第三章　模式建構

本研究乃架構在 Yang 等人(1998)所提出的網路模型上，故在本章的第一節將先行把該網路模型包含前提假設、變數和參數設定、數學模式及其意涵完整地交代。接著在第二節中，依上述架構推衍出的計程車市場經濟模式乃是依據 Yang 等人(2002)的後續研究，將其模式及解釋摘錄，其中包含社會福利最大下的市場最佳解、損益平衡的次佳解等數學規劃式，再依市場上不同情況，如完全競爭、獨占等來設計不同的目標式。本研究則是將其經濟意涵加以討論並依據計程車市場以往文獻將其市場特性整理分析並詳加說明。最後一節則是依據 Wong and Yang(1998)的研究，將求解網路模型的演算法加以詳述。

3.1 網路模型建立

3.1.1 模式設定

根據 Yang 等人(1998)的網路模型，本研究直接採取實證時將使用的資料內容，先將都會區虛擬的分割為若干個區塊(zones)，取代原著在模式中設定的結點(nodes)，並以一個集合 V 表示。而區塊間則有若干連結(links)，並以集合 A 表示。如此便形成一個都會網路 U(V，A)。假使此都會中有著穩定的計程車車流以及乘客需求，則在此網路中，任何一個給定的單位時間內(設定為一小時)，由 i 區到 j 區的計程車需求數為 D_{ij}(次)。其中，令 I 與 J 個別為乘客起點與訖點的集合，且 $I \subset V$，$J \subset V$。由上述之需求數量可衍生出 $O_i = \sum_{j \in J} D_{ij}$ 及 $D_j = \sum_{i \in I} D_{ij}$，分別代表各個區內在一小時中的需求量出發數與需求量到達數，而旅次的兩端分別為 $i \in I$ 及 $j \in J$。令 h_a 為在連結 $a \in A$ 所需要的旅行時間，而 h_{ij} 則為由 $i \in I$ 到 $j \in J$ 中所有連結的旅行時間平均起來所得到的區域間之行駛時間，並以小時為單位計算。而在此模式中 h_a 與 h_{ij} 皆為固定，並且不對塞車的情況做考量。

假設在此都會區的網路上每小時中有 N 計程車小時，並且因為大量的計程車輛，故在此假設個別車輛並無差異，其行駛成本與是否有承載旅客亦無關聯。其中，車輛的行為假設相單單純，即一輛車在 i 區接到客人後，便會將客人以最短路徑載往目的地 j 區。而當這當旅程結束後，就變回空車，並在同一個 j 區內或是移動到其他 i 區內繼續尋找下一個客人。而在此行為循環下，我們假設每位司機皆企圖在最短的搜尋時間內找到他的下一個客人。

3.1.2 計程車服務時間限制

首先，計程車營運的情況可分為搭載乘客與未搭載乘客兩種，故分別以 Q 與 U 表示在單位時間內(假設為一小時)，整個網路中搭載與未搭載乘客的計程車時數加總。而這兩者的和則為單位時間內的總計程車時數，設定為 N。

依上述的情況下，可得到以下兩個式子：

$$Q = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} T_{ij}^{o} h_{ij} \quad , \qquad (3\text{-}1)$$

$$U = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} T_{ji}^{v} \{h_{ji} + w_i\} \quad , \qquad (3\text{-}2)$$

其中(3-1)式表示所有計程車在一小時內的總搭載時數，在此，所有的計程車需求數 D_{ij} 皆會等於計程車搭載乘客的次數 T_{ij}^{o} (車輛數/小時)，即 $T_{ij}^{o} = D_{ij}$。而相反的則是在(3-2)式，總未搭載時數或是總空車時數則包含了在區域間行駛，或是持續在某區內尋找乘客的空車。其中 T_{ji}^{v} 代表由 j 區到 i 區的空車次數(車輛數/小時)，而 w_i，則是計程車在 i 區中的預期等待時間，也就是他將花在找下一個客人的搜尋時間或等待時間。由於計程車在街道上可能以停等或是緩慢巡行的形式找客人，故有搜尋及等待時間兩種說法，但因為模式中將此兩種等待時間的成本視為相同，因此 w_i 的解釋

並不會因此兩者字面上不同而有分別。

在單位時間內，總搭載時數與總空車時數的相加則等於總計程車服務時數。又假設計程車營運的期間能涵蓋所有需求，則在整個市場中，計程車服務時數必然等於計程車營運時數。依此，可推倒出單位時間內，計程車的服務時間限制式如下：

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}T_{ij}^{o}h_{ij}+\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}T_{ji}^{v}\{h_{ji}+w_i\}=N \quad 。 \tag{3-3}$$

3.1.3 計程車司機行為模式設定

在先前的假設中已有提及，每個計程車司機皆會努力縮短尋找到下一個乘客所需花費的時間。於是當一個旅次的服務於 j 區結束後，計程車司機可選擇留在該區內或是在連結中移動到其他區去尋找他的下一個乘客。在此過程中，找尋到下一個乘客的機率則取決於司機最終在 i 區內載到客人前的預期搜尋時間 w_i。也就是說，每一個計程車司機在期望最短時間內找到下一個乘客的前提下，他該如何做下一個生意前，花費最少的跨區行駛時間與在區內搜尋時間的加總；又假設每個 h_{ji} 皆為給定下，在最後選擇的區域 i 內將花費的預期搜尋時間 w_i 則成為最重要的決定因素。因此，這一個依時間愈短效用愈大的機率函數則可以一個羅吉特模式來表示如下：

$$P_{i/j}=\frac{\exp\{-\theta(h_{ji}+w_i)\}}{\sum_{m\in I}\exp\{-\theta(h_{jm}+w_m)\}} \qquad for\ any \quad i\in I, j\in J \ , \tag{3-4}$$

其中，若 $i=j$，則可表示成 $P_{j/j}$，代表該計程車在 j 區放下上一個客人後，選擇留在同一區內尋找並遇到下一個乘客。另外，θ 是一個非負數的參數，代表依個別計程車司機的角度來顯示整個市場中需求與計程車服務間的不確定程度。若 θ 很小，則代表市場中的隨機變動很大，也就是說對於計程車司機而言，他所能掌握到的市場資訊相對的少；反過來說，當 θ 很大

時，則司機對於市場資訊有相對多的掌握，也使得司機在選擇下一個載客的區域時，能有較準確的選擇以獲取較短的預期搜尋時間。一般來講，計程車司機或多或少都了解自己的客源，但在假設每個計程車司機皆為相同個體下，市場的供需資訊則變成一個重要的指標，以導引個別司機前往最容易找到客人的區域。若θ無限大時，則代表著市場資訊完全充足，使得每個司機皆了解在該時間點，某一個區域內最容易找到乘客。

在一個穩定的均衡狀態下，網路上每個移動中的空計程車皆會在某一個計程車需求的起點 i 搭載到他下一個乘客。故在單位小時內，當D_j輛計程車在j區結束他上一個服務時，則可推論出下列限制式：

$$\sum_{j \in J} D_j * P_{i/j} = O_i, \quad i \in I \text{，} \tag{3-5}$$

注意在(3-4)及(3-5)中，O_i，D_j，h_{ij}皆為給定的外生變數，而w_i則為內生變數。當w_i求解出來後，$P_{i/j}$則可個別得到。因此將會有$|I|$個變數，w_i，需要求解，而(3-5)式亦可表示成$|I|$個限制式。

3.1.4 市場需求假設

在整個市場資訊結構中，對需求方則是假設每一個潛在的乘客對於招攬一台計程車所需花費的等待時間，以及他所要搭乘的距離將花費他多少金額都有了大略的預期。所以這兩個變數—預期等待時間及預期價格—將會影響到乘客對於搭乘計程車的需求。研究中將個別 O-D 間的需求分開考量，並依照上述對需求的影響，得到以下的需求函數：

$$D_{ij} = D_{ij}(W_i, F_{ij}), \quad i \in I, j \in J \text{，} \tag{3-6}$$

其中，W_i代表乘客在 i 區的預期等待時間，F_{ij}，則是乘客從 i 區到 j 區所花費的金錢成本。另外，計程車需求D_{ij}假設為W_i及F_{ij}的單調遞減函數。

而在計程車的費用上，為了簡化模式，假設費率F_{ij}將依據旅程的時間程度而定，以每單位旅程時間τ元來訂定：

$$F_{ij}=\tau\cdot h_{ij},\quad i\in I, j\in J。\tag{3-7}$$

因為模式中未考量塞車的因素，故也將計程車的費率省略掉「延滯計時計費」此一市場中實際運用上的部分。但本研究在後續的實證分析後，可依其他數據試圖對於費率機制做考量「延滯計時」的調整，使其最貼近市場現況。由上式費率函數中變數h_{ij}的實證數據來檢視，其考量的乃是區域間最短連結的旅行時間，因此若某兩個特定區間有塞車現象頻繁的問題，其實在行駛時間上將會被顯示，進而影響到以區域間行駛時間做基準的費率函數。

乘客等待時間乃是一內生變數，並會因為所處的區域不同而變動。對乘客而言，等待時間代表著計程車市場所能提供的服務品質，當計程車空車數量多時，對於消費者而言，是刺激其搭乘意願的重要考量之一。其中影響等待時間最為重要的就是該區內空計程車的密度，可以下列式子表示：

$$W_i=W_i(n_i,w_i),\quad i\in I，\tag{3-8}$$

其中，n_i代表在單位時間內，在區域i中遇到乘客的空計程車數。在均衡時，$n_i=O_i$(單位小時內從i區出發的旅次)將會成立。而w_i則是空計程車在i區內找到其乘客的預期等待時間。此一乘客等待時間函數則會依不同的計程車招攬方式呈現出不同的分配函數。一般而言可分為有定點計程車站牌的招攬方式以及在街上任意招攬方式(可視為整條街上有連續的計程車站牌)兩種。

基於本研究乃針對台北地區計程車市場的考量下，且整體市場中固定計程車招呼站牌並不普遍，故在研究中我們假設整個市場皆以連續計程車站牌為其招攬車輛的模式，也就是乘客可在街道上任意招呼行進間的空計

程車。在此假設下，當空計程車隨機的在街道上行駛時，乘客的預期等待時間則與區域的面積成正比且與空計程車時數成反比，其式子表示如下：

$$W_i = \beta \frac{A_i}{n_i w_i}, \quad i \in I \text{，} \tag{3-9}$$

其中，A_i 為區域 i 的面積，而β則是一個適用於所有區域的一般參數，他所涵蓋的意涵包括了道路在區域間的密度(單位面積內，街道的總長度公里數)以及計程車在街道上搜尋乘客時的行駛速度及其他可能影響的變數(在此將其他變數省略)。當道路密度愈大或是行駛速度愈慢，則β則會愈大；反之則β會愈小。

3.2 計程車市場經濟模式之建立

前一節中，已經將 Yang 等人(1998)所發展出的計程車市場營運的網路模型詳述，本節中將參考 Yang 等人(2002)的後續研究，利用上述之架構導入市場經濟模式。依此不同的經濟模式，可將市場模擬成可控制車隊大小但價格管制下的獨佔市場、可自由進出且價格管制的完全競爭市場、社會福利最大之市場第一最佳解(first-best social optimum)、財務收支平衡的市場第二最佳解(second-best social optimum)。並依據不同的模擬情況，分別求得計程車市場的供需均衡解、市場的容量以及車輛的利用率。

雖然在本研究範圍的台北地區計程車市場中，獨佔市場並不存在，但為了進一步了解個別市場結構所產生的市場容量及利用率，故本研究中也將獨占情況一併考量。另外，計程車市場中經營的型態包括了車行、個人車行及合作社三種；雖然依此可將市場中分為不同營運單位，但在巡迴計程車市場中由於價格固定、各車行服務並無法有效區隔且市場結構中駕駛人與乘客間的資訊不對稱等種種因素使得固然有寡占市場的表面形式，但實際營運上卻沒有個別廠商能彼此牽制、制定策略的空間。在過去的文獻中，也僅對無線電叫車的計程車服務做寡占市場模型的分析(Häckner and Nyberg，1995)。故在討論不同市場的計程車容量或是利用率上，本研究中將不考量寡佔市場模式。

3.2.1 社會福利最大下之市場第一最佳解(first-best social optimum)

首先，模式中假設計程車營運時的成本與是否為載客或是空車無關。假設 c 為一輛計程車的總成本，其涵蓋了營運時的變動成本及資本折舊的固定成本，包含了燃油、附屬油料、車輛折舊等 12 項(係參考台北市政府交通費率事業審議委員會審議作業原則及汽車運輸業客貨運運價準則之規定)，且是以每小時來計算。因此，整個市場上的計程車總營運成本 TC=cN。

如同一般運輸經濟分析，計程車乃是都市大眾運輸的一部分，其公共政策應依循整體社會福利最大的目標制定。考量到社會福利，即是將計程車市場的消費者剩餘及生產者剩餘加總。特別注意，我們探討的是單位小時內的計程車市場社會福利。假設對所有消費者而言，時間價值皆相等，則我們可推導出下列的社會福利最大目標式以 N^f 表示之：

$$\text{maximize} \quad SW(N^f) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_0^{D_{ij}} F_{ij}(x, W_i(N^f))dx - cN^f \tag{3-10}$$

subject to (3-1)~(3-9)，

其中，$F_{ij}(x, W_i(N^f))$ 乃是在(3-6)式需求函數的反函數，x 表示計程車旅次需求量。而 N^f 代表的是在社會最佳解下的計程車數量，其中 f 表示的是第一最佳(first-best)。在求得消費者剩餘的過程，乃是將需求函數對價格做積分，以得到需求函數下的總消費者剩餘，再扣掉生產者營運的成本(生產函數下的面積)，便是最後的整體社會福利。在此特別注意到，雖然在需求函數中有兩個自變數，價格(F_{ij})及等待時間(W_i)，但在(3-10)式裡，只有針對價格做積分，因為在此須先將服務水準(即等待時間)固定後，再求得價格變動下的社會總剩餘，而非對市場需求函數作多重積分(Cairns and Liston-Heyes，1996)。

經濟分析中，當達到社會最佳解時，每小時的價格(或是單位小時願意

支付於計程車服務的金額)將會恰好等於每小時計程車的邊際成本。而此時每多增加一個計程車輛時數(如此將會減少乘客的等待時間並增加對計程車的需求)所獲得的邊際收益將會剛好等於計程車的邊際成本(每計程車小時所需之成本)。由此可知，在此均衡下，每增加之邊際計程車收益將僅夠支付於搭載乘客時之營運成本。將經營時間加總後，計程車營運將會產生虧損，其金額將等於空計程車時數下的成本加總。於是，可得知此社會福利最大之最佳解其求得的均衡並不切實際(Douglas，1972；Arnott，1996)。此一結論乃是因為在問題界定時，已先行將空車時間與搭載乘客時間分割，且成本獨立延續在整個過程中(本研究亦假設在不同情況下 c 皆相同)，而非將空車時的成本一併計算在搭載乘客時，以求得能支付整個營運過程的市場費率。故在計程車相關研究中，依 Douglas(1972)所建立的原始模式而做的後續研究，皆無法在社會最佳解下尋得可以被現實市場實際運用的結果。雖然根據上述說明，對於傳統的計程車市場整體供需模式(1-1)~(1-3)而言，將會必然存在，但在本研究的網路供需均衡架構下，因為其複雜的空間影響以及類似像有限制的費率函數(3-7)式等模式架構，最後的社會最佳均衡解則不一定會有赤字存在(Yang et al.，2002)。

3.2.2 收支平衡下之市場第二最佳解(second-best social optimum)

由於社會最佳解因為其收支無法平衡，故不能使產業滿足，所以在經營計程車市場時，控制價格以達到非負數的報酬，則是社會次加解的出發點。故在求算社會次佳解的均衡價格計車輛數前，先增加一限制式，使得營運總利潤剛好能支付總成本。依此概念下，推導出社會次佳解的有限制目標式如下：

$$\text{maximize} \quad SW(\tau^s, N^s) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_0^{D_{ij}} F_{ij}(x, W_i(N^s))dx - cN^s \tag{3-11}$$

subject to

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} F_{ij}^s D_{ij} = cN^s \quad , \tag{3-12}$$

and (3-1)~(3-9)，

其中 $F_{ij}^{s}=\tau^{s}h_{ij}$，而 s 代表第二最佳(second-best)。在社會第二最佳解下，由於計程車的成本被其收益剛好支付完，故社會福利將剛好等於消費者剩餘。而本問題也變成了求解社會福利最大，並依據零利潤的限制及網路均衡模式。一般而言，假設每個消費者的時間價值相同又整個市場為同質性並使用單一需求函數，則因為在此社會福利的計算僅以消費者剩餘為考量，故求解社會次佳解將會等同於求解最大需求量的問題，因為隨之而來的即是最大消費者剩餘，僅需一併將零利潤限制式。並將在最後得到效率價格可最大化消費者需求的結論(Douglas，1972；De Vany，1975)。但在本研究的網路模型架構下，即便每個消費者的時間價值相同，但因為有許多變數是以 O-D 路線來表示且常數又分布於個別 O-D 需求函數中，因此上述之結論不一定在此得以成立。

此時，市場中的最適時間空車率 V 可表示如下：

$$V=\frac{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}T_{ji}^{v}\{h_{ji}+w_{i}\}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}T_{ij}^{o}h_{ij}+\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}T_{ji}^{v}\{h_{ji}+w_{i}\}}=\frac{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}T_{ji}^{v}\{h_{ji}+w_{i}\}}{N^{s}} \quad , \quad i\in I, j\in J \qquad (3\text{-}13)$$

其中 N^{s} 代表的是市場次佳解下的最適計程車小時數。空車率上升代表乘客在路邊招攬到空計程車的機率變大，因此消費者對計程車的需求將會增加；然而，過高的空車率代表業者的成本將面臨無法回收得風險，亦會增加市區內對空氣污染及交通壅塞的負擔。

3.2.3 獨佔市場之情況

一般而言，真實世界中並不容易發現計程車市場有獨佔的情況。但在此我們假設某一都市的管理單位允許某單一企業以一特許營業執照在一個地區內經營，而費率則是依據管制當局制定，則市場獨占的情況將會發生。現在的問題則是，在以上考量下此一廠商將如何決定其車輛數。以經濟學的角度，獨占廠商決定其產能將會依據最大化其營業之利潤而做決策，依此考量將推導出以下之目標式：

$$\text{maximize} \quad R(N^m) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} F_{ij} D_{ij} - cN^m \tag{3-13}$$

subject to

$$F_{ij} = \tau^* h_{ij} \quad ,$$

其中，τ^*為管制下的單位服務時間費率。而N^m則表示獨占廠商對於其車隊最後的決定數量，其中 m 代表獨占(monopoly)。獨占廠商的營運特色乃是在於其車隊在管制價格下的邊際收益將會等於其經營車隊的邊際成本(Douglas，1972；De Vany，1975)。在一般經濟學原理下，由於價格不被管制，如此獨占廠商將會依照市場費率與車隊數量組合尋求其利潤最大解，而最終的市場解(包括車輛數與價格)將會視消費者需求對價格及服務品質的彈性而定。

3.2.4 競爭市場之情況

如果我們將計程車市場設定為每一個人皆擁有且經營其計程車，亦即每個單一車輛皆為一家公司，則可將此一市場的營運模式視為是完全競爭。固然完全競爭仍需考量可有自由進出市場的機制，在此先假設此一情況是被滿足的，上述之限制在後續的實證分析中再加以討論。

在此費率仍舊由管制者訂定，但進出市場不設限。在完全競爭市場中，最終的供給數量將剛好滿足市場均衡，且其最後一輛進入市場的計程車的邊際收益將剛好支付於其成本，也就是利潤為零。而此時，市場外的其他計程車將會失去加入市場的誘因，而使整體市場達到均衡。依此說明，將可得知均衡點發生在下列式子成立時：

$$\frac{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} F_{ij} D_{ij}}{N^c} = c \text{，} \tag{3-14}$$

其中，$F_{ij} = \tau^* h_{ij}$，且N^c代表完全競爭市場的計程車數量解。從此可了解，完全競爭市場模式的車輛數是決定於管制當局所訂定的價格。

3.3 網路模式求解演算法之建立

在上述的計程車網路模式中，w_i 是此模式的決策變數集合。當 w_i 求解出來後，$P_{i/j}$ 以及 W_i 即可得到；進而將模式的需求函數推導出來。Yang and Wong(1998)曾在網路模式後附加一定點(fixed-point)演算法，然而該方法對於計程車的交通問題並無法保證產生收斂(convergent)，故在大規模實證分析中並不適用。Wong and Yang(1998)因此推出一套利用空車的重力形式(gravity-type)分配所建立的最適化模式，並以一個有效率的相互平衡方法推演出等待時間 w_i。本節則是將此過程節錄出來，並加以說明此一方法的連動細節。

此一公式乃建立在有固定旅客需求的計程車服務網路，並首先以標準重力模式來考量空計程車的活動：

$$\underset{T_{ji}^{v}}{Minimize} \quad Z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} T_{ji}^{v} h_{ji} + \frac{1}{\theta}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} T_{ji}^{v}(\ln T_{ji}^{v} - 1) \tag{3-15a}$$

subject to

$$\sum_{j} T_{ji}^{v} = O_i, i \in I \tag{3-15b}$$

$$\sum_{i} T_{ji}^{v} = D_j, j \in J \tag{3-15c}$$

$$T_{ji}^{v} \geq 0, j \in J, i \in I \tag{3-15d}$$

再採用拉式方法(Lagrangian)：

$$L = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} T_{ji}^{v} h_{ji} + \frac{1}{\theta}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} T_{ji}^{v}(\ln T_{ji}^{v} - 1) + \sum_{i\in I}\alpha_i(\sum_{j\in J} T_{ji}^{v} - O_i) + \sum_{j\in J}\beta_j(\sum_{i\in I} T_{ji}^{v} - D_j) \tag{3-16}$$

並依據 $T_{ji}^{v} > 0$ 的假設，可得到

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ji}^{v}} = h_{ji} + \frac{1}{\theta}\ln T_{ji}^{v} + \alpha_i + \beta_j = 0, j \in J, i \in I \tag{3-17}$$

由上式可推出以下：

$$T_{ji}^{v} = \exp[-\theta(h_{ji} + \alpha_i + \beta_j)], j \in J, i \in I$$

(3-18)

將(3-18)式帶入(3-15c)式可得到

$$\sum_i T_{ji}^{v} = \sum_i \exp[-\theta(h_{ji} + \alpha_i + \beta_j)] = D_j, j \in J \tag{3-19}$$

再將(3-19)式轉換成

$$\exp(-\theta\beta_j) = \frac{D_j}{\sum_i \exp[-\theta(h_{ji} + \alpha_i)]}, j \in J \tag{3-20}$$

把(3-20)式帶入(3-18)式可得到

$$T_{ji}^{v} = D_j \frac{\exp[-\theta(h_{ji} + \alpha_i)]}{\sum_i \exp[-\theta(h_{ji} + \alpha_i)]}, j \in J, i \in I \tag{3-21}$$

將上式與 3.1.3 節提及的網路模式中計程車行為的(3-4)式比較，可發現α_i可視為是 i 區中的計程車等候時間，也就是$w_i = \alpha_i$。然而，從(3-18)式可以發現，拉式乘數α_i並非是唯一一組解，因為任何一個常數 k 皆可以加在他後面，而使得最佳化求解的過程，(3-15a)~(3-15d)式，不會有任何變化，另一個拉式乘數β_j亦為如此，例如$(\alpha_i + k)$以及$(\beta_j - k)$。因此，對於拉數乘數以及計程車等候時間的求解則限制在一階自由度(one degree of freedom)內。為了先行固定計程車等候時間，使其在計程車市場內是唯一的，需先引入限制服務總時間的(3-3)式。並由此式，使得計程車等候時間需滿足以下時間守恆等式：

$$\sum_{i \in I} O_i w_i = K \tag{3-22}$$

其中，

$$K = N - \sum_i \sum_j T_{ij}^o h_{ij} - \sum_j \sum_i T_{ji}^v h_{ji} \tag{3-23}$$

在(3-18)式中由重力模式所設定的一組乘數α_i需由常數 k 的加入來確保服務時間守恆式得以被滿足，因此可推得下式：

$$k = \frac{K - \sum_i O_i \alpha_i}{\sum_i O_i} \tag{3-24}$$

由此計程車等待時間可確立為

$$w_i = \alpha_i + c, i \in I \tag{3-25}$$

儘管重力模式中的拉式乘數可藉由搜尋(3-16)式的鞍點(saddle point)來求得，再藉由(3-24)~(3-25)式即可得到計程車等待時間，然而這些程序一般並無法直接求得乘數的值。因此，以下則是提出一套基於標準程序的求解過程，並可藉此求出計程車等待時間。

首先(3-18)是可改寫成：

$$T_{ji}^v = E_i F_j \exp(-\theta h_{ji}), j \in J, i \in I \tag{3-26}$$

其中，E_i及F_j可視為平衡因子，並表示如下：

$$E_i = \exp(-\theta \alpha_i), i \in I \tag{3-27}$$

$$F_j = \exp(-\theta \beta_j), j \in J \tag{3-28}$$

利用(3-15b)及(3-15c)，可將上兩式表示成下，並可看出他們互相關聯：

$$E_i = \frac{O_i}{\sum_j B_j \exp(-\theta h_{ji})}, i \in I \tag{3-29}$$

$$F_i = \frac{D_j}{\sum_i \alpha_i \exp(-\theta h_{ji})}, j \in J \tag{3-30}$$

在上兩式中，可藉由先設β_j=1 開始，並相互求解，以得到收斂解，如此重力模式即可被解出。

猶如α_i在加上常數k後可視為唯一的，E_i可藉由乘上一個因子f而變為唯一解，表示如下：

$$fA_i = \exp(-\theta w_i), i \in I \tag{3-31}$$

其中，

$$f = \exp(-\theta k) \tag{3-32}$$

另外，f因子需被定義成滿足時間守恆式(3-22)。故由(3-24)式，f可被確定為：

$$f = \exp\left(\frac{-\theta K - \theta \sum_{i \in I} O_i \alpha_i}{\sum_{i \in I} O_i}\right) = \exp\left(\frac{-\theta K - \sum_{i \in I} O_i \ln E_i}{\sum_{i \in I} O_i}\right) \tag{3-33}$$

其中，由(3-27)式，$\alpha_i = -(\ln E_i)/\theta$。而一旦 f 因子求得後，計程車等待時間則可利用(3-31)式求出：

$$w_i = -\frac{\ln(fE_i)}{\theta}, i \in I \tag{3-34}$$

總括來說，利用(3-29)、(3-30)兩式將兩個平衡因子E_i及F_j求出後，f因子可由(3-33)得到，並進一步以(3-34)式求出計程車等待時間。