) \right\} \\ &= \bigwedge_{n=1}^N \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) \end{aligned} \quad (2.19)$$

就選擇權評價模式而言，模糊選擇權評價模式係投資者於估計該模式之相關變數之變化時，隱含著模糊性存在，除非投資者掌握相關變數之完全資訊，方可將其模糊性因素排除，否則不但投資者對相關變數之估計具模糊性，亦造成樣本訊息對相關變數之影響。如果投資者受客觀因素所限，使相關變數予以確定為一固定值，將可完全排除其模糊性。不可諱言地，投資者如果可以掌握相關變數之完全資訊或客觀環境，於估計相關變數時，便可排除主觀判斷上之模糊性。

2.3 模糊 Black-Scholes 選擇權評價模式與傳統機率 Black-Scholes 選擇權評價模式之比較

以下將比較模糊 B-S 選擇權評價模式與傳統機率 B-S 選擇權評價模式之差異。

2.3.1 模糊選擇權評價模式與 B-S 選擇權評價模式所決定第 t 期風險利率期望值之比較

本節擬比較 $C(d_t^* | x_t)$ 與 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 之差異性，以說明模糊性因素對選擇權評價模式之影響，其對選擇權相關變數之影響作以下推論：

命題 2.1: 當模糊樣本訊息 \tilde{M}_j ，模糊狀態 \tilde{F}_k 存在下，令 $R_t(\tilde{F}_k)$ 與 R_t 各代表模糊選擇權評價模式與 B-S 選擇權評價模式所決定第 t 期風險利率之期望值。若將模糊因素予以排除則 $R_t(\tilde{F}_k) \leq R_t$ 。

證明: 為使文章順暢，詳細數學證明請見附錄一。

推論: 由命題 2.1 顯示，當模糊樣本訊息 \tilde{M}_j 及模糊狀態 \tilde{F}_k 存在下，投資者於估計風險利率時，若忽略其主觀估計所隱含之模糊性因素對 R_t 之影響，而仍以 B-S 選擇權評價模式估計之，將高估 R_t 之期望值，造成 B-S 選擇權評價模式中買權價格偏離的現象。

2.3.2 模糊選擇權評價模式與 B-S 選擇權評價模式所決定第 t 期股價報酬率波動度期望值之比較

命題 2.2: 當模糊樣本訊息 \tilde{M}_j ，模糊狀態 \tilde{F}_k 存在下， $E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t)$ 與 $E(\sigma_t)$ 各代表模糊選擇權評價模式與 B-S 選擇權評價模式所決定第 t 期股價變動度之期望值。若將模糊因素予以排除，則 $E(\sigma_t) \geq E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t)$ 。

證明: 為使文章順暢，詳細數學證明請見附錄二。

推論: 由命題 2.2 顯示，當模糊樣本訊息 \tilde{M}_j 及模糊狀態 \tilde{F}_k 存在下，投資者在估計股價報酬波動度時，若忽略其主觀估計所隱含之模糊性因素對 σ_t 之影響，而仍以 B-S 模式估計之，則將高估 σ_t 之期望值，加強投資人買進賣出的動機，造成市場上標的資產助漲助跌現象，易造成市場之不穩定性。

2.3.3 模糊選擇權評價模式與 B-S 選擇權評價模式買權價格期望值之比較

命題 2.3: 當模糊樣本訊息 \tilde{M}_j ，模糊狀態 \tilde{F}_k 存在下，若將模糊因素予以排除，則

(1) 在價內時 ($S > K$)，則將高估買權價格之期望值，即 $C(d_t^* | x_t) \geq C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 。

證明: 為使文章順暢，詳細數學證明請見附錄三。

(2) 在價平時($S=K$)，則將高估買權價格之期望值，即 $C(d_i^*|x_r) \geq C(\tilde{A}_n^*|\tilde{M}_j)$ 。

證明: 為使文章順暢，詳細數學證明請見附錄四。

(3) 在價外時($S < K$)，則將低估買權價格之期望值，即 $C(d_i^*|x_r) \leq C(\tilde{A}_n^*|\tilde{M}_j)$ 。

證明: 為使文章順暢，詳細數學證明請見附錄五。

推論: 由命題 2.3 顯示，從以上證明可知，B-S選擇權評價模式，係假定投資者於估計選擇權相關變數時不具有模糊性存在，亦即投資者於主觀判斷相關變數之變化時，均可作完全正確之預估，使 $\mu_{\tilde{A}_n}(R_i) = \mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_i) = 1$ 。此等假設，除非投資者已掌握完全資訊或客觀環境已確定情況下才成立，否則投資者估計B-S選擇權評價模式中相關變數認定為不具模糊性或忽略不計，不但不符實際狀況，且將造成訂價錯誤。再者，B-S選擇權評價模式係假定投資者判斷於 S_i 狀態下取得 x_r 樣本訊息時，對 S_i 及 x_r 可作正確預估，不具模糊性存在，亦即 $\mu_{\tilde{F}_k}(S_i) = \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) = 1$ ，故B-S選擇權評價模式之買權價格在價內及價平時將大於模糊選擇權之買權價格，而在價外時則小於模糊選擇權之買權價格，若投資者按此B-S買權價格以為投資依據，將會蒙受不白損失。



2.4 釋例

本節擬以 Y 公司，標的股票為 Z 股票之買權為例，來說明投資者由模糊選擇權評價模式所計算之買權價格於不確定情況下之運用，茲說明 Y 公司之模糊決策空間如下:

2.4.1 模糊決策空間

(一) 狀態集合

已知投資者所購買之 Y 公司單一標的股票為 Z 股票，風險利率(R_i)之預估工作，長期以來均由該公司銷售部門專家所執行。該公司銷售部門專家預估次期風險利率係按「經濟景氣」、「經濟持平」與「經濟不景氣」分別評估其次期可能風險利率。設狀態集合 $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ ，其中 S_i 表買權之風險利率。模糊狀態集合 $\tilde{F} = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3\}$ ， \tilde{F}_1 表經濟景氣， \tilde{F}_2 表經濟持平， \tilde{F}_3 表經濟不景氣。設模糊狀態 \tilde{F}_k , $k=1,2,3$ 之歸屬函數及 S_i , $i=1,2,3,4,5$ 之事前機率如表 2-1 所示。

表 2-1 $\mu_{\tilde{F}_k}(S_i)$ 及 $P(S_i)$

$\mu_{\tilde{F}_k}(S_i)$ or $P(S_i)$	$S_i(R_t)$				
	1%	2%	3%	4%	5%
$\mu_{\tilde{F}_1}(S_i)$	0	0	0.8	0.9	1.0
$\mu_{\tilde{F}_2}(S_i)$	0	0.9	1.0	0.8	0
$\mu_{\tilde{F}_3}(S_i)$	1.0	0.9	0.8	0.5	0
$P(S_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

(二) 樣本訊息空間

投資者近期為因應市場股票報酬率之波動，故重新擬定股票報酬波動度 (σ)，由於 S 、 K 、 T 、 R 可直接觀察而得，但 σ 必須藉由估計求得，換句話說要有標的股票過去一段時間的日報酬資料，故根據歷史資料，決定將現行之 σ 由 60% 降為 40%，預估此改變將使風險利率降低。設樣本訊息空間

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ，其中 $x_r, r = 1, 2, 3, 4$ 代表風險利率成長率且 (x_r) 為獨立事件。

投資者係按「風險利率成長率相當高」、「風險利率成長率變化不大」之狀況以為預估之基礎，亦即模糊樣本訊息空間 $\tilde{M} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\}$ ，其中 \tilde{M}_1 表風險利率成長率將相當高， \tilde{M}_2 表風險利率成長率變化不大。已知 Y 公司過去在 S_i 狀態下，發生 x_r 之事前機率 $P(x_r|S_i)$ ，詳表 2-2。模糊樣本訊息 $\tilde{M}_j, j=1, 2$ 之歸屬函數 $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r)$ 及 x_r 之事前機率 $P(x_r)$ ，詳表 2-3。

表 2-2 $P(x_r|S_i)$

S_i	R_t	x_r			
		10%	15%	20%	25%
S_1	1%	0.3	0.3	0.2	0.2
S_2	2%	0.5	0.4	0.1	0
S_3	3%	0.6	0.3	0.1	0
S_4	4%	0.8	0.2	0	0
S_5	5%	1.0	0	0	0

表 2-3 $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r)$ 及 $P(x_r)$

$\mu_{\tilde{M}_j}(x_r)$ or $P(x_r)$	x_r			
	10%	15%	20%	25%
$\mu_{\tilde{M}_1}(x_r)$	0	0.2	0.8	0.8
$\mu_{\tilde{M}_2}(x_r)$	0.2	0.8	0.6	0
$P(x_r)$	0.2	0.3	0.3	0.2

(三) 模糊行動集合

投資者為因應下期風險利率之成長，經考量市場現況，決定其行動集合 $D = \{d_1, d_2\}$ ，其中第一方案(d_1): 預期股價波動性很高，大量買進股票選擇權。第二方案(d_2): 預期股價波動性不大，故少量買進股票選擇權，經評估各方案之買權價格說明如下:

方案一: 投資者如大量買進股票選擇權時，會造成其在市場上助漲助跌之現象，造成 σ 上升，導致更大的獲利空間，所以買權價格上漲。

方案二: 投資者如少量買進股票選擇權時，較不易造成其在市場上之波動， σ 上升幅度不大，獲利空間不大，故買權價格下跌。

設模糊行動集合 $\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ ，其中 \tilde{A}_1 為 d_1 上之模糊集合，表示 σ 約 60%， \tilde{A}_2 為 d_2 上之模糊集合，表示 σ 約 40%， $\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_t)$ 詳表 2-4。

表 2-4 $\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_t)$

$\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_t)$	σ_u			
	20%	40%	60%	80%
$\mu_{\tilde{A}_1}(\sigma_t)$	0	0.6	1.0	0.8
$\mu_{\tilde{A}_2}(\sigma_t)$	0.8	1.0	0.5	0
$P(\sigma_u)$	0.2	0.3	0.3	0.2

$$E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t) = \sum_{u=1}^v \sigma_u \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_u) \cdot P(\sigma_u), \text{ 其中 } E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_1) = 0.38, E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_2) = 0.242 \text{。}$$

(四) 評價函數

投資者按 \tilde{A}_n , \tilde{F}_k 發生下，將其各別 S 、 K 、 T 納入 B-S 評價模式，以求算買權價格，而此買權價格即為評價函數 $C(\tilde{A}, \tilde{F})$ 之函數值 $C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k)$ 。

1. \tilde{F}_k 狀態下風險利率期望值

Y 公司考量風險利率成長率 x_r , $r = 1, 2, 3, 4$ 後，在 S_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 之狀態下新風險利率之期望值 $R_t(S_i)$ 為：
$$R_t(S_i) = S_i \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^4 x_r \cdot P(x_r | S_i) \right)$$

按表 2-2 資料計得 $R_t(S_1) = 0.012$, $R_t(S_2) = 0.023$, $R_t(S_3) = 0.034$, $R_t(S_4) = 0.044$, $R_t(S_5) = 0.055$; \tilde{F}_k , $k = 1, 2, 3$ 之下風險利率之期望值 $R_t(\tilde{F}_k)$ ：

$$R_t(\tilde{F}_k) = P(\tilde{F}_k) \cdot R_t(S_i)$$

其中， $P(\tilde{F}_k) = \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i)$ 。

按表 2-1 資料計得 $R_t(\tilde{F}_k)$ 詳表 2-5：

表 2-5 $R_t(\tilde{F}_k)$

\tilde{F}_k	\tilde{F}_1	\tilde{F}_2	\tilde{F}_3
$R_t(\tilde{F}_k)$	0.020	0.025	0.023

2. 評價函數值

Y 公司新股價變動率已定為 40%，得將前文所計得 $R_t(\tilde{F}_k)$ 代入 B-S 選擇權評價模型 Eq. (1.15)。設 Y 公司現行市場狀況下 $S = 100$ (元)， $K = 100$ (元)， $T = 1$ (年) 求算買權價格，且 Y 公司僅有一支標的股 Z，故此買權價格即為 Y 公司評價函數 $C(\tilde{A}, \tilde{F})$ 之數值。其 $C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k)$ 之結果如下： $C(\tilde{A}_1, \tilde{F}_1) = 15.925$; $C(\tilde{A}_2, \tilde{F}_1) = 10.552$; $C(\tilde{A}_1, \tilde{F}_2) = 16.128$; $C(\tilde{A}_2, \tilde{F}_2) = 10.773$; $C(\tilde{A}_1, \tilde{F}_3) = 16.07$; $C(\tilde{A}_2, \tilde{F}_3) = 10.71$ 。

(五) 最適行動之買權價格期望值

投資者計得 $C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k)$ ，並考量其獲得模糊樣本訊息 \tilde{M}_j , $j = 1, 2$ 之下，則 \tilde{A}_n 期望買權價格 $C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_j)$ 可依定義：

$$C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = \sum_{k=1}^K C(\tilde{A}_n, \tilde{F}_k) \cdot P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$$

$$C(\tilde{A}_1 | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = 8.385; C(\tilde{A}_2 | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = 5.587$$

$$\text{投資者最適行動之期望買權價格 } C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) = \bigwedge_{n=1}^N C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$$

$$C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) = \bigwedge_{n=1}^2 C(\tilde{A}_n | \tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = 5.587。$$

故投資者應採A₂為宜。

2.4.2 模糊 B-S 選擇權評價模式健全性之分析與討論

就選擇權評價而言，模糊選擇權評價模式係主張投資者於估計該模式相關變 R 、 σ 之變化時，其均隱含模糊性因素存在，除非投資者掌握相關變數之完全訊息並受客觀環境所限，使相關變數予以確定，方可將模糊性因素予以排除。

本文以下擬以前文所舉 Y 公司釋例之數據為例，藉比較 $C(d_i^* | x_r)$ 及 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 之差異，以分析模糊性因素對 B-S 選擇權評價模式之影響，並以此說明模糊選擇權評價模式之健全性：

(一) 風險利率期望值之比較

令 $R_i(S_i)$ 表 B-S 評價模式下所計得之風險利率期望值，按本文(2.10)式及貝式

$$\text{定理 } R_i(S_i) \text{ 可定義為: } R_i(S_i) = \sum_{i=1}^I S_i \cdot [1 + \sum_{r=1}^m x_r \cdot P(x_r | S_i)] \cdot P(S_i)$$

依前文所舉 Y 公司釋例之數據為例，按表 2-1、表 2-2 計得風險利率期望值

$R_i(S_i)$ 為：

$$R_i(S_i) = 0.034$$

此數據均大於本釋例按模糊選擇權評價模式所計得之風險利率期望值

$$R_i(\tilde{F}_1) = 0.020 \quad R_i(\tilde{F}_2) = 0.025 \quad R_i(\tilde{F}_3) = 0.023。$$

此結論與本文命題 1.1 之推論結果相符，亦即投資者於估計風險利率期望值時，若將其估計中所隱含之模糊性因素予以忽略不計，則將高估其風險利率期望值，造成投資決策之錯誤。

(二) 股價報酬波動度期望值之比較

令 $E(\sigma_i)$ 表 B-S 選擇權評價模式下所計得之股價報酬波動度期望值，按本文

$$(2.12) \text{式及貝式定理 } E_{\tilde{A}_i}(\tilde{\sigma}_i) \text{ 可定義為: } E_{\tilde{A}_i}(\tilde{\sigma}_i) = \sum_{u=1}^v \sigma_{iu} \cdot \mu_{\tilde{A}_i}(\sigma_{iu}) \cdot P(\sigma_{iu})$$

依前文所舉 Y 公司釋例之數據為例，按表 2-4 計得股價報酬波動度期望值

$E(\sigma_i)$ 為:

$$E(\sigma_i) = 0.5$$

此數據均大於本釋例按模糊選擇權評價模式所計得之股價報酬波動度期望值

$$E_{\tilde{A}_i}(\tilde{\sigma}_1) = 0.38; E_{\tilde{A}_i}(\tilde{\sigma}_2) = 0.242。故此結論與本文命題 2.2 之推論結果相符，$$

亦即投資者於估計股價報酬波動度期望值時，若將其主觀估計中所隱含之模糊性因素予以忽略不計，則將高估其股價報酬波動度期望值，加強投資人買進賣出的動機，導致市場上標的股票助漲助跌現象，易造成市場之不穩定性。

(三) 買權價格期望值之比較

令 $C(d_i^* | x_r)$ 與 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 各代表 B-S 選擇權評價模式與模糊選擇權評價模式所計得二方案買權價格之期望值。按前節所舉 Y 公司釋例，股票報酬波動度為 40% 之下，按上節所計得 $R_i(\tilde{F}_k)$ 、 $E_{\tilde{A}_i}(\tilde{\sigma}_i)$ ，可計得二模式下各方案之

$C(d_i^* | x_r)$ 與 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 為:

$$C(d_i^* | x_r) = 21.09; C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) = 5.587。$$

由上可知，B-S 選擇權評價模式在價平時 ($S = K$) 將大於模糊選擇權評價模式所計得之買權價格期望值。此等結論與命題 2.3 之推論結果相符，亦即投資者於進行選擇權評價時，若將其估計中所隱含之模糊性因素予以忽略不計，則將高估其買權價格期望值，造成相關投資決策之錯誤。

2.5 結論

本節係探討投資者於模糊環境下之選擇權評價問題，因受限於投資者對選擇權評價分析時之相關變數作主觀評估常隱含「模糊性」存在，並常常受模糊樣本訊息所影響，故本文按模糊理論及貝氏定理以度量該模糊性及模糊樣本訊息之效果，據以作為估計選擇權評價模式中相關變數期望值之依據，並藉以建立模糊選擇權評價模式，以釐定不確定性情況下選擇權評價問題，由於人類思維及行為，

均具模糊及非定量化之特性，故針對選擇權評價問題而言，模糊選擇權評價模式較符合人性決策方式。

本篇進一步推論發現，投資者若不考慮相關變數之模糊因素於選擇權評價模式中則：(1)將高估風險利率的期望值，造成買權價格偏離的現象；(2)將高估股價報酬波動度的期望值，高估投資人獲利空間，易造成市場之不穩定性；(3)除非投資者已掌握完全訊息或客觀環境已確定情況下，否則投資者估計 B-S 選擇權評價模式中相關變數時，在價內($S > K$)及價平($S = K$)時，將高估買權價格期望值，而在價外($S < K$)時，將低估買權價格期望值，此舉將導致訂價決策之錯誤，造成投資人之損失。



第三章 模糊二項式選擇權評價模型

不論是 B-S 或 CRR 模型所求算之買權價格皆是一個固定值，但是考量不確定情況下之買權價格，應該為一區間值，故本研究將一般 CRR 模型加進模糊集合理論，建立模糊二項式選擇權評價模型，以求得買權價格區間，並提供不同風險偏好者更多投資組合之選擇。

3.1 背景與問題

當我們預測和估計選擇權價格時，我們無法精確地計算出它的真實價格，因為選擇權的價格在不確定之環境下為一個區間值。投資者使用一般 CRR 模型必須能夠估計和預測無風險利率和股價報酬之波動性二個變數來當做分析之基礎。而投資者之估計和預測不可避免地受不同程度之不確定性因素所影響，因此本文試圖建立一個模糊二項式選擇權評價模型來預測選擇權價格，同時提昇選擇權評價模型之實務性也為投資問題之不確定性提供一個解決方法。而模糊集合理論之發展相當迅速，目前應用幾乎遍及所有領域，舉凡自動化控制、資訊管理、氣象預報、地震研究、人工智慧、圖形識別、醫療診斷、體育訓練、農作物選種、商品評價以及經濟、心理、管理、社會、語言、歷史、法學、哲學研究等社會科學領域，多在其應用範圍內，故本研究採用模糊理論來處理選擇權評價模型於不確定情況下之問題。

3.2 模糊集合理論

模糊集合理論是由 L.A. Zadeh (1965) 首先提出。自此，模糊集合理論就被廣泛應用於許多領域中，其理論主要強調二元邏輯之不合理性，因為在現實生活中，許多事情無法被明確區別，所以必須使用模糊觀念去描述。

3.2.1 模糊數

實數 R 的任意模糊子集稱為模糊數，令 A 為模糊數，且乃正的模糊數，其隸屬函數 μ_A 為：

1. $\mu_{\tilde{A}}(x): R \rightarrow [0,1]$
2. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x \in (-\infty, c]$
3. 在 $[c,a]$ 嚴格遞增
4. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \forall x \in [a,b]$
5. 在 $[b,d]$ 嚴格遞減
6. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x \in [d, \infty)$

其中， $c \leq a \leq b \leq d$ 均屬於 R ，且允許有 $c = -\infty$ 或 $c = a$ ，或 $a = b$ ，或 $b = d$ ，或 $d = +\infty$ 的情形存在。

當上述 3、5 兩項性質分別改為嚴格直線遞增及遞減時，則 \tilde{A} 可用四元數 (c, a, b, d) 表示，由於 $\mu_{\tilde{A}}$ 之圖形狀似梯形，故稱之為梯形模糊數(trapezoidal fuzzy number); 當 $a = b$ 時，它可用三元數 (c, a, d) 表示，此時 $\mu_{\tilde{A}}$ 的圖形狀似三角形，故稱之為三角模糊數(triangular fuzzy number)，亦即後者為前者的一個特例。

梯形模糊數之隸屬函數為：

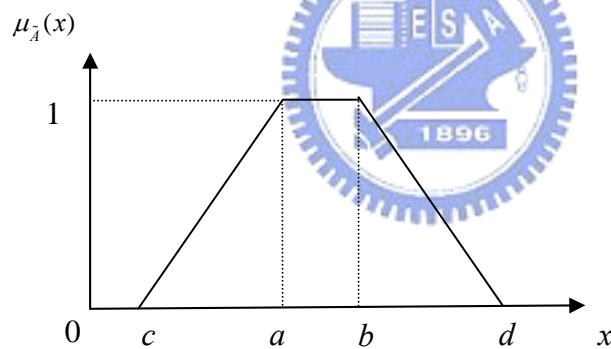


圖 3-1 梯形模糊數 $\tilde{A} = (c, a, b, d)$ 之隸屬函數

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{a-c}, & c \leq x \leq a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-d}{b-d} & b \leq x \leq d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而三角模糊數之隸屬函數則為：

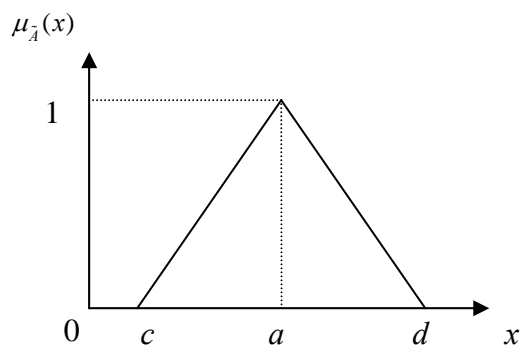


圖 3-2 三角模糊數 $\tilde{A}=(c, a, d)$ 之隸屬函數

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{a-c}, & c \leq x \leq a \\ \frac{x-d}{a-d}, & a \leq x \leq d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.2.2 模糊數之運算

模糊集合之運算基本上是根據擴張原理(extension principle)將一般的數學概念推廣應用到模糊集合中，此原理最早係由 Zadeh (1965)提出，並經多次修正，Zimmermann (1991)定義該原理如下：

對 $1 \leq i \leq r$ ， \tilde{A}_i 為定義於字集合 X_i 的模糊子集，隸屬函數 $\mu_{\tilde{A}_i}(x)$ ，若 $f: X_1 \times \cdots \times X_r \rightarrow Y, y = f(x_1, \dots, x_r)$ ，則可依映射 f 擴張定義字集合 y 的一個模糊子集 \tilde{B} 為： $\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_r), x_i, i = 1, \dots, r\}$

其中，

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \text{Sup}(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y) \text{Min}_{1 \leq i \leq r} \{ \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

Dubois and Prade (1978)所提出之模糊數本身也是一個模糊集，當然也可運用上述原理進行擴張運算。如在三角模糊數方面，Laarhoven and Pedrycz (1983)依據擴張原理導得加法、乘法、倒數、指數、對數之擴張運算式，Liang and Wang (1994)也列出了梯形模糊數之變號、加法、減法、乘法、除法時的擴張運算式，而 Kaufmann and Gupta (1991)整理出有關模糊數的一些算術運算，其主要運算如下：

變號-: $-(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1)$

加法 \oplus : $(a_1, a_2, a_3, a_4) \oplus (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$

減法 \ominus : $(a_1, a_2, a_3, a_4) \ominus (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$

乘法 \otimes :

$$c \in R, c \otimes (a_1, a_2, a_3, a_4) = (ca_1, ca_2, ca_3, ca_4)$$

$$a_i, b_i \geq 0, (a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes (b_1, b_2, b_3, b_4) \cong (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4)$$

除法 \oslash :

$$a_i \geq 0, b_i > 0, (a_1, a_2, a_3, a_4) \oslash (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$\cong (a_1 / b_4, a_2 / b_3, a_3 / b_2, a_4 / b_1)$$

$$c > 0, (a_1, a_2, a_3, a_4) \oslash c = (a_1 / c, a_2 / c, a_3 / c, a_4 / c)$$

倒數: $a_i > 0, (a_1, a_2, a_3, a_4)^{-1} \cong (a_4^{-1}, a_3^{-1}, a_2^{-1}, a_1^{-1})$

平方根: $a_i > 0, (a_1, a_2, a_3, a_4)^{\frac{1}{2}} \cong (a_1^{\frac{1}{2}}, a_2^{\frac{1}{2}}, a_3^{\frac{1}{2}}, a_4^{\frac{1}{2}})$

關於模糊集合之排序或大小比較方面的研究很多 Dubois and Prade (1980), Bortolan and Degani (1985), Chen (1985)等。Lee and Li (1997)依模糊事件之機率衡量，在機率分配為均勻分配，與隸屬函數成比例分配的兩種情形下，比較兩個模糊數之大小，其方法是求兩模糊數之平均值、變異數、以平均值大的數為大，當平均值相等時則比較變異數，並以變異數小者為大，而當兩者俱相等時則視為兩數相等。由於模糊事件之機率分配未知，在不失一般性之情況下，可假設其為均勻分配，此時模糊數 \tilde{A} 的平均值 $m(\tilde{A})$ 及變異數 $s^2(\tilde{A})$ 之計算式如下:

$$m(\tilde{A}) = \frac{\int_A x \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_A \mu_{\tilde{A}}(x) dx}$$

$$s^2(\tilde{A}) = \frac{\int_A x^2 \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_A \mu_{\tilde{A}}(x) dx} - m^2(\tilde{A})$$

其中 \int_A 表對R中使 $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ 之所有x值的積分。

由前式可求得三角模糊數或梯形模糊數之平均值及變異數並據以比較大小。當

$\tilde{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \tilde{A}_2 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 且 a_i 不全等時，其平均值及變異數分別如下:

$$m(\tilde{A}_1) = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

$$s^2(\tilde{A}_1) = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3}{18} \right)^2$$

$$m(\tilde{A}_2) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2 - a_3^2 - a_4^2 - a_3a_4}{3(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)}$$

$$s^2(\tilde{A}_2) = \frac{a_1^3 + a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + a_2^3 - a_3^3 - a_3^2a_4 - a_3a_4^2 - a_4^3}{6(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)} - m^2(\tilde{A}_2)$$

三角模糊數為梯形模糊數之特例，而本研究為了方便運算，主要是採三角模糊數來處理選擇權評價之問題，其歸屬函數及運算規則如下：

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (r-x)/(r-m) & m \leq x \leq r \\ (x-l)/(m-l) & l \leq x \leq m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

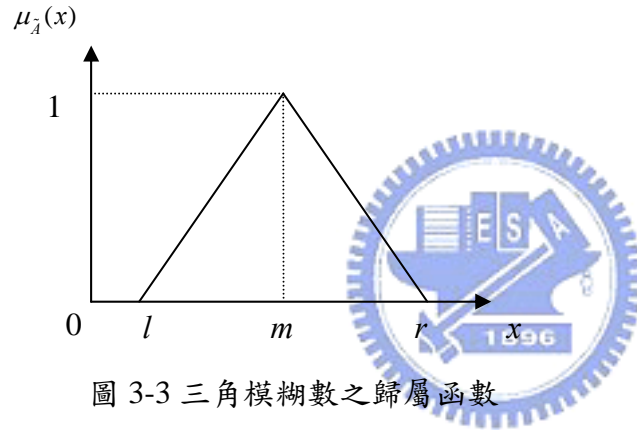


圖 3-3 三角模糊數之歸屬函數

根據三角模糊數性質和 Zadeh (1965)所提出之操作原則，茲將二組三角模糊數之運算規則 $\tilde{A} = (l_1, m_1, r_1)$ 和 $\tilde{B} = (l_2, m_2, r_2)$ 說明如下：

(1) 相加型模糊數 \oplus

$$(l_1, m_1, r_1) \oplus (l_2, m_2, r_2) = (l_1 + l_2, m_1 + m_2, r_1 + r_2)$$

(2) 相減型模糊數 \ominus

$$(l_1, m_1, r_1) \ominus (l_2, m_2, r_2) = (l_1 - r_2, m_1 - m_2, r_1 - l_2)$$

(3) 相乘型模糊數 \otimes

$$(l_1, m_1, r_1) \otimes (l_2, m_2, r_2) \cong (l_1l_2, m_1m_2, r_1r_2)$$

(4) 於模糊數前乘上正的係數 $k \otimes$

$$k \otimes (l_1, m_1, r_1) = (kl_1, km_1, kr_1)$$

(5) 相除型模糊數 \oslash

$$(l_1, m_1, r_1) \oslash (l_2, m_2, r_2) \cong (l_1 / r_2, m_1 / m_2, r_1 / l_2)$$

3.2.3 模糊關係

實際上事物間之關係常無明確(crisp)，亦即「 $x \in A$ 與否」的答案是模糊的(fuzzy)，可用 $\mu_A(x)$ 函數符號加以表示。我們使用 0 到 1 之間的數來代表事件之模糊關係，也就是我們用 1/0 來代表傳統事件之間有或沒有關係。當數字愈接近 1 時，此種關係非常強烈。相反的，當數字愈接近 0 時，關係就非常微弱。在模糊集合理論中，使用歸屬函數來描述關係時，其基本的運算包括聯集、交集和合成集合，令 $A \subseteq X \times Y$ 和 $B \subseteq X \times Y$ ， A 和 B 之運算關係如下。

(1) 聯集

$$\begin{aligned} A \cup B &= \mu_{A \cup B}(x, y) \\ &= \max[\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)] \\ &= \vee[\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)] \end{aligned}$$

(2) 交集

$$\begin{aligned} A \cap B &= \mu_{A \cap B}(x, y) \\ &= \min[\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)] \\ &= \wedge[\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)] \end{aligned}$$

(3) 合成集合

合成集合有數種型式，其中最為人所熟知的是「最大-最小」型之運算。假設 $A \subseteq X \times Y$ 和 $B \subseteq Y \times Z$ ， A 和 B 之最大-最小型運算集合如下：

$$\begin{aligned} A \circ B &= \mu_{A \circ B}(x, z) \\ &= \max[\min(\mu_A(x, y), \mu_B(y, z))] \\ &= \vee[\mu_A(x, y) \wedge \mu_B(y, z)] \end{aligned}$$

其中「 \circ 」為運算子。

3.3 模糊二項式選擇權評價模型

選擇權之買權(call option)為買方有權利在未來某一段期間內，以事先約定好的價格向賣方買入某一數量的標的資產。故由以上陳述可知：履約價格與到期日已經決定，股價則在每個時點反映出來，但利率則決定於貨幣市場的利率，而股票報酬的標準差非直接觀察所得，是來自歷史資料和情境分析之估計得來，所以無風險利率及股價波動性 (R, σ) 的估計常隱含著不確定性，故我們將無風險利率

及股價波動性加入模糊概念，推導出模糊二項式選擇權評價模型，其模型說明如下，包括 $t=1,2,\dots,n$ 期之模糊二項式選擇權之評價。

3.3.1 $t=1$ 至 $t=2$ 期之模糊二項式選擇權評價模型

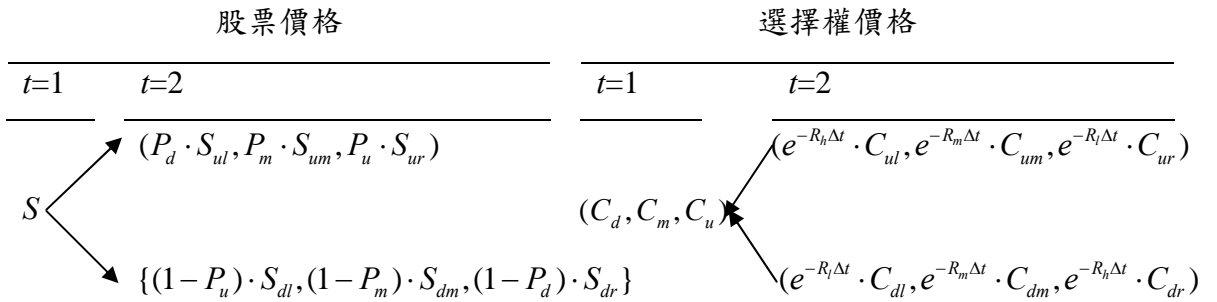


圖 3-4 在 Δt 時間下股價波動之模糊二項式選擇權評價模型

假定買權在一期後即將到期，股價剛開始為 $S(t=1)$ ，下一期($t=2$)股價可能向上或向下，而向上及向下之波動可能性各有三種，分別為向上 $S_{ur}(=ur \cdot S)$ ， S_{um}

($=um \cdot S$)， $S_{ul}(=ul \cdot S)$ 和向下 $S_{dr}(=dr \cdot S)$ ， $S_{dm}(=dm \cdot S)$ ， $S_{dl}(=dl \cdot S)$ 三種股價。因此在每一個時點，股價會由一個值 (S) 增加到 6 個值 ($S_{ur}, S_{um}, S_{ul}, S_{dr}, S_{dm}, S_{dl}$)。

其中：

$$S_{ur}: \text{股價向上波動之最大值}, S_{ur} = S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}],$$

$$S_{um}: \text{股價向上波動之平均值}, S_{um} = S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}],$$

$$S_{ul}: \text{股價向上波動之最小值}, S_{ul} = S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}],$$

$$S_{dr}: \text{股價向下波動之最大值}, S_{dr} = S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}],$$

$$S_{dm}: \text{股價向下波動之平均值}, S_{dm} = S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}],$$

$$S_{dl}: \text{股價向下波動之最小值}, S_{dl} = S_0 \cdot [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}].$$

而買權在到期值分別為 $C_{ur} = \max(S_{ur} - K, 0)$ ， $C_{um} = \max(S_{um} - K, 0)$ ，

$C_{ul} = \max(S_{ul} - K, 0)$ ， $C_{dr} = \max(S_{dr} - K, 0)$ ， $C_{dm} = \max(S_{dm} - K, 0)$ ，

$C_{dl} = \max(S_{dl} - K, 0)$ 。

結合債券和股票投資組合之後，可得到買權價格，茲以股價最大波動為例，說明如下：

$$C_u = \Delta_u \cdot S + B_u$$

其中:

Δ_u : 假設股票可以無限分割, 此為股價最大波動下可購買之股票張數;

S : 目前股票價格;

B_u : 在股價最大波動下, 投資債券的數量。

假設我們在股價最大波動下購買 Δ_u 數目之股票並投資 B_u 數量於債券上, 其無風險利率之區間為 (R_l, R_m, R_h) , 一期過後, 對於股價向上波動之投資組合值為 $\Delta_u \cdot ur \cdot S + e^{R_h \Delta t} \cdot B_u$, 和股價向下波動之值為 $\Delta_u \cdot dl \cdot S + e^{R_h \Delta t} \cdot B_u$ 。

其中:

ur : 向上波動之最大範圍, 股價波動從 S 到 $S_{ur}(=ur \cdot S)$ 此為股價向上波動之最大值;

dl : 向下波動之最大範圍, 股價波動從 S 到 $S_{dl}(=dl \cdot S)$ 此為股價向下波動之最小值;

$e^{R_h \Delta t}$: 無風險利率折現因子;

$e^{R_h \Delta t} \cdot B_u$: 在股價最大波動下, 債券折現值之和。

假設投資組合不是向上就是向下波動, 其值等於買權價格, 令 $\hat{ur} \in ur, \hat{dl} \in dl$, 則可得到以下二式:

$$\Delta_u \cdot \hat{ur} \cdot S + e^{R_h \Delta t} \cdot B_u = C_{ur} \quad (3.1)$$

$$\Delta_u \cdot \hat{dl} \cdot S + e^{R_h \Delta t} \cdot B_u = C_{dl} \quad (3.2)$$

將(3.1)與(3.2)式解聯立後可得(3.3)及(3.4)式

$$B_u = \frac{\hat{ur} \cdot C_{dl} - \hat{dl} \cdot C_{ur}}{(\hat{ur} - \hat{dl})e^{R_h \Delta t}} \quad (3.3)$$

$$\Delta_u = \frac{C_{ur} - C_{dl}}{(\hat{ur} - \hat{dl})S}, \text{ 為最大波動性下之避險比率。} \quad (3.4)$$

將(3.3)及(3.4)式代入 $C_u = \Delta_u \cdot S + B_u$ 中, 可導出下面的式子。

$$\begin{aligned} C_u &= \frac{C_{ur} - C_{dl}}{(\hat{ur} - \hat{dl})S} \cdot S + \frac{\hat{ur} \cdot C_{dl} - \hat{dl} \cdot C_{ur}}{\hat{ur} \cdot e^{R_h \Delta t} - \hat{dl} \cdot e^{R_h \Delta t}} \\ &= \frac{C_{ur} \cdot e^{R_h \Delta t} - C_{dl} \cdot e^{R_h \Delta t}}{\hat{ur} \cdot e^{R_h \Delta t} - \hat{dl} \cdot e^{R_h \Delta t}} + \frac{\hat{ur} \cdot C_{dl} - \hat{dl} \cdot C_{ur}}{\hat{ur} \cdot e^{R_h \Delta t} - \hat{dl} \cdot e^{R_h \Delta t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^{R_h \Delta t} - \hat{dl})C_{ur} + (\hat{ur} - e^{R_h \Delta t})C_{dl}}{\hat{ur} \cdot e^{R_h \Delta t} - \hat{dl} \cdot e^{R_h \Delta t}} \\
&= \frac{(e^{R_h \Delta t} - \hat{dl})C_{ur} + (\hat{ur} - e^{R_h \Delta t})C_{dl}}{(\hat{ur} - \hat{dl})e^{R_h \Delta t}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\text{令 } P_u = \frac{e^{R_h \Delta t} - \hat{dl}}{\hat{ur} - \hat{dl}}, 1 - P_u = \frac{\hat{ur} - \hat{dl} - e^{R_h \Delta t} + \hat{dl}}{\hat{ur} - \hat{dl}} = \frac{\hat{ur} - e^{R_h \Delta t}}{\hat{ur} - \hat{dl}} \tag{3.6}$$

$$\text{同樣可得, } P_m = \frac{e^{R_m \Delta t} - \hat{dm}}{\hat{um} - \hat{dm}}, 1 - P_m = \frac{\hat{um} - e^{R_m \Delta t}}{\hat{um} - \hat{dm}} \tag{3.7}$$

$$P_d = \frac{e^{R_l \Delta t} - \hat{dr}}{\hat{ul} - \hat{dr}}, 1 - P_d = \frac{\hat{ul} - e^{R_l \Delta t}}{\hat{ul} - \hat{dr}} \tag{3.8}$$

故股價向上波動的機率分別為 P_u , P_m 和 P_d , 而向下波動的機率則為 $1 - P_u$, $1 - P_m$ 和 $1 - P_d$ 。所以在股價波動性下所求出之 C_u , C_m 和 C_d 為買權價格之最大值、平均值和最小值, 其三角模糊數為 (C_d, C_m, C_u) , 其中:

$$C_u = e^{-R_u \Delta t} [P_u \cdot C_{ur} + (1 - P_u) \cdot C_{dl}] \tag{3.9}$$

同樣也可推導出股價在平均和最小波動性下之買權價格如下:

$$C_m = e^{-R_m \Delta t} [P_m \cdot C_{um} + (1 - P_m) \cdot C_{dm}] \tag{3.10}$$

$$C_d = e^{-R_l \Delta t} [P_d \cdot C_{ul} + (1 - P_d) \cdot C_{dr}] \tag{3.11}$$

3.3.2 $t=2$ 至 $t=3$ 期之模糊二項式選擇權評價模型

[步驟 1]

$t=3$ 至 $t=2$ 期為 $t=2$ 至 $t=1$ 期之延伸, 故在 $t=3$ 期可產生 6^2 個股價, 其中不同的路徑可能會產生相同值, 在結合相同值後, 約有 15 個不同的股價。接下來, 我們使用 $t=3$ 期的股價和履約價可計算出 $t=3$ 期之買權價格。將最大及最小之買權價格代入(3.9)式後, 就可得到買權價格模糊區間之極右值, 同樣的方法代入(3.10)及(3.11)式中, 可得到買權價格模糊區間之平均值與極左值。

[步驟 2]

接下來運用去模糊化的方法 (Opricovic and Tzeng, 2003), 將買權價格之模糊區間代入 (3.12)式, 在大於 $t=1$ 期時, 每個節點可得到一個買權價格區間, 其中包含三個買權價格。使用(3.12)式後可簡化成一個 BNP (Best Nonfuzzy

Performance) 值，也就是一個買權價格，所以每個節點最後可得到一個 BNP 值，即一個平均買權價格。而在 $t=2$ 期有 6 個節點，將此 6 個買權價格中最大及最小值代入(3.9)式，又可推算 $t=1$ 期買權價格模糊區間之極右值，同樣的方法可得到買權價格之平均值與極左值，最後可求算出 $t=1$ 期買權價格模糊數之區間值。針對模糊數 \tilde{R}_i 之 BNP 值可表示於下：

$$BNP_i = [(UR_i - DR_i) + (MR_i - DR_i)]/3 + DR_i \quad \forall i \quad (3.12)$$

其中： $UR_i; MR_i; DR_i$ 分別為模糊區間之極右、平均、極左值。

3.3.3 多期模糊二項式選擇權評價模型

如何由 $t=n$ 期之股價推算出 $t=1$ 期之買權價格，茲將詳細之推導過程解釋於下。

[步驟 1]: 首先根據歷史資料估計 σ 值，並將 ρ 設定在一個上下振動可接受之區間，換句話說， $\sigma(1+\rho)$ 為向上波動之最大值， σ 是向上波動之平均值，而 $\sigma(1-\rho)$ 是向上波動之最小值， $-\sigma(1-\rho)$ 是向下波動之最大值， $-\sigma$ 是向下波動之平均值， $-\sigma(1+\rho)$ 是向下波動之最小值，並分別可算出 S_{ur} ， S_{um} ， S_{ul} ， S_{dr} ， S_{dm} 和 S_{dl} 6 個股價值。

[步驟 2]: 接下來從 $t=n$ 期之股價和履約價來計算 $t=n$ 期之買權價格。過程類似 CRR 模型，其中， $C_n = \max(S_n - K, 0)$ ，而 C_n 、 S_n 、 K 分別為第 t 期之買權價格、股票價格及履約價格。

[步驟 3]: 從 $t=n$ 期推算 $t=n-1$ 期之買權價格。即將模糊集合理論應用於 CRR 模型中，亦即給予股價報酬波動度和無風險利率一個區間值，代入(3.6)、(3.7)、(3.8)式中，可得到不同機率值，在股價最大波動度下，將 C_{ur} 和 C_{dl} 代入(3.9)式，同樣的作法，在股價平均波動度下將 C_{um} 和 C_{dm} 代入(3.10)式，而在股價最小波動度下將 C_{ul} 與 C_{dr} 代入(3.11)式，可求出 C_u ， C_m 和 C_d 分別為最大、平均和最小值之買權價格，所以每個節點有三個買權價格，再將其代入(3.12)式中，可簡化成一個 BNP 值即買權價格。

[步驟 4]: 接著從 $t=n-1$ 期推算 $t=n-2$ 期之買權價格。由步驟 3 可知，每個節點有一個 BNP 值，依循 $t=n$ 期至 $t=n-1$ 期相同之方法，在股價最大波動度下將 C_{ur} 和 C_{dl} 代

入(3.9)式，在股價平均波動度下將 C_{um} 和 C_{dm} 代入(3.10)式，在股價最小波動度下將 C_{ul} 與 C_{dl} 代入(3.11)式，可求出在 $t=n-2$ 期之買權價格區間。

[步驟 5]: 最後依序推算出 $t=n-2$ 期到 $t=n-3, \dots, t=1$ 期之買權價格。即重複以上相同步驟，就可從 $t=n, n-1$ 一直推算到 $t=1$ 期之買權價格區間。

根據之前的討論，我們知道在模糊二項式選擇權評價模型中，股價之波動性不是向上就是向下，類似於CRR 模型。不同的是在模糊二項式選擇權評價模型中，向上和向下之波動性各有三種狀態，所以在每一個節點，如果剛開始股價為 S ，下一期可能變成 S_{ur} ， S_{um} ， S_{ul} ， S_{dr} ， S_{dm} 和 S_{dl} 6個股價值，而每個節點可能發生 ur ， um ， ul ， dr ， dm ，或 dl 波動度之次數為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f ，故波動度可表示為 $[e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^a$ ， $[e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^b$ ， $[e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^c$ ， $[e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^d$ ， $[e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^e$ ， $[e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^f$ 。

針對不同期間之每個節點可能股價值做以下結論:

1. $S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^a [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^b$;
2. $S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^a [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^c$;
3. $S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^a [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^d$;
4. $S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^a [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^e$;
5. $S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^a [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^f$;
6. $S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^b [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^c$;
7. $S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^b [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^d$;
8. $S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^b [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^e$;
9. $S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^b [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^f$;
10. $S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^c [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^d$;
11. $S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^c [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^e$;
12. $S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^c [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^f$;
13. $S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^d [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^e$;
14. $S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^d [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^f$;
15. $S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^e [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^f$ 。

詳細說明和股價報酬波動度之可能情況請參見附錄七。

3.4 變數和資料描述

以實際之例子來解釋模糊二項式選擇權評價模型，其變數和資料之特性描述於下。資料來源來自於 DataStream S&P500 股價指數選擇權，標的股票為 S&P500 股價指數選擇權，樣本資料包括從 2003 年 7 月 28 日至 2004 年 3 月 15 日每天之收盤價。在發行日當天(2003/7/28)，S&P500 股價指數為 996.52，履約價為 1100，買權價格為 16.4。茲以分析期間三個月為一單位，並以美國三個月期之國庫券利率來表示無風險利率，其中最低、平均及最高之無風險利率分別為 0.85%、0.915%、0.98%。另外，根據 Canina and Figlewski (1993) 檢驗美國 S&P100 指數選擇權市場，其認為隱含波動度與真正波動度無關，實證結果亦發現歷史波動度比隱含波動度具有較好之波動度預測能力。而關於歷史波動度預測水平期間選取方面，建議以半年或較短之估計期間、Galai (1983) 建議選取 30 天之預測水平期間。另根據 Kroner (1996) 當預測水平期間較小，在高波動性之樣本中較能捕捉到波動性群聚之現象，故本研究使用最近 30 至 60 天之歷史資料來估計每天股價收盤價報酬率之波動度為 11.4181%。

3.5 股票價格之模糊樹

以 CBOT (Chicago Board of Trade) 歷史資料來估計股價報酬率之波動度並使用無風險利率 (R_l, R_m, R_h) 表示最低、平均和最高之折現率。其中 $\sigma(1+\rho)$ 、 σ 和 $\sigma(1-\rho)$ 分別為向上波動之最大值、平均值及最小值，所以 $ur = [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]$ ， $um = [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]$ 和 $ul = [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]$ 是向上波動之程度，而 $S_{ur} (=ur \cdot S)$ ， $S_{um} (=um \cdot S)$ 和 $S_{ul} (=ul \cdot S)$ 分別為股價向上波動之極右值、平均值與極左值。換句話說， $-\sigma(1-\rho)$ 、 $-\sigma$ 和 $-\sigma(1+\rho)$ 是向下波動之最大值、平均值及最小值，所以 $dr = [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]$ ， $dm = [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]$ 和 $dl = [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]$ 是向下波動之程度，而 $S_{dr} (=dr \cdot S)$ ， $S_{dm} (=dm \cdot S)$ 和 $S_{dl} (=dl \cdot S)$ 分別為股價向下波動之極右值、平均值與極左值。

例如，當 $\rho=5\%$ ，從 $t=1$ 至 $t=2$ 期， σ 剛開始的波動度為 1.05σ 和 0.95σ 為向上波動之最大值和最小值，而 -0.95σ 和 -1.05σ 為向下波動之最大值和最小值。然後，我們令「 u 」和「 d 」分別代表向上和向下之波動。

從歷史資料(2004/1/1-2004/3/15)估計股價報酬率之波動度為 11.4181% ，將其予以模糊化後，可得向上波動之股價 S_{ur} ， S_{um} ， S_{ul} 和向下波動之股價 S_{dr} ， S_{dm} ， S_{dl} 。

S_{ur} ：股價向上波動之極右值，其中 $ur = e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ，所以

$$S_{ur} = 996.52 \times e^{1.05 \times \sigma \sqrt{0.3}} = 1064.1542.$$

S_{ul} ：股價向上波動之極左值，其中 $ul = e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ，所以

$$S_{ul} = 996.52 \times e^{0.95 \times \sigma \sqrt{0.3}} = 1057.5198.$$

故向上波動之股價區間介於 1064.1542 和 1057.5198 之間。

S_{dr} ：股價向下波動之極右值，其中 $dr = e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ，所以

$$S_{dr} = 996.52 \times e^{-0.95 \times \sigma \sqrt{0.3}} = 939.0388.$$

S_{dl} ：股價向下波動之極左值，其中 $dl = e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ，所以

$$S_{dl} = 996.52 \times e^{-1.05 \times \sigma \sqrt{0.3}} = 933.1844.$$

故向下波動之股價區間介於 939.0388 和 933.1844 之間。

因為向上和向下波動度各有三種情況，所以在 $t=2$ 期時有 6 個節點，亦即可產生 6 個股價指數，而 $t=3$ 期，則有 36 個節點，合併相同值後可產生 15 個不同的股價指數，茲將 $t=1$ 至 $t=3$ 期股價指數之變動情形描述於圖3-5。

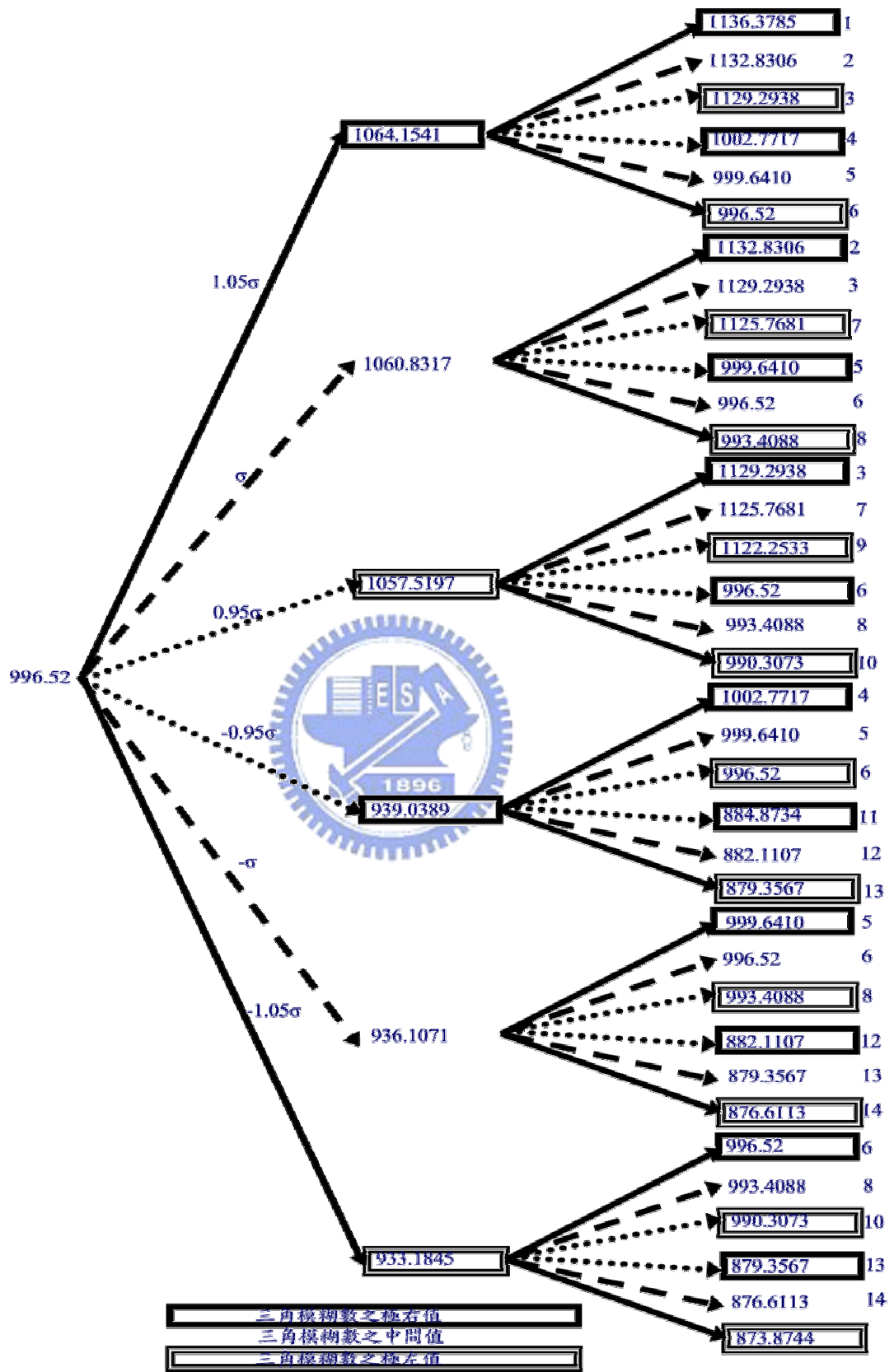


圖 3-5 股票價格之模糊樹

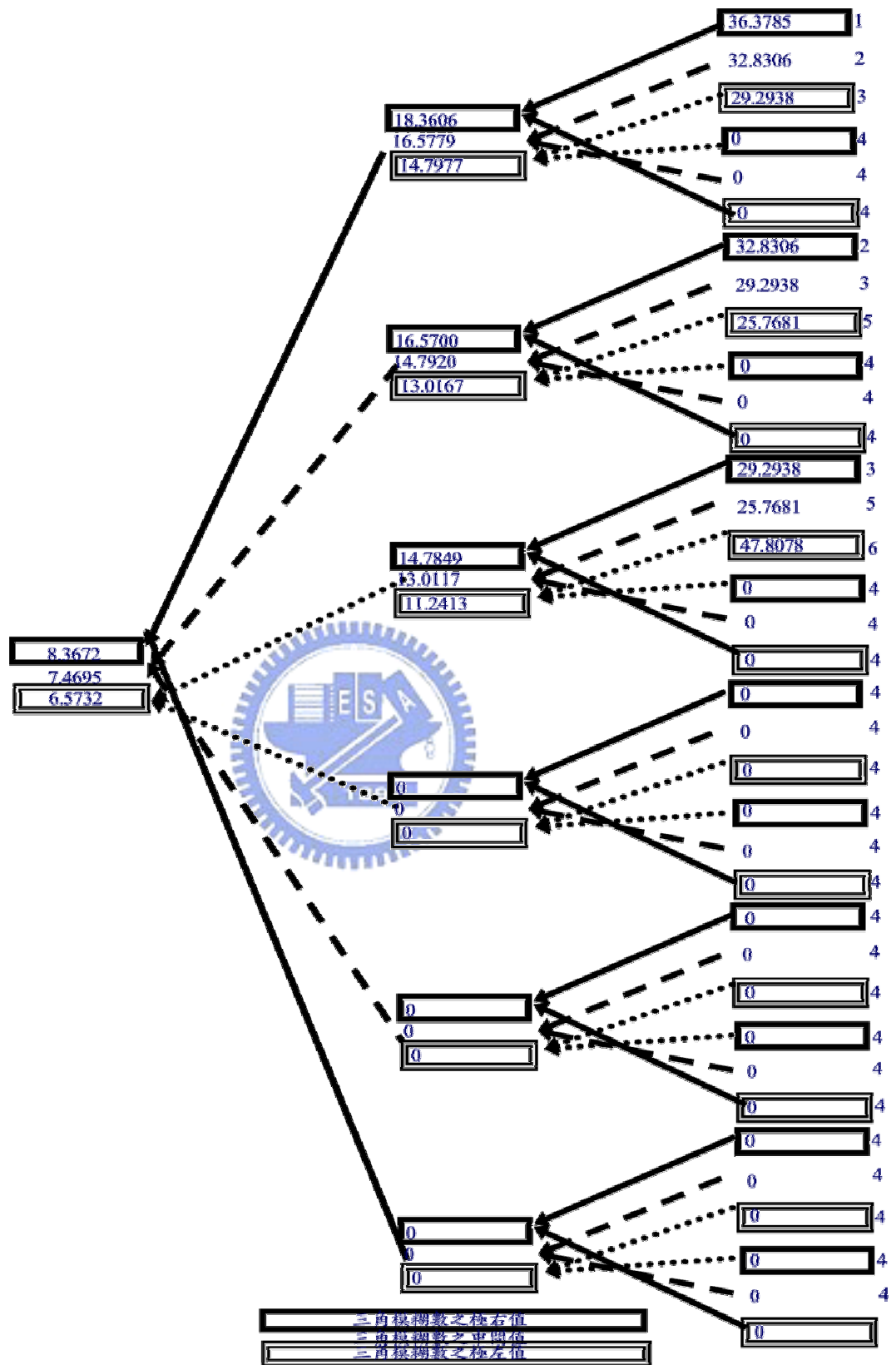
3.6 買權價格之模糊樹

將 $t=0.6$ (約 7 個月)之股價減去履約價可算出 $t=0.6$ 之買權價格。其中，
 $C_{ur} = \max(S_{ur} - K, 0)$ ， $C_{um} = \max(S_{um} - K, 0)$ ， $C_{ul} = \max(S_{ul} - K, 0)$ ，
 $C_{dr} = \max(S_{dr} - K, 0)$ ， $C_{dm} = \max(S_{dm} - K, 0)$ ， $C_{dl} = \max(S_{dl} - K, 0)$ 。接下來，將
 無風險利率之模糊數及(3.6)、(3.7)、(3.8)式代入(3.9)、(3.10)、(3.11)式中，可得
 每個節點之最適買權價格區間。例如， $t=0.6$ 時 C_{um} 為 $\max(1132.8306-$
 $1100, 0)=32.8306$ ， C_{dm} 為 $\max(999.6410-1100, 0)=0$ ，而
 $C_m = e^{-R_m \Delta t} [P_m \cdot C_{um} + (1-P_m) \cdot C_{dm}]$ ，故 $t=0.6$ 之 $C_m = 16.5779$ 。另外， C_{ur} 在 $t=0.6$ 為
 18.3606 ， C_{dl} 為 0，故 $t=0.3$ 之 $C_u = 8.3672$ 。詳細情形請參照圖 3-6。

同樣的方法，我們可得到每一期買權價格之模糊區間值，為了處理買權價格
 之敏感度分析，我們將其分為四期，每一期為 3 至 4 個月 ($t=0.3$)。模糊區間之敏
 感度分別為 5%，10%，15% 和 20%，其買權價格之變化情形如表 3-1 所示。

表 3-1 模糊二項式模型之買權價格區間和敏感度分析

敏感度分 析 (ρ)	不同期間之買權價格				
	1 ($t=0.3$)	2 ($t=0.6$)	到 期 值 ($t=0.664$)	3 ($t=0.9$)	4 ($t=1.2$)
5%	8.3672	13.6326	14.9518	19.8162	25.4562
	7.4695	13.1544	14.4258	19.1139	24.9621
	6.5731	12.6761	13.8999	18.4125	24.4680
10%	9.2375	14.0695	15.4336	20.4637	25.8915
	7.4684	13.1553	14.4260	19.1115	24.9640
	5.6975	12.2425	13.4191	17.7580	24.0378
15%	10.1050	14.5087	15.9258	21.1513	26.3689
	7.4658	13.1573	14.4305	19.1253	24.9732
	4.8169	11.8104	12.9668	17.2311	23.6359
20%	10.9702	14.9881	16.4625	21.8991	27.0043
	7.4615	13.1605	14.4523	19.2159	25.0511
	3.9302	11.3984	12.5701	16.8905	23.3409



3.7 一般與模糊二項式選擇權評價模型之比較

為了比較一般二項式選擇權評價模型與模糊二項式選擇權評價模型之差異。茲將不同期間之一般二項式選擇權評價模型之買權價格描述如表 3-2 所示。

表 3-2 CRR 模型之買權價格變化與敏感度分析

敏感度分 析 (ρ)	不同期間之買權價格				
	1 ($t=0.3$)	2 ($t=0.6$)	到 期 值 ($t=0.664$)	3 ($t=0.9$)	4 ($t=1.2$)
5%	9.0946	14.1880	15.7130	21.3362	26.6044
10%	10.8769	15.6178	17.4354	24.1379	29.0729
15%	12.6704	17.0609	19.1735	26.9636	31.5690
20%	14.4751	18.5176	20.9274	29.8135	34.0930

從表 3-1 與 3-2 可知，買權價格之三角模糊數隨著不同期間之敏感度變化，中間值皆趨於穩定，變化不大。但是當敏感度變大時，此時模糊區間也跟著變大。從表 3-1 可得買權價格之敏感度愈小，買權價格也愈小。換句話說，買權價格敏感度愈大則其區間範圍也愈大。在這個例子中，當敏感度變大時，模糊二項式選擇權評價模型比一般二項式選擇權評價模型還要準確，也比較接近實際值 16.4。而模糊二項式選擇權評價模型所求算買權價格之極右值皆低於 CRR 模型所求算之買權價格，且其節點較多，故隨著期間之拉長，模糊二項式模型會較 CRR 模型收斂更快。

應用模糊集合理論於一般 CRR 模型後，我們可得到選擇權到期時，在 $\rho=5\%$ 之下，其三角模糊數介於 13.9 和 14.95 之間，而一般 CRR 模型所求算之買權價格為 15.713。此二個模型所求算之買權價格皆低於真實市價 16.4。這是因為系統偏誤介於理論值和市價之間。所以實務上，在敏感度不大的情況下，選擇權之市值通常高於理論值 (Black, 1975 and Merton, 1976)。當敏感度變大，我們發現選擇權到期時，在 $\rho=20\%$ 之下，其三角模糊數介於 12.57 和 16.46 之間，但是一般之 CRR 模型為 20.9274。由此可知，模糊二項式模型之區間值包含真實之市場價值 16.4，但是一般 CRR 模型所求算之買權價格卻高於市場價值，所以模糊二項式模

型之買權價格區間比一般 CRR 模型更接近市價，和一般 CRR 模型比較起來，一般 CRR 模型之買權價格值皆高於模糊二項式模型三角模糊數之極右值。

在一般 CRR 模型中，因為投資者之主觀判斷所隱含模糊性之影響是不可避免的。如何形容高或低的語意值，用模糊理論中之三角模糊數描述機率性是較貼切也較簡單的方法，因為使用統計方法的機率值必須具有很大的樣本數，也必須知道母體之分配情況。用三角模糊數之觀念試圖處理機率性之實際問題，同時較簡單也比較容易理解，因為不確定之觀念常常出現在做決策的資料中，在實際情況下明確值是缺乏的，所以我們無法正確地預測買權價格。且未來充滿著不確定性，所以買權價格無法準確預測，實際上存在著買權價格區間。而模糊二項式模型所求算出之買權價格亦為一區間值，故較符合實際狀況也較貼近實際值，並可提供不同的風險偏好者依本身之風險容忍度作投資選擇。

投資者結合 CRR 模型及模糊集合理論，並根據三角模糊數之極左值及極右值來收集他們的投資組合策略。當市值介於極左和極右值之三角模糊數區間內，風險愛好者會買更多，然而風險趨避者比風險中立者買較少。當市值低於三角模糊數之極左值，一個風險趨避者會買更多。因此，這個研究結果能提供不同風險偏好之投資者更多的選擇機會。



3.8 討論

截至目前為止，關於選擇權訂價，有許多學者已經做了實質的努力並有了更進一步的成果。實證分析顯示，B-S 模型，似乎很難處理在投資過程中所存在的不確定性問題。現實生活中，做決策的問題是複雜的，有很多因素會影響選擇權的價格，不單單只是幾個變數就可說明，也要考慮人為因素與情境分析。使用模糊機率能夠提供更有彈性，而不是僵化的價格。近年來，也有不少學者將模糊理論開始用在選擇權的定價上。例如，Simonelli (1991) 結合模糊數及 Von Neumann and Morgenstern (1994) 效用理論來建立模糊隨機模型。Zmeskal (2001, 2005) 提出模糊隨機選擇權訂價模型來評估一個公司的股價，其過程如同買權一般，透過線性梯形模糊數、模糊隨機方法解決風險和模糊性之問題。Carlsson and Fuller (2003) 介紹一個實質選擇權之規則，用梯形模糊數估計預期現金流量和期望成本之現值，如此可決定最適之履約時間。Yoshida (2003) 介紹模糊邏輯特到隨機財務模型中，說明系統中隨機性和模糊性及一個人之主觀判斷。然而，他們並沒有討論

B-S 模型和市場價格之偏差。許多財務學者已經使用實證的資料去驗證 B-S 模型之正確性。我們的結果證明模糊選擇權與傳統 B-S 模型存在主觀上偏差之情況。

本研究採用模糊理論來衡量實務上選擇權分析之模糊性，所以我們使用模糊的觀念在不確定的參數，包括無風險利率和股價報酬波動性來導出模糊選擇權評價模型，我們的結果證明了 B-S 模型之偏差性，這個偏差提供一個機會給投資者買進或賣出的機會，同時提供更多的資訊給投資者做投資決策。另外我們同時也提供一個買權價格的區間值，提供給不同的風險偏好者更多樣化的投資選擇。基於風險與報酬相互抵換，高風險高報酬，當買權價格愈趨近極右值時，此時風險愛好者會買更多，因為他認為較高的買權價格，所隱含之波動度也愈大，具有更多的套利空間。當買權價格趨近極左值時，風險趨避者會買更多，因為即使損失，也不致損失太多。而風險中立者會傾向購買中間值，承受適當的風險並賺取適當的報酬。所以，如果買權價格低於我們所求算的三角模糊數極左值，我們會買更多，因為此時它比較便宜。如果買權價格高於三角模糊數之極右值，我們就不會去買，但如果有人要買，我們就賣給他，從中賺取較多的報酬。如果買權價格落在極左值與極右值間，則應看我們之風險偏好及歸屬函數而定。



第四章 總結

4.1 結論

選擇權理論價格與市價差異頗大，其原因可能是券商之避險成本、稀薄交易量與 B-S 選擇權評價模型對於標準差之假設不合理等。採用歷史波動度下，對於選擇權市場價格平均而言呈現低估之現象，且定價誤差顯著，高估到期日較遠的權證，低估到期日較近的權證；高估偏向價內程度的權證而低估波動性較小的權證。針對 B-S 模型、CRR 模型及模糊二項式三種模型之比較，茲以 S&P500 股價指數選擇權為例，於價外($S < K$)時，其市價皆比 B-S 模型與 CRR 模型所求算之理論價還高，權證之價值有被低估之現象。大致而言，B-S 模型所求出之理論價格比 CRR 模型及模糊二項式模型所求算之理論價格還低，且誤差較大。而模糊二項式模型所求算之理論價格在敏感度較高之情況下，比一般 CRR 模型更接近實際值，且也較其收斂，同時又可創造出一個買權價格區間，提供不同風險偏好者做投資選擇，其三種模型之買權價格比較如表 4-1 所示：

表 4-1 B-S 模型、CRR 模型，及模糊二項式模型之買權價格分析

敏感度分析 (ρ)	買權價格到期值		
	B-S 模型	CRR 模型	模糊二項式模型
5%	9.3494	15.7130	14.9518
			14.4258
10%	10.6086	17.4354	13.8999
			15.4336
15%	11.9155	19.1735	14.4260
			13.4191
20%	13.2657	20.9274	15.9258
			14.4305
			12.9668
			16.4625
			14.4523
			12.5701

評價各種模型之目的不在於比較其優劣，而在評估何種情況下該使用何種技術最好?且各種模型應如何相互合作，以創造出相輔相成之績效，仍需要投資者做明智之抉擇。

4.2 未來研究方向

財務問題之需求環境主要可分為確定需求及不確定需求兩大類型，大部分之研究皆針對前種環境，有關不確定需求環境之研究較少。在不確定需求環境下進行投資，希望藉由本研究之努力，能對實務環境中之模糊投資問題有較完整之探討，除提供實務參考應用外，並可作為未來相關研究之基礎。另外讀者也可針對以下之主題從事後續之研究:

- 1、因為目前使用資料驅動型模型於選擇權訂價之研究還很稀少，故可考慮如類神經網路、遺傳規畫法、遺傳演算法等資料驅動型理論做研究，來處理不同樣本，如期貨選擇權、貨幣選擇權、可轉換公司債等衍生性金融商品之訂價等，而價格波動度及無風險利率亦是未來之研究重點。
- 2、模糊環境下所採取之四項維度，不僅可用於分析不確定環境下之選擇權評價分析，同時也可用於其他研究主題，如成本分析、存貨分析等。
- 3、模糊集合理論於各種領域之應用已相當普遍，其在財務上之應用研究也漸增多，但在選擇權方面之研究卻很匱乏。考慮投資環境之不確定性，應用模糊集合理論於投資問題上，實具有相當研究之價值。
- 4、實務投資環境中之模糊本質如何用隸屬函數表示，以作為模糊模式之輸入，以及求解後之模糊輸出結果應如何解釋以轉化為投資決策，是應用模糊集合理論於投資實務中之兩項課題，這方面的研究有待加強。
- 5、本研究加入模糊集合理論來處理 CRR 模型，其中採用的是三角模糊數，未來也可針對此採用不同之模糊數，如梯形模糊數，其他模糊數等來處理模糊區間問題。
- 6、為了簡化分析，我們使用靜態的觀點。眾所皆知，人類的想法和看法是動態的，如何結合動態系統和模糊選擇權評價模型有待更進一步的研究和探索。未來我們會發表這方面的研究成果，相關的書籍和進一步的探討可以參考 Yu (1990)。

在做投資決策時，要考慮的因素非常多，不單是客觀的變數，同時要考慮主觀的因素，例如人的看法及情境分析等。本研究同時將客觀及主觀的因素考慮進來做分析，期望能提供投資者更有彈性的買權價格，並依自己的風險偏好及喜好去做投資決策。當然，有些重要因素本研究尚未考量進來，如交易成本、動態的觀點等，未來我們還是繼續會朝這方面研究，希望藉著我們的努力，漸漸將投資時不明確、不確定的情況，逐步明朗化，這也是我們日後努力的方向。

參考文獻

1. Amilon, Henrik (2003), "A Neural Network versus Black-Scholes: A Comparison of Pricing and Hedging Performances," *Journal of Forecasting*, 22(4): 317-335.
2. Amin, K. and Jarrow, R. A. (1992), "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest rate Economy," *Mathematical Finance*, 2(4): 217-237.
3. Amin, K. (1993), "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time," *Journal of Finance*, 48(5): 1833-1863.
4. Amin, K. and Ng, V. (1993), "ARCH Processes and Option Valuation," Working Paper, University of Michigan.
5. Amin, K. and Ng, V. (1993), "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility," *Journal of Finance*, 48(3): 881-910.
6. Asai, K., Tanaka, H. and Okuda, T. (1975), "Decision Making and Goal programming in a Fuzzy Environment," In Zadeh et al. (eds), *Fuzzy sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process*, pp.257-277, Academic, New York.
7. Ball, C. A., and Torous, W. N. (1985), "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing," *Journal of Finance*, 40(1): 155-173.
8. Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z. (1997), "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52(5): 2003-2049.
9. Barone-Adesi, G. and Whaley, R. E. (1986), "The Valuation of American Call Options and the Expected Ex-dividend Stock Price Decline," *Journal of Financial Economics*, 17(1): 91-111.
10. Barone-Adesi, G. and Whaley, R. E. (1987), "Efficient Analytic Approximation of American Option Values," *Journal of Finance*, 42(2): 301-320.

11. Barucci, E., Cherubini U. and Landi L. (1995), "Neural Networks for Contingent Claim Pricing via the Galerkin Method," paper presented at the First International Conference of the Society for Computational Economics, IC2 Institute, Austin, Texas, May 21-24, 1995.
12. Bates, D. S. (1996), "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options," *Review of Financial Studies*, 9(1): 69-107.
13. Bauwens, Luc and Lubrano, Michel (2002), "Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models," *Journal of Empirical Finance*, 9(3): 321-342.
14. Bellman, R. E. and Zadeh, L. A. (1970), "Decision-Making in a Fuzzy Environment," *Management Science*, 17(4): 141-164.
15. Bjork, Tomas and Christensen, Bent Jesper (1999), "Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves" *Mathematical Finance*, 9(4): 323-348.
16. Black, F. (1975), "Fact and Fantasy in the Use of Option," *Financial Analysts Journal*, 31(1): 36-41 and 61-72.
17. Black, F. and Scholes, M. (1972), "The Valuation of Option Contracts and A Test of Market Efficiency," *Journal of Finance*, 27(2): 399-417.
18. Black, F. and Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.
19. Black, Fischer, Derman, Emanuel, Toy, William. (1990), "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal*. Charlottesville, 46(1): 33-39.
20. Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31(2): 307-327.
21. Bortolan, G. and Degani, R. (1985), "A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets," *Fuzzy Sets and Systems*, 15(1):1-19.
22. Breeden, D. T. (1979), "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics Amsterdam*, 7(3): 265.
23. Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1977), "The Valuation of American Put Options," *Journal of Finance*, 32(2): 449-462.
24. Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1978), "Finite Difference Methods and Jump Process Arising in the Pricing of Contingent Claims: a Synthesis," *Journal of Finance & Quantitative Analysis*, 13(3): 461-474.

25. Brennan, M. (1979), "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models," *Journal of Finance*, 34(1): 53-68.
26. Brown, Christine A. and Robinson, David M. (2002), "Skewness and Kurtosis Implied by Option Prices: A Correction," *Journal of Financial Research*, 25(2): 279-282.
27. Carlsson, C. Fuller, R. (2003), "A fuzzy Approach to Real Option Valuation," *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2): 297-312.
28. Charles, J. C., Su, Tie (1997), "Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Option Prices," *Journal of Derivatives*, 4(4): 8-19.
29. Chen, L. (1997), "Interest Rate Dynamics and Derivatives Pricing," paper presented at the Third International Conference on Computing in Economics and Finance, Stanford, June30-July2, 1997, 92.
30. Chen, S.H. (1985), Ranking Fuzzy Numbers with Maximizing Set and Minimizing Set. *Fuzzy Sets and Systems*, 17(2), 113-130.
31. Chen, S.-H. and Lee, W.C. (1997a), "Option Pricing with Genetic Algorithms: A First Report," *Proceedings of The Second World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation*, Xian Jiaotong University, China, 1683-1688.
32. Chen, S.-H., Lee, W.-C. and Yeh, C.H. (1998b), "Hedging Derivative Securities with Genetic Programming," Paper Presented on The International Workshop on Advanced Black-Box Techniques for Nonlinear Modeling: Theory and Applications, July 8-10, 1998.
33. Choi, S. and Wohar, M. E. (1994), "S&P 500 Index Option Prices and the Black-Scholes Option Pricing Model," *Applied Financial Economics*, 4(4): 249-263.
34. Corrado, Charles J, and Su, Tie (1996), "Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices," *The Journal of Financial Research Columbia*: 19(2): 175-192.
35. Courtadon, G. (1982), "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(5): 697-703.
36. Cox, J. C. and Ross, S. A. (1975), "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusion," Working paper, Stanford University.
37. Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976), "A Survey of Some New Results In Financial Option Pricing Theory," *Journal of Finance*, 31(2): 145-166.

38. Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3(4): 145-166.
39. Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7(3): 229-263.
40. Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1985a), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, 53(2): 363-384.
41. Dothan, L. U. (1978), "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics Amsterdam*, 6(1): 59.
42. Duan, J. C. (1995), "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5(1): 13-32.
43. Duan, J. C. (1997), "Augmented GARCH (p, q) Process and Its Diffusion Limit," *Journal of Econometrics*, 79(1): 97-127.
44. Dubois D. and Prade H. (1978), "Operations on Fuzzy Numbers," *International Journal of Systems Science*, 9(3): 613-626.
45. Dubois D. and Prade H. (1980), *Fuzzy Sets and Systems*. Academic Press, New York.
46. Engle, R. F., and Mustafa, C. (1992), "Implied ARCH Models from Option Prices," *Journal of Econometrics*, 52(1-2): 289-311.
47. Engle, R. F., and Granger, C.W.J. (2003), "Time-Series Econometrics: Cointegration and Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel*.
48. Finnerty, J. E. (1978), "The Chicago Boards Options Exchange and Market Efficiency," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(1): 29-38.
49. Freedman, R.S. and R.D. Giorgio (1996), "New Computational Architecture for Pricing Derivatives," *Proceedings of the IEEE/IAFE 1996 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering*, 14-19.
50. Garman, M. B. and Klass, M. J. (1980), "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data," *Journal of Business*, 53(1): 67-78.
51. Geske, R. (1979), "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7(1): 63-81.
52. Geske, R. and Johnson, H. E. (1984), "The American Put Valued Analytically," *Journal of Finance*, 39(5):1511-1524.
53. Gultekin, N.B., Rogalski, R.J. and Tinic, S.M. (1982), "Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results," *Financial Management*, 11(1): 58-70.

54. Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*," 60(1): 77-105.
55. Heston, S. L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option," *Review of Financial Studies*, 6(2): 327-343.
56. Hilliard, J. E., Schwartz, A. L. and Tucker, A. L. (1996), "Bivariate Binomial Options Pricing with Generalized Interest rate Processes," *The Journal of Financial Research Columbia*, 19(4): 585-602.
57. Ho, Thomas S. Y. and Lee, Sang-Bin (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *The Journal of Finance Cambridge*, 41(5): 1011-1029.
58. Hull, J. (1998), *Introduction to Futures and Options Markets*, Prentice Hall International Inc.
59. Hull, J. and White, A. (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42(2): 281-300.
60. Hull, J. and White, A. (1990), "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3(4): 573-592.
61. Hull, J. and White, A. (1993), "One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities," *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, 28(2): 235-54.
62. Hull, J. C. (1993), *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Prentice-Hall.
63. Hutchinson, James M., Lo, Andrew, W. and Poggio, Tomaso (1994), "A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities via Learning Networks," *The Journal of Finance, Cambridge*, 49(3): 851-889.
64. Kaufmann, A. and Gupta, M. M. (1991), "Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Application," Van Nostrand Reinhold, New York.
65. Kenneth, K. F. (1996), "Creating and Using Volatility Forecasts," *Journal of Derivatives Quarterly*, 13(2): 39-53.
66. Kremer, J. W., and Roenfeldt, R. L. (1992), "Warrant Pricing: Jump-Diffusion vs. Black-Scholes," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(3): 255-271.
67. Lajbcygier, P.R. and Connor J.T. (1997), "Improved Option Pricing Using Bootstrap Methods," *IEEE ICNN97*, 2193-2197.

68. Langetieg, T. C. (1980), "A Multivariate Model of the Term Structure," *The Journal of Finance* Cambridge, 35(1): 71.
69. Lauterbach, B. and Schultz, P. (1990), "Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives," *Journal of Finance*, 45(4): 1181-1209.
70. Lee, J.C., Lee, C. F. and Wei, K.C.J. (1991), "Binomial Option Pricing with Stochastic Parameters: A Beta Distribution Approach" *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1(3): 435-448.
71. Lee, W.-C. (1997a), "Pricing Derivative Securities via Galerkin Method," working paper.
72. Lee, W.-C. (1997b), "Option Pricing with Neural Networks-A Survey," working paper.
73. Liang, Gin-Shuh, Wang, Mao-Jiun J. (1994), Personnel selection using fuzzy MCDM algorithm, *European Journal of Operational Research*. Amsterdam, 78(1): 22-33.
74. Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (1992), "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model.," *Journal of Finance*, 47 (4): 1259-1282.
75. Jordan, J. V., Seale, W. E., McCabe, N. C., and Kenyon, D. E. (1987), "Transactions Data Tests of the Black-Scholes Model for Soybean Future Options," *Journal of Futures Markets*, 7(5): 535-554.
76. Jorion, P. (1988), "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets," *Review of Financial Studies*, 1(4): 427-445.
77. Johnson, H. and Shanno, D. (1987), "Option Pricing When the Variance Is Changing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(2): 143-153.
78. Macmillan, L.W. (1986), "Analytic Approximation for the American Put Option," *Advances in Futures and Options Research*, 1(2):119-139.
79. Merton, R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing," *The Bell Journal of Economics*, 4(1): 141-183.
80. MacBeth, J. D. and Merville, L. J. (1979), "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model," *Journal of Finance*, 34(5): 1173-1186.
81. Merton, R.C. (1976), "Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3(2): 125-144.

82. Molle, J.D. and Fernando, Z. (1996), "Problems with Monte Carlo Simulation in the Pricing of Contingent Claims," Proceedings of the IEEE/IAFE 1996 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, 114-119.
83. Noe, T.H. and J. Wang (1997), "The Self-Evolving Logic of Financial Claim Prices," Paper Presented in the Third International Conference on Computing in Economics and Finance, Stanford, California, U.S.A. June30-July2, 1997.
84. Opricovic, S. and Tzeng, G.H. (2003), "Defuzzification within a Multicriteria Decision Model," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 11(5): 635-652.
85. Orlovsky, S. A. (1980), "On Formalization of a General Fuzzy Mathematical Problem," Fuzzy sets and Systems, 3(3): 311-321.
86. Parkinson, M. (1980), "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return," Journal of Business, 53(1): 61-65.
87. Paulson, A., Scacchia, J.H. and Goldenberg, D.H. (1997), "Skewness and Kurtosis in Pricing European and American Options," Proceeding of the IEEE/IAFE 1997 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, IEEE Press, 171-181.
88. Raymar, S. B. and Zwecher, M. J. (1997), "Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks," Journal of Derivatives New York, 5(1): 7-23.
89. Rendleman, R. J. and Bartter, B. J. (1980), "The Pricing of Options on Debt Securities," Journal of Financial & Quantitative Analysis, 15(1): 11-24.
90. Richard, T. and Robert, R. (1978), "Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia, Schmalensee," Journal of Finance, 33(1): 129-147.
91. Ritchken, P. and Trevor, R. (1999), "Pricing Options under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," Journal of Finance, 54(1): 377-402.
92. Romano, M. and Touzi, N. (1997), "Contingent Claims and Market Completeness in a Stochastic Volatility Model," Mathematical Finance, 7(4): 399-412.
93. Rubinstein, M. (1983), "Displaced Diffusion Option Pricing," Journal of Finance, 38(1): 213-217.
94. Rubinstein, M. (1985), "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through August 31, 1978," Journal of Finance, 40(2): 455-480.

95. Rabinovitch, R. (1989), "Pricing Stock and Bond Options When the Default-Free Rate is Stochastic," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(4): 447-457.
96. Sabbatini, M. and Linton, O. (1998), "A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices," *International Journal of Forecasting*, 14(2): 199-213.
97. Schaefer, S. M. and Schwartz, E. S. (1984), "A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* Seattle, 19(4): 413-424.
98. Scott, L. (1987), "Option Pricing When Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and An Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 22(4): 419-438.
99. Scott, L. O. (1997), "Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods," *Mathematical Finance*, 7(4): 413-426.
100. Simonelli, M. R. (1991), "Fuzziness in Valuing Financial Instruments by Certainty Equivalents," *European Journal of Operational Research*, 135(2): 296-302.
101. Stein, E. M. and Stein, J. C. (1991), "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach," *Review of Financial Studies*, 4(4): 727-752.
102. Tanaka, H. and Asai, K. (1984), "Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, 13(1): 1-10.
103. Trigueros, J. (1997), "A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities via Genetic Regression," *Proceedings of the IEEE/IAFE 1997 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering*, IEEE Press, 1-7.
104. Gifford, F. and Oldrich A. V. (1997), "A multidimensional Framework for Risk Analysis," *Financial Analysts Journal* Charlottesville, 53(4): 51-57.
105. Von Neumann, J. and Morgenstern, O., (1994) "Theory of Games and Economic Behavior," Princeton University Press, Chichester, West Sussex.
106. Watson, S. R., Weiss, J. J. and Donnelly, J. L. (1979), "Fuzzy Decision Analysis," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(1): 1-9.
107. Wiggins, J.B. (1987), "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Evidence," *Journal of Financial Economics*, 19(2): 351-372.

108. Whaley, R. E. (1982), "Valuation of American Call Options on Dividend Paying Stocks: Empirical Tests," *Journal of Financial Economics*, 10(1): 29-58.
109. Yoshida, Y. (2003), "The valuation of European options in uncertain environment," *European Journal of Operational Research*, 145(1): 221-229.
110. Yu, P. L. (1990), *Forming winning strategies: an integrated theory of habitual domains*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
111. Zadeh, L. A. (1965), "Fuzzy Sets," *Information and Control*, 8(3): 338-353.
112. Zadeh, L. A. (1968), "Probability Measure of Fuzzy Events, *J. Math.*" *Anal. Appl.* 23(3): 421-427.
113. Zadeh, L. A. (1972), "A Fuzzy Set Theoretical Interpretation of Linguistic Hedges," *Journal of Cybernetics*, 2(1): 4-34.
114. Yung, Haynes H.M. and Zhang, Hua (2003), "An Empirical Investigation of the GARCH Option Pricing Model: Hedging Performance," *J. Futures Mark.*, 23(12): 1191-1207.
115. Zapart, Christopher (2002), "Stochastic Volatility Options Pricing with Wavelets and Artificial Neural Networks," *Quantitative Finance*, 2(6): 487-495.
116. Zapart, Christopher A. (2003), "Beyond Black-Scholes: A Neural Networks-Based Approach to Options Pricing," *International Journal of Theoretical & Applied Finance*, 6(5): 469-489.
117. Zhang, X. L. (1997), "Numerical analysis of American option pricing in a jump-diffusion model," *Mathematics of Operations Research Linthicum*, 22(3): 668-690.
118. Zimmermann, H.J. (1991), *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 2nd ed., Kluwer Academic Publishers.
119. Zmeskal, Z. (2001), "Application of the Fuzzy-stochastic Methodology to Appraising the Firm Value as a European Call Option," *European Journal of Operational Research*, 135(2): 303-310.
120. Zmeskal, Z. (2005), "Value at Risk Methodology under Soft Conditions (Fuzzy-Stochastic Approach)," *European Journal of Operational Research*, 161(2): 337-347.

附 錄 一

命題 2.1 證明

當 \tilde{M}_j , \tilde{F}_k 存在下，模糊選擇權評價模式之 $R_t(\tilde{F}_k)$ 依(2.11)及(2.14)式可得：

$$\begin{aligned} R_t(\tilde{F}_k) &= \sum_{i=1}^I R_t(S_i) \cdot \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m R_t(S_i) \cdot (\mu_{\tilde{F}_k}(S_i))^2 \cdot (P(S_i))^2 \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \end{aligned}$$

令 $\mu_{\tilde{F}_k}(S_i) = 1$, $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r) = 1$ 代入上式得 R_t ：

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m R_t(S_i) \cdot (P(S_i))^2 \cdot P(x_r | S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \\ R_t - R_t(\tilde{F}_k) &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m R_t(S_i) \cdot (P(S_i))^2 \cdot P(x_r | S_i) \left[1 - (\mu_{\tilde{F}_k}(S_i))^2 \right] \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \end{aligned}$$

因 $R_t(S_i) = S_i \cdot [1 + \sum_{r=1}^m x_r \cdot P(x_r | S_i)] > 0$,

故 $R_t(S_i) > 0$, $\mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \rightarrow [0, 1]$, $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \rightarrow [0, 1]$, $1 - (\mu_{\tilde{F}_k}(S_i))^2 \geq 0$,

所以 $R_t - R_t(\tilde{F}_k) \geq 0$

附 錄 二

命題 2.2 證明

當 \tilde{M}_j , \tilde{F}_k 存在下，模糊選擇權評價模式之 $E(\tilde{\sigma}_t)$ 依(2.12)及(2.14)式可得：

$$\begin{aligned} E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t) &= \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \cdot P(\tilde{F}_k | \tilde{M}_j) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \cdot \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \end{aligned}$$

令 $\mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) = 1$, $\mu_{\tilde{F}_k}(S_i) = 1$, $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r) = 1$ 代入上式，計得 $E(\sigma_t)$ ：

$$E(\sigma_t) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu}) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)}$$

$$E(\sigma_t) - E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu}) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i) [1 - \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot \mu_{\tilde{F}_k}(S_i)] \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)}$$

因 $\sigma_{tu} > 0$, $\mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \rightarrow [0, 1]$, $\mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \rightarrow [0, 1]$, $\mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \rightarrow [0, 1]$,

$1 - \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \geq 0$

所以 $E(\sigma_t) - E_{\tilde{A}}(\tilde{\sigma}_t) \geq 0$

附 錄 三

命題 2.3 證明

假設買權價格處於價內時，即 $S > K$ ，令 $T=1$ 則 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 依(2.15)(2.14)(2.13)

式可得：

$$= S \cdot N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} - K e^{-\sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i)}$$

$$N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)}$$

令 $\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_{tu}) = \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) = \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) = 1$ 代入上式，則 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 轉變成 $C(d_1^* | x_r)$ ：

$$C(d_1^* | x_r) = S \cdot N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})} \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} - K e^{-\sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i)}$$

$$N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu}) \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)}$$

令

$$N(d_1) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})} \right\}$$

$$N(d_2) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu}) \right\}$$

$$N(\tilde{d}_1) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} \right\}$$

$$N(\tilde{d}_2) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \right\}$$

則

$$\begin{aligned}
C(d_i^* | x_r) - C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) &= S \cdot N(d_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} - Ke^{-R} N(d_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \\
&- S \cdot N(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} + Ke^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \cdot \left[S \cdot N(d_1) - Ke^{-R} N(d_2) - S \cdot N(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} + Ke^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \cdot \left\{ S \cdot N(d_1) - Ke^{-R} N(d_2) - \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \cdot [S \cdot N(\tilde{d}_1) - Ke^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2)] \right\}
\end{aligned}$$

其中 $\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \geq 0$, 又因為 $d_1 > d_2$, 且 $S > K$,

故 $S \cdot N(d_1) - Ke^{-R} N(d_2) \geq 0$, $S \cdot N(\tilde{d}_1) - Ke^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2) \geq 0$, 但 $\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \leq 1$

所以, $S \cdot N(d_1) - Ke^{-R} N(d_2) - \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \cdot [S \cdot N(\tilde{d}_1) - Ke^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2)] \geq 0$

最後可得 $C(d_i^* | x_r) \geq C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$

附 錄 四

假設買權價格處於價平時，即 $S=K$ ，令 $T=1$ 則 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 依(2.15)(2.14)(2.13)

式可得：

$$= S \cdot N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} - K e^{-\sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i)}$$

$$N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)}$$

令 $\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_{tu}) = \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) = \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) = 1$ 代入上式，則 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 轉變成 $C(d_l^* | x_r)$ ：

$$C(d_l^* | x_r) = S \cdot N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^I P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})} \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} - K e^{-\sum_{i=1}^I P(S_i) \cdot R_t(S_i)}$$

$$N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^I P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu}) \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)}$$

令

$$N(d_1) = N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^I P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})} \right\}$$

$$N(d_2) = N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^I P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu}) \right\}$$

$$N(\tilde{d}_1) = N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} \right\}$$

$$N(\tilde{d}_2) = N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \right\}$$

因為 $S=K$ ，則

$$\begin{aligned}
C(d_i^* | x_r) - C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j) &= S \cdot N(d_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} - Ke^{-\tilde{R}} N(d_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \\
&- S \cdot N(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} + Ke^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \\
&= S \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \cdot \left[N(d_1) - e^{-R} N(d_2) - N(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} + e^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \right] \\
&= S \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \cdot \left\{ N(d_1) - e^{-R} N(d_2) - \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \cdot [N(\tilde{d}_1) - e^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2)] \right\}
\end{aligned}$$

其中 $\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \geq 0$, 又因為 $d_1 > d_2$,

故 $N(d_1) - e^{-R} N(d_2) \geq 0$, $N(\tilde{d}_1) - e^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2) \geq 0$, 但 $\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \leq 1$

所以, $N(d_1) - e^{-R} N(d_2) - \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \cdot [N(\tilde{d}_1) - e^{-\tilde{R}} N(\tilde{d}_2)] \geq 0$

最後可得 $C(d_i^* | x_r) \geq C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$

附 錄 五

假設買權價格處於價外時，即 $S < K$ ，令 $T=1$ 則 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 依(2.15)(2.14)(2.13)

式可得：

$$= S \cdot N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} - K e^{-\sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i)}$$

$$N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)}$$

令 $\mu_{\tilde{A}_n}(\sigma_{tu}) = \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) = \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) = 1$ 代入上式，則 $C(\tilde{A}_n^* | \tilde{M}_j)$ 轉變成 $C(d_l^* | x_r)$ ：

$$C(d_l^* | x_r) = S \cdot N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})} \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} - K e^{-\sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i)}$$

$$N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu}) \right\} \cdot \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{r=1}^m P(x_r | S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)}$$

令

$$N(d_1) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot P(\sigma_{tu})} \right\}$$

$$N(d_2) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} P(\sigma_{tu}) \right\}$$

$$N(\tilde{d}_1) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} \right\}$$

$$N(\tilde{d}_2) = N \left\{ \frac{\ln(S/K) + \sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot P(S_i) \cdot R_t(S_i) + [\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})]^2 / 2}{\sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu})} - \sum_{u=1}^v \sigma_{tu} \cdot \mu_{\tilde{A}}(\sigma_{tu}) \cdot P(\sigma_{tu}) \right\}$$

則

$$\begin{aligned}
C(d_i^*|x_r) - C(\tilde{A}_n^*|\tilde{M}_j) &= S \cdot N(d_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} - Ke^{-R}N(d_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \\
&- S \cdot N(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} + Ke^{-\tilde{R}}N(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r) \cdot P(x_r)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \cdot \left[S \cdot N(d_1) - Ke^{-R}N(d_2) - S \cdot N(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} + Ke^{-\tilde{R}}N(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \cdot \left\{ S \cdot N(d_1) - Ke^{-R}N(d_2) - \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \cdot [S \cdot N(\tilde{d}_1) - Ke^{-\tilde{R}}N(\tilde{d}_2)] \right\}
\end{aligned}$$

其中 $\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m P(x_r|S_i) \cdot P(S_i)}{\sum_{r=1}^m P(x_r)} \geq 0$, 雖然 $d_1 > d_2$, 但 $S < K$ 的程度大於 $d_1 > d_2$,

故 $S \cdot N(d_1) - Ke^{-R}N(d_2) \leq 0$, $S \cdot N(\tilde{d}_1) - Ke^{-\tilde{R}}N(\tilde{d}_2) \leq 0$, 但 $\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \leq 1$

所以, $S \cdot N(d_1) - Ke^{-R}N(d_2) - \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{F}_k}(S_i) \cdot \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)}{\sum_{r=1}^m \mu_{\tilde{M}_j}(x_r)} \cdot [S \cdot N(\tilde{d}_1) - Ke^{-\tilde{R}}N(\tilde{d}_2)] \leq 0$

最後可得 $C(d_i^*|x_r) \leq C(\tilde{A}_n^*|\tilde{M}_j)$

附 錄 六

茲使用第三章的例子來解釋模糊選擇權評價模型並證明第二章之推導結果，其變數與資料之特性描述於下：

資料來源來自於 CBOT (Chicago Board of Trade)和 DataStream 資料庫，其標的資產為 S&P500 股價指數選擇權，樣本資料包括從 2003 年 7 月 28 日至 2004 年 3 月 15 日每天之收盤價。在發行日當天 (2003/7/28) S&P500 股價指數為 996.52，在到期日履約價為 1100，買權價格為 16.4。接下來，我們使用三個月期之短期國庫券來表示無風險利率，其中無風險利率約為 0.915%。根據 Hull (1998)，我們應該使用交易日而不是年，但單位應該年化，且通常權證之存續期間是少於一年，所以我們使用過去 30 至 60 天之歷史資料去估計每天收盤價之波動性為 11.4181%。

1. 假設過去股價波動性等同未來股價之波動性，我們就能使用過去之歷史資料來估計未來股價報酬之波動性，一般作法為加權移動平均法。因為在 B-S 模

型中，股價波動性是用歷史資料求算，其公式為：
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$$
，其中

$$r_i = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$
， r_i ：第 t 期之股價報酬率， \bar{r} ：平均股價報酬率，因為不考慮股

利發放，且報酬率不是靜態，所以計算出的股價報酬波動性 (σ) 比較大(請參見表 1-4)。

2. 在 B-S 模型中，對於無風險利率之推導初始是將股票和其相對應之選擇權，依適當比例在目前組成一個無風險之投資組合。事實上，無風險利率是非常低的，在 B-S 模型中一般是用三個月期之短期國庫券來代表無風險利率，故實際上無風險利率之估計亦有高估之嫌。
3. 針對以上之資料描述，將各個變數代入 B-S 模型中，可得買權價格處於價外時，當敏感度為 5%，買權價格為 9.3494，而在敏感度為 20%，買權價格為 13.2657，與實際買權價格 16.4 相比，其值略低。故若不考慮模糊因素，除非投資者已掌握完全訊息或客觀環境已確定情況下，否則投資者於估計 B-S 選擇權評價模式中相關變數，當其處於價外 ($S < K$) 時，將低估買權價格，呼應第二章命題 3 之結論與結果。

附 錄 七

茲以下述例子說明和計算股價之波動性可能情況：

其中 t 為期間， $a+b+c+d+e+f=t-1$ ，而 $a, b, c, d, e, f=1, 2, 3, \dots, t-1$ 。

例一

假如 $t=1, a+b+c+d+e+f=0$ ，因為 $a=b=c=d=e=f=0$ 所以波動性為

$$[e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^0 = [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^0 = [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^0 = [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^0 = [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^0 = [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^0 = 1。因此$$

在 $t=1$ 期，我們可得到唯一值 S_0 。

例二

假如 $t=2, a+b+c+d+e+f=1$ ，共有 6 種股票價格如下：

1. $a=1, b+c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1$;

2. $b=1, a+c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1$;

3. $c=1, a+b+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1$;

4. $d=1, a+b+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1$;

5. $e=1, a+b+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1$;

6. $f=1, a+b+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1$ 。

例三

假如 $t=3, a+b+c+d+e+f=2$ ，共有 21 種股票價格如下：

1. $a=2, b+c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{2(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

2. $b=2, a+c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

3. $c=2, a+b+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{2(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

4. $d=2, a+b+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-2(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

5. $e=2, a+b+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

6. $f=2, a+b+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-2(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

7. $a=b=1, c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(2+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

8. $a=c=1, b+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

9. $a=d=1, b+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{2\rho\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

10. $a=e=1, b+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{\rho\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
11. $a=f=1, b+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 ;$
12. $b=c=1, a+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(2-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
13. $b=d=1, a+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{\rho\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
14. $b=e=1, a+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 ;$
15. $b=f=1, a+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-\rho\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
16. $c=d=1, a+b+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 ;$
17. $c=e=1, a+b+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-\rho\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
18. $c=f=1, a+b+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-2\rho\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
19. $d=e=1, a+b+c+f=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(2-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
20. $d=f=1, a+b+c+e=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
21. $e=f=1, a+b+c+d=0, S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(2+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} .$

重組以上相同的股票價格後，我們得到 15 種不同之結果：

情況	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
題號	1	7	2,8	12	3	9	10,13	11,14,16	15,17	18
情況	11	12	13	14	15					
題號	4	19	20,5	21	6					

例四

假如 $t=4, a+b+c+d+e+f=3$, 共有 56 種股票價格如下：

- $a=3, b+c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^3 = S_0 \cdot e^{3(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
- $b=3, a+c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^3 = S_0 \cdot e^{3\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
- $c=3, a+b+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^3 = S_0 \cdot e^{3(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
- $d=3, a+b+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^3 = S_0 \cdot e^{-3(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
- $e=3, a+b+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^3 = S_0 \cdot e^{-3\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
- $f=3, a+b+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^3 = S_0 \cdot e^{-3(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
- $a=2, b=1, c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(3+2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$

8. $a=2, c=1, b+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(3+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
9. $a=2, d=1, b+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1+3\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
10. $a=2, e=1, b+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1+2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
11. $a=2, f=1, b+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
12. $b=2, c=1, a+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(3-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
13. $b=2, d=1, a+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
14. $b=2, e=1, a+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
15. $b=2, f=1, a+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
16. $c=2, d=1, a+b+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
17. $c=2, e=1, a+b+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
18. $c=2, f=1, a+b+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-3\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
19. $d=2, e=1, a+b+c+f=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(2-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
20. $d=2, f=1, a+b+c+e=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(3-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
21. $e=2, f=1, a+b+c+d=0, S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(3+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
22. $a=1, b=2, c+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{(2+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
23. $a=1, c=2, b+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{(3-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
24. $a=1, d=2, b+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1-3\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
25. $a=1, e=2, b+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
26. $a=1, f=2, b+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
27. $b=1, c=2, a+d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{(3-2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
28. $b=1, d=2, a+c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1-2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
29. $b=1, e=2, a+c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
30. $b=1, f=2, a+c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1+2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
31. $c=1, d=2, a+b+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
32. $c=1, e=2, a+b+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$

33. $c=1, f=2, a+b+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(1+3\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
34. $d=1, e=2, a+b+c+f=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(3-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
35. $d=1, f=2, a+b+c+e=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(3+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
36. $e=1, f=2, a+b+c+d=0, S_0 \cdot [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^2 = S_0 \cdot e^{-(3+2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
37. $a=1, b=1, c=1, d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{3\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
38. $a=1, b=1, d=1, c+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0^{(1+2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
39. $a=1, b=1, e=1, c+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
40. $a=1, b=1, f=1, c+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
41. $a=1, c=1, d=1, b+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
42. $a=1, c=1, e=1, b+d+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
43. $a=1, c=1, f=1, b+d+e=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
44. $a=1, d=1, e=1, b+c+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0^{-(1-2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
45. $a=1, d=1, f=1, b+c+e=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
46. $a=1, e=1, f=1, d+e+f=0, S_0 \cdot [e^{(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
47. $b=1, c=1, d=1, a+e+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
48. $b=1, c=1, e=1, a+d+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
49. $b=1, c=1, f=1, a+d+e=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{(1-2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
50. $b=1, d=1, e=1, a+c+f=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
51. $b=1, d=1, f=1, a+c+e=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
52. $b=1, e=1, f=1, a+c+d=0, S_0 \cdot [e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
53. $c=1, d=1, e=1, a+b+f=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
54. $c=1, d=1, f=1, a+b+e=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
55. $c=1, e=1, f=1, a+b+d=0, S_0 \cdot [e^{(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-(1+2\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}} ;$
56. $d=1, e=1, f=1, a+b+c=0, S_0 \cdot [e^{-(1-\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 [e^{-(1+\rho)\sigma\sqrt{\Delta t}}]^1 = S_0 \cdot e^{-3\sigma\sqrt{\Delta t}} .$

重組以上相同的股票價格後，可得到 28 種不同的結果。

情況	1	2	3	4	5	6	7	8
題號	1	7	8,22	37,2	23,12	27	3	9
情況	9	10	11	12	13	14	15	16
題號	10,38	11,39,41,13	40,42,14,47	43,15,48,16	49,17	18	24	44,28
情況	17	18	19	20	21	22	23	24
題號	45,25,50,27	46,51,29,53	26,52,54,32	30,55	33	4	19	20,34
情況	25	26	27	28				
題號	56,5	35,21	36	6				

當 $t=5,6,\dots,n$ 我們也能用同樣的方法推論不同期間每個節點數及其股價值。

在重組相同的值後，發現可推導出節點數之公式如下：

假如 $t=1$ 期，可得到目前的股價為 S_0 ，其中：

$$t-1=0, N_1=N_{1-1}+4(1-1)+1=N_0+4(0)+1=1。$$

假如 $t=2$ 期，可產生 S_{ur} 、 S_{um} 、 S_{ul} 、 S_{dr} 、 S_{dm} 和 S_{dl} 其中：

$$t-1=1, N_2=N_{2-1}+4(2-1)+1=N_1+4(1)+1=1+4+1=6。$$

假如 $t=3$ 期，其中 $t-1=2, N_3=N_{3-1}+4(3-1)+1=N_2+4(2)+1=6+8+1=15。$

假如 $t=4$ ，其中 $t-1=3, N_4=N_{4-1}+4(4-1)+1=N_3+4(3)+1=15+12+1=28。$

由上可知，在不同期間之每個節點數可歸納成下式：

$$N_t = N_{t-1} + 4(t-1) + 1$$

其中， N_t ：第 t 期之節點數。

N_{t-1} ：第 $t-1$ 期之節點數。

n ：期間數，其中 $t=1\sim n$ ，和 $N_0=0$ 。

自 傳

姓名: 王詩韻(Shin-Yun Wang)

生日: 64 年 7 月 18 日

學歷: 中興大學植物學系(82.8-86.6)

交通大學經營管理研究所碩士(86.8-88.6)

交通大學管理科學研究所博士(90.8-94.5)

經歷: 行政院衛生署醫政處研究員(89.5-90.3)

台灣大學管理學院院長助理(90.3-90.7)

景文技術學院企管系兼任講師(90.2-92.7)

清雲技術學院國貿系兼任講師(90.8-92.7)

大華技術學院資管系兼任講師(91.2-92.7)

致理技術學院財金系兼任講師(91.8-92.8)

中國技術學院國貿系專任講師(92.8-迄今)

博士班進修期間研究成果

一、期刊論文

1. Cheng-Few Lee, Gwo-Hshiung Tzeng and Shin-Yun Wang (2005), "A New Application of Fuzzy Set Theory to the Black-Scholes Option Pricing Model," Expert Systems with Applications, (Accepted and Scheduled for Publication in Volume 29(2), 2005). **SCI**
2. Cheng-Few Lee, Gwo-Hshiung Tzeng and Shin-Yun Wang (2005), "A Fuzzy Set Approach to generalize CRR model: An Empirical Analysis of S&P 500 Index Option," Review of Quantitative Finance and Accounting, (Accepted and Forthcoming).

二、研討會論文

1. 王詩韻、曾國雄，模糊環境下之選擇權評價分析，2003 人工智慧、模糊系統及灰色系統聯合研討會，p6，2003。
2. 李正福、曾國雄、王詩韻，模糊決策過程下之選擇權評價模式，2003 中華民國科技管理論文研討會-奈米科技管理之新思維，p57，2003。

3. Cheng-Few Lee, Gwo-Hshiung Tzeng and Shin-Yun Wang, (2004), "A New Application of Fuzzy Set Theory to the Black-Scholes Option Pricing Model," MCDM 2004, August 6-11 at Whistler, B. C. Canada.
4. Cheng-Few Lee, Gwo-Hshiung Tzeng and Shin-Yun Wang, (2005), "A Fuzzy Set Approach to generalize CRR model: An Empirical Analysis of S&P 500 Index Option," The First International Workshop on Multi-Attribute Portfolio Selection, Helsinki/ Stockholm, March 13-15, 2005.
5. Shin-Yun Wang, Cheng-Few Lee and Gwo-Hshiung Tzeng, "Fuzzy Multi-Criteria Decision-Making for Evaluating the performance of mutual fund," ISAHP2005, The Eighth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process for Decision Making, University of Hawaii, July 8-10, 2005.
6. Shin-Yun Wang, Gwo-Hshiung Tzeng, "Decision Making in Fuzzy Environment with Black-Scholes Option Pricing Model," International Federation of Operational Research Societies, Hawaii, July 11-15, 2005.

