

國立交通大學  
土木工程學系碩士班  
碩士論文

利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形薄板振動

Vibrations of Rectangular Thin plates with a  
crack via the Ritz method



研究生：李昱成

指導教授：黃炯憲 博士

中華民國九十八年一月

利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形薄板振動

Vibrations of Rectangular Thin plates with a  
crack via the Ritz method

研究生：李昱成

Student : Yu-Cheng Lee

指導教授：黃炯憲 博士

Advisor : Dr. Chiung-Shiann Huang

國立交通大學

土木工程學系



Submitted to Department of Civil Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Civil Engineering

January 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年一月

# 利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形薄板振動

研究生：李昱成

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘要

本研究使用 Ritz 法分析裂縫矩形板之自由振動，為能描述裂縫尖端之奇異性並滿足跨越裂縫之位移與轉角不連續行為，在所需之允許函數中引入本文提出之一組特殊函數。如此能確保 Ritz 法所得之自然頻率值由上界收斂至真解之特性。在收斂性分析中，以不同長度水平裂縫之案例，將所得結果與文獻比較，以驗證本研究所提函數之可行性與正確性。最後，應用本方法於分析各種不同邊界條件、不同裂縫長度、角度與位置之案例，探討不同裂縫長度、角度與位置對板振動行為之影響。本研究所得頻率值與振態節點圖，其中大部分均尚未見於文獻。

# **Vibrations of Rectangular Thin plates with a crack via the Ritz method**

Student: Yu-Cheng Lee

Adviser: Prof. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering  
National Chiao-Tung University

## **Abstract**

This study analyzes the free vibrations of rectangular plates with cracks by the famous Ritz method. To ensure the important and useful feature of the Ritz method providing the upper bounds on exact natural frequencies, the work proposes a new set of admissible functions that are able to properly describe the stress singularity behaviors near the tips of the crack and meet the discontinuities of displacement and slope crossing the crack. The validity of the proposed set of functions is confirmed through comprehensive convergence studies on the frequencies of rectangular plates with cracks having different lengths and showing the excellent agreement with published accurate results obtained by an integration equation technique. Finally, the present approach is applied to investigate the effects of location, length and orientation of cracks on the free vibration frequencies and mode shapes of simply supported and cantilevered rectangular plates with cracks. Most of the results shown are novel and first shown in literature.

## 誌謝

本文承蒙恩師 黃炯憲博士悉心指導與不厭其煩的校正，方得以順利完成。吾師治學態度嚴謹，待人處世原則謙恭，使我在兩年多的求學期間，在學業與處世態度上均多所啟迪，獲益匪淺，在此致最由衷之謝忱。

文稿之初，承蒙 洪士林老師、鄭復平老師與趙文成老師的詳細審閱，多方修正，提供許多寶貴的意見與批評，助使本論文得以更加精確嚴謹，感銘五內。

於研究所期間，要感謝研究室的所有學長姐、同窗與學弟妹們在生活與學業上的陪伴相助，使我研究生涯絢麗多采，尤其要特別感謝明儒與威智學長的耐心教導，在課業上給予極大幫助。感謝求學路上的同窗兼好友俊強、敬文、仲文、章凱、允廷、相禹與政弘，雖然大家都分散各地唸書與工作，但從不忘為彼此加油打氣，使我在研究的路上不孤單。感謝摯友炳全與雯心，陪我經歷情緒的起伏與低潮，給予我許多慰藉和力量。

最後，僅將本論文獻給我在台北最可愛的家人們與最偉大的母親，因為你們的支持與鼓勵，我才能毫無後顧之憂地完成學業。同時也獻給在天上的外婆與父親，願你們一同分享這份喜悅。並將此誌謝獻給所有在我的  
人生路上鼓勵我的你們，願與所有人分享這份榮耀。

# 目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	x
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與方法.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 內容概要.....	4
第二章 奇異漸近解之推導.....	5
第三章 具邊緣裂縫矩形薄板之振動分析.....	11
3.1 Ritz 法分析流程.....	11
3.2 允許函數.....	13
3.3 收斂性分析.....	16
3.4 數值分析.....	19
第四章 具內部裂縫矩形薄板之振動分析.....	26
4.1 允許函數.....	26



4.2 收斂性分析 .....	29
4.3 數值分析 .....	32
第五章 結論與建議.....	37
5.1 結論 .....	37
5.2 建議 .....	38
參考文獻.....	39



## 表目錄

表 3.1 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.2$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.12)、(3.13)之 $W_c$ ).....	42
表 3.2 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.5$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.12)、(3.13)之 $W_c$ ).....	43
表 3.3 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.8$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.12)、(3.13)之 $W_c$ ).....	44
表 3.4 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.2$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ ).....	45
表 3.5 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.5$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ ).....	46
表 3.6 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.8$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ ).....	47
表 3.7 具水平邊緣裂縫懸臂方形板( $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.2$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ ).....	48
表 3.8 具水平邊緣裂縫懸臂方形板( $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.5$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ ).....	49
表 3.9 具水平邊緣裂縫懸臂方形板( $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.8$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ ).....	50



表 3.10 具不同邊緣裂縫簡支方形板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ .....	51
表 3.11 具不同邊緣裂縫懸臂方形板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ .....	52
表 3.12 具邊緣裂縫懸臂矩形板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ .....	55
表 4.1 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.2, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.3)之 $W_c^*$ , $k = 1.5$ ).....	56
表 4.2 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.2, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.3)之 $W_c^*$ , $k = 2.5$ ).....	57
表 4.3 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.8, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.3)之 $W_c^*$ , $k = 1.5$ ).....	58
表 4.4 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.8, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.3)之 $W_c^*$ , $k = 2.5$ ).....	59
表 4.5 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.2, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k = 1.5$ ).....	60
表 4.6 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.2, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k = 2.5$ ).....	61
表 4.7 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.5, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k = 1.5$ ).....	62
表 4.8 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a = 0.5, \alpha = 0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k = 2.5$ ).....	63

表 4.9 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=1.5$ ).....	64
表 4.10 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=2.5$ ).....	65
表 4.11 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=1.5$ ).....	66
表 4.12 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=2.5$ ).....	67
表 4.13 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.5, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=1.5$ ).....	68
表 4.14 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.5, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=2.5$ ).....	69
表 4.15 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=1.5$ ).....	70
表 4.16 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 收斂性分析(使用式(4.6)之 $W_c^*$ , $k=2.5$ ).....	71
表 4.17 具不同內部裂縫簡支方形板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ .....	72
表 4.18 具不同內部裂縫簡支方形板無因次化頻率折減量比 $\Delta \omega$ (%).....	73
表 4.19 具不同內部裂縫懸臂方形板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ .....	74

表 4.20 具不同內部裂縫懸臂方形板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)..... 75



## 圖目錄

圖 2.1 極座標之應力示意圖.....	76
圖 2.2 扇形元素座標系統示意圖.....	77
圖 2.3 扇形元素示意圖.....	78
圖 3.1 具邊緣裂縫矩形板示意圖(裂縫與 $x=$ 常數軸交接).....	79
圖 3.2 具邊緣裂縫矩形板示意圖(裂縫與 $y=$ 常數軸交接).....	80
圖 3.3 座標轉換示意圖.....	81
圖 3.4 具邊緣裂縫簡支方形板節點線圖.....	82
圖 3.5 具邊緣裂縫懸臂方形板節點線圖.....	83
圖 3.6 具頂部裂縫懸臂矩形板節點線圖.....	86
圖 4.1 具內部裂縫之矩形板示意圖( $x_0$ 與 $y_0$ 為裂縫中心點之座標).....	87
圖 4.2 內部裂縫奇異點與連續線段示意圖.....	88
圖 4.3 具內部裂縫簡支方形板節點線圖.....	89
圖 4.4 具內部裂縫懸臂方形板節點線圖.....	90

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與方法

板殼元件是工程結構上常見的一種構件，被廣泛的應用在航太、飛彈、機械及土木工程上。目前常用來分析板的理論有三種；分別是古典薄板理論(CPT)、一階剪力變形板理論(FSDPT)及高階剪力變形板理論(HSDPT)，各都有其重要性。

在板結構之設計上，常會面臨奇異點(singularity)之問題，而其發生的原因有：(1)幾何形狀之不連續，如裂縫尖端處或邊界條件所造成之不連續；(2)載重，如集中載重或衝擊載重；(3)材料性質，如複合材料之性質陡變。當所分析之結構元件含有奇異點時，須找到能夠正確描述奇異點特性之漸近解，方能得到準確之解。例如於一般有限元素法中，使用奇異元素(singular element)，或在 Ritz 法中將角函數(corner function)帶入允許函數(admissible function)中。

Ritz 法自提出後就被廣為用於求解板之振動問題，因其具有完整之數學理論背景與較佳之精確度。本文亦將利用此方法，以古典板理論為基礎，分析具裂縫矩形板之振動行為。於所需之允許函數序列中，引入可正確描述裂縫尖端特性之函數，加速解之收斂性及準確性。

## 1.2 文獻回顧

關於具有裂縫矩形板之研究，大部分文獻探討靜態行為，即用各種方法求取不同載重情況之應力強度因子(stress intensity factor)，僅有少數研究振動行為者。

利用半解析(semi-analytical)法求解垂直於邊界之直線裂縫簡支矩形板振動問題，Lynn 和 Kumbasar(1967)用 Green 函數來表示板之位移分量，推導得齊性 Fredholm 第一型積分方程，再求解；Stahl 和 Keer(1972)則利用對偶級數方程得齊性 Fredholm 第二型積分方程來解決同樣的問題。而 Aggarwala 和 Ariel(1981)應用 Stahl 和 Keer(1972)之方法，求解方形板具有位於中心點十字型裂縫或兩組(水平與垂直)對稱於中心點之邊緣裂縫振動問題。Hirano 和 Okazaki(1980)亦針對一對邊界是簡支承之裂縫矩形板，利用 Levy 的解求解振動問題，並進一步以加權餘數法(weighted residual method)來滿足邊界條件。另外，Neku(1982)則是修正 Lynn 和 Kumbasar(1967)之方法，以 Levy 解建立所須 Green 函數。Solecki(1983)利用將 Navier 解配合描述裂縫處位移和轉角的不連續函數之 Fourier 轉換，進而求解裂縫板振動問題。

有限元素法與 Ritz 法可被用於分析不同邊界條件之矩形裂縫板振動問題。在有限元素法中，若使用古典板理論，則須使用較難建立之  $C^1$ -type 形

狀函數，僅兩篇論文探討裂縫板振。Qian 等人(1991)為了發展一有限元素的解法，對含裂縫尖端的元素，經由對應力強度因子(stress intensity factor)的積分，建構元素的勁度矩陣(stiffness matrix)。Krawczuk(1993)則提出類似於 Qian 等人(1991)的解決方式，唯一不同的是對裂縫尖端元素勁度矩陣，採用解析解的表示式。

在 Ritz 法中，使用適當的允許函數可快速精確求解振動問題。考慮裂縫板之振動問題，其允許函數需滿足：(1)能描述裂縫尖端之應力奇異行為；(2)滿足跨越裂縫轉角與位移之不連續。而目前利用 Ritz 法研究裂縫矩形板之振動，僅有三篇相關之文獻。Yuan 和 Dickinson(1992)則將矩形板分成數個區塊，並加置人工彈簧於各區塊連結之邊界上；因此，可用傳統的允許函數(regular admissible functions)於各區域來求解，不必用特別的函數來描述裂縫。用類似於 Yuan 和 Dickinson(1992)之切割方法，Liew 等人(1994)則僅要求各區塊之允許函數於兩區塊交接處，以積分形式滿足允許函數及其一階微分之連續性，然而這樣的方式並無法滿足位移與斜率處處連續。可知 Yuan 和 Dickinson(1992)與 Liew 等人(1994)所用之分析方法不能正確描述裂縫之不連續行為，其所得之結果亦不具有 Ritz 法由上界(upper-bound)收斂至真解之特性。Khadem 和 Rezaee(2000)利用 Levy's solution 建立所謂修正比較函數(modified comparison functions)，作為 Ritz 法所中的允許函數(admissible functions)，分析具水平裂縫簡支承矩形板於不同裂縫長度、深

度與位置時之振動。然而，因為 Khadem 和 Rezaee(2000)使用之允許函數較為特殊，其僅適用於處理至少一對邊是簡支承(two opposite edges simply supported)之裂縫矩形板振動問題。

本研究使用 Ritz 法並將考慮裂縫尖端之奇異性，提出適合描述裂縫處位移及斜率不連續之特殊函數，將其引入允許函數中以正確求解振動問題。

### 1.3 內容概要

本論文共分為五章，其內容如下：

第一章 說明本文研究動機與目的，提出相關文獻之回顧並指出研究之方法與內容。



第二章 簡述於古典薄板理論中，引入 Williams(1952)推導之漸近解(角函數)，得符合裂縫尖端處之應力奇異性。

第三章 以 Ritz 法求解邊緣裂縫矩形板之振動，於允許函數中引入本文提出之函數，除驗證本方法之優點，並用於分析不同案例之振動問題。

第四章 以 Ritz 法求解內部裂縫矩形板之振動，於允許函數中引入本文提出之函數，除驗證本方法之優點，並用於分析不同案例之振動問題。

第五章 本研究之結論與建議。



## 第二章 奇異漸近解之推導

本文旨在應用 Ritz 法分析具裂縫之薄板振動行為並考慮在尖端處產生之奇異性。於第三及第四章中將引入類似 Williams(1952)推導所得之角函數 (corner function) 入允許函數，期以能正確描述裂縫尖端處之奇異彎矩與剪力及裂縫處位移和斜率不連續之現象。本章將簡述說明依 Williams(1952)推導裂縫尖端角函數之過程。

古典薄板理論之控制方程式為(極座標表示式):

$$\nabla^4 w(r, \theta) = \frac{q}{D}, \quad (2.1)$$

其中， $\nabla^2$  為拉氏運算子  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ ， $w(r, \theta)$  為垂直於板中平面之位移， $q$  為外加荷重， $D$  為撓曲剛度  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ， $E$  為楊氏模數， $h$  為板厚度， $\nu$  為波以松常數(本文皆取 0.3)。古典薄板理論中，彎矩及剪力(圖 2.1)之關係為:

$$M_r(r, \theta) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (2.2a)$$

$$M_\theta(r, \theta) = -D \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \quad (2.2b)$$

$$M_{r\theta}(r, \theta) = -D(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (2.2c)$$

$$Q_r(r, \theta) = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w), \quad (2.2d)$$

$$Q_\theta(r, \theta) = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w), \quad (2.2e)$$

另外由力平衡關係式可得有效剪力(effective shear forces)， $V_r(r, \theta)$  與  $V_\theta(r, \theta)$  其表示式分別為：

$$V_r(r, \theta) = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = -D \left[ \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \quad (2.3a)$$

$$V_\theta(r, \theta) = Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial \theta} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \quad (2.3b)$$

古典薄板理論在邊界  $\theta = \theta_0$  處之可能邊界條件為( $\theta_0$  可為任一角度)：

(1) 固定端(C)

$$w(r, \theta_0) = 0, \quad \frac{\partial w(r, \theta_0)}{\partial \theta} = 0, \quad (2.4)$$

(2) 自由端(F)

$$M_\theta(r, \theta_0) = 0, \quad V_\theta(r, \theta_0) = 0, \quad (2.5)$$

(3) 簡支端(S)

$$w(r, \theta_0) = 0, \quad M_\theta(r, \theta_0) = 0, \quad (2.6)$$

利用分離變數法觀念可假設式(2.1)之解形式為：

$$w(r, \theta) = G(r)F(\theta), \quad (2.7)$$

進一步以級數展開  $G(r)$ ，令

$$G(r) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m r^{\lambda+m}, \quad (2.8)$$

其中  $\lambda$  可為一複數，為探討具應力奇異性的解，只要考慮  $r$  的最低階數；故取對應於  $m=1$  之微分方程求解即可。將式(2.8)代入式(2.7)可得：

$$w(r, \theta) = g_1 r^{\lambda+1} F(\theta, \lambda), \quad (2.9)$$

再將式(2.9)代入式(2.1)經整理過後可得下式

$$g_1 r^{\lambda-3} \{ F^{iv} + [(\lambda+1)^2 + (\lambda-1)^2] F'' + (\lambda^2 - 1)^2 F \} = 0, \quad (2.10)$$

為符合上式且不造成零解之情形，則可得一  $\lambda$  為係數組成之常微分方程

$$F^{iv} + [(\lambda+1)^2 + (\lambda-1)^2] F'' + (\lambda^2 - 1)^2 F = 0, \quad (2.11)$$

上式之通解形式為

$$F(\theta, \lambda) = a \sin(\lambda+1)\theta + b \cos(\lambda+1)\theta + c \sin(\lambda-1)\theta + d \cos(\lambda-1)\theta, \quad (2.12)$$

代入式(2.9)，可將通解表示為

$$w(r, \theta) = r^{\lambda+1} \{ A \sin(\lambda+1)\theta + B \cos(\lambda+1)\theta + C \sin(\lambda-1)\theta + D \cos(\lambda-1)\theta \}, \quad (2.13)$$

其中  $\lambda$  與所對應之係數  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  可由邊界條件  $\theta = 0$  及  $\theta = \alpha$  (圖 2.2) 求得。

另外，式(2.13)中 $\lambda$ 不能為0或 $\pm 1$ ，因為在此情況下式(2.11)所存在之通解形式將與式(2.13)不符。

考慮兩邊徑向皆為自由端之扇形板(圖 2.3)，針對具有對稱性之問題，可將其解之形式(式(2.13))分成對稱與反對稱兩部份。首先，考慮對稱解的部份，將偶函數(即 $A=C=0$ )代入自由端之邊界條件(式(2.5))可獲得由 $B$ 及 $D$ 所構成之兩組方程式：

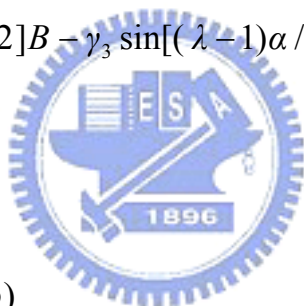
$$\gamma_1 \cos[(\lambda + 1)\alpha / 2]B + \gamma_2 \cos[(\lambda - 1)\alpha / 2]D = 0 \quad , \quad (2.14a)$$

$$\gamma_1 \sin[(\lambda + 1)\alpha / 2]B - \gamma_3 \sin[(\lambda - 1)\alpha / 2]D = 0 \quad , \quad (2.14b)$$

其中  $\gamma_1 = (\lambda + 1)(\nu - 1)$

$$\gamma_2 = -\lambda(1 - \nu) + (3 + \nu)$$

$$\gamma_3 = \lambda(1 - \nu) + (3 + \nu)$$



為求問題之非零解(trivial solution)，其充分必要之條件為係數行列式值等於零：

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 \cos[(\lambda + 1)\alpha / 2] & \gamma_2 \cos[(\lambda - 1)\alpha / 2] \\ \gamma_1 \sin[(\lambda + 1)\alpha / 2] & \gamma_3 \cos[(\lambda - 1)\alpha / 2] \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

將上式展開整理後得系統之特徵方程式：

$$\sin(\lambda\alpha) = [(1-\nu)/(3+\nu)]\lambda \sin \alpha , \quad (2.16)$$

另外，可由式(2.14)知  $B$  與  $D$  之關係式：

$$B/D = \gamma_3 \sin[(\lambda-1)\alpha/2] / \{\gamma_1 \sin[(\lambda+1)\alpha/2]\} , \quad (2.17a)$$

或 
$$B/D = -\gamma_2 \cos[(\lambda-1)\alpha/2] / \{\gamma_1 \cos[(\lambda+1)\alpha/2]\} , \quad (2.17b)$$

以上為取對稱項所得之結果，利用相同之步驟可對式(2.13)取反對稱解的部份(即  $B = D = 0$ )，同樣可得一特徵方程式：

$$\sin(\lambda\alpha) = -[(1-\nu)/(3+\nu)]\lambda \sin \alpha , \quad (2.18)$$

與其係數  $A$  與  $C$  之關係式：

$$A/C = -\gamma_2 \sin[(\lambda-1)\alpha/2] / \{\gamma_1 \sin[(\lambda+1)\alpha/2]\} , \quad (2.19a)$$

或 
$$A/C = \gamma_3 \cos[(\lambda-1)\alpha/2] / \{\gamma_1 \cos[(\lambda+1)\alpha/2]\} , \quad (2.19b)$$

結合式(2.16)與(2.18)可得其特徵方程式：

$$\sin(\lambda\alpha) = \pm[(1-\nu)/(3+\nu)]\lambda \sin \alpha , \quad (2.20)$$

其中  $\lambda$  為一特徵值，對應本文所考慮之裂縫問題(即  $\alpha = 360^\circ$  時)，可得其特徵根為  $\lambda_n = n/2$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。考慮  $\lambda_n$  為整數時，會使得式(2.17a)與(2.19a)中之  $\sin$  函數等於零，即係數  $B/D$  與  $A/C$  有分母為零之不合理情形，因此取式(2.17b)與(2.19b)，代回通解(式(2.13))可得：

$$w_{n,S}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} \left\{ D_n \left[ \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} \cos(\lambda_n + 1)\theta + \cos(\lambda_n - 1)\theta \right] \right\}, \quad (2.22a)$$

$$w_{n,A}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} \left\{ C_n \left[ \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \sin(\lambda_n + 1)\theta + \sin(\lambda_n - 1)\theta \right] \right\}, \quad (2.22b)$$

相對地，當考慮  $\lambda_n$  為非整數時，則取式(2.17a)與(2.19a)並代回式(2.13)得：

$$w_{n,S}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} \left\{ D_n \left[ \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \cos(\lambda_n + 1)\theta + \cos(\lambda_n - 1)\theta \right] \right\}, \quad (2.23a)$$

$$w_{n,A}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} \left\{ C_n \left[ \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} \sin(\lambda_n + 1)\theta + \sin(\lambda_n - 1)\theta \right] \right\}, \quad (2.23b)$$

以上為對應於扇形板兩徑向皆為自由端時所推導之漸近解，於本文中稱之為角函數(corner function)。此一函數適於描述在尖端處局部應力之分佈情形，而利用上述之相同過程，亦可得其他由不同邊界條件組合下所對應之特徵方程式與角函數。



另外由上述所推導之通解(式(2.13))，代回古典薄板理論所導出之剪力與彎矩( $Q_r$ 、 $Q_\theta$ 、 $M_r$ 、 $M_\theta$ 、 $M_{r\theta}$ )，其表示式已列於式(2.2a)~(2.2e)中。可發現當取  $\lambda_n$  為一小於 1 之實數代入後，彎矩與剪力之奇異性將出現於  $r = 0$  附近。

### 第三章 具邊緣裂縫矩形薄板之振動分析

本章旨在分析具有邊緣裂縫之懸臂與簡支矩形薄板的振動(參考圖 3.1 與 3.2)。由第二章可知於裂縫尖端處會產生彎矩及剪力奇異特性，因此，在利用 Ritz 法求解時所需之允許函數，除了使用一完備之多項式函數外，並須加入某些函數，其能正確描述尖端處應力奇異現象及沿裂縫位移及斜率不連續現象，期以加速數值解之收斂。本章將於懸臂及簡支邊界條件下進行數值之收斂性分析，以驗證本分析方法之正確性與了解該數值解之收斂特性；進而探討裂縫長度、位置、角度等不同參數對振動行為之影響。



#### 3.1 Ritz 法分析流程

Ritz 法中需建立一能量函數  $\Pi$

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} , \quad (3.1)$$

其中， $U_{\max}$  與  $T_{\max}$  為薄板於自然週期振動下最大應變能與最大動能，

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \iint_A \{ (W_{,xx} + W_{,yy})^2 - 2(1-\nu)[W_{,xx}W_{,yy} - (W_{,xy})^2] \} dA , \quad (3.2)$$

$$T_{\max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \iint_A W^2 dA , \quad (3.3)$$

下標  $_{,j}$  代表對  $j$  變數取偏微分； $A$  為板中平面之面積， $\rho$  為單位體積質

量， $\omega$  為自然振動頻率， $W$  為板之垂直向位移函數。

令

$$W = \sum_{i=1}^N a_i W_i , \quad (3.4)$$

其中  $a_i$  為待定係數； $W_i$  為滿足自然(或幾何)邊界條件之允許函數，

$\{W_i | i=1,2,\dots,\infty\}$  須構成一數學完備函數集合。將式(3.4)帶回能量函數  $\Pi$ ，

要求最小能量則得：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 , \quad (3.5)$$

對應之不同係數  $a_i$  可得不同之方程式，可整理成矩陣特徵值問題：

$$[K]\{a\} = \omega^2 [M]\{a\} , \quad (3.6)$$

其中，

$$K_{ij} = D \iint_A [(W_{i,xx} + W_{i,yy})(W_{j,xx} + W_{j,yy}) - (1-\nu)(W_{i,xx}W_{j,yy} + W_{i,yy}W_{j,xx} - 2W_{i,xy}W_{j,xy})] dA , \quad (3.7)$$

$$M_{ij} = \rho h \iint_A (W_i W_j) dA , \quad (3.8)$$

$$\{a\} = (a_1, a_2, a_3 \dots a_N)^T , \quad (3.9)$$

藉由求解(3.6)式之特徵根與特徵向量可求得板之自然振動頻率與模態。



### 3.2 允許函數

在 Ritz 法中所用之允許函數必須滿足自然邊界條件。本文所使用之允許函數含完備的多項式函數集合( $W_p(x,y)$ )與能正確描述尖端處奇異應力行為及沿裂縫位移及斜率不連續現象之函數集( $W_c(r,\theta)$ )，即令

$$W(x,y) = x^{\bar{l}} y^{\bar{m}} (x-a)^{\bar{n}} (y-b)^{\bar{q}} [W_p(x,y) + W_c(r,\theta)] , \quad (3.10)$$

其中  $(x,y)$  及  $(r,\theta)$  座標系統之定義如圖 3.1 及 3.2 所示。 $W_p(x,y)$  為一多項式函數，

$$W_p(x,y) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} , \quad (3.11)$$

式(3.10)中  $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{q}$  即為滿足所考慮問題之幾何邊界條件。例如當考慮簡支(SSSS)矩形板時，則取  $\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = \bar{q} = 1$ ；當考慮懸臂(CFFF，於  $x=0$  處固定)矩形板時，則取  $\bar{l} = 2, \bar{m} = \bar{n} = \bar{q} = 0$ 。

當考慮具裂縫之振動問題時，其真實解必須符合以下之條件：(a)能適當描述裂縫尖端之應力奇異性，(b)滿足跨越裂縫之位移與轉角不連續性，而顯然此兩條件無法被  $W_p(x,y)$  精確地描述之。根據 Leissa (1993) 等人之經驗，使用 William (1952) 之漸近解用於描述具 V 型缺口之問題有不錯之效果，而裂縫可視為此問題之一特例。

根據前章所推導之漸近解(角函數)：

$$W_{n,S}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} \left\{ \left[ \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \cos(\lambda_n + 1)\theta + \cos(\lambda_n - 1)\theta \right] \right\}, \quad (3.12a)$$

$$W_{n,A}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} \left\{ \left[ \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} \sin(\lambda_n + 1)\theta + \sin(\lambda_n - 1)\theta \right] \right\}, \quad (3.12b)$$

$W_{n,S}(r, \theta)$ 、 $W_{n,A}(r, \theta)$  為其解之對稱與反對稱項， $\lambda_n$  為此解之特徵值  $\lambda_n = (2n-1)/2$  且  $n=1, 2, 3, \dots$ 。極座標  $(r, \theta)$  原點設定於裂縫之尖端，其中  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ，(參考圖 3.1)。該角函數可描述具有應力奇異性之裂縫尖端且滿足自然邊界條件(符合裂縫處之剪力與彎矩等於零)；故令

$$W_c(r, \theta) = \sum_{n=1,2}^{N_1} b_n W_{nS}(r, \theta) + \sum_{n=1,2}^{N_2} c_n W_{nA}(r, \theta), \quad (3.13)$$

其中  $b_n, c_n$  為任意常數。式(3.12)之  $\lambda_n$  可為整數者，然而在此處不取  $\lambda_n$  為整數；因取整數時，可使該角函數被有限項之多項式函數所展開。

本研究亦提出另一函數集，即令：

$$W_c(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\bar{N}_1} \sum_{l=0}^n B_{nl} r^{(2n+1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_2} \sum_{l=0}^n C_{nl} r^{(2n+1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta, \quad (3.14)$$

此一函數於文中將稱為“修正角函數”。此修正之目的可補足式(3.12)與(3.13)之缺點，於收斂性分析中可得到驗證。仔細觀察式(3.12)與(3.14)，可發現該兩式分別為下列兩函數集之線性組合：

$$\left\{ r^{(2n+1)/2} \cos \left| \frac{2l+1}{2} \theta \right. \text{ 及 } r^{(2n+1)/2} \sin \left| \frac{2l+1}{2} \theta \right. \mid l = n \text{ 或 } l = n-2 \text{ 且 } n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (3.15)$$

$$\left\{ r^{(2n+1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta \text{ 及 } r^{(2n+1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \mid l = 0, 1, 2, \dots, n \text{ 且 } n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (3.16)$$

比較式(3.15)與(3.16)，可發現式(3.16)之函數集包含式(3.15)者。而因為式(3.12)中之 $\lambda_n$ 與式(3.14)中之 $(2l+1)/2$ 不為整數，因此可知在這些方程式中之 $\sin$ 函數項會於 $\theta = \pm\pi$ 時有不連續性，而 $\cos$ 項函數則導致 $\partial W_c / \partial \theta$ 在 $\theta = \pm\pi$ 處有不連續性。

於往後之計算，吾人將取式(3.13)中之 $N_1 = N_2 = N$ ，取式(3.14)中之 $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}$ 。將式(3.10)~(3.13)代回式(3.1)~(3.3)及式(3.5)，可得 $I \times J + 2N$ 組對應於待定係數 $a_{ij}$ 、 $b_n$ 及 $c_n$ 之線性代數方程式。將式(3.12)與(3.13)以式(3.14)取代之，則可得 $I \times J + \bar{N}(\bar{N} + 3)$ 組對應於待定係數 $a_{ij}$ 、 $B_n$ 及 $C_n$ 之線性代數方程式。

以上所定義之 $W_c$ 皆以極座標(可參考圖 3.3)表示之，其中卡式座標 $(x, y)$ 與極座標 $(r, \theta)$ 之轉換關係如下：

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad (3.17)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad (3.18)$$

$$\text{其中, } \bar{x} = (x - A_x) \cos \alpha - (y - A_y) \sin \alpha, \quad (3.19a)$$

$$\bar{y} = (x - A_x) \sin \alpha + (y - A_y) \cos \alpha, \quad (3.19b)$$

$(A_x, A_y)$  為裂縫尖端之之  $(x, y)$  座標,  $\alpha$  為裂縫與水平軸之夾角。

### 3.3 收斂性分析

數學上無限多項之允許函數構成一完備函數集合；故理論上，當使用夠多的允許函數時，利用 Ritz 法求得之解當能收斂至精確解。於收斂性分析中，吾人將考慮具不同裂縫長度之簡支和懸臂矩形板，以驗證解之正確性及加入修正角函數 ( $W_c$ ) 對解之影響。本文之數值解乃利用 Fortran 程式語言，為求其精確之收斂解，以 128-bit 之變數撰寫電腦程式。所得之數值結果僅列出前五個模態之無因次化之自然振動頻率值  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ，而其中所使用之參數  $a$ 、 $b$ 、 $c_y$ 、 $d$ 、 $\alpha$  可參考圖 3.1。

表 3.1~3.3 為具不同長度水平邊緣裂縫之簡支矩形板 ( $a/b=2$ ,  $c_y/b=0.5$ ,  $d/a=0.2, 0.5, 0.8$ ) 的自然振動頻率收斂性分析。使用之  $W_c(r, \theta)$  乃依式(3.12) 與(3.13)所定義者。表中第一欄代表振態數，S 及 A 分別表示對稱與反對稱之振動模態。文獻之結果亦列於表中，其中 Stahl and Keer (1972) 精準地求解 Fredholm 積分方程。Yuan and Dickinson (1992) 則是利用問題之對稱性，將板切割成數區域，於各小區域內以  $8 \times 8$  項的正交多項式函數建構允許函數，各區間解之連續性則以加置人工彈簧方式處理。Liew 等人

(1994)則是使用  $19 \times 9$  項正交多項式函數於各切割區域，並以積分方式強制各區域連結處之位移與斜率連續，然而這樣的方式並無法滿足位移及斜率處處連續。由於 Yuan and Dickinson (1992)使用人工彈簧和 Liew 等人 (1994)之解無法滿足裂縫處位移及斜率處處連續之條件，他們的解無法保證從上限收斂至精確解。

表 3.1 中所列的是裂縫  $d/a=0.2$  時之結果。在各模態首列是未加入任何  $W_c$  所得的結果 ( $N=0$ )，第一模態收斂至 49.35，與 Leissa (1969)所得四邊簡支無裂縫矩形薄板之精確解相同，可發現多項式函數並無法知道裂縫之存在。將  $W_c$  加入允許函數時可發現，隨著  $W_c$  中項數提高所得到的結果會有明顯的改善。使用  $I=J=7$  及  $N=3$  (總項數 55) 時之結果，可達至少 3 位有效位數之收斂值，而此結果也與 Stahl and Keer (1972)所得者非常接近，甚至相同。相較之下，本方法所得結果之準確度皆優於 Yuan and Dickinson (1992)和 Liew 等人(1994)所得者。

在表 3.2 中所列的是裂縫長度比為  $d/a=0.5$  的數值。若以 Stahl and Keer (1972)為比較基準，本研究使用  $I=J=9$  及  $N=15$  (共 111 項)允許函數所得結果，皆優於 Liew 等人(1994)所得者，並且也比 Yuan and Dickinson (1992)所得第一、四、五模態結果來的精準。

表 3.3 為本文所取之最長裂縫  $d/a=0.8$  之之收斂分析。當使用允數函數最高項( $I=J=9$  及  $N=20$ ，共 121 項)，所得結果大致已收斂至三位有效數字，皆大於 Stahl and Keer (1972) 之值；但第一、三、五模態頻率值則小於 Liew 等人(1994) 之值。較表 3.1 與表 3.2 所得之結果差。

於表 3.2 與 3.3 中，若使用更多之項數會造成病態矩陣(ill-conditioned matrices)。而觀察  $W_c$  中較高階之  $r$  所對應之特徵向量分量(eigenvector components)，可發現其明顯小於低階  $r$  所對應者。為降低  $r$  之階數以避免數值計算上之困難，吾人提出使用式(3.14)定義之  $W_c$  取代式(3.13)；當兩式使用之總項數相等時(例： $N=5$  與  $\bar{N}=2$ )，式(3.14)中所對應  $r$  之最高階數  $(2\bar{N}+1)/2$  將小於式(3.13)中  $r$  之最高階數  $(2N+1)/2$ 。

表 3.4~3.6 所考慮之問題分別為與表 3.1~3.3 者相同，但使用式(3.14)所定義之  $W_c$ 。與表 3.2 與 3.3 比較之，可發現表 3.5 與 3.6 中數值收斂速度明顯地提高，且當使相同項數之  $W_c$  時，式(3.14)所致之結果明顯低於式(3.13)所得者。比較表 3.5 與 3.6 中取  $\bar{N}=5$  與表 3.2 與 3.3 中取  $N=20$  之結果，兩者所用  $W_c$  之項數皆相同(40 項)，而前者之數值明顯低於後者，且與 Stahl and Keer (1972) 所得結果較為接近，且可達至少三位有效位數收斂。再次顯示加入式(3.14)之  $W_c$  於允許函數能更有效率地加速數值解收斂。比較表 3.1 與表 3.4 可知，於表 3.1 中當裂縫較短( $d/a=0.2$ )時，使用式(3.13)所得之結果即有良好之收斂效果。

表 3.7~3.9 為使用定義於式(3.14)之  $W_c$ ，分析具水平中間裂縫( $\alpha = 0^\circ$  且  $c/b=0.5$ )懸臂方形板，在具不同裂縫長度  $d/a=0.2、0.5、0.8$  下所得之無因次化振動頻率。觀察表 3.7~3.9 之收斂情形，可發現使用較少項數之多項式函數( $I=J=3$  或 4)時，數值隨著  $W_c$  項數增加而下降之幅度較為明顯，而當多項式函數較高時( $I=J=7$  或 8)，大部分之數值皆可收斂至三位有效位數。表 3.7 之收斂情形最為快速，使用允許函數為  $I=J=7$  與  $\bar{N} = 4$  時各模態收斂值分別為 3.472、8.199、21.05、24.81、28.24。而表 3.8 與 3.9 收斂速度則較為緩慢，分別於  $I=J=8$  及  $\bar{N} = 5$  與  $I=J=8$  及  $\bar{N} = 8$  時方達三位有效位數收斂，由此可知當裂縫長度增加時，所用之允許函數項數亦須提高。



### 3.4 數值分析

於 3.3 節收斂性分析中已驗證使用式(3.12)與(3.14)於允許函數中可有助於數值收斂產生極佳之效果。於本節，吾人將其用於分析具有邊緣裂縫之矩形板於簡支與懸臂邊界之振動行為，探討不同裂縫位置、角度及長度對振動行為之影響。

表 3.10 為具有邊緣裂縫四邊簡支承(SSSS)方形板，考慮不同之裂縫位置( $c_y/b = 0.5$  與  $0.75$ )、角度( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ )與長度( $d/a = 0.1\sim 0.6$ )。表中列出為前五個模態之無因次化頻率值，而根據收斂性分析的結果，所用允許函數項數之方式如下：當  $d/a \leq 0.3$  時，取為  $I=J=7$  與  $\bar{N} = 5$  (總項數為 89 項)；

當  $d/a \geq 0.4$  時，取  $I=J=8$  與  $\bar{N}=6$  (總項數為 118 項)。觀察表 3.10 之結果，可發現下列現象：

- (1) 第一列之五個模態振動頻率值，與 Leissa (1973) 所得無裂縫板之振動頻率值 19.74、49.35、49.35、78.96、98.70 ( $n\pi^2$ ，其中  $n=2、5、5、8、10$ ) 非常相近。裂縫較短時 ( $d/a=0.1$ )，其各模態頻率值受裂縫引起的改變很小，即因裂縫導致勁度降低量較不明顯。
- (2) 觀察水平裂縫隨位置 ( $c_y/b=0.5$  與  $0.75$ ) 變化頻率值下降之情形，發現  $c_y/b=0.5$  之前兩模態頻率值隨裂縫增加下降幅度較  $c_y/b=0.75$  者大，而第三~第五模態則呈現相反趨勢。
- (3) 比較各模態頻率值隨角度增加 ( $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ ) 之變化情形。首先固定裂縫長度為  $d/a=0.2$ ，發現第一與第二模態頻率值隨角度增加而下降，第三模態則呈現相反趨勢 (隨角度增加而增加)，第四與第五模態者則無趨勢。若固定較長之裂縫  $d/a=0.5$  時，發現第一與第三模態頻率值隨角度增加而下降，第二與第四模態則為相反趨勢，第五模態無趨勢。

表 3.11 為具邊緣裂縫之懸臂矩形之板無因次化振動頻率值。所考慮之參數為：矩形板之長寬比 ( $a/b=1$  與  $2$ )、裂縫之角度 ( $\alpha=0^\circ、15^\circ、30^\circ、45^\circ$ )、位置 ( $c_y/b=0.2、0.4、0.5、0.75$ ) 及裂縫長度 ( $d/a=0.1\sim 0.7$ )。使用允許函數方式



為：當  $d/a \leq 0.4$  時，取為  $I=J=7$  與  $\bar{N}=5$  (總項數 89 項)；當  $d/a \geq 0.5$  時，取為  $I=J=8$  與  $\bar{N}=6$  (總項數 118 項)。可發現：

- (1) 與表 3.10 類似，本研究所得  $d/a=0.1$  之值與  $d/a=0$  之值非常相近，而  $d/a=0$  亦為 Leissa (1973) 所得無裂縫懸臂矩形板之結果。
- (2) 如所預期，各頻率值隨裂縫長度增加 ( $d/a=0.1\sim 0.6$ ) 而下降之。但水平裂縫 ( $\alpha=0^\circ$ ) 案例中第一模態頻率隨  $d/a$  改變變化很小。
- (3) 觀察水平裂縫隨位置不同 ( $c_y/b=0.2、0.4、0.5、0.75$ ) 而造成頻率值變化之情形。固定裂縫為  $d/a=0.2$  時，發現  $c_y/b=0.2$  者各模態 (除第一模態) 頻率皆為最大者，而  $c_y/b=0.5$  則為最小者。固定裂縫為  $d/a=0.6$  時，發現  $c_y/b=0.2$  第二、四、五模態頻率值為最大者，第三模態為最小者， $c_y/b=0.5$  則恰為相反趨勢。發現當邊緣裂縫位於中間 ( $c_y/b=0.5$ ) 與最遠離中間者 ( $c_y/b=0.2$ )，會有最大及最小之頻率值。
- (4) 觀察頻率值隨裂縫角度增加 ( $\alpha=0^\circ、15^\circ、30^\circ、45^\circ$  且  $c_y/b=0.75$ ) 之變化。固定裂縫  $d/a=0.2$ ，發現  $\alpha=45^\circ$  者第二、四、五模態有最大值， $\alpha=0^\circ$  者第三模態有最大值。當固定裂縫為  $d/a=0.5$  時， $\alpha=0^\circ$  之第三與第五模態有最大值，第二與第四模態有最小值； $\alpha=45^\circ$  之第二與第四模態有最大值，第三模態有最小值。當裂縫較長時

( $d/a=0.5$ )，發現頻率之最大與最小值集中於角度最小( $\alpha=0^\circ$ )與最大者( $\alpha=45^\circ$ )。

- (5) 比較  $a/b=1$  與  $2$  中當裂縫位於  $c_y/b=0.5$  之頻率值。發現除第一模態以外，兩者在各模態中隨裂縫增長之變化情形各有不同。 $a/b=2$  之第三模態頻率值隨裂縫長度增加而下降之幅度極微小(低於  $0.5\%$ )，而其第二模態下降幅度為最大(超過  $50\%$ )。
- (6) 比較表 3.10 與表 3.11 中  $c_y/b=0.5$  之水平裂縫方形板。觀察裂縫由  $d/a=0.1$  增至  $0.6$  頻率值之下降幅度，表 3.11 中除第一模態下降幅度極小(低於  $0.3\%$ )，第二~第五模態下降幅度皆大於表 3.10 者。可知因裂縫增加導致勁度下降之影響於懸臂邊界條件有較明顯之趨勢。

表 3.12 為裂縫位於頂端之懸臂矩形板，各考慮之參數為：矩形板之長寬比( $a/b=1$  與  $2$ )、裂縫之角度( $\alpha=90^\circ$ 、 $30^\circ$ )、位置( $c_x/a=0.5$ 、 $0.75$ )及裂縫長度( $d/a=0.1\sim 0.6$ )。使用允許函數方式為：當  $d/a \leq 0.3$  時，取為  $I=J=7$  與  $\bar{N}=5$ (總項數 89 項)；當  $d/a \geq 0.4$  時，取為  $I=J=8$  與  $\bar{N}=6$ (總項數 118 項)。

可發現：

- (1) 以  $\alpha=90^\circ$  為基準，比較  $a/b=1$  與  $2$  頻率值隨裂縫增加( $d/a=0.1\sim 0.6$ )而下降之情形。發現  $a/b=1$  中第一~四中頻率值下降幅度皆較  $a/b=2$

來得大，而第五模態則為反之。

- (2) 以  $a/b=1$ 、 $\alpha=90^\circ$  且  $c_x/a=0.5$  為基準，與表 3.11 中以  $a/b=1$ 、 $\alpha=0^\circ$  且  $c_y/b=0.5$  者比較之。發現表 3.11 中第一與第三模態頻率值隨裂縫增加( $d/a=0.1\sim 0.6$ )而下降幅度較表 3.12 小，而第二、四、模態之降幅則較表 3.12 大。
- (3) 比較表 3.11 與 3.12 中  $\alpha=30^\circ$  者，發現表 3.11 中除第一模態頻率值隨裂縫長度增加( $d/a=0.1\sim 0.6$ )之下降幅度明顯較小(2%)外，其於模態降幅皆大於表 3.12 者。即裂縫交於板之  $x=a$  處者似乎較  $y=b$  者受裂縫增加之影響較為顯著。




圖 3.4 為具有邊緣裂縫簡支矩形板之節點線(位移=0 之連線)圖，其中僅列出表 3.10 中  $d/a=0.2$  與  $0.5$  之圖形。觀察之現象如下：

- (1) 當裂縫位於中間( $c_y/b=0.5$ )且為水平( $\alpha=0^\circ$ )時，可發現其自由振動之模態圖皆為對稱或反對稱於裂縫軸( $y=b/2$ )。其中  $d/a=0.2$  之第一~四模態為反對稱，第五模態為對稱。而  $d/a=0.5$  者其第一、三、五模態為對稱，第二與第四模態為反對稱。
- (2) 觀察  $c_y/b=0.75$  之圖形與  $c_y/b=0.5$  比較之，當裂縫移至  $c_y/b=0.7$  時，因為其幾何逐漸失去原有之對稱性，節點線亦出現較多扭曲之形式。觀察  $d/a=0.2$  第四模態，發現原兩相交垂直線產生分離。

- (3) 觀察圖形隨角度( $0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 且 $c_y/b=0.75$ )之變化情形。 $d/a=0.2$ 者第一~四模態圖皆為相似，而第五模態有明顯差異；而 $d/a=0.5$ 者圖形受角度影響之變化愈趨明顯，其中第二與第三模態圖形有較大差異。

圖 3.5 為具有邊緣裂縫懸臂矩形板之節點線圖，裂縫與  $x=a$  相交，僅列出表 3.11 中  $d/a=0.2$  與  $0.5$  之圖形。可觀察到：

- (1) 當水平裂縫位於 $c_y/b=0.5$ 時，該板幾何對稱於 $y=b/2$ ，故其節點線呈現對稱與反對稱形式。
- (2) 觀察水平裂縫隨位置( $c_y/b=0.2$ 、 $0.4$ 、 $0.75$ )改變之情形。以 $c_y/b=0.5$ 且 $d/a=0.2$ 為基準，發現 $c_y/b=0.2$ 、 $0.4$ 、 $0.75$ 與 $c_y/b=0.5$ 之第一~四模態圖形皆為相似，而第五模態原兩線交會之圖形則為分離。若以 $c_y/b=0.5$ 且 $d/a=0.5$ 為基準，發現隨位置遠離 $c_y/b=0.5$ ，各模態圖形有更明顯之差異(例：第三~五模態圖形)。
- (3) 觀察水平之裂縫位於 $c_y/b=0.5$ 隨板之長寬比( $a/b=1$ 與 $2$ )變化情形。發現裂縫較短( $d/a=0.2$ )時，第四與第五模態圖形變化無一定趨勢，而可發現 $a/b=1$ 第五模態與 $a/b=2$ 第四模態圖形類似。而當裂縫較長( $d/a=0.5$ )時，可發現兩者( $a/b=1$ 與 $2$ )之第三與第五模態有類似互換之情形。

- (4) 觀察圖形隨裂縫角度之變化( $0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 且 $c_y/b=0.75$ )。發現裂縫較短( $d/a=0.2$ )者各模態圖形皆為相似；當裂縫較長( $d/a=0.5$ )時，可發現 $\alpha=45^\circ$ 之第三模態與其他範例有明顯之不同。
- (5) 比較圖 3.4 與 3.5 中 $c_y/b=0.5$ 之水平裂縫圖形。圖 3.4 由於幾何邊界之對稱亦使其節點線型式簡單且多為直線，而圖 3.5 者則出現較多曲線形式。其中圖 3.4 中 $d/a=0.2$ 與 $0.5$ 之第二與第三模態則有互換之情形。

圖 3.6 為具有邊緣裂縫懸臂矩形板之節點線圖，裂縫與 $y=b$ 相交，其中列出對應表 3.12 中 $d/a=0.2$ 與 $0.5$ 之圖形。可觀察到：

- (1) 比較 $\alpha=90^\circ$ 且 $d/a=0.2$ 圖形隨板長寬比( $a/b=1$ 與 $2$ )之變化。發現前三模態圖形較為相似，而第四與第五模態圖形有較明顯之差異。其中 $d/a=0.5$ 者亦有類似之趨勢。
- (2) 比較圖 3.5 與圖 3.6 中 $\alpha=30^\circ$ 之圖形，發現當裂縫較短時( $d/a=0.2$ )，兩者之圖形於各模態較為相似，而當裂縫較長時( $d/a=0.5$ )，第三、四、五模態之圖形有很明顯之差異。

## 第四章 具內部裂縫矩形薄板之振動分析

本章旨在分析具有內部裂縫之懸臂與簡支矩形薄板的振動(參考圖 4.1)。由前章經驗可知，引入式(3.13)或(3.14)之 $W_c$ 於允許函數，可有效加速數值之收斂特性。本章將修正該 $W_c$ ，並用以處理內部裂縫之振動問題。本章並將以正交多項式函數替代上章之一般多項式於允許函數中，以延遲病態矩陣之發生。首先亦以收斂性分析，確認本章所提允許函數之效用；再進一步探討不同邊界條件之裂縫長度、位置、角度等參數對振動行為之影響。

### 4.1 允許函數

如同前章，本章所用之允許函數亦表示成：

$$W(x, y) = W_p(x, y) + W_c^*(r, \theta), \quad (4.1)$$

其中， $W_p(x, y)$ 為一正交多項式函數， $W_c^*$ 為描述裂縫尖端應力奇異及裂縫處位移和斜率不連續之現象。依 Bhat (1985)所提之正交多項式函數之方法， $W_p$ 可表示成：

$$W_p(x, y) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y), \quad (4.2a)$$

其中， $\phi_i(x)$ 與 $\psi_j(y)$ 分別為 $x$ 向及 $y$ 向之正交多項式函數， $I$ 和 $J$ 為多項式之項數， $a_{ij}$ 為待定係數；其為一符合邊界條件之完備多項式函數。 $\phi_i(x)$ 與 $\psi_j(y)$ 是經由 Gram-Schmidt 的演算程序(Bhat, 1985)所獲得之正交多項式函數。

以建構  $\phi_i(x)$  為例，考慮  $x=0$  及  $y=0$  處簡支承；取

$$\phi_0(x) = x(a-x), \quad (4.2b)$$

$$\phi_1(x) = (x-\beta_1)\phi_0(x), \quad (4.2c)$$

$$\phi_i(x) = (x-\beta_i)\phi_{i-1}(x) - C_i\phi_{i-2}(x), \quad (4.2d)$$

其中， $\beta_i = \frac{\int_0^a x\phi_{i-1}^2(x)dx}{\int_0^a \phi_{i-1}^2(x)dx}$ ， $C_i = \frac{\int_0^a x\phi_{i-1}(x)\phi_{i-2}(x)dx}{\int_0^a \phi_{i-2}^2(x)dx}$ ， $\phi_i(x)$  須滿足

$$\int_0^a \phi_k(x)\phi_l(x)dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ a_{kl}, & k = l \end{cases}, \text{ 使用正交多項式可改善使用多項式造成病態矩陣}$$

之現象。

$W_c^*$  為兩組分別用以描述兩個奇異點(圖 4.2)之角函數所構成：

$$W_c^* = \sum_{n=1}^N C_n \tilde{w}_{n,S}(\lambda_n, r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) + \sum_{n=1}^N D_n \tilde{w}_{n,A}(\lambda_n, r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \\ + \sum_{n=1}^N E_n \tilde{w}_{n,S}(\lambda_n, r_2, \theta_2, r_1, \theta_1) + \sum_{n=1}^N F_n \tilde{w}_{n,A}(\lambda_n, r_2, \theta_2, r_1, \theta_1), \quad (4.3)$$

其中， $\lambda_n = n/2$ ， $n=1,2,\dots$ (William (1952)漸近解之特徵值)。

上述之  $\tilde{w}_{n,S}$  與  $\tilde{w}_{n,A}$  之定義如下：

當  $\lambda_n$  為整數時：

$$\tilde{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i, r_j, \theta_j) = r_j^{\bar{k}} \hat{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i), \quad (4.4a)$$

$$\tilde{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i, r_j, \theta_j) = r_j^{\bar{k}} \hat{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i), \quad (4.4b)$$

其中  $\hat{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  與  $\hat{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  定義於式(2.22a)與(2.22b)(不包含  $C_n$  與  $D_n$ )。

當  $\lambda_n$  非整數時：

$$\tilde{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i, r_j, \theta_j) = \sin^2(\theta_j / 2) r_j^k \hat{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i), \quad (4.5a)$$

$$\tilde{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i, r_j, \theta_j) = \sin^2(\theta_j / 2) r_j^k \hat{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i), \quad (4.5b)$$

其中， $\hat{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  與  $\hat{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  定義於式(2.23a)與(2.23b)(不包含  $C_n$  與  $D_n$ )。

$\hat{w}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  與  $\hat{w}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  為用以描述裂縫尖端  $i$  點之角函數。而類似於第三

章修正角函數(式(3.14)者)，本文亦提出另一  $W_c^*$ ：

$$\begin{aligned} W_c^* = & \sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{l=0}^n B_{nl} \tilde{W}_{n,S}(\lambda_n, r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) + \sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{l=0}^n C_{nl} \tilde{W}_{n,A}(\lambda_n, r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \\ & + \sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{l=0}^n \bar{B}_{nl} \tilde{W}_{n,S}(\lambda_n, r_2, \theta_2, r_1, \theta_1) + \sum_{n=1}^{\bar{N}} \sum_{l=0}^n \bar{C}_{nl} \tilde{W}_{n,A}(\lambda_n, r_2, \theta_2, r_1, \theta_1), \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中，

$$\tilde{W}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i, r_j, \theta_j) = \sin^2(\theta_j / 2) r_j^k \hat{W}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i) \quad (4.6a)$$

$$\tilde{W}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i, r_j, \theta_j) = \sin^2(\theta_j / 2) r_j^k \hat{W}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i) \quad (4.6b)$$

$$\hat{W}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i) = r_i^{(2n+1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_i \quad (4.6c)$$

$$\hat{W}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i) = r_i^{(2n+1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_i \quad (4.6d)$$

$\hat{W}_{n,S}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  與  $\hat{W}_{n,A}(\lambda_n, r_i, \theta_i)$  為用以描述裂縫尖端  $i$  點之修正角函數，其中

$\lambda_n = (2n+1)/2$ ， $n=1,2,\dots$ 。

於上述兩式之  $W_c^*$  中，當  $\lambda_n$  取為非整數時， $\hat{w}_{n,A}$  與  $\hat{W}_{n,A}$  於  $\theta_i = \pm\pi$  時有不連續性，而  $\hat{w}_{n,S}$  與  $\hat{W}_{n,S}$  之一階導函數亦於此處不連續。此特性恰可用以描述真實解跨越裂縫之位移與轉角不連續行為。然而此函數於  $\theta_i = 0$  時亦為不連續(即圖 4.2 中之虛線部分)，其不符合實際情形，因此於式(4.5a)、(4.5b)、



(4.6a)、(4.6b)中乘上  $\sin^2(\theta_j/2)$ ，其不僅可限制函數( $\tilde{w}_{n,S}$ 、 $\tilde{w}_{n,A}$ 、 $\tilde{W}_{n,S}$ 、 $\tilde{W}_{n,A}$ ) 位移與轉角之不連續發生於跨越裂縫時，並維持函數( $\hat{w}_{n,A}$ 、 $\hat{w}_{n,S}$ 、 $\hat{W}_{n,A}$ 、 $\hat{W}_{n,S}$ ) 原有之對稱與反對稱特性。另外，由於  $\sin^2(\theta_j/2)$  函數之一階導函數於  $r_j = 0$  具奇異性，因此乘上一函數  $r_j^k$ ，其中取  $k \geq 1.5$  以避免不適當之奇異性；而當  $k = 1.5$  時，式(4.5a)、(4.5b)、(4.6a)、(4.6b)不僅能描述  $r_i \rightarrow 0$  附近之應力奇異性，亦恰可滿足  $r_j = 0$  時之應力奇異性階數。

而當式(4.3)中  $\lambda_n$  取為整數時，式中  $\hat{w}_{n,A}$  與  $\hat{w}_{n,S}$  為線性相依被多項式函數展開，因此  $r_j^{\bar{k}}$  中之  $\bar{k}$  不取為偶數，而當  $\bar{k} = 1.5$  時亦同樣為  $\tilde{w}_{n,S}$  與  $\hat{w}_{n,A}$  於  $r_j = 0$  時之應力奇異性階數。



## 4.2 收斂性分析

本節將使用式(4.3)或(4.6)之  $W_c^*$  配合式(4.2a)建構允許函數，除驗證  $W_c^*$  之適用性並探討數值解之收斂特性。式(4.2a)配合式(4.3)與(4.6)所用之允許函數總項數分別為  $I \times J + 4N$  與  $I \times J + 2\bar{N}(\bar{N} + 3)$ 。吾人考慮四邊簡支或懸臂之方形板，其具中心水平裂縫(裂縫中心點設為  $x_0/a = y_0/b = 0.5$ ，參考圖 4.1)，考慮具不同裂縫長度( $d/a = 0.2, 0.5, 0.8$ )之板，探討其解收斂特性。

表 4.1~4.4 為裂縫長  $d/a = 0.2$  與  $0.8$  簡支方形板( $a/b = 1$ )之結果。該結果乃利用式(4.3)之  $W_c^*$  配合不同之  $k$ (等於 1.5 與 2.5)所得。表中最後一欄所列者為由 Stahl and Keer (1972)、Liew 等人(1994)所得之結果。

表 4.1~4.2 考慮裂縫長度為  $d/a=0.2$ ，分別列出取  $k=1.5$  與  $2.5$  之結果。表 4.1 中使用至允許函數最高項( $I=J=10$ 及  $N=15$ ，共 160 項)，所得結果為至少三位有效數字收斂；而表 4.2 使用允許函數最高項( $I=J=11$ 及  $N=15$ ，共 181 項)時，除第五模態明顯收斂較慢，其餘已達至少三位有效數字收斂。以 Stahl and Keer (1972)之結果為比較基準，表 4.1 與表 4.2 中除第五模態外，均與 Stahl and Keer (1972)所得者非常一致；而 Liew 等人(1994)所得之第四模態值明顯小於 Stahl and Keer (1972)與本研究之結果，由此可看出 Liew 等人(1994)之方法無法保證數值由上界收斂之情形。從本案例中第一與第五模態之結果可發現，取  $k=1.5$  有加速數值收斂之傾向。

表 4.3~4.4 為考慮裂縫長度為  $d/a=0.8$ ，分別取  $k=1.5$  與  $2.5$  之結果。使用允許函數至最高項( $I=J=9$ 及  $N=20$ ，共 161 項)時，各模態皆至少收斂至三位有效數字。與文獻相比，各模態皆與 Stahl and Keer (1972)之結果相近；而第一、三、五模態小於 Liew 等人(1994)之結果。於本案例中， $k$ 值之不同並未造成結果有明顯改變。

表 4.5~4.10 為裂縫長  $d/a=0.2、0.5、0.8$  簡支方形板之結果，有別於表 4.1~4.4 者為此處使用式(4.6)之  $W_c^*$  並取不同之  $k(1.5$  與  $2.5)$ 。表最後一欄列出 Stahl and Keer (1972)、Liew 等人(1994)、Hirano and Okazaki (1980)所得之結果。

表 4.5~4.6 為考慮裂縫長度  $d/a=0.2$  和分別取  $k=1.5$  與  $2.5$  之結果。表 4.5 取  $I=J=9$  及  $\bar{N}=6$ (共 189 項)之允許函數時，所得結果為至少三位有效數字收斂，而表 4.6 中使用  $I=J=11$  及  $\bar{N}=6$ (共 229 項)之允許函數時，第一~第四模態至少達三位有效數字收斂，第五模態則收斂稍為緩慢。與文獻值比較，表 4.5 中各模態值皆與 Stahl and Keer (1972)之結果非常一致，表 4.6 中除第五模態外，其餘亦皆為一致。考慮以表 4.5 中使用  $I=J=7$  及  $\bar{N}=3$ (共 85 項)之結果為基準，與表 4.1 中取  $I=J=7$  及  $N=15$ (共 109 項)之結果比較，發現前者所得頻率值皆小於或等於後者，故可知式(4.6)加速數值收斂之效果較式(4.3)優良。比較表 4.5 及 4.6 之結果可發現取  $k=1.5$  更有利於第一與第五模態之收斂。



表 4.7~4.8 為考慮裂縫長度  $d/a=0.5$  和分別取  $k=1.5$  與  $2.5$  之結果。使用  $I=J=9$  及  $\bar{N}=6$ (共 189 項)之允許函數時，各模態皆可達至少三位有效位數收斂。與文獻值相比，各模態皆與 Stahl and Keer (1972)之結果相近，其中第一、三、五模態之值小於 Liew 等人(1994)之結果，而第一~四模態大於 Hirano and Okazaki (1980)之結果。比較表 4.7 及 4.8 之結果發現  $k=1.5$  更有利於第一與第五模態之收斂。

表 4.9~4.10 為考慮裂縫長度  $d/a=0.8$  和分別取  $k=1.5$  與  $2.5$  之結果。使用  $I=J=9$  及  $\bar{N}=6$ (共 189 項)之允許函數時，各模態大致為至少三位有效數字收斂。各模態之收斂值與 Stahl and Keer (1972)之結果相近，而且其中第一、

三、五模態小於 Liew 等人(1994)之結果。於本案例中  $k$  值之改變並未造成結果有明顯之變化。考慮表 4.10 中使用  $I=J=9$  及  $\bar{N}=5$ (共 161 項)之結果，與表 4.4 中使用  $I=J=9$  及  $N=20$ (共 161 項)所得之值比較，可發現各模態值皆為至少三位有效數字收斂，而除第二模態外，皆收斂至相同之值。

表 4.11~4.16 為考慮裂縫長  $d/a=0.2、0.5、0.8$  之懸臂方形板收斂性分析，使用式(4.6)之  $W_c^*$  配合取不同之  $k$ (等於 1.5 與 2.5)之結果。表 4.11~4.14 所示為考慮裂縫長度  $d/a=0.2$  及 0.5 者。使用  $I=J=9$  及  $\bar{N}=6$ (共 189 項)之允許函數時，各模態皆為至少三位有效數字收斂。比較表 4.11 和 4.12 及比較表 4.13 和 4.14，可發現取  $k=1.5$  較有利於第四模態之收斂。表 4.15 和 4.16 為考慮裂縫長度  $d/a=0.8$  者，發現使用  $I=J=9$  及  $\bar{N}=6$ (共 189 項)時，第一~四模態為至少三位有效數字收斂，第五模態收斂速度則較為緩慢。取  $k=2.5$  有利於第五模態之收斂。

### 4.3 數值分析

在收斂性分析中已驗證使用式(4.6)之  $W_c^*$  對於數值解收斂有較佳之效果。於本節中，吾人將其用於分析具有內部裂縫之簡支與懸臂方形板，探討不同裂縫位置、角度及長度對振動行為之影響。

表 4.17 為具有內部裂縫之簡支方形板，考慮不同之裂縫中心( $x_0/a=0.5$  且  $y_0/b=0.5$  與 0.75)、裂縫角度( $\alpha=0^\circ、15^\circ、30^\circ、45^\circ$ )與長度( $d/a=0.1\sim 0.6$ )之影響。當考慮水平裂縫之中心點位於板正中央且  $d/a\leq 0.3$  時，取  $I=J=9$  及  $\bar{N}=5$ (總項

數 161 項)及  $k=1.5$  進行分析； $d/a \geq 0.4$  時，則取  $I=J=9$  與  $\bar{N}=6$  (總項數 189 項) 且  $k=2.5$  進行分析。其餘之案例取  $I=J=9$  與  $\bar{N}=4$  (總項數 137 項)， $k$  值之取法如前所述。本表所得大部分結果至少可達三位有效數字之收斂。表 4.18 與表 4.20 分別為表 4.17 與表 4.19 所列結果相對於完整板(無裂縫者)之無因次頻率折減量比，其定義為：

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\text{無裂縫}} - \omega_{\text{裂縫}}}{\omega_{\text{無裂縫}}} ;$$

其中， $\omega_{\text{無裂縫}}$  為完整板無因次化頻率值， $\omega_{\text{裂縫}}$  為具裂縫板之無因次化頻率值。觀察表 4.17 與表 4.18 可發現：

- (1) 如所預期，頻率值因裂縫增加( $d/a=0.1\sim 0.6$ )而下降(因勁度減小之故)。當  $d/a=0.1$  時，各案例之  $\Delta\omega$  小於 2%。隨裂縫角度 ( $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) 之增加，發現前四模態頻之  $\Delta\omega$  均隨之增加，而第五模態則呈相反趨勢。隨裂縫位置( $y_0/b=0.5$  與  $0.75$ ) 之改變， $y_0/b=0.5$  之第一與第三模態之  $\Delta\omega$  較大，第四模態呈相反趨勢，第二與第五模態則較無明顯之趨勢。
- (2) 觀察裂縫角度 ( $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) 對頻率值之影響。發現第一、二及四模態有隨角度增加而下降之情形，而第三與第五模態則呈相反之趨勢。
- (3) 比較水平裂縫位置( $y_0/b=0.5$  與  $0.75$ ) 對頻率值之影響。 $y_0/b=0.5$  者在第二、四及五模態之值皆大於  $y_0/b=0.75$  者，而第一與第三模態

則呈相反趨勢

- (4) 比較位於板內部( $y_0/b=0.5$ 者)與邊緣(表 3.10 中  $c_y/b=0.5$  者)之水平裂縫對頻率值之影響。當裂縫位於板邊緣(表 3.10)時，第一、二、五模態頻率值為較大，而第三與第四模態則為相反。

表 4.19 為具內部裂縫懸臂方形板，考慮之參數如同表 4.17 者。當裂縫為水平時，取  $I=J=9$  及  $\bar{N}=5$ (總項數 161 項)，當裂縫非水平時，則取  $I=J=9$  及  $\bar{N}=4$ (總項數 137 項)，其中  $k$  值皆取為 2.5。本表所得大部分結果至少可達三位有效數字之收斂，觀察表 4.19~4.20 整理如下：

- (1) 觀察頻率隨裂縫增加( $d/a=0.1\sim 0.6$ )之折減量。各案例中  $d/a=0.1$  之  $\Delta\omega$  均小於 1%。隨裂縫角度( $\alpha=0^\circ、15^\circ、30^\circ、45^\circ$ )之增加，發現第一~三模態之  $\Delta\omega$  亦增加，而第四與第五模態則為呈相反趨勢。隨裂縫位置( $y_0/b=0.5$  與  $0.75$ )之改變，可發現前三模態之  $\Delta\omega$  均小於 1%，而  $y_0/b=0.5$  者之第一與第四模態之  $\Delta\omega$  較大，第二與第三模態則為相反，第五模態無明顯趨勢。
- (2) 觀察裂縫隨角度增加( $\alpha=0^\circ、15^\circ、30^\circ、45^\circ$ )對頻率值之影響，發現前三模態頻率值隨角度增加而下降，而第四與第五模態則有相反之趨勢。
- (3) 觀察裂縫位置( $y_0/b=0.5$  與  $0.75$ )對頻率值之影響，發現  $y_0/b=0.75$  者第四模態之值皆大於  $y_0/b=0.5$  者，而其餘模態則無明顯之趨勢。

- (4) 比較位於板內部( $y_0/b=0.5$ 者)與邊緣(表 3.11 中  $c_y/b=0.5$  者)之水平裂縫對頻率值之影響。發現第二~五模態之頻率值皆大於邊緣裂縫者(表 3.11)，而邊緣裂縫因裂長度增加而造成頻率之下降亦較為明顯。
- (5) 與簡支矩形裂縫板(表 4.17)比較，發現第一、二、三、五模態頻率值隨裂縫增加( $d/a=0.1\sim 0.6$ )而下降幅度小於表 4.17。

圖 4.3 為具內部裂縫簡支方形板之節點線圖(考慮  $\alpha=0^\circ、15^\circ、45^\circ$  及裂縫長度為  $d/a=0.2$  與  $0.6$ )，可觀察到：

- (1) 圖形隨裂縫長度增加( $d/a=0.2\sim 0.6$ )於各模態有不同之變化。其中水平裂縫且  $y_0/b=0.5$  者之前四模態圖形非常雷同； $y_0/b=0.75$  者之前三模態圖形亦非常雷同，而第四與第五模態圖形則為互換。非水平裂縫者( $\alpha=15^\circ、45^\circ$ )，在前四模態圖形皆為相似，於第五模態有較明顯之變化。
- (2) 當  $\alpha=0^\circ$  與  $45^\circ$  且  $x_0/a=y_0/b=0.5$  時，其為有雙軸對稱之板。 $\alpha=0^\circ$  之節點線對稱於水平與垂直軸； $\alpha=45^\circ$  之節點線則對稱於兩對角線。 $\alpha=15^\circ$  則破壞其對稱性，且出現較多彎曲之節點線。
- (3) 比較  $y_0/b=0.5$  者與  $y_0/b=0.75$  之節點線圖，得知當裂縫較小時( $d/a=0.2$ )，前四模態節點線圖不隨裂縫位置改變而明顯改變，且呈現簡單線條型式。 $d/a=0.6$  之前三模態圖形較為相似。

- (4) 以水平裂縫且  $y_0/b=0.5$  者與水平邊緣裂縫(圖 3.4 中  $c_y/b=0.5$  者)比較。當  $d/a=0.2$  時，第一與第四模態圖形很雷同，第二與第三模態圖形互換，第五模態則有明顯差異。 $d/a=0.5$  與  $0.6$  時，第一與第二模態圖形很雷同，第三與第四模態節點線由直線轉為彎曲，第五模態則為不同。

圖 4.4 為具內部裂縫懸臂方形板之節點線圖，僅列出表 4.18 中  $\alpha=0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $45^\circ$  且裂縫長度為  $d/a=0.2$  與  $0.6$  之圖形。可觀察到：

- (1) 觀察圖形隨裂縫長度增加( $d/a=0.2\sim 0.6$ )之變化，發現前四模態圖形皆為雷同；而除水平裂縫  $y_0/b=0.5$  者，其餘案例之第五模態圖形皆為分離之曲線。
- (2) 水平裂縫且  $y_0/b=0.5$  者具有對稱性，其節點線對稱於一軸 ( $y_0/b=0.5$ )。而非水平裂縫破壞其對稱性，節點線產生較多彎曲。觀察非水平裂縫( $\alpha=0^\circ\sim 45^\circ$ )圖形之變化，可發現  $\alpha=45^\circ$  者圖形圖形差異性最為顯著。
- (3) 以  $y_0/b=0.5$  之節點線圖為基準，與  $y_0/b=0.75$  者比較，發現前四模態圖形皆為相似，在五模態中，原交會之兩線轉為分離且彎曲。
- (4) 以水平裂縫且  $y_0/b=0.5$  者與水平邊緣裂縫(圖 3.5 中  $c_y/b=0.5$  者)比較。當  $d/a=0.2$  時，可發現各模態圖形皆為相似，隨裂縫長度增加 ( $d/a=0.5$  與  $0.6$ )，可發現第三與第四模態圖形有類似互換之情形。



## 第五章 結論與建議

### 5.1 結論

本研究提出一組特別函數配合多項式函數組成 Ritz 法中之允許函數，以分析具裂縫之矩形板。所提之特別函數不僅能描述裂縫尖端之應力奇異性，並符合裂縫處位移與轉角之不連續特性；可有效加速數值解之收斂，以得準確數值解。從本研究的結果吾人做一完整結論如下：

- (a) 在收斂性分析中，以各種不同裂縫長度為範例，所得頻率值隨著允許函數增加而趨於收斂。而使用本文所提函數在求解上收斂之效率，較使用 William(1952)推導之漸近解效果來的好，尤其在邊緣裂縫且裂縫長度較長時更為顯著。當使用至最高項之允許函數時，本研究結果大部分皆為至少三位有效數字收斂。
- (b) 本研究所得結果依 Ritz 法由上界收斂之特性，與 Stahl and Keer (1972) 所得較精準之結果有相當高之一致性。
- (c) 本文將所提之函數用於求解各種不同案例(如不同邊界條件、裂縫位置與角度)之振動問題，其中大部分所得之頻率值與節點線圖為首度發表之研究結果(尤其是非水平之內部裂縫)。

## 5.2 建議

由本文之分析經驗，可直接提供後人用於研究各種不同形狀、不同邊界條件之裂縫板振動行為。亦可將本文提出之特別函數用於：(1)計算應力強度因子。(2)無網格 Galerkin 法之基底函數以分析裂縫板問題。(3)將問題衍伸至裂縫厚板之振動分析(利用一階板理論、高階板理論與 3-D 彈性理論)。



## 參考文獻

- Aggarwala, B. D. and Ariel, P. D. (1981) "Vibration and bending of a cracked plate", *Rozprawy Inzynierskie*, 29(2), pp. 295-310.
- Filipich, C. P. and Rosales, M. B. (2000) "Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate", *Journal of Sound and Vibration*, 230(3), pp. 521-539.
- Hirano, Y. and Okazaki, K. (1980) "Vibration of cracked rectangular plates", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23(179), pp. 732-740.
- Huang, C. S. (1991) *Singularities in plate vibration problems*, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Khadem, S. E. and Rezaee, M. (2000) "Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate", *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), pp. 245-258.
- Krawczuk, M (1993) "Natural vibrations of rectangular plates with a through crack", *Archive of Applied Mechanics*, 63(7), pp. 491-504.
- Leissa, A. W., McGee, O. G. and Huang, C. S. (1993) "Vibrations of Circular Plates Having V-notches or Sharp Radial Cracks", *Journal of Sound and Vibration*, 161(2), pp. 227-239.
- Leissa, A. W., McGee, O. G. and Huang, C. S. (1993) "Vibrations of Sectorial Plates Having Corner Stress Singularities", *Journal of Applied Mechanics*, 60, pp. 136-140.
- Leissa, A. W. (1973) "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound*

*and Vibration*, 31(3), pp. 257-293.

Leissa, A. W. (1969) *Vibration of plates*, NASA SP-160.

Liew, K. M., Hung, K. C. and Lim, M. K. (1994) "A solution method for analysis of cracked plates under vibration", *Engineering Fracture Mechanics*, 48(3), pp. 393-404.

Lynn, P. P. and Kumbasar, N. (1967) "Free vibrations of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges", *Developments in Mechanics, 4, Proc. 10<sup>th</sup> Midwestern Mechanics Conference*, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, August 21-23, pp. 911-928.

Ma, C. C. and Huang, C. H. (2001) "Experimental and numerical analysis of vibrating cracked plates at resonant frequencies", *Experimental Mechanics*, 41(1), pp. 8-18.

Neku, K. (1982) "Free vibration of a simply-supported rectangular plate with a straight through-notch", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 25(199), pp. 16-23.

Qian, G. L., Gu, S. N. and Jiang, J. S. (1991) "A finite element model of cracked plates and application to vibration problems", *Computers and Structures*, 39(5), pp. 483-487.

Rossi, R. E. and Laura, P. A. A. (1996) "Symmetric and antisymmetric normal modes of a cantilever rectangular plate: effect of Poisson's ratio and a concentrated mass", *Journal of Sound and Vibration*, 195(1), pp. 142-148.

Solecki, R. (1983) "Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge", *Engineering Fracture Mechanics*, 18(6), pp.

1111-1118.

Stahl, B. and Keer, L. M. (1972) “Vibration and Stability of cracked rectangular plates”, *International Journal of Solids and Structures*, 8(1), pp. 69-91.

Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1959), *Theory of plates and shells*, 2<sup>nd</sup> edition, McGraw-Hill.

Williams, M. L. (1952) “Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates under Bending”, *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp.325-329.

Yuan, J. and Dickinson, S. M. (1992) “The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method”, *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), pp. 39-55



表 3.1 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.2$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(3.12)、(3.13)之 $W_c$ )

Mode	N in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	49.36	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[48.9] {49.04} (49.05)
	1	49.10	49.03	49.03	49.00	49.00	48.99	
	3	49.02	49.00	49.00	48.99	48.99	48.98	
	6	49.01	49.00	48.99	48.98	48.98	48.98	
2(S)	0	79.07	79.06	78.96	78.96	78.96	78.96	[77.87] {78.04} (78.08)
	1	78.33	78.14	78.01	77.94	77.94	77.91	
	3	78.13	78.03	77.93	77.90	77.90	77.89	
	6	78.11	77.94	77.93	77.90	77.90	77.89	
3(S)	0	164.3	129.5	129.5	128.3	128.3	128.3	[126.6] {126.8} (126.9)
	1	160.4	127.9	127.9	126.7	126.7	126.6	
	3	134.0	127.9	127.8	126.6	126.6	126.6	
	6	133.6	126.8	126.8	126.6	126.6	126.6	
4(A)	0	168.4	168.4	167.8	167.8	167.8	167.8	[167.1] {167.2} (167.2)
	1	168.1	168.1	167.4	167.4	167.4	167.4	
	3	167.7	167.7	167.1	167.1	167.1	167.1	
	6	167.7	167.2	167.1	167.1	167.1	167.1	
5(A)	0	198.0	198.0	197.4	197.4	197.4	197.4	[194.0] {194.4} (194.7)
	1	196.5	196.2	195.6	195.6	195.5	195.4	
	3	194.7	194.7	194.2	194.2	194.2	194.2	
	6	194.7	194.6	194.2	194.2	194.2	194.2	

Note : [ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

{ } : Yuan and Dickinson(1992)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 3.2 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.5$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(3.12)、(3.13)之 $W_c$ )

Mode	N in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	49.36	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[40.4] {41.27} (41.62)
	5	40.88	40.61	40.60	40.47	40.47	40.42	
	10	40.87	40.61	40.58	40.47	40.47	40.42	
	15	40.87	40.61	40.58	40.47	40.47	40.42	
	20	40.87	40.61	40.58	40.47	40.47	40.42	
2(S)	0	79.07	79.06	78.96	78.96	78.96	78.96	[72.79] {72.79} (72.89)
	5	73.25	72.95	72.94	72.86	72.86	72.82	
	10	73.22	72.94	72.92	72.86	72.85	72.82	
	15	73.22	72.94	72.92	72.86	72.85	72.82	
	20	73.21	72.94	72.92	72.86	72.85	72.82	
3(A)	0	164.3	129.5	129.5	128.3	128.3	128.3	[73.63] {74.63} (76.55)
	5	76.92	76.87	76.26	76.26	75.77	75.76	
	10	76.87	76.69	76.25	76.11	75.75	75.65	
	15	76.87	76.68	76.25	76.10	75.74	75.63	
	20	76.87	76.68	76.25	76.10	75.74	75.63	
4(S)	0	168.4	168.4	167.8	167.8	167.8	167.8	[123.4] {123.8} (123.8)
	5	130.0	124.7	123.8	123.5	123.5	123.5	
	10	129.9	123.9	123.7	123.5	123.5	123.5	
	15	129.9	123.9	123.7	123.5	123.5	123.5	
	20	129.9	123.9	123.7	123.5	123.5	123.5	
5(A)	0	198.0	198.0	197.4	197.4	197.4	197.4	[168.6] {169.7} (170.5)
	5	170.3	169.7	169.5	169.4	169.3	169.3	
	10	170.1	169.6	169.3	169.3	169.3	169.3	
	15	170.1	169.6	169.3	169.3	169.3	169.3	
	20	170.1	169.6	169.3	169.3	169.3	169.3	

Note : [ ]: Stahl and Keer(1972)之結果  
 { } : Yuan and Dickinson(1992)之結果  
 ( ): Liew 等人(1994)之結果

表 3.3 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.8$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(3.12)、(3.13)之 $W_c$ )

Mode	N in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	49.36	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[29.9] (30.50)
	5	31.30	30.48	30.47	30.15	30.15	30.03	
	10	31.28	30.47	30.46	30.15	30.15	30.03	
	15	31.27	30.47	30.46	30.15	30.15	30.03	
	20	31.27	30.47	30.45	30.15	30.15	30.03	
2(A)	0	79.07	79.06	78.96	78.96	78.96	78.96	[39.53] (40.02)
	5	44.83	44.81	43.49	43.48	42.68	42.68	
	10	44.80	44.79	43.48	43.48	42.67	42.66	
	15	44.80	44.79	43.48	43.47	42.66	42.66	
	20	44.80	44.79	43.47	42.66	42.66	42.65	
3(S)	0	164.3	129.5	129.5	128.3	128.3	128.3	[68.20] (68.82)
	5	68.78	68.44	68.44	68.33	68.33	68.27	
	10	68.75	68.44	68.42	68.33	68.32	68.27	
	15	68.74	68.44	68.42	68.33	68.32	68.27	
	20	68.74	68.44	68.42	68.33	68.32	68.27	
4(A)	0	168.4	168.4	167.8	167.8	167.8	167.8	[94.50] (95.79)
	5	96.77	96.64	96.40	96.39	96.09	96.09	
	10	96.72	96.59	96.35	96.32	96.03	96.03	
	15	96.72	96.58	96.35	96.32	96.02	96.02	
	20	96.72	96.58	96.35	96.02	96.02	96.01	
5(S)	0	198.0	198.0	197.4	197.4	197.4	197.4	[120.2] (120.3)
	5	143.1	121.7	121.3	120.3	120.3	120.2	
	10	141.7	121.1	120.6	120.3	120.3	120.2	
	15	141.2	121.1	120.6	120.3	120.3	120.2	
	20	140.9	121.0	120.6	120.3	120.3	120.2	

Note : [ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果



表 3.4 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.2$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(3.14)之  $W_c$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )					文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	
1(S)	2	49.01	48.98	48.98	48.97	48.97	[49.0]
	3	48.97	48.97	48.97	48.97	48.97	{49.04}
	4	48.97	48.97	48.97	48.97	48.97	(49.05)
2(S)	2	78.01	77.96	77.88	77.87	77.87	[77.87]
	3	77.96	77.87	77.87	77.87	77.87	{78.04}
	4	77.87	77.87	77.87	77.87	77.87	(78.08)
3(S)	2	129.4	127.3	127.3	126.6	126.6	[126.6]
	3	127.3	127.3	126.8	126.6	126.6	{126.8}
	4	127.3	126.8	126.6	126.6	126.6	(126.9)
4(A)	2	167.5	167.5	167.1	167.1	167.1	[167.1]
	3	167.2	167.2	167.1	167.1	167.1	{167.2}
	4	167.1	167.1	167.1	167.1	167.1	(167.2)
5(A)	2	194.5	194.5	194.1	194.1	194.1	[194.0]
	3	194.4	194.4	194.0	194.0	194.0	{194.4}
	4	194.1	194.1	194.0	194.0	194.0	(194.7)

Note : [ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

{ } : Yuan and Dickinson(1992)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 3.5 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.5$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )					文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	
1(S)	3	40.43	40.36	40.36	40.36	40.36	[40.4] {41.27} (41.62)
	4	40.39	40.36	40.36	40.35	40.35	
	5	40.38	40.35	40.35	40.35	40.35	
	6	40.37	40.35	40.35	40.35	40.35	
	7	40.36	40.35	40.35	40.35	40.35	
2(S)	3	72.92	72.80	72.79	72.78	72.78	[72.79] {72.79} (72.89)
	4	72.85	72.78	72.78	72.78	72.78	
	5	72.83	72.78	72.78	72.78	72.78	
	6	72.82	72.78	72.78	72.78	72.78	
	7	72.82	72.78	72.78	72.78	72.78	
3(A)	3	73.73	73.72	73.67	73.66	73.65	[73.63] {74.63} (76.55)
	4	73.64	73.64	73.63	73.63	73.63	
	5	73.64	73.64	73.63	73.63	73.63	
	6	73.63	73.63	73.63	73.63	73.63	
	7	73.63	73.63	73.63	73.63	73.63	
4(S)	3	124.0	123.8	123.7	123.5	123.5	[123.4] {123.8} (123.8)
	4	123.7	123.6	123.5	123.4	123.4	
	5	123.6	123.5	123.4	123.4	123.4	
	6	123.5	123.5	123.4	123.4	123.4	
	7	123.5	123.5	123.4	123.4	123.4	
5(A)	3	169.8	169.5	169.2	169.2	169.0	[168.6] {169.7} (170.5)
	4	169.0	169.0	169.0	168.9	168.9	
	5	168.9	168.9	168.9	168.9	168.9	
	6	168.9	168.9	168.9	168.9	168.9	
	7	168.9	168.9	168.9	168.9	168.9	

Note : [ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

{ }: Yuan and Dickinson(1992)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 3.6 具水平邊緣裂縫簡支矩形板( $a/b=2$ 、 $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.8$ )之無因次化頻率  
 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )					文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	
1(S)	3	30.08	29.94	29.94	29.92	29.92	[29.9] (30.50)
	4	29.99	29.91	29.91	29.90	29.90	
	5	29.96	29.91	29.90	29.90	29.90	
	6	29.94	29.91	29.90	29.90	29.90	
	7	29.94	29.91	29.90	29.90	29.90	
	8	29.94	29.91	29.90	29.90	29.90	
2(A)	3	39.92	39.88	39.84	39.84	39.82	[39.53] (40.02)
	4	39.69	39.65	39.62	39.62	39.62	
	5	39.59	39.58	39.57	39.56	39.56	
	6	39.57	39.56	39.55	39.55	39.55	
	7	39.56	39.55	39.55	39.55	39.54	
	8	39.56	39.55	39.54	39.54	39.54	
3(S)	3	68.66	68.28	68.27	68.25	68.25	[68.20] (68.82)
	4	68.49	68.24	68.23	68.22	68.22	
	5	68.38	68.22	68.21	68.21	68.21	
	6	68.36	68.22	68.21	68.21	68.21	
	7	68.34	68.22	68.21	68.21	68.21	
	8	68.33	68.21	68.21	68.21	68.21	
4(A)	3	96.66	96.38	95.85	95.80	95.69	[94.50] (95.79)
	4	94.87	94.70	94.66	94.66	94.64	
	5	94.63	94.62	94.59	94.59	94.59	
	6	94.57	94.56	94.56	94.55	94.54	
	7	94.54	94.54	94.53	94.53	94.53	
	8	94.53	94.53	94.53	94.53	94.52	
5(S)	3	133.7	122.8	122.5	121.9	121.9	[120.2] (120.3)
	4	132.0	121.4	120.4	120.2	120.2	
	5	131.7	121.0	120.4	120.2	120.2	
	6	131.4	120.8	120.3	120.2	120.2	
	7	131.3	120.8	120.3	120.2	120.2	
	8	131.3	120.8	120.3	120.2	120.2	

Note : [ ] : Stahl and Keer(1972)之結果

( ) : Liew 等人(1994)之結果

表 3.7 具水平邊緣裂縫懸臂方形板( $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.2$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
1(S)	0	3.494	3.487	3.475	3.474	3.472	3.472
	2	3.493	3.488	3.475	3.473	3.472	3.471
	3	3.488	3.487	3.475	3.473	3.472	3.471
	4	3.483	3.483	3.475	3.473	3.472	3.471
	5	3.478	3.478	3.474	3.473	3.472	3.471
	6	3.475	3.475	3.474	3.473	3.472	3.471
2(A)	0	8.597	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509
	2	8.242	8.221	8.217	8.203	8.203	8.200
	3	8.222	8.209	8.209	8.200	8.199	8.196
	4	8.209	8.207	8.207	8.199	8.199	8.196
	5	8.206	8.205	8.205	8.199	8.199	8.196
	6	8.204	8.203	8.203	8.199	8.199	8.196
3(S)	0	21.56	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29
	2	21.20	21.17	21.08	21.08	21.05	21.05
	3	21.12	21.08	21.06	21.06	21.05	21.05
	4	21.10	21.07	21.06	21.06	21.05	21.05
	5	21.09	21.07	21.06	21.06	21.05	21.05
	6	21.09	21.06	21.06	21.06	21.05	21.05
4(S)	0	31.41	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20
	2	25.65	25.60	24.93	24.93	24.83	24.82
	3	25.14	24.99	24.83	24.83	24.81	24.81
	4	25.00	24.85	24.82	24.82	24.81	24.81
	5	24.84	24.82	24.82	24.82	24.81	24.81
	6	24.84	24.82	24.82	24.81	24.81	24.81
5(A)	0	32.42	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97
	2	29.13	28.55	28.41	28.28	28.27	28.26
	3	28.38	28.31	28.30	28.24	28.24	28.23
	4	28.30	28.26	28.26	28.24	28.24	28.23
	5	28.27	28.25	28.25	28.24	28.24	28.23
	6	28.25	28.25	28.25	28.24	28.24	28.23

表 3.8 具水平邊緣裂縫懸臂方形板( $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.5$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
1(S)	0	3.494	3.488	3.475	3.474	3.472	3.472
	2	3.491	3.487	3.474	3.473	3.471	3.471
	3	3.485	3.484	3.474	3.473	3.471	3.471
	4	3.479	3.479	3.474	3.473	3.471	3.471
	5	3.476	3.476	3.474	3.473	3.471	3.471
	6	3.473	3.473	3.472	3.472	3.471	3.471
2(A)	0	8.597	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509
	2	6.450	6.369	6.347	6.312	6.311	6.299
	3	6.223	6.098	6.079	6.068	6.066	6.062
	4	6.085	6.052	6.042	6.033	6.032	6.030
	5	6.063	6.035	6.033	6.029	6.028	6.027
	6	6.056	6.031	6.029	6.028	6.028	6.026
3(S)	0	21.56	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29
	2	18.45	18.34	18.01	18.00	17.92	17.92
	3	18.40	17.89	17.78	17.78	17.76	17.76
	4	18.21	17.83	17.76	17.75	17.75	17.75
	5	18.07	17.80	17.76	17.75	17.75	17.75
	6	18.05	17.78	17.75	17.75	17.75	17.75
4(A)	0	31.41	31.32	27.46	27.46	27.00	27.20
	2	20.19	19.74	19.68	19.60	19.59	19.53
	3	19.29	19.10	19.08	19.05	19.05	19.04
	4	19.10	19.04	19.03	19.02	19.01	19.01
	5	19.06	19.02	19.02	19.01	19.01	19.00
	6	19.04	19.02	19.01	19.01	19.01	19.00
5(S)	0	32.42	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97
	2	22.05	21.97	21.80	21.80	21.78	21.78
	3	21.84	21.82	21.74	21.74	21.73	21.73
	4	21.82	21.78	21.74	21.73	21.73	21.72
	5	21.78	21.77	21.74	21.73	21.73	21.72
	6	21.77	21.76	21.73	21.73	21.73	21.72

表 3.9 具水平邊緣裂縫懸臂方形板( $c_y/b=0.5$ 、 $d/a=0.8$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析(使用式(3.14)之 $W_c$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
1(S)	4	3.472	3.471	3.465	3.465	3.463	3.463
	5	3.467	3.467	3.464	3.462	3.461	3.461
	6	3.465	3.464	3.463	3.462	3.461	3.461
	7	3.463	3.463	3.462	3.461	3.461	3.460
	8	3.463	3.462	3.461	3.461	3.460	3.460
2(A)	4	4.170	4.061	3.996	3.975	3.975	3.971
	5	4.063	3.972	3.938	3.911	3.901	3.899
	6	4.010	3.922	3.900	3.885	3.877	3.872
	7	3.991	3.906	3.879	3.871	3.867	3.864
	8	3.981	3.898	3.872	3.864	3.862	3.860
3(S)	4	15.34	15.28	15.09	15.07	15.06	15.05
	5	15.15	15.14	15.09	15.05	15.03	15.03
	6	15.10	15.09	15.07	15.04	15.03	15.02
	7	15.07	15.07	15.06	15.04	15.02	15.02
	8	15.07	15.06	15.05	15.03	15.02	15.02
4(A)	4	16.64	16.49	16.43	16.40	16.40	16.39
	5	16.49	16.40	16.35	16.30	16.28	16.28
	6	16.41	16.32	16.29	16.25	16.24	16.23
	7	16.38	16.29	16.25	16.23	16.22	16.21
	8	16.36	16.28	16.23	16.21	16.21	16.20
5(S)	4	21.58	21.56	21.47	21.47	21.46	21.46
	5	21.54	21.53	21.46	21.46	21.46	21.45
	6	21.52	21.51	21.46	21.46	21.45	21.45
	7	21.51	21.51	21.45	21.45	21.45	21.45
	8	21.51	21.50	21.45	21.45	21.45	21.45

表 3.10 具不同邊緣裂縫簡支方形板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

$\alpha$ (degrees)	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
0°	0.5	0.1	19.74	49.34	49.35	78.95	98.63
		0.2	19.70	49.19	49.33	78.78	97.88
		0.3	19.54	48.77	49.09	77.18	95.69
		0.4	19.20	47.80	48.24	71.27	92.23
		0.5	18.65	43.42	47.92	64.40	88.08
		0.6	17.96	36.45	47.86	62.24	83.78
0°	0.75	0.1	19.74	49.33	49.35	78.91	98.67
		0.2	19.72	49.08	49.34	78.40	98.30
		0.3	19.62	48.15	49.23	76.96	96.95
		0.4	19.38	46.34	48.74	75.18	87.28
		0.5	18.88	44.07	47.32	68.85	76.03
		0.6	18.10	41.65	44.52	58.84	75.30
15°	0.75	0.1	19.73	49.32	49.35	78.92	98.66
		0.2	19.68	49.04	49.34	78.50	98.36
		0.3	19.51	48.24	49.29	77.23	97.17
		0.4	19.15	46.97	48.88	74.82	86.37
		0.5	18.56	45.47	47.09	65.76	77.42
		0.6	17.79	40.54	45.61	58.76	76.03
30°	0.75	0.1	19.72	49.31	49.35	78.94	98.61
		0.2	19.64	49.03	49.35	78.69	98.03
		0.3	19.44	48.33	49.30	77.78	96.12
		0.4	19.07	47.39	48.89	75.12	87.14
		0.5	18.50	46.50	46.67	66.22	79.56
		0.6	17.78	39.99	46.38	60.77	77.66

表 3.11 具不同邊緣裂縫懸臂方形板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(裂縫與  $x=a$  軸相交)

$a/b$	$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
				1	2	3	4	5
			0	3.492	8.525	21.43	27.33	31.11
1	$0^\circ$	0.2	0.1	3.472	8.475	21.28	26.99	30.68
			0.2	3.471	8.342	21.20	25.66	29.82
			0.3	3.471	8.054	20.37	22.33	29.06
			0.4	3.471	7.523	16.45	21.59	28.67
			0.5	3.471	6.693	13.53	21.52	28.29
			0.6	3.471	5.707	11.95	21.49	27.66
			0.7	3.469	4.790	11.10	21.45	26.41
	$0^\circ$	0.4	0.1	3.471	8.444	21.24	26.59	30.38
			0.2	3.471	8.213	21.07	24.90	28.47
			0.3	3.471	7.744	20.41	22.66	25.67
			0.4	3.471	7.002	18.31	21.56	23.37
			0.5	3.471	6.090	16.23	20.97	22.02
			0.6	3.471	5.197	14.85	20.12	21.61
			0.7	3.468	4.451	13.96	19.38	21.49
	$0^\circ$	0.5	0.1	3.471	8.440	21.23	26.50	30.34
			0.2	3.471	8.195	21.04	24.81	28.23
			0.3	3.471	7.704	20.51	23.04	24.70
			0.4	3.471	6.940	19.26	21.26	22.07
			0.5	3.471	6.026	17.75	19.00	21.72
			0.6	3.470	5.142	16.47	17.71	21.57
			0.7	3.467	4.406	15.55	16.89	21.48
	$0^\circ$	0.75	0.1	3.471	8.462	21.26	26.90	30.58
			0.2	3.471	8.299	21.16	25.38	29.46
			0.3	3.471	7.952	20.26	22.29	28.35
			0.4	3.471	7.336	16.74	21.60	27.55
			0.5	3.471	6.465	14.08	21.52	26.86
			0.6	3.471	5.507	12.57	21.49	26.12
			0.7	3.469	4.653	11.70	21.46	25.15



表 3.11(續上頁)

$a/b$	$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
				1	2	3	4	5
1	15°	0.75	0.1	3.471	8.463	21.26	26.87	30.59
			0.2	3.471	8.296	21.08	25.28	29.48
			0.3	3.471	7.950	19.79	22.75	28.15
			0.4	3.468	7.361	16.51	22.06	26.93
			0.5	3.461	6.564	13.93	21.86	25.97
			0.6	3.441	5.709	12.36	21.63	25.29
			0.7	3.389	4.980	11.39	21.37	24.82
	30°	0.75	0.1	3.471	8.469	21.26	26.88	30.64
			0.2	3.471	8.326	21.04	25.39	29.66
			0.3	3.470	8.034	19.65	23.16	28.24
			0.4	3.464	7.540	16.40	22.36	26.73
			0.5	3.446	6.849	13.67	21.86	25.56
			0.6	3.400	6.060	11.92	21.10	24.96
			0.7	3.288	5.358	10.80	20.31	24.75
	45°	0.75	0.1	3.471	8.480	21.26	26.94	30.73
			0.2	3.471	8.376	21.07	25.70	29.97
			0.3	3.470	8.175	19.90	23.64	28.75
			0.4	3.463	7.835	16.75	22.64	27.14
			0.5	3.443	7.322	13.67	21.88	25.69
			0.6	3.391	6.627	11.57	20.53	24.98
			0.7	3.262	5.865	10.24	18.95	24.77

表 3.11(續上頁)

$a/b$	$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
				1	2	3	4	5
2	$0^\circ$	0.5	0.1	3.441	14.73	21.44	46.67	60.08
			0.2	3.440	14.33	21.42	39.86	59.76
			0.3	3.440	13.13	21.41	30.82	57.11
			0.4	3.439	10.91	21.40	26.18	47.98
			0.5	3.438	8.522	21.40	24.82	40.74
			0.6	3.438	6.612	21.39	24.64	35.42
			0.7	3.437	5.225	21.37	24.56	31.57



表 3.12 具邊緣裂縫懸臂矩形板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(裂縫與  $y=b$  軸相交)

$a/b$	$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
				1	2	3	4	5
1	30°	0.75	0.1	3.470	8.487	21.21	27.17	30.82
			0.2	3.463	8.413	20.80	27.07	27.63
			0.3	3.442	8.283	19.73	26.97	28.30
			0.4	3.388	8.099	17.63	25.48	26.97
			0.5	3.289	7.887	15.01	23.31	26.89
			0.6	3.137	7.649	13.01	21.86	26.79
	90°	0.5	0.1	3.459	8.409	20.97	27.02	30.50
			0.2	3.421	8.087	20.09	26.35	29.62
			0.3	3.349	7.531	18.83	25.00	29.05
			0.4	3.229	6.800	17.46	23.18	28.83
			0.5	3.047	6.039	16.14	21.47	28.53
			0.6	2.788	5.372	14.92	20.17	27.06
2	90°	0.5	0.1	3.434	14.71	21.29	47.95	60.04
			0.2	3.416	14.43	20.88	47.30	59.46
			0.3	3.386	13.96	20.25	46.26	57.87
			0.4	3.338	13.30	19.44	44.52	54.82
			0.5	3.271	12.48	18.52	41.48	51.61
			0.6	3.179	11.51	17.53	37.46	49.74

表 4.1 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.3)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$N$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[19.3] (19.38)
	5	19.46	19.46	19.39	19.39	19.35	19.35	
	10	19.39	19.39	19.34	19.34	19.33	19.33	
	15	19.37	19.37	19.33	19.33	19.33	19.32	
2(A)	0	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.17] (49.16)
	5	49.22	49.20	49.20	49.19	49.19	49.19	
	10	49.20	49.19	49.19	49.19	49.19	49.18	
	15	49.19	49.19	49.19	49.19	49.19	49.18	
3(S)	0	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.33] (49.31)
	5	49.33	49.33	49.33	49.33	49.33	49.32	
	10	49.33	49.33	49.33	49.33	49.32	49.32	
	15	49.33	49.33	49.33	49.32	49.32	49.32	
4(A)	0	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	78.96	[78.96] (78.81)
	5	78.98	78.96	78.96	78.95	78.95	78.95	
	10	78.96	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	15	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
5(S)	0	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	98.70	[93.96] (94.69)
	5	95.85	95.85	94.85	94.85	94.38	94.38	
	10	94.95	94.95	94.29	94.29	94.13	94.13	
	15	94.70	94.70	94.21	94.21	94.11	94.11	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.2 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.3)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$N$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	11×11	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[19.3] (19.38)
	5	19.54	19.54	19.46	19.46	19.45	19.41	
	10	19.46	19.46	19.45	19.45	19.40	19.35	
	15	19.45	19.45	19.42	19.42	19.36	19.34	
2(A)	0	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.17] (49.16)
	5	49.26	49.23	49.21	49.20	49.20	49.19	
	10	49.22	49.20	49.20	49.20	49.19	49.19	
	15	49.21	49.20	49.20	49.19	49.19	49.19	
3(S)	0	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.33] (49.31)
	5	49.34	49.33	49.33	49.33	49.33	49.33	
	10	49.34	49.33	49.33	49.33	49.33	49.32	
	15	49.34	49.33	49.33	49.33	49.33	49.32	
4(A)	0	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	78.96	[78.96] (78.81)
	5	78.96	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	10	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	15	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
5(S)	0	100.1	100.1	98.72	98.70	98.70	98.70	[93.96] (94.69)
	5	96.52	96.52	95.59	95.59	95.53	95.03	
	10	95.62	95.62	95.44	95.44	94.95	94.43	
	15	95.53	95.53	95.15	95.15	94.51	94.32	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.3 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.3)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$N$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[16.40] (16.47)
	5	16.45	16.42	16.42	16.42	16.42	16.42	
	10	16.43	16.41	16.41	16.41	16.41	16.41	
	15	16.43	16.41	16.41	16.41	16.41	16.41	
	20	16.42	16.41	16.41	16.41	16.41	16.41	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[27.77] (27.43)
	5	29.40	28.04	27.99	27.98	27.97	27.97	
	10	28.03	27.97	27.84	27.82	27.80	27.80	
	15	28.02	27.85	27.81	27.80	27.79	27.77	
	20	28.01	27.83	27.81	27.79	27.78	27.77	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[47.26] (47.27)
	5	47.41	47.25	47.23	47.23	47.23	47.22	
	10	47.23	47.22	47.22	47.21	47.21	47.21	
	15	47.23	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
	20	47.22	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[65.73] (65.19)
	5	66.53	66.53	66.50	66.50	66.49	66.49	
	10	65.94	65.94	65.90	65.90	65.89	65.89	
	15	65.92	65.92	65.78	65.78	65.77	65.77	
	20	65.88	65.88	65.78	65.78	65.76	65.76	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[76.37] (76.60)
	5	77.83	77.16	77.16	76.47	76.47	76.41	
	10	77.12	76.49	76.49	76.39	76.39	76.37	
	15	76.71	76.43	76.43	76.38	76.38	76.37	
	20	76.64	76.40	76.40	76.37	76.37	76.37	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.4 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.3)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$N$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[16.4] (16.47)
	5	16.69	16.44	16.44	16.42	16.42	16.41	
	10	16.45	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
	15	16.43	16.41	16.41	16.41	16.41	16.41	
	20	16.42	16.41	16.41	16.41	16.41	16.41	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[27.77] (27.43)
	5	28.38	28.05	28.04	28.01	27.99	27.98	
	10	27.92	27.89	27.83	27.81	27.81	27.80	
	15	27.87	27.81	27.80	27.80	27.78	27.77	
	20	27.86	27.80	27.79	27.79	27.77	27.77	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[47.26] (47.27)
	5	47.39	47.25	47.22	47.22	47.21	47.21	
	10	47.23	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
	15	47.22	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
	20	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[65.73] (65.19)
	5	66.07	66.07	65.97	65.97	65.90	65.90	
	10	65.90	65.90	65.84	65.84	65.77	65.77	
	15	65.85	65.85	65.78	65.78	65.76	65.76	
	20	65.84	65.84	65.76	65.76	65.76	65.76	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[76.37] (76.60)
	5	79.40	76.77	76.77	76.46	76.46	76.38	
	10	77.68	76.51	76.51	76.38	76.38	76.37	
	15	76.78	76.39	76.39	76.38	76.38	76.37	
	20	76.63	76.38	76.38	76.37	76.37	76.37	

[ ]: Stahl and Keer (1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.5 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5$ ,  $d/a=0.2$ ,  $\alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[19.3] (19.38)
	3	19.39	19.36	19.36	19.32	19.32	19.32	
	4	19.33	19.32	19.32	19.32	19.32	19.31	
	5	19.32	19.32	19.32	19.31	19.31	19.31	
	6	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.17] (49.16)
	3	49.20	49.19	49.19	49.18	49.18	49.18	
	4	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	
	5	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	
	6	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.33] (49.31)
	3	49.33	49.33	49.33	49.33	49.33	49.33	
	4	49.33	49.33	49.33	49.33	49.32	49.32	
	5	49.33	49.33	49.32	49.32	49.32	49.32	
	6	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[78.96] (78.81)
	3	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	4	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	5	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	6	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[93.96] (94.69)
	3	94.76	94.48	94.48	94.09	94.09	94.02	
	4	94.18	94.09	94.09	94.03	94.03	93.98	
	5	94.03	94.00	94.00	93.98	93.98	93.96	
	6	93.99	93.98	93.98	93.96	93.96	93.96	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果



表 4.6 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	11×11	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[19.3] (19.38)
	3	19.48	19.42	19.42	19.39	19.39	19.36	
	4	19.40	19.38	19.38	19.36	19.36	19.34	
	5	19.37	19.35	19.35	19.35	19.35	19.34	
	6	19.36	19.34	19.34	19.34	19.34	19.33	
2(A)	0	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.17] (49.16)
	3	49.20	49.20	49.19	49.19	49.19	49.19	
	4	49.19	49.19	49.19	49.18	49.18	49.18	
	5	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	
	6	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	49.18	
3(S)	0	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	49.35	[49.33] (49.31)
	3	49.33	49.33	49.32	49.32	49.32	49.32	
	4	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	
	5	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	
	6	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	49.32	
4(A)	0	78.96	78.96	78.96	78.96	78.96	78.96	[78.96] (78.81)
	3	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	4	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	5	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
	6	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	78.95	
5(S)	0	100.1	98.72	98.72	98.70	98.70	98.70	[93.96] (94.69)
	3	95.76	95.11	95.11	94.77	94.77	94.52	
	4	94.93	94.76	94.76	94.45	94.45	94.30	
	5	94.59	94.41	94.41	94.36	94.36	94.26	
	6	94.44	94.32	94.32	94.25	94.25	94.10	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.7 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.5, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[17.7] {17.69} (17.85)
	3	17.73	17.72	17.72	17.72	17.72	17.72	
	4	17.72	17.72	17.72	17.71	17.71	17.71	
	5	17.72	17.72	17.72	17.71	17.71	17.71	
	6	17.72	17.71	17.71	17.71	17.71	17.71	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[43.03] {42.62} (42.82)
	3	43.07	43.04	43.04	43.04	43.03	43.03	
	4	43.05	43.03	43.03	43.03	43.03	43.03	
	5	43.05	43.03	43.03	43.03	43.03	43.03	
	6	43.05	43.03	43.03	43.03	43.03	43.03	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[48.70] {48.67} (48.72)
	3	48.70	48.70	48.69	48.69	48.69	48.69	
	4	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	
	5	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	
	6	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[77.73] {77.58} (77.44)
	3	77.73	77.73	77.73	77.73	77.73	77.73	
	4	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	
	5	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	
	6	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[82.15] (83.01)
	3	82.28	82.19	82.19	82.17	82.17	82.15	
	4	82.19	82.17	82.17	82.15	82.15	82.15	
	5	82.16	82.15	82.15	82.15	82.15	82.15	
	6	82.16	82.15	82.15	82.15	82.15	82.15	

[ ]: Stahl and Keer (1972)之結果

{ } : Hirano and Okazaki(1980)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.8 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.5, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[17.7] {17.69} (17.85)
	3	18.04	17.78	17.78	17.76	17.76	17.72	
	4	17.85	17.75	17.75	17.72	17.72	17.72	
	5	17.77	17.73	17.73	17.72	17.72	17.72	
	6	17.74	17.72	17.72	17.72	17.72	17.71	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[43.03] {42.62} (42.82)
	3	43.13	43.12	43.05	43.05	43.04	43.04	
	4	43.08	43.08	43.04	43.04	43.04	43.04	
	5	43.05	43.04	43.03	43.03	43.03	43.03	
	6	43.05	43.03	43.03	43.03	43.03	43.03	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[48.70] {48.67} (48.72)
	3	48.70	48.70	48.69	48.69	48.69	48.69	
	4	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	
	5	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	
	6	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	48.69	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[77.73] {77.58} (77.44)
	3	77.77	77.77	77.73	77.73	77.72	77.72	
	4	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	
	5	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	
	6	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	77.72	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[82.15] (83.01)
	3	85.76	82.89	82.89	82.63	82.63	82.22	
	4	83.53	82.44	82.44	82.21	82.21	82.16	
	5	82.59	82.27	82.27	82.16	82.16	82.15	
	6	82.30	82.17	82.17	82.15	82.15	82.15	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

{ } : Hirano and Okazaki(1980)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.9 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[16.4] (16.47)
	3	16.46	16.42	16.42	16.42	16.42	16.42	
	4	16.45	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
	5	16.44	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
	6	16.44	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[27.77] (27.43)
	3	28.29	27.99	27.98	27.97	27.97	27.97	
	4	28.25	27.98	27.98	27.97	27.97	27.96	
	5	28.11	27.83	27.82	27.80	27.80	27.79	
	6	28.10	27.82	27.82	27.80	27.80	27.79	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[47.26] (47.27)
	3	47.23	47.22	47.22	47.22	47.21	47.21	
	4	47.22	47.22	47.21	47.21	47.21	47.21	
	5	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
	6	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[65.73] (65.19)
	3	66.52	66.52	66.48	66.48	66.47	66.47	
	4	66.06	66.06	65.89	65.89	65.88	65.88	
	5	66.03	66.03	65.89	65.89	65.88	65.88	
	6	65.93	65.93	65.78	65.78	65.76	65.76	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[76.37] (76.60)
	3	76.68	76.45	76.45	76.43	76.43	76.40	
	4	76.50	76.41	76.41	76.37	76.37	76.37	
	5	76.47	76.40	76.40	76.37	76.37	76.37	
	6	76.45	76.39	76.39	76.37	76.37	76.37	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.10 具內部裂縫簡支方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	19.74	[16.4] (16.47)
	3	16.49	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
	4	16.45	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
	5	16.44	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
	6	16.44	16.42	16.42	16.41	16.41	16.41	
2(A)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[27.77] (27.43)
	3	28.27	28.01	27.99	27.98	27.97	27.97	
	4	28.13	27.84	27.83	27.80	27.80	27.79	
	5	28.11	27.83	27.82	27.80	27.80	27.79	
	6	28.08	27.80	27.80	27.77	27.77	27.77	
3(S)	0	49.49	49.49	49.35	49.35	49.35	49.35	[47.26] (47.27)
	3	47.24	47.23	47.23	47.21	47.21	47.21	
	4	47.22	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
	5	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
	6	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	47.21	
4(A)	0	79.17	79.17	78.96	78.96	78.96	78.96	[65.73] (65.19)
	3	66.10	66.10	65.90	65.90	65.88	65.88	
	4	66.05	66.05	65.89	65.89	65.88	65.88	
	5	65.93	65.93	65.78	65.78	65.76	65.76	
	6	65.93	65.93	65.78	65.78	65.76	65.76	
5(S)	0	139.6	100.1	100.1	98.72	98.72	98.70	[76.37] (76.60)
	3	77.42	76.52	76.52	76.43	76.43	76.38	
	4	76.63	76.46	76.46	76.38	76.38	76.37	
	5	76.49	76.40	76.40	76.37	76.37	76.37	
	6	76.46	76.39	76.39	76.37	76.37	76.37	

[ ]: Stahl and Keer(1972)之結果

( ): Liew 等人(1994)之結果

表 4.11 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.489	3.475	3.474	3.472	3.472	3.471
	3	3.477	3.474	3.473	3.471	3.471	3.471
	4	3.474	3.473	3.473	3.471	3.471	3.471
	5	3.472	3.472	3.472	3.471	3.471	3.471
	6	3.471	3.471	3.471	3.471	3.471	3.471
2(A)	0	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509	8.509
	3	8.518	8.517	8.512	8.512	8.509	8.509
	4	8.515	8.515	8.512	8.511	8.509	8.509
	5	8.513	8.512	8.511	8.510	8.509	8.508
	6	8.511	8.511	8.510	8.510	8.509	8.508
3(S)	0	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29	21.29
	3	21.31	21.30	21.30	21.29	21.29	21.29
	4	21.30	21.30	21.30	21.29	21.29	21.29
	5	21.30	21.30	21.30	21.29	21.29	21.29
	6	21.29	21.29	21.29	21.29	21.29	21.29
4(A)	0	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20	27.20
	3	26.90	26.77	26.74	26.63	26.62	26.60
	4	26.69	26.65	26.64	26.62	26.61	26.60
	5	26.62	26.61	26.61	26.60	26.60	26.59
	6	26.60	26.60	26.60	26.59	26.59	26.59
5(S)	0	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97	30.96
	3	30.98	30.97	30.95	30.95	30.94	30.94
	4	30.96	30.96	30.95	30.95	30.94	30.94
	5	30.95	30.95	30.95	30.94	30.94	30.94
	6	30.94	30.94	30.94	30.94	30.94	30.94

表 4.12 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.2, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.489	3.475	3.474	3.472	3.472	3.471
	3	3.476	3.474	3.473	3.472	3.471	3.471
	4	3.474	3.472	3.472	3.472	3.471	3.471
	5	3.472	3.472	3.472	3.471	3.471	3.471
	6	3.472	3.471	3.471	3.471	3.471	3.471
2(A)	0	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509	8.509
	3	8.516	8.516	8.512	8.512	8.509	8.509
	4	8.514	8.514	8.512	8.511	8.509	8.508
	5	8.512	8.511	8.511	8.510	8.509	8.508
	6	8.510	8.510	8.509	8.509	8.509	8.508
3(S)	0	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29	21.29
	3	21.31	21.30	21.30	21.29	21.29	21.29
	4	21.30	21.30	21.30	21.29	21.29	21.29
	5	21.30	21.29	21.29	21.29	21.29	21.29
	6	21.29	21.29	21.29	21.29	21.29	21.29
4(A)	0	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20	27.20
	3	27.22	26.89	26.89	26.81	26.79	26.71
	4	27.14	26.76	26.75	26.72	26.71	26.67
	5	27.04	26.71	26.69	26.67	26.67	26.66
	6	26.88	26.67	26.67	26.66	26.65	26.65
5(S)	0	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97	30.96
	3	30.98	30.97	30.95	30.96	30.94	30.94
	4	30.97	30.96	30.95	30.95	30.94	30.94
	5	30.95	30.95	30.95	30.95	30.94	30.94
	6	30.94	30.94	30.94	30.94	30.94	30.94

表 4.13 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.5, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.489	3.475	3.474	3.472	3.472	3.471
	3	3.471	3.469	3.467	3.466	3.465	3.465
	4	3.468	3.467	3.466	3.465	3.465	3.465
	5	3.467	3.466	3.466	3.465	3.465	3.464
	6	3.466	3.465	3.465	3.465	3.465	3.464
2(A)	0	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509	8.509
	3	8.515	8.515	8.509	8.508	8.506	8.505
	4	8.511	8.511	8.509	8.508	8.506	8.505
	5	8.509	8.508	8.508	8.507	8.506	8.505
	6	8.507	8.507	8.506	8.506	8.506	8.505
3(S)	0	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29	21.29
	3	21.30	21.29	21.29	21.28	21.28	21.28
	4	21.29	21.29	21.29	21.28	21.28	21.28
	5	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28
	6	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28
4(A)	0	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20	27.20
	3	24.12	24.00	23.98	23.96	23.96	23.95
	4	24.00	23.97	23.96	23.95	23.95	23.95
	5	23.99	23.96	23.95	23.95	23.95	23.94
	6	23.99	23.96	23.95	23.95	23.95	23.94
5(S)	0	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97	30.96
	3	30.18	30.13	30.09	30.09	30.08	30.08
	4	30.11	30.08	30.07	30.07	30.06	30.06
	5	30.08	30.06	30.06	30.06	30.05	30.05
	6	30.08	30.06	30.06	30.06	30.05	30.05



表 4.14 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.5, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.489	3.475	3.474	3.472	3.472	3.471
	3	3.474	3.469	3.467	3.466	3.465	3.465
	4	3.469	3.467	3.467	3.465	3.465	3.465
	5	3.467	3.466	3.466	3.465	3.465	3.465
	6	3.466	3.465	3.465	3.465	3.465	3.464
2(A)	0	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509	8.509
	3	8.514	8.514	8.509	8.509	8.506	8.505
	4	8.511	8.511	8.509	8.508	8.506	8.505
	5	8.508	8.508	8.507	8.507	8.506	8.505
	6	8.506	8.506	8.506	8.506	8.505	8.505
3(S)	0	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29	21.29
	3	21.30	21.29	21.29	21.28	21.28	21.28
	4	21.29	21.29	21.29	21.28	21.28	21.28
	5	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28
	6	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28	21.28
4(A)	0	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20	27.20
	3	25.44	24.25	24.20	24.14	24.13	24.01
	4	24.38	24.10	24.04	24.01	24.00	23.95
	5	24.20	24.02	24.01	23.95	23.95	23.95
	6	24.07	23.98	23.97	23.95	23.95	23.95
5(S)	0	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97	30.96
	3	30.20	30.19	30.09	30.08	30.06	30.06
	4	30.10	30.09	30.07	30.06	30.05	30.05
	5	30.08	30.06	30.06	30.06	30.05	30.05
	6	30.08	30.06	30.05	30.05	30.05	30.05

表 4.15 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=1.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.489	3.475	3.474	3.472	3.472	3.471
	3	3.460	3.458	3.455	3.454	3.454	3.453
	4	3.455	3.455	3.453	3.452	3.451	3.451
	5	3.453	3.452	3.451	3.451	3.450	3.450
	6	3.451	3.451	3.451	3.450	3.449	3.449
2(A)	0	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509	8.509
	3	8.495	8.494	8.489	8.488	8.486	8.485
	4	8.490	8.489	8.487	8.486	8.484	8.483
	5	8.486	8.486	8.484	8.484	8.482	8.482
	6	8.484	8.483	8.482	8.482	8.481	8.481
3(S)	0	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29	21.29
	3	20.43	20.40	20.38	20.37	20.37	20.36
	4	20.38	20.38	20.37	20.36	20.35	20.35
	5	20.37	20.36	20.36	20.35	20.35	20.35
	6	20.36	20.35	20.35	20.35	20.35	20.34
4(A)	0	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20	27.20
	3	21.63	21.60	21.60	21.59	21.59	21.58
	4	21.61	21.59	21.59	21.59	21.58	21.58
	5	21.60	21.59	21.59	21.58	21.58	21.58
	6	21.60	21.58	21.58	21.58	21.58	21.58
5(S)	0	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97	30.96
	3	26.73	26.40	26.38	26.37	26.36	26.35
	4	26.39	26.12	25.96	25.96	25.95	25.95
	5	26.15	25.92	25.79	25.74	25.74	25.73
	6	26.04	25.82	25.70	25.64	25.62	25.62

表 4.16 具內部裂縫懸臂方形板( $x_0 = y_0 = 0.5, d/a=0.8, \alpha=0^\circ$ )之無因次化頻率

$\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  收斂性分析(使用式(4.6)之  $W_c^*$ ,  $k=2.5$ )

Mode	$\bar{N}$ in $W_c^*$	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.489	3.475	3.474	3.472	3.472	3.471
	3	3.460	3.456	3.455	3.452	3.452	3.451
	4	3.455	3.453	3.453	3.451	3.450	3.450
	5	3.452	3.452	3.451	3.451	3.450	3.449
	6	3.451	3.451	3.451	3.450	3.450	3.449
2(A)	0	8.546	8.544	8.513	8.512	8.509	8.509
	3	8.493	8.493	8.488	8.487	8.484	8.484
	4	8.488	8.487	8.486	8.485	8.482	8.482
	5	8.485	8.485	8.484	8.483	8.481	8.481
	6	8.483	8.483	8.482	8.481	8.480	8.480
3(S)	0	21.50	21.31	21.31	21.29	21.29	21.29
	3	20.59	20.44	20.43	20.38	20.37	20.35
	4	20.44	20.38	20.37	20.36	20.35	20.35
	5	20.38	20.36	20.36	20.35	20.35	20.35
	6	20.36	20.35	20.35	20.35	20.35	20.35
4(A)	0	31.32	27.46	27.46	27.20	27.20	27.20
	3	21.70	21.61	21.61	21.59	21.59	21.58
	4	21.61	21.59	21.59	21.59	21.58	21.58
	5	21.60	21.59	21.59	21.58	21.58	21.58
	6	21.60	21.58	21.58	21.58	21.58	21.58
5(S)	0	31.33	31.20	30.98	30.98	30.97	30.96
	3	26.51	26.30	26.03	26.00	25.96	25.96
	4	26.21	25.96	25.83	25.76	25.74	25.74
	5	26.06	25.84	25.71	25.65	25.62	25.62
	6	25.98	25.77	25.65	25.60	25.57	25.56

表 4.17 具不同內部裂縫簡支方形板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(裂縫中心座標為  $(x_0, y_0)$ )

$\alpha$ (degrees)	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
0°	(0.5, 0.5)	0.1	19.63	49.34	49.35	78.96	97.44
		0.2	19.31	49.18	49.32	78.95	93.96
		0.3	18.84	48.48	49.24	78.89	89.61
		0.4	18.29	46.62	49.03	78.61	85.51
		0.5	17.71	43.03	48.69	77.72	82.15
		0.6	17.19	37.98	48.22	75.59	79.59
0°	(0.5, 0.75)	0.1	19.68	48.88	49.35	78.95	98.06
		0.2	19.51	47.51	49.34	78.87	96.13
		0.3	19.20	45.59	49.28	78.56	92.78
		0.4	18.76	43.48	49.15	77.86	85.72
		0.5	18.19	41.44	48.89	73.01	76.68
		0.6	17.53	39.49	48.44	60.46	75.14
15°	(0.5, 0.5)	0.1	19.64	49.34	49.35	78.93	97.59
		0.2	19.32	49.17	49.32	78.79	94.23
		0.3	18.83	48.46	49.22	78.42	90.32
		0.4	18.27	46.58	49.00	77.58	87.01
		0.5	17.67	42.98	48.61	76.09	84.55
		0.6	17.10	37.95	48.06	74.03	82.19
30°	(0.5, 0.5)	0.1	19.65	49.34	49.35	78.87	97.75
		0.2	19.31	49.17	49.32	78.48	94.78
		0.3	18.82	48.43	49.20	77.61	91.64
		0.4	18.23	46.50	48.92	76.14	89.45
		0.5	17.58	42.88	48.43	74.24	88.14
		0.6	16.93	37.88	47.70	72.29	84.66
45°	(0.5, 0.5)	0.1	19.64	49.34	49.35	78.83	97.73
		0.2	19.31	49.16	49.32	78.32	95.02
		0.3	18.81	48.40	49.19	77.24	92.24
		0.4	18.20	46.46	48.89	75.55	90.56
		0.5	17.53	42.83	48.33	73.54	89.94
		0.6	16.84	37.85	47.51	71.60	84.51

表 4.18 具不同內部裂縫簡支方形板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)

$\alpha$ (degrees)	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.56	0.02	0.00	0.00	1.28
		0.2	2.18	0.34	0.06	0.01	4.80
		0.3	4.56	1.76	0.22	0.09	9.21
		0.4	7.35	5.53	0.65	0.44	13.36
		0.5	10.28	12.81	1.34	1.57	16.77
		0.6	12.92	23.04	2.29	4.27	19.36
$0^\circ$	(0.5, 0.75)	0.1	0.30	0.95	0.00	0.01	0.65
		0.2	1.17	3.73	0.02	0.11	2.60
		0.3	2.74	7.62	0.14	0.51	6.00
		0.4	4.96	11.89	0.41	1.39	13.15
		0.5	7.85	16.03	0.93	7.54	22.31
		0.6	11.20	19.98	1.84	23.43	23.87
$15^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.51	0.02	0.00	0.04	1.12
		0.2	2.13	0.36	0.06	0.22	4.53
		0.3	4.61	1.80	0.26	0.68	8.49
		0.4	7.45	5.61	0.71	1.75	11.84
		0.5	10.49	12.91	1.50	3.63	14.34
		0.6	13.37	23.10	2.61	6.24	16.73
$30^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.46	0.02	0.00	0.11	0.96
		0.2	2.18	0.36	0.06	0.61	3.97
		0.3	4.66	1.86	0.30	1.71	7.15
		0.4	7.65	5.78	0.87	3.57	9.37
		0.5	10.94	13.11	1.86	5.98	10.70
		0.6	14.24	23.24	3.34	8.45	14.22
$45^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.51	0.02	0.00	0.16	0.98
		0.2	2.18	0.39	0.06	0.81	3.73
		0.3	4.71	1.93	0.32	2.18	6.55
		0.4	7.80	5.86	0.93	4.32	8.25
		0.5	11.20	13.21	2.07	6.86	8.88
		0.6	14.69	23.30	3.73	9.32	14.38

表 4.19 具不同內部裂縫懸臂方形板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(裂縫中心座標為  $(x_0, y_0)$ )

$\alpha$ (degrees)	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
0°	(0.5, 0.5)	0.1	3.471	8.508	21.29	27.10	30.96
		0.2	3.471	8.508	21.29	26.66	30.94
		0.3	3.470	8.508	21.29	25.94	30.84
		0.4	3.467	8.507	21.29	24.98	30.58
		0.5	3.465	8.505	21.28	23.95	30.05
		0.6	3.460	8.501	21.24	22.91	29.10
0°	(0.5, 0.75)	0.1	3.471	8.508	21.29	27.17	30.96
		0.2	3.471	8.508	21.29	27.03	30.91
		0.3	3.470	8.507	21.28	26.74	30.80
		0.4	3.469	8.504	21.28	26.30	30.59
		0.5	3.467	8.501	21.27	25.63	30.22
		0.6	3.465	8.494	21.24	24.67	29.64
15°	(0.5, 0.5)	0.1	3.471	8.508	21.29	27.15	30.96
		0.2	3.470	8.498	21.29	26.72	30.94
		0.3	3.468	8.481	21.28	25.99	30.85
		0.4	3.465	8.460	21.28	25.22	30.64
		0.5	3.459	8.427	21.27	24.18	30.18
		0.6	3.451	8.387	21.26	23.18	29.33
30°	(0.5, 0.5)	0.1	3.471	8.506	21.29	27.16	30.96
		0.2	3.469	8.479	21.27	26.81	30.95
		0.3	3.464	8.431	21.23	26.24	30.89
		0.4	3.454	8.357	21.18	25.48	30.76
		0.5	3.441	8.264	21.11	24.72	30.48
		0.6	3.421	8.156	21.01	24.00	29.91
45°	(0.5, 0.5)	0.1	3.471	8.506	21.29	27.18	30.96
		0.2	3.466	8.471	21.21	26.91	30.95
		0.3	3.455	8.406	21.07	26.51	30.93
		0.4	3.438	8.313	20.86	25.96	30.87
		0.5	3.415	8.186	20.60	25.43	30.79
		0.6	3.372	8.029	20.30	24.95	30.55

表 4.20 具不同內部裂縫懸臂方形板無因次化頻率折減量比  $\Delta \omega$  (%)

$\alpha$ (degrees)	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.60	0.20	0.65	0.84	0.48
		0.2	0.60	0.20	0.65	2.45	0.55
		0.3	0.63	0.20	0.65	5.09	0.87
		0.4	0.72	0.21	0.65	8.60	1.70
		0.5	0.77	0.23	0.70	12.37	3.41
		0.6	0.92	0.28	0.89	16.17	6.46
$0^\circ$	(0.5, 0.75)	0.1	0.60	0.20	0.65	0.59	0.48
		0.2	0.60	0.20	0.65	1.10	0.64
		0.3	0.63	0.21	0.70	2.16	1.00
		0.4	0.66	0.25	0.70	3.77	1.67
		0.5	0.72	0.28	0.75	6.22	2.86
		0.6	0.77	0.36	0.89	9.73	4.73
$15^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.60	0.20	0.65	0.66	0.48
		0.2	0.63	0.32	0.65	2.23	0.55
		0.3	0.69	0.52	0.70	4.90	0.84
		0.4	0.77	0.76	0.70	7.72	1.51
		0.5	0.95	1.15	0.75	11.53	2.99
		0.6	1.17	1.62	0.79	15.18	5.72
$30^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.60	0.22	0.65	0.62	0.48
		0.2	0.66	0.54	0.75	1.90	0.51
		0.3	0.80	1.10	0.93	3.99	0.71
		0.4	1.09	1.97	1.17	6.77	1.13
		0.5	1.46	3.06	1.49	9.55	2.03
		0.6	2.03	4.33	1.96	12.18	3.86
$45^\circ$	(0.5, 0.5)	0.1	0.60	0.22	0.65	0.55	0.48
		0.2	0.74	0.63	1.03	1.54	0.51
		0.3	1.06	1.40	1.68	3.00	0.58
		0.4	1.55	2.49	2.66	5.01	0.77
		0.5	2.21	3.98	3.87	6.95	1.03
		0.6	3.44	5.82	5.27	8.71	1.80

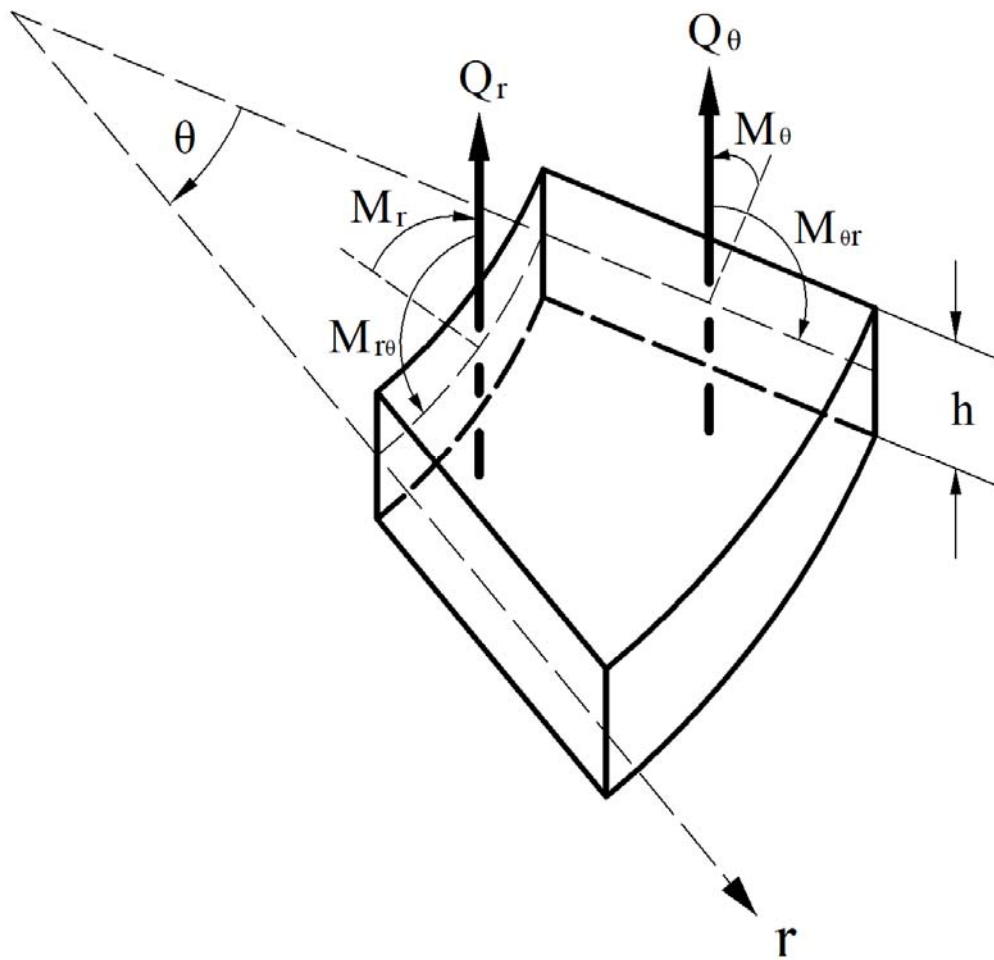


圖 2.1 極座標之應力示意圖



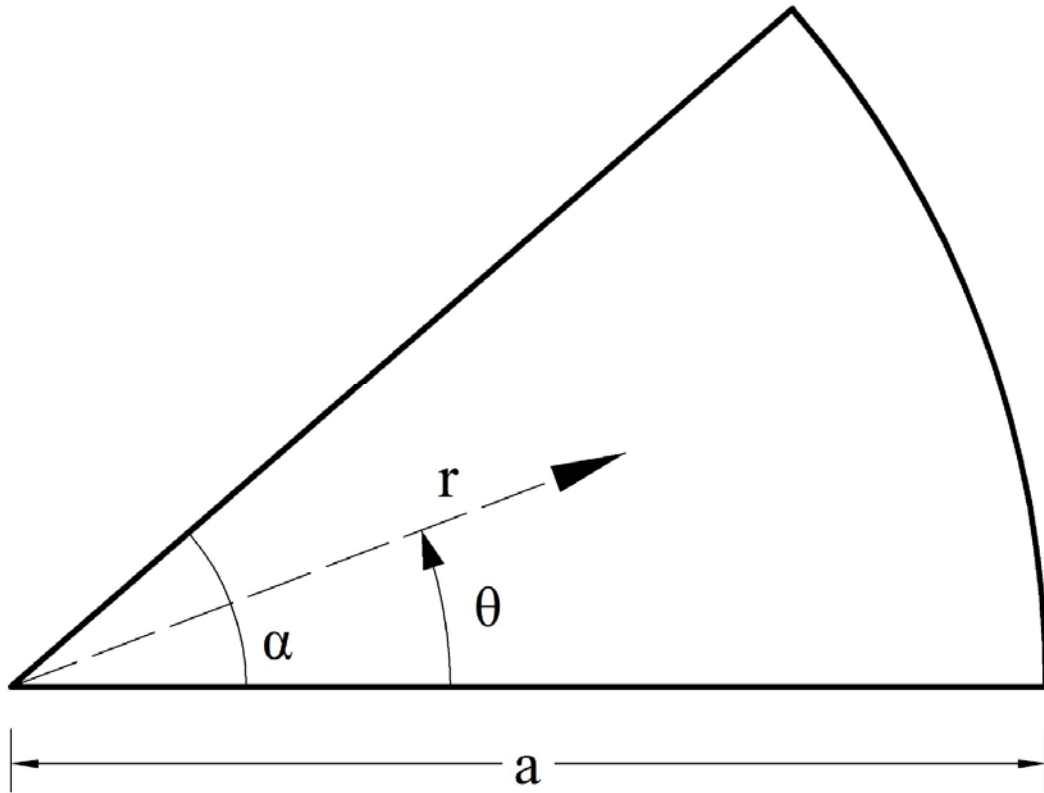


圖 2.2 扇形元素座標系統示意圖

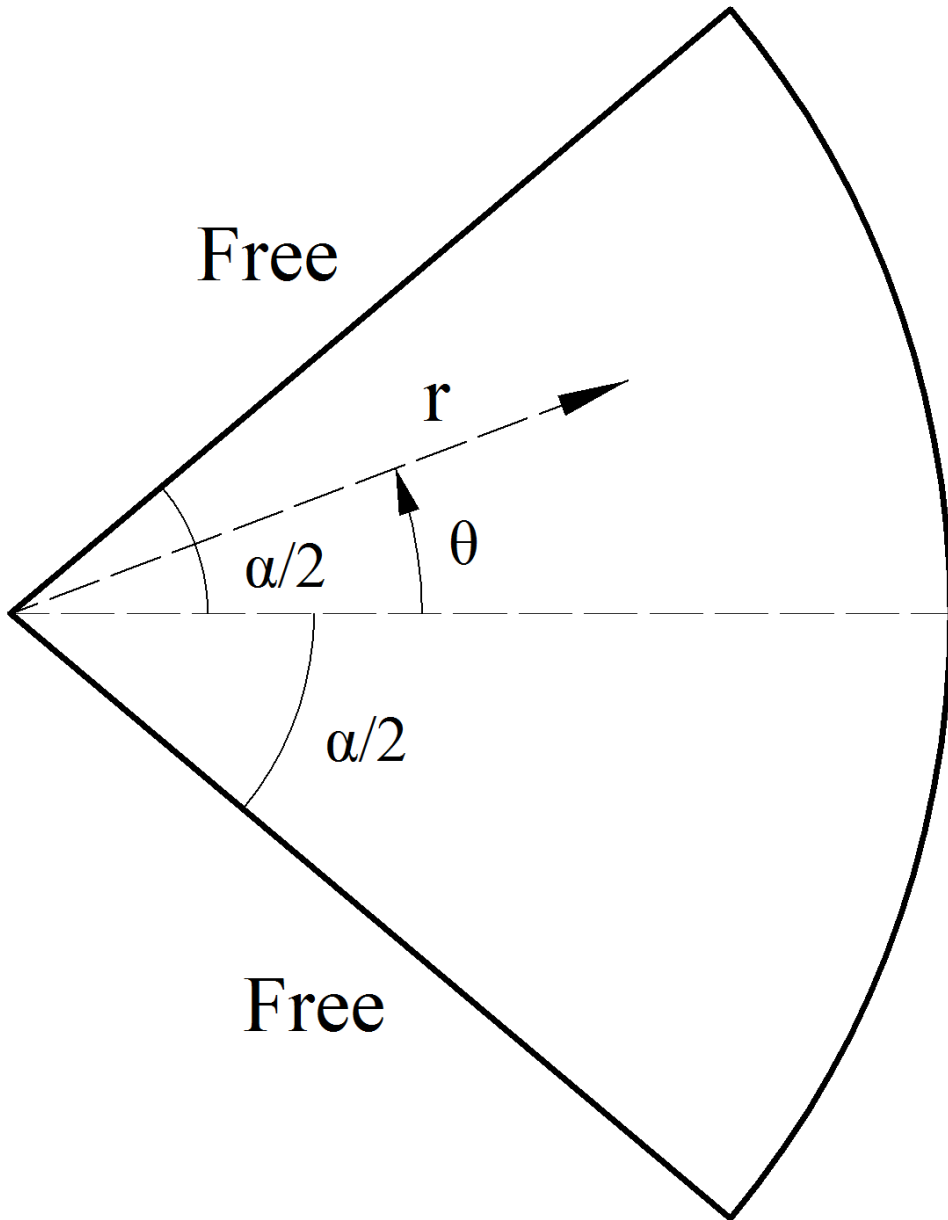


圖 2.3 扇形元素示意圖

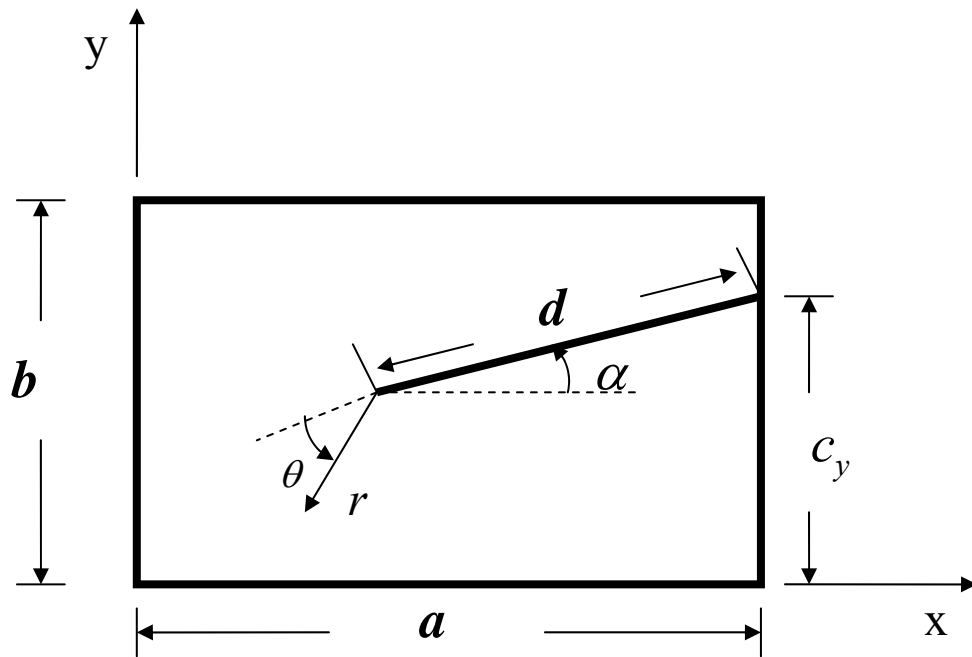


圖 3.1 具邊緣裂縫矩形板示意圖(裂縫與  $x$ =常數軸交接)



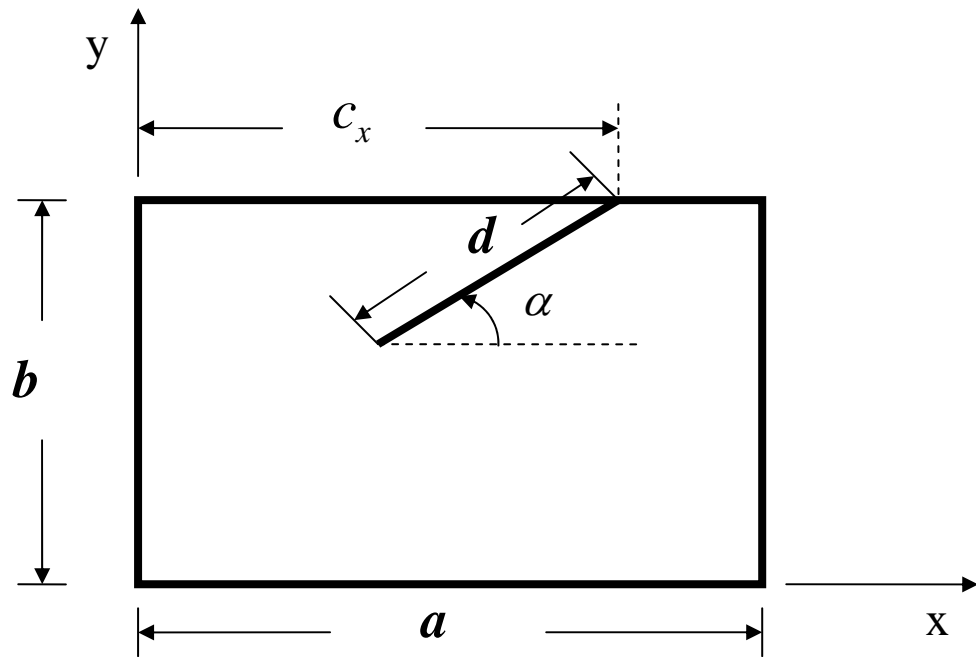


圖 3.2 具邊緣裂縫矩形板示意圖(裂縫與  $y$ =常數軸交接)



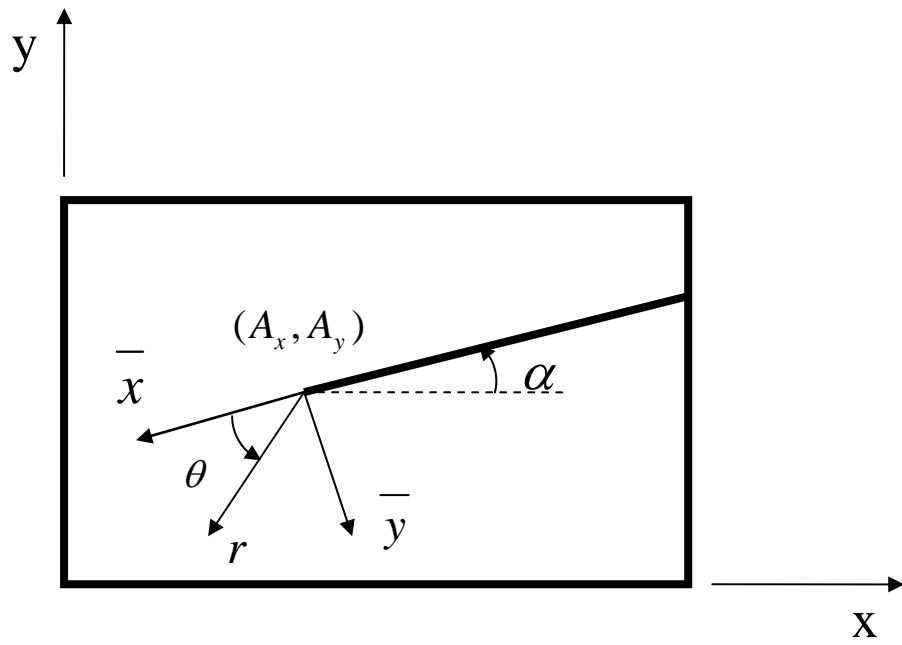


圖 3.3 座標轉換示意圖



$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode No.					
			1	2	3	4	5	
$0^\circ$	0.5	0.2						
		0.5						
	0.75	0.2						
		0.5						
	$15^\circ$	0.75	0.2					
			0.5					
$30^\circ$	0.75	0.2						
		0.5						

圖 3.4 具邊緣裂縫簡支方形板節點線圖

$a/b$	$c_y/b$	$\alpha$	$d/a$	Mode No.				
				1	2	3	4	5
1	0.2	$0^\circ$	0.2					
			0.5					
			0.2					
			0.5					
	0.4		0.2					
			0.5					
			0.2					
			0.5					
	0.5		0.2					
			0.5					
			0.2					
			0.5					
0.75	0.2							
	0.5							
	0.2							
	0.5							

圖 3.5 具邊緣裂縫懸臂方形板節點線圖

$a/b$	$c_y/b$	$\alpha$	$d/a$	Mode No.				
				1	2	3	4	5
1	0.75	15°	0.2					
			0.5					
		30°	0.2					
			0.5					
		45°	0.2					
			0.5					

圖 3.5(續上頁)



$a/b$	$c_y/b$	$\alpha$	$d/a$	Mode No.				
				1	2	3	4	5
2	0.5	$0^\circ$	0.2					
			0.5					



圖 3.5(續上頁)

$a/b$	$\alpha$	$c_x/a$	$d/a$	Mode No.				
				1	2	3	4	5
1	$30^\circ$	0.75	0.2					
			0.5					
	$90^\circ$	0.5	0.2					
			0.5					
2	$90^\circ$	0.5	0.2					
			0.5					

圖 3.6 具頂部裂縫懸臂矩形板節點線圖

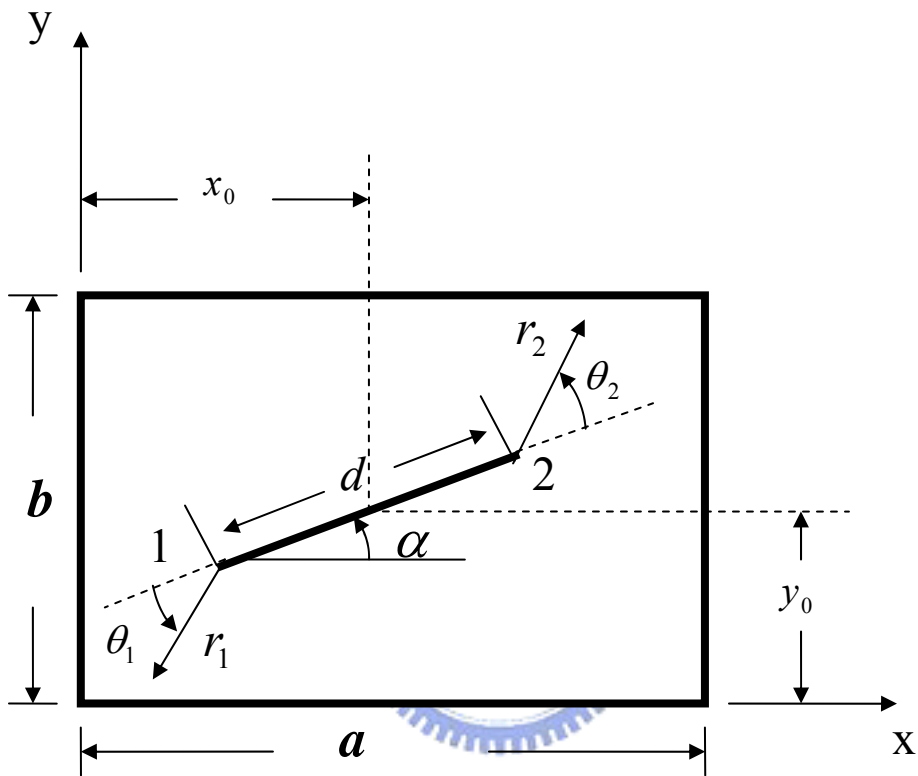


圖 4.1 具內部裂縫之矩形板示意圖( $x_0$  與  $y_0$  為裂縫中心點之座標)

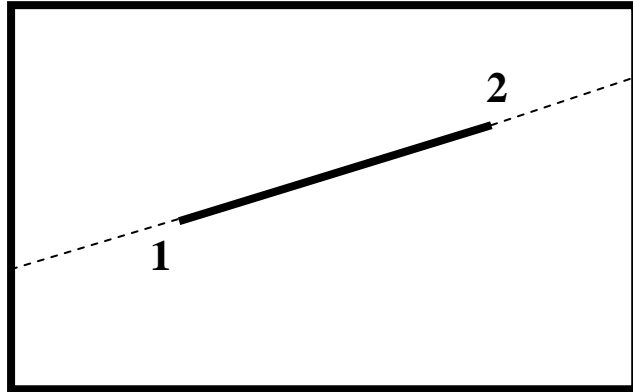


圖 4.2 內部裂縫奇異點與連續線段示意圖



$\alpha$	$x_0/a, y_0/b$	$d/a$	Mode No.				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.2					
	$(0.5, 0.5)$	0.6					
	$(0.5, 0.75)$	0.2					
	$(0.5, 0.75)$	0.6					
$15^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.2					
		0.6					
$45^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.2					
		0.6					

圖 4.3 具內部裂縫簡支方形板節點線圖

$\alpha$	$x_0/a, y_0/b$	$d/a$	Mode No.				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	(0.5,0.5)	0.2					
	(0.5,0.5)	0.6					
	(0.5,0.75)	0.2					
	(0.5,0.75)	0.6					
$15^\circ$	(0.5,0.5)	0.2					
		0.6					
$45^\circ$	(0.5,0.5)	0.2					
		0.6					

圖 4.4 具內部裂縫懸臂方形板節點線圖