

國立交通大學

土木工程研究所

碩士論文

應用遞迴最小平方差法識別時變系統之  
瞬時模態參數

Identification of Instantaneous Model Parameters of a Time  
Varying Structure via Recursive Least Square Techniques

研究生：劉靖俞

指導教授：黃炯憲博士

中華民國九十八年一月

應用遞迴最小平方差法識別變系統之瞬時模態參數

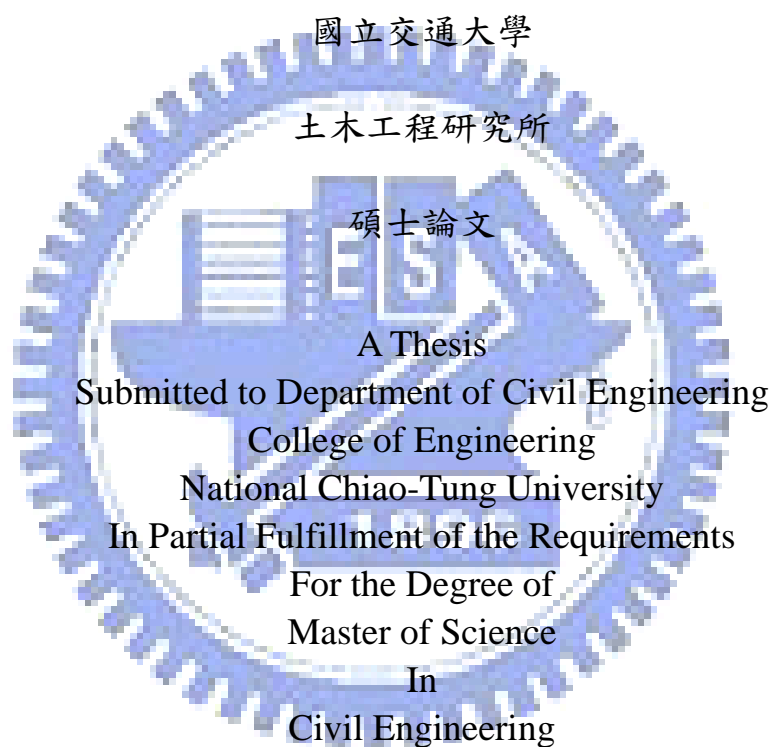
Identification of Instantaneous Model Parameters of a Time Varying Structure  
via Recursive Least Square Techniques

研究生：劉靖俞

Student : Jing-Yu Liu

指導教授：黃炯憲 博士

Adviser : Prof. Chiung-Shiann Huang



January 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年一月

# 應用遞迴最小平方差法識別時變系統之瞬時模態參數

研究生：劉靖俞

指導教授：黃炯憲博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘要

本研究為利用線上(on-line)分析之數種遞迴最小平方差法(RLS)從時變系統之動態位移反應架構 TVARX(time varying autoregressive with exogenous input)模型，利用識別之時變係數直接估算瞬時模態參數。所考慮之遞迴最小平方差法有遺忘因子法、卡式濾波器，以及權重多項式基底函數法。

藉由單自由度之時變線性系統之數值模擬反應驗證各種遞迴最小平方差法之優劣點，其中探討遺忘因子( $\lambda$ )、卡式濾波器之控制因子( $r_1(t)$ )、多項式基底函數之項數( $k$ )、TVARX 之模型階數( $L, J$ )與雜訊等參數對識別結果之影響。分析結果顯示 (1) 權重多項式基底函數法中的遺忘因子( $\lambda$ )之選擇對於瞬時模態的識別結果相當敏感，(2) 當分析 2% 噪訊比之反應時，所使用各種遞迴法之識別效果不盡理想，但是仍可合理追蹤瞬時模態之變化趨勢。

最後分別應用卡式濾波器以及遺忘因子法於分析鋼筋混凝土門型架構和三層樓鋼構之震動台實測資料，識別其瞬時模態特性；識別結果與觀察到之物理現象一致。

# Identification of Instantaneous Model Parameters of A Time Varying Structure via Recursive Least Square Techniques

Student : Jing-Yu Liu

Adviser : Prof. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering  
National Chiao-Tung University

## Abstract

This study applies various recursive least squares (RLS) algorithms to establish the time varying autoregressive with exogenous input (TVARX) model for a structure from its dynamic displacement responses and further estimates the instantaneous modal parameters of the structure from the time varying coefficients of TVARX model. The RLS algorithms under study include a forgetting factor approach, a Kalman filter approach and a weighted polynomial basis function expansion approach.

The RLS algorithms under consideration are utilized to process numerically simulated responses of single-degree-of-freedom (SDOF) systems with different instantaneous natural frequencies and modal damping ratios. The advantages and shortcomings of these RLS algorithms are investigated through comprehensively studying the effects of main parameters in each approach on accurately identifying the instantaneous modal parameters of the SDOF systems. The parameters under investigation include the order of TVARX model, forgetting factor, control factor in Kalman filter, order of polynomial basis, and noise. It is found that the identified results obtained by the weighted polynomial basis function expansion approach are very sensitive to the values of forgetting factor. Although the instantaneous parameters are poorly identified by all the approaches considered herein in processing the noisy responses with 2% noise-to-signal ratio, the general trends of instantaneous modal parameters varying with time are reasonably found.

The approaches under consideration are further applied to process measured dynamic displacement responses of a single-story RC frame and a three-story steel frame in shaking table tests. The specimens were damaged during testing. The identified trends of instantaneous modal parameters varying with time are consistent with the observed physical phenomena.

## 誌謝

研究與寫論文的過程，是一種全新階段的學習，感謝黃炯憲老師的悉心指導，使我在交大研究所的生活，過的相當豐富且充實，最後能順利完成論文。

感謝口試委員洪士林教授、鄭復平副教授、趙文成副教授對本論文的指教，讓我能改善不足之處，使論文更趨完整。另外也感謝交大諸位老師在課業與觀念上的指導，讓學生受惠無窮。

除了黃炯憲老師的悉心教導，就讀博士班的明儒學長和威智學長亦給予我相當多的指導與協助，讓我由衷感激，且能與明儒學長、威智學長、勝彥學長、增尉學長、慎謙學長、加地學長、同窗仲維、昱成以及學弟政淵、榕師一起在生活和課業中成長學習、相互激勵，更是相當幸運。

最後感謝我的家人，有你們的技持與鼓勵，才能讓我順利度過目前人生所接觸之階段與過程，感謝你們。

# 目錄

中文摘要 .....	I
英文摘要 .....	II
誌謝 .....	III
目錄 .....	IV
第一章 前言 .....	1
1.1 文獻回顧 .....	2
1.2 研究目的以及方法 .....	5
1.3 論文架構 .....	6
第二章 遺忘因子法及卡式濾波器 .....	7
2.1 前言 .....	7
2.2 遺忘因子法 .....	7
2.3 卡式濾波器(Kalman filter) .....	11
2.4 瞬時模態參數估算 .....	13
2.5 數值模擬驗證 .....	14
2.5.1 常數型遺忘因子之影響 .....	16
2.5.2 變數型遺忘因子之影響 .....	18
2.5.3 卡式濾波器控制因子之影響 .....	18
2.5.4 雜訊之影響 .....	19
2.6 小結 .....	22
第三章 權重多項式基底函數法 .....	24
3.1 前言 .....	24
3.2 配合遺忘因子 .....	24
3.3 配合卡式濾波器 .....	29
3.4 數值模擬驗證 .....	30
3.4.1 常數型遺忘因子之影響 .....	31
3.4.2 變數型遺忘因子之影響 .....	32
3.4.3 卡式濾波器控制因子之影響 .....	33
3.4.4 雜訊之影響 .....	34
3.5 小結 .....	37
第四章 實測資料之識別結果 .....	39
4.1 前言 .....	39
4.2 鋼筋混凝土震動台試驗 .....	39
4.2.1 待測結構物介紹 .....	39
4.2.2 等效勁度與阻尼之迴歸 .....	40
4.2.3 動態反應初判 .....	42
4.2.4 實測資料之識別結果 .....	43

4.3 鋼構樓房震動台試驗 .....	44
4.3.1 待測結構物介紹 .....	44
4.3.2 動態反應初判 .....	45
4.3.3 實測資料之識別結果 .....	45
第五章 結論與建議 .....	47
5.1 結論 .....	47
5.2 建議 .....	48
參考文獻 .....	50



# 第一章 前言

藉由現地量測資料識別結構物動態特性於工程應用是十分重要地。識別所得之模態參數將不只被用於驗證或修正於設計階段所建立之有限元素模型，也可用於各種載重（如強震）或材料的退化等對結構造成之損害評估。另外，識別之動態特性亦是目前流行之主被動控制設計之必須資料。

台灣處於地震發生頻繁之地震帶上，於建築法規中常以韌性設計來抵抗地震力，以避免地震造成結構物之破壞倒塌。於 921 大地震中許多新舊結構物倒塌，加速隔減震裝置廣泛地用於補強或修復舊有結構物，以及新結構物之設計。許多半主動控制元件(如半主動控制磁流變消能器、電流變阻尼、蓄壓式油壓半主動減震器、半主動摩擦阻尼器等)亦相繼被研發與應用。若此類半主動控制元件裝置於結構物上，則該結構系統之勁度或阻尼於地震中將隨時間而改變。此即為系統識別領域中所稱之時變系統。在此類工程應用問題中，以傳統線性模型將難以完整描述結構於反應過程中所表現之非線性行為與隨時間改變之動態特性。若能透過系統識別技巧識別該結構系統隨時間改變之動態特性或建立起完整之非線性模型，將有助於檢驗半主動控制元件等非線性元件應用於結構物之設計，及評估結構系統健康情況。

若傳統結構系統於地震中損傷而展現非線性行為，其亦可被視為一時變系統若能透過系統識別估算該系統隨時間改變之動態特性，則有助於吾



人了解該結構系統產生非線性為對整體動態行為之影響。因此，可知發展一準確且有效率之時變系統識別技巧於土木工程應用之重要性。

以下將對時變系統所使用之分析方法做回顧，並且對研究中所用使之理論背景與應用領域做個介紹。

## 1.1 文獻回顧

一般而言，識別時變系統之方法分為兩類：(I) 非參數法；(II) 參數法。非參數法將反應訊號視為一非穩態(nonstationary)訊號，利用時間-頻率表示法來識別頻率隨時間改變之特性，例如利用短時傅利葉轉換法(STFT)(Cohen, 1989)、Wigner-Ville distribution(WVD)(Cohen, 1989；Martin and Flandrin, 1985)、Choi-Williams distribution(CWD)(Choi and Williams, 1989)、adaptive optimal kernel distribution(AOKD)(Jones and Baraniuk, 1995)、Huang-Hilbert transformation(Huang et al., 1998；Yang et al., 2003)以及小波轉換(Qian, 2002；Kijewski and Kareem, 2003)等，一般而言，此類方法大部分只能適用於結構系統無外力之反應訊號(例如自由振動反應)分析，識別結構系統隨時間改變之頻率或阻尼。但於識模態有其困難性。另外此類方法如同非時變系統於頻率域分析技巧，其識別頻率解析度不是很高，對互相干擾嚴重之模態不易識別。

時變參數法提供了簡潔且高解析度之方法，並被廣泛地應用至工程問題。識別時變系統有兩種方法普遍被採用，分別是遞迴最小平方差法以及

基底函數展開技巧。

#### (A)遞迴最小平方差法

假設一個非穩態過程，為局部穩態或者於一個有限之時間區間中變化相當緩慢；如此，則有很多種迴歸估算之技巧可以應用。RLS(常數型遺忘因子)(Ljung,1987; Johansson, 1993; Parkum et al., 1992; Zh-ang, 1991; Arunachalam and Chesmore, 1993; Campi, 1994; Wang et al., 1996; Kadiramanathan et al., 2000; Pang et al., 2005; Zhao and Chen 2008; Rene, 2008)、等。此法可以處理平緩變化之非穩態訊號；但是對於處理突然改變之系統，此法將不再有效。為了改善這樣的缺點，變數型遺忘因子(variable forgetting factors) (Fortesceu et al., 1981; Toplis et al., 1988; Cho et al., 1990; Wang and Reza,1996; Song, 2000; Song, 2002; Sugisaki and Ohmori, 2007; Chen et al., 2008;)、梯度變數形遺忘因子(Gradient-Based variable forgetting factor)(Leung and So, 2005)、重新設置協方差矩陣(covariance matrix re-setting) (Jiang et al.,1992; Park et al., 1992)、常數跡(constant trace)(Johansson,1993)、窗函數移動技巧(sliding window technique)(Choi and Bien, 1989; Belge and Miller, 2000)、選擇性遺忘(selective forgetting) (Parkum et al., 1992)、遞迴增量估測法(recursive incremental estimation) (Zhou et al., 1996)、遞迴性工具變數法(Ljung, 1987)、遞迴性誤差預測法(Lee, 1990)與卡式濾波器(Kalman filter) (Loh et al., 2000; Ljung, 1987; Schoukens, 1991;

Soderstrom, 1988; Sinha, 1983; Chen, 1991; Cao et. al., 2001; Ma, 1996; Zhang et al, 2008; Costa and Astolfi, 2008; Enbin et al., 2008)、推廣性卡式濾波器 (Extended Kalman filter)(Roman, 1987; Seibold and Fritzen, 1991; 吳, 1997; Atsuhiko and Hiroshi, 2007)等技巧被提出並與遞迴最小平方差法結合。然而，遺忘因子之選擇對分析結果有決定性之影響，對此參數之決定目前尚無完整之參考依據。雖然以狀態空間模型結合 Kalman filtering algorithm(Ljung, 1987; Kalouptsidis and Theodoridis, 1993)可以追蹤突然變化之過程。但是，這個方法常常高估參數值，而且參數估算值之變異性相當大。

#### (B)基底函數展開技巧

基底數展開技巧是一種具有發展潛力及目前備受關切之方法。其基本觀念為：對每一個時變系統參數，利用基底函數展開，再以取小平方差法，計算每一基底函數係數。以此估算各基底函數對應之係數將不隨時間改變。利用基底函數最主要之目地，乃是考慮減少所須之資料量以獲得必須之時變係數。因此，識別快速變化之非穩態過程，以基底函數處理會比以迴歸識別技巧處理更為恰當。但是，必須注意的是，基底函數展開之方式對於波型變化過於劇烈（須大量之基底函數）且歷時過於短暫之資料（建立之方程式少），仍然無法萃取其動力行為。有幾種基底函數常被使用，包括富利葉序列(Marmarelis, 1987)、Legendre Polynomials (Zou et al., 2002)、

Walsh function (Zou et al., 2002)、以及小波 (Tsatsanis and Giannakis, 1993)。

此類方法之優劣與選擇基底函數之次空間延伸 (使用之基底個數) 有很大的相關。Zou(2003)透過數值模擬發線 Legendre Polynomials 可準確模擬平滑變化之時變曲線，Walsh function 則對片段穩態 (piece-wise stationary) 之時變係數有較好之模擬結果。一般而言，基底函數展開法須引入較多之基底函數，而過多之基底函數易造成數值困難，特別是多項式基底。

## 1.2 研究目的以及方法

結構系統識別或結構系統健康診斷分析可分為線上(on-line)分析或離線(off-line)分析。若一結構系統於小地震來襲時，表現出線性行為，而於大地震時，由於損傷表現出非線性行為；則此非線性行為使得結構系統特性會隨時間改變。因此，可從一結構之地震反應識別其特性隨時間改變之趨勢，判斷該結構是否依舊健康。

遞迴最小平方差法(RLS)(遺忘因子法、卡式濾波器…等)雖然可使用於線上分析，但其缺點為常無法準確追蹤時變系統特性。而將時變系統之時變係數利用基底函數展開，雖可準確追蹤時變系統特性，但由於利用傳統最小平方差法，且須要較多之基底函數增加計算量，無法用於線上分析。

Niedzwiecki(2000)則提出一套以多項式基底函數配合遞迴最小平方差法以估算系統之參數。

本研究即比較遺忘因子法、卡式濾波器、以及權重多項式基底函數法

於估算時變系統之瞬時模態參數之優劣。並探討遺忘因子( $\lambda$ )、卡式濾波器之控制因子( $r_1(t)$ )、多項式基底函數之項數( $k$ )、TVARX 之模型階數( $L, J$ )與雜訊等參數對識別結果之影響。對此些方法參數之選用可供未來使用者參考之依據。

### 1.3 論文架構

本論文共有五章，其內容如下：

- 第一章 前言。主要內容為研究動機與背景；前人研究方法與成果之相關文獻介紹，並闡述本論文之研究方法與架構。
- 第二章 利用遞迴最小平方差法於時變系統識別。其主要內容為介紹遞迴最小平方差法中之遺忘因子法及卡式濾波器，並以之建構 TVARX 模型之方法；以單自由度時變系統之模擬反應驗證所提方法之適用性。
- 第三章 以遞迴最小平方差法中權重多項式基底函數法於時變系統識別。其內容包括介紹遺忘因子及卡式濾波器配合多項式基底展開之遞迴式，並以之建構 TVARX 模型及識別瞬時模態參數；以單自由度時變系統之模擬反應驗證所提方法之適用性。
- 第四章 將前二章節所提之各種遞迴法應用於 RC 架構之震動台和三層樓鋼構震動台試驗數據分析。
- 第五章 結論與建議。主要總結本研究之分析結果。

## 第二章 遺忘因子法及卡式濾波器

### 2.1 前言

本章主要是介紹以遞迴最小平方差法架構 TVARX(time varying autoregressive with exogenous input)模型，以識別線性時變系統之瞬時模態特性。此方法主要是透過輸入與輸出反應架構 TVARX 模型，並利用不同的遞迴最小平方差法求得 TVARX 模型之參數，再進一步估算時變系統之瞬時模態參數。2.2 節主要介紹以遺忘因子法架構 TVARX 模型。2.3 節將介紹卡式濾波器(Kalman filter)之遞迴循環式。2.4 節介紹瞬時模態參數之估算方法。2.5 節則是將 2.2、2.3 節中所提出之遞迴識別流程應用於四組不同時變曲線之時變系統，以驗證方法之正確性及準確性。

### 2.2 遺忘因子法

單一輸出/輸入之時變 ARX ( TVARX(L,J)) 數學模式為

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \phi_i(t)y(t-i) + \sum_{j=0}^J g_j(t)f(t-j) + a_n(t) \quad (2.1)$$

其中， $y(t-i)$  是在  $t-i\Delta t$  時刻下量得之反應； $f(t-j)$  是在  $t-j\Delta t$  量得之外力輸入； $\phi_i(t)$  和  $g_j(t)$  為待測之時變係數； $a_n(t)$  為誤差，由於量測噪訊或模型誤差所造成。TVARX 通常被應用於架構時變線性系統或非線性系統之輸入與輸

出關係。當利用 TVARX 模式建構一非線性系統之輸入及輸出時，即是將與位移或速度反應相關之系統特性(勁度或阻尼，為時間之隱函數)以一等價之時間顯函數代替。

以遺忘因子法建立 TVARX 模式之遞迴式(Niedzwiecki and Klaput, 2001)，將式(2.1)改寫成如下之線性迴歸形式：

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{i=1}^I \phi_i(t)y(t-i) + \sum_{j=0}^J \vartheta_j(t)f(t-j) + a_n(t) \\
 &= [y(t-1) \quad y(t-2) \quad \cdots \quad y(t-i) \quad f(t) \quad f(t-1) \quad \cdots \quad f(t-j)] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vartheta_0 \\ \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_j \end{bmatrix} + a_n(t) \\
 &= \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t) + a_n(t)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (y(t-1), \dots, y(t-i), f(t), \dots, f(t-j))^T \tag{2.3a}$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_i(t), \vartheta_0(t), \dots, \vartheta_j(t))^T \tag{2.3b}$$

定義一個目標函數(loss function)：

$$J(t, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^t \beta(t, n) [y(n) - \boldsymbol{\varphi}^T(n)\boldsymbol{\theta}]^2 \tag{2.4}$$

上式為了能夠追蹤系統參數的時變性，而引入權重序列(weighting sequence)

$\beta(t,k)$ ，其具有如下之性質：

$$\beta(t,n) = \lambda(t)\beta(t-1,n) \quad , \quad 1 \leq n \leq t-1$$

$$\beta(t,t) = 1$$

滿足上列性質、可取：

$$\beta(t,n) = \prod_{j=n+1}^t \lambda(\hat{j}) ; \quad (2.5)$$

其中  $\lambda(t)$  為遺忘因子(forgetting factor)，且  $0 < \lambda(t) < 1$ 。

將目標函數極小化可得，

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \text{ 為 } \boldsymbol{\theta}(t) \text{ 之估算值。} \quad (2.6)$$

其中

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{n=1}^t \beta(t,n)\boldsymbol{\varphi}(n)\boldsymbol{\varphi}^T(n) = \lambda(t)\mathbf{R}(t-1) + \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t) \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{n=1}^t \beta(t,n)\boldsymbol{\varphi}(n)y(n) = \lambda(t)\mathbf{F}(t-1) + \boldsymbol{\varphi}(t)y(t) \quad (2.7b)$$

將式(2.7)代入式(2.6)可得

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) &= \mathbf{R}^{-1}(t)[\lambda(t)\mathbf{F}(t-1) + \boldsymbol{\varphi}(t)y(t)] \\ &= \mathbf{R}^{-1}(t)[\lambda(t)\mathbf{R}(t-1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \boldsymbol{\varphi}(t)y(t)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbf{R}^{-1}(t) \left\{ \left[ \mathbf{R}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t) \boldsymbol{\varphi}^T(t) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \boldsymbol{\varphi}(t) y(t) \right\} \\
&= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{R}^{-1}(t) \boldsymbol{\varphi}(t) \left[ y(t) - \boldsymbol{\varphi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \right]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

為了避免在每一步計算  $\mathbf{R}(t)$  之逆矩陣，另外定義矩陣

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) \tag{2.9}$$

利用矩陣逆運算法則(matrix inversion lemma)

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BCD}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \tag{2.10}$$

令  $\mathbf{A} = \lambda(t) \mathbf{R}(t-1)$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{D}^T = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 、 $\mathbf{C} = 1$  代回式(2.9)，並利用式(2.10)所示之矩陣逆運算法則，可將式(2.9)寫成：

$$\mathbf{R}^{-1}(t) = \mathbf{P}(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[ \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t) \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{P}(t-1)}{\lambda(t) + \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t)} \right]$$

整個遺忘因子法之遞迴循環式可歸納如下

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{L}(t) \varepsilon(t) \tag{2.11a}$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \boldsymbol{\varphi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \tag{2.11b}$$

$$\mathbf{L}(t) = \frac{\mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t)}{\lambda(t) + \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \boldsymbol{\varphi}(t)} \tag{2.11c}$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[ \mathbf{P}(t-1) - \mathbf{L}(t) \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \right] \tag{2.11d}$$

其中  $\boldsymbol{\theta}(0)$  及  $\mathbf{P}(0)$  為給定初始值。

常用之遺忘因子(Foregetting factor)為指數形， $\lambda(t)$  為：

1.常數型遺忘因子(constant forgetting factor)

即遺忘因子之型式為 $\lambda^i$ ，其中 $\lambda$ 為一常數。

2.變數型遺忘因子(Variable forgetting factor)(吳,1997)

即遺忘因子之型式為

$$\lambda(t) = \lambda_0 \lambda(t-1) + (1 - \lambda_0), \quad 0 < \lambda_0 < 1 \quad (2.12)$$

### 2.3 卡式濾波器(Kalman filter)

卡式濾波器常被用來估測系統的狀態，依 Ljung(1987)之推導，卡式濾波器之表示式為：

$$x(t+1) = \mathbf{M}(t)x(t) + w(t)$$

$$y(t) = \mathbf{H}(t)x(t) + v(t) \quad (2.13)$$

其中  $x(t)$  為  $t$  時刻之狀態向量；  $y(t)$  為觀測向量；  $\mathbf{M}(t)$  為  $x(t+1)$  和  $x(t)$  之轉換矩陣；  $\mathbf{H}(t)$  為狀態向量和觀測向量之關係矩陣；  $w(t)$  為過程誤差；  $v(t)$  為觀測誤差。

一般線性迴歸模式(linear regression model)或 ARX 模式可表示為

$$\hat{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta} \quad (2.14)$$

現在將上式重新改寫成式(2.13)之形式，可得

$$\boldsymbol{\theta}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}$$

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t) + v(t) \quad (2.15)$$

令式(2.13)的  $\mathbf{M}(t) = \mathbf{I}$ 、 $\mathbf{H}(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)$  以及  $w(t) = 0$ ，並考慮  $v(t)$  為平均值為零之  
高斯白噪，則可應用卡式濾波器來分析式(2.15)，在考慮線性模式時，卡式  
濾波器可以簡化而推導出類似遞迴性最小平方方法的遞迴循環運算公式。

如果更進一步考慮 TVARX 模式，則式(2.15)之系統參數俱有時變性而  
不再是常數時，此時式(2.15)將改寫成

$$\boldsymbol{\theta}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{W}(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t) + v(t) \quad (2.16)$$

其中  $\mathbf{W}(t)$  為平均值等於零之高斯白噪，其變異數矩陣(covariance)為時變之  
 $\mathbf{R}_1(t)$ 。卡式濾波器的遞迴循環式可以歸納成以下所示

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{L}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (2.17a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = y(t) - \boldsymbol{\varphi}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{L}(t) = \frac{\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)} \quad (2.17c)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \mathbf{L}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t)\mathbf{P}(t-1) + r_1(t)\mathbf{I} \quad (2.17d)$$

$\boldsymbol{\theta}(0)$  及  $\mathbf{P}(0)$  為給定初始值。 $r_1(t)$  的功能則類似於權重遞迴性最小平方差中的

遺忘因子。

## 2.4 瞬時模態參數估算

從量測反應建立適當的 TVARX 模式，通常吾人欲瞭解該時變線性結構系統之動態特性隨時間變化之行為，此等信息有助於判斷結構系統之損傷情形。TVARX 之通式如式(2.1)所示，在瞬時  $t$  下， $\phi_i(t)$  和  $\vartheta_j(t)$  均為常數係數，故在瞬時  $t$  下，TVARX 模式，即對應於非時變之 ARX 模式。於 2.2 節、2.3 節中，吾人為了介紹以遞迴最小平方差法建立 TVARX 模式之遞迴式，將式(2.1)改寫成式(2.2)線性迴歸式，進而由式(2.11)及式(2.17)可求得瞬時  $t$  下之係數向量  $\theta(t)$ ，提取係數向量  $\theta(t)$  中的係數  $\phi(t)$ ，依非時變 ARX 模式估算動態特性之方法，令

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \phi(t) & \phi_{-1}(t) & \phi_{-2}(t) & \phi_{-3} & \cdots & \phi \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

在時變系統  $\mathbf{G}(t)$  將隨時間改變。 $\mathbf{G}(t)$  特徵值及特徵向量是與結構系統之動態特性有直接關係。其特徵方程式如下式所表：

$$|\lambda^l I - \lambda^{l-1} \phi_1 - \lambda^{l-2} \phi_2 - \cdots - \lambda_k \phi_{l-1}| = 0 \quad (2.19)$$

上式通常用於估算 AR 或 ARMA 時間序列模式之極點(pole)進而估算自然振

動頻率及阻尼比(Wang and Fang, 1986)。式(2.19)中之特徵值常為複數，成雙或成對之共軛根。令  $\lambda_k = a_k + ib_k$ ，則結構系統之瞬時擬自然振動頻率及阻尼比為：

$$\tilde{\omega}_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (2.20a)$$

$$\xi_k = -\frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad (2.20b)$$

其中：

$$\beta_k = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k} \quad (2.21a)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\Delta t} \ln(a_k^2 + b_k^2) \quad (2.21b)$$

$\Delta t$  為時間增量(即取樣頻率之倒數)

通常  $\tilde{\omega}_k$  亦稱為擬自然振動頻率(pseudo-undamped circular natural frequency)。

## 2.5 數值模擬驗證

此節將透過一系列之數值模擬反應驗證以上識別方法對時變系統之識別效果，並且進行各種參數之探討以掌握此識別方法之特性。考慮一單自由度時變運動方程式：

$$\ddot{x}(t) + 2\xi(t)\omega_n(t)\dot{x}(t) + \omega_n(t)^2 x(t) = -a_g(t) \quad (2.22)$$

考慮四種不同型式之瞬時模態參數：

Case 1：平緩變化系統：

$$\omega_n(t) = 2\pi \left( 1.5 - 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right) \right); \quad \xi(t) = 4 + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right), \quad 0 < t < 30 \quad (2.23)$$

Case 2：週期變化系統：

$$\omega_n(t) = 2\pi \left( 1.0 - 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \right); \quad \xi(t) = 5 + 2.5 \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right), \quad 0 < t < 30 \quad (2.24)$$

Case 3：跳躍變化系統：

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 15 \\ 0.5 & 15 < t \leq 30 \end{cases}; \quad \xi(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t \leq 15 \\ 7.5 & 15 < t \leq 30 \end{cases}, \quad 0 < t < 30 \quad (2.25)$$

Case 4：折線變化系統：

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{0.5}{4}(-t+3)+1 & 3 \leq t \leq 7 \\ 0.5 & 7 \leq t \leq 11 \\ \frac{0.5}{4}(t-11)+0.5 & 11 \leq t \leq 19 \\ 1.5 & 19 \leq t \leq 23 \\ \frac{0.5}{4}(-t+19)+1.5 & 23 \leq t \leq 27 \\ 1 & 27 \leq t \leq 30 \end{cases}; \quad \xi(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{2.5}{4}(t-3)+5 & 3 \leq t \leq 7 \\ 7.5 & 7 \leq t \leq 11 \\ \frac{2.5}{4}(-t+11)+7.5 & 11 \leq t \leq 19 \\ 2.5 & 19 \leq t \leq 23 \\ \frac{2.5}{4}(t-19)+2.5 & 23 \leq t \leq 27 \\ 5 & 27 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (2.26)$$

相較於平緩變化系統，週期變化系統之瞬時模態參數變化較為劇烈；

而跳躍變化系統則於某一時刻下為不連續之變化，其瞬時模態變化劇烈程

度更甚於週期變化系統；雖然折線變化系統之瞬時模態參數為連續變化，

但是其變化曲線為一次微分不連續。式(2.23)~(2.26)所列之瞬時自然振動率及阻尼比之時間歷時反應如圖 2.1 所示

以 Runge-Kutta 法求解式(2.22)，可得此時變系統受地震輸入( $a_g(t)$ )之動態反應，求解中取時間增量為 0.004 秒。以下將利用位移反應進行識別。所輸入地震地表加速度及其頻譜圖如圖 2.2 所示。各時變系統對應之自然振動頻率及阻尼比歷時則示於圖 2.3。觀察圖 2.3，平緩變化系統之頻譜圖在 1Hz 附近有明顯之峰值。週期變化系統之頻譜圖則無明顯峰值，但在 1.5Hz 以下有較高之能量。跳躍變化系統之頻譜圖可明顯看在約在 0.5Hz 及 1Hz 有明顯峰值。折線變化系統之頻譜圖亦無明顯峰值，其能量分佈大約在 0.6Hz ~1.4Hz 之間。

在進行各時變系統之 TVARX 建模前，首先利用最小平方差法於欲分析之量測資料段前 200 點資料點，以迴歸出二組參數  $\theta$  及  $P$  值，將此二組參數當權重遞迴性最小平方方法識別理論之起始參數  $\theta(0)$  及  $P(0)$ 。由於無雜訊影響，單自由度系統所對應的 TVARX 模式之理論階數為  $(L,J)=(2,1)$ ；其推導可參考蘇(2008)。

### 2.5.1 常數型遺忘因子之影響

本小節將以 2.2 節所述之方法建構 TVARX 模型，但取常數型遺忘因子，並探討此方法之參數對識別結果之影響。

表 2.1~2.4 為利用不同遺忘因子識別不同時變單自由度系統之瞬時模態參數的相對誤差最大值以及平均值。 $e_{\max,f}$  及  $e_{\max,\xi}$  為瞬時頻率及阻尼比之最大相對誤差， $\mu_f$  及  $\mu_\xi$  為瞬時頻率及阻尼比之相對誤差平均值。由表 2.1~2.4 可知：

(a) 在識別平緩變化系統時，取遺忘因子時  $\lambda = 0.90 \sim 0.98$  相對誤差最大值及平均值均無明顯變化，而當  $\lambda = 0.99$  時，誤差則明顯提高。當取  $\lambda = 0.92$  時，瞬時自然振動頻率有較好的識別結果，其相對誤差最大值 1.06%。而當取  $\lambda = 0.93$  時，瞬時阻尼比則有較好的識別結果，其相對誤差最大值為 16.5%。圖 2.4(a) 為取  $\lambda = 0.93$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b) 識別週期變化系統之瞬時模態時，改變遺忘因子大小 ( $\lambda = 0.90 \sim 0.98$ ) 即便能夠稍微減低自然振動頻率及瞬時阻尼比之識別誤差，但是效果並不明顯。當取  $\lambda = 0.96$  時，雖然能得到較好之識別結果，但其瞬時阻尼比之最大誤差仍已超 100%。圖 2.4(b) 為取  $\lambda = 0.96$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c) 識別跳躍變化系統時，自然振動頻率及瞬時阻尼比於水平段有不錯之識別結果，導致相對平均誤差  $\mu_f$  及  $\mu_\xi$  均小於 2%。但是在跳躍點前後之不連續變化段均無法準確追蹤，造成較大的識別誤差。圖 2.4(c) 為取  $\lambda = 0.9$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d) 識別折線變化系統時，自然振動頻率於線性段及折線段都能有不錯



的識別結果，但瞬時阻尼比則對於折線段之識別效果不佳。同時也能發現，提高遺忘因子對於瞬時阻尼比有較佳的識別結果，但是對於自然振動頻率則反之。圖 2.4(d)為取  $\lambda=0.95$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

### 2.5.2 變數型遺忘因子之影響

本小節將以 2.2 節所述之方法建構 TVARX 模型，但取變數型遺忘因子，令  $\lambda(t)$  依式(2.12)而變化。並探討此方法之參數對識別結果之影響。參考前人作法(吳,1997)，將式(2.12)中之  $\lambda_0$  設為 0.9999， $\lambda(0)$  由 0.90~0.99 進行識別。

表 2.5~2.8 為變數型遺忘因子識別各組時變系統之結果。由表 2.5~2.8 可知，在  $\lambda_0$  設為 0.9999、 $\lambda(0)$  由 0.90 增加至 0.99 之設定下，變數型遺忘因子於無雜訊的四種時變系統之識別結果均近似於常數型遺忘因子。圖 2.5 為變數型遺忘因子所得之四種時變系統的識別結果，其中  $\lambda(0)$  分別取為 (a)  $\lambda(0)=0.9$ 、(b)  $\lambda(0)=0.95$ 、(c)  $\lambda(0)=0.92$ 、(d)  $\lambda(0)=0.92$ 。

### 2.5.3 卡式濾波器控制因子之影響

本小節將以 2.3 節所述之方法建構 TVARX 模型，並探討此方法之參數 ( $r_1(t)$ )對識別結果之影響。表 2.9~2.12 為各組時變系統在不同  $r_1(t)$  下識別所得之相對誤差最大值以及平均值。由表 2.9~2.12 可知：

(a)識別平緩變化系統時， $r_1(t)$ 取過大或過小，均會造成系統識別之誤

差加大，同時也可看出，卡式濾波器在識別此一變系統時，於自然振動頻率及瞬時阻尼比的識別結果並不如遺忘因子法來得準確。圖 2.6(a)為取  $r_1(t)=1$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b)識別週期變化系統時，卡式濾波器與遺忘因子法相比雖然在自然振動頻率之識別效果較差，但對於瞬時阻尼比能有較準確之識別結果，在  $r_1(t)=1$  時，其瞬時阻尼比識別之相對平均誤差能降至 20%以內，最大相對誤差亦縮小至 50%以下。與遺忘因子法之識別結果相比，有顯著的改善。圖 2.6(b)為取  $r_1(t)=1$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c)識別跳躍變化系統時， $r_1(t)$  增加，導致識別結果誤差之增加，且和遺忘因子法相同，最大相對誤差發生處仍在跳躍點前後之不連續段附近。圖 2.6(c)為取  $r_1(t)=0.1$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d)識別折線變化系統時， $r_1(t)$  增加，可得到較好之識別結果，相對於遺忘因子法，瞬時阻尼在折線段識別之跳動情形較不明顯，但是整體的識別效果仍是不夠準確。圖 2.6(d)為取  $r_1(t)=10$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

#### 2.5.4 雜訊之影響

為瞭解雜訊對識別品質之影響，於四組時變系統數值模擬之相對位移反應及輸入反應中加入白噪。任取二組和時變線性系統相同取樣頻率之白

噪，接著正規化該白噪，使其標準差為 1，再分別調整其標準差等於輸入及輸出資料之標準差之 2%，再將此白噪疊加至輸入及輸出資料，所得為噪訊比 2% 之反應資料。

表 2.13~2.16 為以常數形遺忘因子識別各組時變系統之結果。由表 2.13~2.16 可知：

(a) 識別平緩變化系統時，可看出在相同之階數 $(I, J)$ 下，提高遺忘因子 $\lambda$ 能獲得較準確之識別結果。而在同一遺忘因子下，提高階數 $(I, J)$ 也能提升識別之準確度。圖 2.7(a) 為取 $(\lambda, I, J) = (0.99, 50, 50)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b) 識別週期變化系統時，不論提高階數 $(I, J)$ 或者是調整遺忘因子 $\lambda$ ，對整體的識別效果，均無明顯的改善，自然振動頻率之相對平均誤差均大於 2%，且瞬時阻尼比之平均誤差也遠大於 20%。圖 2.7(b) 為取 $(\lambda, I, J) = (0.99, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c) 識別跳躍變化系統時，遺忘因子越接近 1，整體之識別誤差也隨著降低，而當階數 $(I, J)$ 隨著遺忘因子提高時，自然振動頻率及瞬時阻尼比的識別誤差可控制在 2% 及 20% 以下。圖 2.7(c) 為取 $(\lambda, I, J) = (0.99, 50, 50)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d) 識別折線變化系統時，雖然提高遺忘因子 $\lambda$ 能得到較好的識別結果，但提高階數 $(I, J)$ 則並不一定能獲得較好的識別結果，瞬時阻尼比最大誤

差仍發生在參數模態斜率變化處。圖 2.7(d)為取 $(\lambda, I, J) = (0.99, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

表 2.17~2.20 為以變數型遺忘因子識別各組時變系統之結果，可觀察到下列現象：

(a)識別平緩變化系統時，變數型遺忘因子的識別效果較常數型遺忘因子為佳，且於自然振動頻率之識別誤差更小。圖 2.8(a)為取 $(\lambda(0), I, J) = (0.99, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b)識別週期變化系統時，變數型遺忘因子和常數型遺因子同樣無法有效的追蹤系統的自然振動頻率及瞬時阻尼比。瞬時阻尼比之識別平均誤差均遠大於 20%。圖 2.8(b)為取 $(\lambda(0), I, J) = (0.98, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c)識別跳躍變化系統時，和常數型遺忘因子所得結果類似，提高 $(I, J)$ 之階數及 $\lambda$ 都能得到較佳之識別結果，最大識別誤差點發生在跳躍點前後。圖 2.8(c)為取 $(\lambda(0), I, J) = (0.99, 50, 50)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d)識別折線變化系統時，提高 $(I, J)$ 之階數有可能會造成誤差之增大，變數型遺忘因子在折線段之識別結果依然不理想。圖 2.8(d)為取 $(\lambda(0), I, J) = (0.99, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

表 2.21~2.24 為卡式濾波器識別各組時變系統之結果，可觀察到：

(a) 識別平緩變化系統時，若增加 $(I, J)$ 之階數或 $r_1(t)$ 之值，並不一定能夠減少誤差，與遺忘因子法之識別結果相比較不穩定。圖 2.9(a) 為取 $(r_1(t), I, J) = (0.1, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b) 識別週期變化系統時，雖然瞬時阻尼比之抖動較遺忘因子法穩定，但是相對平均誤差仍舊遠大於 20%。且增加 $(I, J)$ 之階數會造成誤差之加大。對此系統之識別效果仍不理想。圖 2.9(b) 為取 $(r_1(t), I, J) = (0.1, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c) 識別跳躍變化系統時， $(r_1(t), I, J) = (0.1, 40, 40)$ 時有較好的識別結果，最大識別誤差發生在跳躍點前後。圖 2.9(c) 為取 $(r_1(t), I, J) = (0.1, 40, 40)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d) 識別平緩變化系統時，由表可看出， $r_1(t)$ 越大時，需要較高的 $(I, J)$ 階數配合，才能獲得相對好的識別結果，與遺忘因子法相比，在折線段的跳動較為穩定，但是整體的識別誤差仍然是較大。圖 2.9(d) 為取 $(r_1(t), I, J) = (1, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

## 2.6 小結

本章介紹一套時變線性系統識別模式，以估算時變線性系統之瞬時模態。研究中利用遞迴最小平方差法中之遺忘因子法及卡式濾波器架構 TVARX 模型，求取待測之時變係數，以建立之結構之系統矩陣，最後經由

系統識別程序，獲得系統之模態參數如自然振動頻率以及阻尼比。

由數值模擬之結果，可發現於遺忘因子法及卡式濾波器中，遺忘因子和  $r_1(t)$  之值對識別結果之改善並無一定規律性可循，適用之遺忘因子和  $r_1(t)$  可能隨著時變系統特性、有無雜訊、外力輸入項而不同。

對於四種時變系統的識別結果而言，遺忘因子法對平緩變化系統以及跳躍變化系統，其瞬時自然振動頻率之相對誤差平均大約都在 1%，但在跳躍點前後無法準確追蹤參數之變化。對於變化較迅速之週期變化系統，在瞬時阻尼比之識別誤差較大，相對誤差最大值超過 100%，相對誤差平均值也遠高於 20%。而對於折線變化系統，誤差主要發生在模態參數斜率改變處。卡式濾波器之識別效果則較權重遞迴性最小平方差法為差，其較容易高估或低估系統之參數值；但對於週期變化系統而言，其瞬時阻尼比之相對誤差平均低於 20%，相對誤差最大值也低於 50%，整體之識別結果則是略優於遺忘因子法。

## 第三章 權重多項式基底函數法

### 3.1 前言

本章主要是利用遞迴最小平方差法中之權重多項式基底函數法架構 TVARX 模型，識別線性時變系統之瞬時模態特性。此方法主要是依前一章節所示之遺忘因子法及卡式濾波器配合多項式基底函數，進一步將 TVARX 模型之時變係數以基底函數展開，並估算時變系統之瞬時模態參數。3.2 節將介紹以權重多項式基底函數法配合遺忘因子架構 TVARX 模型。3.3 節將介紹權重多項式基底函數法配合卡式濾波器架構 TVARX 模型。3.4 節則利用 3.2、3.3 節所介紹之遞迴識別流程於 2.5 節中所設計的四組不同時變曲線之時變系統，以驗證方法之正確性及準確性。3.5 節則對此章之研究內容做個總結。

### 3.2 配合遺忘因子

以加權基底函數技巧建立 TVARX 時，將 TVARX 之係數函數以選定基底函數展開。在傳統之基底函數展開法常用之基底函數之種類包括有 Walsh 函數(Zou, 2003)，博利葉級數(Marmarelis, 1987)，Legendre polynomials (Niedwiecki, 1988)，小波函數(Tsatsanis, 1993)等。本章則利用多項式函數，配合 2.2 節之遺忘因子法，以求取函數展開之係數(Niedzwiecki, 2000)，即

令式(2.1)之係數 $\phi_i(t)$ 和 $\mathcal{G}_j(t)$ 為：

$$\phi_i(t) = \sum_{l=1}^k c_{il} p_l(t), \quad i=1, \dots, I. \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{G}_j(t) = \sum_{l=1}^k d_{jl} p_l(t), \quad j=0, \dots, J. \quad (3.1b)$$

$$p_l(t) = t^{l-1}, \quad l=1, \dots, k. \quad (3.1c)$$

其中 $c_{il}$ 及 $d_{jl}$ 為待測之係數矩陣， $p_l(t)$ 為所選定之多項式基底函數，其變數為時間函數 $t$ ， $k$ 為多項式基底函數之項數。令：

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_k(t))^T \quad (3.2)$$

其滿足：

(1) 基底函數 $\mathbf{p}(t)$ 能以遞迴式進行運算，存在一個 $k \times k$ 矩陣 $\tilde{\mathbf{A}}$ ，使得

$$\mathbf{p}(t+1) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{p}(t), \quad \forall t \geq 0$$

(2) 基底函數 $\mathbf{p}(t)$ 為方向不變式(direction-invariant)，對每一個 $s \geq 0$

存在一個非奇異(nonsingular)矩陣 $\tilde{\mathbf{B}}(s)$ 使得

$$\mathbf{p}(s-t+1) = \tilde{\mathbf{B}}(s)\mathbf{p}(t), \quad \forall t \in [0, \dots, s]$$

(3) 常數函數 $p_0(t) = 1$

為推導以基底函數展開之遞迴式，令：



$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{v}_1^T \cdots \boldsymbol{v}_I^T \boldsymbol{\mu}_0^T \cdots \boldsymbol{\mu}_J^T)^T \quad (3.3a)$$

其中

$$\boldsymbol{v}_i = (c_{i1}, \dots, c_{ik})^T, \boldsymbol{\mu}_j = (d_{j1}, \dots, d_{jk})^T \quad (3.3b)$$

$\boldsymbol{\gamma}$  為包括所有係數之行向量，其維度為  $[(I+J+1) \times k]$ ，同時令：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t) \otimes \boldsymbol{p}(t) \\ &= (y(t-1)\boldsymbol{p}^T(t) \cdots y(t-i)\boldsymbol{p}^T(t) \ f(t)\boldsymbol{p}^T(t) \cdots f(t-j)\boldsymbol{p}^T(t))^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\boldsymbol{\varphi}(t)$  為式(2.3a)所示之系統反應向量， $\boldsymbol{\psi}(t)$  為一  $[(I+J+1) \times k]$  行向量。 $(A \otimes B)$  為 Kronecker product)。

由式(3.1)~(3.4)，可以推導出和式(2.2)對等之以基底函數展開之線性迴歸式如下：

$$y(t) = \boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\gamma}(t) + a_n(t) \quad (3.5)$$

定義一目標函數(loss function)

$$J(t, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{n=1}^t \beta(t, n) [y(n) - \boldsymbol{\psi}^T(n)\boldsymbol{\gamma}]^2 \quad (3.6)$$

式(3.6)為了能夠追蹤系統參數的時變性，引入之權重序列  $\beta(t, n)$  與式(2.5)有

相同之性質如下：

$$\beta(t, n) = \lambda(t)\beta(t-1, n) ; 1 \leq n \leq t-1$$

$$\beta(t, t) = 1$$

可將其寫成以下之型式：

$$\beta(t, n) = \prod_{j=n+1}^t \lambda(j)$$

$\lambda(t)$  為遺忘因子，且  $0 < \lambda(t) < 1$ 。

同樣將目標函數極小化可得

$$\hat{\gamma}(t) = \mathbf{R}_*^{-1}(t)\mathbf{F}_*(t), \hat{\gamma}(t) \text{ 為 } \gamma(t) \text{ 經目標函數極小化之估算值。} \quad (3.7)$$

其中

$$\mathbf{R}_*(t) = \sum_{n=1}^t \beta(t, n)\boldsymbol{\psi}(n)\boldsymbol{\psi}^T(n) = \lambda(t)\mathbf{R}_*(t-1) + \boldsymbol{\psi}(t)\boldsymbol{\psi}^T(t) \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{F}_*(t) = \sum_{n=1}^t \beta(t, n)\boldsymbol{\psi}(n)y(n) = \lambda(t)\mathbf{F}_*(t-1) + \boldsymbol{\psi}(t)y(t) \quad (3.8b)$$

將式(3.8)代入式(3.7)可得

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) &= \mathbf{R}_*^{-1}(t)[\lambda(t)\mathbf{F}_*(t-1) + \boldsymbol{\psi}(t)y(t)] \\ &= \mathbf{R}_*^{-1}(t)[\lambda(t)\mathbf{R}_*(t-1)\hat{\gamma}(t-1) + \boldsymbol{\psi}(t)y(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{R}_*^{-1}(t) \left\{ \left[ \mathbf{R}_*(t) - \boldsymbol{\psi}(t) \boldsymbol{\psi}^T(t) \right] \hat{\boldsymbol{\gamma}}(t-1) + \boldsymbol{\psi}(t) y(t) \right\} \\
&= \hat{\boldsymbol{\gamma}}(t-1) + \mathbf{R}_*^{-1}(t) \boldsymbol{\psi}(t) \left[ y(t) - \boldsymbol{\psi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\gamma}}(t-1) \right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

定義矩陣

$$\mathbf{P}_*(t) = \mathbf{R}_*^{-1}(t) \tag{3.10}$$

利用式(2.10)所示之矩陣逆運算法則(matrix inversion lemma)於式(3.8)及式

(3.10)，可得

$$\mathbf{P}_*(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[ \mathbf{P}_*(t-1) - \frac{\mathbf{P}_*(t-1) \boldsymbol{\psi}(t) \boldsymbol{\psi}^T(t) \mathbf{P}_*(t-1)}{\lambda(t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) \mathbf{P}_*(t-1) \boldsymbol{\psi}(t)} \right]$$

以權重多項式基底函數法配合遺忘因子之遞迴循環式可歸納如下

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \hat{\boldsymbol{\gamma}}(t-1) + \mathbf{L}_*(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \tag{3.11a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = y(t) - \boldsymbol{\psi}^T(t) \hat{\boldsymbol{\gamma}}(t-1) \tag{3.11b}$$

$$\mathbf{p}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p}(t-1) \tag{3.11c}$$

$$\boldsymbol{\psi}^T(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \otimes \mathbf{p}(t) \tag{3.11d}$$

$$\mathbf{L}_*(t) = \frac{\mathbf{P}_*(t-1) \boldsymbol{\psi}(t)}{\lambda(t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) \mathbf{P}_*(t-1) \boldsymbol{\psi}(t)} \tag{3.11e}$$

$$\mathbf{P}_*(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[ \mathbf{P}_*(t-1) - \mathbf{L}_*(t) \boldsymbol{\psi}^T(t) \mathbf{P}_*(t-1) \right] \tag{3.11f}$$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{k-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ C_{k-1}^{k-1} & \dots & C_1^{k-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11g)$$

其中  $\mathbf{P}_*(0)$  及  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(0)$  為給定初始值， $\tilde{\mathbf{A}}$  為時間增量矩陣。常用之遺忘因子同 2.2 節所示。

因  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t)$  為以基底函數展開之係數矩陣，為得架構 TVARX 模型之係數矩陣  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ ，令：

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{I}_{(t+J+1)} \otimes \mathbf{p}^T(t) \quad (3.12a)$$

則可得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{U}(t) \hat{\boldsymbol{\gamma}}(t) \quad (3.12b)$$

觀察式(3.11)、(3.12)，若令多項式基底之項數  $k=1$ ，則式(3.11)、(3.12) 對等於式(2.11)。

### 3.3 配合卡式濾波器

參照第二章 2.2 節及 2.3 節，由式(2.11)及(2.17)，可得於遺忘因子法和卡式濾波器之遞迴式中，將式(2.11)中之遺忘因子  $\lambda(t)$  設為 1，同時再引入具有相同功能之  $r_1(t)$ ，即為卡式濾波器之遞迴循環式。

同理可知，若將卡式濾波器之 TVARX 係數矩陣以式(3.1)及(3.2)之多項

式基底展開，所得之遞迴循環式應與權重多項式基底函數法配合遺忘因子之遞迴循環式相似。故將式(3.11)中之遺忘因子設為 1，同樣引入一  $r_1(t)$ ，

可得出下列之遞迴循環式

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) &= \hat{\gamma}(t-1) + L_*(t)\varepsilon(t) & (3.13a) \\ \varepsilon(t) &= y(t) - \psi^T(t)\hat{\gamma}(t-1) & (3.13b) \\ p(t) &= \tilde{A}p(t-1) & (3.13c) \\ \psi^T(t) &= \varphi(t) \otimes p(t) & (3.13d) \\ L_*(t) &= \frac{P_*(t-1)\psi(t)}{1 + \psi^T(t)P_*(t-1)\psi(t)} & (3.13e) \\ P_*(t) &= P_*(t-1) - L_*(t)\psi^T(t)P_*(t-1) + \tilde{r}_1(t)I & (3.13f) \\ p(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{k-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ C_{k-1}^{k-1} & \cdots & C_1^{k-1} & 1 \end{bmatrix} & (3.13g) \\ U(t) &= I_{(t+J+1)} \otimes p^T(t) & (3.13h) \\ \hat{\theta}(t) &= U(t)\hat{\gamma}(t) & (3.13i) \end{aligned}$$

### 3.4 數值模擬驗證

本節將以 2.5 節所設計之四組時變曲線系統的數值模擬反應，驗證 3.2、3.3 節所示之識別方法，並且進行該等識別方法中各種參數之探討以掌握此識別方法之特性。在進行各時變系統 TVARX 建模前，首先利用最小平方法

於欲分析之量測資料段前 200 點資料點，估算出二組  $P_*$  及  $\gamma$ ，將此二組參數當做權重基底遞迴性最小平方法識別理論之起始參數  $P_*(0)$  及  $\gamma(0)$ 。

### 3.4.1 常數型遺忘因子之影響

本小節將以 3.2 節所述之方法建構 TVARX 模型，但取常數型遺忘因子，並探討此方法之參數對識別結果之影響。表 3.1~3.4 為利用不同遺忘因子及不同項數之多項式基底函數識別不同時變單自由度系統之瞬時模態參數的相對誤差最大值以及平均值。 $e_{\max, f}$  及  $e_{\max, \xi}$  分別為識別瞬時頻率及阻尼比之最大相對誤差， $\mu_f$  及  $\mu_\xi$  分別為識別瞬時頻率及阻尼比之相對誤差平均值。由表 3.1~3.4 可知：

(a) 在識別平緩變化系統(case 1, 式(2.27))時，當多項式之項數  $k$  增加至 2 時，即可獲得較傳統遞迴法準確之結果。而當  $k=3$  時配合較大之遺忘因子 ( $\lambda \geq 0.991$ ) 比  $k=2$  能有更好的識別效果。當多項式項數繼續提高後，較低之遺忘因子會造成識別誤差之相對誤差最大值增大，顯示識別結果之穩定性較差，需要更高的遺忘因子才能得到滿意的結果。圖 3.1(a) 和圖 3.2(a) 為分別取  $(k, \lambda) = (2, 0.94)$  和  $(3, 0.993)$  所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b) 在識別週期變化系統(case 2, 式(2.28))時，當  $k=2$  時所得之識別結果與遺忘因子法相比(比較表 3.2 和表 2.2)，有明顯之改善，能有效降低自然振動頻率及阻尼比之相對誤差最大值及平均值，但阻尼比之最大誤差仍是較

大。增加多項式項數至  $k=3$  誤差量並未明顯改變，即使配合較高之遺忘因子配合。圖 3.1(b)和圖 3.2(b)為分別取 $(k, \lambda)=(2, 0.94)$ 及 $(3, 0.992)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c)在識別跳躍變化系統時(case 3,式(2.29))，可發現在使用多項式基底識別此一變系統時，所使用之項數增加，識別誤差反而會增大，較遺忘因子法之識別效果為差。相對誤差最大值發生在跳躍點附近。圖 3.1(c)和圖 3.2(c)為分別取 $(k, \lambda)=(2, 0.96)$ 和 $(3, 0.992)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d)在識別折線變化系統(case 4,式(2.30))時，在  $k=2$  時即能獲得優於遺忘因子法之識別結果。提高多項式項數對於識別效果並無明顯改善。相對誤差最大值發生在模態參數斜率改變時。圖 3.1(d)和圖 3.2(d)為分別取 $(k, \lambda)=(2, 0.94)$ 和 $(3, 0.99)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

綜合以上四種時變系統之識別結果，可發現所用之方法對遺忘因子之大小相當敏感。

### 3.4.2 變數型遺忘因子之影響

本小節將以 3.2 節所述之方法建構 TVARX 模型，但取變數型之遺忘因子，令  $\lambda(t)$  依式(2.12)而變化。取  $\lambda_0 0.9999$ ，及  $\lambda(0)$  介於 0.90~0.99 進行識別。由前一小節可得知，加入基底函數時，較低之遺忘因子的識別效果均不理

想，使用變數型遺忘因子時，由表 3.5~3.8 可知雖然其結果和常數型遺忘因子相差不大，但是因為遺忘因子隨著時間而增大，若使用與常數型遺忘因子  $\lambda(t)$  相同之起始遺忘因子  $\lambda(0)$  下，能夠使識別結果和常數型遺忘因子相比更快得到較佳之結果，而隨著選用的起始遺忘因子  $\lambda(0)$  增大，識別誤差也較常數型遺忘因子為大。

圖 3.3 為取多項式基底項數  $k=2$  時所得四種時變系統之識別結果；其中  $\lambda(0)$  取為 0.93，對瞬時自然頻率之識別結果是可以接受的，但對瞬時阻尼比之識別誤差則明顯偏大。圖 3.4 為取多項式基底項數  $k=3$  所得四種時變系統之識別結果；其中  $\lambda(0)$  分別取為(a)0.99,(b)0.99,(c)0.992(d)0.99，與圖 3.3 相比，可發現對於緩變系統之效果仍比  $k=2$  好；對跳躍變化系統和折線變化系統則是比  $k=2$  為差；對於週期變化系統兩者於瞬時阻尼比之識別結果仍是不太理想。

### 3.4.3 卡式濾波器控制因子之影響

本小節將以 3.3 節所述之方法建構 TVARX 模型，並探討此方法之參數  $(k, \tilde{r}_1(t))$  對識別結果之影響。由表 3.9~3.12 可知：

(a)在識別平緩變化系統時，對於不同項數之多項式基底，提高  $\tilde{r}_1(t)$  會使誤差提高。而使用項數較高之多項式基底函數能獲得較好的識別結果。圖 3.5(a)與圖 3.6(a)為分別取為  $(k, \tilde{r}_1(t))=(2,0.01)$  和  $(3,0.01)$  所識別之瞬時模態參



數與理論值之比較。

(b) 識別週期變化系統時，則是提高 $\tilde{r}_1(t)$ ，能有較好之識別結果，增加多項式基底項數則是對誤差改善無顯著提升。圖 3.5(b)和圖 3.6(b)為分別取 $(k, \tilde{r}_1(t))=(2,10)$ 和 $(3,10)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c) 當識別跳躍變化系統時，提高多項式項數以及 $\tilde{r}_1(t)$ 均會使識別的誤差量上升，相對誤差最大值發生在跳躍點附近。圖 3.5(c)和圖 3.6(c)為分別取 $(k, \tilde{r}_1(t))=(2,0.01)$ 和 $(3,0.01)$ 、所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d) 識別折線變化系統時，提高多項式項數以及 $\tilde{r}_1(t)$ 均會使識別誤差上升，相對誤差最大值發生在模態參數斜率變化附近。圖 3.5(d)和圖 3.6(d)分別為取 $(k, \tilde{r}_1(t))=(2,0.01)$ 和 $(3,0.01)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

#### 3.4.4 雜訊之影響

為了解雜訊對加入基底函數之遞迴識別法的影響，針對利用 2.5.4 節中所述之含 2% 雜訊反應進行分析。同時由無雜訊之識別結果可知，所選用之遺忘因子並無一定之規律性。較佳之遺忘因子可能隨時變系統特性、輸入外力項、多項式項數而不同。因此、針對含雜訊之反應，重複前述之參數探討，選出適合之遺忘因子及 $\tilde{r}_1(t)$ 。

表 3.13~3.16 為以常數型遺忘因子識別各組時變系統之結果。可發現：

(a) 識別平緩變化系統時，提高模型階數 $(I,J)$ 可以改善識別結果，圖 3.7(a)

與圖 3.8(a)分別為取 $(k, \lambda, I, J)=(2, 0.99, 50, 50)$ 和 $(3, 0.995, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b)識別週期變化系統時，加入多項式基底之識別結果和遺忘因子法相比，瞬時自然振動頻率和阻尼比的識別誤差均能改善，但阻尼比之相對誤差最大值仍大於 100%，對於阻尼比之識別仍不理想。圖 3.7(b)與圖 3.8(b)分別為取 $(k, \lambda, I, J)=(2, 0.99, 40, 40)$ 和 $(3, 0.995, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c)識別跳躍變化系統時，可發現和無雜訊之識別結果有相同之現象，提高多項式基底之項數會造成識別誤差加大，且整體識別效果較遺忘因子法於此一系統的識別效果差。相對誤差最大值在跳躍點附近。圖 3.7(c)與圖 3.8(c)分別為取 $(k, \lambda, I, J)=(2, 0.995, 50, 50)$ 和 $(3, 0.995, 50, 50)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d)識別折線變化系統時，和識別跳躍變化系統類似，提高多項式項數反而會造成誤差增大，同時遺忘因子需提高才有較好之識別結果，相對最大誤差在斜率改變處。圖 3.7(d)與圖 3.8 (d)分別為取 $(k, \lambda, I, J)=(2, 0.995, 40, 40)$ 和 $(3, 0.995, 40, 40)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

表 3.17~3.20 為以變數型遺忘因子識別各組時變系統之結果。可發現：

(a)識別平緩變化系統時，變數型在同樣之值下雖較常數型有較好的識別

結果誤差改善並不明顯。圖 3.9(a)與圖 3.10(a)分別為取 $(k, \lambda(0), I, J) = (2, 0.99, 50, 50)$ 和 $(3, 0.995, 50, 50)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b)識別週期變化系統時，兩種遺忘因子對阻尼比之識別結果同樣不理想，相對誤差最大值依然大於 100%。圖 3.9(b)與圖 3.10(b)分別為取 $(k, \lambda(0), I, J) = (2, 0.99, 30, 30)$ 和 $(3, 0.995, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c)當識別跳躍變化系統時，和常數型遺忘因子相同，提高 $(I, J)$ 之階數能得到較佳之識別結果，最大相對識別誤差點發生在跳躍點附近。圖 3.9(c)和圖 3.10(c)分別為取 $(k, \lambda(0), I, J) = (2, 0.995, 50, 50)$ 和 $(3, 0.995, 50, 50)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d)識別折線變化系統時，提高 $(I, J)$ 之階數有可能會造成誤差之增大，變數型遺忘因子在模態參數斜率變化處之識別結果依然不甚理想。圖 3.9(c)和圖 3.10(c)分別為取 $(k, \lambda(0), I, J) = (2, 0.995, 30, 30)$ 和 $(3, 0.995, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

表 3.21~3.24 為權重多項式基底函數法配合卡式濾波器識別各組時變系統之結果。可發現：

(a)識別平緩變化系統時，與無雜訊系統相比，需使用較小之 $\tilde{r}_1(t)$ 才能獲得較好的結果，且提高模型之階數 $(I, J)$ 會造成誤差量增加。整體之識別效果較權重多項式基底函數法配合遺忘因子為差，但在瞬時阻尼比之跳動情形

較小。圖 3.11(a)與圖 3.12(a)分別為 $(k, \tilde{r}_1(t), I, J) = (2, 0.00001, 20, 20)$ 和 $(3, 0.00001, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(b)識別週期變化系統時，可發現使用不同項數之多項式基底所對應之 $\tilde{r}_1(t)$ 相差甚大，提高模型之階數 $(I, J)$ 會造成誤差量增加。圖 3.11(b)與圖 3.12(b)分別為取 $(k, \tilde{r}_1(t), I, J) = (2, 1, 20, 20)$ 和 $(3, 0.0001, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(c)識別跳躍變化系統時，可發現卡式濾波器對於阻尼比之識別結果，在經過驟降點後會有高估的現象。 $\tilde{r}_1(t)$ 也需更小的值才能有較好之識別結果。提高多項式基底項數和 TVARX 模型階數 $(I, J)$ 都會使誤差量增大。圖 3.11(a)與圖 3.12(a)分別為取 $(k, \tilde{r}_1(t), I, J) = (2, 0.000001, 20, 20)$ 和 $(3, 0.000001, 20, 20)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

(d)識別折線變化系統時，同樣也需使用較小的 $\tilde{r}_1(t)$ 以進行識別。提高 TVARX 模型階數 $(I, J)$ 則會使誤差量明顯增大。圖 3.11(d)與圖 3.12(d)分別為取 $(k, \tilde{r}_1(t), I, J) = (2, 0.00001, 20, 20)$ 和 $(3, 0.00001, 30, 30)$ 所識別之瞬時模態參數與理論值之比較。

### 3.5 小結

本章介紹了一套時變線性系統識別模式，以估算時變線性系統之瞬時模態。研究中利用權重多項式基底函數法配合第二章介紹之遺忘因子法及

卡式濾波器，透過多項式函數對模型中之時變係數進行展開，再利用所得之遞迴循環式逐步計算每個時刻下之系統特性，以建立之結構之系統矩陣，最後經由系統識別程序，獲得系統之模態參數如自然振動頻率以及阻尼比。

根據數值模擬之結果，可得知，本方法所使用之遺忘因子以及  $\tilde{R}_1(t)$  並無一定規律性可循，適用之遺忘因子和  $\tilde{r}_1(t)$  可能隨著系統、有無雜訊、輸出輸入而不同。且對於較高階數之多項式基底，系統識別結果之好壞對遺忘因子之選擇更加敏感。

對於四種時變系統之識別結果，權重多項式基底函數法配合遺忘因子，在平緩變化系統、週期變化系統以及折線變化系統，其識別效果與遺忘因子法相比，改善不少。但變化較迅速之週期變化系統整體之識別效果依然不甚理想。而對於跳躍變化系統，其識別結果則較遺忘因子法為差。權重多項式基底函數法配合卡式濾波器其識別效果均較權重多項式基底函數法配合遺忘因子為差，其較容易高估或低估系統之參數值，且提高 TVARX 之階數均會使識別誤差增大。

## 第四章 實測資料之識別結果

### 4.1 前言

本節將以前述之各種遞迴最小平方差法(遺忘因子法、卡式濾波器及權重多項式基底函數法)，應用於分析國家地震工程研究中心所執行之鋼筋混凝土結構震動台試驗數據，以及三層樓鋼構樓房震動台試驗數據，以估算此些結構之瞬時自然振動頻率和阻尼比。

### 4.2 鋼筋混凝土震動台試驗

#### 4.2.1 待測結構物介紹

透過震動台試驗可進一步了解結構系統在動態反應下之各種行為，特別是結構系統之非線性行為。國家地震工程研究中心(NCREE)進行了一系列門型鋼筋混凝土結構之震動台試驗，以研究低延展性鋼筋混凝土柱的動態行為，進一步了解他們的損壞機制(Wu,2006)。圖 4.1 為待測結構物之實驗設置，此結構系統可視為單自由度系統。待測結構物之質量為 21 噸，用以模擬在台灣典型的四層樓鋼筋混凝土建築，第一層柱受到軸向外力的情況。加速度計和位移計的位置如(圖 4.2~4.3)所示，並將荷重計裝在特測結構物和震動台之間以測量基底剪力。

待測結構物受到一序列不同強度之的基底振動。首先利用微小振幅的

白噪輸入來估算其模態參數。因為是在待測結構物沒有遭受損害前的情況，此試驗定義為“損害之前”(before damage)試驗。接著待測結構物受到較大強度之地震輸入，此地震輸入為台中某測站於 1999 年 9 月 21 日所量測的集集大地震。在試驗過程中我們發現了強烈的非線性行為，並且在接近連結橫樑的柱發現到損壞的情況，此試驗定義為“地震中”(during earthquake)試驗。最後，待測結構物再受到一較小強度的白噪輸入，此定義為“損害之後”(after damage)試驗。加速度和位移計資料的取樣頻率皆為 200 Hz。以上地震輸入與結構反應示於圖 4.5，而混凝土結構反應之頻譜圖示於圖 4.6。

#### 4.2.2 等效勁度與阻尼之迴歸

於單自由度系統基底剪力與阻尼力以及彈性回復力之關係為

$$F_B(t) = \tilde{k}x(t) + \tilde{c}\dot{x}(t) \quad (4.1)$$

其中位移與由位移計量測得知。速度資料是經由加速度計所得之量測加速度一次積分後得之。

式(4.1)之  $x(t)$  為相對位移資料，因此選取圖 4.2 中位移計編號 *LEBW* 減去編號 *LFC2* 之值。加速度資料選取圖 4.3 中加速度計編號 *LCGC1* 和 *LCGC2* 兩者平均值減去編號 *LBC1* 和 *LBC 2* 兩者平均值，再一次積分即得式(4.1)之速度輸入項。式(4.1)中之  $F_B(t)$  由量測基底剪力之荷重計 (*Load cells*, 如圖 4.4

所示)。欲得式(4.1)中第 $t$ 時刻之 $\tilde{k}$ 及 $\tilde{c}$ ，利用該時刻前後 50 取樣點反應，經最小平方差法得。然後，依定義可估算該時刻之瞬時自然振動頻率及阻尼比。其推導過程如下：

定義誤差估計函數：

$$E = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N (F_{B,m}(t_n) - F_B(t_n))^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N [F_{B,m}(t_n) - (\tilde{k}x(t_n) + \tilde{c}\dot{x}(t_n))]^2 \quad (4.2)$$

其中  $F_{B,m}$  為量測所得之基底剪力。對式(4.2)中之未知數 $\tilde{k}$ 與 $\tilde{c}$ 取導數並令其為零可得：

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{k}} = -\frac{2}{T} \sum_{n=1}^N x[F - (\tilde{k}x + \tilde{c}\dot{x})] = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{c}} = -\frac{2}{T} \sum_{n=1}^N \dot{x}[F - (\tilde{k}x + \tilde{c}\dot{x})] = 0 \quad (4.4)$$

將式(4.3)、(4.4)以矩陣型式表示，可改寫為

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{\partial E}{\partial \tilde{c}} \end{bmatrix} = -\frac{2}{T} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x[F - (\tilde{k}x + \tilde{c}\dot{x})] \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}[F - (\tilde{k}x + \tilde{c}\dot{x})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

將式(4.5)移項整理後可得：

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N xF \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \tilde{k}x^2 + \sum_{n=1}^N \tilde{c}x\dot{x} \\ \sum_{n=1}^N \tilde{k}x\dot{x} + \sum_{n=1}^N \tilde{c}\dot{x}^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$



接著將式(4.6)中之未知數 $\tilde{k}$ 與 $\tilde{c}$ 提出以另一向量表示

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N xF \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x^2 & \sum_{n=1}^N x\dot{x} \\ \sum_{n=1}^N x\dot{x} & \sum_{n=1}^N \dot{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

進一步以矩陣逆運算之方法求得未知數 $\tilde{k}$ 與 $\tilde{c}$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x^2 & \sum_{n=1}^N x\dot{x} \\ \sum_{n=1}^N x\dot{x} & \sum_{n=1}^N \dot{x}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N xF \\ \sum_{n=1}^N \dot{x}F \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

最後根據下列關係式，即可算出結構系統的瞬時自然振動頻率及阻尼比。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{M_e}}, \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (4.9)$$

$$\tilde{c} = 2\xi_n \omega_n \cdot M_e, \quad \xi_n = \frac{\tilde{c}}{2\omega_n \cdot M_e} \quad (4.10)$$

圖 4.7 和圖 4.8 分別為利用以上之迴歸方式所得到之系統瞬時自然振動頻率及阻尼比

### 4.2.3 動態反應初判

觀察圖 4.5 和圖 4.6，可對結構系統動態特性作初步判別。由圖 4.5 和圖 4.6 可知(1)“損壞前”之待測結構物，其輸入時間歷時最大值約為 0.02g，輸

出時間歷時最大值約為  $0.1\text{cm}$ ，其頻譜圖在  $2.5\text{Hz}$  附近有明顯峰值。(2)“地震中”之待測結構物，其輸入時間歷時最大值約為  $0.6\text{g}$ ，輸出時間歷時最大值約為  $8\text{cm}$ ，其頻譜圖在  $1\text{Hz}$  有明顯峰值。(3)“損壞後”之待測結構物，其輸入時間歷時最大值約為  $0.25\text{g}$ ，輸出時間歷時最大值約  $0.15\text{cm}$ ，其頻譜圖在  $2.5\text{Hz}$  附近有明顯峰值。

#### 4.2.4 實測資料之識別結果

本小節利用第二章和第三章所提之各種遞迴技巧進行識別，由前兩章已知，遺忘因子以及  $r_1(t)$  的選用並無規律的準則，故同樣進行一系列之識別分析以上三種輸出及輸入資料。

圖 4.9 和圖 4.10 為使用卡式濾波器，取 TVARX 模型階數  $(L,J)=(5,5)$ 、多項式項數  $k=1$  和  $r_1(t)=0.00001$  之識別結果，包含“損壞前”、“損壞後”和“地震中”的結構系統變化情形。由圖 4.9 和圖 4.10 可清楚觀察到瞬時自然振動頻率和瞬時阻尼比的時變特性；由識別結果可看出“損壞前”和損壞後”後於白噪擾動輸入過程中其瞬時頻率隨時間之變化不大，瞬時自然振動頻率分別約為  $2.4\text{Hz}$  以及  $1.6\text{Hz}$ ，兩者差約  $0.8\text{Hz}$ 。而在“地震中”，其初始頻率值約為  $2.4\text{Hz}$ ，與破壞前之識別結果相當一致；大約在 3 秒附近頻率反應開始驟降，而在 19 秒左右頻率降到最低值。此識別結果，和圖 4.7 與圖 4.8 透過基底剪力、位移與速度資料迴歸所得之時變曲線特性相當一致。接著以

基底剪力與相對位移反應畫出遲滯迴圈圖(圖 4.11)。由遲滯迴圈圖可看出在  $3.02\text{sec} < t < 3.05\text{sec}$  之斜率小於  $t < 3.02\text{sec}$ ，由此可判斷此系統可能於  $t = 3.02\text{sec}$  開始產生破壞。而在  $t = 19.15\text{sec}$  時有最大之延展變量。此時具有較飽滿之遲滯迴圈，亦代表此過程有較大之能量消散。因此於  $t = 19.15\text{sec}$  有較大之阻尼比。

## 4.3 鋼構樓房震動台試驗

### 4.3.1 待測結構物介紹

國家地震工程研究中心對一長 3m，寬 2m 之鋼構架進行一連串之震動試驗(林,2006)。此標竿結構以剛性樓版組以及鋼柱所組合而成，並於每個樓版組上配置 14 組配重鉛塊。每組配重鉛塊包含四塊鉛塊與夾具，重 250kg。14 組配重鉛塊組共重 3500kg。圖 4.12 所示為 Benchmark A 之標準模型之簡示圖，圖 4.13 為實際結構之照片。其長向(3m)為強軸方向，底部裝置底梁組，底梁組下方以四組荷重子與震動相接。結構長向為震動台的 X 向，短向為震動台的 Y 向；圖 4.14 所示為試驗中所設加速度反應量測點位。

Benchmark A 於線性試驗中，採用了 1940 年的 EL Centro NS 之地震紀錄，最大強度調整為 100gal 和 200gal，以及一組白噪隨機震動資料，其強度為 50gal 和 100gal，分別於 X 向以及 Y 向進行兩種 PGA level 的線性試

驗。於非線性試驗方面，同樣採用 1940 年的 EL Centro NS 之地震紀錄，最大強度調整為 300gal 和 500gal。於試驗中，各樓層之絕對位移和絕對加速度反應均有紀錄下來，原始資料之取樣頻率為 200Hz。

因為 Benchmark A 之模型為一對稱系統，其水平反應彼此獨立且不與扭轉運動耦合，理論上 X 向和 Y 向之模態識別可獨立進行。分析時取其中一層樓之 X 向(長向)輸出資料進行識別。對於白噪輸入和 EL Centro NS 地震，均取 10~40 秒區間內之反應進行分析。

#### 4.3.2 動態反應初判

圖 4.15~圖 4.22 為線性試驗中各種輸入以及輸出之反應和頻譜圖。由其頻譜反應可大略看出本實驗所設計之三層樓鋼構於 X 向的自然振動頻率分別約為 1.3Hz、4.5Hz 以及 8Hz。圖 4.23~圖 4.26 為非線性試驗中各種輸入輸出之反應和頻譜圖，其頻譜反應的峰值和線性試驗極為接近，故不易從譜頻反應中判別此一結構之非線性現象。

#### 4.3.3 實測資料之識別結果

本小節同樣利用前二章之遞迴識別技巧進行識別。因遺忘因子以及  $R_1(t)$  的選用並無規律的準則，分別取三層樓之輸入與輸出資料進行一系列之識別分析。分析第一模態時，取多項式基底項數  $k=1$ 、 $(I,J)=(40,40)$ 、 $\lambda=0.995$ ；分析第二模態時，取多項式基底項數  $k=1$ 、 $(I,J)=(40,40)$ 、 $\lambda=0.995$ ；

分析第三模態時，取多項式基底項數  $k=1$ 、 $(I,J)=(50,50)$ 、 $\lambda=0.999$ 。圖 4.27 和圖 4.28 為線性試驗和非線性試驗於各模態之識別結果。

由圖 4.27 可觀察到，識別所得之自然振動頻率和由輸出反應之頻譜圖觀察所得相當一致。白噪輸入反應於三個模態之識別結果可看出在自然振動頻率大致呈一直線，但阻尼比於較高模態之反應則是較為不穩定。EL Centro NS 地震輸入反應之識別反應和白噪反應大致相同，但在第一模態有些許之勁度折減的現象，其誤差大約在 2%，但由頻譜反應和輸入地震強度判斷，系統並未造成破壞，故此誤差有可能為數值誤差。

由圖 4.28 觀察可發現，EL Centro NS 300gal 和 500gal 之地震輸入在 3 個模態的識別結果均有明顯的勁度折減現象，且阻尼比也隨之增加。此一現象約在分析區段中的 5 秒左右，剛好對應至原始地震輸入之 15 秒，為地震最大值發生處。故可推斷結構大約於此時系統特性發生改變。

## 第五章 結論與建議

### 5.1 結論

本文分別以遞迴最小平方差法配合遺忘因子、卡式濾波器以及權重多項式基底函數法分析時變系統之動態位移反應架構 TVARX 模型，利用識別之時變係數直接估算瞬時模態參數。藉由單自由度時變線性系統(數值模擬反應比較以上三種識別方法之優劣點。含有平緩變化、週期變化、跳躍變化與折線變化之時變特性)，探討遺忘因子  $\lambda$ 、卡式濾波器之控制因子  $r_1(t)$ 、多項式基底函數之項數( $k$ )、TVARX 之模型階數( $I, J$ )與雜訊等參數對識別結果之影響。藉此些參數之探討更能掌握此分析方法之特性，並將此識別流程應用於 RC 門型架和三層樓鋼構實測資料之識別。

分析結果可歸納出幾項結論：

1. 遺忘因子法之遺忘因子  $\lambda$  以及卡式濾波器之控制因子  $r_1(t)$  之選擇目前並無一定量方法可循，隨著時變系統特性、有無雜訊、輸入外力、TVARX 之模型階數而須有不同選擇，通常需要進行較多組之識別分析，以決定較佳之結果。
2. 於權重多項式基底函數法中，識別結果對遺忘因子之敏感度隨多項式基底項數增加而增加；但  $r_1(t)$  之值則較不敏感。
3. 分析無雜訊之反應時，以權重多項式基底函數法配合遺忘因子，在平緩

變化以及折線變化系統的識別效果均優於遺忘因子法；但在跳躍變化系統則否，應與加入多項式基底之平滑效果有關。兩者對於變化較迅速之週期變化系統的識別結果都不甚理想。卡式濾波器於四組時變系統之識別結果均劣於遺忘因子法和權重多項式基底函數法配合遺忘因子，其容易高估瞬時模態參數之值。

4. 分析 2% 噪訊比之反應時，遺忘因子法、卡式濾波器以及權重多項式基底函數法對於瞬時模態之識別效果已不盡理想，但是仍可合理追蹤瞬時模態之變化趨勢。
5. 對於 RC 架構之震動台試驗實測資料的識別結果，用實驗過程量得之基底剪力、加速度和位移反應迴歸出此實驗模型之參數變化情形，以此為參考，可看出相似之變化趨勢，顯示在實測應用上之可行性。
6. 對於三層樓鋼構實測資料的識別結果，亦與觀察到之物理現象一致。

## 5.2 建議

1. 對於遺忘因子以及卡式濾波器之控制因子  $r_1(t)$  之選擇，應找出一個定量之方法，避免進行太多之識別分析比較，進而能迅速得到吾人理想之識別結果。
2. 本文僅針對單自由度系統作數值模擬分析，亦可改變輸入為多自由度訊號輸入，將其推廣至多自由度系統。以便應用於分析實際之結構物之動態反應量測。

3. 比較蘇(2008)中以多項式基底配合移動最小平方差之識別結果，發現其識別效果除了跳躍變化系統均明顯優於遞迴最小平方差法，尤其在分析具雜訊之反應；故蘇(2008)之方法或許是估算時變系統之瞬時模態參數之較佳選擇。





## 參考文獻

- Arunachalam, K. G. and Chesmore, E. D., "System identification techniques for adaptive recursive filtering.", International Journal of Electronics, 74(3), pp. 381-399, 1993.
- Atsuhiko, S. and Hiroshi, F., "Transient response analysis with extended kalman filter for recursive self-identification using semi-active devices.", Collection of Technical Papers - 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, pp. 8337-8344, 2007.
- Belge, M. and Miller, E. L., "A sliding window RLS-like adaptive algorithm for filtering alpha-stable noise.", IEEE Signal Process Letter, 7(4), pp. 86-89, 2000.
- Campi, M., "Performance of RLS identification algorithms with forgetting factor: A  $\Phi$ -Mixing approach.", Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, 4(3), pp. 1-25, 1994.
- Cao, L. and Schwartz, M. H., "The kalman filter based recursive algorithm: windup and its avoidance.", Proceedings of the American Control Conference Arlington, pp. 25-27, June 2001.
- Chen, H. U., Identification and Stochastic Adaptive Control, Boston, Birkhauser, 1991.
- Chen, H., Liu, H., Li, D. and Dai, J., "Frequency estimation based on extended RLS with variable forgetting factor.", Electric Power Automation Equipment, 28(7), pp. 45-48, 2008.
- Choi, B. Y. and Bien, Z., "Sliding-windowed weighted recursive least-squares method for parameter estimation.", Electron Letter, 25(20), pp. 1381-1382, 1989.
- Cho, Y. S., Kim, S. B. and Powers, E. J., "Time-frequency analysis using AR models with variable forgetting factors.", Proceedings - ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP 90(5), pp. 2479-2482, 1990.
- Choi, H. I. and Williams, W. J., "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels.", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 17(6), pp. 862-871, 1989.
- Cohen, L., "Time-frequency distributions—A review.", Proceedings of the IEEE, 77(7), pp. 941-981, 1989.
- Costa, E. and Astolfi, A., "A necessary and sufficient condition for semi-stability of the Kalman filter.", Proceedings of the American Control Conference, pp. 1280-1285, 2008.
- Enbin, S., Zhu, Y. and You, Z., "The kalman type recursive state estimator with a finite-step

- correlated process noises.”, Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics, pp. 196-200, 2008.
- Fortescue, T. R., Kershenbaum, L. S. and Ydstie, B. E., “Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors.”, Automatica, 17(6), pp. 831-835, 1981.
- Ma, H. and Girgis, A., “Identification and tracking of harmonic sources in a power system using a kalman filter.”, IEEE Transactions on Power Delivery, 11(3), pp. 1659-1665, 1996.
- Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C. and Shin, H. H. “The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis.”, Proceedings of the Royal Society of London, A454, pp. 903-995, 1998.
- Rene, V., “Recursive identification of switched ARX systems.”, Automatica, 44(9), pp. 2274-2287, September 2008.
- Jiang, J. and Cook, R., “Fast parameter tracking RLS algorithm with high noise immunity.”, Electron Letter, 28(22), pp. 2042-2045, 1992.
- Johansson, R., System Modeling and Identification, Prentice-Hall, NJ, 1993.
- Jones, D. L. and Baraniuk, R. G., “An adaptive optimal-kernel time-frequency representation.”, IEEE Transactions on Signal Processing, 43 (10), pp. 2361-2371, 1995.
- Kadrikamanathan, V., Jaward, M. H., Fabri, S. G., and Kadrikamanathan, M., “Particle filters for recursive model selection in linear and nonlinear system identification.”, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 3, pp. 2391-2396, 2000.
- Kalouptsidis, N. and Theodoridis, S., Adaptive System Identification and Signal Processing Algorithm, Prentice-Hall, UK, 1993.
- Kijewski, T. and Kareem, A., “Wavelet transforms for system identification in civil engineering.”, Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering, 18(5), pp. 339-355, 2003.
- Leung, S. H. and So, C. F., “Gradient-based variable forgetting factor RLS algorithm in time-varying environments.”, IEEE Transactions on Signal Processing, 53(8), pp.3141-3150, 2005.
- Ljung, L. and Soderstrom, T., “Theory and Practice of Recursive Identification.” MIT Press, Cambridge, MA, 1983.
- Loh, C. H., Lin, C. Y. and Huang, C. C., “Time domain identification of frames under earthquake loadings.”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 126(7), pp.693-703,

2000.

- Martin, W. and Flandrin, P., "Wigner-Ville spectral analysis of non-stationary processes.", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP 33, pp. 1461-1470, 1985.
- Marmarelis, V. Z., "Nonlinear and nonstationary modeling of physiological system: an overview in advanced methods of physiological system modeling, edited by V. Z. Marmarelis.", Biomedical Simulations Resource, 1, pp. 1-24, 1987.
- Niedwiecki, M., Identification of Time-Varying Processes, John Wiley & Sons, Inc. New York. NY, USA 2000.
- Niedwiecki, M. and Klaput, T., "Fast recursive basis function algorithms for identification of time-varying processes.", Proceedings of the 40<sup>th</sup> IEEE conference on Decision and Control, 2001.
- Pang, S. H., Yu, K. P. and Zou, J. X., "Time-varying system identification using recursive subspace method based on free response data.", Journal of Vibration Engineering, 18(2), pp. 233-237, June 2005.
- Parkum, J. E., Poulsen, N. K. and Holst, J., "Recursive forgetting algorithm.", International Journal of Control, 55(1), pp. 109-128, 1992.
- Park, D. J. and Jun, B. E., "Self-perturbing recursive least squares algorithm with fast tracking capability.", Electron Letter, 28(6), pp.558-559, 1992.
- Qian, S., Introduction to Time-frequency and Wavelet Transforms. Prentice-Hall PTR, NJ, 2002.
- Roman, S., "Adaptive extended kalman filter with recursive noise covariance identification applied to the fermentation processes.", Modelling, Simulation & Control C: Environmental, Biomedical, Human & Social Systems, 10(2), pp.52-64, 1987.
- Schoukens, J., Identification of Linear Systems : A Practical Guideline to Accurate Modeling. Oxford : Pergamon Press, c1991.
- Seibold, S. and Fritzen, C. P., "Recursive identification of nonlinear systems by means of the extended kalman filter.", Proceedings of the International Modal Analysis Conference, IMAC-1, pp. 802-809, 1991.
- Soderstrom, T. and Stoica, P., System Identification, Prentice Hall. Englewood Cliffs NJ, 1988.
- Sinha, N. K., Modeling and Identification of Dynamic Systems. New York : Van Nostrand Reinhold, c1983.

- Song, S. and Lim, J. S., "Gauss Newton variable forgetting factor recursive least squares for time varying parameter tracking.", Electronics Letters, 36(11), pp. 988-990, May 2000.
- Song, S., Lim, J. S., Baek, S. J., and Sung, K. M., "Variable forgetting factor linear least squares algorithm for frequency selective fading channel estimation.", IEEE Transactions on Vehicular Technology, 51(3), pp. 613-616, May 2002.
- Sugisaki, K. and Ohmori, H., "Online estimation of complexity using variable forgetting factor.", SICE Annual Conference, pp. 1-6, 2007.
- Toplis, B. and Pasupathy, S., "Tracking improvements in fast RLS algorithm using a variable forgetting factor.", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP 36(2), pp. 206-227, 1988.
- Tsatsanis, M. K. and Giannakis, G. B., "Time-varying system identification and model validation using wavelets.", IEEE Transactions on Signal Process, 41, pp. 3512-3523, 1993.
- Wang, F., An, L., An, L., and Xu, Y., "Applying adaptive recursive filtering to system identification.", International Conference on Signal Processing Proceedings, ICSP-1, pp.250-253, 1996.
- Wang, L. and Reza, L., "Variable forgetting factor RLS algorithm with application to fuzzy time-varying systems identification.", International Journal of Systems Science, 27(2), pp. 205-214, Feb 1996.
- Wu, C. L., Yang, Y. S. and Loh, C. H., "Dynamic gravity load collapse of non-ductile RC frames I: experimental approach.", Proceedings of the 8<sup>th</sup> U.S. National Conference on Earthquake Engineering, pp. 750, 2006.
- Zhang, B. M. and Lo, K. L., "A recursive measurement error estimation identification method for bad data analysis in power system state estimation.", IEEE Transactions on Power Systems, 6(2), pp.191-198, Feb 1991.
- Zhang, Z. G., "A recursive frequency estimator using linear prediction and a Kalman filter based iterative algorithm.", IEEE Transactions on Circuits and Systems, 55(6), pp. 576-580, June 2008.
- Zhao, W. X. and Chen, H. F., "Recursive identification for Hammerstein system with ARX subsystem.", PESC 07 - IEEE 38th Annual Power Electronics Specialists Conference, pp. 2478-2484, 2007.
- Zou, R., Cupples, W. A., Yip, K. P., Holstein-Rathlou, N. H. and Chon, K. H., "Time-varying properties of renal autoregulatory mechanisms.", IEEE transactions on bio-medical

engineering, 49, pp.1112-1120, 2002.

Zou, R., Wang, H. and Chon, K. H., "A robust time-varying identification algorithm using basis function.", Annals of Biomedical Engineering, 31, pp.840-853, 2003.

林沛暘等編著，「標竿鋼構樓房震動台試驗」，國家地震工程研究中心報 NCREE-06-020，2006。

吳子修，「結構振動訊號之識別與分析」，國立臺灣大學，博士論文，1997。

蘇威智，「以時間序列模型識別結構之模態參數」，國立交通大學，博士論文，2008。



表 2.1 平緩變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	1.12	21.1	0.28	2.61
0.91	1.03	19.7	0.29	2.60
0.92	1.06	17.2	0.31	2.61
0.93	1.10	16.5	0.34	2.61
0.94	1.21	18.3	0.37	2.58
0.95	1.47	19.4	0.42	2.59
0.96	1.56	17.2	0.48	2.58
0.97	1.73	16.7	0.58	2.60
0.98	2.21	19.0	0.79	2.74
0.99	3.95	33.1	1.43	3.31

表 2.2 週期變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	12.6	244	2.35	32.3
0.91	12.8	234	2.49	32.1
0.92	13.1	217	2.66	31.2
0.93	13.6	197	2.89	31.4
0.94	14.1	184	3.17	30.1
0.95	14.8	169	3.53	30.5
0.96	16.1	151	4.06	30.1
0.97	17.3	153	4.88	29.6
0.98	19.0	171	6.44	29.9
0.99	29.3	172	10.78	29.9

表 2.3 跳躍變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	100	63.5	0.196	0.351
0.91	100	98.9	0.293	0.557
0.92	100	96.6	0.344	0.605
0.93	100	99.7	0.357	0.841
0.94	100	94.8	0.412	0.821
0.95	100	97.7	0.442	0.887
0.96	100	92.8	0.507	0.979
0.97	100	98.4	0.571	1.17
0.98	100	98.9	0.692	1.35
0.99	100	98.8	1.06	1.91

表 2.4 折線變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	6.42	100	0.771	10.2
0.91	6.57	96.1	0.814	10.0
0.92	6.78	92.4	0.872	9.92
0.93	7.16	87.6	0.941	9.75
0.94	7.72	84.3	1.04	9.51
0.95	8.45	81.0	1.18	9.31
0.96	9.29	78.9	1.35	9.16
0.97	10.2	72.3	1.62	9.02
0.98	12.3	63.2	2.16	8.99
0.99	22.0	58.6	3.92	9.96

表 2.5 平緩變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	1.32	20.8	0.351	2.61
0.91	1.41	18.8	0.388	2.67
0.92	1.49	17.1	0.416	2.61
0.93	1.55	15.6	0.448	2.53
0.94	1.60	15.5	0.490	2.59
0.95	1.73	16.6	0.551	2.51
0.96	1.98	19.8	0.646	2.58
0.97	2.53	25.4	0.797	2.66
0.98	3.64	33.4	1.13	3.08
0.99	6.57	38.9	2.02	4.01

表 2.6 週期變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	14.1	183	2.91	31.5
0.91	14.1	183	3.11	31.4
0.92	15.4	182	3.32	31.1
0.93	16.2	174	3.64	30.9
0.94	16.1	163	3.95	30.5
0.95	17.7	161	4.47	30.1
0.96	18.4	170	5.18	29.6
0.97	19.8	175	6.13	29.2
0.98	22.5	173	8.29	29.4
0.99	32.2	153	13.5	29.7



表 2.7 跳躍變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	100	99.8	0.404	0.832
0.91	100	96.8	0.409	0.820
0.92	100	80.6	0.447	0.774
0.93	100	87.4	0.464	0.883
0.94	100	99.3	0.505	1.01
0.95	100	99.4	0.539	1.11
0.96	100	99.2	0.56	1.18
0.97	100	99.5	0.683	1.32
0.98	100	97.3	0.871	1.64
0.99	100	99.1	1.42	2.51

表 2.8 折線變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.90	6.71	88.9	0.945	9.74
0.91	6.98	85.6	1.01	9.58
0.92	7.36	84.1	1.09	9.42
0.93	7.87	82.2	1.19	9.30
0.94	8.49	79.8	1.32	9.18
0.95	9.18	76.8	1.48	9.08
0.96	9.93	72.2	1.72	8.99
0.97	11.0	65.8	2.11	8.96
0.98	13.9	60.7	2.89	9.33
0.99	25.6	70.4	5.38	11.4

表 2.9 平緩變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	11.1	36.5	4.06	8.25
0.1	5.25	24.8	1.43	4.84
1	3.20	18.3	1.03	4.17
10	3.97	14.0	1.33	5.31

表 2.10 週期變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	65.1	89.2	25.7	28.5
0.1	49.3	49.1	15.5	18.4
1	38.2	42.3	9.26	13.2
10	26.0	58.2	6.78	21.3

表 2.11 跳躍變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	100	39.4	1.77	4.32
0.1	100	33.3	1.44	2.35
1	100	33.3	1.84	6.74
10	100	33.3	2.28	10.8

表 2.12 折線變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	35.8	39.8	9.67	15.1
0.1	23.1	33.3	4.72	11.4
1	17.9	33.2	2.93	10.3
10	16.2	33.2	2.39	10.1

表 2.13 含 2%雜訊平緩變化系統反應之識別誤差結果(常數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I, J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	29.6	148	2.26	25.2	21.2	134	1.62	19.3
(25,25)	16.2	137	1.69	20.5	12.7	128	1.32	15.1
(30,30)	24.2	142	1.38	16.2	11.9	90.0	1.15	12.1
(35,35)	16.4	93.2	1.21	13.4	8.96	95.3	1.07	10.2
(40,40)	29.1	116	1.19	12.9	8.81	94.1	1.06	10.01
(45,45)	16.3	96.7	1.14	10.8	8.37	114	1.09	8.49
(50,50)	11.7	102	1.12	10.6	10.8	84.7	1.07	8.71
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I, J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	9.95	117	1.27	12.5	5.78	80.2	1.58	7.01
(25,25)	5.03	79.6	1.13	9.59	4.68	52.9	1.60	5.66
(30,30)	5.24	64.0	1.14	8.34	5.31	44.7	1.64	5.57
(35,35)	5.11	58.5	1.10	7.18	5.34	39.9	1.65	5.83
(40,40)	5.14	87.0	1.12	7.29	5.53	37.6	1.65	5.57
(45,45)	5.23	86.4	1.18	6.67	5.54	39.9	1.71	5.62
(50,50)	5.88	67.0	1.17	7.24	5.41	40.8	1.70	5.32

表 2.14 含 2%雜訊週期變化系統反應之識別誤差結果(常數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	75.1	617	6.52	64.9	30.9	592	6.71	54.7
(25,25)	44.5	589	6.68	54.9	40.6	588	6.92	48.3
(30,30)	35.3	664	6.94	51.8	36.8	467	7.13	48.2
(35,35)	48.6	564	7.05	53.1	35.4	368	7.24	49.5
(40,40)	55.9	395	7.22	52.7	57.2	365	7.52	51.7
(45,45)	60.3	388	7.43	52.1	51.3	388	7.67	52.8
(50,50)	57.3	347	8.01	57.5	42.7	388	8.43	59.0
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	25.3	248	7.64	44.6	34.1	234	11.4	39.3
(25,25)	30.3	322	7.92	43.0	35.9	321	11.5	43.9
(30,30)	31.2	320	8.17	45.4	40.5	330	11.8	45.5
(35,35)	37.7	358	7.95	47.8	36.3	294	11.3	52.4
(40,40)	43.5	272	8.39	53.2	54.9	222	12.6	56.8
(45,45)	36.9	407	8.43	56.4	36.0	284	12.9	62.6
(50,50)	43.1	384	9.20	59.8	46.5	346	12.4	65.3

表 2.15 含 2%雜訊跳躍變化系統反應之識別誤差結果(常數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	230	297	7.16	54.7	116	296	5.21	47.2
(25,25)	128	299	5.92	48.8	121	298	4.14	40.7
(30,30)	116	298	4.98	43.4	110	291	3.57	34.7
(35,35)	109	299	4.44	36.3	104	299	3.13	30.1
(40,40)	100	286	3.69	30.9	100	252	2.61	23.6
(45,45)	140	278	3.97	25.2	129	258	2.79	19.4
(50,50)	150	293	3.24	24.4	128	164	2.65	18.8
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	108	296	3.53	36.0	101	272	2.14	23.5
(25,25)	110	299	2.78	33.3	101	243	1.75	18.4
(30,30)	105	296	2.12	26.5	100	181	1.59	13.8
(35,35)	101	290	2.19	22.2	100	166	1.92	12.8
(40,40)	100	166	1.96	17.7	100	166	1.90	10.8
(45,45)	112	164	1.63	15.8	100	164	1.54	9.13
(50,50)	109	166	1.80	13.4	109	164	1.61	7.82

表 2.16 含 2%雜訊折線變化系統反應之識別誤差結果(常數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I, J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	62.7	486	4.04	53.1	31.3	409	3.41	41.0
(25,25)	73.2	491	3.56	45.9	29.6	313	3.05	36.0
(30,30)	42.0	273	3.21	39.8	27.8	271	2.92	32.0
(35,35)	35.4	255	2.98	37.3	25.1	269	2.91	31.9
(40,40)	30.0	291	2.85	34.6	28.9	234	2.88	29.8
(45,45)	49.7	338	3.09	32.8	37.5	310	2.94	29.3
(50,50)	57.5	583	3.04	34.1	52.1	286	2.92	30.4
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I, J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	32.1	280	3.29	29.2	15.7	121	1.61	19.2
(25,25)	16.7	190	3.04	26.1	15.0	135	1.57	19.0
(30,30)	15.6	162	3.01	24.7	16.9	166	1.66	18.9
(35,35)	15.3	169	3.04	25.9	17.7	152	1.78	20.3
(40,40)	19.8	185	3.02	25.4	22.0	178	1.81	20.0
(45,45)	26.0	248	3.16	26.0	26.8	170	1.94	21.9
(50,50)	20.3	247	3.21	27.2	26.2	162	2.09	23.4

表 2.17 含 2%雜訊平緩變化系統反應之識別誤差結果(變數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	20.5	178	2.21	19.8	11	142	1.88	13.3
(25,25)	22.3	234	2.09	14.6	13	112	1.73	10.2
(30,30)	10.1	112	1.85	11.8	8.82	82	1.63	8.58
(35,35)	12.7	152	1.73	9.71	9.38	168	1.61	7.52
(40,40)	16.5	199	1.72	9.24	9.95	271	1.59	7.24
(45,45)	11.2	124	1.67	8.05	9.33	91.2	1.56	6.71
(50,50)	8.51	124	1.64	8.27	8.91	77.6	1.57	7.16
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	6.6	91.9	1.43	8.97	3.80	49.1	0.945	5.57
(25,25)	6.5	67.2	1.48	7.03	4.22	31.8	0.982	4.62
(30,30)	5.6	54.5	1.36	6.15	3.94	31.4	0.919	4.51
(35,35)	5.7	42.5	1.47	5.71	3.92	38.1	0.956	4.84
(40,40)	6.7	41.7	1.34	5.87	4.24	42.9	0.932	5.38
(45,45)	5.3	51.2	1.22	5.73	4.17	40.5	0.924	5.71
(50,50)	8.5	40.8	1.31	6.46	4.34	47.3	0.964	6.42

表 2.18 含 2%雜訊週期變化系統反應之識別誤差結果(變數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	60.3	404	6.86	52.5	33.2	285	7.51	45.1
(25,25)	48.1	649	7.03	47.7	45.5	433	7.74	44.8
(30,30)	39.6	517	7.35	47.3	29.4	336	7.97	45.6
(35,35)	45.7	365	7.33	48.5	40.8	367	7.84	47.4
(40,40)	54.3	383	7.68	51.2	52.3	368	8.44	52.9
(45,45)	56.2	388	7.72	53.6	45.5	391	8.36	54.7
(50,50)	72.9	393	8.53	58.8	42.4	584	9.12	59.2
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	25.5	231	9.25	40.8	35.4	250	14.1	46.1
(25,25)	31.1	310	9.47	41.4	40.3	324	14.3	51.3
(30,30)	35.6	316	9.33	43.6	43.7	333	14.5	51.2
(35,35)	34.7	338	9.38	48.2	51.3	289	14.3	54.3
(40,40)	43.9	235	9.82	53.7	54.9	232	15.7	58.9
(45,45)	35.4	345	9.87	57.8	52.8	409	15.5	66.7
(50,50)	43.6	352	10.9	61.5	47.5	390	15.4	69.4



表 2.19 含 2%雜訊跳躍變化系統反應之識別誤差結果(變數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I,J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$
(20,20)	114	298	4.14	44.7	109	294	3.14	37.8
(25,25)	118	296	3.12	40.3	110	295	2.32	33.4
(30,30)	109	294	2.61	33.4	105	293	1.97	26.2
(35,35)	103	298	2.35	27.2	101	279	1.94	21.6
(40,40)	100	268	2.17	21.8	100	233	1.8	17.4
(45,45)	124	260	2.45	18.5	113	172	2.14	15.3
(50,50)	122	250	2.44	16.2	109	165	2.22	12.2
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I,J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	103	292	2.37	29.1	100	255	1.93	17.5
(25,25)	103	299	1.84	23.7	100	224	1.65	12.1
(30,30)	101	287	1.42	18.4	100	168	1.71	9.72
(35,35)	100	260	1.69	15.3	100	165	2.33	9.87
(40,40)	105	162	1.95	12.2	100	164	2.54	8.99
(45,45)	102	161	2.05	10.7	100	164	2.61	7.84
(50,50)	102	163	2.02	8.72	100	159	2.72	6.82

表 2.20 含 2%雜訊折線變化系統反應之識別誤差結果(變數型遺忘因子)

$\lambda$	0.96				0.97			
$(I, J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	38.3	298	3.43	36.3	23.9	278	2.13	30.2
(25,25)	32.6	286	3.21	33.1	26.5	243	1.92	27.7
(30,30)	31.3	263	2.33	61.5	19.2	241	1.87	26.4
(35,35)	72.8	235	2.21	31.8	12.3	262	1.62	27.3
(40,40)	19.6	268	1.97	29.7	17.5	204	1.57	26.8
(45,45)	25.3	284	1.82	28.2	18.7	261	1.62	26.1
(50,50)	57.1	250	1.95	30.4	23.3	247	1.61	28.3
$\lambda$	0.98				0.99			
$(I, J)$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	17.1	180	1.52	22.1	20.1	118	2.56	17.2
(25,25)	9.06	150	1.37	21.8	19.8	133	2.59	18.8
(30,30)	10.2	178	1.39	21.6	21.4	161	2.53	18.4
(35,35)	9.75	188	1.33	23.4	22.3	184	2.52	19.2
(40,40)	12.3	202	1.42	22.3	25.8	167	2.79	20.6
(45,45)	19.	260	1.56	24.2	29.3	159	2.83	22.4
(50,50)	17.	273	1.58	25.4	30.4	165	2.86	23.3

表 2.21 含 2%雜訊平緩變化反應系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	0.01				0.1			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	7.82	23.1	2.45	9.43	7.96	25	2.01	9.51
(25,25)	7.81	29.5	2.73	11.7	7.23	24	2.25	9.46
(30,30)	8.95	39.3	3.26	17.5	7.58	32	2.53	11.6
(35,35)	11.5	71.2	4.32	26.3	8.43	52	3.22	17.3
(40,40)	15.3	100	6.13	29.9	11.4	68	4.36	23.2
(45,45)	16.2	91.3	7.84	25.5	12.4	78	4.94	24.6
(50,50)	18.8	67.3	8.12	18.2	15.7	103	6.32	26.7
$r_1(t)$	1				10			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	8.61	56.1	2.16	12.6	12.1	105	2.45	25.1
(25,25)	7.95	31.6	2.12	13.2	7.72	76.1	2.13	26.1
(30,30)	7.63	28.4	2.44	10.4	7.96	38.7	2.51	16.5
(35,35)	8.42	42.3	2.98	13.6	8.34	38.3	2.95	15.3
(40,40)	9.75	44.7	3.53	14.2	9.53	38.1	3.43	13.1
(45,45)	10.1	42.6	3.95	13.7	10.	35.3	3.96	10.9
(50,50)	11.7	52.3	4.82	17.1	11.6	46.5	4.57	13.6

表 2.22 含 2%雜訊週期變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	0.01				0.1			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	58.1	124	20.5	53.4	56.5	132	16.7	39.4
(25,25)	62.4	225	21.3	87.1	59.3	181	18.2	60.9
(30,30)	81.2	322	28.6	116	62.9	243	21.4	88.3
(35,35)	112	384	36.8	122	89.1	380	29.1	116
(40,40)	134	301	39.3	121	128	393	37.5	133
(45,45)	113	416	40.4	118	149	377	41.9	123
(50,50)	135	451	40.2	143	148	431	42.1	139
$r_1(t)$	1				10			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	58.2	188	15.7	41.1	67.5	306	16.3	77.1
(25,25)	60.3	199	17.8	52.5	62.2	285	17.5	65.4
(30,30)	62.7	212	20.4	64.4	63.8	279	20.2	68.0
(35,35)	69.4	250	23.6	90.2	71.1	259	23.7	81.2
(40,40)	118	424	34.5	118	117	469	34.0	122
(45,45)	149	349	40.3	120	152	396	40.8	105
(50,50)	125	416	38.1	141	121	436	36.4	123

表 2.23 含 2%雜訊跳躍變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	0.01				0.1			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	97.3	121	5.21	21.2	97.2	132	6.65	27.5
(25,25)	95.6	122	4.73	13.4	100	107	5.73	13.3
(30,30)	99.1	169	4.91	14.1	101	108	5.52	18.6
(35,35)	99.4	164	5.16	15.5	102	120	5.06	13.1
(40,40)	99.3	165	5.64	16.4	100	147	4.81	11.7
(45,45)	100	166	5.63	18.2	100	148	5.08	13.7
(50,50)	100	166	5.72	20.1	101	166	4.95	14.3
$r_1(t)$	1				10			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	100	165	9.17	51.3	106	190	11.7	103
(25,25)	104	125	7.04	23.5	113	166	9.29	62.5
(30,30)	104	142	7.12	31.2	108	166	9.86	67.3
(35,35)	105	100	5.63	23.7	108	166	6.93	46.6
(40,40)	100	121	5.02	15.5	101	145	6.05	28.7
(45,45)	100	112	5.31	13.2	101	125	5.82	17.3
(50,50)	101	125	5.13	14.1	101	135	5.55	18.1

表 2.24 含 2%雜訊折線變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	0.01				0.1			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	23.5	69.4	3.39	24.1	26.1	89.3	3.20	20.6
(25,25)	23.3	84.2	3.45	28.3	22.4	74.4	2.96	21.6
(30,30)	24.1	99.7	3.73	37.4	22.0	77.2	3.03	23.0
(35,35)	26.3	107	4.57	52.1	24.5	99.2	3.42	33.2
(40,40)	29.2	175	6.22	65.5	25.3	123	4.54	47.4
(45,45)	33.37	216	7.51	63.5	27.8	151	5.38	52.5
(50,50)	40.	184	9.24	63.7	30.4	168	6.43	51.5
$r_1(t)$	1				10			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	37.7	159	4.28	45.8	48.1	302	6.19	106
(25,25)	25.4	105	3.35	21.0	29.8	161	3.96	32.2
(30,30)	24.3	88.5	3.02	18.6	27.5	130	3.17	24.5
(35,35)	24.2	89.3	3.27	26.7	27.2	121	3.43	25.6
(40,40)	26.6	106	4.33	39.2	29.7	125	4.58	38.1
(45,45)	26.5	107	4.62	34.4	27.3	92.3	4.61	28.6
(50,50)	28.2	120	5.39	36.6	29.3	99.1	5.29	32.4

表 3.1 平緩變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	64.8	228	0.131	2.202	72.8	289	1.92	16.9
0.91	12.8	109	0.038	0.648	57.9	363	1.88	17.9
0.92	1.21	97.9	0.019	0.224	60.9	289	1.84	16.8
0.93	0.166	1.04	0.018	0.103	81.8	295	1.55	15.1
0.94	0.058	0.837	0.018	0.104	76.2	382	1.62	16.7
0.95	0.060	0.930	0.019	0.108	66.9	305	2.03	15.1
0.96	0.084	0.958	0.021	0.117	75.6	256	1.10	10.6
0.97	0.084	0.958	0.021	0.117	93.2	245	1.58	12.5
0.98	0.195	1.72	0.041	0.191	62.4	323	0.692	5.94
0.99	0.435	2.22	0.111	0.371	6.50	96.0	0.019	0.085
0.991	0.492	2.27	0.132	0.418	1.17	2.22	0.016	0.046
0.992	0.572	2.50	0.162	0.478	0.028	0.509	0.015	0.036
0.993	0.742	3.18	0.203	0.559	0.026	0.174	0.015	0.041
0.994	1.03	4.16	0.264	0.673	0.028	0.193	0.014	0.049
0.995	1.39	5.44	0.362	0.856	0.033	0.226	0.013	0.064

表 3.2 週期變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	60.0	558	1.19	17.6	216	485	3.72	28.1
0.91	159	586	1.06	15.7	159	687	3.03	32.0
0.92	249	405	0.682	11.2	1106	627	3.51	38.6
0.93	110	381	0.839	12.6	181	576	3.60	31.5
0.94	11.6	370	0.481	8.69	217	537	3.09	24.1
0.95	5.19	95.4	0.571	9.48	88.5	591	2.57	30.3
0.96	6.24	102	0.737	10.7	79.1	629	2.17	25.1
0.97	7.93	96.7	1.05	12.8	181	569	2.25	27.0
0.98	15.5	99.6	1.78	15.0	121	611	2.53	22.8
0.99	38.5	137	5.09	24.3	24.2	473	0.910	8.33
0.991	49.1	100	5.92	23.9	15.5	472	1.17	10.7
0.992	64.3	100	7.05	25.3	10.5	83.3	1.47	10.3
0.993	41.5	99.7	7.76	26.2	16.0	98.7	2.04	12.8
0.994	48.3	104	9.47	27.5	22.3	99.6	3.15	16.4
0.995	58.5	118	11.6	28.5	47.8	166	5.22	22.0

表 3.3 跳躍變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	256	99.9	3.41	12.1	220	99.3	8.95	18.8
0.91	200	99.9	2.29	11.7	130	99.8	5.48	16.5
0.92	100	99.1	1.71	11.2	238	99.7	5.50	19.1
0.93	100	99.5	1.12	8.08	245	99.4	12.6	22.5
0.94	100	99.7	0.915	6.27	175	99.8	4.25	18.1
0.95	100	98.1	0.921	2.96	247	99.7	8.75	21.3
0.96	100	88.9	0.802	1.92	121	99.3	4.88	18.9
0.97	100	96.6	0.889	2.12	248	99.9	6.80	18.7
0.98	100	93.0	1.07	2.33	175	99.8	4.39	12.5
0.99	100	97.6	1.56	3.02	100	98.7	2.48	4.46
0.991	100	97.8	1.73	3.75	100	95.7	2.81	4.17
0.992	100	97.1	1.86	3.97	100	94.1	2.61	3.25
0.993	100	99.0	2.01	4.46	100	95.2	2.96	3.17
0.994	100	98.1	2.23	4.99	100	99.4	3.25	4.20
0.995	100	98.3	2.62	5.73	100	99.8	2.79	4.09

表 3.4 折線變化系統之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	83.8	99.7	0.623	6.66	222	215	1.66	18.7
0.91	34.9	99.7	0.295	3.31	212	203	2.21	20.7
0.92	15.7	99.2	0.171	2.42	74.3	205	1.88	19.0
0.93	2.72	68.3	0.112	1.37	63.7	209	1.72	17.8
0.94	2.50	21.7	0.104	1.22	61.8	200	1.82	16.0
0.95	3.91	21.9	0.127	1.34	68.2	191	1.65	17.4
0.96	5.24	26.0	0.156	1.51	74.4	203	1.93	16.4
0.97	5.45	25.2	0.215	1.68	106	219	1.24	15.3
0.98	5.42	25.9	0.353	1.96	239	213	1.14	12.1
0.99	10.1	36.7	0.954	3.63	5.36	26.7	0.45	2.59
0.991	14.3	41.0	1.12	4.53	5.45	27.5	0.522	2.72
0.992	16.3	48.6	1.34	5.12	5.59	29.4	0.625	2.96
0.993	18.7	54.9	1.63	5.88	6.54	32.9	0.737	3.19
0.994	21.5	58.9	2.05	6.78	7.86	33.6	0.881	3.59
0.995	24.6	58.5	2.69	7.88	9.97	38.9	1.10	4.18



表 3.5 平緩變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	0.067	12.2	0.019	0.115	61.8	99.0	1.69	11.6
0.91	0.060	1.18	0.020	0.110	78.2	116	1.48	11.6
0.92	0.065	0.876	0.021	0.113	66.4	114	1.90	13.1
0.93	0.081	0.935	0.022	0.119	65.0	131	1.87	12.2
0.94	0.102	0.986	0.023	0.127	76.4	125	1.43	10.0
0.95	0.130	0.964	0.026	0.139	50.5	106	1.07	9.07
0.96	0.166	1.16	0.032	0.158	83.9	105	1.58	9.63
0.97	0.232	1.82	0.043	0.194	64.4	102	0.67	5.45
0.98	0.362	2.04	0.073	0.277	0.957	26.9	0.017	0.058
0.99	1.02	3.88	0.228	0.605	0.028	0.209	0.015	0.046
0.991	1.22	4.64	0.272	0.691	0.030	0.231	0.015	0.052
0.992	1.44	5.28	0.333	0.810	0.033	0.306	0.015	0.061
0.993	1.68	6.03	0.420	0.975	0.043	0.377	0.015	0.075
0.994	1.96	7.90	0.549	1.21	0.059	0.494	0.016	0.096
0.995	2.33	11.0	0.750	1.56	0.077	0.670	0.018	0.130

表 3.6 週期變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	50.0	97.6	0.461	7.81	137	265	3.14	24.6
0.91	53.7	91.3	0.476	8.31	106	263	2.59	18.9
0.92	16.3	84.7	0.543	9.39	73.2	293	2.04	19.3
0.93	10.8	94.5	0.604	9.73	114	258	1.94	23.6
0.94	5.96	95.5	0.710	10.3	138	284	2.30	20.2
0.95	8.95	92.1	0.900	11.6	178	278	2.43	22.3
0.96	13.5	98.8	1.20	13.1	72.1	277	1.52	16.5
0.97	17.5	99.8	1.77	15.0	92.2	286	1.75	15.3
0.98	22.7	98.6	3.15	18.4	70.7	205	0.762	7.92
0.99	43.3	110	8.13	26.4	20.4	99.2	2.46	13.3
0.991	55.1	118	9.33	27.2	29.9	99.8	3.31	15.2
0.992	72.6	123	10.8	27.9	48.0	99.8	4.63	17.9
0.993	58.2	126	11.6	28.5	78.3	99.8	6.60	21.2
0.994	53.0	127	13.1	29.1	76.3	99.9	8.29	23.9
0.995	61.3	126	14.6	29.5	54.9	99.8	9.92	26.3

表 3.7 跳躍變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	100	99.2	0.465	3.01	257	99.6	6.92	17.4
0.91	100	97.1	0.470	2.47	217	100.0	12.3	22.6
0.92	100	98.9	0.797	1.71	247	100.0	9.32	18.2
0.93	100	97.5	0.856	1.63	199	99.8	6.09	20.5
0.94	100	99.0	0.782	2.09	205	99.7	5.85	18.2
0.95	100	93.3	0.900	1.91	112	99.8	6.40	19.5
0.96	100	95.8	0.958	2.08	215	99.7	8.55	17.5
0.97	100	96.3	1.03	2.66	235	99.8	6.20	13.5
0.98	100	99.4	1.29	3.18	100	99.8	2.40	7.29
0.99	100	98.7	2.09	4.60	100	95.5	3.03	4.28
0.991	100	98.7	2.26	4.97	100	98.8	2.83	3.81
0.992	100	99.5	2.50	5.52	100	97.0	2.59	3.68
0.993	100	98.1	2.84	6.03	100	99.5	2.97	5.20
0.994	100	99.2	3.33	6.56	100	95.9	3.32	6.33
0.995	100	99.5	4.04	6.96	100	99.2	4.18	8.44

表 3.8 折線變化系統之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.9	10.4	98.4	0.124	1.43	68.6	237	1.57	18.8
0.91	3.00	32.1	0.112	1.32	94.4	267	1.36	15.5
0.92	2.52	43.3	0.115	1.36	52.2	251	1.28	16.9
0.93	3.30	29.7	0.128	1.42	109	282	1.84	19.8
0.94	4.86	31.2	0.149	1.52	121	262	1.68	17.2
0.95	5.32	26.2	0.179	1.63	94.6	295	1.24	16.3
0.96	5.45	25.2	0.229	1.76	94.7	281	1.36	15.2
0.97	5.46	27.1	0.332	2.05	62.3	298	1.36	15.3
0.98	6.37	34.0	0.592	2.91	57.0	77.3	0.33	2.82
0.99	15.5	58.9	1.63	6.08	5.59	36.5	0.75	3.82
0.991	17.4	58.3	1.91	6.64	5.95	39.2	0.84	4.15
0.992	19.5	56.9	2.28	7.29	6.78	40.2	0.96	4.50
0.993	21.8	58.9	2.78	7.96	7.88	39.4	1.14	4.85
0.994	24.5	75.0	3.49	8.73	9.48	44.3	1.41	5.33
0.995	27.2	97.3	4.52	9.76	12.1	54.0	1.85	6.10

表 3.9 平緩變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	7.61	35.6	1.92	10.5	4.12	34.1	0.384	9.31
0.1	6.73	38.7	1.49	11.3	5.21	41.4	0.457	10.8
1	6.86	40.2	1.37	12.0	5.91	48.0	0.512	12.2
10	7.03	40.1	1.36	12.9	6.16	50.4	0.531	12.8

表 3.10 週期變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	51.8	49.5	11.5	18.3	56.3	68.3	10.8	20.8
0.1	52.7	47.1	8.95	16.0	52.3	48.1	9.97	17.3
1	33.4	45.4	7.11	15.1	48.1	54.5	9.57	15.5
10	28.5	48.1	6.56	14.4	45.8	43.1	8.79	12.7

表 3.11 跳躍變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, \xi}$	$e_{\max, d}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	100	33.3	2.39	4.56	100	33.3	3.52	8.45
0.1	100	33.3	2.48	6.06	100	33.3	3.50	8.47
1	100	33.3	2.63	9.60	100	33.3	3.49	8.69
10	100	33.3	2.72	11.2	100	33.3	3.48	8.98

表 3.12 折線變化系統之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max, f}$	$e_{\max, \xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
0.01	14.0	42.3	2.21	7.71	20.9	33.3	2.72	8.75
0.1	13.7	33.2	2.16	7.73	20.4	46.5	2.62	11.1
1	13.5	33.3	2.17	8.58	20.4	60.2	2.61	13.1
10	13.4	33.3	2.18	9.49	20.1	61.0	2.62	14.4

表 3.13 含 2%雜訊平緩變化系統反應之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	0.99				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	14.4	126	0.925	13.7	5.66	115	0.587	8.20
(30,30)	8.51	64.2	0.619	7.98	3.43	48.3	0.403	4.61
(40,40)	6.72	76.5	0.494	5.76	36.9	131	0.424	5.08
(50,50)	3.97	61.8	0.432	4.75	11.7	130	0.353	4.63

表 3.14 含 2%雜訊週期變化系統反應之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	0.99				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	42.7	216	4.11	30.7	25.3	168	3.05	22.5
(30,30)	27.3	212	4.06	26.1	15.4	136	3.17	20.0
(40,40)	22.4	140	4.00	30.2	29.7	118	3.38	23.1
(50,50)	73.6	245	4.39	34.0	50.0	145	3.53	26.6

表 3.15 含 2%雜訊跳躍變化系統反應之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	0.995				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	101	263	2.91	28.6	104	292	3.87	41.0
(30,30)	100	299	1.88	16.8	102	298	2.27	27.1
(40,40)	100	163	2.54	14.5	100	273	2.25	19.3
(50,50)	100	166	2.85	10.4	107	231	3.07	17.2

表 3.16 含 2%雜訊折線變化系統反應之識別誤差結果(常數形遺忘因子)

遺忘因子( $\lambda$ )	$k=2$				$k=3$			
	0.995				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	23.7	134	2.26	14.6	27.6	252	1.83	21.7
(30,30)	19.8	98.1	1.94	11.5	19.8	275	1.72	15.3
(40,40)	12.8	113	1.76	11.1	39.5	282	1.47	14.3
(50,50)	13.6	216	1.88	13.6	72.5	299	1.86	14.0

表 3.17 含 2%雜訊平緩變化系統反應之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	0.99				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	6.24	103	0.617	8.59	5.46	129	0.509	7.17
(30,30)	5.95	44.1	0.475	4.64	3.04	58.3	0.375	3.94
(40,40)	4.24	37.4	0.335	3.40	14.9	362	0.353	4.85
(50,50)	1.81	32.1	0.280	2.92	17.7	167	0.317	3.36

表 3.18 含 2%雜訊週期變化系統反應之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	0.99				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	40.7	232	5.96	30.1	28.0	172	5.81	24.9
(30,30)	26.9	183	6.01	28.0	21.7	167	5.54	26.2
(40,40)	35.3	179	5.86	39.0	67.0	161	5.51	36.5
(50,50)	25.0	233	5.95	45.5	42.3	273	5.60	42.1

表 3.19 含 2%雜訊跳躍變化系統反應之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	0.995				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	100	250	3.19	21.4	102	299	3.22	33.1
(30,30)	100	280	2.02	15.6	101	299	2.21	20.3
(40,40)	100	163	2.80	14.1	100	214	2.76	16.3
(50,50)	100	158	3.31	9.73	100	269	3.16	14.7

表 3.20 含 2%雜訊折線變化系統反應之識別誤差結果(變數形遺忘因子)

$\lambda(0)$	$k=2$				$k=3$			
	0.995				0.995			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	23.9	114	1.95	12.9	23.4	251	3.28	16.5
(30,30)	20.2	97.1	1.83	12.8	17.0	269	2.94	12.4
(40,40)	14.3	111	1.82	16.0	65.7	286	2.86	12.4
(50,50)	15.1	205	2.02	17.2	63.5	298	2.93	14.7

表 3.21 含 2%雜訊平緩變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	0.00001				0.00001			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	16.9	28.6	4.78	7.61	13.4	93.91	3.02	13.1
(30,30)	15.4	54.5	4.30	5.98	12.0	57.4	3.00	5.72
(40,40)	16.3	99.7	5.20	7.40	23.4	163	2.95	10.2
(50,50)	19.3	99.7	5.77	9.43	53.7	292	3.41	20.7

表 3.22 含 2%雜訊週期變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

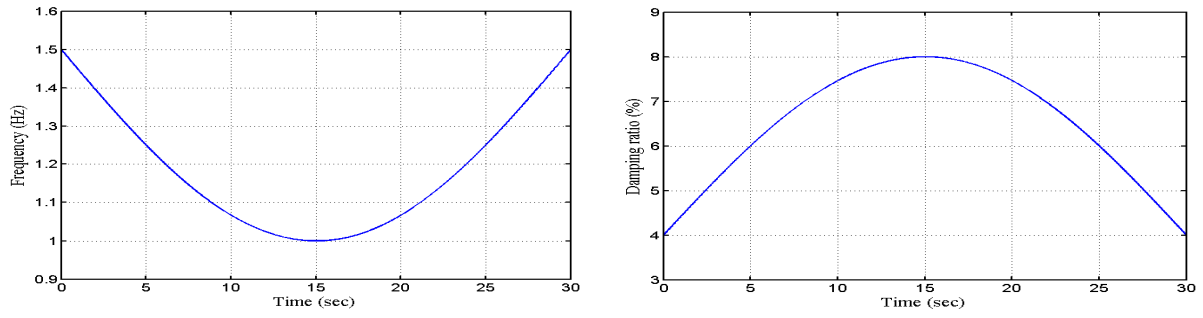
$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	1				0.001			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	40.5	99.9	10.6	45	46.3	210	6.71	40.6
(30,30)	37.7	196	12.0	78.4	72.3	227	17.3	58.6
(40,40)	98.8	410	22.6	119	90.2	310	25.1	85.2
(50,50)	58.8	196	19.6	84.1	95.1	302	21.3	110

表 3.23 含 2%雜訊跳躍變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

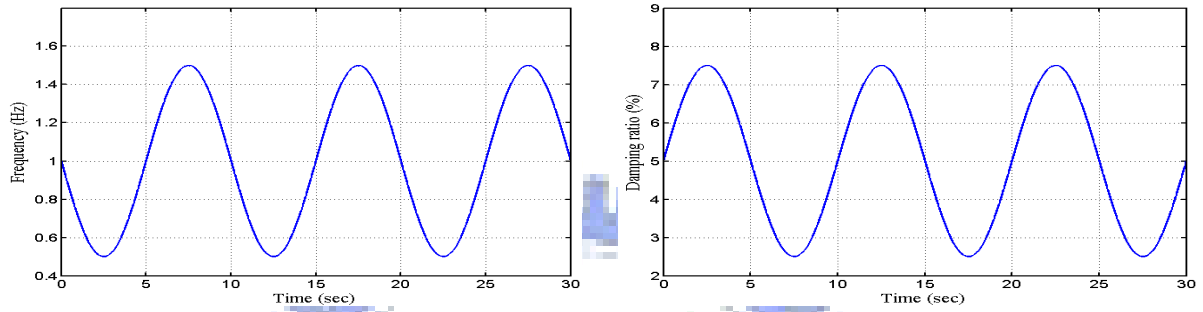
$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	0.000001				0.000001			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	99.7	80.1	6.08	17.9	99.6	174	9.10	36.2
(30,30)	99.6	166	7.32	24.2	99.8	166	10.4	28.7
(40,40)	99.8	166	12.1	49.6	113	287	17.3	39.5
(50,50)	100	166	17.2	55.3	100	166	16.5	36.8

表 3.24 含 2%雜訊折線變化系統反應之識別誤差結果(卡式濾波器)

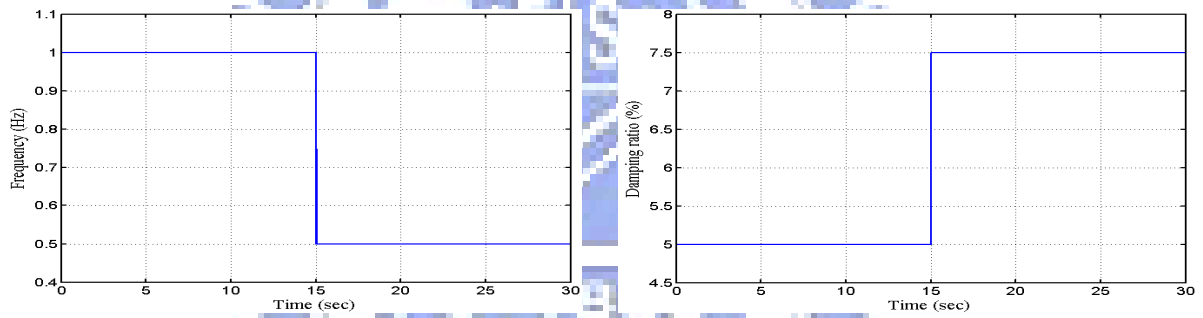
$r_1(t)$	$k=2$				$k=3$			
	0.00001				0.00001			
$(I,J)$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$	$e_{\max,f}$	$e_{\max,\xi}$	$\mu_f$	$\mu_\xi$
(20,20)	22.8	93.8	5.96	24.6	46.2	209	6.71	40.5
(30,30)	23.1	166	6.66	43.4	22.2	99.3	5.84	22.9
(40,40)	30.9	245	11.0	83.7	256	281	20.8	80.6
(50,50)	40.0	433	13.2	106	256	301	9.77	95.1



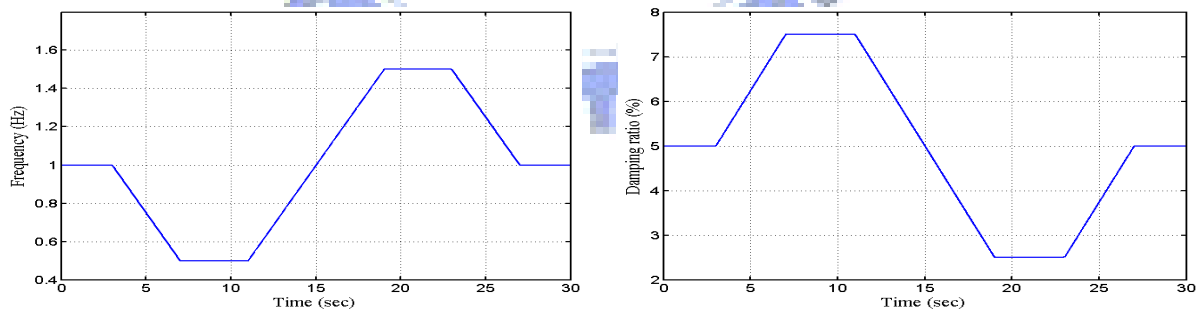
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 2.1 各種時變系統之自然振動頻率與阻尼比歷時圖  
 (a) case 1 ; (b) case 2 ; (c) case 3 ; (d) case 4

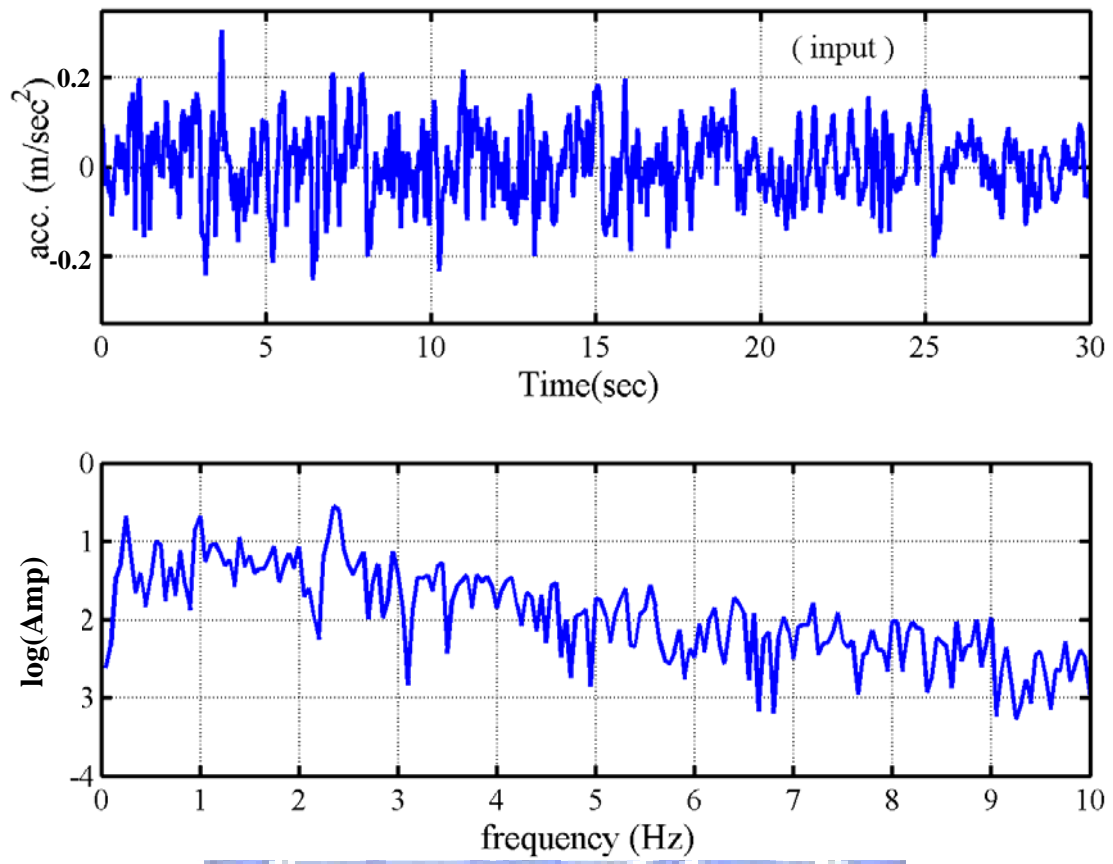


圖 2.2 輸入地震歷時及其頻譜反應





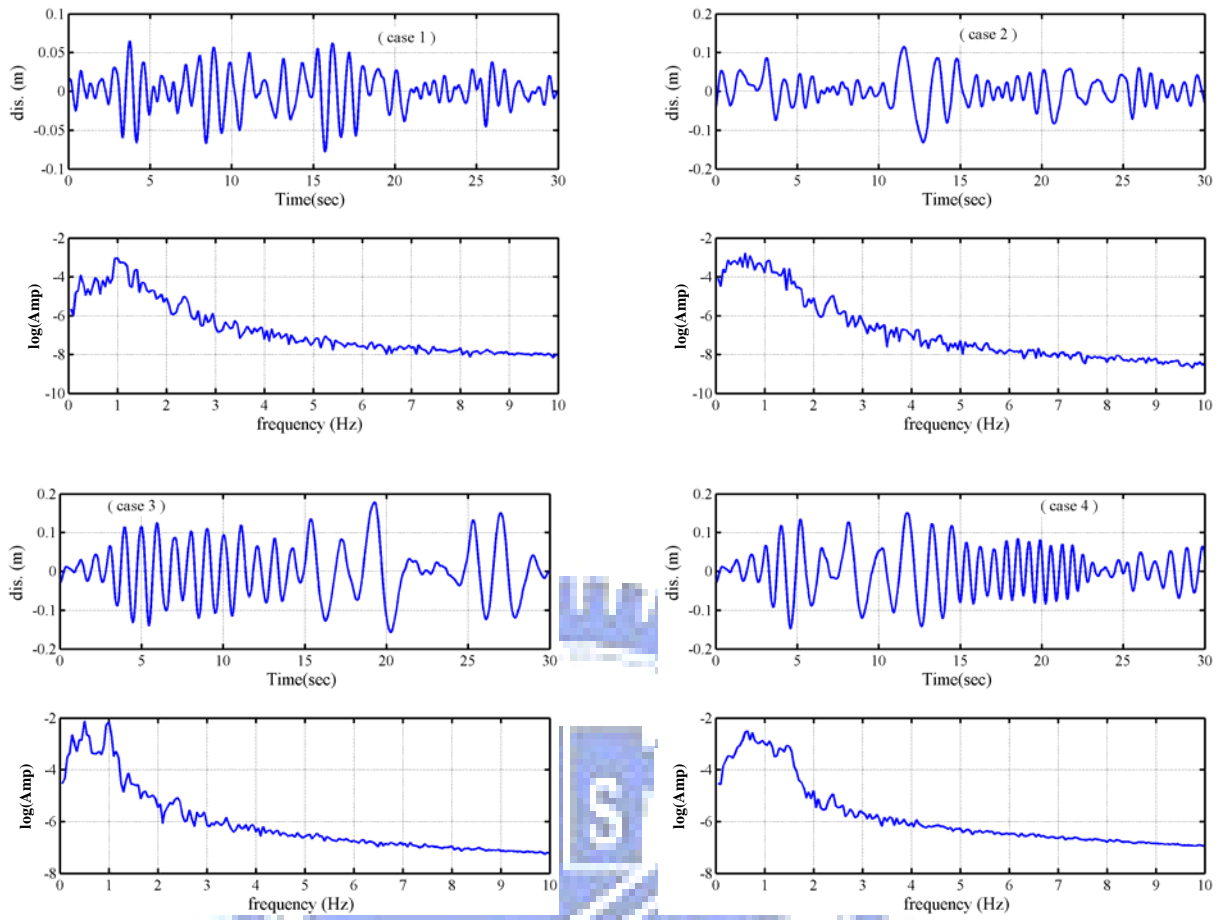
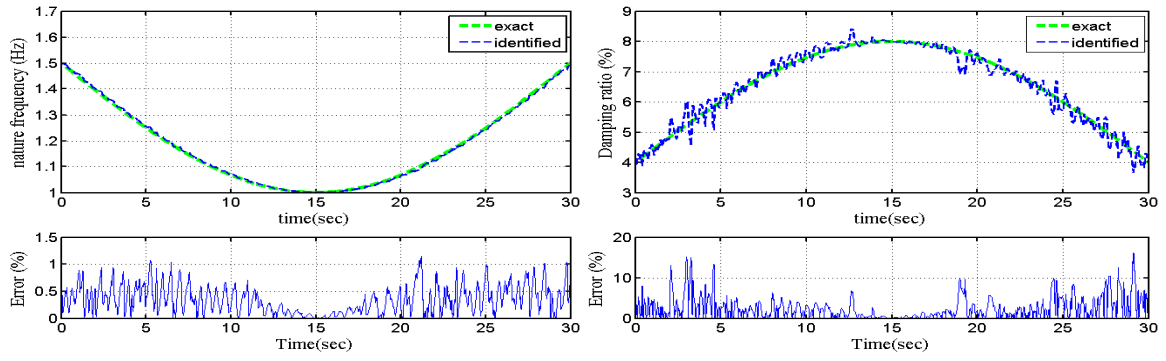
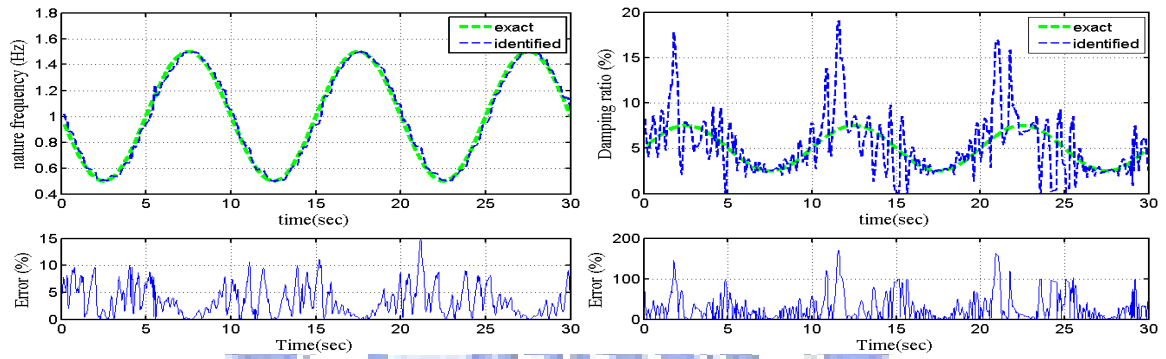


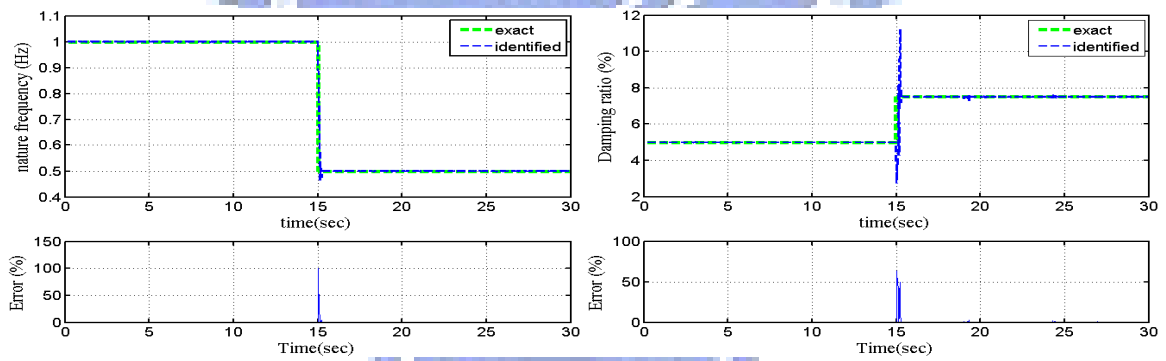
圖 2.3 各種時變系統之輸出歷時及其頻譜反應



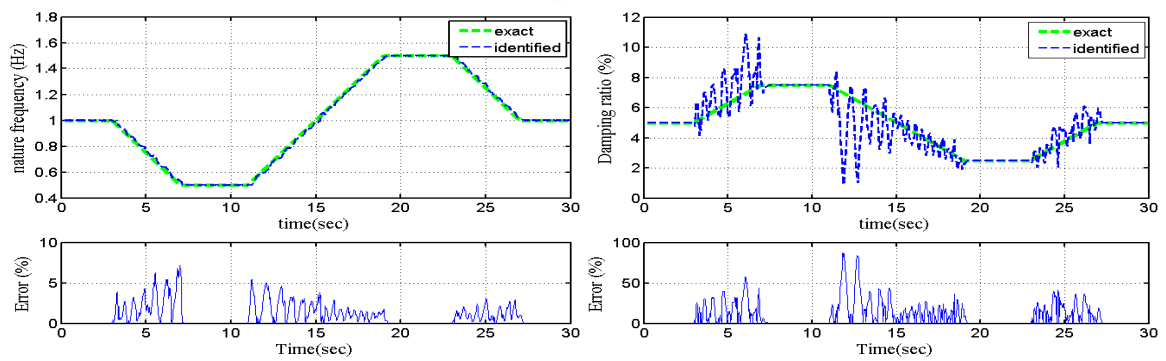
(a)



(b)



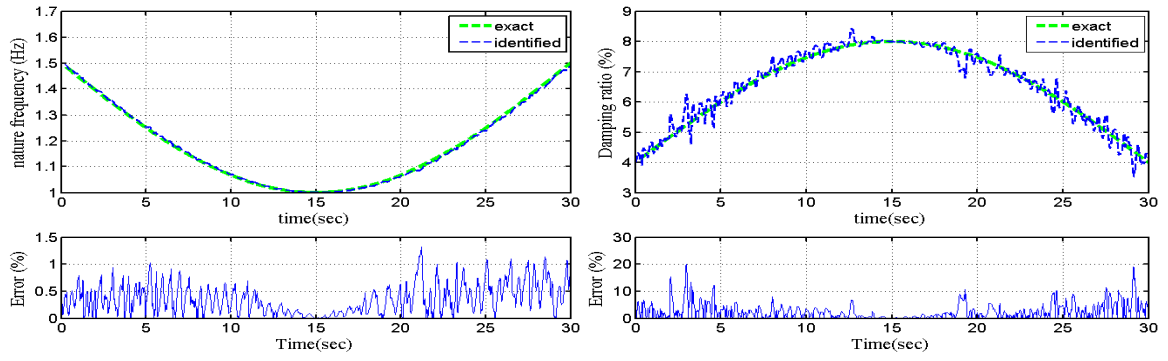
(c)



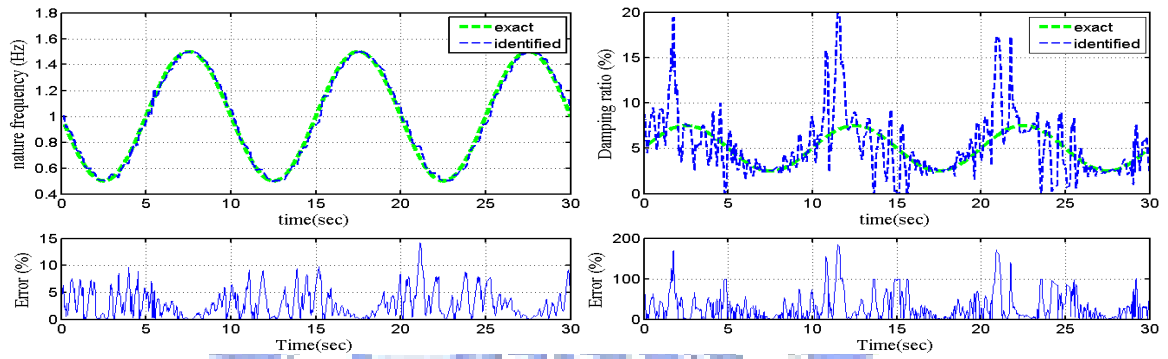
(d)

圖 2.4 以遺忘因子法配合常數形遺忘因子之識別結果

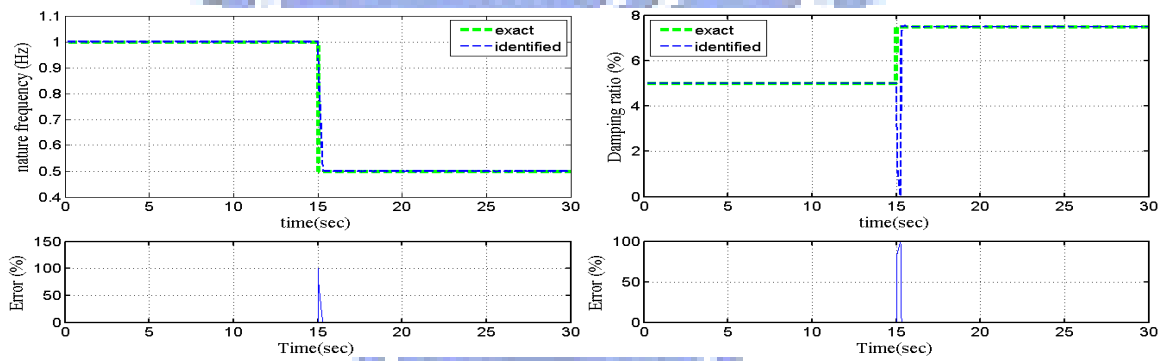
(a) case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



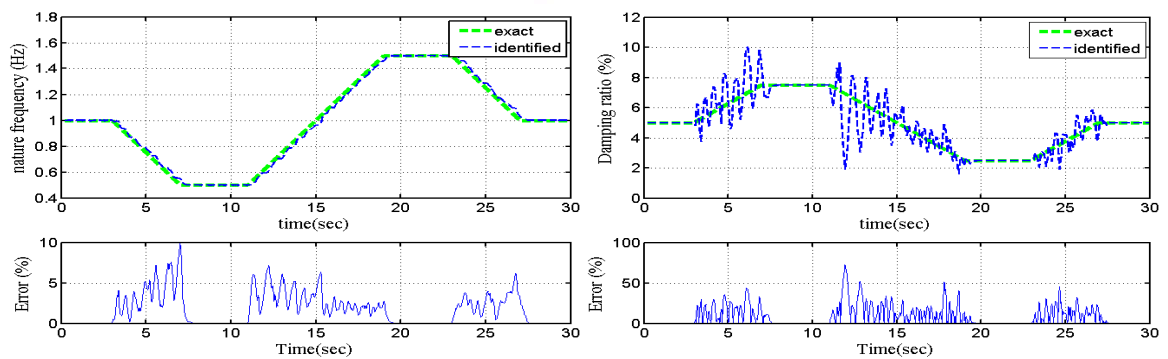
(a)



(b)

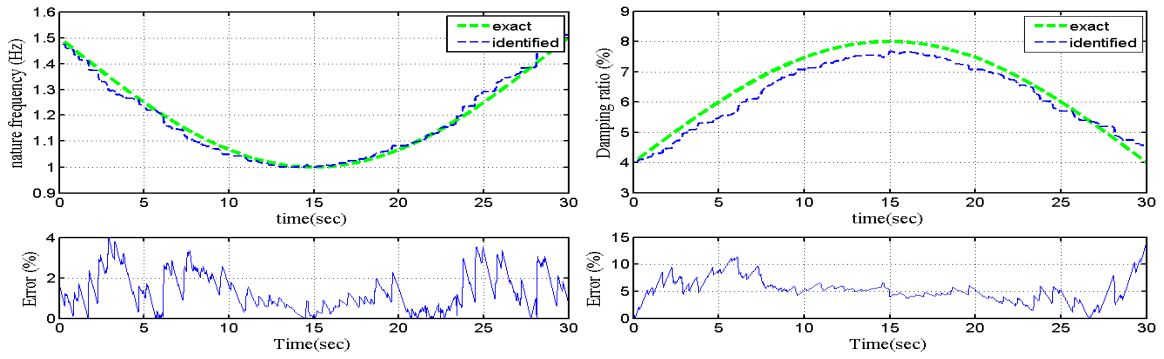


(c)

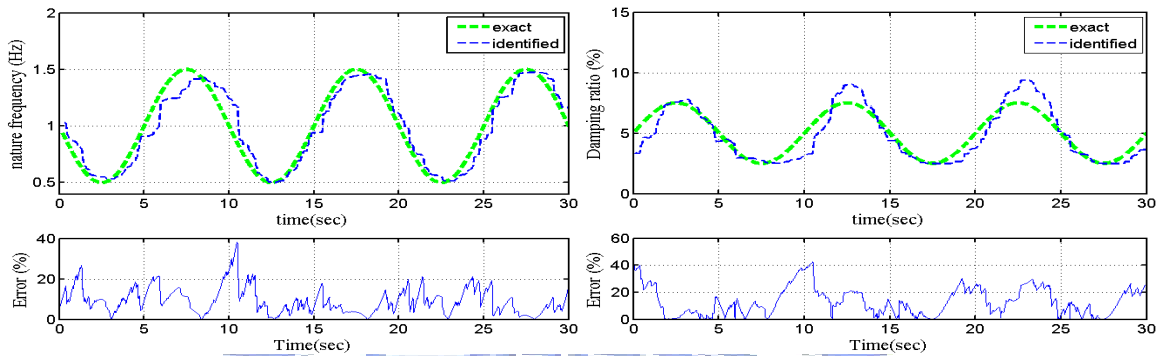


(d)

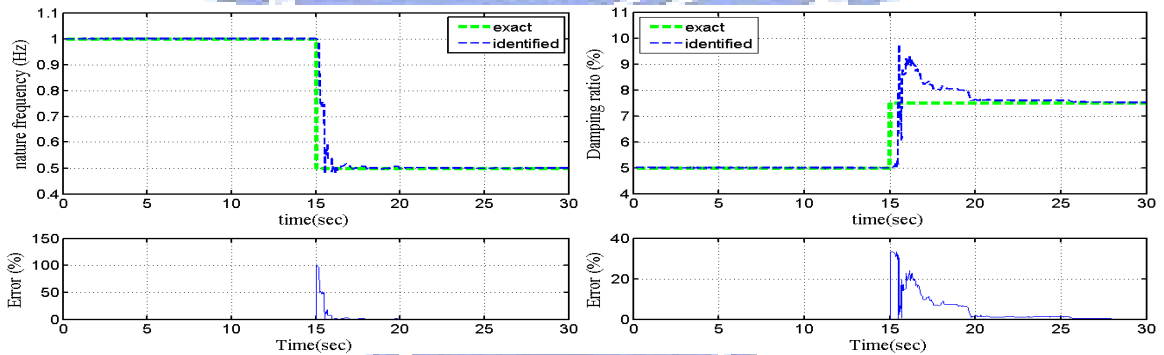
圖 2.5 以遺忘因子法配合變數形遺忘因子之識別結果  
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



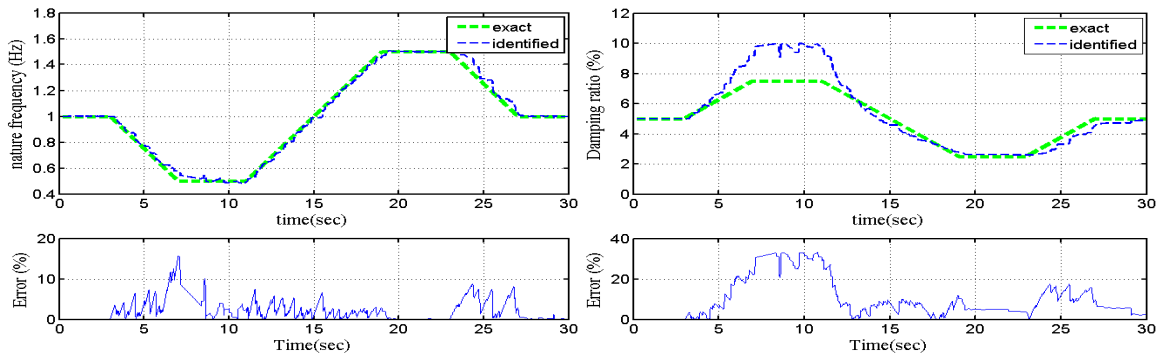
(a)



(b)

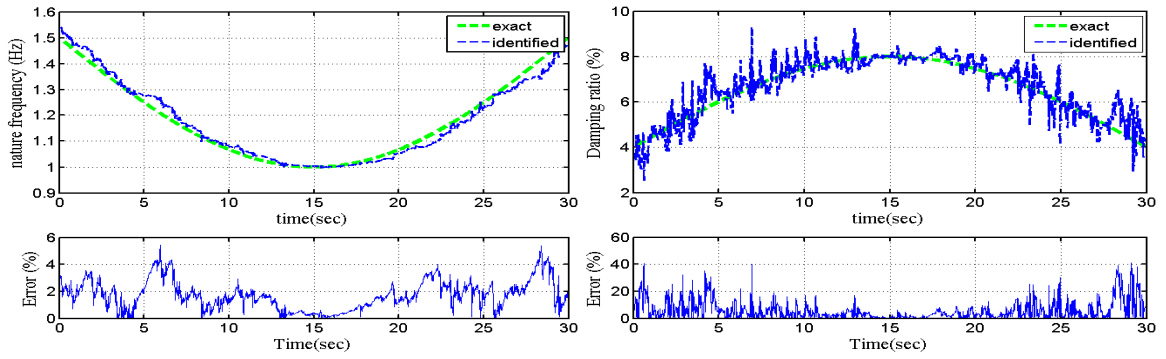


(c)

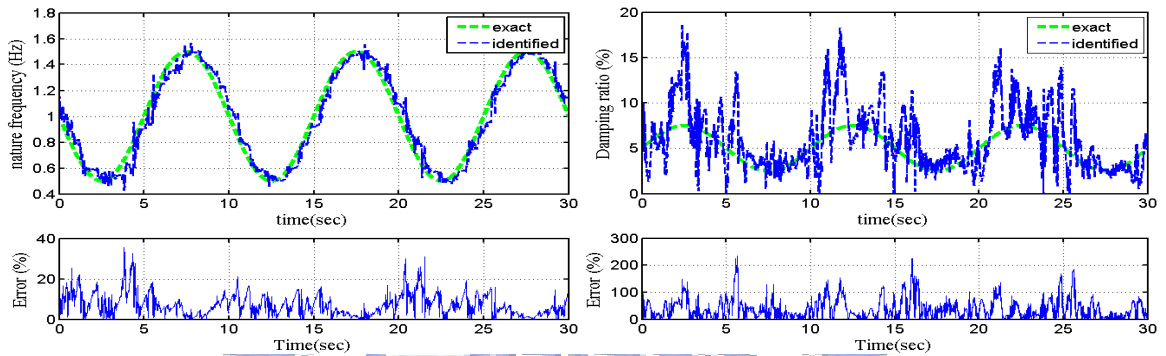


(d)

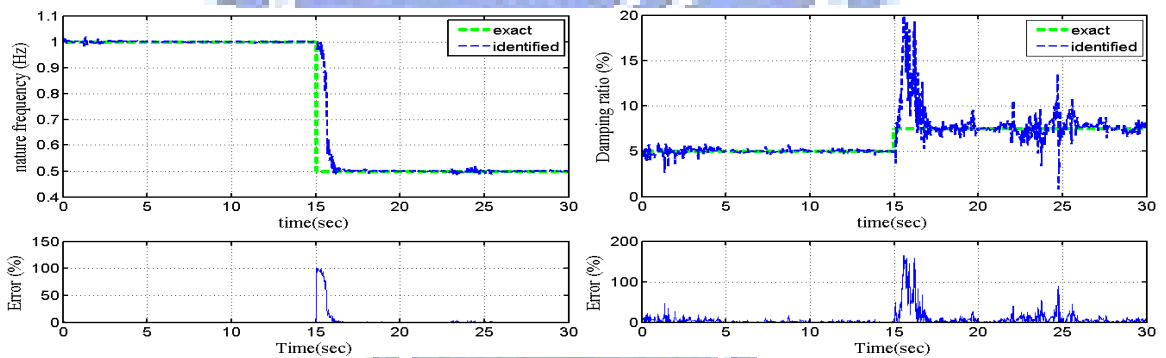
圖 2.6 卡式濾波器之識別結果  
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



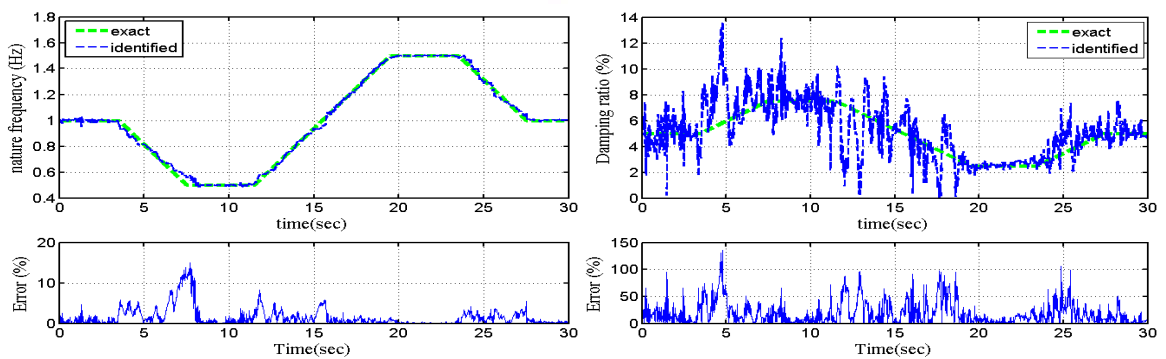
(a)



(b)



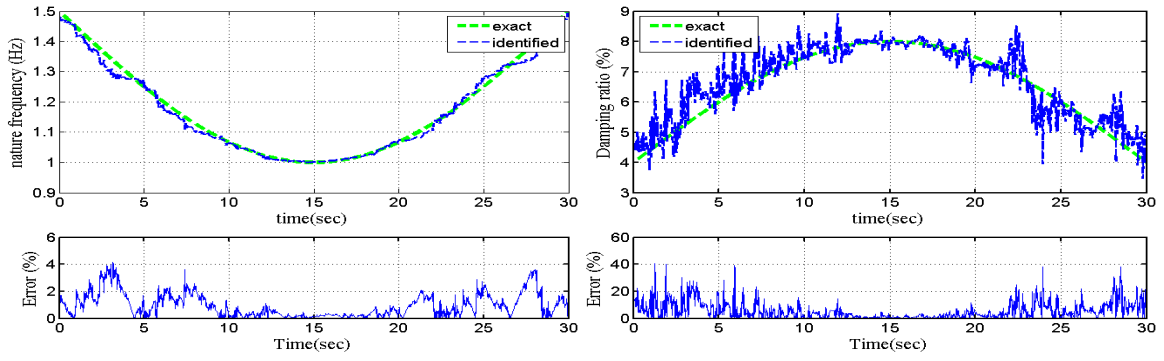
(c)



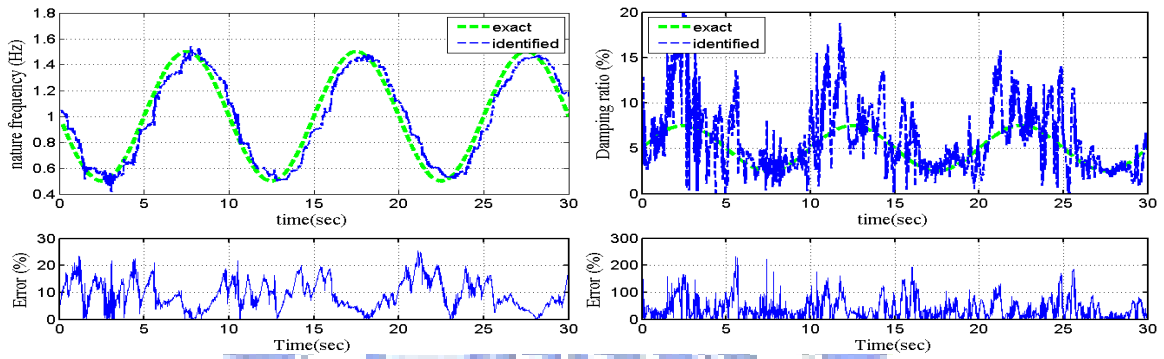
(d)

圖 2.7 以遺忘因子法配合常數形遺忘因子之識別結果(2%雜訊)

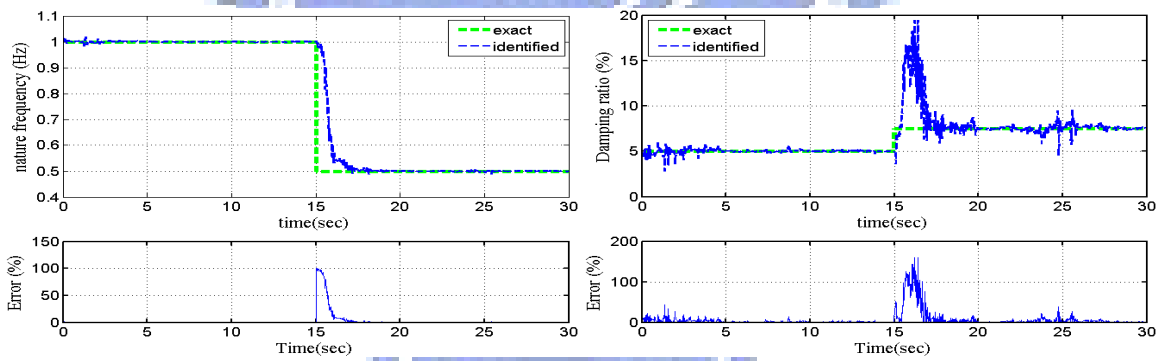
(a) case 1 (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



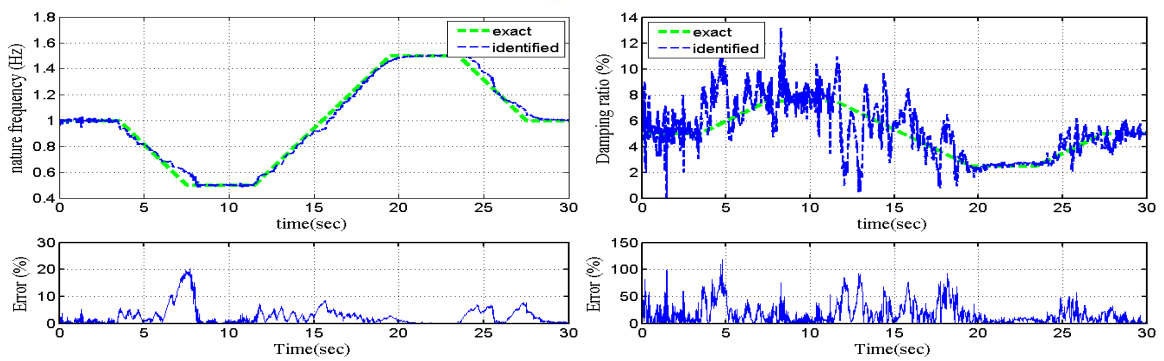
(a)



(b)



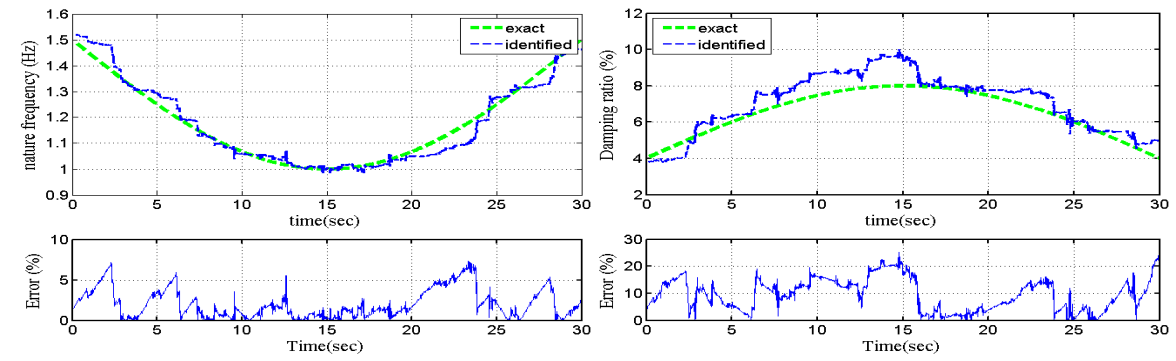
(c)



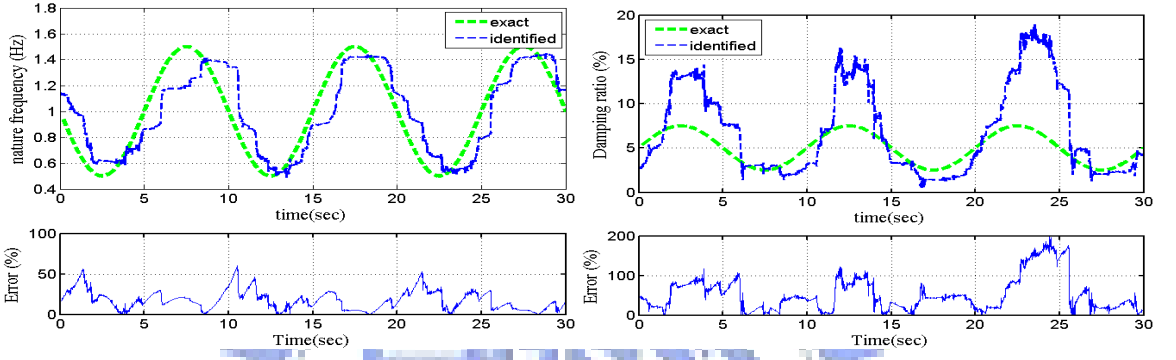
(d)

圖 2.8 以遺忘因子法配合變數形遺忘因子之識別結果(2%雜訊)

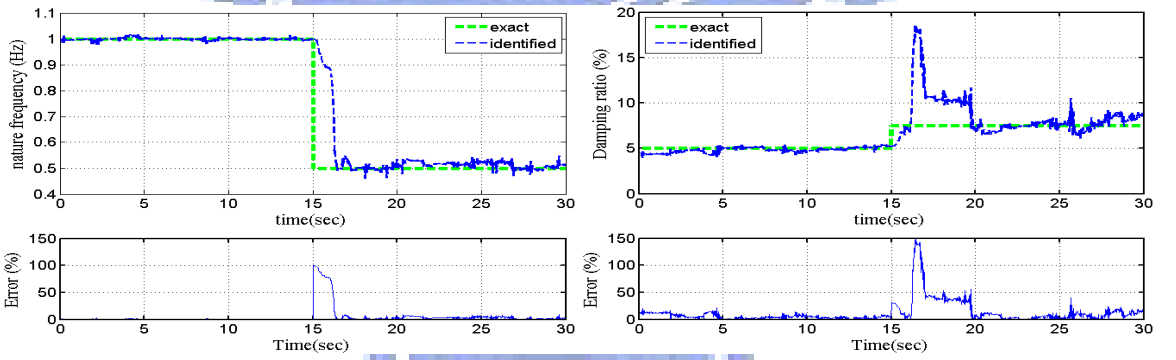
(b) case 1 (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



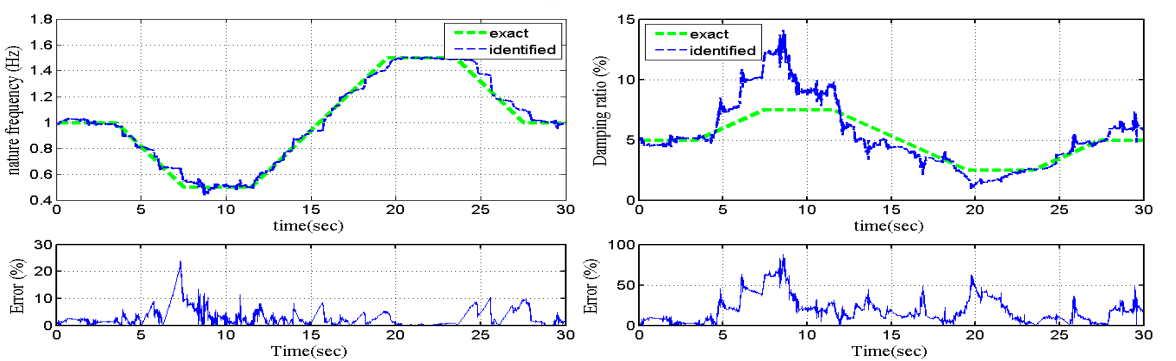
(a)



(b)

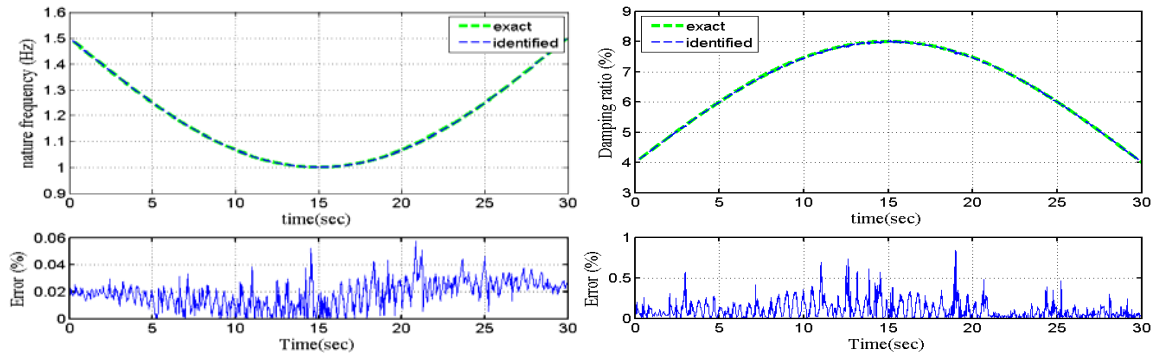


(c)

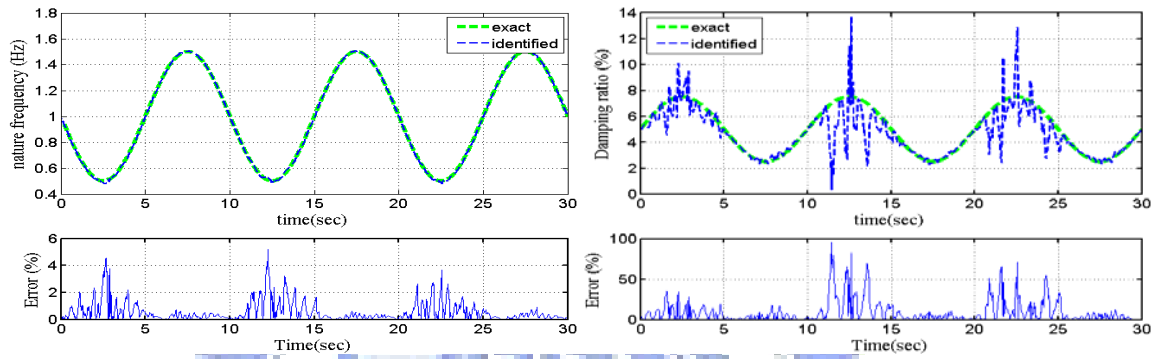


(d)

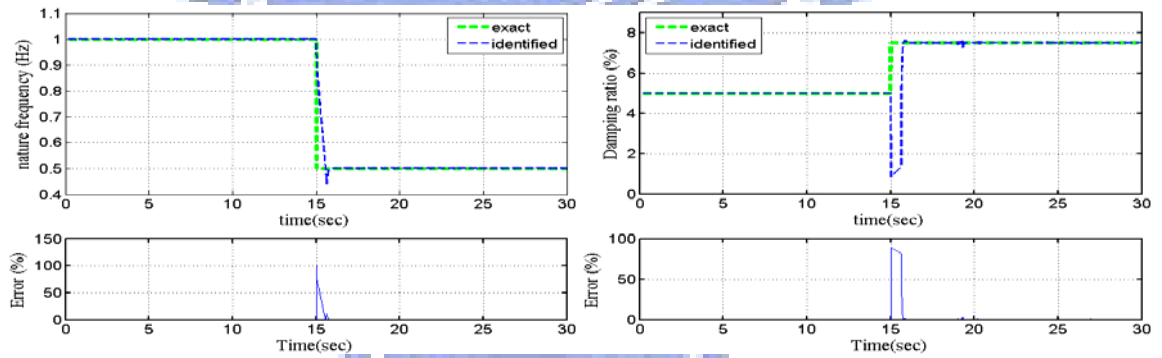
圖 2.9 卡式濾波器之識別結果(2%雜訊)  
 (c) case 1 (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



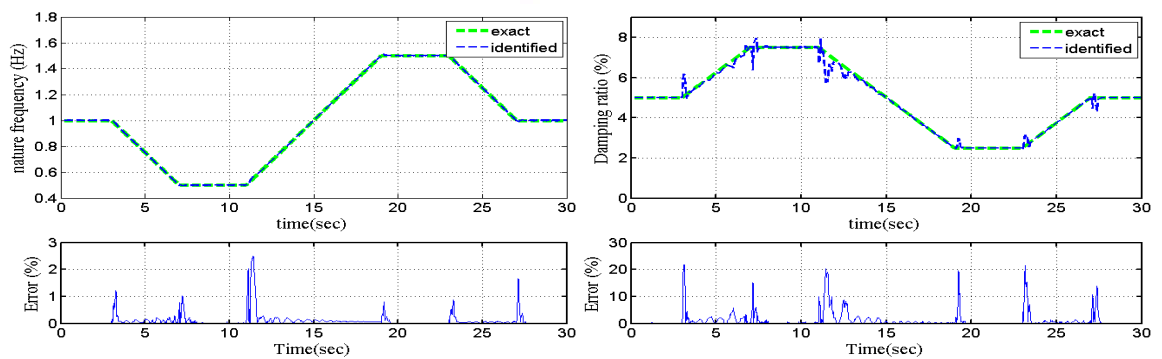
(a)



(b)



(c)

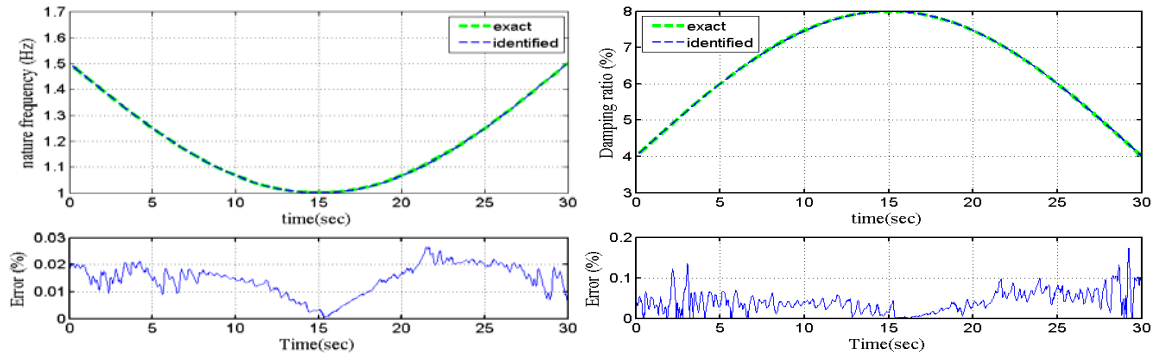


(d)

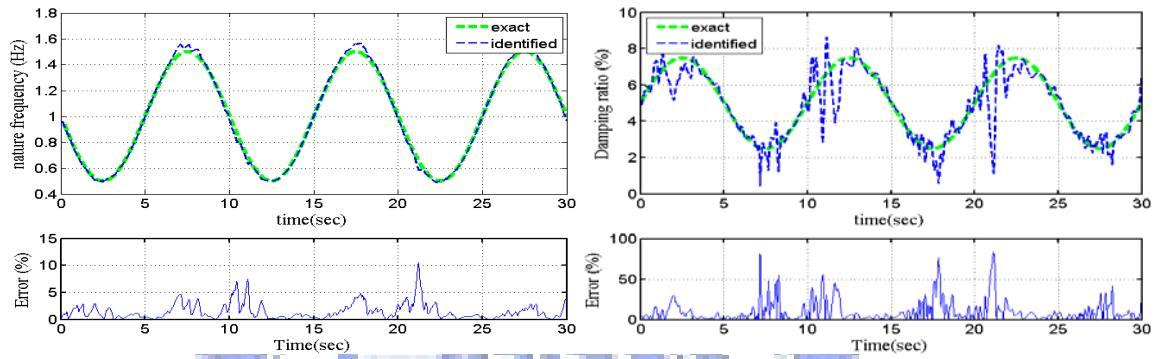
圖 3.1 以權重多項式基底函數法配合常數形遺忘因子之識別結果( $k=2$ )

(b) case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4

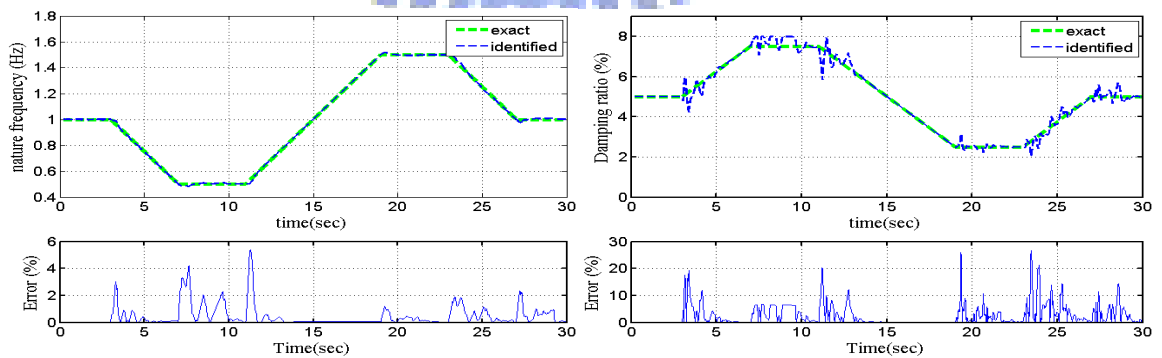
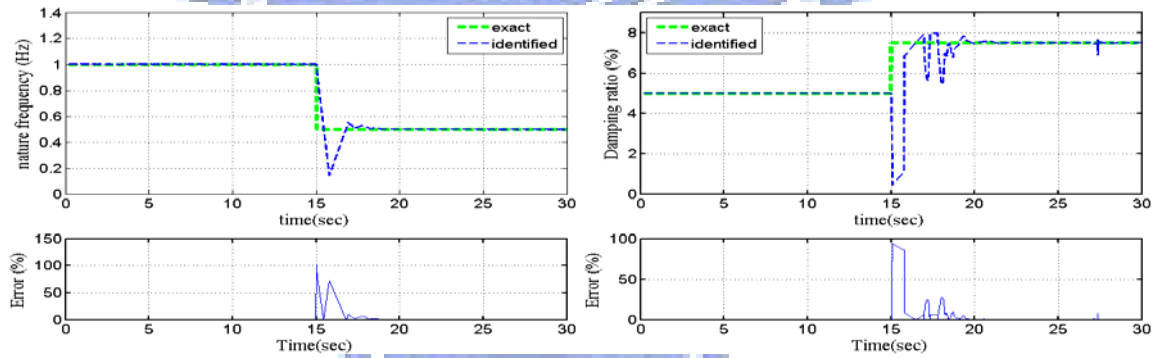




(a)



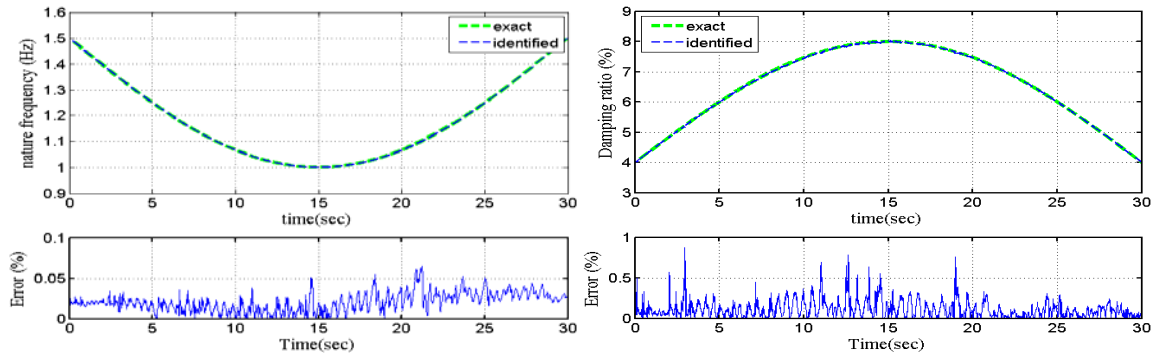
(b)



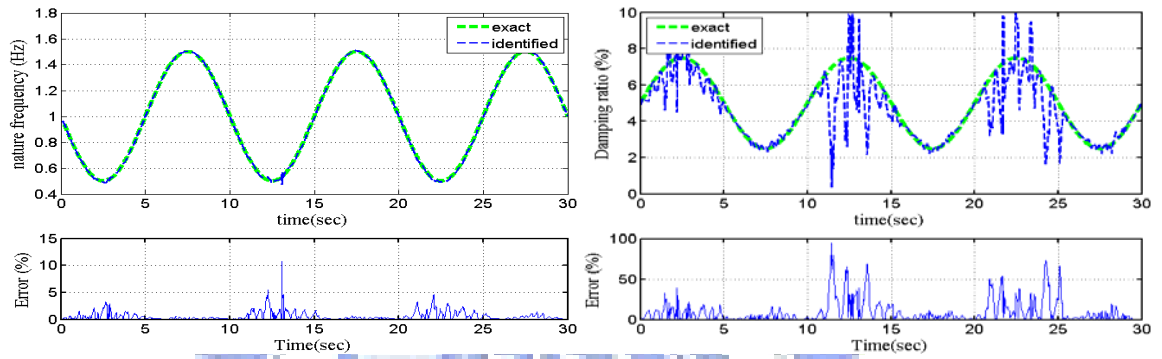
(d)

圖 3.2 以權重多項式基底函數法配合常數形遺忘因子之識別結果( $k=3$ )

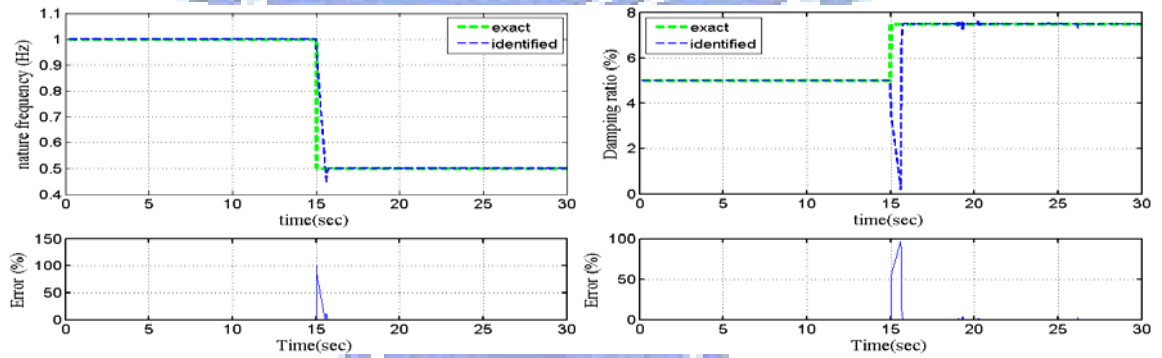
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



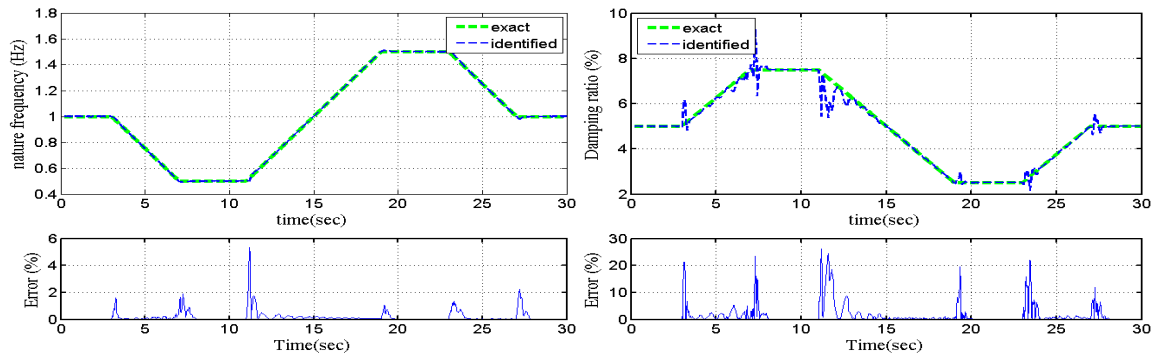
(a)



(b)



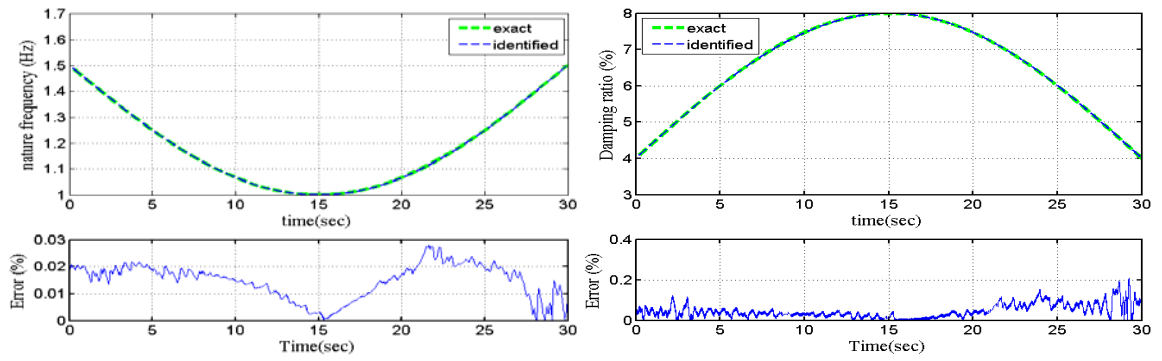
(c)



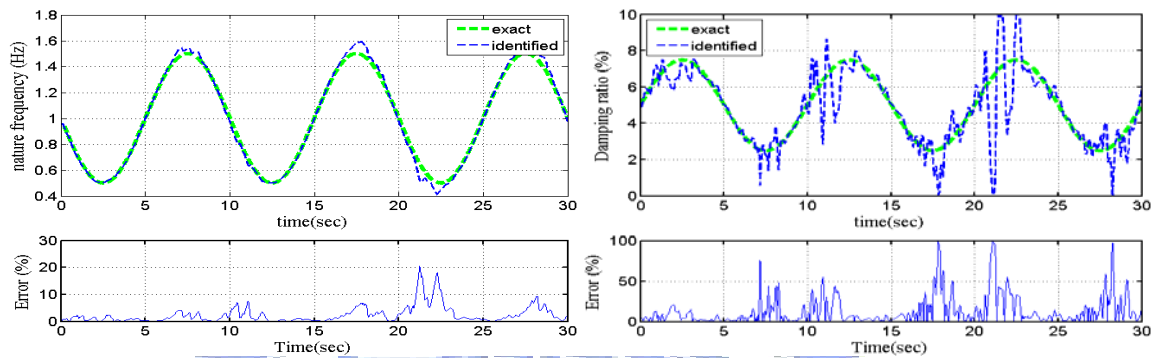
(d)

圖 3.3 以權重多項式基底函數法配合變數形遺忘因子之識別結果( $k=2$ )

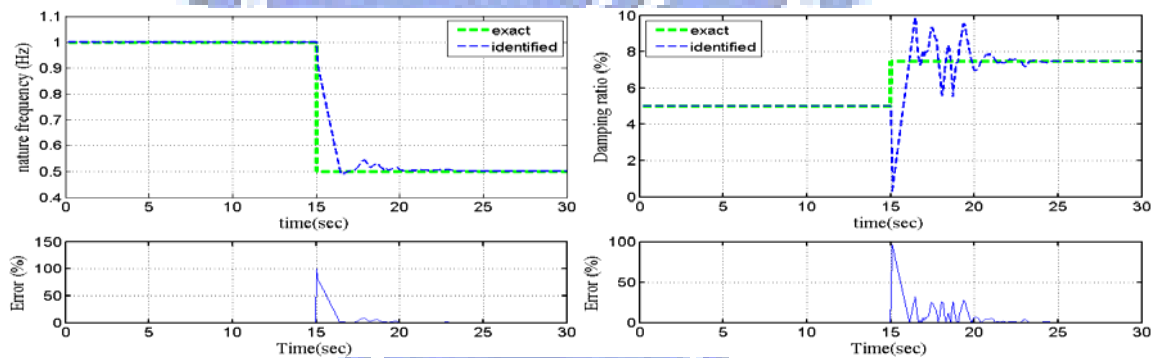
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



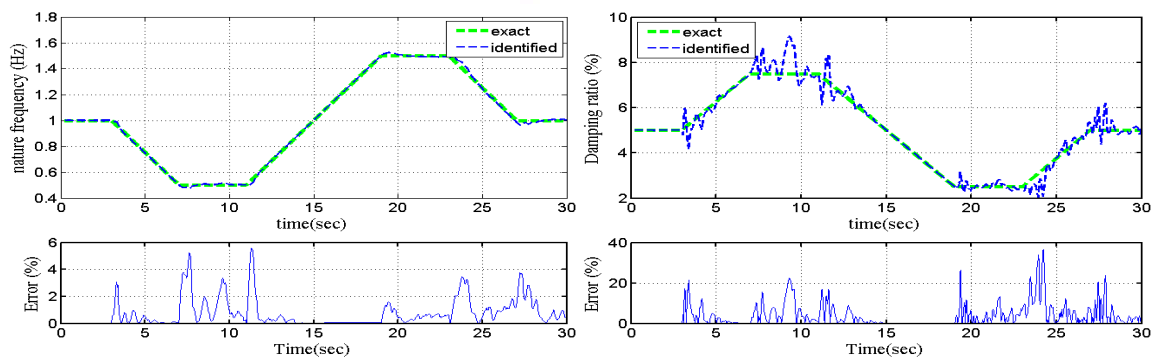
(a)



(b)



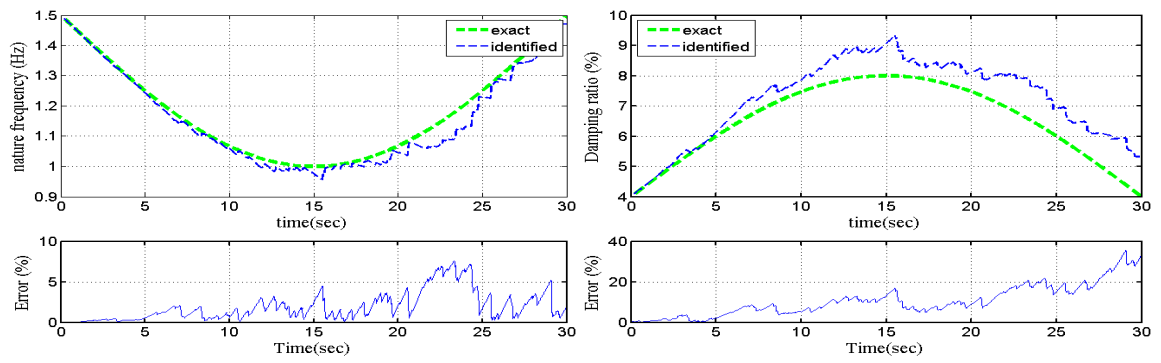
(c)



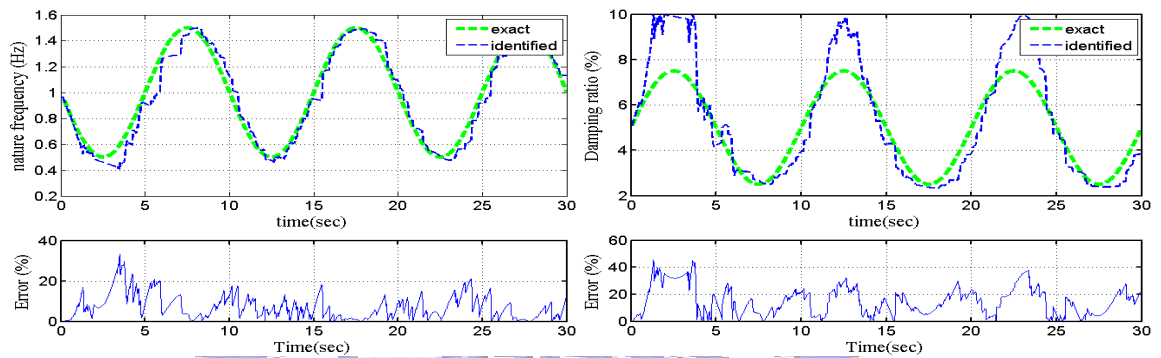
(d)

圖 3.4 權重多項式基底函數法配合變數形遺忘因子之識別結果( $k=3$ )

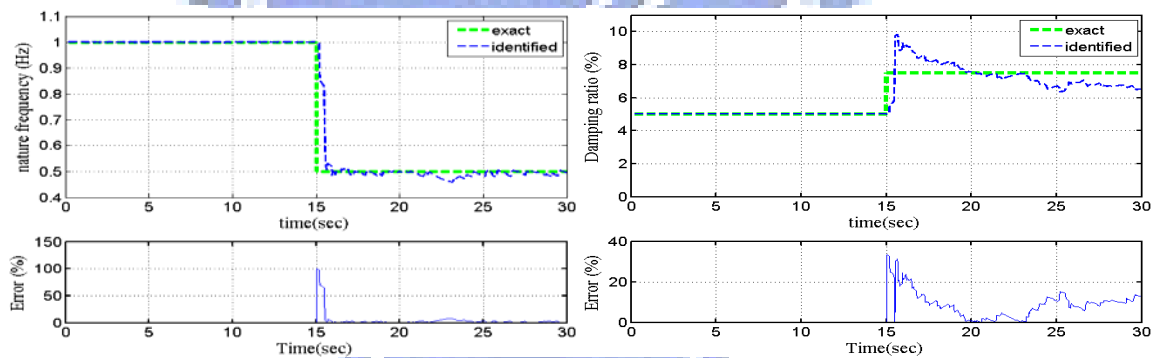
(a) case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



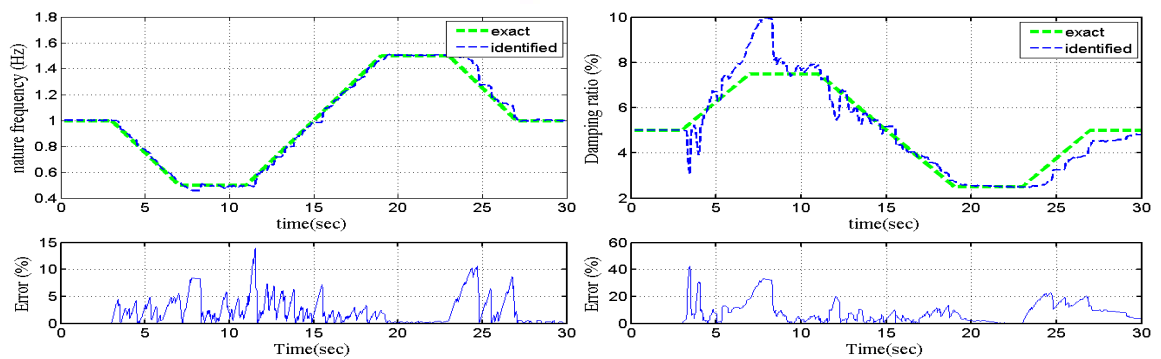
(a)



(b)



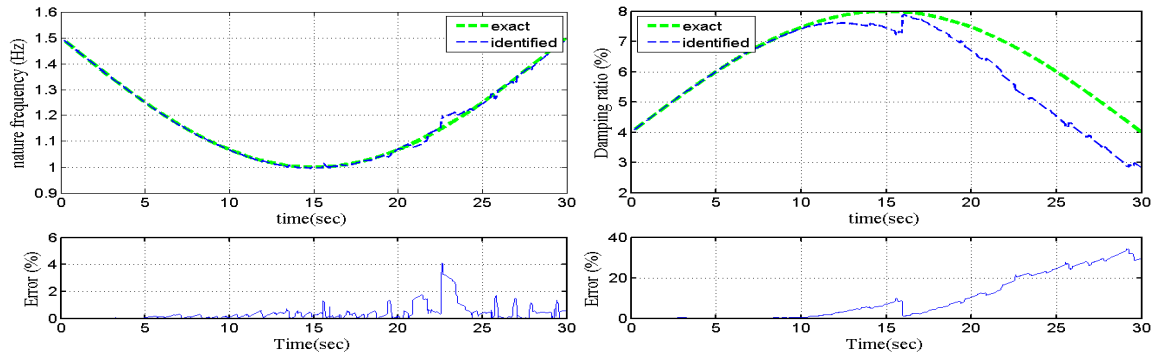
(c)



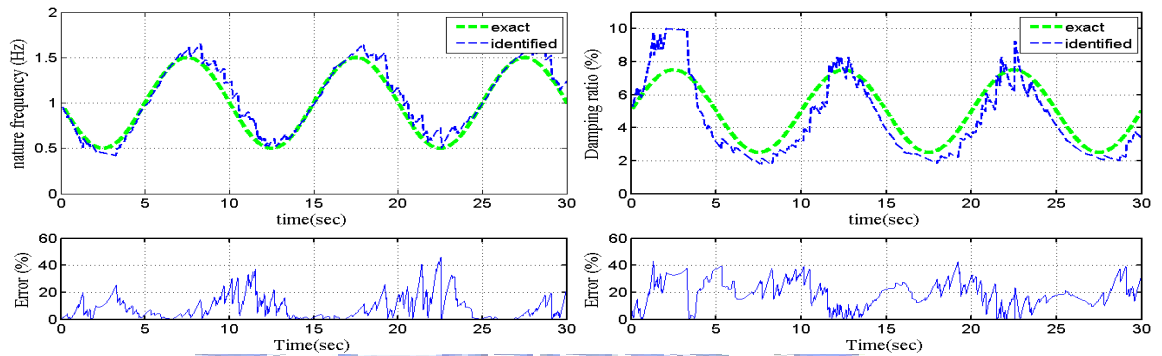
(d)

圖 3.5 權重多項式基底函數法配合卡式濾波器識別結果 ( $k=2$ )

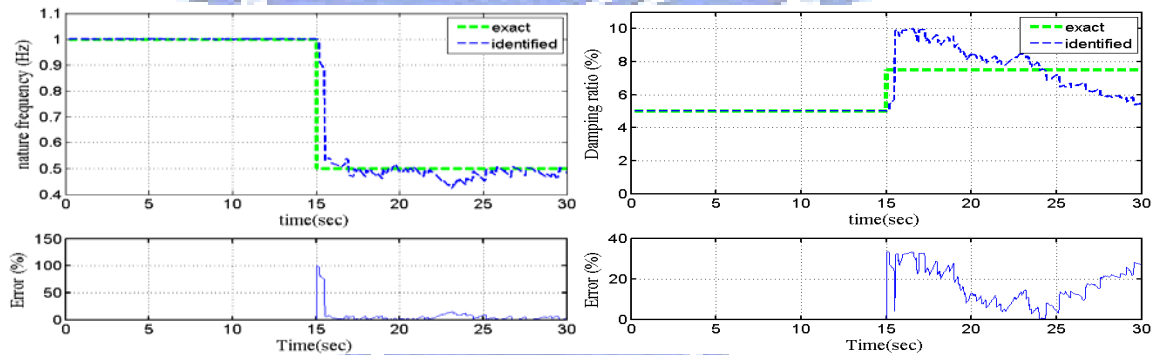
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



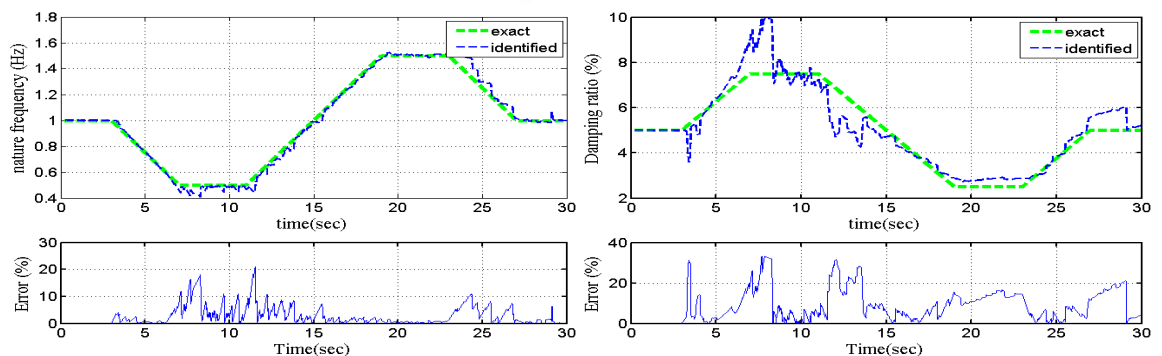
(a)



(b)



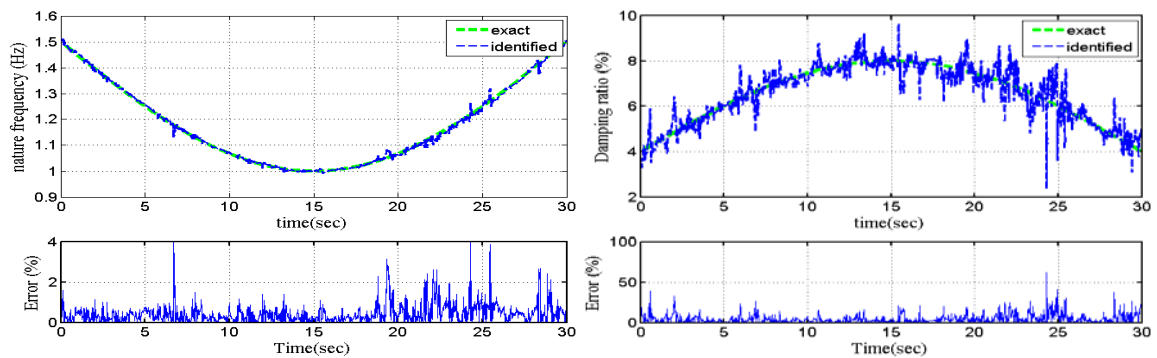
(c)



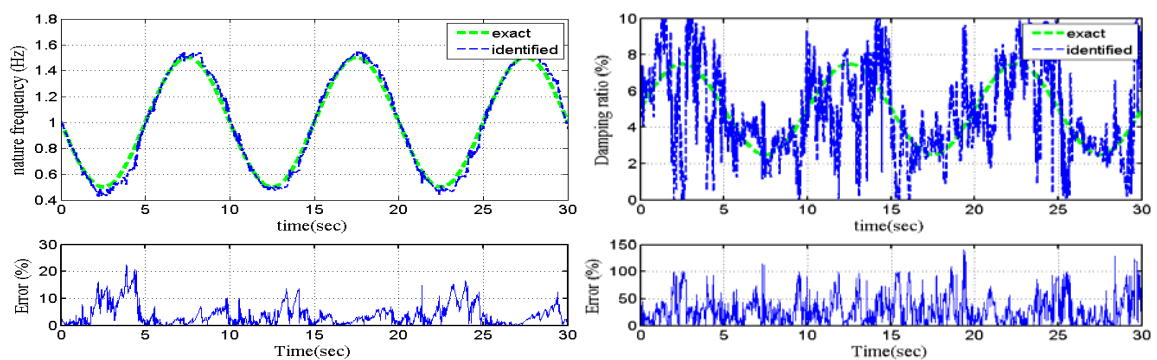
(d)

圖 3.6 權重多項式基底函數法配合卡式濾波器識別結果( $k=3$ )

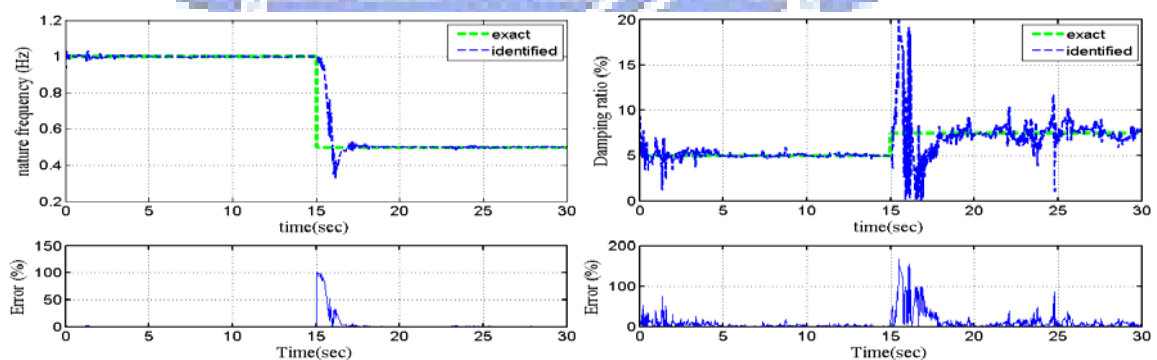
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



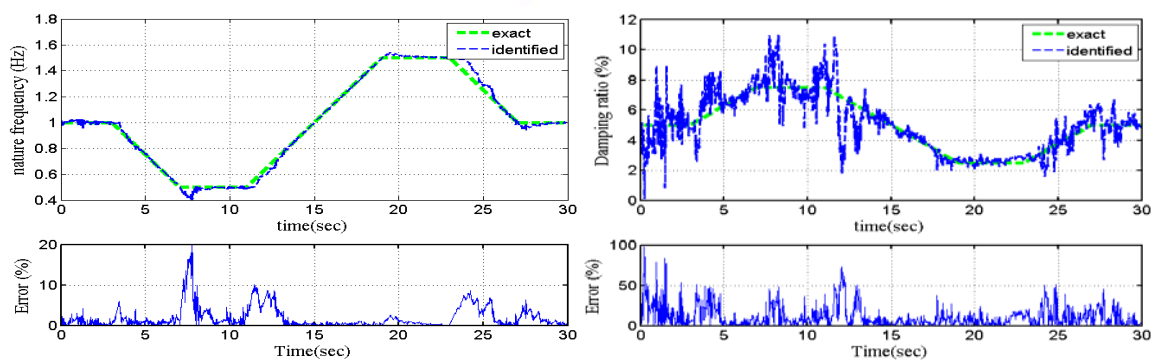
(a)



(b)



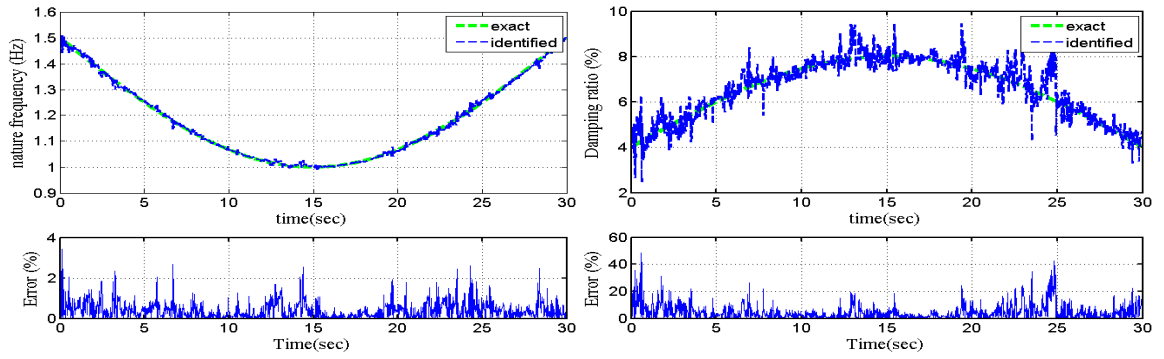
(c)



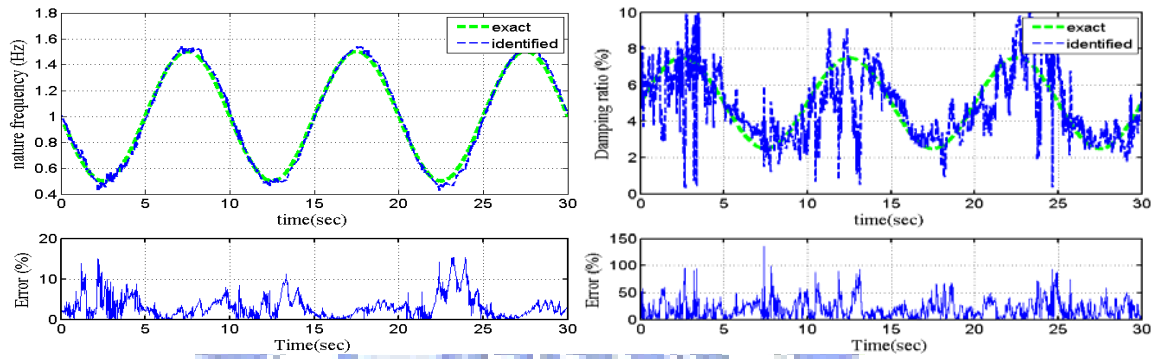
(d)

圖 3.7 權重多項式基底函數法配合常數形遺忘因子之識別結果( $k=2, 2\%$ 雜訊)

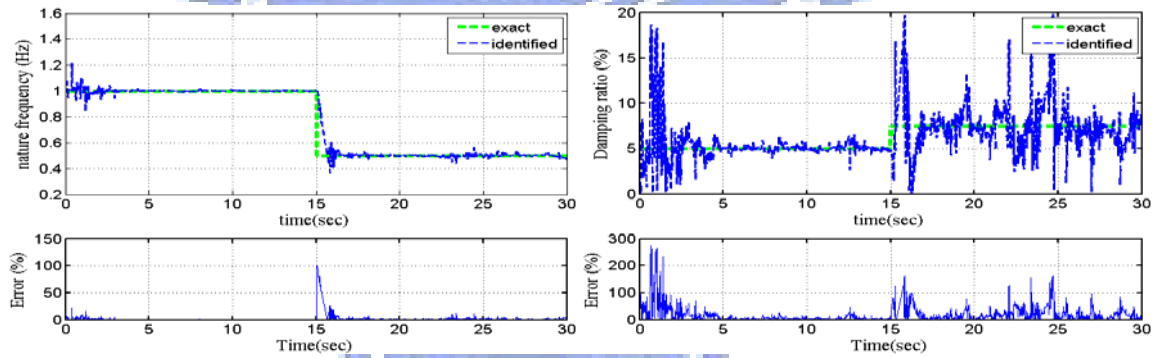
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



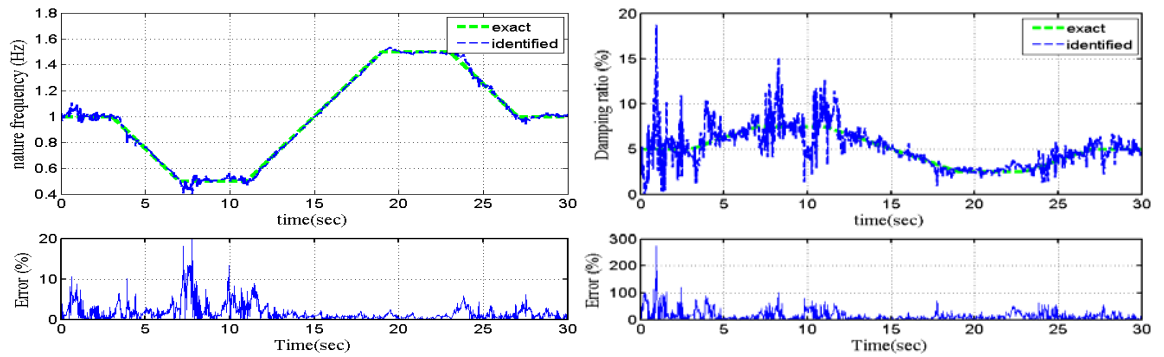
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 3.8 權重多項式基底函數法配合常數形遺忘因子之識別結果( $k=3, 2\%$ 雜訊)

(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4

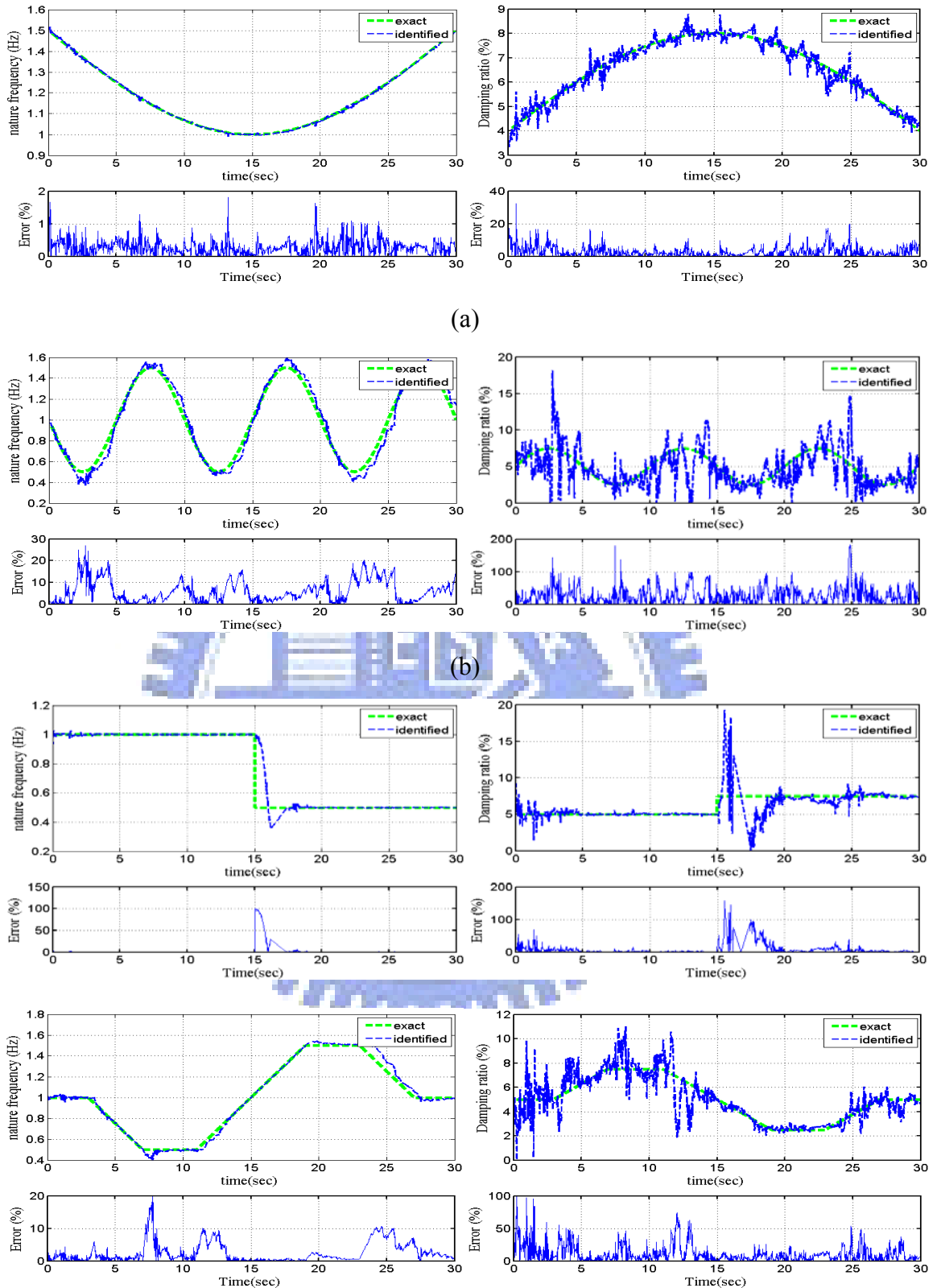
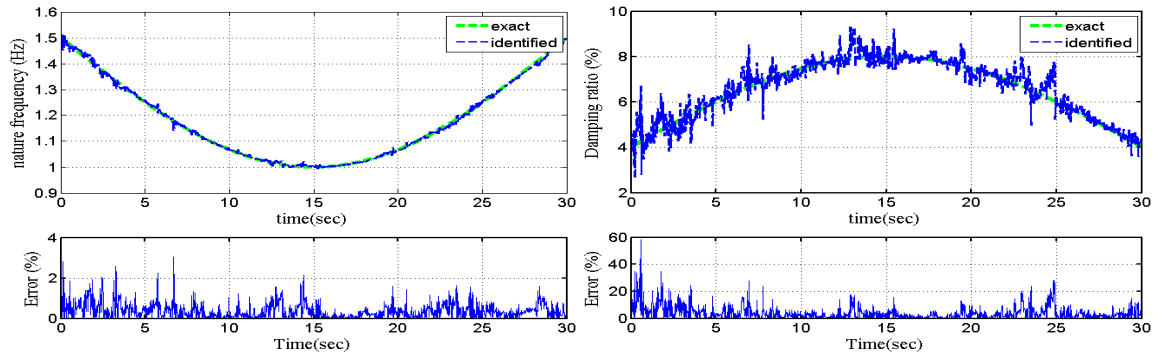
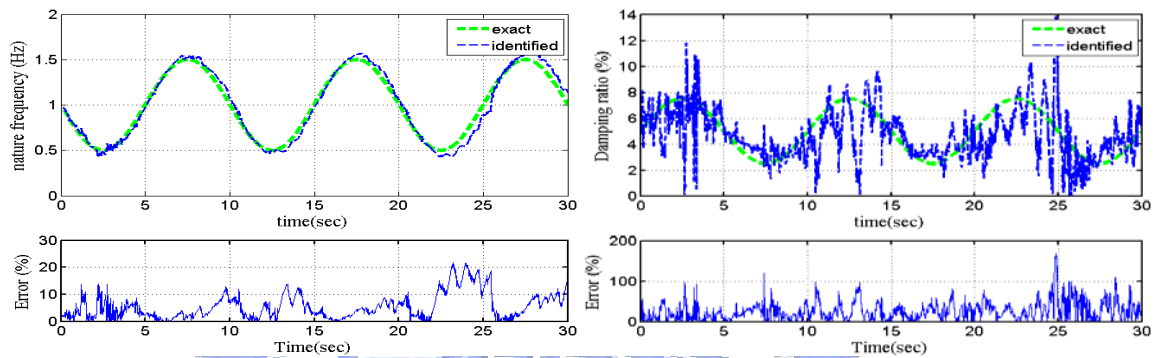


圖 3.9 權重多項式基底函數法配合變數形遺忘因子之識別結果( $k=2, 2\%$ 雜訊)  
 (a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4

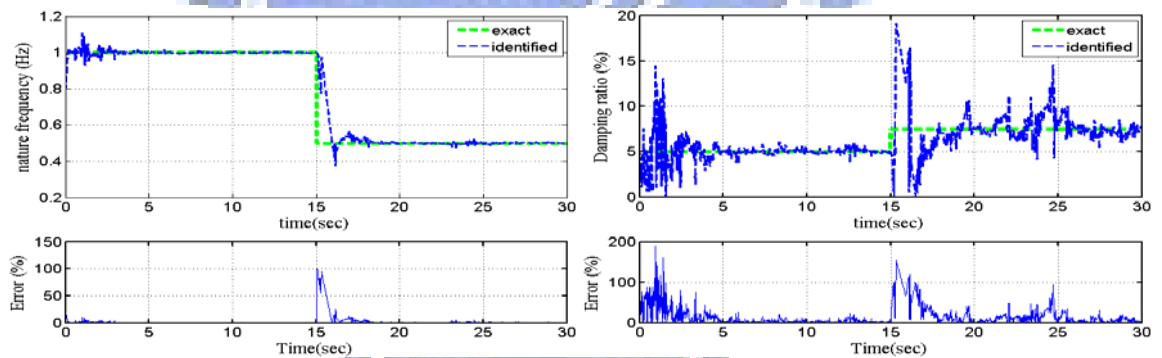




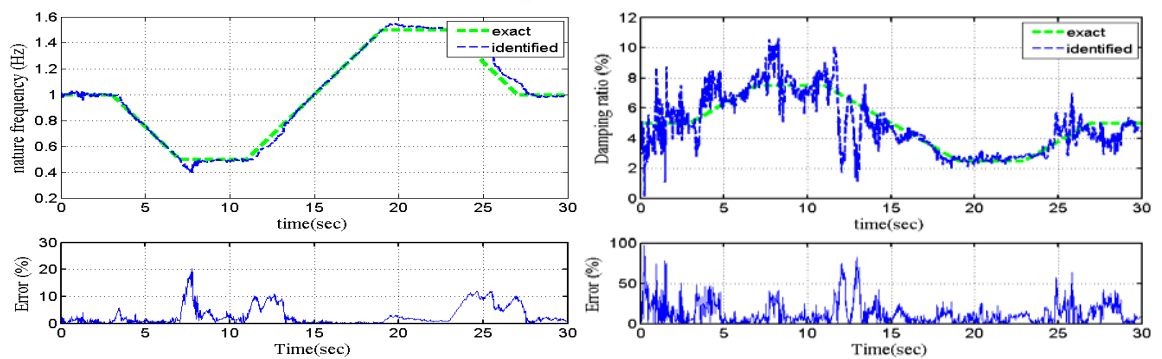
(a)



(b)



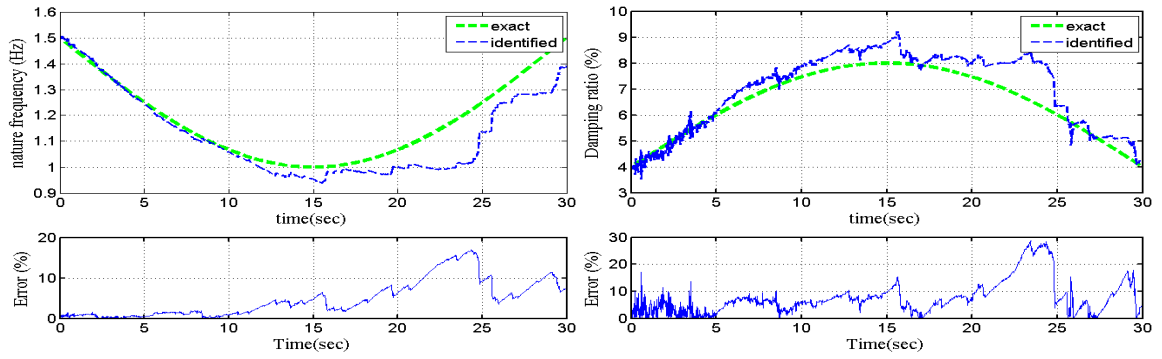
(c)



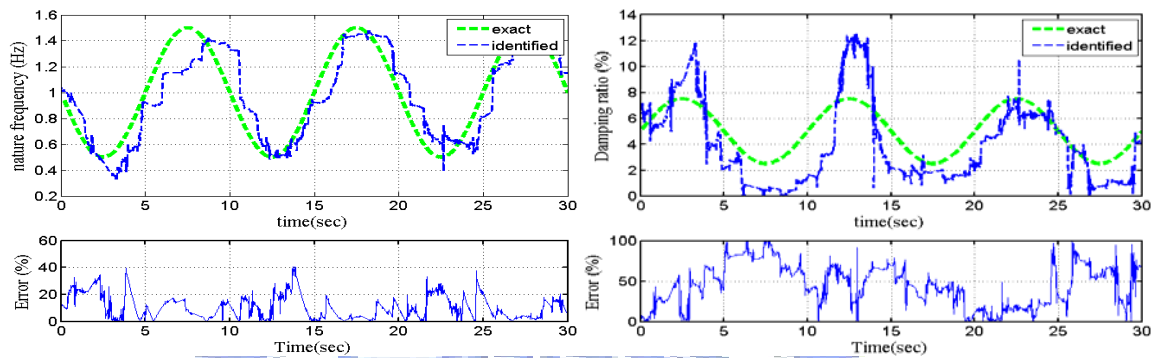
(d)

圖 3.10 權重多項式基底函數法配合變數形遺忘因子之識別結果( $k=3, 2\%$ 雜訊)

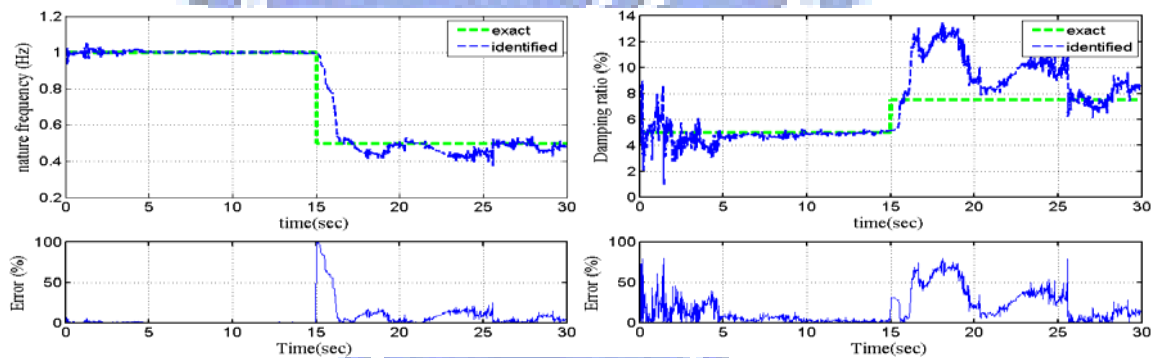
(a) case 1 ; (b) case 2 ; (c) case 3 ; (d) case 4



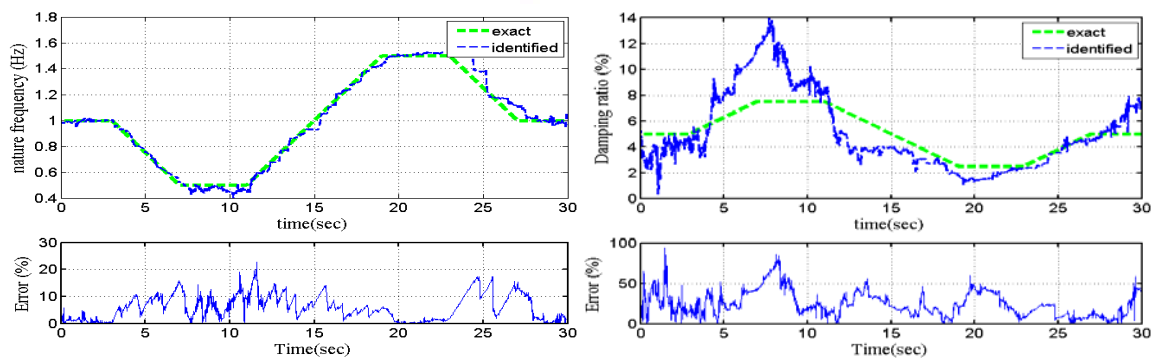
(a)



(b)



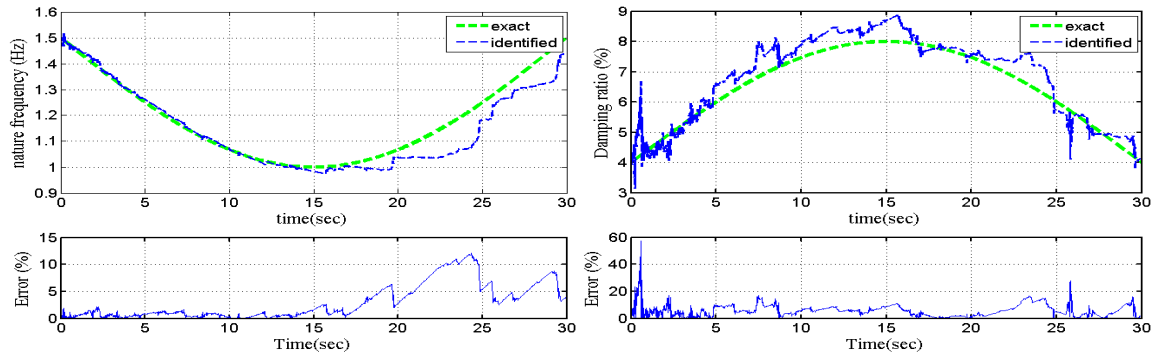
(c)



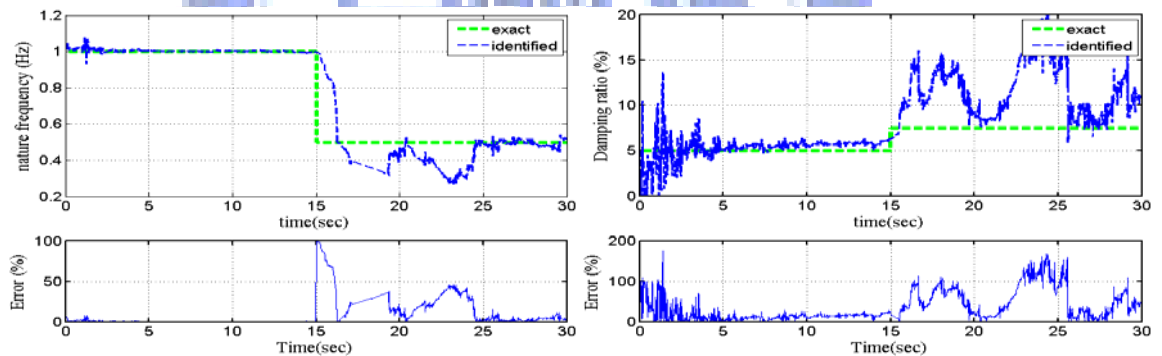
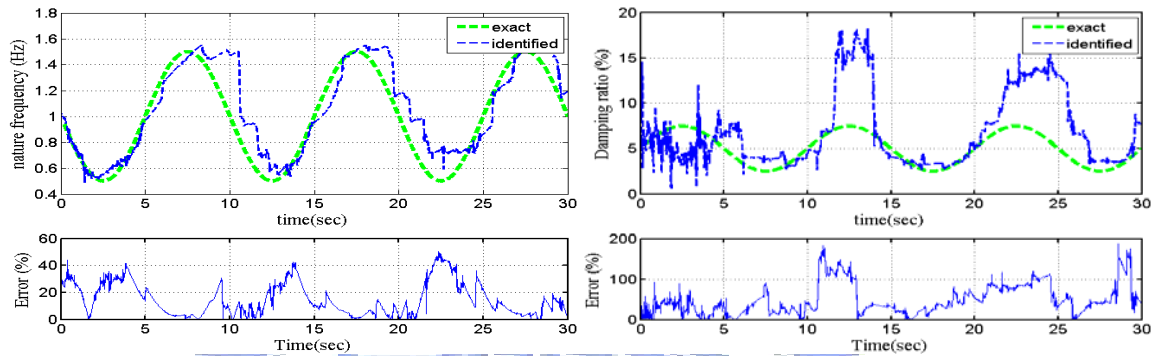
(d)

圖 3.11 權重多項式基底函數法配合卡式濾波器識別結果( $k=2, 2\%$ 雜訊)

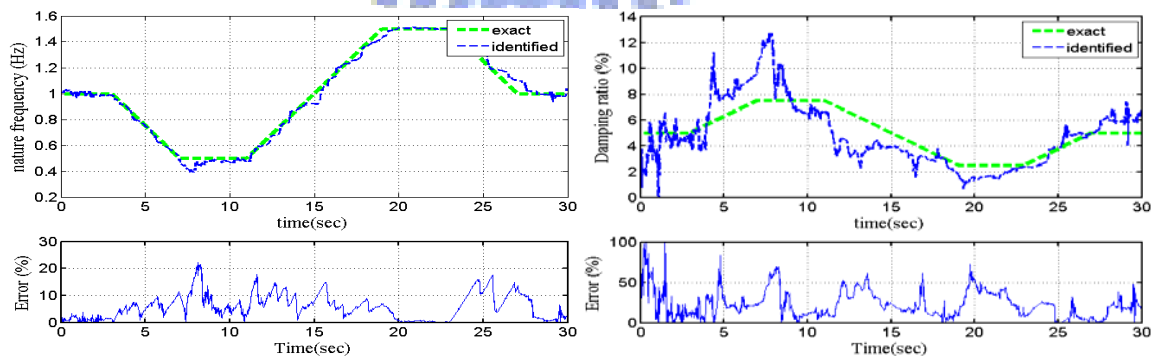
(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



(a)



(c)



(d)

圖 3.12 權重多項式基底函數法配合卡式濾波器識別結果( $k=3, 2\%$ 雜訊)

(a)case 1 ; (b)case 2 ; (c)case 3 ; (d)case 4



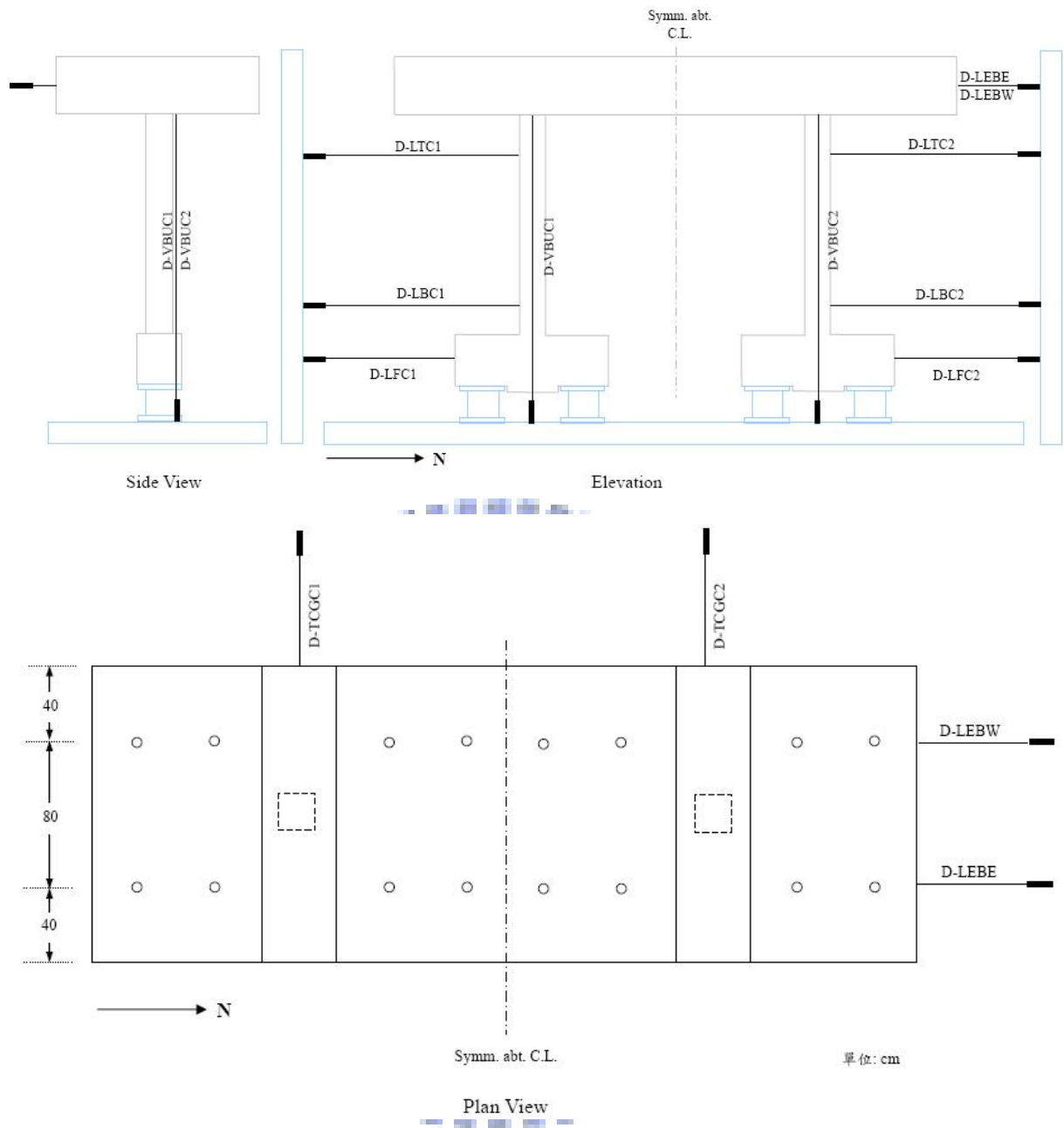


圖 4.2 待測結構物之位移計架設圖(NCREE 提供)

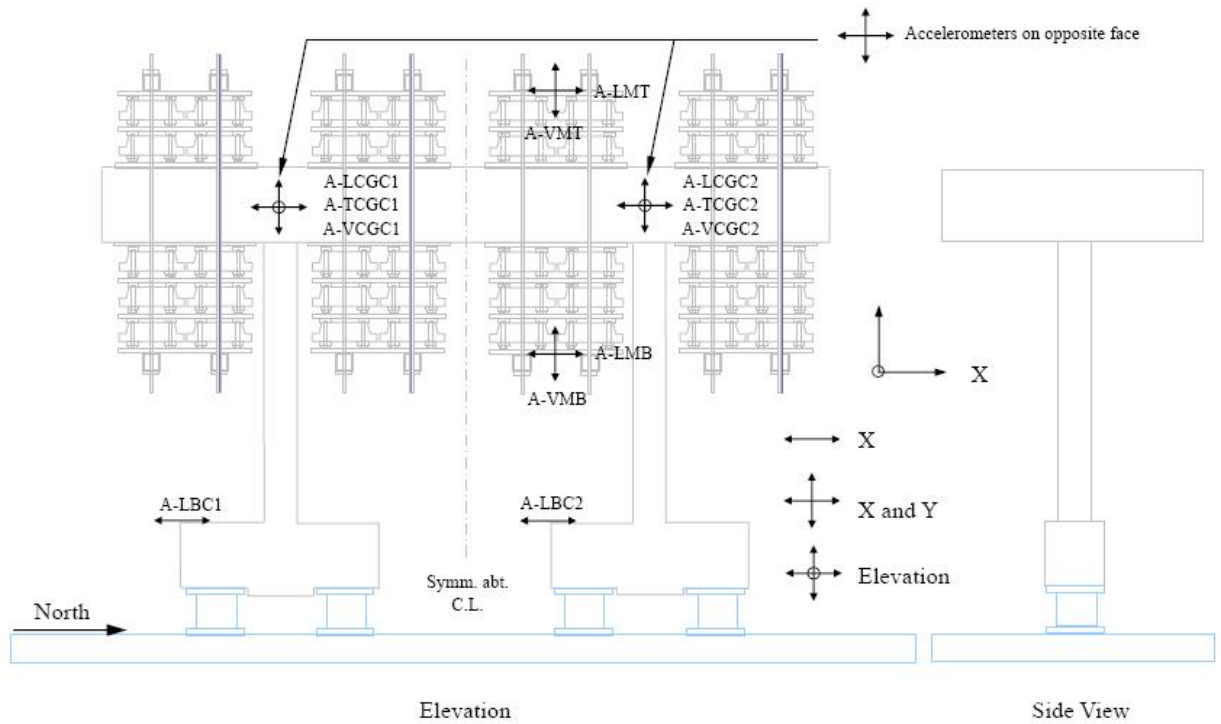


圖 4.3 待測結構物之加速度計架設圖 (NCREE 提供)

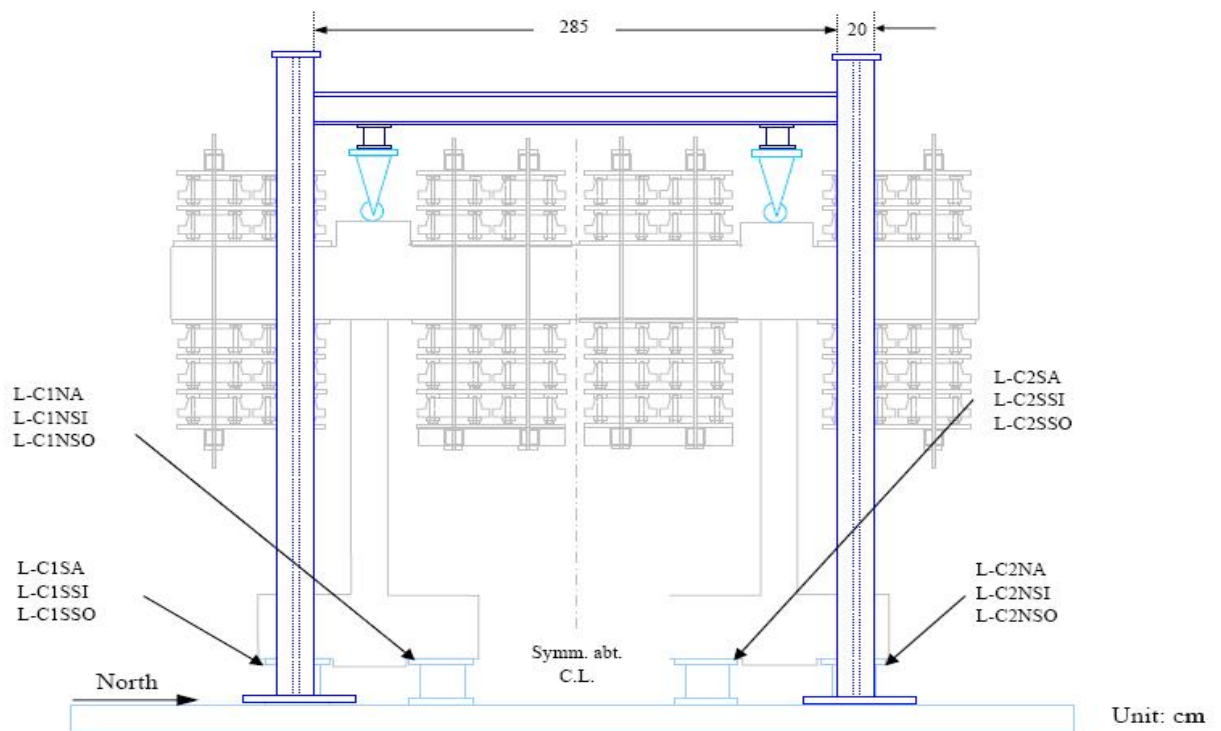


圖 4.4 待測結構物之基底剪力載重元件圖 (NCREE 提供)

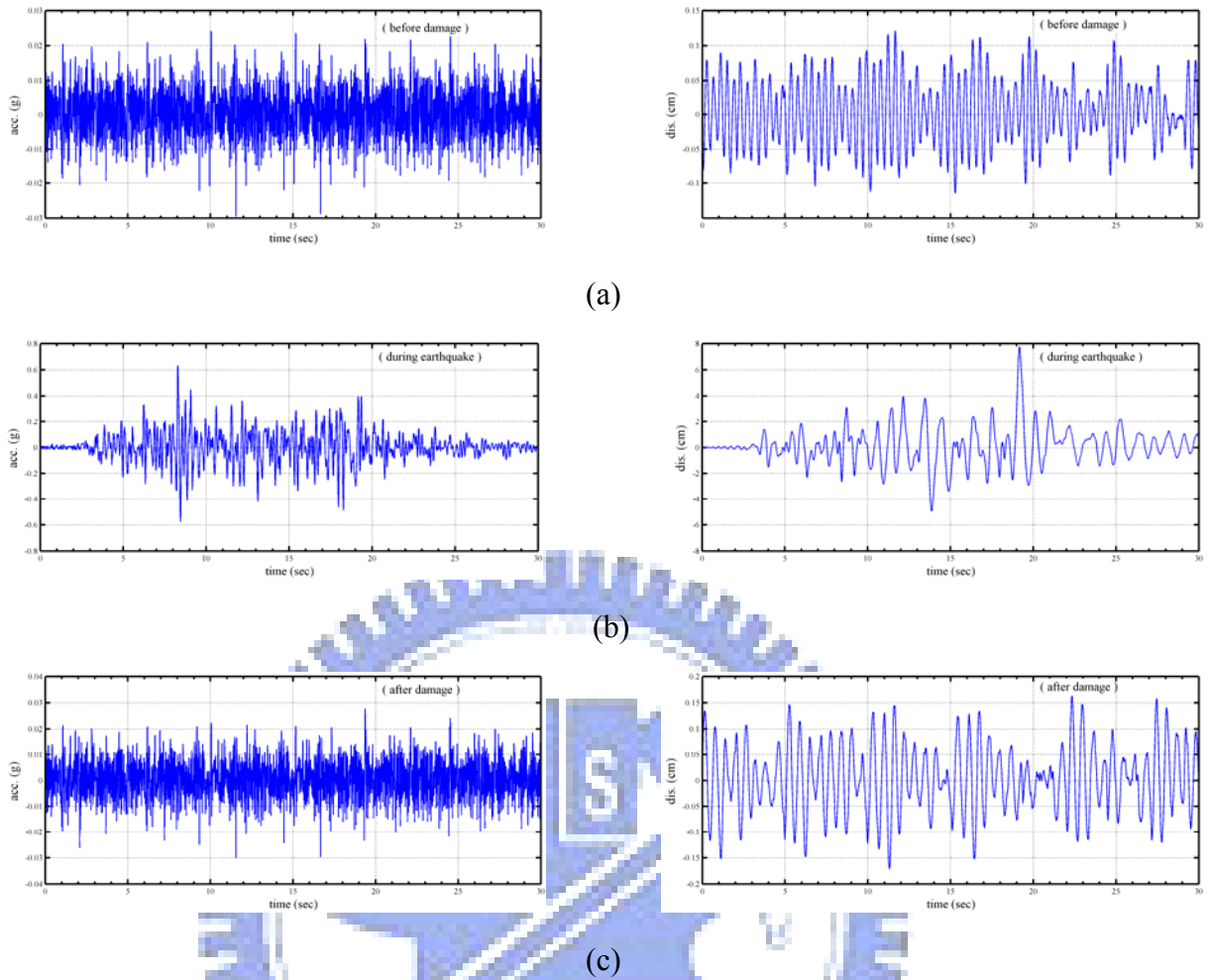


圖 4.5 振動台試驗之輸入與輸出。(a)破壞前、(b)地震中與(c)破壞後)

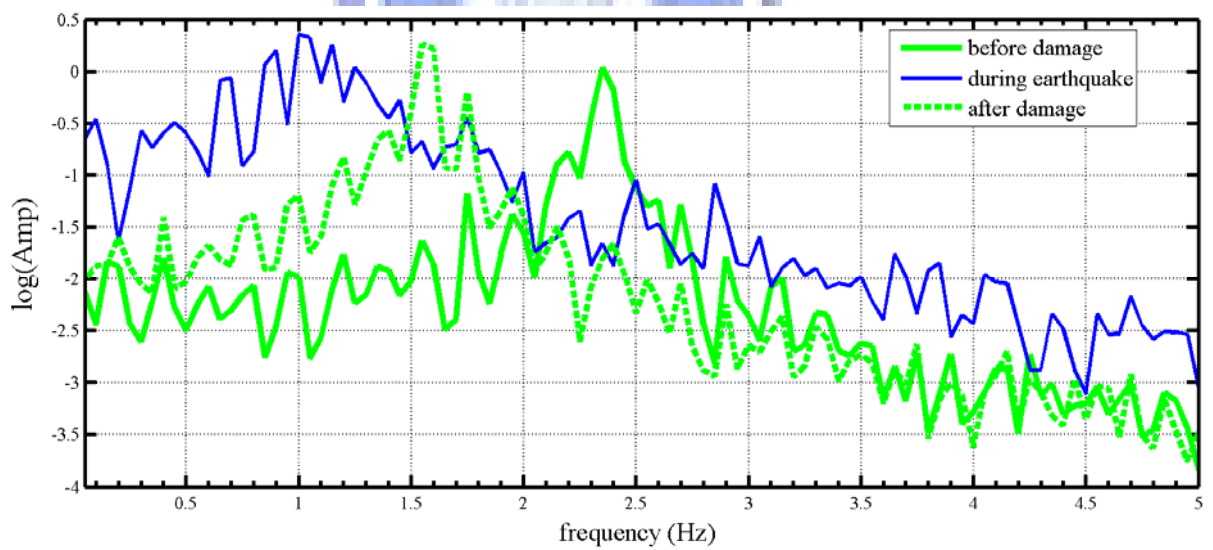


圖 4.6 不同輸入下之輸出頻譜反應

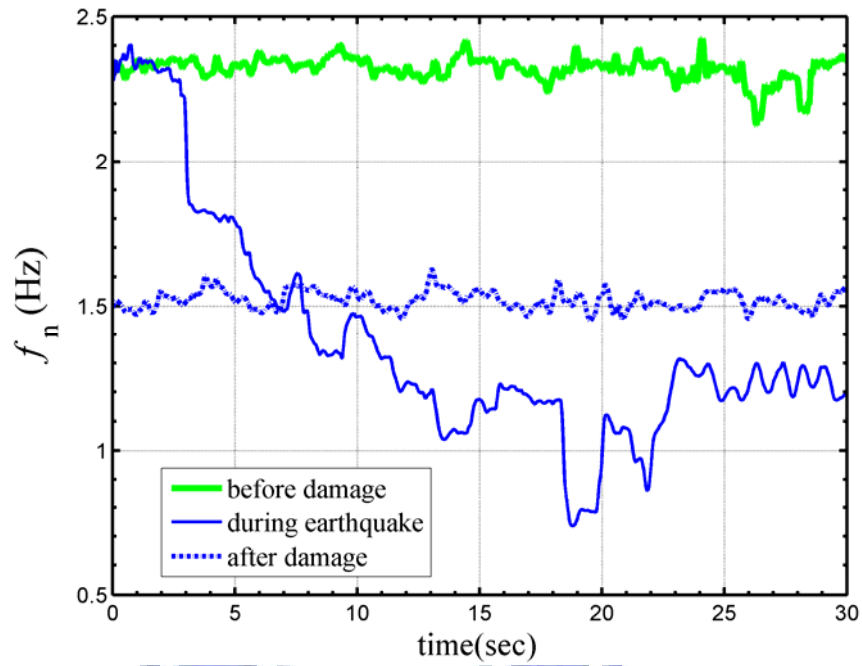


圖 4.7 迴歸所得之瞬時自然振動頻率

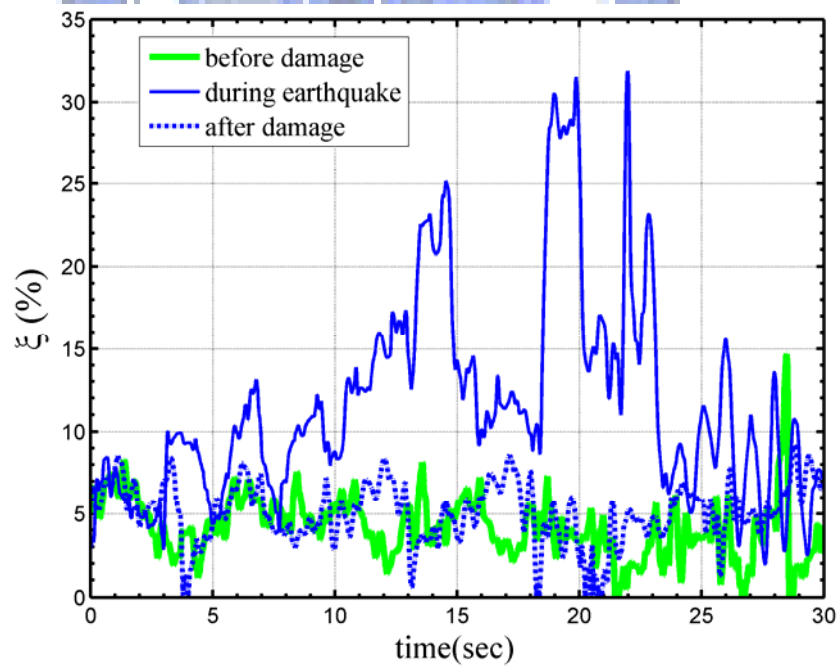


圖 4.8 迴歸所得之瞬時阻尼比



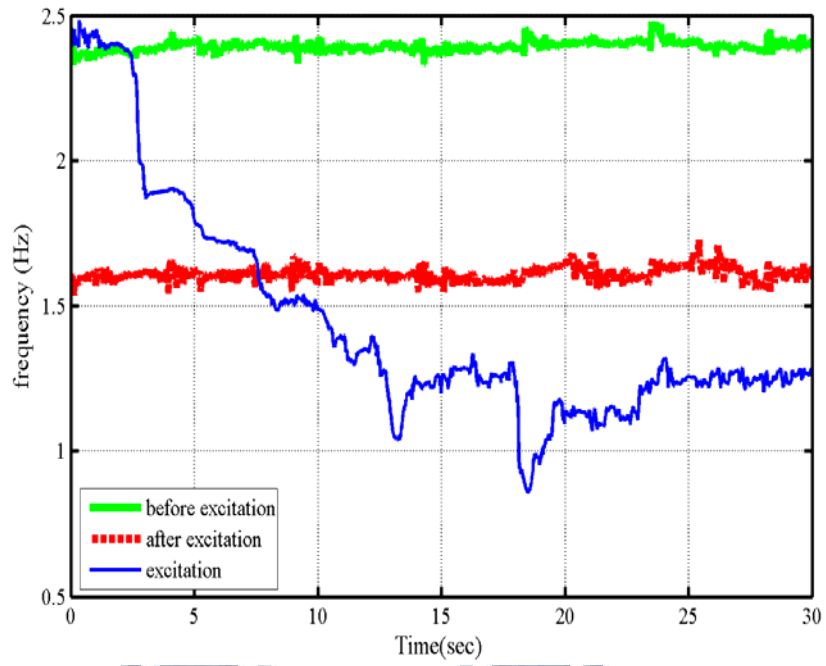


圖 4.9 識別所得之瞬時自然振動頻率

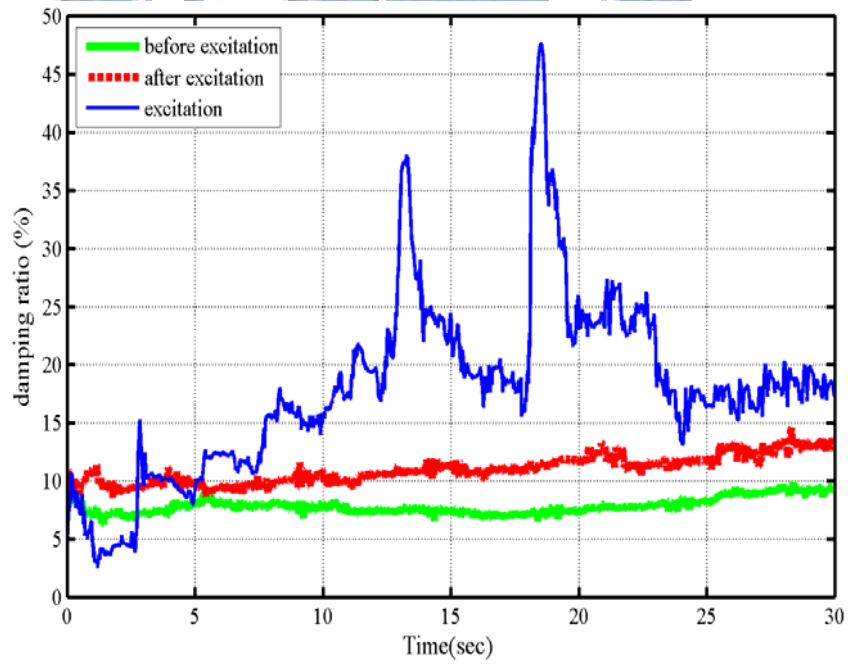
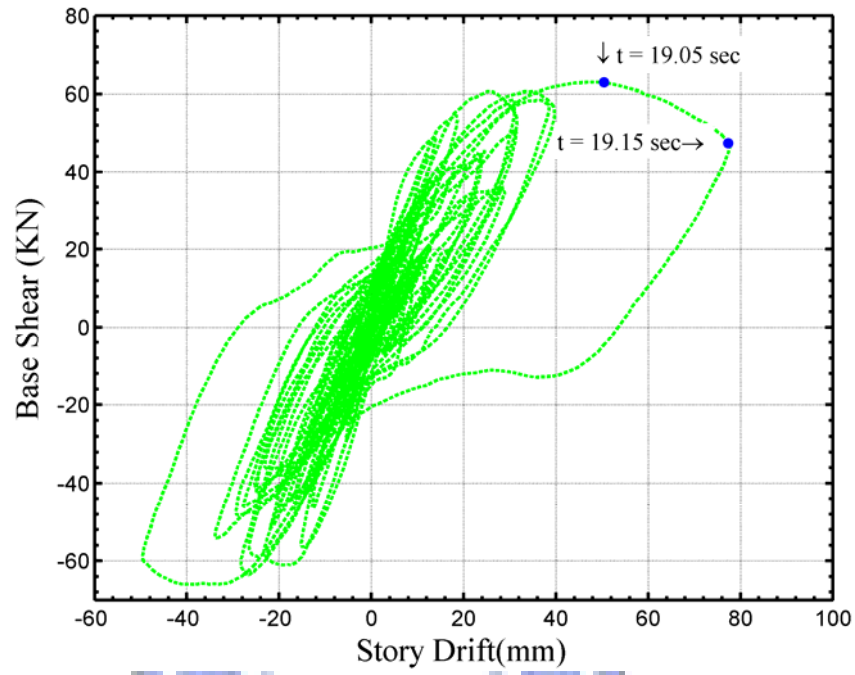


圖 4.10 識別所得之瞬時阻尼比



(a)

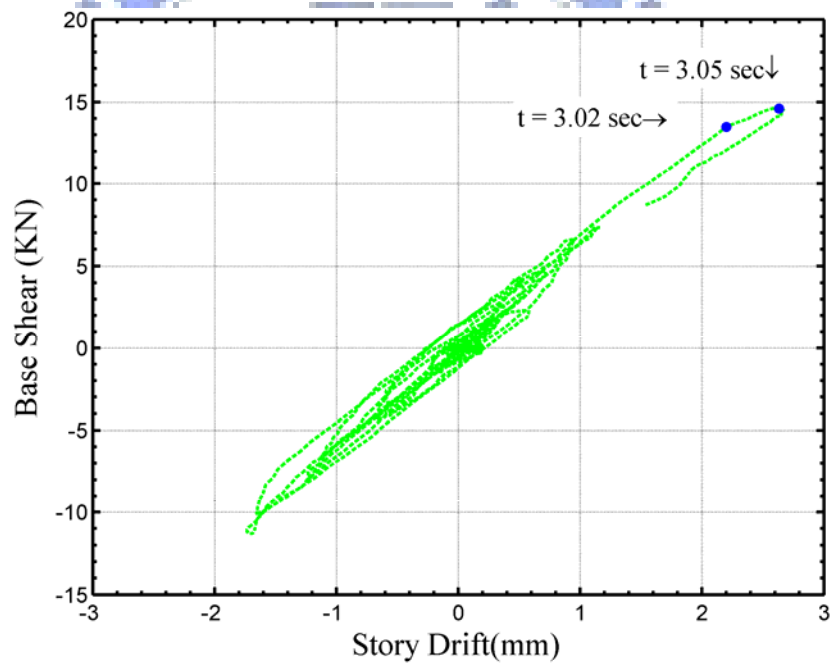


圖 4.11 由基底剪力與層間位移所得之遲滯迴圈：

(a)  $0 < t < 30$  秒. (b)  $0 < t < 3.10$  秒

## Benchmark A

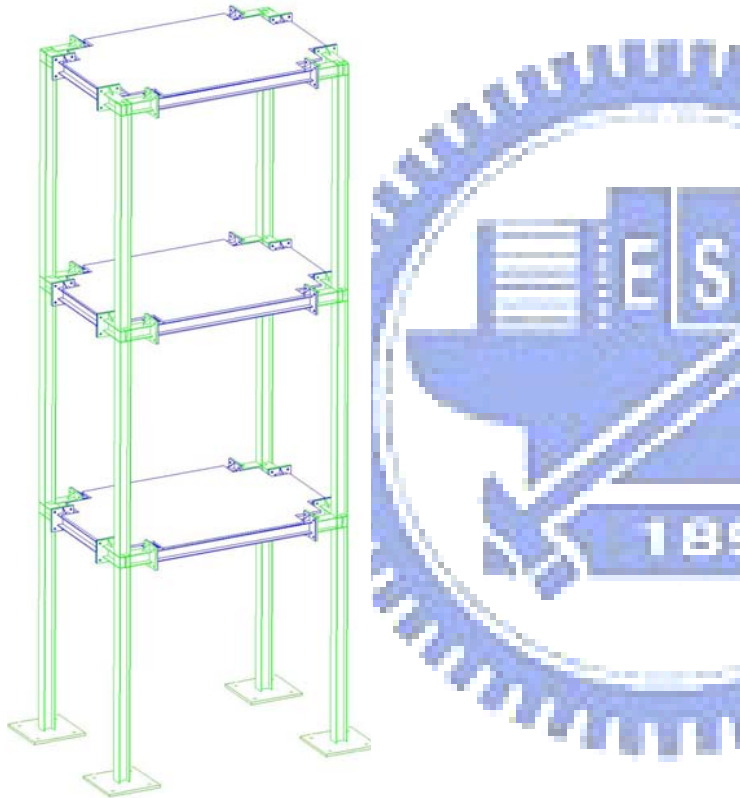


圖 4.12 進行振動台試驗之結構模型  
(NCREE 提供)



圖 4.13 三層樓鋼構架(Benchmark A)之照片  
(NCREE 提供)

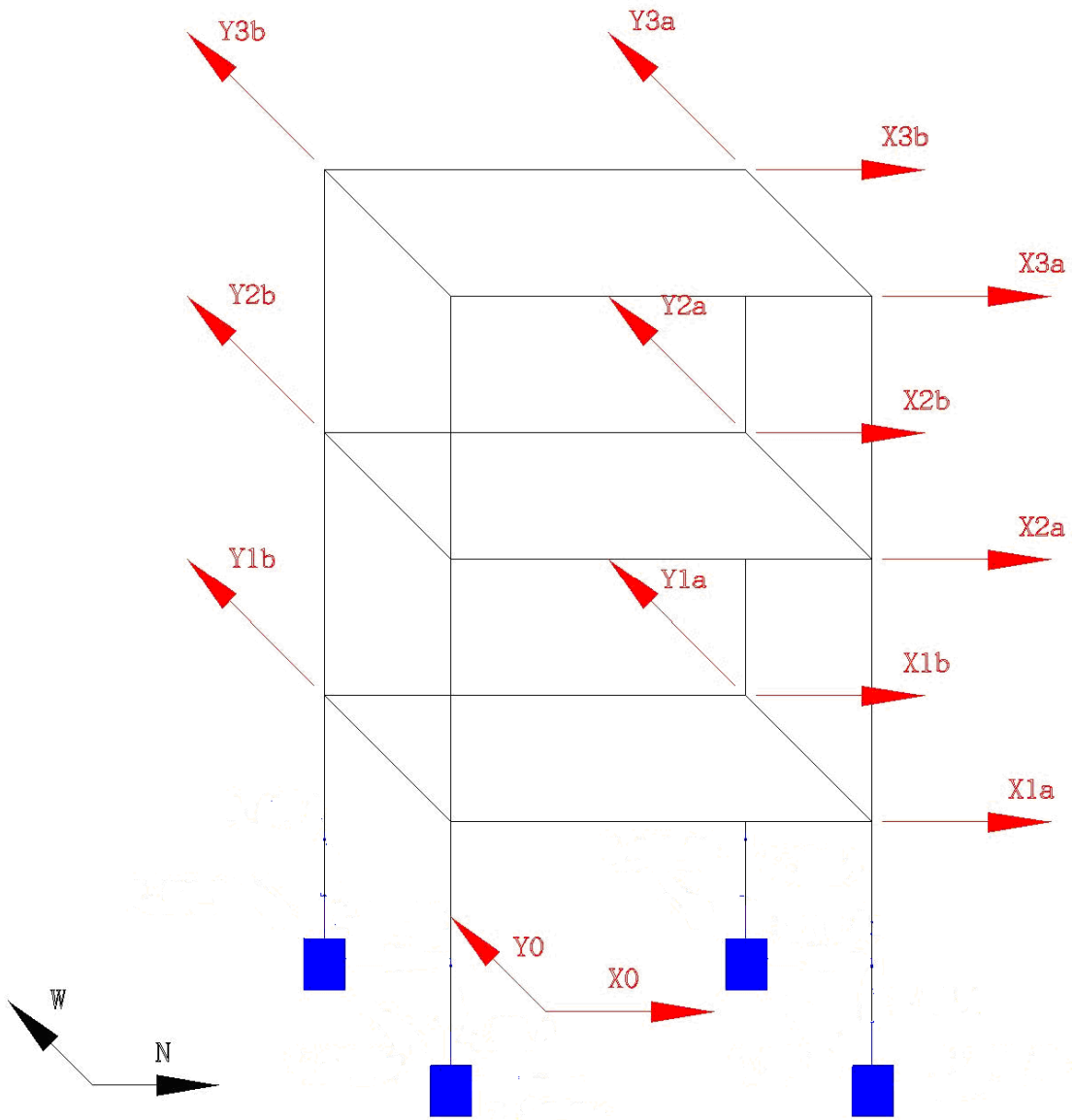


圖 4.14：三層樓鋼構架之感應子位置示意圖

(NCREE 提供)

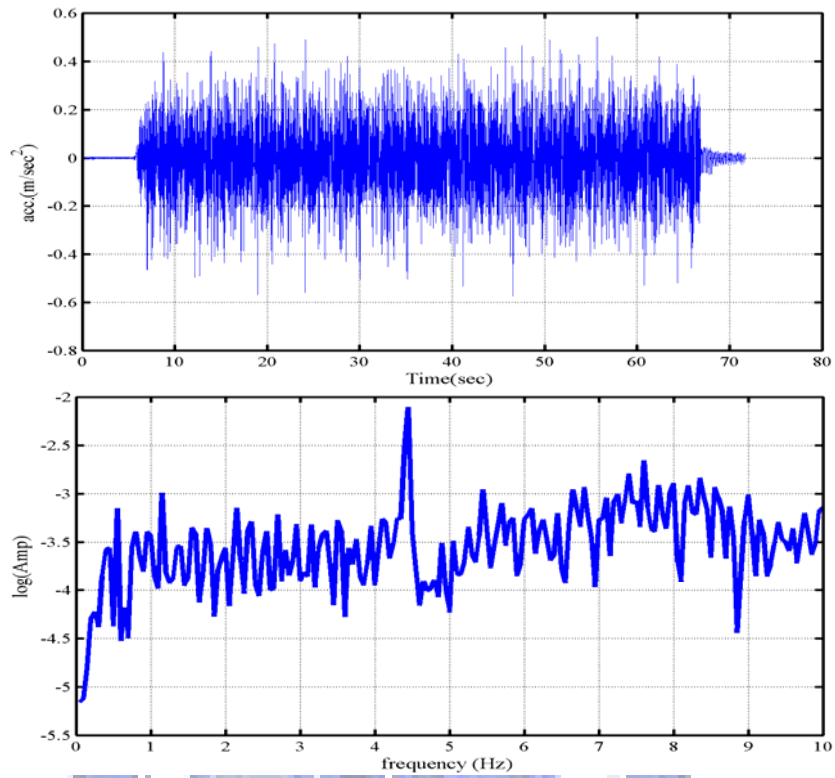


圖 4.15 Benchmark A 之 X 向白噪輸入及其頻譜圖(50gal)

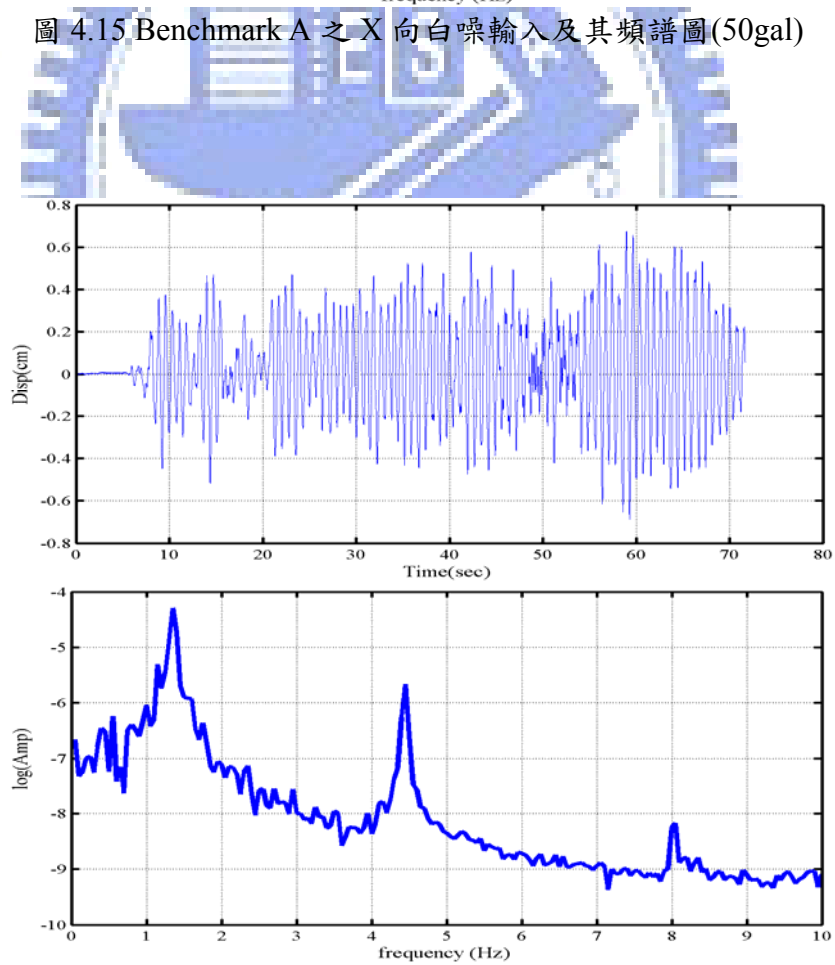


圖 4.16 白噪輸入下(50gal)Benchmark A 三樓位移輸出反應及其頻譜圖

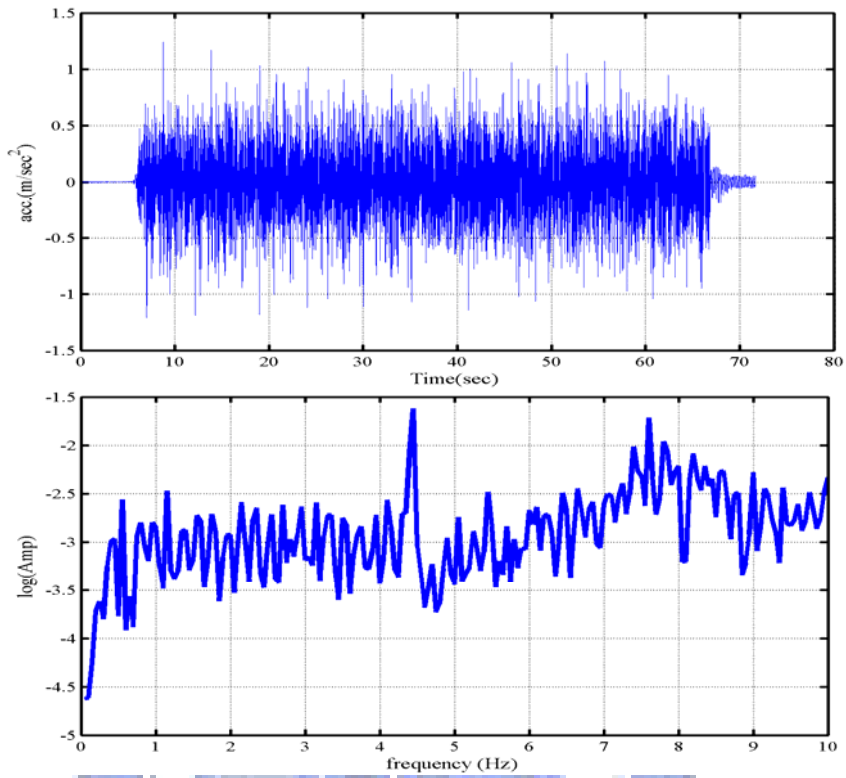


圖 4.17 Benchmark A 之 X 向白噪輸入及其頻譜圖(100gal)

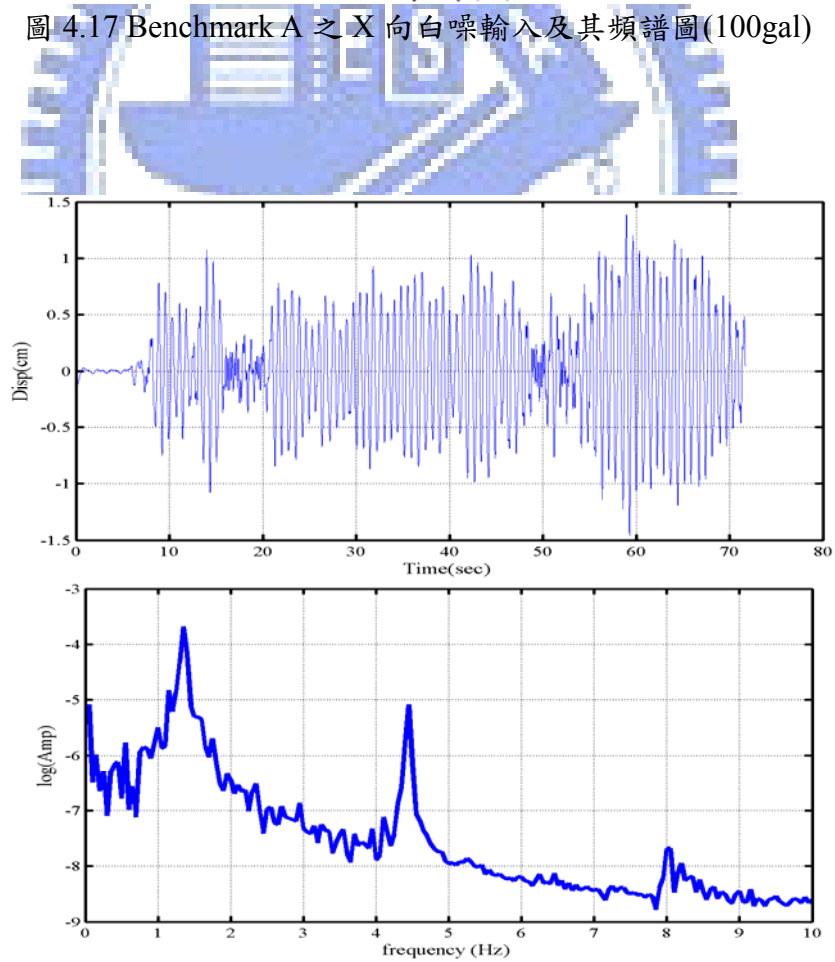


圖 4.18 白噪輸入下(100gal)Benchmark A 三樓位移輸出反應及其頻譜圖

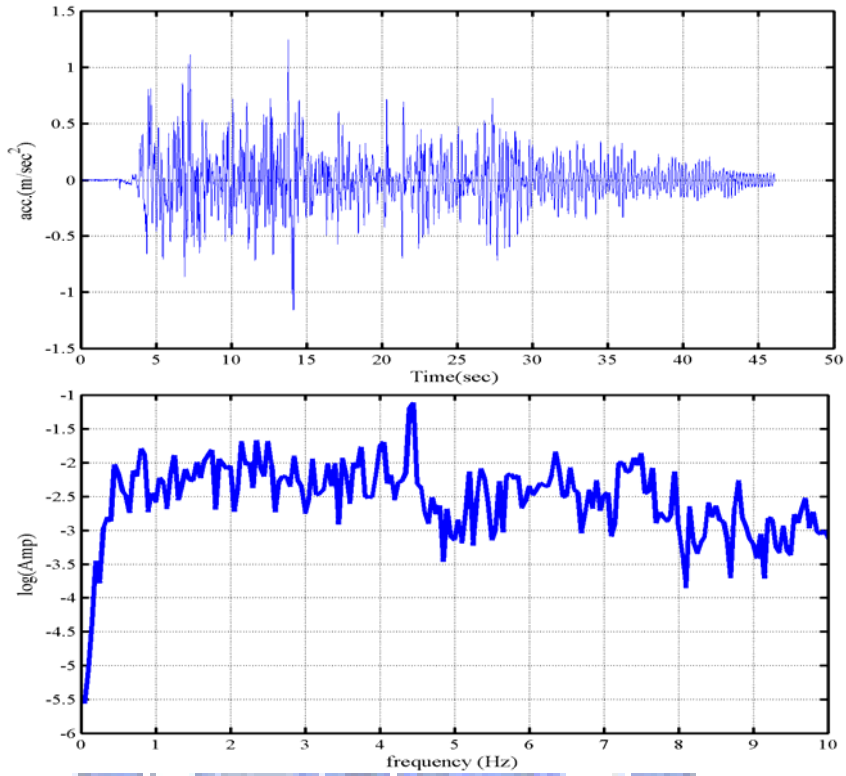


圖 4.19 Benchmark A 之 X 向 EL Centro 地震輸入及其頻譜圖(100gal)

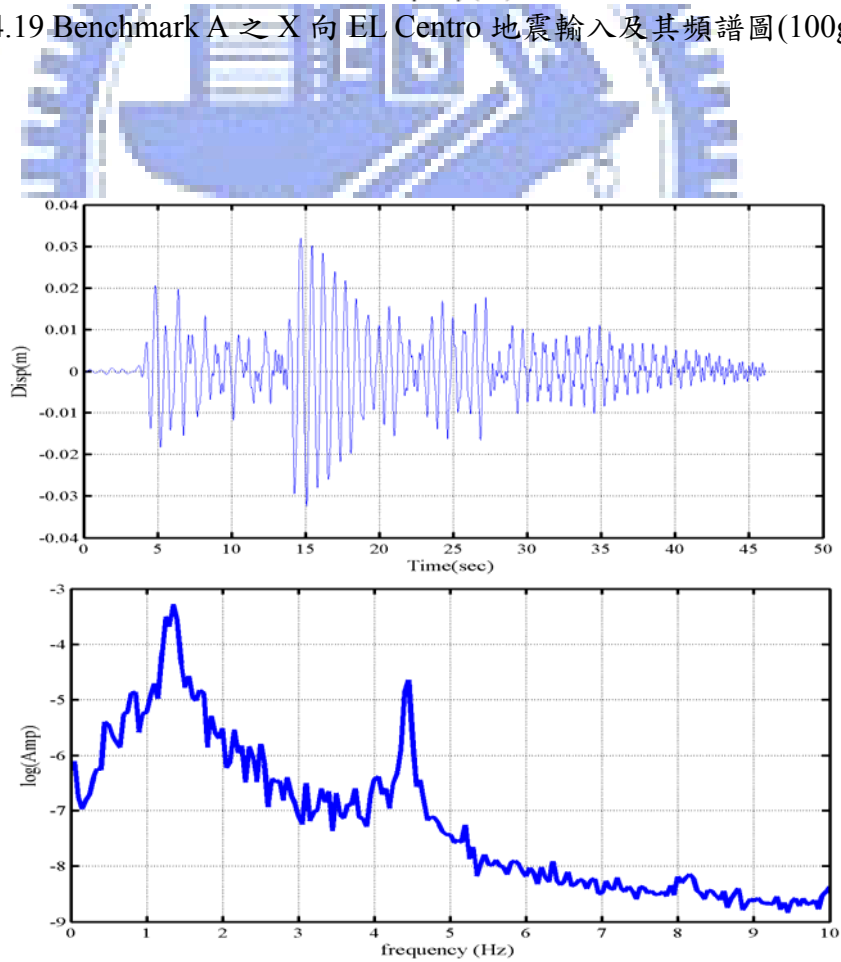


圖 4.20 EL Centro 地震輸入下(100gal)Benchmark A 三樓位移輸出反應及其頻譜圖

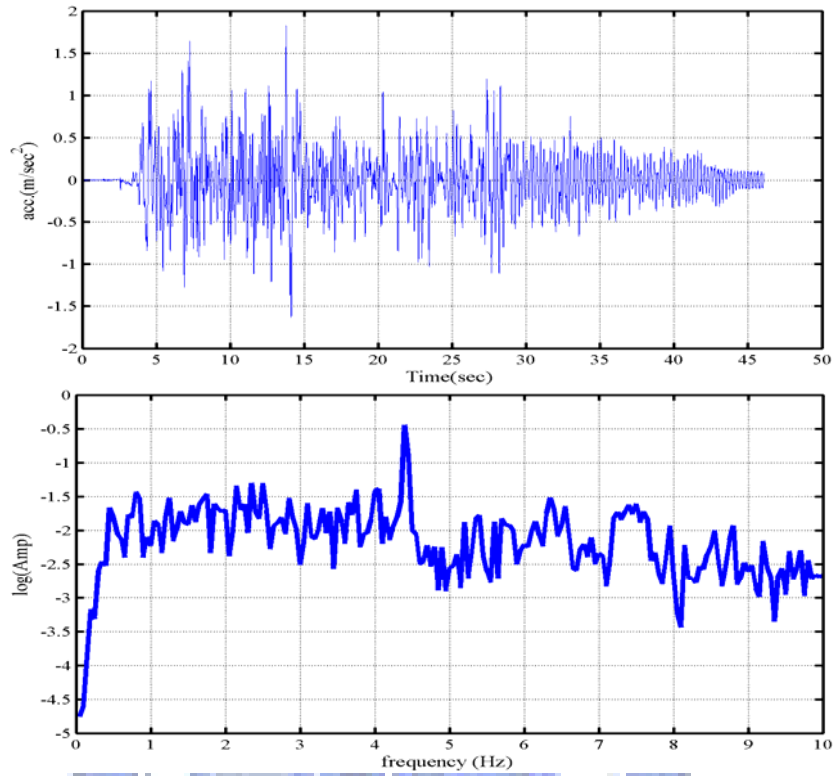


圖 4.21 Benchmark A 之 X 向 EL Centro 地震輸入及其頻譜圖(200gal)

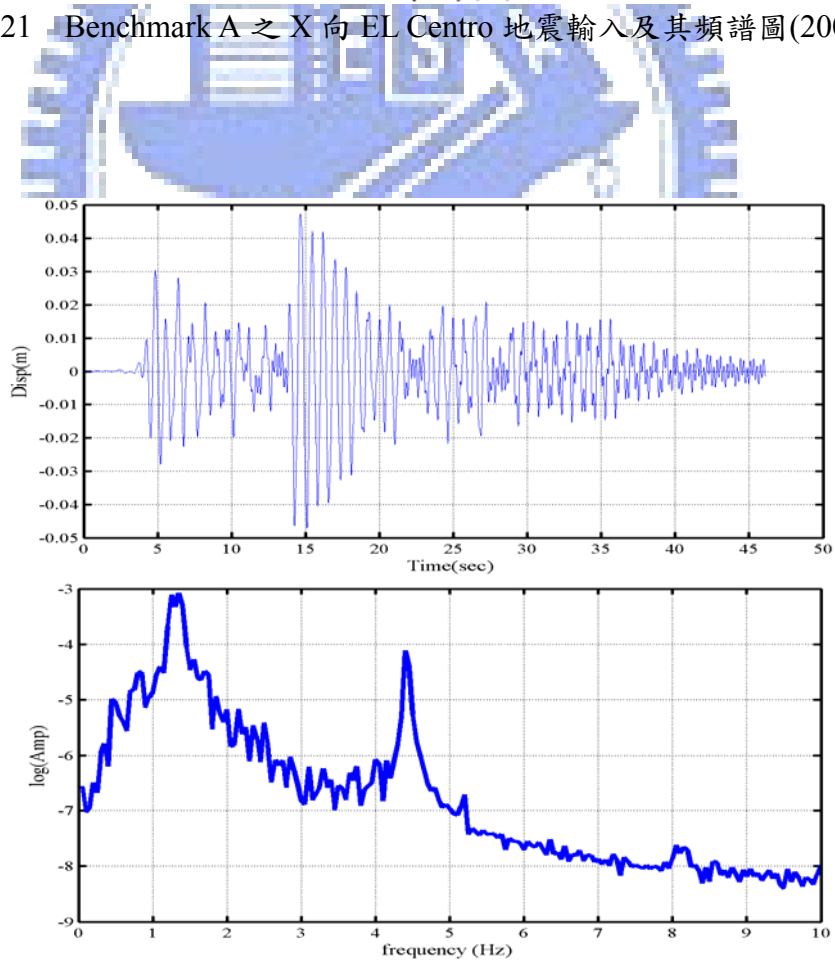


圖 4.22 EL Centro 地震輸入下(200gal)Benchmark A 三樓位移輸出反應及其頻譜圖



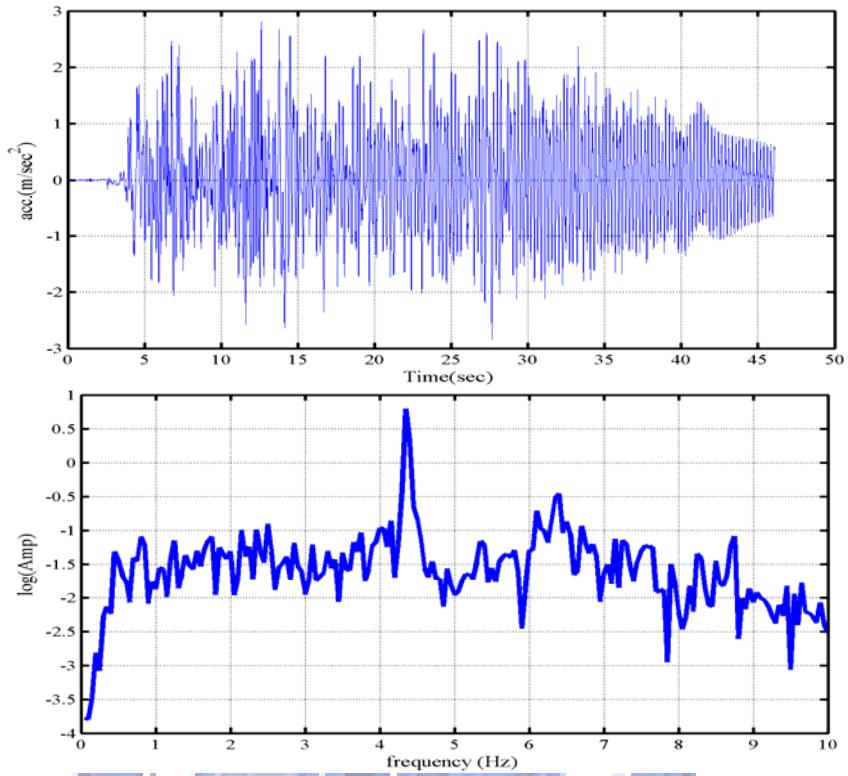


圖 4.23 Benchmark A 之 X 向 EL Centro 地震輸入及其頻譜圖(300gal)

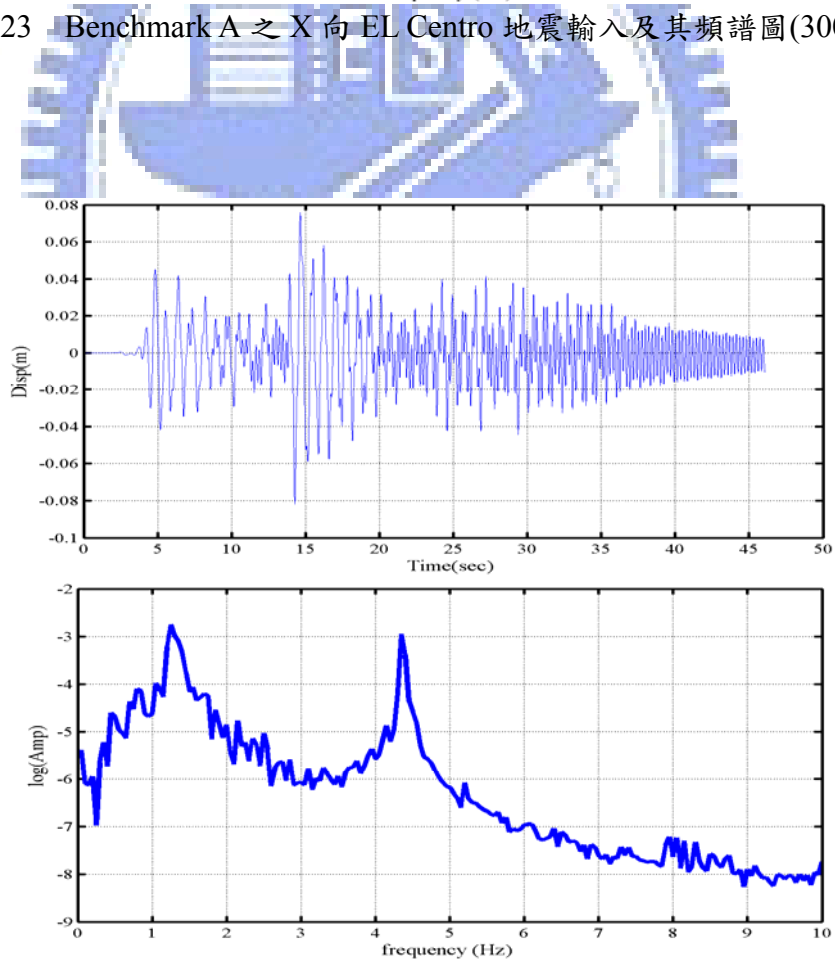


圖 4.24 EL Centro 地震輸入下(300gal)Benchmark A 三樓位移輸出反應及其頻譜圖

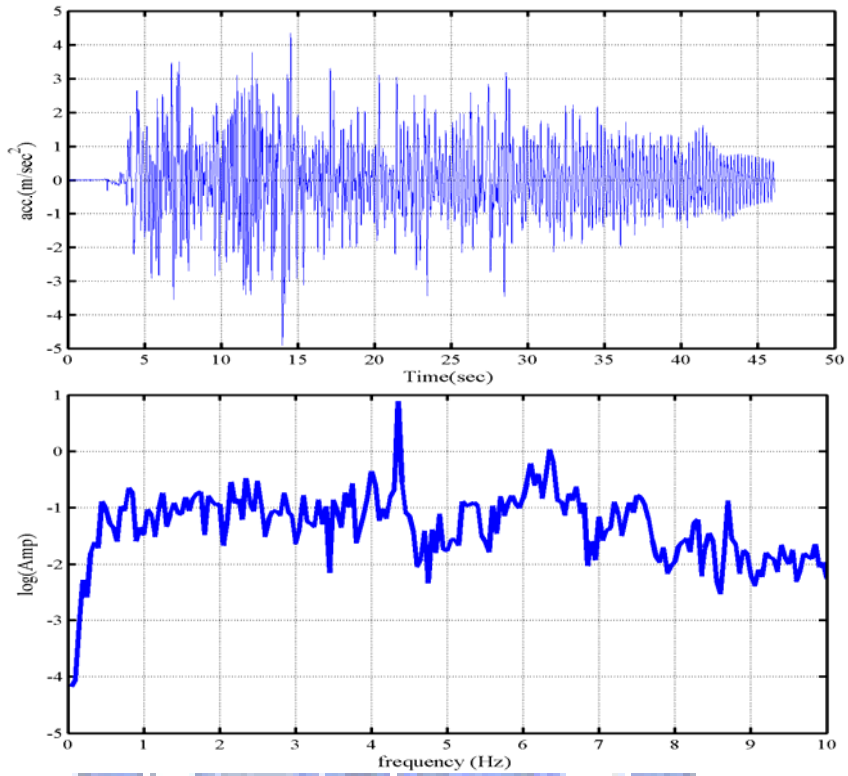


圖 4.25 Benchmark A 之 X 向 EL Centro 地震輸入及其頻譜圖(500gal)

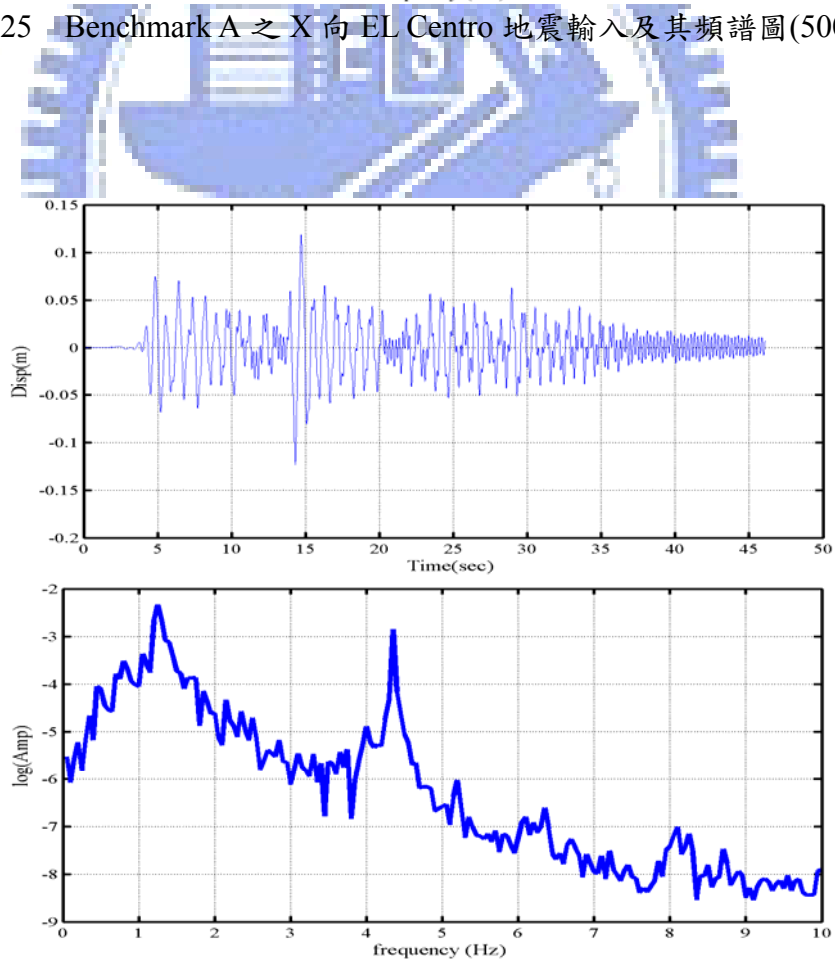
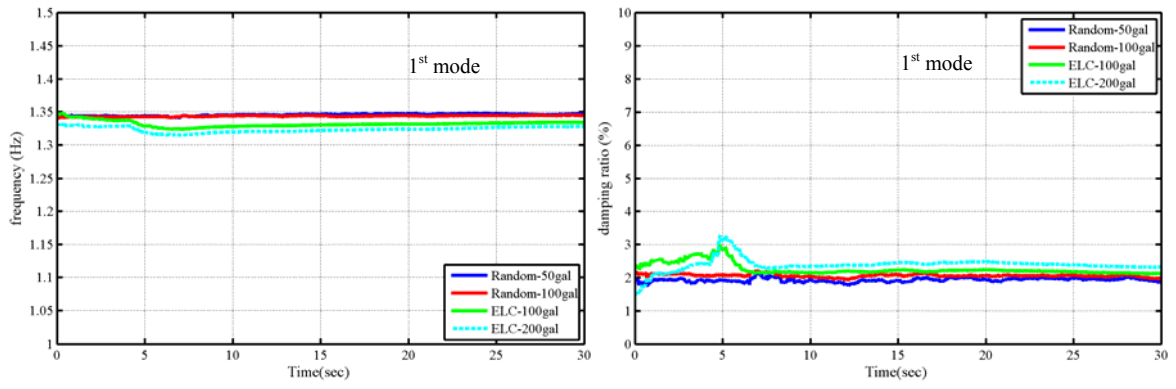
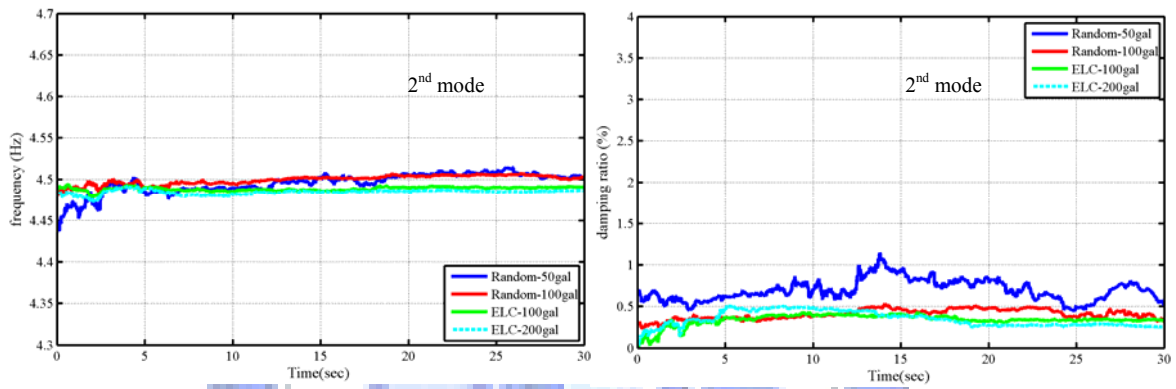


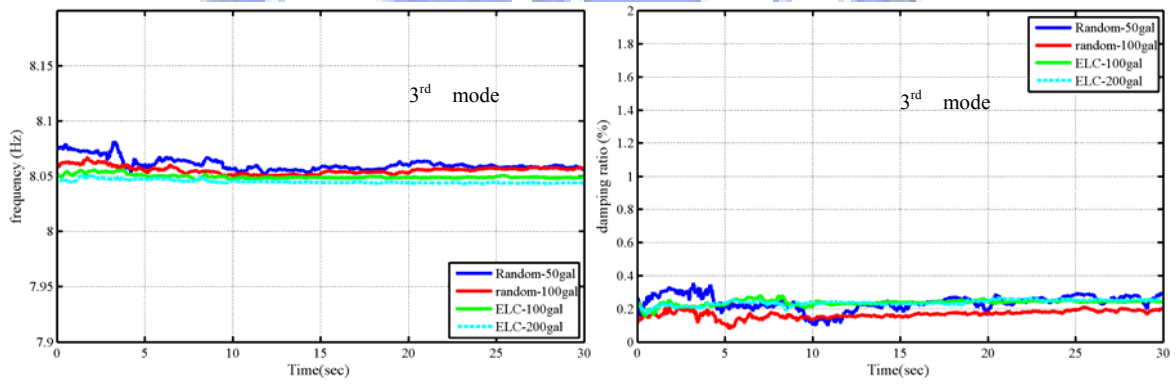
圖 4.26 EL Centro 地震輸入下(500gal)Benchmark A 三樓位移輸出反應及其頻譜圖



(a)



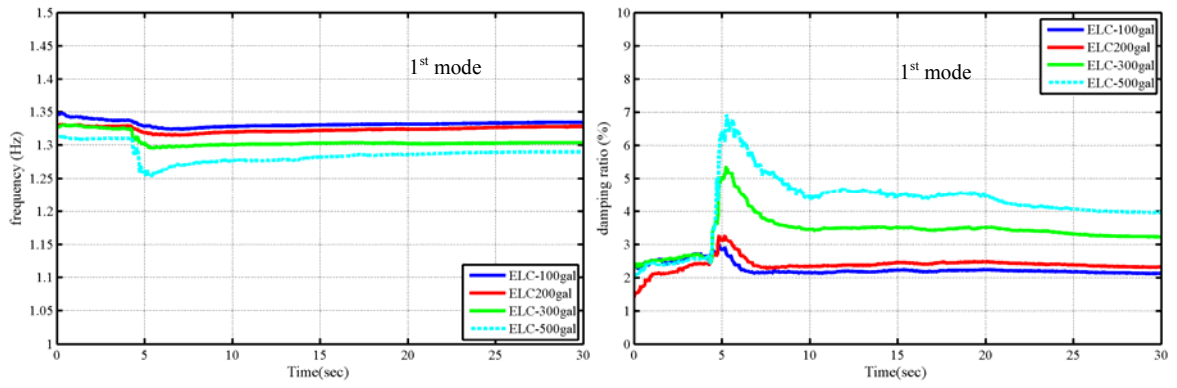
(b)



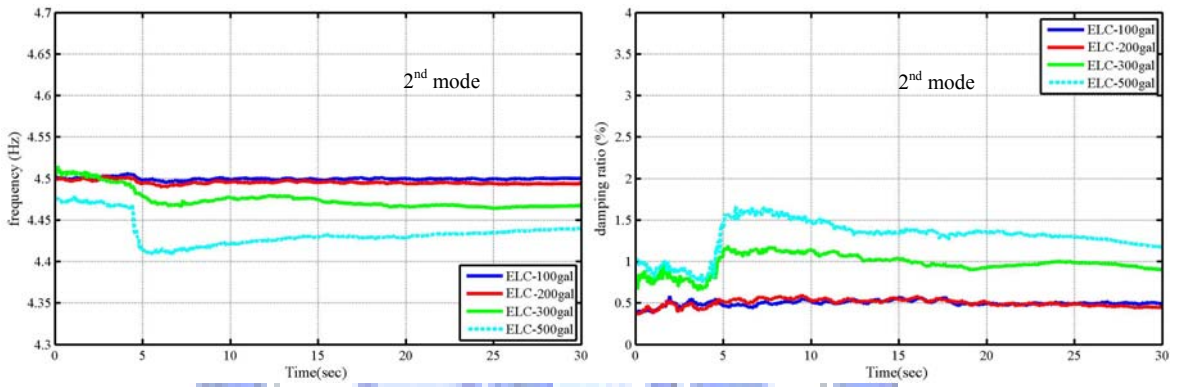
(c)

圖 4.27 Benchmark A 線性試驗各模態識別結果

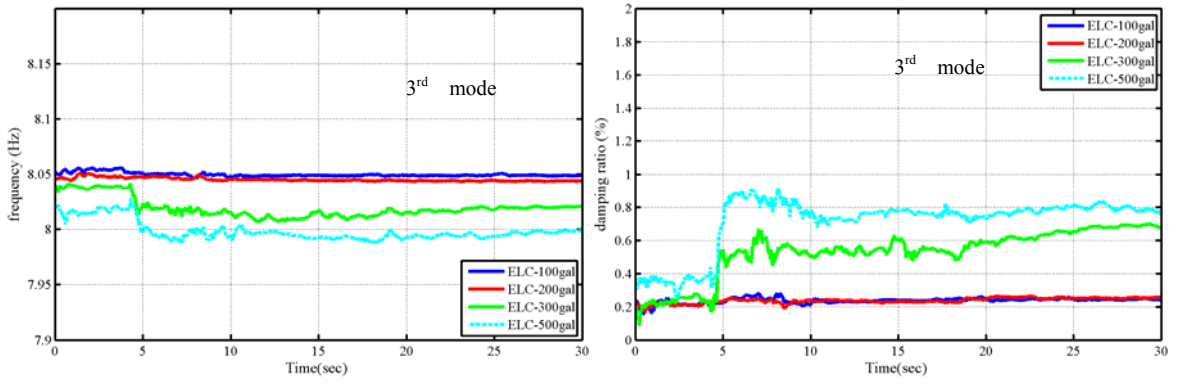
(a) 第一模態 (b) 第二模態 (c) 第三模態



(a)



(b)



(c)

圖 4.28 Benchmark A 線性與非線性試驗各模態識別結果  
(a)第一模態 (b)第二模態 (c)第三模態