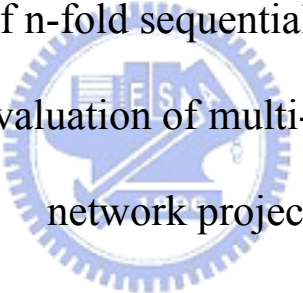


國立交通大學

土木工程學系
碩士論文

多層序列複合買權之平賭解及其在多期污水下水道
系統投資評估之應用

A martingale solution of n-fold sequential compound call options and
its application in the evaluation of multi-phase water and sanitation
network projects



研 究 生：畢佳琪

指導教授：黃玉霖 博士

中 華 民 國 九 十 七 年 七 月

多層序列複合買權之平賭解及其在多期污水下水道系統

投資評估之應用

**A martingale solution of n-fold sequential compound call options and its
application in the evaluation of multi-phase water and sanitation network
projects**

研 究 生：畢佳琪

Student：Chia-Chi Pi

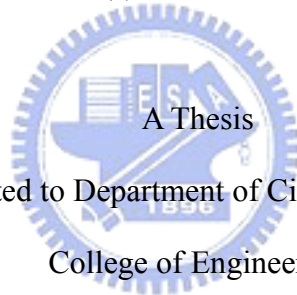
指導教授：黃玉霖

Advisor：Yu-Lin Huang

國 立 交 通 大 學

土木工程學系

碩 士 論 文



Submitted to Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Civil Engineering

July 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月

多層序列複合買權之平賭解及其在多期污水下水道系統

投資評估之應用

研 究 生：畢佳琪

指導教授：黃玉霖 博士

國立交通大學土木工程學系（研究所）碩士班

摘要

分期開發之基礎建設 BOT 案，投資評估相當複雜且富有多變的特性。由於折現現金流量法(Discounted Cash Flow, DCF)無法充分解釋市場不確定性造成的投資風險以及管理風險，所以，若僅以 DCF 法做為專案投資的評估工具，將會低估此類型專案的投資價值。

專案價值的評估，本論文從選擇權的觀點切入，考量了投資風險所造成的影響。假設一個分兩期建設的工程，廠商得標後，假設廠商在得標後即擁有了第一期工程施作的選擇權，同時該廠商也擁有後續各期開發與否的選擇權。執行選擇權，即可進行下一期工程的開發作業；不執行選擇權，即放棄了後續開發的權利，專案後續開發建設的權利歸政府(或業主)所擁有。例如：分二期開發的專案計畫，廠商得標後擁有一個單層選擇權以及一個二層的選擇權。第二期工程的選擇權必須在第一期工程完工後才能決定執行與否。考量分期開發之專案建設獨特的工程特性，考量以序列複合買權評價模型(sequential compound call options pricing model)重新評估專案之投資價值。

利用平賭法(martingale method)，在風險中立的環境下，建立序列複合買權評價模型，作為分期建設專案的財務評估工具。以兩個污水下水道系統分期興建之工程專案作為多期序列複合買權評價模型的應用案例，並且，將評估後之結果加以分析討論。

關鍵詞：序列複合買權評價模型、實質選擇權、BOT、分期專案之鑑價

A martingale solution of n-fold sequential compound call options and its application in the evaluation of multi-phase water and sanitation network projects

Student : Chia-Chi Pi

Advisor : Dr. Yu-Lin Huang

Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Privatized, multi-phase infrastructure projects are complex projects for which the traditional DCF project evaluation method fails to explicitly incorporate the flexibility of investment decision as well as the underlying variables controlling project values. In particular, the rights of concession to build and operate a multi-phase infrastructure project often resemble the rights to a sequential compound call options. First of all, the decision to invest in a later phase of the project is dependent on the success of the former phase. Secondly, and probably more fundamentally, substantial pre-investment is required in the formal phase of the project in order to make the later investment plausible.

In this thesis, a generalized valuation model for n-fold sequential component call/put options is simplified for the evaluation of privatized, multi-phase infrastructure projects. The martingale method developed under a risk-neutral world is employed for the simplification. The derived n-fold sequential component call options have several appealing properties that are suitable for the evaluation of these complex projects. Two real-world, privatized water and sewer network projects are further employed to apply the derived model. The results indicate that the traditional DCF method tends to over-estimate project values vis-à-vis the option approach when market risks are not substantial, but to under-estimate when market risks are substantial.

keywords :

Sequential compound call option pricing model, real option, BOT, Evaluation of multi-phases network projects

誌謝

本篇論文之撰寫能順利完成，首先，感謝我的指導老師，黃玉霖老師，提供了營建管理的專業知識以及在孜孜不倦的教誨。同時，也感謝李孟育老師在序列複合選擇權評價模型理論及公式推導上的協助。還有，感謝這兩年來陪伴我成長的同學及師長，交通大學土木工程所營建管理組的 王維志老師、曾仁杰老師、黃世昌老師，以及土木營管 95 級的所有同學。

感謝這些年來在經濟上贊助我、支撐我，我最親愛的家人們。在研究過程遇到瓶頸時，感謝家人、胖胖、同學及師長的陪伴、鼓勵及支持。千言萬語也道不盡的感謝，由衷地感謝大家這兩年的幫忙。我，終於不負大家的期望，完成論文了！

最後，也是最重要的，感謝我自己的努力。在論文的撰寫上能夠盡心盡力，在此也期盼並且期勉自己能以此碩士論文撰寫的學習以及教育訓練的過程，作為未來的人生旅途中的借鏡及動力。努力不懈，堅持到最後。在辛苦耕種後，最終能品嚐豐收的果實！



目錄

摘要	I
Abstract	II
誌謝	III
目錄	IV
圖目錄	VI
表目錄	VII
第1章 緒論	1
1.1 研究背景與動機	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究方法與流程	3
1.4 研究架構	5
第2章 文獻回顧及探討	6
2.1 選擇權之概念說明	6
2.2 實質選擇權	8
2.3 Black-Scholes 評價模型	10
2.4 二層複合選擇權	12
2.5 多期序列複合選擇權	14
2.6 小結	16
第3章 選擇權評價模型建立	17
3.1 平賭法	17
3.2 選擇權評價模型(單層)	18
3.3 複合選擇權評價模型(二層)	22
3.4 複合選擇權評價模型(三層)	29
3.5 複合選擇權評價模型(四層)	40
第4章 多期序列複合選擇權評價模型	54
4.1 n 層序列複合選擇權評價模型	54
4.2 $(n+1)$ 層序列複合選擇權	58

第5章 案例分析	64
5.1 案例(一)	64
5.1.1 興建計畫	64
5.1.2 基本假設	65
5.1.3 工程成本估算	67
5.1.4 營運費用假設	71
5.1.5 營運收入假設	75
5.1.6 序列複合選擇權分析	77
5.1.7 評估結果比較與取值之情境分析	81
5.1.8 小結	84
5.2 案例(二)	88
5.2.1 興建計畫	88
5.2.2 基本假設	89
5.2.3 工程成本估算	91
5.2.4 營運費用假設	94
5.2.5 營運收入假設	97
5.2.6 序列複合選擇權分析	99
5.2.7 評估結果比較與取值之情境分析	105
5.2.8 小結	108
第6章 結論與建議	112
6.1 結論	112
6.2 建議	112
參考文獻	113
附件一 政府公債利率	115
附件二 公共事業指數	116
附件三 案例(一)總成本及收入折現計算	118
附件四 案例(二)總成本及收入折現計算	119

圖目錄

圖 1-1 研究流程	4
圖 2-1 買進買權	6
圖 2-2 買進賣權	6
圖 2-3 賣出買權	7
圖 2-4 賣出賣權	7
圖 3-1 單層選擇權	18
圖 3-2 二層序列複合選擇權	22
圖 3-3 三層序列複合選擇權	29
圖 3-4 四層序列複合選擇權	40
圖 4-1 多層序列複合選擇權	56
圖 5-1 案例一之分期建設成本配置	78
圖 5-2 案例一之序列複合選擇權分析	79
圖 5-3 計畫價值評估結果之比較(sigma 取值的影響)	82
圖 5-4 計畫價值評估結果之比較 (無風險利率之取值影響)	83
圖 5-5 計畫價值評估結果之比較 (污水處理費率之取值影響)	84
圖 5-6 案例二之分期建設成本配置	101
圖 5-7 案例二之序列複合選擇權分析	102
圖 5-8 計畫價值評估結果之比較(sigma 取值的影響)	106
圖 5-9 計畫價值評估結果之比較 (無風險利率之取值影響)	107
圖 5-10 計畫價值評估結果之比較 (污水處理費率之取值影響)	108

表目錄

表 2-1 實質選擇權分類一覽表	9
表 2-2 選擇權的評價模型比較	16
表 5-1 施工時程彙總表	64
表 5-2 總體建設工程規劃時程	64
表 5-3 污水處理廠興建成本	67
表 5-4 管網系統建設成本	68
表 5-5 各年之工程總興建成本	68
表 5-6 各項工程之折舊及重置年期	68
表 5-7 分期建設費用折舊攤提	69
表 5-7 分期建設費用之折舊攤提(續)	70
表 5-8 污水廠人事費用概估	71
表 5-9 分年操作維護費用	74
表 5-10 預計之各年度污水處理量	75
表 5-11 預計污水處理費	75
表 5-12 預期之分期營運收入	76
表 5-13 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果	85
表 5-13 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)	86
表 5-13 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)	87
表 5-14 永康系統施工時程彙總表	88
表 5-15 永康系統總體建設工程規劃時程	88
表 5-16 污水處理廠興建成本	91
表 5-17 管線工程之分年建設成本	92
表 5-18 各年之工程總興建成本	92
表 5-19 各項工程之折舊及重置年期	92
表 5-20 分期建設費用折舊攤提表	93
表 5-21 污水廠人事費用概估	94
表 5-22 分年操作維護費用	96
表 5-23 預計之各年度污水處理量	97
表 5-24 預計污水處理費	97
表 5-25 預期之分期營運收入	98
表 5-26 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果	109
表 5-26 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)	110
表 5-26 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)	111

第1章 緒論

1.1 研究背景與動機

分期開發的公共建設以 BOT 方式興建，由民間的企業出資、規劃、建造、並在合約明定的特許期間內營運獲得利潤，最後在特許期間終止後，該項公共建設轉移交由政府做後續的營運。優點在於可減輕政府的財政負擔、改善公共建設的工程品質並且使國家的經濟得以快速發展。但是，由於投資環境容易隨時間變遷，對於特許期間往往長達 30 年的 BOT 投資計畫，投資者無法完善的評估、考量這種不確定性造成的風險。

在財務評估階段，實務上皆使用折現現金流量法(discounted cash flow, DCF)作為 BOT 專案的投資與否財務評估工具。但是，針對此類型高風險投資計畫，投資者會將計畫的期望報酬率提高以保證能夠獲利。如此，經過折現後的專案其實際價值將由被低估的疑慮。再加上，傳統 DCF 評估方法在專案價值的評估上不具有可變動的彈性，一旦未來投資環境出現變化，原先的財務評估即失去真實性。所以，BOT 建設專案之投資計畫，若僅使用 DCF 財務評估方法，並不能完整表達專案的實際價值。

針對計畫的風險評估問題，假使從選擇權的觀點評估專案計畫的價值，選擇權給予專案投資者投資的彈性，考量投資環境不確定而造成的風險，似乎能較為適宜的解決專案價值的評估問題。不同於傳統的財務性商品，如：股票、期貨、期貨指數...等，運用於公共建設開發上的選擇權評價方法，標的物為實質的資產，此類型的選擇權即稱為實質選擇權(real option)。

近年來，政府為了不造成公用資源的浪費，公共建設了考量供給及需求平衡，將基礎建設的投資計畫分為數個階段進行開發。針對分期開發的基礎建設專案，投資者在進行投資評估時，會於第一期工程結束並且開始營運後評估下一期工程是否要繼續投資。並且，分期興建之建設專案，如污水下水道系統分期興建計畫，投資者在進行前期工程規劃及施工時，會考量後續各期工程投資的可能性，所以會規劃更多的建設成本給前期工程使用，以利後續工程建設之順利進行。所以，第一期工程的興建成本將包含了後續各期之工程經費。由於分期開發之建設專案具有獨特的工程特性，針對這類型計畫之價值評估，在考量投資風險的情況下，從選擇權的角度進行專案價值評估時，序列複合選擇權評價模型或許是較為適當的評估工具。

假設分期開發之專案投資計畫，假設廠商在得標後即擁有了第一期工程施作的選擇權，同時該廠商也擁有後續各期開發與否的選擇權。執行選擇權，即可進行下一期工程的開發作業；不執行選擇權，即放棄了後續開發的權利，專案後續開發建設的權利歸政府(或業主)所擁有。例如：分二期開發的專案計畫，廠商得標後擁有一個單層選擇權以及一個二層的選擇權。第二期工程的選擇權必須在第一期工程完工後才能決定執行與否。同理，一個分三期開發的公共投資計畫，廠商得標後於籌備階段可評估並選擇是否要進

行第一期工程的施作，此時也擁有第二期與第三期開發與否的選擇權。其中，第二期工程的選擇權需要第一期工程完成後才能執行，第三期工程的選擇權必須第二期工程完成後才能執行。換言之，分三期開發的工程，第一期工程為一個單層選擇權，第二期工程為一個二層的選擇權，第三期工程為一個三層的選擇權。分期工程的選擇權價值經由加總後，可以得到整體專案之總投資價值。

本研究之重點在於解決分期開發的專案計畫於財務評估的問題。首先，推導、整理並建立一個適用於本研究之多期序列複合買權評價模型(n-fold sequential compound call options pricing model)，再利用兩個污水下水道分期興建之實際案例的相關數據，經由序列複合買權評價模型，將分期開發之專案計畫的投資價值重新評估。並且，利用傳統淨現值法、單一選擇權評價法以及序列複合選擇權等三種不同的價值評估方法，將案例計畫的投資價值進行評價結果的比較、分析與整理。由於選擇權比傳統 DCF 投資評估更具彈性、風險管理較為容易的特性，本研究論文期望分期開發之專案計畫經由序列複合選擇權評價模型重新評估後，整體專案的投資價值能夠有所提升。

1.2 研究目的

本研究的目的是為推導多期序列複合買權(n-fold sequential compound call options)評價模型，作為分期開發之基礎建設專案的財務評估工具。從 Black-Scholes 選擇權評價模型的概念出發，完成基本模型的參數設定。以 Geske 的複合選擇權觀點切入，參考 Fatma Lajeri-Chaherli(2002)之兩層複合買權評價模型，以平賭法(martingale method)推導序列複合選擇權。將兩層之複合選擇權的評價模型一般化，參數可以隨時間不同而做調整，並非是固定之值。隨之，推導三層、四層的多期序列複合選擇權評價模型，歸納出序列複合選擇權在建構上，層與層之間的特性。利用數學歸納法求證多期序列複合選擇權的評價模型。

以汙水下水道工程分期興建專案作為多期序列複合選擇權評價模型的使用說明案例。整理專案開發計畫書中的相關數據，將數據套用到此評價模型運算並將運算結果加以評估分析，期望分析的結果能夠證實多期複合選擇權評價模型的適用性。

1.3 研究方法與流程

本研究主要的研究步驟流程如圖 1-1 所示。研究方法說明如下：

1. 問題分析

研究重點在於利用複合選擇權的概念，評估多期 BOT 公共建設投資計畫。

2. 文獻蒐集及探討

蒐集並研讀選擇權的相關的書籍、期刊文章及學說論述，由簡入深的方式了解 Black-Scholes 的選擇權評估模型、實質選擇權理論、複合選擇權模型推導、多期複合選擇權的評價模型理論。

3. 序列複合買權評價模型建立

從 Black-Scholes 選擇權評價模型的概念出發，完成基本模型的參數設定。以 Geske(1979)的兩層複合選擇權觀點切入，參考 Fatma Lajeri-Chaherli(2002)之兩層複合買權評價模型，利用平賭法(martingale method)推導評價模型。將評價模型中的利率、折舊率及資產變異數一般化，即可以隨時間不同而做調整。隨之，推導三層、四層的多期序列複合選擇權評價模型，歸納出多期序列複合選擇權層與層之間的特性。最後，利用數學歸納法求證多期序列複合選擇權的評價模型。

4. 案例之應用分析

使用污水下水道系統分期興建工程的財務評估資料，作為多期序列複合買權評價模型的使用說明案例。

5. 結論與建議

對於多期序列複合買權評價模型推導及案例應用上的成果進行分析及討論。

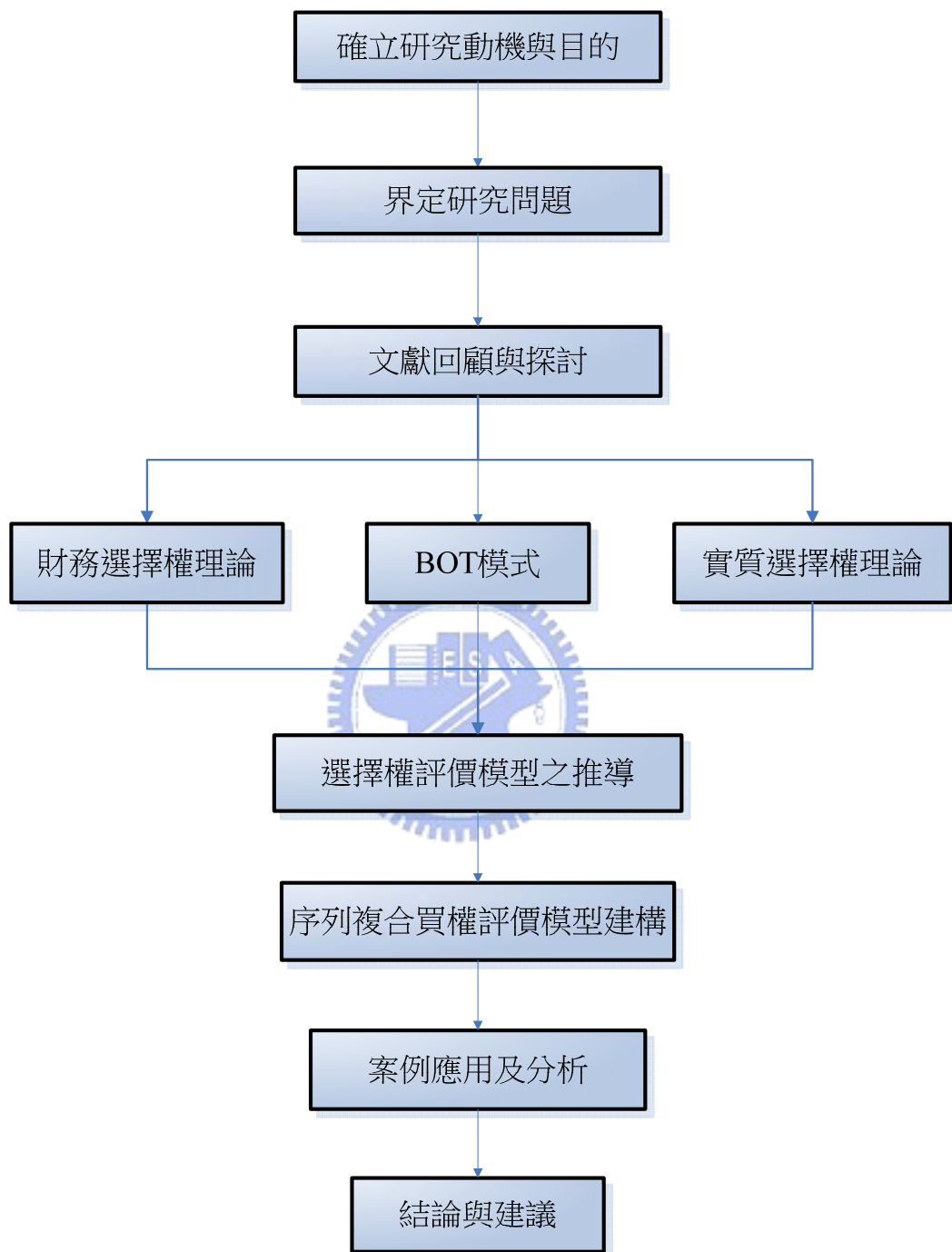


圖 1-1 研究流程

1.4 研究架構

本研究論文共分為六個章節，各章內容敘述如下：

1. 緒論

說明研究的背景及動機、研究目的、研究流程與研究架構。

2. 文獻回顧及探討

回顧選擇權之相關文獻，包含財務選擇權以及實質選擇權。分析、彙整所有選擇權評價模型建構之相關文獻，作為第三章選擇權評價模型推導及建構的參考文獻。後續，第四章之序列複合選擇權評價模型的推導過程也參考了此章文獻的推導方法。

3. 選擇權評價模型建立

以 Black-Scholes(1973)單層選擇權評價模型作為序列複合買權評價模型建構的基礎，將評價模型中的利率(r)、股利率(q)及資產報酬率之變異數(σ^2)等參數進行一般化。將 Geske(1979)的複合選擇權評價模型進行一般化，利用平賭法(martingale method)推導出二層複合選擇權評價模型。隨之，推導三層、四層的多期序列複合選擇權評價模型。

4. 多期序列複合選擇權評價模型

將第三章各層選擇權建構過程加以分析並整理出各層參數之相關性。利用數學歸納法，推導出多期序列複合買權評價模型。

5. 案例分析

以汙水下水道系統 BOT 分期興建之專案計畫，作為本研究評價模型的應用案例。並且，比較淨現值法、單一選擇權評價法以及序列複合買權評價法之計畫價值差異，進行各評價法之結果分析。

6. 結論與建議

針對多期序列複合買權評價模型應用於分期建設之 BOT 專案計畫的投資評估結果，提出結論與建議。

第2章 文獻回顧及探討

本章回顧選擇權之相關文獻，包含財務選擇權以及實質選擇權。分析、彙整所有選擇權評價模型建構之相關文獻，作為第三章選擇權評價模型推導及建構的參考文獻。後續，第四章之序列複合選擇權評價模型的推導過程也參考了此章文獻的推導方法。

2.1 選擇權之概念說明

選擇權(options)有兩種基本型式：買權(call option)及賣權(put option)。買權給予契約的持有人在特定時間以特定價格購入特定標的資產的權利；賣權給予契約持有人在特定時間以特定價格賣出特定標的資產的權利。特定價格此指的是履約價格或稱執行價格(exercise price)，契約的特定時間即為契約的到期日(maturity date)。歐式買、賣權的行使僅發生在契約約定之到期日，美式買、賣權即可選定在契約到期前之任何時點執行該權利。選擇權是給予持有者有買入或賣出標的資產的權利，而不是義務。每一個選擇權契約都有兩方：買入選擇權的投資人及賣出選擇權的投資人。所以產生了四種選擇權的部位(options positions)：

(1) 買進買權

買進買權的損益為： $\max(S_T - K, 0)$

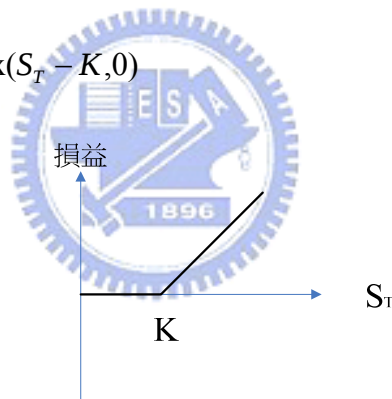


圖 2-1 買進買權

(2) 買進賣權

買進賣權的損益為： $\max(K - S_T, 0)$

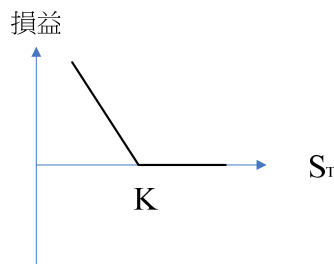


圖 2-2 買進賣權

(3) 賣出買權

賣出買權的損益為： $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$

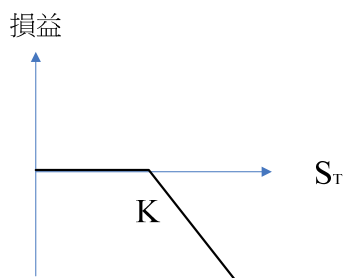


圖 2-3 賣出買權

(4) 賣出賣權

賣出賣權的損益為： $-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$

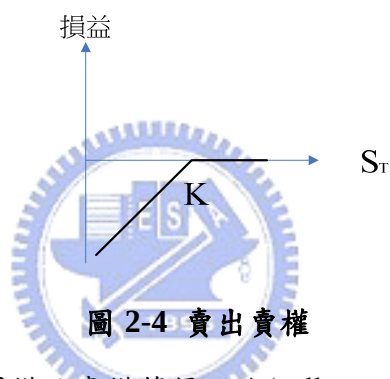


圖 2-4 賣出賣權

選擇權的買賣必須符合買權及賣權等價理論(call-put parity)，否則會出現套利的情況。意即對於相同標的資產、同一履約價格及到期日的買權及賣權而言，任意時點的買權及賣權價格等同其當時的股價減去履約價格的當時現值。此理論的公式由美國的財務學家 Stoll 在 1969 年提出¹：

$$C + K^{-rT} = S_0 + P$$

其中，

C 為一歐式買權

K^{-rT} 為履約價格的折現值

S_0 為一股現股

P 為一歐式賣權

¹ 節錄並引用自選擇權、期貨與其他衍生性商品

2.2 實質選擇權

財務選擇權的標的資產(underlying asset)主要是股票、股票指數、期貨及外幣契約；實質選擇權(real option)的標的資產為實質資產。

實質選擇權是指存在實質資產投資計畫中，該計畫本身具有選擇權性質，即買方有權於未來某一時點以特定的價格買入或賣出該實質資產的投資計畫。相較於傳統的投資評估方法，實質選擇權具有管理上的彈性(managerial flexibility)，即經營者可依市場的情況調整並修正投資的計畫，以追求投資上的最大利潤。例如：公共建設的 BOT 投資計畫在財務評估上，往往需預計未來長達 30 年的現金流量。市場出現波動時，如：物料上漲、通貨膨脹上升…等未知變數，如果使用具有管理彈性的實質選擇權，在市場投資環境不佳時，投資者可選擇延後投資或不投資；在市場投資環境良好時，提前履行投資的契約。此種投資上的選擇權利限制了投資的下方風險(downside risk)，降低投資者虧損的風險，如此也可提升投資者對於高風險專案的投資意願。

此種資產投資上的選擇權利，可視為投資者買了一個買權，標的物為投資計畫，履約價格為投資計畫的總成本，特許期間或權利期間 (maturity period)則為該計畫可以延遲的時間。

Trigeorgis 於 1996 年出版之”Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation”一書中，將實質選擇權依照其提供投資的彈性型態加以分類如表 2-1 所示：



選擇權類型	特徵描述	適用範圍
Option to defer 遞延選擇權	管理者擁有一有價土地或資源的租約；可以等待 x 年，直到產出價值及生產成本達某一比例才開發或興建。	自然資源輸出產業、不動產開發、農業及造紙產業
Time-to-build option 延續性投資選擇權	分階段的投資產生連續性的花費支出，當新訊息不佳時，則考慮放棄現已進行的投資計畫。每一期的選擇權價值視為前幾期的複合選擇權的價值。	R&D 密集產業、製藥產業、長期開發的資本密集計畫(如：大規模建設或能源發電廠)、具冒險性質的開發
Option to alter operating scale 改變營運規模選擇權	如果市場條件比預期理想，公司可以擴張期生產的規模或加速資源的運用；如果市場條件不如預期，則可縮小營運規模，極可能的情況下，生產可能被終止或拒絕。	自然資源產業(如：礦業)、週期性設備規劃及建設產業、流行服飾、消費財、商業大樓
Option to abandon 放棄選擇權	若市場條件劇烈下降，管理者可永久放棄現有的營運，將資本設備及其他資產於二手市場變賣求現。	資本密集產業(如：航空、鐵路)、金融服務、在不確定的市場推出新產品
Option to switch 轉換選擇權	若價格或需求改變，管理者可藉由設備的混合改變產出(生產的彈性)；或藉由不同型態的輸入從事生產(生產過程的彈性)	輸出替換：任何小規模或需求易變的產品(如：消費性電子產品)、玩具、機械零件、特殊紙類、汽車 輸入替換：依賴原料的設備(如：電力、化學產品、作物交換、原料)
Growth option 成長選擇權	早期投資(如：R&D、開發土地或石油保留的合約、策略取得、資訊網絡)為先決條件或連結彼此有交互關係的計畫鏈，開發未來成長的機會(如：新產品或製造方法、石油儲存、進入新市場、核心能力的增加)如同計畫之間的複合選擇權。	基礎建設或策略產業，尤其是高科技、R&D 及多種產品的生產(如：電腦、製藥)、策略的獲得。
Multiple interacting options 多重交互影響選擇權	實際生活上的計畫通常包含著不同的選擇權，	上述所提之選擇權方法皆可能在現實生活中發生

表 2-1 實質選擇權分類一覽表

資料來源：

Trigeorgis L., "Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation", Cambridge, Mass. MIT Press, 1996.

2.3 Black-Scholes 評價模型

1973 年 Fisher Black 及 Myron Scholes 提出單層的選擇權評價模型。在股票選擇權的定價上，Black-Scholes 的模型對於選擇權的評價及避險工作有重大的影響。隨後，Merton 將 Black&Scholes 的選擇權評價模型進行延伸，考慮支付現金股息之標的股票的選擇權評價模型。選擇權評價模型的推導過程為：

建立一個包含衍生性商品及股票的無風險投資組合，在無套利機會的情況下，投資組合的報酬等於無風險利率(risk-free rate)，即可利用偏微分方程式導出該評價模型。其中，Black-Scholes 評價模型所需的假設條件列舉如下：

1. 股票價格遵循幾何布朗運動(geometric Brownian motion)，其平均值(μ)及標準差(σ)為常數。
2. 賣空證券的收入可全部使用
3. 沒有交易的成本及稅，所有的證券可完權分割
4. 衍生性商品的契約期間內，沒有發放現金股利
5. 無風險的套利機會不存在
6. 證券的交易是連續的
7. 無風險利率 r 為常數，且在到期日前都維持不變

將 Black-Scholes 的評價模型進行一般化修正，將各時間點的利率(r)、股利率(q)以及資產報酬率之變異數(σ^2)設定為可隨時間變動的參數，並非定值。歐式買權價格的評價模型修正結果如下²：

$$C_1(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^T q(u) du} N(g_{1,1}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^T r(u) du} N(h_{1,1})$$

其中，

$C_1(V, t_0)$	歐式買權之期初價值
V_0	資產在期初(t_0)的價值
K_1	履約價格
σ^2	資產報酬率之變異數
r	連續複利之無風險利率

² 詳細證明於本論文第三章

$N(\cdot)$ 標準常態分配之累積分佈函數

評價模型中 g 及 h 所代表的值可以公式表示為

$$g_{1,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_1}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}; \quad h_{1,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_1}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}$$



2.4 二層複合選擇權

複合選擇權(compound option)不同於傳統的選擇權，被視為新奇選擇權(exotic option)的一種。複合選擇權是選擇權的選擇權，主要有四種：買權的買權，買權的賣權，賣權的買權及賣權的賣權。相對於傳統選擇權的一個履約價格、一個到期日的模式，複合選擇權有兩個履約價格以及兩個到期日。

以買權的買權舉例而言，在第一個到期日 t_1 ，持有者可支付第一個履約價格 K_1 再擁有一個買權，此買權可於第二個到期日 t_2 以第二個履約價格 K_2 購買標的資產。只有在第一個到期日以第一個履約價格執行第一個買權時，即當時的選擇權價值高於履約價格，複合選擇權才會有被執行的機會。

Geske 最早於 1979 年提出二層複合選擇權的評價模型，將另一個選擇權視為選擇權的標的資產。推導過程，利用傳統偏微分方程式求得複合選擇權評價模型。後續，Fatma Lajeri-Chaherli(2002)利用平賭法(martingale method)在風險中立(risk-neutral)的情況下，折現未來期望現金流量，推導出二層複合選擇權評價模型。Fatma Lajeri-Chaherli 利用平賭法推導出的複合選擇權評價模型與 Geske 的評價模型具有相同的結果。但是，利用平賭法推導選擇權評價模型，推導的過程比傳統偏微分法更為簡單易懂。後續，Agliardi E. & Agliardi R. (2003) 提出一般化的二層複合選擇權評價公式，將各時間點的利率 (r)、股利率 (q) 及資產報酬率的變異數 (σ^2) 設定為可隨時間變動的參數，而非定值。複合選擇權一般化後的評價模型公式如下³：

$$C_2(V, t_0) = V_0 e^{-\int_0^{t_2} q(u) du} N_2(g_{2,1}, g_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_2 e^{-\int_0^{t_2} r(u) du} N_2(h_{2,1}, h_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} N_1(h_{2,1})$$

評價模型各參數的說明如下：

$C_2(V, t_0)$	複合選擇權 C_2 在期初的價值
V_0	標的資產的現值
$\bar{V}_{1,2}$	$C_2(V, t_1) = K_1$ 時的資產價值 V
t_1	複合選擇權 C_2 的到期日
t_2	標的買權 C_1 的到期日
K_1	複合買權 C_2 的履約價格，邊界條件為 $C_2(V, t_1) = \max(0, C_1(V, t_1) - K_1)$
K_2	標的買權的履約價格，邊界條件為 $C_1(V, t_2) = \max(0, V - K_2)$
r	無風險利率
q	股利率
σ^2	資產的瞬間報酬變異數
$\rho_{1,2}$	兩變數間的相關係數

³ 證明過程於本論文第三章

$N_1(\cdot)$	累積常態分配函數
$N_2(\cdot)$	二變數累積常態分配函數

評價模型中的代號 g 及 h 所代表的值：

$$g_{2,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,2}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}} = h_{2,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$$

$$g_{2,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_2}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = h_{2,2} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}$$

$$h_{2,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,2}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}$$

$$h_{2,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_2}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}}$$



2.5 多期序列複合選擇權

多期序列複合選擇權(n-fold sequential compound options, SCO)評價模型，最早由 Thomassen 及 Van Wouwe 於 2001 年共同提出。Thomassen&Van Wouwe 的多期序列複合選擇權評價模型，延續 Geske 以傳統偏微分的推導方式，利用數學歸納法推導出多期序列複合選擇權評價模型。

Agliardi E.及 Agliardi R.兩位學者於 2005 年發表的文獻中，利用平賭法(martingale method)推導出多期序列複合選擇權評價模型。不同於 Thomassen 及 Van Wouwe(2001)的評價模型，Agliardi E.及 Agliardi R.(2005)將評價模型中的參數進行一般化，將無風險利率(r)及資產的變異數(σ^2)設定為可隨時間變動的參數。可惜，Agliardi E.及 Agliardi R.(2005)文中並未詳細描述及說明序列複合選擇權的推導過程，所以無法直接看出評價模型各層之間的關係。在相關係數的設定上也較疏於嚴謹，使得該評價模型的推導過程缺乏完整性，無法直接使用此評價模型做為本研究問題之評價模型工具。

2008 年 M.Y. Lee、 F.B. Yeh 及 A.P. Chen 三位學者共同發表的序列複合選擇權一般化評價模型，考慮買權與賣權可同時存在不同的時間區間，在評價模型的設定上較為完整。但是，同時考慮了買/賣權變換的評價模型，作為本研究多期開發之建設專案的財務評估工具，在使用上又略顯複雜。

回顧多期序列複合選擇權的相關期刊文獻，各篇文獻皆是利用數學歸納法完成評價模型的推導。利用了 Black & Scholes 的單層選擇權評價模型成立，以及 Geske 的二層複合選擇權評價模型亦成立的條件下，在假設 n 層選擇權評價模型亦成立的情況下，推導了 $n+1$ 層的評價模型公式使其也等同 n 層的假設情況，最終完成了多期序列複合選擇權評價模型的推導。但是，上述文獻皆缺乏詳細敘述第二層到第三層、第三層到的四層...各層相關的變化，導致 n 期評價模型公式的假設過程並無法明確得知，造成後續在應用上會有困難。

所以，綜合上述各文獻中序列複合選擇權的評價模型，本論文在序列複合選擇權評價模型的推導上，將評價模型中的參數進行一般化，無風險利率(r)、股利率(q)及資產報酬率的變異數(σ^2)等參數，在應用上皆可以隨時間變動而進行調整。最終，推導出之序列複合選擇權評價模型⁴可表示如下：

$$C_n(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_n} q(u) du} N_n \{ [g_{n,i}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j}]_{n \times n} \} - \sum_{m=1}^n e^{-\int_{t_0}^{t_m} r(u) du} K_m N_m \{ [h_{n,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m} \}$$

各符號說明如下：

⁴詳細的推導及證明過程請參照第四章

$C_n(V, t_0)$	n 層序列複合選擇權於期初的價值
V_0	標的資產的現值
K_m	履約價格
r	無風險利率
q	股利率
σ^2	資產的瞬間報酬變異數
$\rho_{i,j}$	變數之間的相關係數
$N_n(\cdot)$	多變數累積常態分配函數

其中，

$$g_{n,i} = \frac{\ln(\frac{V_0}{\bar{V}_{i,n}}) + \int_0^{t_i} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i \leq n$$

$$h_{n,i} = \frac{\ln(\frac{V_0}{\bar{V}_{i,n}}) + \int_0^{t_i} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\bar{V}_{i,n} = \begin{cases} K_n & ; \text{在 } i = n \text{ 時} \\ \text{存在 } C_{n-i}(V, t_i) - K_i = 0 \text{ 成立時的資產價值, } & \forall 1 \leq i < n \end{cases}$$

$$\text{相關係數 } \rho_{i,j} = 1 \quad , i = j \text{ 成立時}; \rho_{i,j} = \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i < j \leq n$$

而且，相關係數的矩陣為對稱式矩陣。即 $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$

2.6 小結

選擇權評價模型的發展過程以及各文獻之相關內容整理，如下表 2-2 所示：

文獻作者	層數	方法	買權/賣權	參數一般化*	備註
Black and Scholes, 1973	1	偏微分	買權	無	
Geske, 1977	2	偏微分	買權/賣權	無	
Agliardi and Agliardi, 2003	2	偏微分	買權	有	
Chen, 2002	2	平賭法	買權/賣權	無	
Fatma Lajeri-Chaherli, 2002	2	平賭法	買權/賣權	無	
Thomassen and Van Wouwe, 2001	多層	偏微分	買權	無	
Agliardi and Agliardi, 2005	多層	平賭法	買權	有	推導過程不嚴謹
M.Y. Lee, F.B. Yeh and A.P. Chen, 2008	多層	平賭法	買權/賣權	有	評價模型複雜

表 2-2 選擇權的評價模型比較

* 一般化的參數包含：利率、折舊率、資產變異數

資料來源：整理自 M.Y. Lee, F.B. Yeh and A.P. Chen, 2008

本論文考量投資風險的影響，針對分期開發之基礎建設，在財務評估方面以多期序列複合買權重新評估專案的總體投資價值。針對此研究問題，上述文獻的選擇權評價模型皆無法直接使用。後續，參考上述文獻中評價模型的建構及推導方式，利用平賭法，以連續買權的模式，經由完整詳細的推導，建構一個適用於本研究問題的一般化多期序列複合買權評價模型。

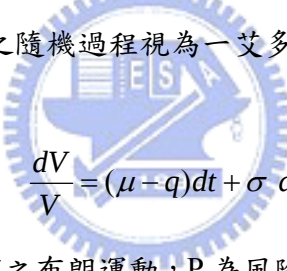
第3章 選擇權評價模型建立

序列複合買權評價模型(sequential compound call options pricing model, SCO)推導的過程。從 Black-Scholes(1973)單層的選擇權評價模型的概念出發，完成基本模型的參數設定。以 Geske(1979)的兩層複合選擇權觀點切入，參考 Fatma Lajeri-Chaherli(2002)之兩層複合買權評價模型，利用平賭法(martingale method)推導評價模型。將評價模型中的利率(r)、股利率(q)及資產報酬率的變異數(σ^2)進行一般化。隨之，推導三層、四層的多期序列複合選擇權評價模型，藉以找尋多期的選擇權評價模型之建構特性。

3.1 平賭法⁵

利用傳統的偏微分法進行評價模型的求解，過程繁複且困難。在很多情況下甚至無法求得封閉解。Cox 及 Ross(1976)與 Harrison 及 Kreps(1979)介紹另一種求解衍生性商品的評價方法，稱之為平賭法(martingale pricing method)。利用平賭法，衍生性商品的價格可經由折現該衍生性商品之未來期望現金流量求得，且期望值的折現可在風險中立下進行。並且，平賭法在推導的過程中不會涉及複雜的積分。

在風險中立下，資產價格之隨機過程視為一艾多過程(Ito process)。標的資產支付連續股息率(q)。可以表示如下：


$$\frac{dV}{V} = (\mu - q)dt + \sigma dz^P \quad (3.1)$$

此處： dz^P 代表在機率測度 P 下之布朗運動， P 為風險環境中的機率測度。 μ 為風險環境中的期望報酬率。

上式(3.1)可轉換為風險中立下的資產價格隨機過程，將風險環境中的機率測度 P 轉換為風險中立下的機率測度 Q 。令：

$$dz^P = dz^Q - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dt$$

所以，在風險中立下報酬率的價格隨機過程可改寫成

$$\frac{dV}{V} = (r - q)dt + \sigma dz^Q \quad (3.2)$$

比較式(3.1)及式(3.2)，在風險中立下，原來之 μ 已被無風險利率 r 取代，但是原來標的資產的波動度(volatility)並為受到機率測度轉換的影響。換言之，利用平賭法將資產價值從風險環境轉換成風險中立環境的唯一影響只有資產報酬率之期望值($\mu \rightarrow r$)的移動而已。

⁵ 參考陳松男著作「金融工程學」一書之第五章

3.2 選擇權評價模型(單層)

Black-Scholes 的單層選擇權評價模型，模型的假設條件如下：

1. 資產價值遵循幾何布朗運動(geometric Brownian motion)，其平均值(μ)及標準差(σ)為常數。
2. 賣空證券的收入可全部使用
3. 沒有交易的成本及稅，所有的證券可完權分割
4. 衍生性商品的契約期間內，沒有發放現金股利
5. 無風險的套利機會不存在
6. 證券的交易是連續的
7. 無風險利率 r 為常數，且在到期日前都維持不變

針對 Black-Scholes 的評價模型一般化，將無風險利率及資產變異數假設為可隨時間變換而變動的參數。以買權為例，單期選擇權評價模型設定及最終結果如下：



圖 3-1 單層選擇權

$$C_1(V, t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} E^* \{ \max[0, (V(t_1) - K_1)] \} \quad (3.3)$$

可轉換成

$$C_1(V, t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} V(t_1) f(z) dz - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} K_1 f(z) dz \quad (3.4)$$

其中， $f(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

如同 Black-Scholes(1973)選擇權評價模型所提出的假設，將資產價值 V 視為一個隨機變數，並且遵循艾多過程(可視為布朗運動的一種，Brownian Motion)。所以，風險環境中之資產價值 V 可以表示如式(3.1)的形式：

$$\frac{dV}{V} = (\mu - q)dt + \sigma dz^P$$

此處： dz^P 代表在機率測度 P 下之布朗運動， P 為風險環境中的機率測度。 μ 為風險環境中的期望報酬率。

假設資產價值的變動過程為一自然對數，即 $f(V,t)=\ln V$ 的函數型式，由艾多定理(Ito's lemma)可知資產價值變動過程可表示為：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial V} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial V} b dz^P \quad (3.5)$$

其中，式(3.1)亦可表示成

$$dV = (\mu - q)Vdt + \sigma V dz^P$$

則

$$a = (\mu - q)V \quad ; \quad b = \sigma V \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{1}{V} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} = \frac{-1}{V^2}$$

將上述數值代入(3.5)並整理

$$\begin{aligned} d(\ln V) &= \left\{ \frac{1}{V} [(\mu - q)V] - \frac{1}{2} \frac{1}{V^2} (\sigma V)^2 \right\} dt + \frac{1}{V} (\sigma V) dz^P \\ &= \left(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz^P \end{aligned} \quad (3.6)$$

利用平賭法(martingale method)，將風險環境中的機率測度 P ，轉換為風險中立下的機率測度 Q 。令：

$$dz^P = dz^Q - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dt$$

所以，在風險中立下的資產價值可改寫成式(3.2)

$$\frac{dV}{V} = (r - q)dt + \sigma dz^Q$$

如此，可將不易評估的期望報酬率(μ)以無風險利率(r)代替，方便後續評價模型使用上的數據取得。所以，(3.6)式最終可轉換成

$$d(\ln V) = \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz^Q \quad (3.7)$$

其中， $dz^Q \sim N(0,1)$

再將式(3.7)對時間進行積分，可得資產的動態變動過程：

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} d \ln V du &= \int_{t_0}^{t_1} \left[r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u) \right] du + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} dz^Q \\ \Rightarrow \ln V(t_1) &= \ln V(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left[r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u) \right] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} \end{aligned}$$

因為 $V(t_0) = V_0$ ，所以，資產的動態變動過程為

$$V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \quad (3.8)$$

其中，

$$z = \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_0}\right) - \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

當資產價值在 t_1 時的值大於履約價格 K_1 ，選擇權為價內(in-the-money)的情況，選擇權才有被執行的價值。所以， $V(t_1) > K_1$ 為選擇權成立的條件。

$$\begin{aligned} z &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_0}\right) - \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \\ &= -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{V(t_1)}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \\ &> -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_1}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \end{aligned}$$

令

$$h_{1,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_1}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \quad (3.9)$$

當 $z > -h_{1,1}$ 時等同 $V(t_1) > K_1$ ，選擇權才有價值。故 $-h_{1,1}$ 可做為積分式的下限值。將式(3.8)代入式(3.4)並修正積分下限值

$$C_1(V, t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} f(z) dz - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz \quad (3.10)$$

將(3.10)式等號右邊分兩部分整理，第一部分：

$$\begin{aligned} & e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} f(z) dz \\ &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} q(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} [z^2 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \sigma^2(u) du - 2z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}]} dz \\ &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} q(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} [z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}]^2} dz \end{aligned}$$

令 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$; 且 $dz_2 = dz$

積分下限移動變更為 $-h_{1,1} - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} = -(h_{1,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}) = -g_{1,1}$

其中，

$$g_{1,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_1}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \quad (3.11)$$

所以，第一部分的結果為

$$V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} q(u) du} \int_{-g_{1,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z_2^2} dz_2 = e^{-\int_{t_0}^{t_1} q(u) du} V_0 N(g_{1,1}) \quad (3.12)$$

(3.10)式等號右邊的第二部分：

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz \\ &= K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{1,1}}^{\infty} f(z) dz = K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N(h_{1,1}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

結合(3.12)及(3.13)式，可得單層的選擇權價值

$$C_1(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} q(u) du} N(g_{1,1}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N(h_{1,1}) \quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_1}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \\ &= h_{1,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} \\ h_{1,1} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_1}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \end{aligned}$$

3.3 複合選擇權評價模型(二層)

在評價模型建構的方法上，將 3.1 節的單層選擇權視為二層選擇權的第一層選擇權。移動單層選擇權的啟始時間點至 t_1 ，即 $C_1(V, t_1)$ ，同時 t_1 也是第二層選擇權的到期日(執行日)。下圖為複合選擇權之關係圖：

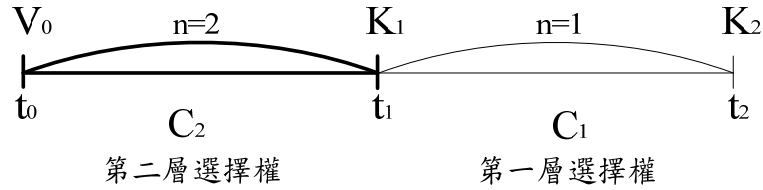


圖 3-2 二層序列複合選擇權

以複合買權(A call on call)作為二層複合選擇權模型的建立範本。在第一個到期日 t_1 ，選擇權的持有者可支付第一個履約價格 K_1 再擁有一個買權，此買權可於第二個到期日 t_2 以第二個履約價格 K_2 購買標的資產。唯有在第一個到期日以第一個履約價格執行第一個買權，複合選擇權才會成立。也就是 $C_1(V, t_1) > K_1$ 必須成立。其中，將第一層買權於到期日 t_2 的價值，表示成：

$$C_1(V, t_2) = \max[0, V(t_2) - K_2]$$

$V(t_2)$ ：標的資產在 t_2 的價值

第二層選擇權在到期日 t_1 的價值，可視為第一層買權 C_1 於時間點 t_1 和履約價格 K_1 之間的差額：

$$C_2(V, t_1) = \max[0, C_1(V, t_1) - K_1]$$

再將第二層選擇權的價值折現回到期初 t_0 ，求得 $C_2(V, t_0)$ 公式解。此公式即為二層複合選擇權評價模型。

首先，將 3.1 節整理出的式(3.14)移動至時間點 t_1 ，相當於 $C_1(V, t_1)$ 。

$$C_1(V, t_1) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} q(u) du} V(t_1) N(g_{1,1,*1}) - e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} K_2 N(h_{1,1,*1}) \quad (3.15)$$

在風險中立的環境中，將第二層選擇權的價值折現回到期初。表示如下：

$$\begin{aligned} C_2(V, t_0) &= e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} E^*[\max\{0, C_1(V, t_1) - K_1\} \mid F] \\ &= e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, C_1(V, t_1) - K_1\} f(z) dz \end{aligned} \quad (3.16)$$

又如同式(3.8)所示

$$V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

所以，經過整理

$$z = \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_0}\right) - \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

只有當 $C_1(V, t_1) > K_1$ 時，複合選擇權才有被執行的價值。所以，令 $\bar{V}_{1,2}$ 為 $C_1(V, t_1) - K_1 = 0$ 成立時的資產價值 V 。

$$\begin{aligned} z &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_0}\right) - \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \\ &= - \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V(t_1)}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \\ &> - \frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,2}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \end{aligned}$$

令

$$h_{2,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,2}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \quad (3.17)$$

則

$$V(t_1) > \bar{V}_{1,2} \Leftrightarrow z > h_{2,1}$$

所以，式(3.16)的積分下限值可以修正為 $-h_{2,1}$ 。將式(3.15)代入(3.16)，並整理成：

$$\begin{aligned} &C_2(V, t_0) \\ &= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \max \{ e^{-\int_{t_1}^{t_2} q(u) du} V(t_1) N(g_{1,1,*1}) - e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} K_2 N(h_{1,1,*1}) - K_1 \} f(z) dz \\ &= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} e^{-\int_{t_1}^{t_2} q(u) du} V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} N(g_{1,1,*1}) f(z) dz \\ &\quad - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} K_2 N(h_{1,1,*1}) f(z) dz - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} [z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}]^2} N(g_{1,1,*1}) dz \\
&\quad - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} z^2} N(h_{1,1,*1}) dz - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} z^2} dz
\end{aligned} \tag{3.18}$$

將(3.18)式等號右邊分三部分整理，首先整理第一部分積分式。

第一部分

使用與 Geske(1977)相同的整理方法，利用二變數的累積常態分配函數式(bivariate normal distribution function)，將式(3.18)的第一部分積分式進行整理，最終之期望結果如下：

$$\int_{-g_{2,1}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} z_2^2}}{\sqrt{2\pi}} N_1(g_{2,2,*1}) dz_2 = \int_{-g_{2,1}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} z_2^2}}{\sqrt{2\pi}} N_1\left(\frac{g_{2,2} + \rho_{1,2} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}\right) dz_2$$

其中，變數間之相關係數 $\rho_{1,2} = \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}$

第一部分積分式

$$V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} [z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}]^2} N(g_{1,1,*1}) dz$$

進行參數之轉換與整理。首先，令 $z_2 = Z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$ ； $dz_2 = dz$

且積分下限移動變更為 $-h_{2,1} - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} = -(h_{2,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}) = -g_{2,1}$

則

$$g_{2,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{1,2}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \tag{3.19}$$

將式(3.11)中的 $g_{1,1}$ 移動一個時間區，可得下式：

$$\begin{aligned}
g_{1,1,*1} &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{K_2}\right) + \int_{t_1}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_1}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du + \int_{t_0}^{t_1} \left[r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}
\end{aligned}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$ 代入，整理上式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du + z_2\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}
\end{aligned}$$

將等式分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}}
\end{aligned}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}$

所以 $g_{1,1,*1}$ 最終可整理成

$$g_{1,1,*1} = \frac{g_{2,2} + \rho_{1,2}z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \quad (3.20)$$

其中，

$$g_{2,2} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \quad (3.21)$$

最終，利用二變數的累積常態分配函數式(bivariate normal distribution function)，將式(3.18)的第一部分積分式表示成：

$$\begin{aligned}
& V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u) du} \int_{-g_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z_2^2} N\left(\frac{g_{2,2} - \rho_{1,2} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}\right) dz_2 \\
& = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u) du} N_2(g_{2,1}, g_{2,2}; \rho_{1,2})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

第二部分

$$K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} z^2} N(h_{1,1,*1}) dz$$

變數的處理方法和第一部分積分式相同，利用二變數的累積常態分配函數(bivariate normal distribution function)將積分式進行整理。首先，處理單層選擇權中 $h_{1,1}$ 在移動一時間區間後的值 $h_{1,1,*1}$ ，轉換過程如下：

$$\begin{aligned}
h_{1,1,*1} &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{K_2}\right) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

將分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_2}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}$$

所以， $h_{1,1,*1}$ 最終可整理成

$$h_{1,1,*1} = \frac{h_{2,2} + \rho_{1,2} z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \tag{3.23}$$

其中，

$$h_{2,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_2}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \quad (3.24)$$

將 $h_{2,2}$ 表示成二變數的累積常態分配函數式(bivariate normal distribution function)的型式，如下：

$$N_1(h_{1,1}, *1) = N_1(h_{2,2} \mid z) = N_1\left(\frac{h_{2,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}\right)$$

最後，可得(3.18)第二部分積分式整理的結果

$$\begin{aligned} &\Rightarrow K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}z^2} N(h_{1,1}, *1) dz \\ &= K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}z^2} N\left(\frac{h_{2,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}\right) dz \\ &= K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} N_2(h_{2,1}, h_{2,2}; \rho_{1,2}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

第三部分

$$K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{2,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}z^2} dz = K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} N_1(h_{2,1}) \quad (3.26)$$

整合式(3.22)、(3.25)及(3.26)，結果便是二層複合選擇權 $C_2(V, t_0)$ 的評價模型：

$$\begin{aligned} C_2(V, t_0) &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u)du} N_2(g_{2,1}, g_{2,2}; \rho_{1,2}) \\ &\quad - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} N_2(h_{2,1}, h_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} N_1(h_{2,1}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

亦可將第二及第三部分的積分式進行整合。以下式表示：

$$\begin{aligned} C_2(V, t_0) &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u)du} N_2(g_{2,1}, g_{2,2}; \rho_{1,2}) - \\ &\quad \sum_{m=1}^2 K_m e^{-\int_{t_0}^{t_m} r(u)du} N_m\{[h_{m,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m}\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中，

$$g_{2,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,2}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} = h_{2,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$$

$$g_{2,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_2}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = h_{2,2} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}$$

$$h_{2,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,2}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

$$h_{2,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_2}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}$$

$\bar{V}_{1,2}$ 為 $C_2(V, t_1) = K_1$ 時的資產價值 V

$N_1(\cdot)$ 累積常態分配函數

$N_2(\cdot)$ 二變數累積常態分配函數， $\rho_{1,2}$ 為兩變數間之相關係數



3.4 複合選擇權評價模型(三層)

以三個連續的買權(A call on call on call)作為三層複合選擇權模型的建立範本。三層複合選擇權評價模型在建構的過程中，運用了先前二層複合選擇權建構的想法。將二層選擇權的結果作為三層選擇權前兩層買權的總價值 $C_2(V, t_1)$ ，視為第三個買權(C_3)於期末(t_1)的價值。再將前兩層買權 $C_2(V, t_1)$ 的總價值，在風險中立的情況下折現回到期初 t_0 ，最後，求得三層選擇權 $C_3(V, t_0)$ 的評價模型。下圖為三層複合選擇權之關係圖：

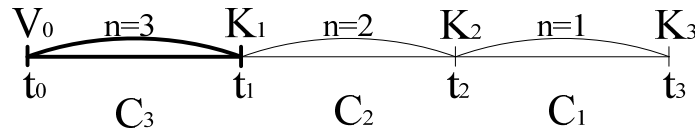


圖 3-3 三層序列複合選擇權

第三層買權 C_3 在到期日 t_1 的價值，可視為前兩層買權於 t_1 的價值與履約價格 K_1 之間的差額。表示如下：

$$C_3(V, t_1) = \max[0, C_2(V, t_1) - K_1]$$

將上述 $C_3(V, t_1)$ 的值在風險中立的機率測度下，折回到期初。表示如下：

$$\begin{aligned} C_3(V, t_0) &= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} E^*[\max\{0, C_2(V, t_1) - K_1\} \mid F] \\ &= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, C_2(V, t_1) - K_1\} f(z) dz \end{aligned} \quad (3.29)$$

將兩層複合選擇權評價模型公式

$$\begin{aligned} C_2(V, t_0) &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u) du} N_2(g_{2,1}, g_{2,2}; \rho_{1,2}) \\ &\quad - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} N_2(h_{2,1}, h_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N_1(h_{2,1}) \end{aligned}$$

移動至時間點 t_1 ，相當於 $C_2(V, t_1)$ 。

$$\begin{aligned} C_2(V, t_1) &= V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_3} q(u) du} N_2([g_{2,1,*1}, g_{2,2,*1}]; [\rho_{1,2,*1}]) \\ &\quad - K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u) du} N_2([h_{2,1,*1}, h_{2,2,*1}]; [\rho_{1,2,*1}]) - K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} N_1(h_{2,1,*1}) \end{aligned}$$

將上述 $C_2(V, t_1)$ 的數值代入(3.29)可得

$$\begin{aligned}
& C_3(V, t_0) \\
&= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, C_2(V, t_1) - K_1\} f(z) dz \\
&= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_3} q(u) du} N_2([g_{2,1,*1}, g_{2,2,*1}]; [\rho_{1,2,*1}]) \\
&\quad - K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u) du} N_2([h_{2,1,*1}, h_{2,2,*1}]; [\rho_{1,2,*1}]) - K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} N_1(h_{2,1,*1}) - K_1\} f(z) dz
\end{aligned} \tag{3.30}$$

如同式(3.8)所示，資產的動態變動過程可以表式成

$$V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

令 $\bar{V}_{1,3}$ 為一個資產價值的約當值，存在於「 $C_2(V, t_1) - K_1 = 0$ 」條件成立時。即是當 $C_2(V, t_1) > K_1$ 的成立條件為 $V(t_1) > \bar{V}_{1,3}$ ，此時第三層的複合選擇權才有被執行的價值。意即：

$$\ln\left(\frac{\bar{V}_{1,3}}{V_0}\right) < \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$$

整理上式，可得

$$z > \frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

令

$$h_{3,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \tag{3.31}$$

亦即，資產價值在 t_1 大於 $\bar{V}_{1,3}$ 等同 $z > h_{3,1}$

$$V(t_1) > \bar{V}_{1,3} \Leftrightarrow z > h_{3,1}$$

在評價模型的建構過程中，為使得第三層的複合選擇權有價值，藉由參數設定將積分下限值可修正為 $-h_{3,1}$ 。所以，式(3.29)可整理如下：

$$C_3(V, t_0)$$

$$= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left\{ 0, \begin{pmatrix} V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_3} q(u)du} N_2(g_{2,1,*1}, g_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) \\ -K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u)du} N_2(h_{2,1,*1}, h_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) \\ -K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u)du} N_1(h_{2,1,*1}) \\ -K_1 \end{pmatrix} \right\} f(z) dz$$

將 $V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u)-q(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}$ 代入

$$C_3(V, t_0)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} e^{-\int_{t_1}^{t_3} q(u)du} V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u)-q(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}} N_2(g_{2,1,*1}, g_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) f(z) dz \\ &\quad - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u)du} N_2(h_{2,1,*1}, h_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) f(z) dz \\ &\quad - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u)du} N_1(h_{2,1,*1}) f(z) dz \\ &\quad - e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz \end{aligned} \quad (3.32)$$

後續，將式(3.32)中的四個積分式分成四個部分處理。

第一部分

$$e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} e^{-\int_{t_1}^{t_3} q(u)du} V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u)-q(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}} N(g_{2,1,*1}, g_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) f(z) dz$$

$$\text{令 } z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du} ; \quad dz_2 = dz$$

且積分下限移動變更為 $-h_{3,1} - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du} = -(h_{3,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}) = -g_{3,1}$ 。其中，

$$g_{3,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{1,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}} \quad (3.33)$$

則，第一部分積分式可改寫成

$$e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u)du} V_0 \int_{-g_{3,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2} N(g_{2,1,*1}, g_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) dz_2$$

將 $g_{2,1,*1}$ 進行整理，整理過程如下：

$$\begin{aligned}
 g_{2,1,*1} &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}
 \end{aligned}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$ 代入，

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z_2\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}
 \end{aligned}$$

上下同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \\
 &= \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}}
 \end{aligned}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}$

所以， $g_{2,1,*1}$ 最終可整理成

$$g_{2,1,*1} = \frac{g_{3,2} + \rho_{1,2}z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \quad (3.34)$$

其中，

$$g_{3,2} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \quad (3.35)$$

同理， $g_{2,2,*1}$ 整理過程如下：

$$\begin{aligned}
 g_{2,2,*1} &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{K_3}\right) + \int_{t_1}^{t_3} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_3}\right) + \int_{t_1}^{t_3} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du + \int_{t_0}^{t_1} \left[r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}
 \end{aligned}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$ 代入，

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_3}\right) + \int_{t_0}^{t_3} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du + z_2\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}
 \end{aligned}$$

上下同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_3}\right) + \int_{t_0}^{t_3} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}}}
 \end{aligned}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}$

最後，變數之間的關係可表示成

$$g_{2,2,*1} = \frac{g_{3,3} + \rho_{1,3} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \quad (3.36)$$

其中，

$$g_{3,3} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{K_3}\right) + \int_{t_0}^{t_3} \left[r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \quad (3.37)$$

所以，第一部分積分式表示如下

$$e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u)du} V_0 \int_{-g_{3,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2} N \left\{ \left[\frac{g_{3,2} + \rho_{1,2}z_2}{\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}}, \frac{g_{3,3} + \rho_{1,3}z_2}{\sqrt{1-\rho_{1,3}^2}} \right], \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} \\ \rho_{2,1,*1} & 1 \end{bmatrix} \right\} dz_2$$

最後，進行相關係數 $(\rho_{1,2,*1})$ 的整理。M.Y.Lee, F.B. Yeh & A.P. Chen (2008) 利用了下列之關係式，整理 $(k-1)$ 個及 k 個常態變數之間轉換的關係⁶：

$$\begin{aligned} & \forall 1 \leq s \leq n, \\ & N_n \{ [g_{\{n\},i}]_{n \times 1}; Q_n \} \\ &= \int_{-\infty}^{g_{\{n\},s}} f(z_s) N \left\{ \left(\left[\frac{g_{\{n\},i} - Q_{\{n\},s,i} z_s}{\sqrt{1-(Q_{\{n\},s,i})^2}} \right]_{n \times 1} \right)^{(-s,)} ; \left(\left[\frac{Q_{\{n\},i,j} - Q_{\{n\},s,i} Q_{\{n\},s,j}}{\sqrt{1-(Q_{\{n\},s,i})^2} \sqrt{1-(Q_{\{n\},s,j})^2}} \right]_{n \times n} \right)^{(-s,-s)} \right\} dz_s \end{aligned}$$

其中， $Q_{\{n\},i,j} = \rho_{i,j} = \frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u)du}$ ； $\forall 1 < i \leq j \leq n$ ；並且相關係數為對稱式矩陣(symmetric

matrix)，即 $\rho_{1,2,*1} = \rho_{2,1,*1}$ 。所以，將式(3.32)的相關係數 $\rho_{1,2,*1}$ 利用代入 $n=3, s=1$ ，由上式得到相關係數轉換結果。轉換過程如下：

$$\frac{Q_{\{3\},2,3} - Q_{\{3\},1,2} Q_{\{3\},1,3}}{\sqrt{1-(Q_{\{3\},1,2})^2} \sqrt{1-(Q_{\{3\},1,3})^2}} = Q_{\{2\},1,2} = \rho_{1,2,*1}$$

所以，

$$\begin{aligned} Q_{\{3\},2,3} &= Q_{\{2\},1,2} \sqrt{1-(Q_{\{3\},1,2})^2} \sqrt{1-(Q_{\{3\},1,3})^2} + Q_{\{3\},1,2} Q_{\{3\},1,3} \\ &= \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \sqrt{1-\left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}\right)^2} \sqrt{1-\left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}\right)^2} + \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} + \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \\ &= \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} = \rho_{2,3} \end{aligned} \tag{3.38}$$

⁶ 參閱 M.Y.Lee, F.B. Yeh & A.P. Chen 文章中的 Theorem 1(a)

且由於 $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u) du}}$; $\forall 1 \leq i < j \leq n$ 當 $i = j \rightarrow \rho_{i,i} = 1$

所以，式(3.32)的第一部分積分

$$\begin{aligned}
 &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u) du} \int_{-g_{3,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z_2^2} N_2 \left\{ \left[\frac{g_{3,2} + \rho_{1,2} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}, \frac{g_{3,3} + \rho_{1,3} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \right]; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \right\} dz_2 \\
 &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u) du} N_3 \left\{ \left[\frac{g_{3,2} + \rho_{1,2} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}, \frac{g_{3,3} + \rho_{1,3} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \right]; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u) du} N_3 \{ [g_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3} \} \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

其中， $\rho_{i,j} = \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u) du}}$; $\forall 1 \leq i \leq j \leq n$; 並且 $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$; $\forall 1 \leq i \leq j \leq n$, 當 $i = j$ 時， $\rho = 1$

第二部分

$$e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u) du} N_2(h_{2,1,*1}, h_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) f(z) dz$$

利用相同的方式，將第二部分積分式進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned}
 h_{2,1,*1} &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,3}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}
 \end{aligned}$$

上、下同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,3}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}$

所以， $h_{2,1,*1}$ 最終可整理成

$$h_{2,1,*1} = \frac{h_{3,2} + \rho_{1,2} z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \quad (3.40)$$

其中，

$$h_{3,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,3}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \quad (3.41)$$

同理， $h_{2,2,*1}$ 整理過程如下：

$$\begin{aligned}
h_{2,2,*1} &= \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{K_3}) + \int_{t_1}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_3}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

將分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln(\frac{V_0}{K_3}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}$$

最後，變數之間的關係可表式成

$$h_{2,2,*1} = \frac{h_{3,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \quad (4.42)$$

其中，

$$h_{3,3} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_3}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \quad (3.43)$$

所以，式(3.32)的第二部分積分

$$\begin{aligned} & \Rightarrow e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u) du} N_2(h_{2,1,*1}, h_{2,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) f(z) dz \\ & = K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_2\left\{\left(\frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}, \frac{h_{3,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}}\right); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} \\ & 1 \end{bmatrix}\right\} dz \\ & = K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N_3\left\{\left(h_{3,1}, h_{3,2}, h_{3,3}\right); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 \end{bmatrix}\right\} \\ & = K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} N_3\left\{\left[h_{3,i}\right]_{3 \times 1}; \left[\rho_{i,j}\right]_{3 \times 3}\right\} \quad (3.44) \end{aligned}$$

對於相關係數 $\rho_{1,2,*1}$ 的移動轉換過程，與第一部分的積分式作法相同，如式(3.38)所示。

第三部分

$$e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} N_1(h_{2,1,*1}) f(z) dz$$

$h_{2,1,*1}$ 整理的過程，如同式(3.42)所示：

$$h_{2,1,*1} = \frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}$$

將 $h_{3,2}$ 表示成二變數的累積常態分配函數式(bivariate normal distribution function)的型式表示如下：

$$N_1(h_{2,1,*1}) = N_1(h_{3,2} \mid z) = N_1\left(\frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}\right)$$

所以，式(3.32)第三部分積分式可以整理成：

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u)du} N_1(h_{2,1,*1}) f(z) dz \\ &= K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_1\left(\frac{h_{3,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}\right) dz \\ &= K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} N_2(h_{3,1}, h_{3,2}; \rho_{1,2}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

第四部分

積分式轉換的過程，可直接利用常態積分式，整理如下：

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz \\ &= K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{3,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} N_1(h_{3,1}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

整合(3.39)(3.44)(3.45)及(3.46)的結果，可得三層的序列複合選擇權的評價模型，如下：

$$\begin{aligned} &C_3(V, t_0) \\ &= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u)du} N_3\{[g_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3}\} - K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u)du} N_3\{[h_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3}\} \\ &\quad - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u)du} N_2(h_{3,1}, h_{3,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} N_1(h_{3,1}) \end{aligned} \quad (3.47)$$

也可將式(3.47)表示成

$$C_3(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u)du} N_3\{[g_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3}\} - \sum_{m=1}^3 K_m e^{-\int_{t_0}^{t_m} r(u)du} N_m\{[h_{m,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m}\} \quad (3.48)$$

其中，

$$\begin{aligned}
 g_{3,1} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,3}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} & h_{3,1} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,3}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \\
 g_{3,2} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,3}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} & h_{3,2} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,3}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
 g_{3,3} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_3}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} & h_{3,3} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_3}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}}
 \end{aligned}$$

$\bar{V}_{1,3}$ 為 $C_3(V, t_1) = K_1$ 時的資產價值 V

$\bar{V}_{2,3}$ 為 $C_3(V, t_2) = K_2$ 時的資產價值 V

$N_m(\cdot)$ m 個變數的累積常態分配函數， $\rho_{i,j}$ 為兩變數間之相關係數

3.5 複合選擇權評價模型(四層)

以四個連續的買權(A call on call on call on call)作為四層序列複合選擇權模型的建立範本。在四層複合選擇權評價模型的建構過程中，同樣運用了先前三層複合選擇權建構的想法。將三層選擇權的結果作為四層選擇權前三層買權的總價值 $C_3(V, t_1)$ ，視為第四個買權(C_4)於期末(t_1)的價值。最後，再將前三層買權 $C_3(V, t_1)$ 的總價值，在風險中立的情況下將值折現回到期初 t_0 ，求得四層選擇權 $C_4(V, t_0)$ 的評價模型。下圖為四層序列複合選擇權的關係圖：

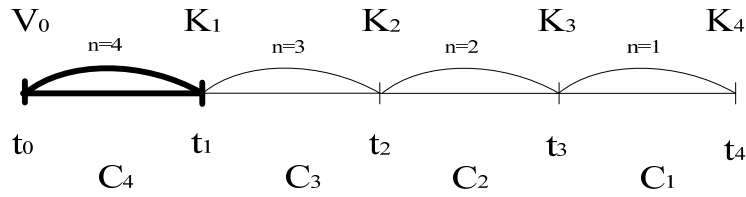


圖 3-4 四層序列複合選擇權

第四層的買權 C_4 於到期日 t_1 的價值，可視為前三層買權於 t_1 的價值與履約價格 K_1 之間的差值，表示如下：

$$C_4(V, t_1) = \max[0, C_3(V, t_1) - K_1]$$

將上述 $C_4(V, t_1)$ 的值在風險中立的機率測度下，折回到期初。可由下式表示：

$$\begin{aligned} C_4(V, t_0) &= e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} E^*[\max\{0, C_3(V, t_1) - K_1\} \mid F] \\ &= e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, C_3(V, t_1) - K_1\} f(z) dz \end{aligned} \quad (3.49)$$

將三層複合選擇權評價模型公式移動至時間點 t_1 ，相當於 $C_3(V, t_1)$ 。

$$\begin{aligned} C_3(V, t_1) &= V(t_1) e^{-\int_0^{t_1} q(u) du} N_3\{[g_{3,i,*1}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{3 \times 3}\} - K_4 e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} N_3\{[h_{3,i,*1}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{3 \times 3}\} \\ &\quad - K_3 e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} N_2(h_{3,1,*1}, h_{3,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) - K_2 e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} N_1(h_{3,1,*1}) \end{aligned}$$

將上述 $C_3(V, t_1)$ 的數值代入(3.49)可得

$$\begin{aligned}
& C_4(V, t_0) \\
&= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, C_3(V, t_1) - K_1\} f(z) dz \\
&= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left\{ 0, \begin{pmatrix} V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_4} q(u) du} N_3\{[g_{3,i,*1}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{3 \times 3}\} \\ -K_4 e^{-\int_{t_1}^{t_4} r(u) du} N_3\{[h_{3,i,*1}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{3 \times 3}\} \\ -K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u) du} N_2(h_{3,1,*1}, h_{3,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) \\ -K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} N_1(h_{3,1,*1}) \end{pmatrix} \right\} f(z) dz
\end{aligned} \tag{3.50}$$

如同式(3.8)所示，資產的動態變動過程可以表式成

$$V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

令 $\bar{V}_{1,4}$ 為使得「 $C_3(V, t_1) - K_1 = 0$ 」條件成立時的資產價值 V 。當 $C_3(V, t_1) > K_1$ 成立時，也就是 $V(t_1) > \bar{V}_{1,4}$ 時，第四層的複合選擇權才有被執行的價值。資產的動態變動過程可以替換成：

$$\ln\left(\frac{\bar{V}_{1,4}}{V_0}\right) < \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$$

整理上式，可得

$$z > -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,4}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

令

$$h_{4,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,4}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \tag{3.51}$$

$$V(t_1) > \bar{V}_{1,4} \Leftrightarrow z > -h_{4,1}$$

為使得四層的序列複合選擇權有價值，藉由參數設定，將積分式的下限值修正為 $-h_{4,1}$ 。

再加上 $V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$ ，式(3.50)可整理如下：

$$C_4(V, t_0)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \max \left\{ 0, \begin{aligned} &V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_4} q(u) du} N_3 \{ [g_{3,i,*1}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{3 \times 3} \} \\ &- K_4 e^{-\int_{t_1}^{t_4} r(u) du} N_3 \{ [h_{3,i,*1}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{3 \times 3} \} \\ &- K_3 e^{-\int_{t_1}^{t_3} r(u) du} N_2 (h_{3,1,*1}, h_{3,2,*1}; \rho_{1,2,*1}) \\ &- K_2 e^{-\int_{t_1}^{t_2} r(u) du} N_1 (h_{3,1,*1}) \end{aligned} \right\} f(z) dz \\
&= V_0 e^{-\int_{t_1}^{t_4} q(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} \right)^2} N_3 \left\{ \begin{pmatrix} g_{3,1,*1} \\ g_{3,2,*1} \\ g_{3,3,*1} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} & \rho_{1,3,*1} \\ & 1 & \rho_{2,3,*1} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz \\
&\quad - K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} N_3 \left\{ (h_{3,1,*1}, h_{3,2,*1}, h_{3,3,*1}); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} & \rho_{1,3,*1} \\ & 1 & \rho_{2,3,*1} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz \\
&\quad - K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} N_2 \left\{ (h_{3,1,*1}, h_{3,2,*1}); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} dz \\
&\quad - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} N_1 (h_{3,1,*1}) dz \\
&\quad - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz
\end{aligned} \tag{3.52}$$

後續，將式(3.52)分為五個積分式處理。

第一部分

$$V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} \right)^2} N_3 \left\{ \begin{pmatrix} g_{3,1,*1} \\ g_{3,2,*1} \\ g_{3,3,*1} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} & \rho_{1,3,*1} \\ & 1 & \rho_{2,3,*1} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz$$

$$\text{令 } z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} ; \quad dz_2 = dz$$

積分下限移動變更為 $-h_{4,1} - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} = -(h_{4,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}) = -g_{4,1}$ 。所以，

$$g_{4,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{1,4}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \tag{3.53}$$

將 $g_{3,1,*1}$ 進行整理，過程如下：

$$g_{3,1,*1} = \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{2,4}}) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}$$

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$ 代入，

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z_2\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}$$

分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}$

$$= \frac{\frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}}}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}$

所以， $g_{3,1,*1}$ 最終可整理成

$$g_{3,1,*1} = \frac{g_{4,2} + \rho_{1,2}z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \quad (3.54)$$

其中，

$$g_{4,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \quad (3.55)$$

同理，將 $g_{3,2,*1}$ 進行整理，過程如下：

$$g_{3,2,*1} = \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{3,4}}) + \int_{t_1}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}$$

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_1}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$ 代入，

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z_2\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}$$

分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}$

$$= \frac{\frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}}}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}$

所以， $g_{3,2,*1}$ 最終可整理成

$$g_{3,2,*1} = \frac{g_{4,3} + \rho_{1,3}z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \quad (3.56)$$

其中，

$$g_{4,3} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \quad (3.57)$$

最後，將 $g_{3,3,*1}$ 進行整理，過程如下：

$$g_{3,3,*1} = \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{K_4}) + \int_{t_1}^{t_4} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u)du}}$$

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_1}^{t_4} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u)du}}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$ 代入，

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z_2\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u)du}}$$

分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}$

$$= \frac{\frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}}}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,4}^2}$$

最後，變數間的關係可表式成

$$g_{3,3,*1} = \frac{g_{4,4} + \rho_{1,4}z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}^2}} \quad (3.58)$$

其中，

$$g_{4,4} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u)du}} \quad (3.59)$$

所以，式(3.52)的第一部分積分可表示為

$$V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} \int_{-g_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_2)^2} N_3 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{g_{4,2} + \rho_{1,2} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \\ \frac{g_{4,3} + \rho_{1,3} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \\ \frac{g_{4,4} + \rho_{1,4} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}^2}} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} & \rho_{1,3,*1} \\ & 1 & \rho_{2,3,*1} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz_2$$

利用前一節使用的相關係數的轉換方法，代入 $n=4, s=1$ ，將上式中的相關係數 $\begin{bmatrix} \rho_{1,2,*1} \\ \rho_{1,3,*1} \\ \rho_{2,3,*1} \end{bmatrix}$

進行整理，整理過程如下：

$$Q_{\{3\},1,2} = \frac{Q_{\{4\},2,3} - Q_{\{4\},1,2} Q_{\{4\},1,3}}{\sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,2})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,3})^2}} = \rho_{1,2,*1}$$

所以，

$$\begin{aligned} Q_{\{4\},2,3} &= Q_{\{4\},1,2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,2})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,3})^2} + Q_{\{4\},1,2} Q_{\{4\},1,3} \\ &= \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \sqrt{1 - \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_2}^{t_3} \sigma^2(u) du} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_3}^{t_4} \sigma^2(u) du} \right)^2} + \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_2}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_3}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} + \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} = \rho_{2,3} \end{aligned} \quad (3.60)$$

接著，

$$\begin{aligned} Q_{\{3\},1,3} &= \frac{Q_{\{4\},2,4} - Q_{\{4\},1,2} Q_{\{4\},1,4}}{\sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,2})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,4})^2}} = \rho_{1,3,*1} \\ Q_{\{4\},2,4} &= Q_{\{3\},1,3} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,2})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,4})^2} + Q_{\{4\},1,2} Q_{\{4\},1,4} \\ &= \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \sqrt{1 - \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_2}^{t_3} \sigma^2(u) du} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_3}^{t_4} \sigma^2(u) du} \right)^2} + \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_2}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_3}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} + \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} = \rho_{2,4}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

最後，

$$\begin{aligned}
Q_{\{3\},2,3} &= \frac{Q_{\{4\},3,4} - Q_{\{4\},1,3} Q_{\{4\},1,4}}{\sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,3})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,4})^2}} = \rho_{2,3,*1} \\
Q_{\{4\},3,4} &= Q_{\{3\},2,3} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,3})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{4\},1,4})^2} + Q_{\{4\},1,3} Q_{\{4\},1,4} \\
&= \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \sqrt{1 - \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}\right)^2} + \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} + \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} = \rho_{3,4}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

其中， $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u) du}}$ ； $\forall 1 \leq i < j \leq n$ ，當 $i = j \rightarrow \rho_{i,i} = 1$ ；且相關係數為對稱

式矩陣(symmetric matrix)。則，第一部分積分式最終可以整理並表示成：

$$\Rightarrow V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} \int_{-g_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_2)^2} N_3 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{g_{4,2} + \rho_{1,2} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \\ \frac{g_{4,3} + \rho_{1,3} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \\ \frac{g_{4,4} + \rho_{1,4} z_2}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}^2}} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{3,4} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz$$

$$\begin{aligned}
&= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} N_4 \left\{ \begin{pmatrix} g_{4,1} \\ g_{4,2} \\ g_{4,3} \\ g_{4,4} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} N_4 \left\{ \begin{bmatrix} g_{4,i} \end{bmatrix}_{4 \times 1}; \begin{bmatrix} \rho_{i,j} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \right\}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

第二部分

$$K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_3 \left(\begin{pmatrix} h_{3,1,*1} & h_{3,2,*1} & h_{3,3,*1} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} & \rho_{1,3,*1} \\ & 1 & \rho_{2,3,*1} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) dz$$

利用相同的方式，將第二部分積分式中的參數進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned}
h_{3,1,*1} &= \frac{\ln\left(\frac{V(t_1)}{V_{2,4}}\right) + \int_{t_1}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,4}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,4}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
&= \frac{\frac{\ln\left(\frac{V_0}{V_{2,4}}\right) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}}
\end{aligned}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}$$

所以， $h_{3,1,*1}$ 最終可整理成

$$h_{3,1,*1} = \frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \quad (3.64)$$

其中，

$$h_{4,2} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u)du}} \quad (3.65)$$

將 $h_{3,2,*1}$ 進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} h_{3,2,*1} &= \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{3,4}}) + \int_{t_1}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \\ &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \end{aligned}$$

分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}$

$$\begin{aligned} &\frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} \\ &= \frac{\frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}}} \end{aligned}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_3} \sigma^2(u)du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u)du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}$$

所以， $h_{3,2,*1}$ 最終可整理成

$$h_{3,2,*1} = \frac{h_{4,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1 - \rho_{1,3}^2}} \quad (3.66)$$

其中，

$$h_{4,3} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} \quad (3.67)$$

同理， $h_{3,3,*1}$ 整理過程如下：

$$\begin{aligned} h_{3,3,*1} &= \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{K_4}) + \int_{t_1}^{t_4} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \end{aligned}$$

分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}}}{\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}}} \end{aligned}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_4} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,4}^2}$$

最後，變數之間的關係可表式成

$$h_{3,3,*1} = \frac{h_{4,4} + \rho_{1,4} z}{\sqrt{1 - \rho_{1,4}^2}} \quad (3.68)$$

其中，

$$h_{4,4} = \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \quad (3.69)$$

則，第二部分積分式最終可表示如下：

$$K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_3 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}} \\ \frac{h_{4,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1-\rho_{1,3}^2}} \\ \frac{h_{4,4} + \rho_{1,4}z}{\sqrt{1-\rho_{1,4}^2}} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} & \rho_{1,3,*1} \\ & 1 & \rho_{2,3,*1} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz$$

其中，相關係數項的轉換過程如式(3.60)、(3.61)及(3.62)的處理方法，將上式再整理成

$$\begin{aligned} &= K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_3 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}} \\ \frac{h_{4,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1-\rho_{1,3}^2}} \\ \frac{h_{4,4} + \rho_{1,4}z}{\sqrt{1-\rho_{1,4}^2}} \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & 1 & \rho_{3,4} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} dz \\ &= K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} N_4 \left\{ (h_{4,1}, h_{4,2}, h_{4,3}, h_{4,4}); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ & & 1 & \rho_{3,4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right\} = K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} N_4 \left\{ [h_{4,i}]_{4 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{4 \times 4} \right\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

第三部分

$$K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_2 \left\{ (h_{3,1,*1}, h_{3,2,*1}); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,*1} \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} dz$$

推導的過程與式(3.64)、(3.66)及(3.60)相同，

$$h_{3,1,*1} = \frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}} \quad ; \quad h_{3,2,*1} = \frac{h_{4,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1-\rho_{1,3}^2}}$$

$$\rho_{1,2,*1} = \frac{Q_{\{4\},2,3} - Q_{\{4\},1,2} Q_{\{4\},1,3}}{\sqrt{1-(Q_{\{4\},1,2})^2} \sqrt{1-(Q_{\{4\},1,3})^2}} = \rho_{2,3}$$

所以，第三部分積分式最後可整理成

$$\begin{aligned}
&= K_3 e^{-\int_0^{t_3} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_2 \left\{ \left(\frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}}, \frac{h_{4,3} + \rho_{1,3}z}{\sqrt{1-\rho_{1,3}^2}} \right); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} dz \\
&= K_3 e^{-\int_0^{t_3} r(u) du} N_3 \left\{ (h_{4,1}, h_{4,2}, h_{4,3}); \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ & 1 & \rho_{2,3} \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= K_3 e^{-\int_0^{t_3} r(u) du} N_3 \left\{ [h_{4,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3} \right\}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

第四部分

$$K_2 e^{-\int_0^{t_2} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_1(h_{3,1,*1}) dz$$

代入式(3.64)的整理結果

最終，積分式可以整理成

$$\begin{aligned}
&K_2 e^{-\int_0^{t_2} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} N_1 \left(\frac{h_{4,2} + \rho_{1,2}z}{\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}} \right) dz \\
&= K_2 e^{-\int_0^{t_2} r(u) du} N_2(h_{4,1}, h_{4,2}; \rho_{1,2})
\end{aligned} \tag{3.72}$$

第五部分

積分式的轉換過程，可直接利用常態積分式，整理如下：

$$K_1 e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} \int_{-h_{4,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = K_1 e^{-\int_0^{t_1} r(u) du} N_1(h_{4,1}) \tag{3.73}$$

整合(3.63)(3.70)(3.71)(3.72)及(3.73)的結果，可得四層的序列複合選擇權的評價模型，如下：

$$\begin{aligned}
C_4(V, t_0) = & V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} N_4 \left\{ \begin{bmatrix} g_{4,i} \end{bmatrix}_{4 \times 1}; \begin{bmatrix} \rho_{i,j} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \right\} \\
& - K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} N_4 \left\{ \begin{bmatrix} h_{4,i} \end{bmatrix}_{4 \times 1}; \begin{bmatrix} \rho_{i,j} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \right\} - K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} N_3 \left\{ \begin{bmatrix} h_{4,i} \end{bmatrix}_{3 \times 1}; \begin{bmatrix} \rho_{i,j} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \right\} \\
& - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} N_2(h_{4,1}, h_{4,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N_1(h_{4,1})
\end{aligned} \quad (3.74)$$

亦可將式(3.73)進行整理，結果如下：

$$C_4(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} N_4 \{ \begin{bmatrix} g_{4,i} \end{bmatrix}_{4 \times 1}; \begin{bmatrix} \rho_{i,j} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \} - \sum_{m=1}^4 K_m e^{-\int_{t_0}^{t_m} r(u) du} N_m \{ \begin{bmatrix} h_{m,i} \end{bmatrix}_{m \times 1}; \begin{bmatrix} \rho_{i,j} \end{bmatrix}_{m \times m} \} \quad (3.75)$$

其中，

$$\begin{aligned}
g_{4,1} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,4}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} & g_{4,2} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
g_{4,3} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} & g_{4,4} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}} \\
h_{4,1} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,4}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} & h_{4,2} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{2,4}}) + \int_{t_0}^{t_2} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}} \\
h_{4,3} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{3,4}}) + \int_{t_0}^{t_3} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_3} \sigma^2(u) du}} & h_{4,4} &= \frac{\ln(\frac{V_0}{K_4}) + \int_{t_0}^{t_4} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_4} \sigma^2(u) du}}
\end{aligned}$$

相關係數的矩陣為對稱式矩陣(symmetric matrix)， $\rho_{i,j} = 1$; $\forall 1 \leq i = j \leq n$

$$\text{並且， } \rho_{i,j} = \rho_{j,i} = \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u) du}} ; \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$$

第4章 多期序列複合選擇權評價模型

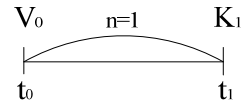
歸納第三章的序列複合選擇權推導過程，利用層與層的建構過程找尋多期序列複合選擇權評價模型的特性。最後，利用數學歸納法證明多期序列複合選擇權評價模型的正確性。

4.1 n 層序列複合選擇權評價模型

第三章序列複合選擇權評價模型的建構推導，由一層到二層、二層到三層、三層到四層的推演過程中，歸納出選擇權評價模型建構時，各參數於層與層變動之間的轉換過程。後續，利用各層參數變動的相關性，假設並建立 n 層序列複合選擇權評價模型可能之形式。

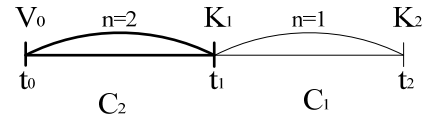
n=1

$$C_1(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_1} q(u) du} N(g_{1,1}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N(h_{1,1})$$



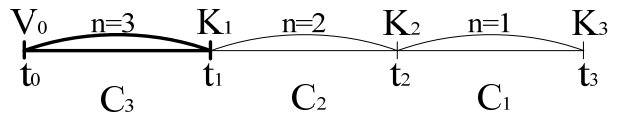
n=2

$$C_2(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_2} q(u) du} N_2(g_{2,1}, g_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} N_2(h_{2,1}, h_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N_1(h_{2,1})$$



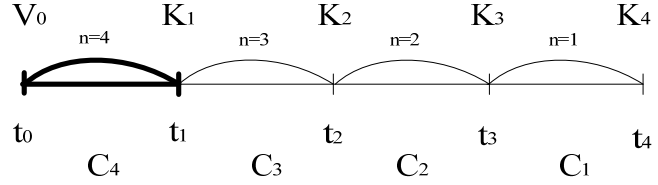
n=3

$$C_3(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u) du} N_3\{[g_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3}\} - K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} N_3\{[h_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3}\} - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} N_2(h_{3,1}, h_{3,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N_1(h_{3,1})$$



亦可表示如下

$$C_3(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_3} q(u) du} N_3 \{ [g_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3} \} - \sum_{m=1}^3 K_m e^{-\int_{t_0}^{t_m} r(u) du} N_m \{ [h_{m,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m} \}$$



n=4

$$\begin{aligned} C_4(V, t_0) = & V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} N_4 \left\{ [g_{4,i}]_{4 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{4 \times 4} \right\} \\ & - K_4 e^{-\int_{t_0}^{t_4} r(u) du} N_4 \left\{ [h_{4,i}]_{4 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{4 \times 4} \right\} - K_3 e^{-\int_{t_0}^{t_3} r(u) du} N_3 \left\{ [h_{3,i}]_{3 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{3 \times 3} \right\} \\ & - K_2 e^{-\int_{t_0}^{t_2} r(u) du} N_2 (h_{2,1}, h_{2,2}; \rho_{1,2}) - K_1 e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} N_1 (h_{1,1}) \end{aligned}$$

也可表示成

$$C_4(V, t_0) = V_0 e^{-\int_{t_0}^{t_4} q(u) du} N_4 \{ [g_{4,i}]_{4 \times 1}; [\rho_{i,j}]_{4 \times 4} \} - \sum_{m=1}^4 K_m e^{-\int_{t_0}^{t_m} r(u) du} N_m \{ [h_{m,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m} \}$$

根據前四層模型建構的原則，將選擇權評價模型相關的參數歸納整理。符號說明如下：

符 號	明
$C_n(V, t_0)$	第 n 層買權於期初(t_0)的價值
$V(t_n)$	資產在時間(t_n)的價值
$\bar{V}_{1,n}$	存在 $C_{n-1}(V, t_1) - K_1 = 0$ 成立時，資產價值的約當值(equivalent value)。
z	標準常態隨機變數， $z \sim N(0,1)$
$g_{n,i,*s}$	第 n 層、第 i 個，移動 s 個時間區間的 g 值。
$h_{n,i,*s}$	第 n 層、第 i 個，移動 s 個時間區間的 h 值。
$\rho_{i,j}$	變數 i 與 j 之間的相關係數(correlation coefficient)

由上列歸納出的符號，根據第三章各層間推演過程之方法，假設第 n 層的買權價格在期末(t_1)的價值為第 $n-1$ 層買權價格在(t_1)的價格與 n 層買權的履約價格 K_1 的差值。 n 層序列複合選擇權評價模型各層之間的關係，如下圖所示：

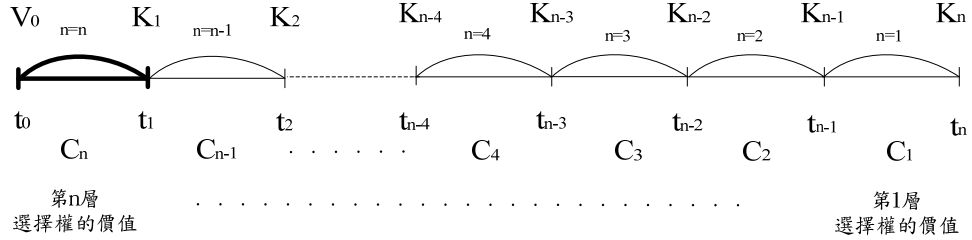


圖 4-1 多層序列複合選擇權

如果第 $n-1$ 層買權價格在(t_1)的價格大於履約價格 K_1 ，第 n 層的選擇權才会有價值、才會被執行；若第 $n-1$ 層買權價格在(t_1)的價格小於履約價格 K_1 ，則第 n 層的選擇權價值為零。以符號表示，即為

$$C_n(V, t_1) = \max[0, C_{n-1}(V, t_1) - K_1] \quad (4.1)$$

第 n 層選擇權在期初(t_0)的價值，可以在風險中立的情況下，將式(4.1)折現回到期初(t_0)。可以下式表示：

$$C_n(V, t_0) = E * \{e^{\int_0^{t_1} r(u) du} \max[0, C_{n-1}(V, t_1) - K_1] | F\}$$

則

$$C_n(V, t_0) = e^{\int_0^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max[C_{n-1}(V, t_1) - K_1] f(z) dz \quad (4.2)$$

$$\text{其中， } f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

歸納整理 $n=1$ 到 $n=4$ 層與層變換之間存在的關聯性，假設第 n 期序列複合選擇權評價模型公式，表示如下：

$$C_n(V, t_0) = V_0 e^{-\int_0^{t_n} q(u) du} N_n \{[g_{n,i}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j}]_{n \times n}\} - \sum_{m=1}^n e^{-\int_0^{t_m} r(u) du} K_m N_m \{[h_{n,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m}\} \quad (4.3)$$

其中，各參數表示如下：

$$g_{n,i} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i,n}}) + \int_0^{t_i} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i \leq n$$

$$h_{n,i} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i,n}}) + \int_0^{t_i} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i \leq n$$

在模型的建構上，為確保每個選擇權在各個時間區間都具有被執行的價值。可假設資產的約當值(equivalent asset price)為「 $C_{n-i}(V, t_i) - K_i = 0$ 」成立時的資產價值。各層選擇權的“約當值”假設如下：

$$\bar{V}_{i,n} = \begin{cases} K_n & ; \text{在 } i = n \text{ 時} \\ \text{存在 } C_{n-i}(V, t_i) - K_i = 0 \text{ 成立時的資產價值, } & \forall 1 \leq i < n \end{cases}$$

相關係數的矩陣為對稱式矩陣(symmetric matrix)，即 $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$ ，且

$$\rho_{i,j} = \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u)du}{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i < j \leq n$$

$$\rho_{i,j} = 1, \quad \forall 1 \leq i = j \leq n$$

4.2 (n+1)層序列複合選擇權

上一節歸納並整理出 n 層序列複合選擇權評價模型可能之形式，以及評價模型中所有參數可能的形式。利用數學歸納法，在假設 n 層序列複合選擇權評價模型成立的假設下，推導 $n+1$ 層序列複合選擇權的評價模型。

第 n 層選擇權的價值為式(4.3)，在評價 $(n+1)$ 層選擇權的價值時，可將第 n 層選擇權價值往後推一個時間區間，並且減去 $(n+1)$ 層選擇權的期末履約價格 (K_1) ，作為 $n+1$ 層選擇權評價模型在期末 (t_1) 的價值。意即

$$C_{n+1}(V, t_1) = \max[0, C_n(V, t_1) - K_1]$$

於風險中立的環境中，將 $(n+1)$ 層選擇權折現回到期初。選擇權價值可表示為：

$$C_{n+1}(V, t_0) = E * \left\{ e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \max[0, C_n(V, t_1) - K_1] \mid F \right\}$$

所以，

$$C_{n+1}(V, t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max[0, C_n(V, t_1) - K_1] f(z) dz \quad (4.4)$$

利用式(4.3)移動一個時間區間，可得 $C_n(V, t_1)$ 的價值，如下所示：

$$C_n(V, t_1) = V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_{n+1}} q(u) du} N_n \{ [g_{n,i,*1}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n} \} \\ - \sum_{m=1}^n e^{-\int_{t_1}^{t_{m+1}} r(u) du} K_{m+1} N_m \{ [h_{n,i,*1}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{m \times m} \} \quad (4.5)$$

將式(4.5)代入式(4.4)，並整理得

$$C_{n+1}(V, t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u) du} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left\{ 0, \left[V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_{n+1}} q(u) du} N_n \{ [g_{n,i,*1}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n} \} - \sum_{m=1}^n e^{-\int_{t_1}^{t_{m+1}} r(u) du} K_{m+1} N_m \{ [h_{n,i,*1}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{m \times m} \} \right] - K_1 \right\} f(z) dz \quad (4.6)$$

而且，資產的動態變動過程如式(3.7)所示：

$$V(t_1) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}$$

令 $\bar{V}_{1,n+1}$ 為 $C_n(V, t_1) - K = 0$ 條件成立時的資產價值 V 的約當值。當 $C_n(V, t_1) > K_1$ 成立時， $(n+1)$

層的序列複合選擇權價格為價內(in-the-money)，該選擇權才會被執行。(n+1)層的序列複合選擇權評價模型才會成立。所以，

$$\ln\left(\frac{\bar{V}_{1,n+1}}{V_0}\right) < \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du + z\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$$

整理上式，可得

$$z > -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,n+1}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}}$$

令

$$h_{n+1,1} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{\bar{V}_{1,n+1}}\right) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}} \quad (4.7)$$

則



$$V(t_1) \bar{V}_{1,n+1} \Leftrightarrow z > h_{n+1,1}$$

則式(4.6)可整理成

$$\begin{aligned} C_{n+1}(V, t_0) &= e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_{n+1}} q(u)du} N_n \{[g_{n,i,*1}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n}\} f(z) dz \\ &- e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} \sum_{m=1}^n e^{-\int_{t_1}^{t_{m+1}} r(u)du} K_{m+1} N_m \{[h_{n,i,*1}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{m \times m}\} f(z) dz \\ &- e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

後續，將式(4.8)的積分式，分成三個部分整理。

第一部分

$$\begin{aligned} &e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} V(t_1) e^{-\int_{t_1}^{t_{n+1}} q(u)du} N_n \{[g_{n,i,*1}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n}\} f(z) dz \\ &= V_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} q(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} e^{\frac{1}{2} \left(z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du} \right)^2} N_n \{[g_{n,i,*1}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n}\} dz \end{aligned}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u)du}$; $dz_2 = dz$ 代入上式，

且積分下限移動變更為 $-h_{n+1,1} - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du} = -(h_{n+1,1} + \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}) = -g_{n+1,1}$

其中，

$$g_{n+1,1} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{1,n+1}}) + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}} \quad (4.9)$$

所以，第一部分的積分式可以修正為

$$V_0 e^{\int_{t_0}^{t_{n+1}} q(u) du} \int_{-g_{n+1,1}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z_2)^2} N_n \{ [g_{n,i,*1}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n} \} dz_2$$

其中，

$$g_{n,i,*1} = \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{i+1,n+1}}) + \int_{t_1}^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} ; \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i+1,n+1}}) + \int_{t_1}^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}$$

將 $z_2 = z - \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}$ 代入

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i+1,n+1}}) + \int_{t_0}^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z_2 \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}$$

將分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}$

$$= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i+1,n+1}}) + \int_{t_0}^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} + z_2 \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}$$

$$= \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}$$

其中， $\frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,i+1}^2}$

所以， $\forall 1 \leq i \leq n$ ， $g_{n,i,*1}$ 可整理成

$$g_{n,i,*1} = \frac{g_{n+1,i+1} + z_2 \rho_{1,i+1}}{\sqrt{1 - \rho_{1,i+1}^2}} \quad (4.10)$$

將式(4.10)代入第一部分積分式

$$V_0 e^{\int_0^{t_{n+1}} q(u) du} \int_{-g_{n+1,1}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z_2)^2} N_n \left\{ \left[\frac{g_{n+1,i+1} + z_2 \rho_{1,i+1}}{\sqrt{1 - \rho_{1,i+1}^2}} \right]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n} \right\} dz_2$$

最後再將相關係數 $\rho_{i,j,*1}$ 利用第三章的方法進行整理，過程如下：

$$\rho_{i,j,*1} = Q_{\{n\},i,j} = \frac{Q_{\{n+1\},i+1,j+1} - Q_{\{n+1\},1,i+1} Q_{\{n+1\},1,j+1}}{\sqrt{1 - (Q_{\{n+1\},1,i+1})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{n+1\},1,j+1})^2}}$$

所以，

$$\begin{aligned} & Q_{\{n+1\},i+1,j+1} \\ &= Q_{\{n\},i,j} \sqrt{1 - (Q_{\{n+1\},1,i+1})^2} \sqrt{1 - (Q_{\{n+1\},1,j+1})^2} + Q_{\{n+1\},1,i+1} Q_{\{n+1\},1,j+1} \\ &= \frac{\sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_i}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} + \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_j} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} + \frac{\int_{t_0}^{t_i} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du} \sqrt{\int_{t_0}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} \\ &= \frac{\sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{j+1}} \sigma^2(u) du}} = \rho_{i+1,j+1} \quad ; \forall 1 < i < j \leq n \end{aligned} \quad (4.11)$$

最終，第一部分的積分式可以表示如下：

$$\begin{aligned} & V_0 e^{\int_0^{t_{n+1}} q(u) du} \int_{-g_{n+1,1}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z_2)^2} N_n \left\{ \left[\frac{g_{n+1,i+1} + z_2 \rho_{1,i+1}}{\sqrt{1 - \rho_{1,i+1}^2}} \right]_{n \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{n \times n} \right\} dz_2 \\ &= V_0 e^{\int_0^{t_{n+1}} q(u) du} N_{n+1} \left\{ [g_{n+1,i}]_{(n+1) \times 1}; [\rho_{i,j}]_{(n+1) \times (n+1)} \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

第二部分

$$\begin{aligned}
 & e^{-\int_{t_0}^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} \sum_{m=1}^n e^{-\int_{t_1}^{t_{m+1}} r(u)du} K_{m+1} N_m \{ [h_{n,i,*1}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{m \times m} \} f(z) dz \\
 &= \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} \sum_{m=1}^n e^{-\int_{t_0}^{t_{m+1}} r(u)du} K_{m+1} N_m \{ [h_{n,i,*1}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{m \times m} \} f(z) dz
 \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 h_{n,i,*1} &= \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{i+1,n+1}}) + \int_1^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} ; \quad \forall 1 \leq i \leq n \\
 &= \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i+1,n+1}}) + \int_{t_1}^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + \int_{t_0}^{t_1} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} \\
 &= \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{i+1,n+1}}) + \int_0^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du + z \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}
 \end{aligned}$$

將分子、分母同除以 $\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{i+1,n+1}}) + \int_0^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} \\
 &= \frac{\frac{\ln(\frac{V(t_1)}{V_{i+1,n+1}}) + \int_0^{t_{i+1}} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)] du}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} + z \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}
 \end{aligned}$$

$$\text{其中，} \frac{\sqrt{\int_{t_1}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}{\int_{t_0}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du}} = \sqrt{1 - \rho_{1,i+1}^2}$$

所以， $\forall 1 \leq i \leq n$ ， $h_{n,i,*1}$ 可整理成

$$h_{n,i,*1} = \frac{h_{n+1,i+1} + z \rho_{1,i+1}}{\sqrt{1 - \rho_{1,i+1}^2}} \quad (4.13)$$

最終，第二部分的積分式可以表示成：

$$\begin{aligned}
& \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sum_{m=1}^n e^{-\int_0^{t_{m+1}} r(u)du} K_{m+1} N_m \left\{ \left[\frac{h_{n+1,j+1} + z\rho_{1,j+1}}{\sqrt{1-\rho_{1,j+1}^2}} \right]_{m \times 1}; [\rho_{i+1,j+1}]_{m \times m} \right\} dz \\
&= \sum_{m=1}^n e^{-\int_0^{t_{m+1}} r(u)du} K_{m+1} N_{m+1} \left\{ \left[\frac{h_{n+1,j+1} + z\rho_{1,j+1}}{\sqrt{1-\rho_{1,j+1}^2}} \right]_{(m+1) \times 1}; [\rho_{i,j}]_{(m+1) \times (m+1)} \right\} \\
&= \sum_{m=2}^{n+1} e^{-\int_0^{t_m} r(u)du} K_m N_m \{ [h_{n+1,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m} \}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

第三部分

$$e^{-\int_0^{t_1} r(u)du} \int_{-h_{n+1,1}}^{\infty} K_1 f(z) dz = K_1 e^{-\int_0^{t_1} r(u)du} N_1(h_{n+1,1}) \tag{4.15}$$

整合(4.12)、(4.14)及(4.15)得到之(n+1)層序列複合選擇權評價公式，如下：

$$\begin{aligned}
C_{n+1}(V, t_0) &= V_0 e^{\int_0^{t_{n+1}} q(u)du} N_{n+1} \left\{ [g_{n+1,i}]_{(n+1) \times 1}; [\rho_{i,j}]_{(n+1) \times (n+1)} \right\} - \\
&\quad \sum_{m=2}^{n+1} e^{-\int_0^{t_m} r(u)du} K_m N_m \{ [h_{n+1,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j,*1}]_{m \times m} \} - K_1 e^{-\int_0^{t_1} r(u)du} N_1(h_{n+1,1})
\end{aligned}$$

利用數歸納法的方式，證明(n+1)層序列複合選擇權評價公式，得到的結果與 n 層序列複合選擇權公式相符，故，得證。多期序列複合選擇權評價模型可表示如下：

$$C_n(V, t_0) = V_0 e^{\int_0^{t_{n+1}} q(u)du} N_n \{ [g_{n,i}]_{n \times 1}; [\rho_{i,j}]_{n \times n} \} - \sum_{m=1}^n e^{-\int_0^{t_m} r(u)du} K_m N_m \{ [h_{n,i}]_{m \times 1}; [\rho_{i,j}]_{m \times m} \}$$

其中，

$$g_{n,i} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i,n}}) + \int_0^{t_i} [r(u) - q(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_0^{t_i} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i \leq n$$

$$h_{n,i} = \frac{\ln(\frac{V_0}{V_{i,n}}) + \int_0^{t_i} [r(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)]du}{\sqrt{\int_0^{t_i} \sigma^2(u)du}}; \forall 1 \leq i \leq n$$

$N_m(\cdot)$ m 個變數的累積常態分配函數， $\rho_{i,j}$ 為兩變數間之相關係數

$$\bar{V}_{i,n} = \begin{cases} K_n & \text{在 } i = n \text{ 時} \\ \text{存在 } C_{n-i}(V, t_i) - K_i = 0 \text{ 成立時的資產價值, } \forall 1 \leq i < n \end{cases}$$

第5章 案例分析

利用「南投縣草屯鎮污水下水道系統⁷」以及「台南縣永康污水下水道系統」等兩個分期建設計畫作為本研究之序列複合選擇權評價模型應用的案例。

5.1 案例(一)

興建計畫的範圍為南投縣草屯都市計畫區之污水處理廠、污水下水道主幹管、次幹管、分支管、巷道連接管及各項附屬設施之規劃、設計與興建。

5.1.1 興建計畫

「南投縣草屯鎮污水下水道系統」興建計畫分二期興建。污水處理廠及污水管網系統之分期興建時程規劃與規模如下表 5-1：

	工程期別	第一期	第二期
污水處理廠	平均日污水量之設計容量(CMD)	10,000	10,000
	施工期間(年)	2	1.5
	興建起始年	98	103
	完工年	99	104
污水管網系統	施工期間(年)	5	5
	興建起始年	98	103
	完工年	102	107
	管網佈設完成度(%)	43.9	100

表 5-1 施工時程彙總表

污水下水道系統總體建設工程規劃時程如下表：

項目 \ 期程	第一期工程					第二期工程				
	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
污水處理廠	10,000CMD									
						10,000CMD				
主幹管	6,445公尺									
次幹管	3,760公尺			5,795公尺						
						6,990公尺				
分支管			9,190公尺							
						11,645公尺				
巷道連接管及用戶接管			6,779公尺							
						8,664公尺				

表 5-2 總體建設工程規劃時程

⁷ 促進民間參與南投縣草屯鎮污水下水道系統建設之興建、營運、轉移(BOT)計畫 先期計畫書

5.1.2 基本假設

在進行序列複合選擇權評價模型的實際案例應用時，本論文將不考慮股東籌資的融資活動項目之影響，單從計畫的角度考量並評估投資計畫的價值。主要參數的假設，列舉如下：

1. 計畫起始年(基年)：民國 98 年(西元 2009 年)
2. 物價基期年：民國 96 年(西元 2007 年)
3. 特許年期：預計由民國 98 年至民國 132 年止，共計 35 年，包括興建期及營運期。
4. 汙水處理廠營運天數：365 天/年
5. 評估幣別：新台幣
6. 通貨膨脹率：不予考慮
7. 折現率

以 CAPM 訂定本案例之折現率，折現率公式為：

$$r = r_f + \beta \times (r_m - r_f)$$

r_f ，取政府公債利率平均值 4.19%

r_m ，取台灣股市平均年報酬率 14.78%

β ，取公用事業(瓦斯)類股與大盤之聯動性 0.2168

以 CAPM 法計算出之期望報酬率為 **6.49%**，以此報酬率作為本案例求取淨現值之折現率。

8. 無償轉移

依促參法第五十四條規定：「民間機構應於營運期限屆滿後，移轉公共建設予政府者，應將現存所有之營運資產或營運權，依投資契約有償或無償移轉、歸還予主辦機關」，本投資計畫民間機構於興建營運年屆滿時，將本計畫資產無償移轉予主辦機關。

9. 促參法之其他優惠

促參法之優惠措施，包括融資優惠、設備投資抵減、技術投資抵減、防治污染設備投資抵減、人才培訓等抵減稅捐優惠項目，亦包括未能於公司財務報表中顯現之股東投資抵減優惠等實質上對於民間機構及投資人均有實質效益之措施。

10. 土地租金

依據內政部營建署民國 94 年 9 月 21 日營署工程字第 0942916771 號函附件之會議紀錄之第七點所示「辦理民間參與污水下水道系統建設之各縣市政府，在辦理各系統先期計畫時將所列污水處理廠用地租金部分成本計算減列為新台幣 1 元。」故本計畫之土地租金以 1 元估算。

11. 水污染防治費

依水污染防治法第 11 條，中央主管機關對於排放廢(污)水，應依其排放水質水量或依中央主管機關規定之計算方式核定期排放之水質水量，徵收水污染防治費。基於開徵時程尚未明確，故依本法第 5、6 條概略試算水污染防治費用成本如下：

(單位：仟元/年)

年度	101	102	103	104	105	106	107	108~132	總計
費用	1,147	2,502	3,417	4,463	5,444	5,888	6,332	192,450	221,643

12. 開辦費

考量本計畫規劃及籌備期間至營運開始之行政作業費用，開辦費將以 500 萬元估列，並於第一期污水廠興建完成後依五年攤銷。

13. 履約保證金

考量本計畫建設成本約 17.6 億元及特許期間長達 35 年，為確保本計畫之執行及降低縣府風險，預計規劃民間機構須負擔履約保證金 5000 萬(約為總建設成本 3%)，於第二期污水處理廠興建完工並開始營運後，於次年度歸還二分之一。並於許可年限屆滿完成資產轉移程序六個月後，退還最末期保證金。

14. 折舊、攤提與重置

各項工程與設備以直線法和其耐用年限計算各年度之折舊與攤提。土木建築之折舊年期為 35 年，機電之折舊年期為 15 年，資本化利息依據主要工程耐用年期攤提。各項工程與設備於耐用年期屆滿時，以期初投資金額經通貨膨脹率調整後之價格等額重置。

5.1.3 工程成本估算

本計畫之直接工程包括污水處理廠及管網系統。加計相關之規劃設計費用、間接工程成本、興建期間營運資金需求後，所得之值為總建設成本。

1. 污水處理廠

分兩期興建完成。第一期設計容量為平均日污水量 10,000CMD，第二期擴建至平均日污水量 20,000CMD 之容量。預計污水處理廠兩期建設經費合計為新台幣 474,933 千元。相關建設經費如下表 5-3：

單位：新台幣仟元

工程項目	都市計畫區		合計
	第一期	第二期	
壹、直接工程費	287,445	140,615	428,060
一、土木及建築工程	97,335	46,355	143,690
二、機電設備工程*	87,510	53,650	141,160
三、廠區聯絡管線工程	14,000	4,600	18,600
四、電氣工程*	39,500	16,560	56,060
五、儀控工程*	37,000	15,000	52,000
六、消防工程*	6,500	1,650	8,150
七、假設工程	5,600	2,800	8,400
貳、綜合營造保險費(2%)	5,749	2,812	8,561
參、工程品質管制費(1.5%)	4,312	2,109	6,421
肆、勞安衛、交通及環保費(含空污費)(2.5%)	7,186	3,516	10,702
伍、設計監造費(4.95%)	14,229	6,960	21,189
總計	318,921	156,012	474,933

標示「*」者為機電工程類項目

表 5-3 污水處理廠興建成本

2. 管網系統

污水管線工程包括主次幹管、分支管網、巷道連接管及用戶接管工程。主、次幹管 22,990 公尺、分支管網 20,835 公尺及 15,443 戶之巷道連接管及用戶接管。預計污水管線總建設費用為新台幣 1,289,927 仟元。相關建設經費如下表 5-4：

單位：新台幣仟元

年度	第一期				
	98	99	100	101	102
主幹管、次幹管、分支管 及用戶接管建設費用	59,619	147,250	177,388	191,461	158,485
年度	第二期				
	103	104	105	106	107
主幹管、次幹管、分支管 及用戶接管建設費用	152,830	144,859	128,574	56,476	72,985

表 5-4 管網系統建設成本

本案例計畫之總興建成本，分年列表如下：

單位：新台幣仟元

說明			年度									
項目	工程期	工程細項	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
污水廠	第一期	土木建築	49,410	74,118	-	-	-	-	-	-	-	-
		機電	78,156	117,236	-	-	-	-	-	-	-	-
		合計	127,566	191,354	-	-	-	-	-	-	-	-
	第二期	土木建築	-	-	-	-	-	16,960	39,575	-	-	-
		機電	-	-	-	-	-	29,843	69,634	-	-	-
		合計	-	-	-	-	-	46,803	109,209	-	-	-
主次幹管、分支管網			59,619	147,250	111,042	125,115	34,025	93,843	48,129	37,799	15,394	31,903
用戶接管			-	-	66,346	66,346	124,460	58,987	96,730	90,775	41,082	41,082
總計			187,185	338,604	177,388	191,461	158,485	199,633	254,068	128,574	56,476	72,985
累計工程經費			187,185	525,789	703,177	894,638	1,053,123	1,252,756	1,506,824	1,635,398	1,691,874	1,764,859
利息資本化			3,500	10,920	2,750	-	-	4,550	8,033	1,125	-	-

表 5-5 各年之工程總興建成本

折舊費用包括各期工程興建完成並陸續進入營運狀態後，各項工程興建成本(包括直接、間接及利息資本化成本)與後續年期所進行資本重置之相關折舊費用(本計畫以直線法方式計算)。各項工程折舊、重置之年期及重置比率假設如表 5-6。

工程項目	分項工程	折舊及重置年	說明
污水處理廠	土木建築	35	特許期間不需重置
	機電設備	15	原始興建成本60%，並分兩年重置；於特許期間只重置一次。
主、次幹管、分支管	-	35	特許期間不需重置
巷道連接管及用戶接	-	35	特許期間不需重置

表 5-6 各項工程之折舊及重置年期

分年折舊之金額，計算結果如表 5-7 所示

項目 \ 年		第一期					第二期					108	109
		98	99	100	101	102	103	104	105	106	107		
第一期	土木建築	49,410	74,118	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電	78,156	117,236	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	127,566	191,354	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
第二期	土木建築	-	-	-	-	-	16,960	39,575	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	29,843	69,634	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	-	-	-	-	-	46,803	109,209	-	-	-	-	-
主次幹管、分支管網		59,619	147,250	111,042	125,115	34,025	93,843	48,129	37,799	15,394	31,903	-	-
用戶接管				66,346	66,346	124,460	58,987	96,730	90,775	41,082	41,082	-	-
建造成本		187,185	338,604	177,388	191,461	158,485	199,633	254,068	128,574	56,476	72,985	-	-
建造成本	第一期建造成本	187,185	338,604	177,388	191,461	158,485	-	-	-	-	-	-	-
	第二期建造成本	-	-	-	-	-	199,633	254,068	128,574	56,476	72,985	-	-
利息資本化		3,500	10,920	2,750	-	-	4,550	8,033	1,125	-	-	-	-
分期折舊表													
折舊費用	第一期	-	-	18,182	24,629	30,704	34,232	38,413	37,413	37,413	37,413	37,413	37,413
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	7,296	18,011	21,797	23,410	25,496

項目 \ 年		110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
第一期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	58,618	58,618	-	-	-	-	-
	合計	-	-	-	-	-	58,618	58,618	-	-	-	-	-
第二期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29,843	29,843
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29,843	29,843
主次幹管、分支管網		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
用戶接管		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
建造成本		-	-	-	-	-	58,618	58,618	-	-	-	29,843	29,843
建造成本	第一期建造成本	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	第二期建造成本	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
利息資本化		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
分期折舊表													
折舊費用	第一期	37,413	37,413	37,413	33,884	37,413	24,387	24,387	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203
	第二期	25,496	25,496	25,496	25,496	25,496	25,041	24,237	24,125	24,125	24,125	22,135	17,493

表 5-7 分期建設費用折舊攤提

項目 \ 年		122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
第一期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
第二期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
主次幹管、分支管網		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
用戶接管		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
建造成本		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
建造成本	第一期建造成本	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	第二期建造成本	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
利息資本化		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
分期折舊表												
折舊費用	第一期	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203	32,203	24,387
	第二期	19,483	21,472	21,472	21,472	21,472	21,472	21,472	21,472	21,472	21,472	21,472

表 5-7 分期建設費用之折舊攤提(續)

5.1.4 營運費用假設

營運費用之支出可分為固定操作維護費用與變動操作維護費用兩項。

一、固定操作維護費

固定操作維護費包括人事、通訊、基本電費等共計十二項：

1. 人事費

第一期配置人員 16 人(廠長 1 人、組長 1 人、職工 13 人、技工 1 人)，第二期配置人員 18 人(廠長 1 人、組長 1 人、職工 15 人、技工 1 人)。費用中已含各及人員之直接薪資、間接薪資、行政管理費、年終獎金及稅金等，詳細費用列於下表 5-8：

職稱	人數		基本薪資 (元/月)
	第一期	第二期	
廠長	1	1	52,000
組長	1	1	36,000
職工	13	15	24,000
技工	1	1	20,000
人數總計(人)	16	18	-
人事費用總計(千元/月)	6,801	7,578	-

表 5-8 污水廠人事費用概估

2. 通訊費用

預估自營運起每月須支付通訊費用為 10,000 元

3. 基本電費

預估自民國 99 年第一期污水處理廠完工運轉起，推估每月契約容量為 400Kwh/月，第二期(民國 104 年)起為 600Kwh/月，依 177 元/Kwh/月(高壓供電之年平均值)估算。

4. 油料費

預估自營運起每月須支付油料費用為 30,000 元/月

5. 環境品質監測費

預計自營運起為 25,000 元/月

6. 保險費

人事保險費預計每人 5,000 元/年。每年產險費用預計為污水處理廠帳面價值之 0.361%。

7. 設備維護費

預計每年之設備維護費月為污水處理廠總工程費之 1.5%。

8. 基本水費

預計採用管徑 100mm 之自來水管，依自來水公司基本費計算標準，計算後每月約需 2,000 元基本費。

9. 文書及雜費

預計為前八項費用總合之 5%

10. 品質及安全管理監督費

概分為工程興建期及非工程興建期兩部分計算。工程興建期(10 年)依「機關委託技術服務廠商評選及計費辦法」中之工程專案管理技術服務建造費用百分比計算方式(平均約新台幣 25,000 仟元)，非工程興建期間(25 年)則採同法第十三條中之服務成本加工費法計算(平均約新台幣 50,000 仟元)。估計委任費用 35 年總計約 75,000 仟元。

11. 管線維護工程費

係未來每年污水管線的相關保養之費用。預計為主次幹管及分支管網工程費之 0.6%。

12. 土地租金

依據內政部營建署民國 94 年 9 月 21 日營署工程字第 0942916771 號函附件之會議紀錄之第七點所示「辦理民間參與污水下水道系統建設之各縣市政府，在辦理各系統先期計畫時將所列污水處理廠用地租金部分成本計算減列為新台幣 1 元。」故本計畫之土地租金以 1 元估算。

二、變動操作維護費

變動操作維護費用包括藥品費、流動電費、污泥處置費、水費、水質檢驗費及雜費等六項費用：

1. 藥品費

預計第一期平均每處理 1CMD 所需之藥品費為 0.3 元，第二期平均每處理 1CMD 所需之藥品費為 0.2 元。

2. 流動電費

依每年實際處理污水量計算，預估每處理 1CMD 污水所需花費流動電費為 1 元。

3. 污泥處理費

每噸污泥的清運及處置費以 2,500 元計算。(以含水率 75%推估每噸污水產生 0.43 公斤之污泥)

4. 自來水費

預計每 1CMD 污水處理需 0.0017 噸自來水，每噸自來水以 9 元估計。

5. 水質檢測費

預計第一期平均每 1CMD 所需之水質檢測費為 0.15 元，第二期平均每處理 1CMD 所需之費用為 0.09 元。

6. 雜費

針對前述變動費用之預估可能尚有未盡之處，以雜費編列，為前五項費用總合之 5%。

污水處理廠之營運費用，為分年之固定成本維護費及變動成本維護費的加總。分年之計算結果如表 5-9 所示。

	第一期工程施工期					第二期工程施工期						
	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
固定操作維護費	2,500	2,500	19,630	20,336	20,496	21,209	21,892	25,783	25,808	25,933	25,367	25,301
變動操罪維護費	-	-	866	2,598	5,088	7,483	9,515	11,210	12,821	13,826	16,286	18,246
操作維護費用總計	2,500	2,500	20,496	22,934	25,584	28,692	31,407	36,993	38,629	39,759	41,653	43,547
	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
固定操作維護費	25,234	25,167	25,101	25,035	24,968	25,155	25,326	25,261	25,196	25,130	25,194	25,249
變動操罪維護費	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246
操作維護費用總計	43,480	43,413	43,347	43,281	43,214	43,401	43,572	43,507	43,442	43,376	43,440	43,495
	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
固定操作維護費	25,184	25,119	25,054	24,990	24,925	24,860	24,795	24,730	24,666	24,600	24,535	
變動操罪維護費	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	18,246	
操作維護費用總計	43,430	43,365	43,300	43,236	43,171	43,106	43,041	42,976	42,912	42,846	42,781	

表 5-9 分年操作維護費用

5.1.5 營運收入假設

一、 污水處理量假設

根據本計畫工程規劃，預計自民國 100 年開始可處理污水。後續將隨巷道連接管及用戶接管工程完工即自行納管用戶增加而持續增加污水處理量，預計民國 100 年年處理量約為 324,697 噸/年(其中經由民間機構接管工程所流進的水量為 305,155 噸/年)，至民國 109 年底達到最大年處理量 7,300,000CMD。下表為預計之各年度污水處理量：

年度	100	101	102	103	104
設計日處理量(CMD)	10,000	10,000	10,000	10,000	10,000
預計每年民間機構施作 用戶接管工程之污水處理量(噸/年)	305,155	915,466	1,793,071	2,636,828	3,353,045
預計每年污水廠年處理量(噸/年)	324,697	973,915	1,907,527	2,805,197	3,567,123
年度	105	106	107	108	109-132
設計日處理量(CMD)	20,000	20,000	20,000	20,000	20,000
預計每年民間機構施作 用戶接管工程之污水處理量(噸/年)	4,215,471	4,821,943	5,199,854	6,344,405	7,300,000
預計每年污水廠年處理量(噸/年)	4,484,510	5,129,542	5,531,703	6,516,436	7,300,000

表 5-10 預計之各年度污水處理量

二、 污水量處理費用假設

根據各項興建成本、營運費用估計，同時給予股東 10%之內部報酬率設算求得，各項費率結果如下表 5-11：

項目	費率	計算基礎
污水廠、主次幹管及分支管 建設經費加權平均費率	18.44	每噸建設費加權平均費率係以全期建設費攤提 收入與全年期年設計容量相除而得
巷道連接管及用戶接管設費	8.89	依民間機構施作用戶接管工程之污水處理量
固定操作維護費用	5.07	依每年實際污水處理量
變動操作維護費用	2.52	依每年實際污水處理量
合計	34.92	

表 5-11 預計污水處理費

以分年的污水處理費用作為營運之主要收入，以預計污水處理費率乘上每年處理的污水量最為此項收入估計的方法。分期工程收入之折現值，以 CAPM 期望報酬%作為折現率，期初之總收入分別為\$1,256,000 仟元及\$922,583 仟元。計算過程如下表 5-12 所示：

	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
年污水處理量(千噸)	-	-	325	974	1,908	2,805	3,567	4,485	5,130	5,532	6,516	7,300
第一期污水廠污水處理量	-	-	325	974	1,908	2,805	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567
第二期污水廠污水處理量	-	-	-	-	-	-	-	918	1,563	1,965	2,949	3,733
污水處理單價=\$34.92(元/噸)												
收入	第一期	-	-	11,349	34,012	66,627	97,951	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560
	\$1, 256, 000											
	第二期	-	-	-	-	-	-	32,057	54,580	68,618	102,979	130,356
	\$922, 583											
TOTAL	-	-	11,349	34,012	66,627	97,951	124,560	156,616	179,140	193,177	227,539	254,916
	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
年污水處理量(千噸)	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300
第一期污水廠污水處理量	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567
第二期污水廠污水處理量	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733
污水處理單價=\$34.92(元/噸)												
收入	第一期	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560
	第二期	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356
TOTAL	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916
	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
年污水處理量(千噸)	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	7,300	
第一期污水廠污水處理量	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	3,567	
第二期污水廠污水處理量	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	3,733	
污水處理單價=\$34.92(元/噸)												
收入	第一期	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	124,560	
	第二期	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	130,356	
TOTAL	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	254,916	

表 5-12 預期之分期營運收入

5.1.6 序列複合選擇權分析

一、評價模型參數假設

根據 5.1 至 5.5 節案例資料之各項基本假設，將計畫相關資料加以計算、整理，序列複合選擇權評價模型中的參數整理如下：

1. 無風險利率(r)

利用政府短期公債之利率作為無風險利率的參數值，短期公債利率值坐落於 1%至 7% 之間，將評價模型中之無風險利率參數進行情境分析。

2. 股利率(q)

此案例因不考慮股東權益部分之融資活動，所以將評價模型中之股利率參數值設為零。即 $q=0$ 。

3. 資產變異數(σ^2)

整理公用事業上市、上櫃之瓦斯公司相關類股，計算出股票報酬率的年標準差 0.16(詳細計算過程於附件二呈現)，作為本評價模型中資產變異之標準差的評估基數值。後續，針對此項參數進行情境分析(Scenario Analysis)，資產變異之標準差(σ)取值範圍在 0.1~0.6 之間。

4. 期初資產價值(V_0)

以案例計畫之預估營運收入作為本計畫之資產價值。計算方式為：

$$\text{收入(元)} = \text{年污水處理量(噸)} \times \text{單位汙水處理費率(\$34.92 元/噸)}$$

再將各年度之分期營運收入以 CAPM 法計算求得之期望報酬率 6.49%作為折現率，折現後求得各期工程之期初資產價值。分年之總收入於附件三呈現。

5. 履約價格(K)

以案例之分期總成本，作為序列複合選擇權評價模型之各期履約價格。履約價格之折現值以 CAPM 計算得的期望報酬率 6.49%作為折現率。分年之總成本於附件三呈現。

$$\text{成本} = \text{維護操作費用} + \text{折舊費用}$$

二、污水下水道工程之特性

污水下水道工程之建設計畫，有一些沉默成本(例如：開辦費)。無論後續工程進行與否皆要在第一期工程建設期間支付的成本項目，於成本的劃分上，部分應該要歸屬為第二期工程的成本，應進行費用之拆解提列。

再者，第一期工程之施工規劃時，往往會考量後續各期興建計畫進行的可能性，在一些工程項目之用料的選擇上，使用單價較高之材料。例如：在考量後續工程可能進行之需求後，幹管工程的管徑會選擇使用較大的管徑施工，如此做法提高了第一期工程之工程成本。但是，如果單單只考量該期工程之需求，並不需要使用如此大的管徑。所以，凡是在第一期工程為了後續工程考量而增加的相關成本，應該提列作為第二期工程之成本。

詳細了解污水下水道工程之規劃施工的特性後，第一期的工程總成本 E_1 ，應作為第一期工程之履約價格 $K_{\{1\},1}$ 以及第二期工程之第一個履約價格 $K_{\{2\},1}$ 的總和。第一期工程成本在計算上，會有一比例 x ，將第一期之工程成本分為兩個部分。其中， x 之比例值為：

[第一期工程之總成本-(歸屬於第二期工程的成本金額)]/ 第一期工程之總成本

最後，求得本案例計畫之 x 的比例值為 0.942

成本分配之示意圖如下圖 5-1：

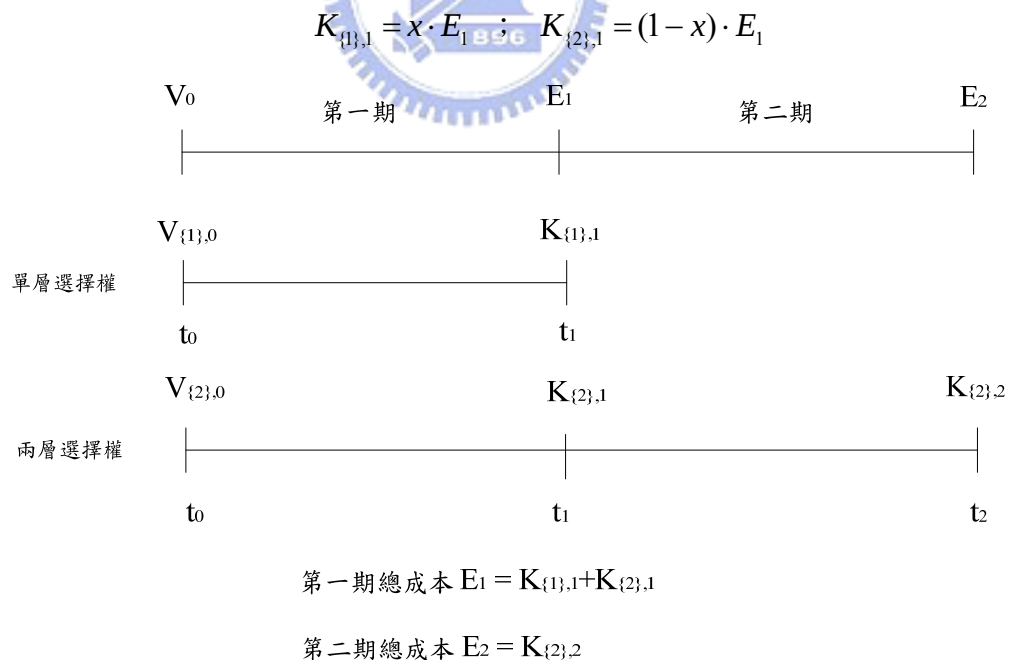


圖 5-1 案例一之分期建設成本配置

一個分兩期興建之案例計畫，在利用序列複合選擇權評價模型進行計畫價值評估時，評價模型之數據的處理，應要分成兩個步驟：

第一，針對各期工程所產生之收入及成本項，進行各年度分項費用的拆解；

第二，針對收入項及成本項的折現時間點不同而進行折現值的調整及修正。

第一期工程：

為一個單層的選擇權，利用第一期之各年度營運收入的折現值作為案例計畫之期初資產價值 ($V_{\{1\},0}$)，折現起始點為本計畫之起始年。以第一期工程施工結束後並且開始營運之營運起始點作為計畫之履約價格 ($K_{\{1\},1}$) 的折現原點 ($t=2$)。計畫之履約價格的數值為第一期工程總成本之折現值(E_1)乘以一分配比例 x ，即 $K_{\{1\},1} = x \cdot E_1$ 。

第二期工程：

第二期工程為一個兩層之序列複合選擇權。評價模型中的相關數據整理，以第二期工程之分年營運收入的折現值作為資產價值 ($V_{\{2\},0}$)，折現起始點同樣為計畫之起始年。履約價格的部分， $K_{\{2\},1}$ 為第一期工程成本中歸屬於第二期工程應該分擔之成本，為第一期總工程成本乘以一個比例值 $(1-x)$ ，即 $K_{\{2\},1} = (1-x) \cdot E_1$ 。第二期工程之施工總成本的折現值作為第二個履約價格 $K_{\{2\},2}$ 之值，折現之始點為第二期工程施工完成並開始營運之計畫時間點 ($t=7$)。

本案例計畫之總價值為各期工程計算得之選擇權價值的加總值，示意如下圖 5-2。

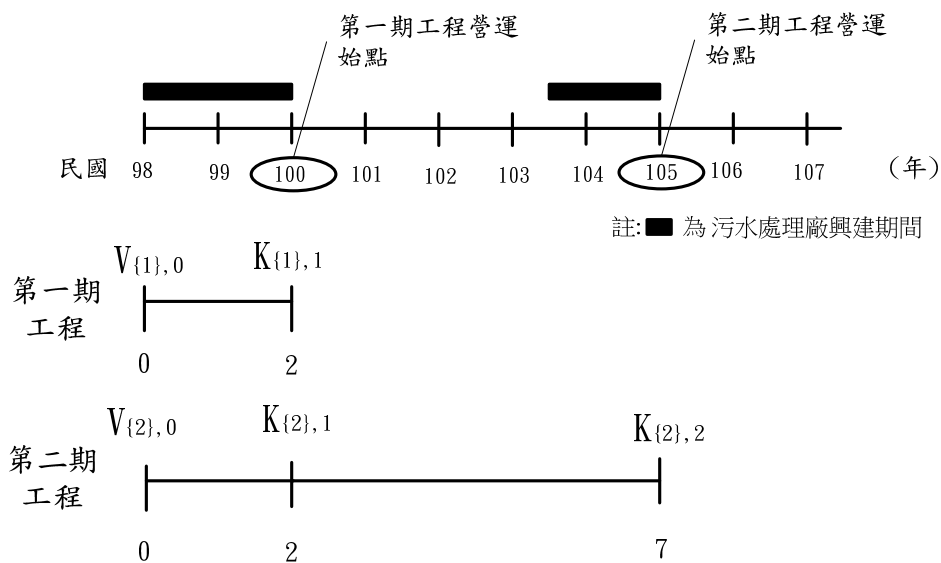


圖 5-2 案例一之序列複合選擇權分析

第一期工程的選擇權價值為一個單層的選擇權，利用單層選擇權評價模型求得第一期工程之總價值。其中，評價模型中所需之參數，無風險利率以 4.19%，股利率以 0%，資產變異之標準差以 0.16 作為評價模型的參數值。經由(3.14)之單層選擇權評價模型公式計算出第一期工程之計畫價值為\$596,918（仟元）。

評價模型的項目	參數	數值
第一期總收入之折現值	V_0	1,256,000(仟元)
履約價格	$K_1 (= K_{\{1\},1})$	716,836(仟元)
股利率	q	0
無風險利率	r	0.0419
資產價值變異之標準差	σ	0.16
$C_1(V, t_0)$		\$ 596,918 (元)

第二期工程的選擇權價值，利用二層的序列複合選擇權評價模型進行價值的評估。評價模型所需之參數，無風險利率以 4.19%，股利率以 0%，資產變異之標準差以 0.16 作為評價模型的參數值。最終利用公式(3.28)評估出第二期工程的計畫價值為為\$ 515,717（仟元）。

評價模型的項目	參數	數值
第二期總收入之折現值	V_0	922,583（仟元）
	$K_1 (= K_{\{2\},1})$	44,585（仟元）
履約價格	$K_2 (= K_{\{2\},2})$	537,747（仟元）
股利率	q	0
無風險利率	r	0.0419
資產價值變異之標準差	σ	0.16
資產價值約當值	$\bar{V}_{1,2}$	358,528（仟元）
相關係數	$\rho_{1,2}$	0.5345
$C_2(V, t_0)$		\$ 515,717 (元)

其中， $\rho_{1,2} = \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}$ ， $t_0 = 0$ ， $t_1 = 2$ ， $t_2 = 7$ 。

經由評價模型公式計算出之計畫價值最終，利用序列複合選擇權評價模型評估案例計畫的總價值，算得計畫之總價值為\$1,112,635(仟元)。

由於評價模型參數的取值會對計畫價值之評估結果造成影響。下一節，將針對序列複合選擇權評價模型中之參數進行取值的情境分析。

5.1.7 評估結果比較與取值之情境分析

為了顯示序列複合選擇權評價模型應用於分期開發之公共建設價值評估的優點，利用傳統淨現值評估法、單一選擇權評價法，作為序列複合選擇權評價模型在計畫價值評估方面的對應比較方法。利用三種評估方法，評估案例計畫之價值。隨著資產價值變異標準差(σ)值的改變，可看出計畫價值之變動情況。

在進行參數資料的整理時，由於不同的參數值之取用，將會對計畫價值產生不同之結果影響。針對營運收入項之污水處理費率以及評價模型中之無風險利率(r)、資產價值變異之標準差(σ)等項目進行取值之結果分析。並且，將傳統淨現值法估算的計畫投資價值作為評估基值，此案例的投資價值經由傳統淨現值法計算為\$1,160,726,830 元。將計畫投資價值的數據進行一般化(normalization)，以方便進行各價值評估方法的比較分析。結果於圖 5-3、5-4 及 5-5 中呈現。

序列複合選擇權評價模型中之 σ 參數，本案例之作法為，利用公用事業之瓦斯相關類股之股價報酬率的年標準差(0.16)作為評價模型的參考數值。此作法僅考量了股價波動對未來計畫價值所造成之資產變異影響，尚未全面性的涵括所有可能影響計畫價值之報酬率的標準差。例如：計畫的收入項中，污水處理為收入的主要來源，所以必須考量計畫之預估污水處理量之變異情況。又污水之處理量乃依照該地區之人口成長率而定，所以，此項條件中亦包含了人口成長率之變異的標準差。所以，資產變異之標準差的取值，若再考慮其他可能造成計畫價值變動之相關因素，參數的取值將會有所異動(提高)。這樣，經由序列複合選擇權評價模型所評估之專案價值將會有所不同。針對評價模型的參數取值問題，將參數進行情境分析(scenario analysis)，圖 5-3 顯示標準差取值的變異程度對計畫之總價值所造成的影響。

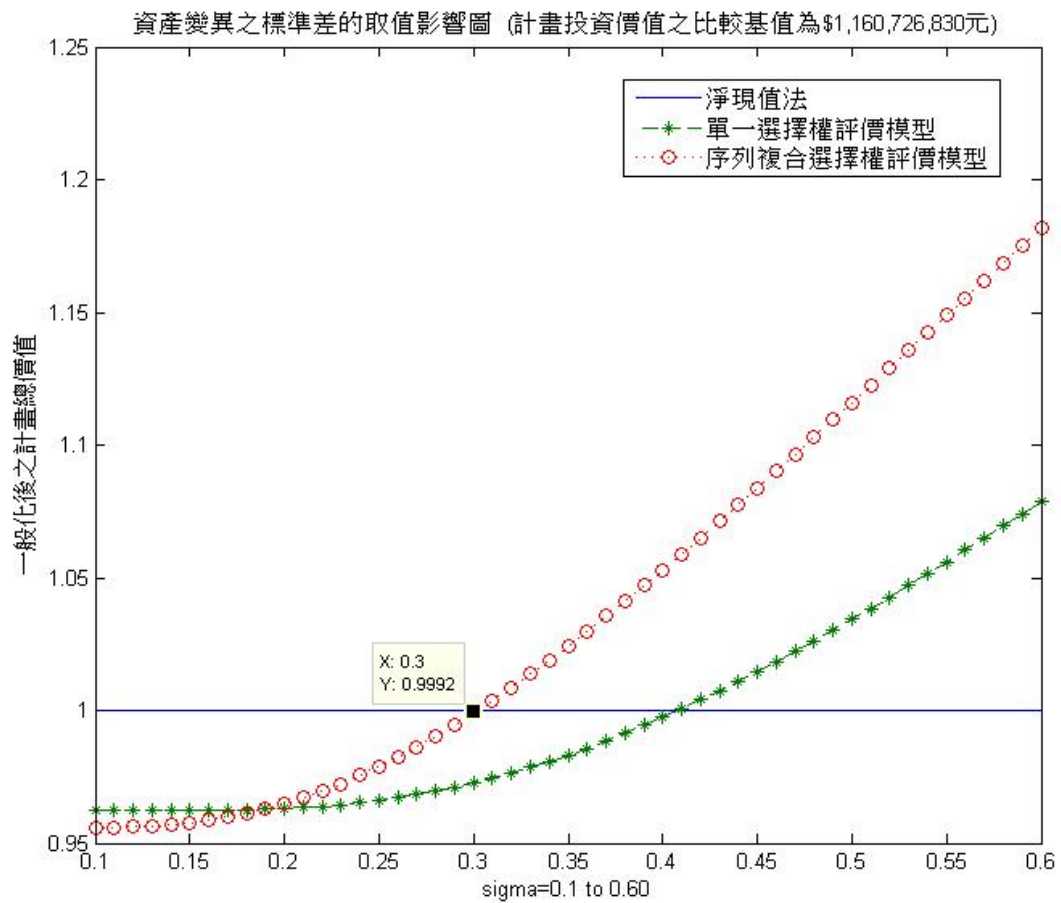


圖 5-3 計畫價值評估結果之比較(sigma 取值的影響)

圖 5-3 所示，由於選擇權評價模型的特性：當資產價值在到期日時大於履約價格，投資者才會執行選擇權。亦即，利用選擇權評價模型進行專案價值的評估時，選擇權的特性限制了計畫之下方風險。所以，資產價值之標準差(σ)愈大，亦即風險愈高的專案計畫，經由選擇權評價模型評估之專案的總價值會愈高。以本案例為例，當資產變異之標準差值大於 0.3 以後，經由序列複合選擇權評價模型評估出的計畫總投資價值將會大於淨現值法所估算求得之計畫價值。並且當資產變異之標準差值大於 0.41 時，單一選擇權法評估之計畫價值會大於傳統淨現值的評估結果。同一情況下，序列複合選擇權評價法評估出的計畫價值卻已經比淨現值法評估得到的計畫價值多 7%。

再比較不同之選擇權評價方法，經由序列複合選擇權評價模型評估之計畫總價值又會比單一選擇權評價模型所評估出的計畫價值更高。原因在於，將工程分成數個階段進行，將會有數個執行選擇權的權利，可以依照當時的投資情況，隨時進行後續計畫投資與否的調整。因此，相對於淨現金流量法與單一選擇權評價方法，序列複合選擇權評價模型更能

顯現出分期開發之專案建設的計畫價值。

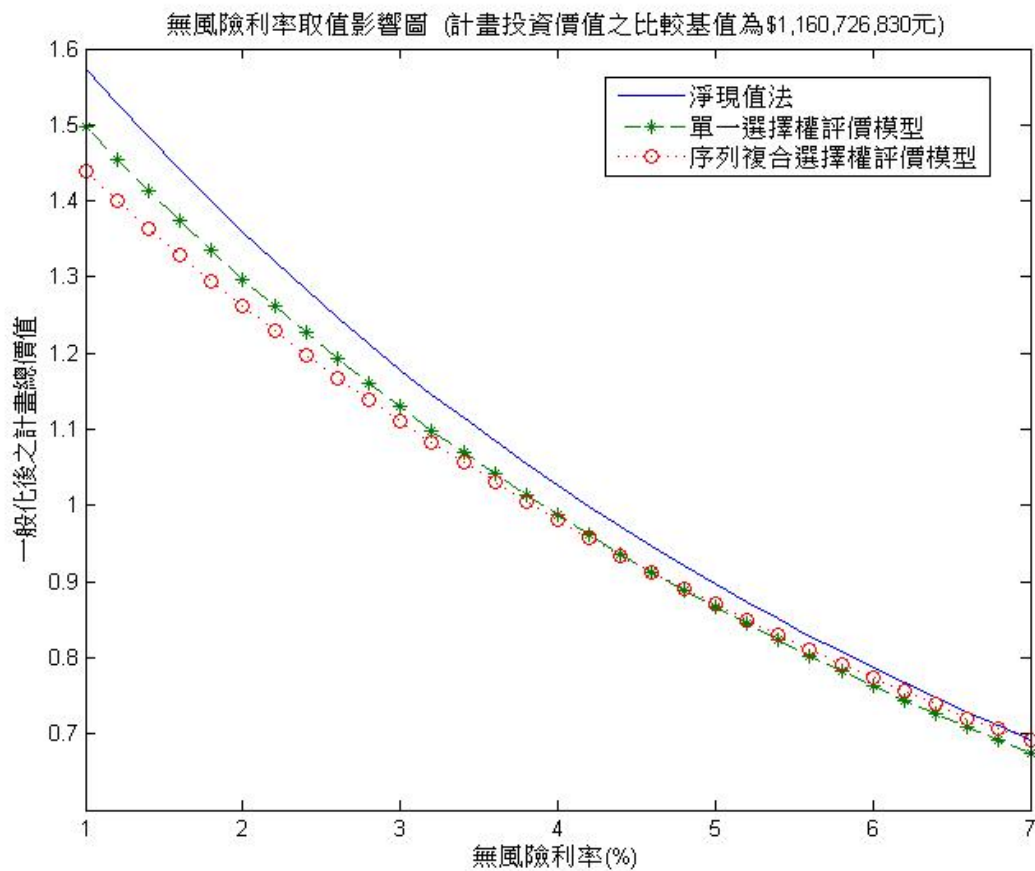


圖 5-4 計畫價值評估結果之比較 (無風險利率之取值影響)

圖 5-4 顯示，無風險利率對於計畫價值具有負向之影響。計畫價值經由不同評估方法所得到之結果顯示，無風險利率愈高評估後所得到的計畫投資價值將會愈小。其中，無風險利率之取值對於淨現值法的敏感程度最高，其次為單一選擇權法，序列複合選擇權評價法對於無風險利率向參數之敏感度最低。當無風險利率參數值大於 7% 時，經由序列複合選擇權評估得到的計畫價值將會高於淨現值法所估算的計畫價值。

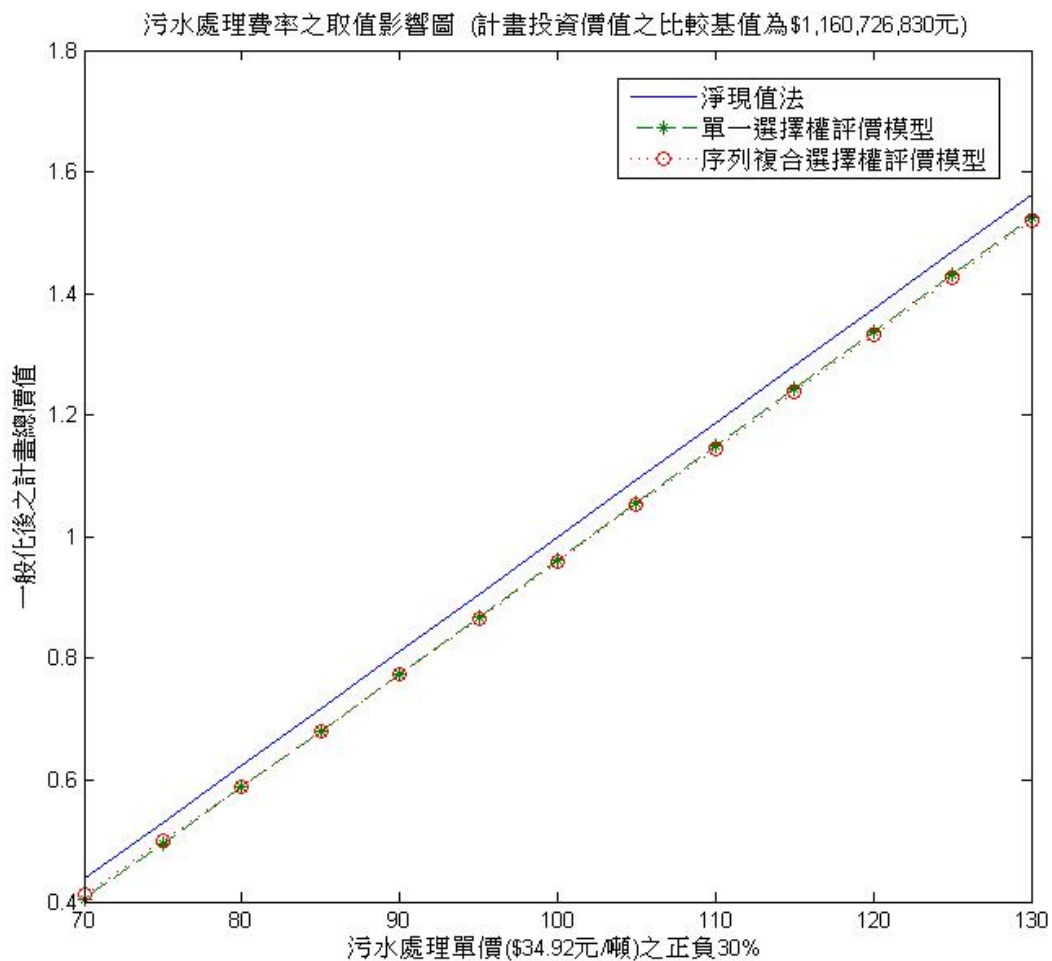


圖 5-5 計畫價值評估結果之比較 (污水處理費率之取值影響)

污水處理費率之取值，對於計畫價值具有正向之影響。污水處理費率的取值愈高，所評估出的計畫價值就會愈高。圖 5-5 中顯示，在污水處理費率的取值上，以不同的財務評估方法評估計畫價值，不同的財務評估方法最終得到的計畫價值結果，以此應用案例而言，三種評估方法皆具有相同的斜率。污水處理費率之取值差異影響程度，各評價方法大致相同。

5.1.8 小結

利用選擇權評價模型評估專案的價值，由於資料收集的過程不同，評估的結果會受到這些資料數據的影響。表 5-13 中顯示，在其他條件不變的情況下，選擇權評價模型中之無風險利率參數值愈大，評估的計畫價值就愈小。同樣，在其他條件不變的情況下，資產變異的標準差之參數取值愈大，經由序列複合選擇權評價模型評估後的計畫總價值會愈大。

淨現值(NPV)	折現率	無風險利率	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26
1,827,440	3.99%	1.00%	1,661,102	1,661,545	1,662,305	1,663,458	1,665,063	1,667,159	1,669,770	1,672,911	1,676,585	1,680,790	1,685,518	1,690,759	1,696,497	1,702,717	1,709,399	1,716,524	1,724,069
1,773,944	4.14%	1.20%	1,617,787	1,618,193	1,618,894	1,619,967	1,621,467	1,623,437	1,625,901	1,628,875	1,632,365	1,636,369	1,640,881	1,645,892	1,651,388	1,657,353	1,663,770	1,670,618	1,677,879
1,722,315	4.30%	1.40%	1,575,849	1,576,219	1,576,867	1,577,863	1,579,267	1,581,118	1,583,444	1,586,260	1,589,575	1,593,388	1,597,695	1,602,487	1,607,751	1,613,473	1,619,636	1,626,221	1,633,208
1,672,476	4.46%	1.60%	1,535,232	1,535,570	1,536,168	1,537,094	1,538,406	1,540,146	1,542,341	1,545,008	1,548,157	1,551,789	1,555,900	1,560,483	1,565,527	1,571,017	1,576,937	1,583,270	1,589,996
1,624,358	4.61%	1.80%	1,495,892	1,496,202	1,496,752	1,497,613	1,498,840	1,500,475	1,502,546	1,505,073	1,508,064	1,511,524	1,515,449	1,519,834	1,524,667	1,529,935	1,535,624	1,541,715	1,548,191
1,577,893	4.77%	2.00%	1,457,783	1,458,066	1,458,573	1,459,373	1,460,520	1,462,056	1,464,011	1,466,404	1,469,247	1,472,543	1,476,291	1,480,487	1,485,119	1,490,176	1,495,642	1,501,503	1,507,739
1,533,016	4.93%	2.20%	1,420,859	1,421,117	1,421,585	1,422,328	1,423,400	1,424,843	1,426,688	1,428,955	1,431,657	1,434,797	1,438,377	1,442,392	1,446,833	1,451,687	1,456,942	1,462,581	1,468,588
1,489,664	5.08%	2.40%	1,385,079	1,385,314	1,385,745	1,386,435	1,387,437	1,388,794	1,390,535	1,392,683	1,395,250	1,398,243	1,401,663	1,405,506	1,409,763	1,414,425	1,419,477	1,424,905	1,430,692
1,447,779	5.24%	2.60%	1,350,399	1,350,614	1,351,011	1,351,652	1,352,588	1,353,863	1,355,506	1,357,541	1,359,982	1,362,835	1,366,102	1,369,781	1,373,864	1,378,341	1,383,199	1,388,425	1,394,002
1,407,304	5.40%	2.80%	1,316,785	1,316,981	1,317,347	1,317,942	1,318,817	1,320,015	1,321,566	1,323,494	1,325,814	1,328,534	1,331,657	1,335,179	1,339,096	1,343,396	1,348,069	1,353,101	1,358,476
1,368,183	5.55%	3.00%	1,284,196	1,284,374	1,284,711	1,285,263	1,286,081	1,287,206	1,288,671	1,290,498	1,292,704	1,295,298	1,298,282	1,301,655	1,305,413	1,309,545	1,314,041	1,318,887	1,324,069
1,330,366	5.71%	3.20%	1,252,597	1,252,759	1,253,069	1,253,582	1,254,346	1,255,404	1,256,786	1,258,518	1,260,616	1,263,089	1,265,942	1,269,174	1,272,779	1,276,750	1,281,077	1,285,745	1,290,742
1,293,801	5.87%	3.40%	1,221,953	1,222,101	1,222,386	1,222,862	1,223,576	1,224,570	1,225,875	1,227,517	1,229,512	1,231,871	1,234,599	1,237,695	1,241,156	1,244,973	1,249,137	1,253,635	1,258,454
1,258,443	6.02%	3.60%	1,192,229	1,192,364	1,192,626	1,193,068	1,193,735	1,194,669	1,195,901	1,197,458	1,199,356	1,201,606	1,204,215	1,207,182	1,210,505	1,214,175	1,218,183	1,222,519	1,227,168
1,224,243	6.18%	3.80%	1,163,395	1,163,517	1,163,759	1,164,168	1,164,792	1,165,669	1,166,833	1,168,309	1,170,115	1,172,262	1,174,758	1,177,602	1,180,792	1,184,322	1,188,182	1,192,361	1,196,847
1,191,160	6.34%	4.00%	1,135,419	1,135,531	1,135,753	1,136,133	1,136,715	1,137,540	1,138,639	1,140,039	1,141,757	1,143,807	1,146,194	1,148,921	1,151,985	1,155,380	1,159,098	1,163,128	1,167,457
1,159,151	6.49%	4.20%	1,108,272	1,108,374	1,108,578	1,108,930	1,109,475	1,110,250	1,111,288	1,112,615	1,114,251	1,116,208	1,118,492	1,121,107	1,124,051	1,127,318	1,130,899	1,134,786	1,138,965
1,128,176	6.65%	4.40%	1,081,925	1,082,018	1,082,205	1,082,532	1,083,041	1,083,769	1,084,750	1,086,009	1,087,566	1,089,435	1,091,622	1,094,130	1,096,959	1,100,102	1,103,554	1,107,303	1,111,339
1,098,196	6.81%	4.60%	1,056,351	1,056,435	1,056,607	1,056,910	1,057,385	1,058,070	1,058,997	1,060,192	1,061,674	1,063,459	1,065,553	1,067,959	1,070,678	1,073,704	1,077,031	1,080,648	1,084,546
1,069,174	6.96%	4.80%	1,031,523	1,031,600	1,031,758	1,032,039	1,032,483	1,033,127	1,034,003	1,035,137	1,036,549	1,038,253	1,040,259	1,042,568	1,045,182	1,048,096	1,051,303	1,054,794	1,058,560
1,041,075	7.12%	5.00%	1,007,418	1,007,487	1,007,633	1,007,893	1,008,308	1,008,913	1,010,817	1,012,163	1,012,163	1,013,791	1,015,712	1,017,930	1,020,443	1,023,249	1,026,342	1,029,713	1,033,351
1,013,865	7.28%	5.20%	984,008	984,070	984,204	984,446	984,833	985,403	986,185	987,207	988,489	990,046	991,887	994,016	996,433	999,137	1,002,120	1,005,374	1,008,891
987,511	7.43%	5.40%	961,271	961,328	961,451	961,675	962,037	962,573	963,312	964,283	965,505	966,993	968,758	970,802	973,129	975,733	978,611	981,755	985,154
961,982	7.59%	5.60%	939,184	939,236	939,349	939,557	939,895	940,399	941,099	942,021	943,186	944,609	946,300	948,265	950,504	953,014	955,792	958,829	962,116
937,249	7.75%	5.80%	917,728	917,775	917,879	918,071	918,388	918,861	919,523	920,400	921,511	922,872	924,494	926,382	928,538	930,958	933,639	936,574	939,753
913,282	7.90%	6.00%	896,879	896,921	897,016	897,195	897,491	897,937	898,563	899,396	900,456	901,759	903,315	905,130	907,205	909,539	912,128	914,965	918,041
890,053	8.06%	6.20%	876,616	876,654	876,741	876,907	877,184	877,604	878,197	878,988	880,000	881,247	882,740	884,485	886,484	888,736	891,236	893,979	896,955
867,537	8.22%	6.40%	856,923	856,958	857,038	857,192	857,451	857,846	858,408	859,161	860,127	861,321	862,754	864,432	866,359	868,531	870,947	873,599	876,480
845,708	8.37%	6.60%	834,778	834,810	834,884	835,027	835,270	835,644	836,179	836,899	837,827	838,977	840,360	841,984	843,850	845,957	848,302	850,879	853,680
824,542	8.53%	6.80%	819,166	819,195	819,263	819,395	819,621	819,972	820,476	821,158	822,039	823,135	824,457	826,012	827,801	829,826	832,082	834,565	837,266
804,014	8.69%	7.00%	801,068	801,094	801,156	801,279	801,491	801,822	802,299	802,949	803,791	804,841	806,111	807,608	809,334	811,289	813,471	815,873	818,490

表 5-13 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果

淨現值(NPV)	折現率	無風險利率	0.27	0.28	0.29	0.3	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.4	0.41	0.42	0.43
1,827,440	3.99%	1.00%	1,732,014	1,740,337	1,749,016	1,758,029	1,767,355	1,776,973	1,786,863	1,797,005	1,807,380	1,817,970	1,828,759	1,839,729	1,850,865	1,862,151	1,873,574	1,885,120	1,896,775
1,773,944	4.14%	1.20%	1,685,530	1,693,551	1,701,920	1,710,616	1,719,619	1,728,907	1,738,462	1,748,264	1,758,295	1,768,537	1,778,973	1,789,588	1,800,365	1,811,290	1,822,349	1,833,529	1,844,817
1,722,315	4.30%	1.40%	1,640,578	1,648,309	1,656,381	1,664,773	1,673,466	1,682,438	1,691,672	1,701,147	1,710,847	1,720,754	1,730,852	1,741,124	1,751,556	1,762,134	1,772,843	1,783,671	1,794,606
1,672,476	4.46%	1.60%	1,597,096	1,604,550	1,612,337	1,620,438	1,628,832	1,637,501	1,646,426	1,655,588	1,664,970	1,674,555	1,684,327	1,694,270	1,704,371	1,714,614	1,724,987	1,735,477	1,746,071
1,624,358	4.61%	1.80%	1,555,032	1,562,220	1,569,734	1,577,555	1,585,664	1,594,041	1,602,669	1,611,530	1,620,606	1,629,882	1,639,341	1,648,968	1,658,749	1,668,671	1,678,720	1,688,884	1,699,151
1,577,893	4.77%	2.00%	1,514,333	1,521,265	1,528,517	1,536,070	1,543,904	1,552,002	1,560,345	1,568,916	1,577,699	1,586,676	1,595,834	1,605,157	1,614,631	1,624,243	1,633,981	1,643,831	1,653,783
1,533,016	4.93%	2.20%	1,474,945	1,481,633	1,488,633	1,495,928	1,503,499	1,511,328	1,519,397	1,527,690	1,536,190	1,544,882	1,553,750	1,562,780	1,571,959	1,581,273	1,590,710	1,600,258	1,609,907
1,489,664	5.08%	2.40%	1,436,821	1,443,275	1,450,034	1,457,082	1,464,399	1,471,970	1,479,776	1,487,801	1,496,030	1,504,446	1,513,035	1,521,784	1,530,678	1,539,706	1,548,854	1,558,112	1,567,468
1,447,779	5.24%	2.60%	1,399,913	1,406,141	1,412,669	1,419,479	1,426,554	1,433,876	1,441,429	1,449,197	1,457,164	1,465,315	1,473,637	1,482,114	1,490,735	1,499,486	1,508,356	1,517,334	1,526,408
1,407,304	5.40%	2.80%	1,364,178	1,370,191	1,376,497	1,383,078	1,389,920	1,397,003	1,404,313	1,411,834	1,419,549	1,427,446	1,435,509	1,443,725	1,452,082	1,460,568	1,469,170	1,477,878	1,486,681
1,368,183	5.55%	3.00%	1,329,571	1,335,376	1,341,468	1,347,831	1,354,448	1,361,302	1,368,379	1,375,661	1,383,135	1,390,786	1,398,601	1,406,566	1,414,669	1,422,898	1,431,242	1,439,690	1,448,232
1,330,366	5.71%	3.20%	1,296,051	1,301,658	1,307,546	1,313,698	1,320,099	1,326,733	1,333,584	1,340,638	1,347,879	1,355,294	1,362,869	1,370,592	1,378,451	1,386,433	1,394,528	1,402,726	1,411,016
1,293,801	5.87%	3.40%	1,263,580	1,268,996	1,274,687	1,280,637	1,286,831	1,293,253	1,299,887	1,306,720	1,313,738	1,320,925	1,328,270	1,335,760	1,343,383	1,351,128	1,358,983	1,366,939	1,374,986
1,258,443	6.02%	3.60%	1,232,116	1,237,349	1,242,851	1,248,607	1,254,602	1,260,820	1,267,246	1,273,867	1,280,669	1,287,638	1,294,761	1,302,026	1,309,422	1,316,937	1,324,562	1,332,285	1,340,098
1,224,243	6.18%	3.80%	1,201,626	1,206,683	1,212,004	1,217,573	1,223,376	1,229,398	1,235,624	1,242,041	1,248,635	1,255,392	1,262,302	1,269,351	1,276,528	1,283,823	1,291,224	1,298,723	1,306,310
1,191,160	6.34%	4.00%	1,172,073	1,176,962	1,182,108	1,187,498	1,193,117	1,198,950	1,204,983	1,211,204	1,217,597	1,224,152	1,230,856	1,237,696	1,244,662	1,251,744	1,258,931	1,266,213	1,273,582
1,159,151	6.49%	4.20%	1,143,425	1,148,151	1,153,130	1,158,348	1,163,789	1,169,441	1,175,289	1,181,320	1,187,521	1,193,880	1,200,385	1,207,024	1,213,787	1,220,664	1,227,643	1,234,717	1,241,876
1,128,176	6.65%	4.40%	1,115,648	1,120,219	1,125,037	1,130,088	1,135,359	1,140,836	1,146,505	1,152,354	1,158,370	1,164,541	1,170,854	1,177,300	1,183,867	1,190,545	1,197,325	1,204,197	1,211,153
1,098,196	6.81%	4.60%	1,088,712	1,093,133	1,097,796	1,102,688	1,107,795	1,113,104	1,118,601	1,124,274	1,130,111	1,136,100	1,142,229	1,148,488	1,154,866	1,161,353	1,167,940	1,174,618	1,181,378
1,069,174	6.96%	4.80%	1,062,587	1,066,865	1,071,379	1,076,118	1,081,067	1,086,213	1,091,545	1,097,049	1,102,714	1,108,527	1,114,479	1,120,557	1,126,753	1,133,056	1,139,457	1,145,947	1,152,519
1,041,075	7.12%	5.00%	1,037,246	1,041,385	1,045,757	1,050,348	1,055,145	1,060,135	1,065,307	1,070,648	1,076,147	1,081,792	1,087,572	1,093,476	1,099,496	1,105,621	1,111,842	1,118,151	1,124,541
1,013,865	7.28%	5.20%	1,012,658	1,016,665	1,020,899	1,025,348	1,029,998	1,034,839	1,039,857	1,045,041	1,050,380	1,055,861	1,061,476	1,067,213	1,073,063	1,079,016	1,085,064	1,091,199	1,097,412
987,511	7.43%	5.40%	988,800	992,679	996,780	1,001,092	1,005,602	1,010,298	1,015,168	1,020,201	1,025,385	1,030,710	1,036,165	1,041,740	1,047,426	1,053,213	1,059,094	1,065,060	1,071,103
961,982	7.59%	5.60%	965,643	969,400	973,375	977,555	981,929	986,486	991,213	996,100	1,001,135	1,006,308	1,011,609	1,017,028	1,022,556	1,028,183	1,033,902	1,039,705	1,045,584
937,249	7.75%	5.80%	943,168	946,806	950,658	954,712	958,956	963,378	967,968	972,714	977,605	982,632	987,785	993,053	998,428	1,003,901	1,009,464	1,015,109	1,020,829
913,282	7.90%	6.00%	921,346	924,872	928,606	932,538	936,656	940,949	945,406	950,016	954,769	959,655	964,664	969,786	975,014	980,337	985,750	991,243	996,809
890,053	8.06%	6.20%	900,157	903,573	907,194	911,008	915,005	919,173	923,503	927,982	932,601	937,351	942,221	947,203	952,288	957,468	962,734	968,080	973,499
867,537	8.22%	6.40%	879,581	882,893	886,404	890,105	893,985	898,033	902,239	906,592	911,083	915,701	920,437	925,283	930,231	935,271	940,397	945,601	950,876
845,708	8.37%	6.60%	856,697	859,920	863,339	866,944	870,723	874,667	878,766	883,009	887,386	891,888	896,506	901,231	906,056	910,971	915,970	921,045	926,190
824,542	8.53%	6.80%	840,178	843,291	846,597	850,084	853,743	857,563	861,535	865,649	869,894	874,263	878,746	883,334	888,020	892,796	897,654	902,587	907,590
804,014	8.69%	7.00%	821,313	824,333	827,541	830,927	834,481	838,194	842,055	846,055	850,185	854,435	858,797	863,263	867,825	872,475	877,206	882,011	886,884

表 5-13 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)

淨現值(NPV)	折現率	無風險利率	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.5	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.6
1,827,440	3.99%	1.00%	1,908,529	1,920,368	1,932,283	1,944,263	1,956,297	1,968,378	1,980,495	1,992,641	2,004,807	2,016,987	2,029,173	2,041,359	2,053,537	2,065,703	2,077,851	2,089,975	2,102,070
1,773,944	4.14%	1.20%	1,856,202	1,867,671	1,879,215	1,890,824	1,902,487	1,914,195	1,925,940	1,937,715	1,949,510	1,961,319	1,973,135	1,984,952	1,996,763	2,008,563	2,020,345	2,032,106	2,043,840
1,722,315	4.30%	1.40%	1,805,636	1,816,750	1,827,937	1,839,188	1,850,493	1,861,843	1,873,230	1,884,647	1,896,085	1,907,537	1,918,997	1,930,459	1,941,915	1,953,362	1,964,793	1,976,203	1,987,588
1,672,476	4.46%	1.60%	1,756,759	1,767,531	1,778,374	1,789,281	1,800,241	1,811,247	1,822,289	1,833,361	1,844,455	1,855,563	1,866,680	1,877,800	1,888,915	1,900,022	1,911,114	1,922,187	1,933,236
1,624,358	4.61%	1.80%	1,709,511	1,719,952	1,730,465	1,741,040	1,751,668	1,762,342	1,773,052	1,783,792	1,794,554	1,805,331	1,816,118	1,826,908	1,837,694	1,848,473	1,859,239	1,869,986	1,880,712
1,577,893	4.77%	2.00%	1,663,826	1,673,949	1,684,144	1,694,400	1,704,709	1,715,062	1,725,453	1,735,873	1,746,315	1,756,773	1,767,241	1,777,713	1,788,183	1,798,646	1,809,097	1,819,531	1,829,944
1,533,016	4.93%	2.20%	1,619,645	1,629,462	1,639,350	1,649,298	1,659,299	1,669,345	1,679,427	1,689,538	1,699,673	1,709,824	1,719,984	1,730,150	1,740,314	1,750,473	1,760,620	1,770,752	1,780,864
1,489,664	5.08%	2.40%	1,576,912	1,586,435	1,596,027	1,605,679	1,615,383	1,625,131	1,634,916	1,644,731	1,654,568	1,664,422	1,674,287	1,684,158	1,694,027	1,703,892	1,713,747	1,723,587	1,733,409
1,447,779	5.24%	2.60%	1,535,570	1,544,809	1,554,116	1,563,482	1,572,900	1,582,362	1,591,861	1,601,389	1,610,940	1,620,508	1,630,088	1,639,673	1,649,259	1,658,841	1,668,413	1,677,972	1,687,514
1,407,304	5.40%	2.80%	1,495,570	1,504,535	1,513,567	1,522,659	1,531,801	1,540,987	1,550,209	1,559,461	1,568,736	1,578,029	1,587,333	1,596,644	1,605,956	1,615,264	1,624,564	1,633,852	1,643,124
1,368,183	5.55%	3.00%	1,456,858	1,465,559	1,474,327	1,483,153	1,492,029	1,500,949	1,509,905	1,518,891	1,527,900	1,536,926	1,545,965	1,555,011	1,564,058	1,573,103	1,582,140	1,591,167	1,600,177
1,330,366	5.71%	3.20%	1,419,389	1,427,836	1,436,348	1,444,918	1,453,538	1,462,201	1,470,900	1,479,629	1,488,381	1,497,151	1,505,934	1,514,724	1,523,516	1,532,307	1,541,091	1,549,864	1,558,623
1,293,801	5.87%	3.40%	1,383,115	1,391,317	1,399,583	1,407,907	1,416,279	1,424,695	1,433,146	1,441,627	1,450,131	1,458,653	1,467,189	1,475,732	1,484,278	1,492,823	1,501,362	1,509,892	1,518,408
1,258,443	6.02%	3.60%	1,347,991	1,355,957	1,363,986	1,372,071	1,380,205	1,388,381	1,396,593	1,404,835	1,413,100	1,421,384	1,429,680	1,437,985	1,446,294	1,454,602	1,462,905	1,471,199	1,479,481
1,224,243	6.18%	3.80%	1,313,976	1,321,713	1,329,513	1,337,369	1,345,273	1,353,219	1,361,200	1,369,211	1,377,245	1,385,298	1,393,364	1,401,439	1,409,519	1,417,598	1,425,672	1,433,739	1,441,795
1,191,160	6.34%	4.00%	1,281,030	1,288,546	1,296,126	1,303,759	1,311,441	1,319,165	1,326,923	1,334,711	1,342,522	1,350,353	1,358,197	1,366,050	1,373,907	1,381,765	1,389,620	1,397,467	1,405,304
1,159,151	6.49%	4.20%	1,249,112	1,256,416	1,263,782	1,271,202	1,278,669	1,286,178	1,293,721	1,301,294	1,308,890	1,316,505	1,324,134	1,331,773	1,339,416	1,347,061	1,354,703	1,362,338	1,369,963
1,128,176	6.65%	4.40%	1,218,185	1,225,285	1,232,445	1,239,658	1,246,918	1,254,219	1,261,555	1,268,920	1,276,308	1,283,716	1,291,137	1,298,569	1,306,006	1,313,444	1,320,880	1,328,310	1,335,731
1,098,196	6.81%	4.60%	1,188,213	1,195,115	1,202,076	1,209,090	1,216,150	1,223,251	1,230,386	1,237,550	1,244,738	1,251,945	1,259,166	1,266,397	1,273,634	1,280,873	1,288,111	1,295,343	1,302,566
1,069,174	6.96%	4.80%	1,159,163	1,165,874	1,172,643	1,179,465	1,186,332	1,193,239	1,200,180	1,207,151	1,214,144	1,221,157	1,228,185	1,235,223	1,242,267	1,249,313	1,256,358	1,263,399	1,270,432
1,041,075	7.12%	5.00%	1,131,002	1,137,528	1,144,112	1,150,747	1,157,428	1,164,148	1,170,902	1,177,685	1,184,492	1,191,317	1,198,157	1,205,008	1,211,866	1,218,726	1,225,585	1,232,441	1,239,289
1,013,865	7.28%	5.20%	1,103,696	1,110,043	1,116,448	1,122,904	1,129,405	1,135,944	1,142,517	1,149,119	1,155,744	1,162,389	1,169,048	1,175,718	1,182,395	1,189,075	1,195,755	1,202,432	1,209,102
987,511	7.43%	5.40%	1,077,215	1,083,391	1,089,623	1,095,905	1,102,232	1,108,596	1,114,995	1,121,421	1,127,872	1,134,341	1,140,825	1,147,320	1,153,823	1,160,329	1,166,835	1,173,339	1,179,837
961,982	7.59%	5.60%	1,051,531	1,057,541	1,063,605	1,069,720	1,075,878	1,082,074	1,088,303	1,094,560	1,100,841	1,107,141	1,113,457	1,119,783	1,126,117	1,132,454	1,138,793	1,145,129	1,151,459
937,249	7.75%	5.80%	1,026,616	1,032,465	1,038,368	1,044,320	1,050,316	1,056,349	1,062,414	1,068,508	1,074,625	1,080,762	1,086,913	1,093,076	1,099,246	1,105,421	1,111,597	1,117,771	1,123,940
913,282	7.90%	6.00%	1,002,442	1,008,135	1,013,883	1,019,678	1,025,516	1,031,391	1,037,299	1,043,234	1,049,193	1,055,171	1,061,164	1,067,169	1,073,181	1,079,199	1,085,217	1,091,235	1,097,248
890,053	8.06%	6.20%	978,982	984,525	990,122	995,765	1,001,451	1,007,174	1,012,928	1,018,711	1,024,516	1,030,341	1,036,181	1,042,033	1,047,892	1,053,757	1,059,624	1,065,489	1,071,351
867,537	8.22%	6.40%	956,215	961,613	967,063	972,560	978,099	983,674	989,281	994,915	1,000,572	1,006,248	1,011,940	1,017,644	1,023,356	1,029,073	1,034,792	1,040,511	1,046,226
845,708	8.37%	6.60%	931,398	936,663	941,980	947,342	952,745	958,183	963,653	969,150	974,669	980,207	985,760	991,325	996,898	1,002,476	1,008,056	1,013,636	1,019,213
824,542	8.53%	6.80%	912,655	917,776	922,948	928,166	933,425	938,719	944,044	949,396	954,771	960,165	965,574	970,996	976,426	981,862	987,300	992,739	998,175
804,014	8.69%	7.00%	891,818	896,808	901,848	906,933	912,058	917,218	922,409	927,627	932,868	938,127	943,402	948,689	953,985	959,287	964,592	969,897	975,200

表 5-13 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)

5.2 案例(二)

興建計畫的範圍包括「高速公路永康交流道附近特定區」、「永康六甲頂都市計畫(四分子地區)」、「永康六甲頂都市計畫(六甲頂地區)」及「永康甲頂市地重劃區」等四個都市計畫區，都市計畫區之污水處理廠、污水下水道主幹管、次幹管、分支管、巷道連接管及各項附屬設施之規劃、設計與興建。

5.2.1 興建計畫

「台南縣永康污水下水道系統」興建計畫分三期興建。污水處理廠及污水管網系統之分期興建時程規劃與規模如下表 5-14：

	工程期別	第一期	第二期	第三期
污水處理廠	平均日污水量之設計容量(CMD)	29,000	29,000	29,000
	施工期間(年)	3	2	2
	興建起始年	98	104	108
	完工年	100	105	109
污水管網系統	施工期間(年)	6	4	6
	興建起始年	98	104	108
	完工年	103	107	113
	累計管網佈設完成度(%)	37.50%	63.19%	100%

表 5-14 永康系統施工時程彙總表

污水下水道系統總體建設工程規劃時程如下表：

項目	分期	第一期						第二期				第三期					
	年度	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
	許可年限	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
水資源回收中心		29,000CMD						58,000CMD					87,000CMD				
污水管線	主幹管一期																
		68,784M															
	主幹管二期																
								48,957M									
	主幹管三期																
												65,693M					
用戶接管					23,224戶			31,732戶				30,877戶					
累計施工接管戶數(戶)		-	-	-	7,087	15,121	23,224	27,070	29,776	41,217	54,956	58,799	63,100	70,092	76,515	83,222	85,833
預計進廠污水量(CMD)		-	-	-	7,138	14,234	23,270	26,482	28,883	38,019	50,221	53,562	57,880	65,006	72,196	79,221	84,043

表 5-15 永康系統總體建設工程規劃時程

5.2.2 基本假設

在進行序列複合選擇權評價模型的實際案例應用時，本論文將不考慮股東籌資的融資活動項目之影響，單從計畫的角度考量並評估投資計畫的價值。主要參數的假設，列舉如下：

1. 計畫起始年(基年)：民國 97 年(西元 2008 年)

2. 興建及營運許可年：

自民國 98 年至民國 132 年止，共計 35 年，包括興建期及營運期。

3. 汙水處理廠營運天數：365 天/年

4. 評估幣別：新台幣

5. 通貨膨脹率：試算過程暫不予考慮

6. 總成本

本計畫之工程成本係指工程成本、開辦費用、利息資本化及週轉預備金等。

7. 工程成本

本計畫之工程成本係指污水下水道系統工程成本以及水資源中心機電及設備之重置成本。

8. 折舊、攤提與重置

各項工程與設備以直線法和其耐用年限計算各年度之折舊與攤提。土木建築之折舊年期為 35 年，機電之折舊年期為 15 年，資本化利息依據主要工程耐用年期攤提。各項工程與設備於耐用年期屆滿時，以期初投資金額經通貨膨脹率調整後之價格，等額重置。

9. 開辦費

整體合計以 10,000 仟元計算開辦費。

10. 土地租金

水資源回收中心之用地租金於計算本計畫污水處理費率時，以新台幣 1 元計算。

11. 營運期限屆滿資產無償轉移

依促參法第五十四條規定：「民間機構應於營運期限屆滿後，移轉公共建設予政府者，應將現存所有之營運資產或營運權，依投資契約有償或無償移轉、歸還予主辦

機關」，本投資計畫民間機構於興建營運年屆滿時，將本計畫資產無償移轉予主辦機關。

12. 折現率

在不考慮股東之融資活動項目的情況下，即無法使用加權稅後折現率 WACC 作為案例應用之折現率。改用 CAPM 的方法訂定本案例之折現率，折現率公式為：

$$r = r_f + \beta \times (r_m - r_f)$$

r_f ，取政府公債利率值約 4.19%

r_m ，取年度台灣股市平均年報酬率約 14.78%

β ，取公用事業(瓦斯)類股與大盤之聯動性 0.2168

以 CAPM 法計算出之期望報酬率為 **6.49%**，以此報酬率作為本案例求取淨現值之折現率。

13. 促參法之其他優惠

促參法之優惠措施，包括融資優惠、設備投資抵減、技術投資抵減、防治污染設備投資抵減、人才培訓等抵減稅捐優惠項目，亦包括未能於公司財務報表中顯現之股東投資抵減優惠等實質上對於民間機構及投資人均有實質效益之措施。

14. 履約保證金

為確保本計畫之順利執行，並降低主辦機關風險，本計畫民間機構須負擔履約保證金 237,000 仟元(約為不含重置成本之總工程成本 3%)，於水資源回收中心第一期興建完工並開始營運後六個月，退還 50%；並於許可年限屆滿完成資產轉移後，履約保證金完全退還予民間機構。

5.2.3 工程成本估算

本計畫之工程包括水資源回收中心及管線工程兩部分。加計相關之規劃設計費用、間接工程成本、興建期間營運資金需求後，所得之值為總建設成本。

1. 水資源回收中心

分三期興建完成。第一期設計容量為平均日污水量 29,000CMD，第二期擴建至平均日污水量 58,000CMD 之容量，第三期擴建至平均日污水量 87,000CMD 之容量。預計污水處理廠三期建設經費合計為新台幣 1,676,908 千元。相關建設經費如下表 5-16：

單位：新台幣仟元

工程項目	都市計畫區		
	第一期	第二期	第三期
壹、直接工程費			
一、土建工程	352,000	153,000	153,000
二、機電工程*	148,000	128,000	128,000
三、管線工程	70,000	55,000	40,000
四、電氣系統(含緊急發電機)*	60,000	40,000	40,000
五、儀控設備*	60,000	40,000	40,000
六、空調通風及消防設備*	10,000	3,000	3,000
七、試車及試運轉工程	5,000	4,000	4,000
施工費小計(一~七)	705,000	423,000	408,000
八、勞安衛、交通及環保費(施工費之0.8%)	5,640	3,384	3,264
九、工程保險費(施工費之0.8%)	5,640	3,384	3,264
十、品質管理費(施工費之2%)	14,100	8,460	8,160
直接工程費小計	730,380	438,228	422,688
貳、間接工程費			
一、空氣污染防制費(直接工程費之0.28%)	2,045	1,227	1,184
二、工程設計與監造費(直接工程費之5.1%)	37,249	22,350	21,557
分期合計(壹+貳)	769,674	461,805	445,429
全期總計	1,676,908		

標示「*」者為機電工程類項目

表 5-16 污水處理廠興建成本

2. 管線工程

包括污水管線及用戶接管部分之工程。預計污水管線之建設費用為新台幣 3,755,961 仟元。用戶接管之建設費用為 2,468,911 仟元。管網系統之分年建設經費如下表 5-17：

單位：新台幣仟元

年度	98	99	100	101	102	103	104	105
許可年限	1	2	3	4	5	6	7	8
污水管線(仟元)	19,458	669,709	269,381	272,409	268,890	242,432	167,174	283,275
用戶接管(仟元)	395	8,947	2,421	202,323	227,160	233,273	112,146	89,406
合計	19,853	678,656	271,802	474,731	496,050	475,705	279,320	372,680

年度	106	107	108	109	110	111	112	113
許可年限	9	10	11	12	13	14	15	16
污水管線(仟元)	228,422	176,738	212,083	278,285	258,358	233,073	176,275	-
用戶接管(仟元)	320,180	386,066	118,639	124,115	198,730	184,336	187,713	73,062
合計	548,602	562,804	330,721	402,400	457,088	417,409	363,988	73,062

表 5-17 管線工程之分年建設成本

本案例計畫之總興建成本，分年列表如下：

單位：新台幣仟元

年度	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
許可年限	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
水資源回收中心	29,000CMD					58,000CMD					87,000CMD					
土建工程	111,489	156,084	178,382	-	-	-	86,347	129,521	-	-	79,797	119,695	-	-	-	-
機電工程	80,930	113,302	129,488	-	-	-	98,375	147,562	-	-	98,375	147,562	-	-	-	-
合計	192,419	269,386	307,870	-	-	-	184,722	277,083	-	-	178,171	267,257	-	-	-	-
污水管線(仟元)	19,458	669,709	269,381	272,409	268,890	242,432	167,174	283,275	228,422	176,738	212,083	278,285	258,358	233,073	176,275	-
用戶接管(仟元)	395	8,947	2,421	202,323	227,160	233,273	112,146	89,406	320,180	386,066	118,639	124,115	198,730	184,336	187,713	73,062
合計	19,853	678,656	271,802	474,731	496,050	475,705	279,320	372,680	548,602	562,804	330,721	402,400	457,088	417,409	363,988	73,062

表 5-18 各年之工程總興建成本

折舊費用包括各期工程興建完成並陸續進入營運狀態後，各項工程興建成本(包括直接、間接及利息資本化成本)與後續年期所進行資本重置之相關折舊費用(本計畫以直線法方式計算)。各項工程折舊、重置之年期及重置比率假設如表 5-19。分年折舊之金額，計算結果如表 5-20 所示：

工程項目	分項工程	折舊及重置年	說明
污水處理廠	土木建築	35	特許期間不需重置
	機電設備	15	原始興建成本60%，並分兩年重置；於特許期間只重置一次。
主、次幹管、分支管	-	35	特許期間不需重置
巷道連接管及用戶接	-	35	特許期間不需重置

表 5-19 各項工程之折舊及重置年期

項目 \ 年		第一期						第二期				第三期							
		98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
第一期	土木建築	111,489	156,084	178,382															
	機電	80,930	113,302	129,488															
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	192,419	269,386	307,870															
第二期	土木建築	-	-	-	-	-	-	86,347	129,521	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	-	98,375	147,562	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	-	-	-	-	-	-	184,722	277,083	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
第三期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79,797	119,695	-	-	-	-	-	-
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	98,375	147,562	-	-	-	-	-	-
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	178,171	267,257	-	-	-	-	-	-
管網系統		19,458	669,709	269,381	272,409	268,890	242,432	167,174	283,275	228,422	176,738	212,083	278,285	258,358	233,073	176,275	-	-	-
用戶接管		395	8,947	2,421	202,323	227,160	233,273	112,146	89,406	320,180	386,066	118,639	124,115	198,730	184,336	187,713	73,062	-	-
分期折舊表																			
折舊費用	第一期	-	-	-	67,840	83,154	99,689	116,092	116,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	-	48,539	69,639	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151
	第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56,944	77,721	97,598	115,797	119,642	119,642
項目 \ 年		116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
第一期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	機電重置	97,116	97,116	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
第二期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	機電重置	-	-	-	-	-	73,781	73,781	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
第三期	土木建築	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	機電	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	機電重置	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	合計	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73,781	73,781	-	-	-	-	-	-	
管網系統		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
用戶接管		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
分期折舊表																			
折舊費用	第一期	92,511	92,511	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	
	第二期	92,151	92,151	92,151	92,151	75,755	75,755	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	
	第三期	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	103,247	103,247	127,840	127,840	127,840	127,840	127,840	127,840	

表 5-20 分期建設費用折舊攤提表

5.2.4 營運費用假設

營運費用之支出為操作維護費用。操作維護費包括人事、通訊、基本電費等共計九項：

1. 電費

包含基本電費及流動電費，基本電價與契約容量有關。預估於全期處理規模擴充至平均日污水量 87,000CMD 時，永康水資源回收中心每年基本電費及流動電費合計約為 19,757 仟元。

2. 自來水費

包含基本水費與流動水費(含代徵清除處理費)。推估於全期處理規模擴充至平均日污水量 87,000CMD 時，永康水資源回收中心每年基本水費及流動水費合計約為 710 仟元。

3. 人事費

本計畫水資源回收中心之人事配置係參考內政部營建署於 93 年 11 月之委託研究成果「提升都市污水處理廠營運管理體系合理化之研究」內容，全期合計 32 人。費用中已含各及人員之直接薪資、間接薪資、行政管理費、年終獎金及稅金等，詳細費用列於下表 5-21：

類別	職稱	各期增額人數			平均月薪(元)	各期增加費用(元/年)		
		第一期	第二期	第三期		第一期	第二期	第三期
管理類	廠長	1	0	0	65,000	1,061,060	1,061,060	1,061,060
	副廠長	1	0	0	60,000	979,440	979,440	979,440
技術類	操作人員	10	2	1	33,000	5,386,920	6,464,304	7,002,996
	維護人員	3	2	1	33,000	1,616,076	2,693,460	3,232,152
	水質分析人員	2	2	0	33,000	1,077,384	2,154,768	2,154,768
	技工	2	2	0	25,000	816,200	1,632,400	1,632,400
各期人數小計(人)		19	8	2	各期薪資	10,937,080	4,048,352	1,077,384
各期人事累計(人)		19	27	29	累計薪資	10,937,080	14,985,432	16,062,816

表 5-21 污水廠人事費用概估

4. 藥品費

本計畫水資源回收中心之藥品費估算按實際污水處理量計算，每 CMD 污水處理量之藥品費合計約 0.056 元。

5. 污泥清運處理費

按預估之實際進流的污水量經過處理後產生之污泥量計算，每 CMD 污水處理量之污泥清運處理費合計約 1.55 元。

6. 環境維護與監測費

自營運期開始，於許可年限間，每年編列 1,500 仟元進行相關工作。

7. 雜支費

預計為前六項費用合計之 5%計算。

8. 土木、機械及機電設施維護費

(1)水資源中心：機電部分之維護費用為機電成本之 1.5%；土建部分之維護費用為土建成本之 0.6%。

(2)污水管線(含巷道連接管)維護費用為建設成本之 0.6%

9. 產物保險費

按固定資產帳面價值之 0.3%計算。

10. 品質及安全管理監督機構費

於許可年限 35 年間，每年約 4,000 仟元計算。



年度	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
許可年限	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
水資源中心建設時程	29,000CMD						58,000CMD				87,000CMD	
O&M	固定操作維護費	6,575	6,575	6,575	30,810	45,441	49,800	53,370	56,044	64,877	74,289	80,518
	變動操作維護費	-	-	-	4,449	9,596	16,912	20,945	22,885	28,522	37,306	45,021
合計(仟元)		6,575	6,575	6,575	35,259	55,037	66,712	74,315	78,929	93,399	111,595	125,539
年度	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
許可年限	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
水資源中心建設時程												
O&M	固定操作維護費	85,880	93,887	97,054	99,300	100,179	100,409	98,417	97,487	97,065	96,100	95,136
	變動操作維護費	50,230	55,230	61,233	65,282	67,184	68,072	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466
合計(仟元)		136,110	149,117	158,287	164,582	167,363	168,481	166,883	165,953	165,531	164,566	162,637
年度	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
許可年限	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
水資源中心建設時程												
O&M	固定操作維護費	94,267	92,750	91,807	90,865	89,980	89,481	88,532	88,582	86,632	85,682	84,733
	變動操作維護費	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466	68,466
合計(仟元)		162,733	161,216	160,273	159,331	158,446	157,947	156,998	157,048	155,098	154,148	153,199

表 5-22 分年操作維護費用

5.2.5 營運收入假設

一、 污水處理量假設

根據本計畫工程規劃，預計自民國 100 年開始可處理污水。後續將隨巷道連接管及用戶接管工程完工即自行納管用戶增加而持續增加污水處理量，預計民國 101 年年處理量約為 29,000CMD，至民國 109 年底達到最大年處理量 87,000CMD。下表為預計之各年度污水處理量：

年度	101	102	103	104	105	106
設計日處理量(CMD)	29,000	29,000	29,000	29,000	29,000	58,000
預估每年年底污水廠 實際進流污水量(CMD)	7,138	14,234	23,270	26,482	28,883	38,019
年度	107	108	109	110	111	112
設計日處理量(CMD)	58,000	58,000	58,000	87,000	87,000	87,000
預估每年年底污水廠 實際進流污水量(CMD)	50,221	53,562	57,880	65,006	72,196	79,221
年度	113	114	115	116	117-132	
設計日處理量(CMD)	87,000	87,000	87,000	87,000	87,000	
預估每年年底污水廠 實際進流污水量(CMD)	84,043	85,274	86,620	86,620	86,620	

表 5-23 預計之各年度污水處理量

二、 污水量處理費用假設

根據各項興建成本、營運費用估計，同時給予股東 10% 之內部報酬率設算求得，各項費率結果如下表 5-24：

項目	費率	計算基礎
污水廠、主次幹管及分支管 建設經費加權平均費率	18.21	每噸建設費加權平均費率係以全期建設費攤提 收入與全年期年設計容量相除而得
巷道連接管及用戶接管設費	10.16	依民間機構施作用戶接管工程之污水處理量
固定操作維護費用	3.95	依每年實際污水處理量
變動操作維護費用	2.12	依每年實際污水處理量
合計	34.44	

表 5-24 預計污水處理費

以分年的污水處理費用作為營運之主要收入，以預計污水處理費率乘上每年處理的污水量最為此項收入估計的方法。分期工程收入之折現值，以 CAPM 期望報酬 6.49% 作為折現率。分期工程之營運收入計算過程如下表 5-25 所示：

年度	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
許可年限	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
預估污水處理量(噸)	-	-	-	2,605	5,195	8,494	9,666	10,542	13,877	18,331	19,550	21,126	23,727	26,352	28,916	30,676	31,125	31,616
污水處理量	第一期	-	-	-	2,605	5,195	8,494	9,666	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	-	3,335	7,788	9,008	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584
	第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,601	5,225	7,789	9,549	9,999	10,490
收入=污水處理量*總工程平均處理費率(\$34.44 元/CMD)																		
分期收入	第一期	-	-	-	89,729	178,930	292,518	332,895	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077
	\$3,598,416																	
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	-	114,845	268,231	310,230	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510
	\$2,554,112																	
	第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89,578	179,961	268,269	328,885	344,359	361,279
	\$1,752,213																	
年度	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
許可年限	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
預估污水處理量(噸)	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	
污水處理量	第一期	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	
	第二期	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	
	第三期	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	
收入=污水處理量*總工程平均處理費率(\$34.44 元/CMD)																		
分期收入	第一期	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	
	第二期	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	
	第三期	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	

表 5-25 預期之分期營運收入

5.2.6 序列複合選擇權分析

一、評價模型參數假設

根據 5.1 節各項基本假設，將計畫相關資料加以計算、整理，序列複合選擇權評價模型中的參數整理如下：

1. 無風險利率(r)

利用政府短期公債之利率作為無風險利率的參數值，短期公債利率值坐落於 1%至 7% 之間，將評價模型中之無風險利率參數進行情境分析。

2. 股利率(q)

此案例因不考慮股東權益部分之融資活動，所以將評價模型中之股利率參數值設為零。即 $q=0$ 。

3. 資產變異數(σ^2)

整理公用事業上市、上櫃之瓦斯公司相關類股，計算出股票報酬率的年標準差 0.16(詳細計算過程於附件二呈現)，作為本評價模型中資產變異之標準差的評估基數值。後續，針對此項參數進行情境分析(Scenario Analysis)，資產變異之標準差(σ)取值的範圍在 0.1~0.6 之間。

4. 期初資產價值(V_0)

以案例計畫之預估營運收入作為本計畫之資產價值。計算方式為：

$$\text{收入(元)} = \text{年污水處理量(噸)} \times \text{單位汙水處理費率(\$34.44 元/噸)}$$

再將表 5-25 中之各年度之分期營運收入，以 CAPM 法計算求得之期望報酬率 6.49%作為折現率，折現後求得各期工程之期初資產價值。分年之總收入於附件四呈現。

5. 履約價格(K)

以案例之分期總成本，作為序列複合選擇權評價模型之各期履約價格。履約價格之折現值以 CAPM 計算得的期望報酬率 6.49%作為折現率。分年之總成本於附件四呈現。

$$\text{成本} = \text{維護操作費用} + \text{折舊費用}$$

二、污水下水道工程之特性

污水下水道工程之建設計畫，有一些沉默成本(例如：開辦費)。無論後續工程進行與否皆要在第一期工程建設期間支付的成本項目，於成本的劃分上，部分歸屬為後續各期工程的成本，應要進行工程費用之拆解提列。

再者，第一期工程之施工規劃時，往往會考量後續各期興建計畫進行的可能性，在一些工程項目之用料的選擇上，使用單價較高之材料。例如：在考量後續工程可能進行之需求後，幹管工程的管徑會選擇使用較大的管徑施工，如此做法提高了第一期工程之工程成本。但是，如果單單只考量該期工程之需求，並不需要使用如此大的管徑。所以，凡是在第一期工程為了後續工程考量而增加的相關成本，應該分別提列為後續各期工程之成本。

在詳細了解污水下水道工程之規劃施工的特性後，第一期的工程總成本 E_1 ，應作為第一期工程之履約價格 $K_{\{1,1\}}$ 、第二期工程之第一個履約價格 $K_{\{2,1\}}$ 以及第三期工程之第一個履約價格 $K_{\{3,1\}}$ 總和。第一期工程成本在計算上，會有一比例 x ，將第一期之工程成本分為三個部分。其中， x 之比例值為：

[第一期工程之總成本-(應屬於第二期及第三期之工程成本金額)]/ 第一期工程之總成本
最後，求得本案例計畫之 x 的比例值為 0.926

$$K_{\{1,1\}} = x \cdot E_1 ; K_{\{2,1\}} = \frac{(1-x)}{2} \cdot E_1 ; K_{\{3,1\}} = \frac{(1-x)}{2} \cdot E_1$$

同理，第二期的工程總成本 E_2 ，應作為第二期工程之履約價格 $K_{\{2,2\}}$ 以及第三期工程之第二個履約價格 $K_{\{3,2\}}$ 總和。第二期工程成本在計算上，會有一比例 y ，將第二期之工程成本分為二個部分。其中， y 之比例值為：

[第二期工程之總成本-(應屬於第三期之工程成本金額)]/ 第二期工程之總成本
最後，求得本案例計畫之 y 的比例值為 0.95

$$K_{\{2,2\}} = y \cdot E_2 ; K_{\{3,2\}} = (1-y) \cdot E_2$$

成本分配之示意圖如下圖 5-6：

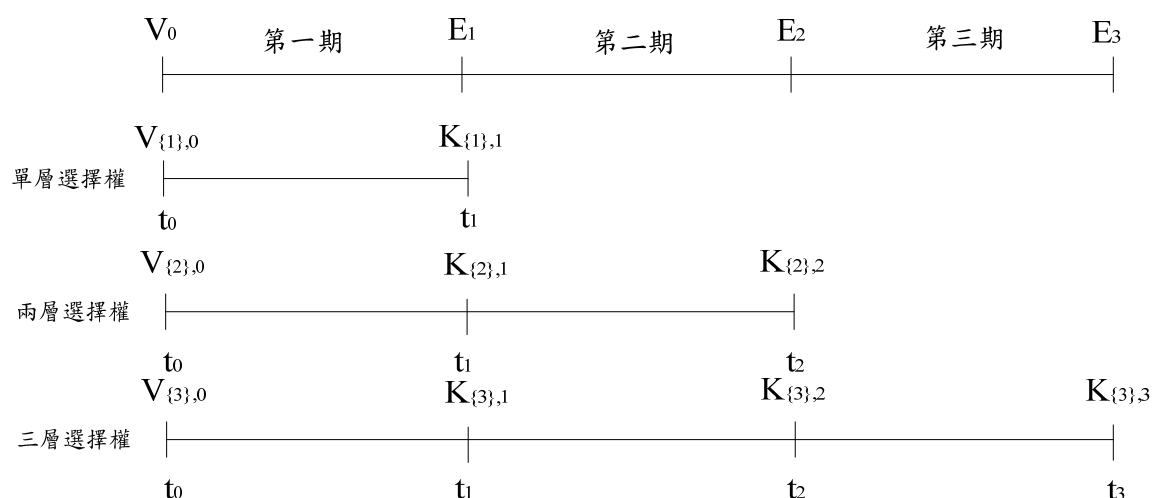


圖 5-6 案例二之分期建設成本配置

一個分三期興建之案例計畫，在利用序列複合選擇權評價模型進行計畫價值評估時，評價模型之數據的處理，亦是要分成以下兩個步驟：

第一，針對各期工程所產生之收入及成本項，進行各年度分項費用的拆解；

第二，針對收入項及成本項的折現時間點不同而進行折現值的調整及修正。

第一期工程：

為一個單層的選擇權，利用第一期之各年度營運收入的折現值作為案例計畫之期初資產價值 ($V_{\{1\},0}$)，折現起始點為本計畫之起始年。以第一期工程施工結束後並且開始營運之營運起始點作為計畫之履約價格 ($K_{\{1\},1}$) 的折現原點 ($t=3$)。計畫之履約價格的數值為第一期工程總成本之折現值(E_1)乘以一分配比例 x ，即 $K_{\{1\},1} = x \cdot E_1$ 。

第二期工程：

第二期工程為一個兩層之序列複合選擇權。評價模型中的相關數據整理，以第二期工程之分年營運收入的折現值作為資產價值 ($V_{\{2\},0}$)，折現起始點同樣為計畫之起始年。履約價格的部分， $K_{\{2\},1}$ 為第一期工程成本中歸屬於第二期工程應該分擔之成本，為第一期總工程成本乘以一個比例值，即 $K_{\{2\},1} = \frac{(1-x)}{2} \cdot E_1$ 。第二期工程之施工總成本的折現值(E_2)乘以一分配比例 y ，即 $K_{\{2\},2} = y \cdot E_2$ 作為第二個履約價格 $K_{\{2\},2}$ 之值，折現之始點為第二期工程施工完成並開始營運之計畫時間點($t=8$)。

第三期工程：

第三期工程為一個三層之序列複合選擇權。評價模型中的相關數據整理，以第三期工程之分年營運收入的折現值作為資產價值 ($V_{\{3\},0}$)，折現起始點同樣為計畫之起始年。履約價格的部分， $K_{\{3\},1}$ 為第一期工程成本中歸屬於第三期工程應該分擔之成本，為第一期總工程成本乘以一個比例值，即 $K_{\{3\},1} = \frac{(1-x)}{2} \cdot E_1$ 。 $K_{\{3\},2}$ 為第二期工程成本中歸屬於第三期工程應該分擔之成本，為第二期總工程成本乘以一個比例值 $(1-y)$ ，即 $K_{\{3\},2} = (1-y) \cdot E_2$ 。第三期工程之施工總成本的折現值作為第三個履約價格 $K_{\{3\},3}$ 之值，折現之始點為第三期工程施工完成並開始營運之計畫時間點 ($t=12$)。

本案例計畫之總價值為各期工程計算得之選擇權價值的加總值，示意如下圖 5-7。

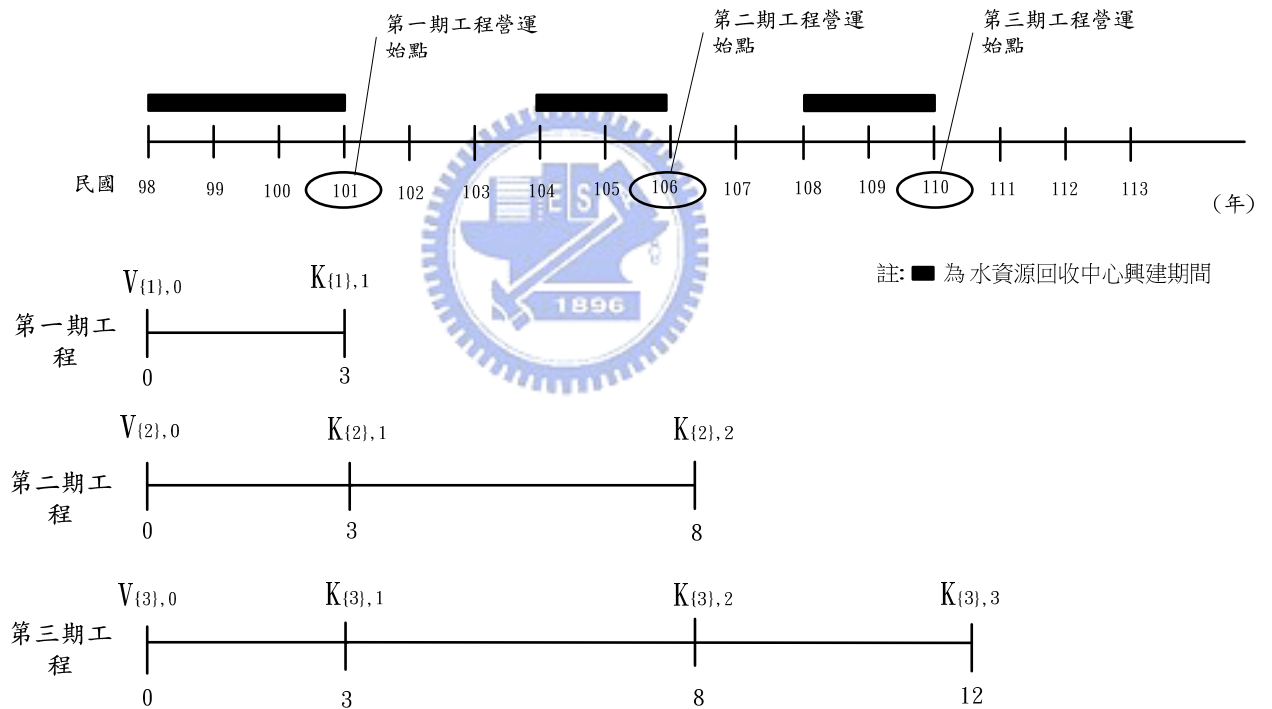


圖 5-7 案例二之序列複合選擇權分析

第一期工程的選擇權價值為一個單層的選擇權，利用單層選擇權評價模型求得第一期工程之總價值。其中，評價模型中所需之參數，無風險利率以 4.19%，股利率以 0%，資產變異之標準差以 0.16 作為評價模型的參數參考值。經由(3.14)之單層選擇權評價模型公式計算出第一期工程之計畫價值為\$ 1,800,901(仟元)。

評價模型的項目	參數	數值
第一期總收入之折現值	$V_{\{1\},0}$	3,600,576(仟元)
履約價格	$K_1 (= K_{\{1\},1})$	2,042,320(仟元)
股利率	q	0
無風險利率	r	0.0419
資產價值變異之標準差	σ	0.16
$C_1(V, t_0)$		\$ 1,800,901(仟元)

第二期工程的選擇權價值，利用二層的序列複合選擇權評價模型進行價值的評估。評價模型所需之參數，無風險利率以 4.19%，股利率以 0%，資產變異之標準差以 0.16 作為評價模型的參數值。最終利用公式(3.28)評估出第二期工程的計畫價值為為\$ 1,450,187(仟元)。

評價模型的項目	參數	數值
第二期總收入之折現值	$V_{\{2\},0}$	2,555,992(仟元)
履約價格	$K_1 (= K_{\{2\},1})$	81,325(仟元)
	$K_2 (= K_{\{2\},2})$	1,665,604(仟元)
股利率	q	0
無風險利率	r	0.0419
資產價值變異之標準差	σ	0.16
資產價值約當值	$\bar{V}_{1,2}$	916,417(仟元)
相關係數	$\rho_{1,2}$	0.612
$C_2(V, t_0)$		\$ 1,450,187(仟元)

$$\text{其中， } \rho_{1,2} = \frac{\sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \sigma^2(u) du}}{\sqrt{\int_{t_0}^{t_2} \sigma^2(u) du}}, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = 8。$$

第三期工程的選擇權價值，利用三層的序列複合選擇權評價模型進行價值的評估。評價模型所需之參數，無風險利率以 4.19%，股利率以 0%，資產變異之標準差以 0.16 作為評價模型的參數值。最終利用公式(3.48)評估出第二期工程的計畫價值為為\$ 963, 812(仟元)。

評價模型的項目	參數	數值
第三期總收入之折現值	$V_{\{3\},0}$	1, 753, 723(仟元)
	$K_1 (= K_{\{3\},1})$	81, 325(仟元)
履約價格	$K_2 (= K_{\{3\},2})$	87, 998(仟元)
	$K_3 (= K_{\{3\},3})$	1, 864, 365(仟元)
股利率	q	0
無風險利率	r	0. 0419
資產價值變異之標準差	σ	0. 16
$C_3(V, t_0)$		\$ 963, 812(仟元)

最終，經由序列複合選擇權評價模型計算出之計畫總為\$ 4,214,900(仟元)。由於評價模型參數的取值會對計畫價值之評估結果造成影響。針對序列複合選擇權評價模型參數之取值，於下一節中進行各種參數取值之情境分析。

同時對應不同的價值評估方法，將計畫價值以傳統淨現值法、單一選擇權評價法以及序列複合選擇權評估法評估得到的結果，進行比較及分析。最終可以顯示，針對此種污水下水道系統分期開發之基礎建設，以序列複合選擇權評價模型作為財務評估工具之適宜性。

5.2.7 評估結果比較與取值之情境分析

為了顯示序列複合選擇權評價模型應用於分期開發之公共建設價值評估的優點，利用傳統淨現值評估法、單一選擇權評價法，作為序列複合選擇權評價模型在計畫價值評估方面的對應比較方法。利用三種評估方法，評估案例計畫之價值。隨著資產價值變異標準差(σ)值的改變，可看出計畫價值之變動情況。

在進行參數資料的整理時，由於不同的參數值之取用，將會對計畫價值產生不同之結果影響。針對營運收入項之污水處理費率以及評價模型中之無風險利率(r)、資產價值變異之標準差(σ)等項目進行取值之結果分析。並且，將傳統淨現值法估算的計畫投資價值作為評估基值，此案例的投資價值經由傳統淨現值法計算為\$4,146,427,049 元。將計畫投資價值的數據進行一般化(normalization)，以方便進行各價值評估方法的比較分析。結果於圖 5-8、5-9 及 5-10 中呈現。

序列複合選擇權評價模型中之 σ 參數，本案例之作法為，利用公用事業之瓦斯相關類股之股價報酬率的年標準差(0.16)作為評價模型的參考數值。此作法僅考量了股價波動對未來計畫價值所造成之資產變異影響，尚未全面性的涵括所有可能影響計畫價值之報酬率的標準差。例如：計畫的收入項中，污水處理為收入的主要來源，所以必須考量計畫之預估污水處理量之變異情況。又污水之處理量乃依照該地區之人口成長率而定，所以，此項條件中亦包含了人口成長率之變異的標準差。所以，資產變異之標準差的取值，若再考慮其他可能造成計畫價值變動之相關因素，參數的取值將會有所異動(提高)。如此，經由序列複合選擇權評價模型所評估之專案價值將會有所不同。

針對取值的問題，將參數進行情境分析，圖 5-8 顯示標準差取值的變異程度對計畫之總價值所造成的影響。

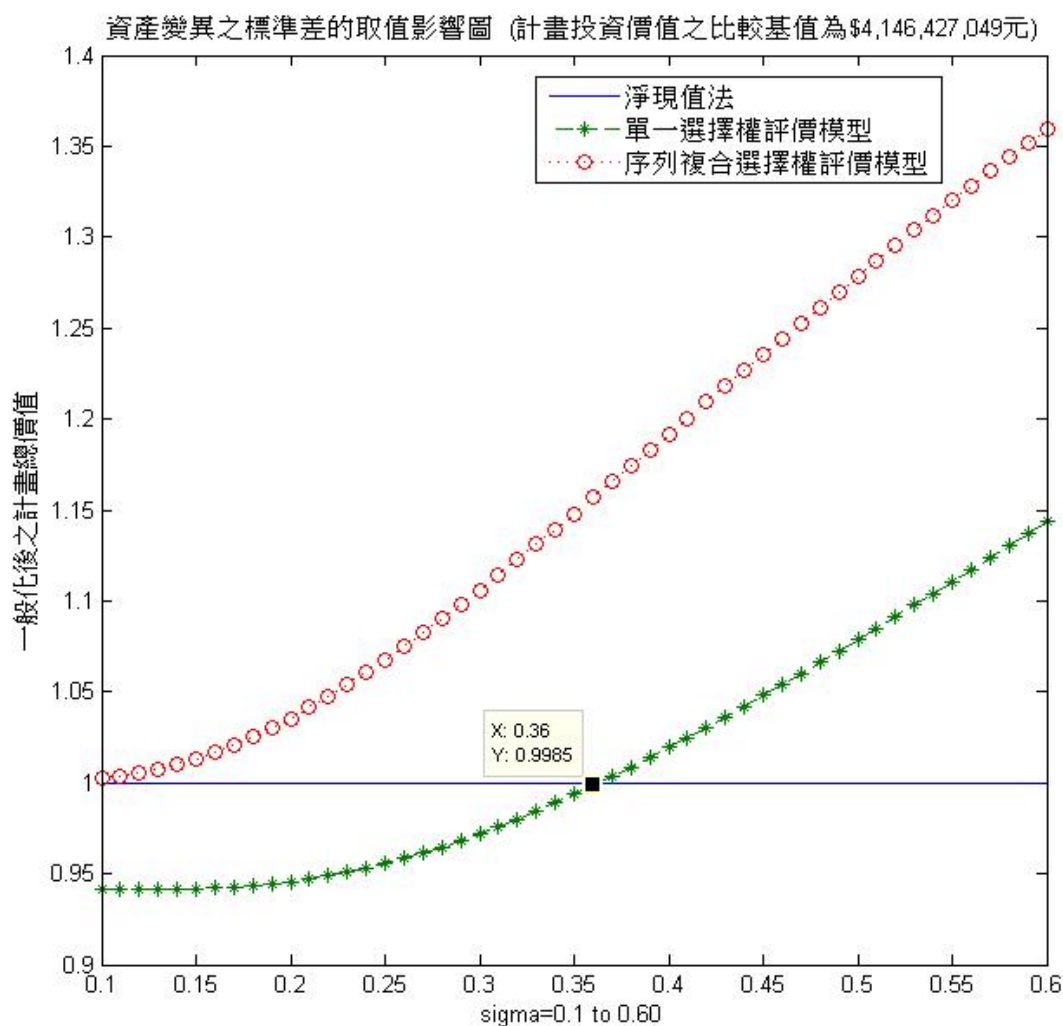


圖 5-8 計畫價值評估結果之比較(sigma 取值的影响)

圖 5-8 所示，由於選擇權評價模型的特性：當資產價值在到期日時大於履約價格，投資者才會執行選擇權。亦即，利用選擇權評價模型進行專案價值的評估時，選擇權的特性限制了計畫之下方風險。所以，資產價值之標準差(σ)愈大，亦即風險愈高的專案計畫，經由選擇權評價模型評估之專案的總價值會愈高。對於此案例而言，當資產變異之標準差項數值大於 0.1 時，經由序列複合選擇權評價模型評估之計畫價值，將會比淨現值所計算得到的計畫價值高。並且，當資產變異之標準差項數值愈大，也就是投資環境的風險愈大，計畫的投資價值將會更高。

比較不同之選擇權評價方法，經由序列複合選擇權評價模型評估之計畫總價值又會比單一選擇權評價模型所評估出的計畫價值更高。並且，當資產變異之標準差項數值大於 0.1

時，經由序列複合選擇權評價模型評估之計畫價值，將會比淨現值所計算得到的計畫價值高。但是，經由單一選擇權評價模型評估之計畫價值，必須在資產變異之標準差項數值大於 0.36 時，評估出的計畫價值才會比淨現值所計算得到的計畫價值高。原因在於，將工程分成數個階段進，將會有數個執行選擇權的權利，可以依照當時的投資情況，隨時進行後續計畫投資與否的調整。因此，相對於淨現金流量法與單一選擇權評價方法，序列複合選擇權評價模型更能顯現出分期開發之專案建設的計畫價值。，並且，此時以序列複合選擇權評價模型評估出的計畫總價值約比淨現值法評估的計畫價值多 16%。

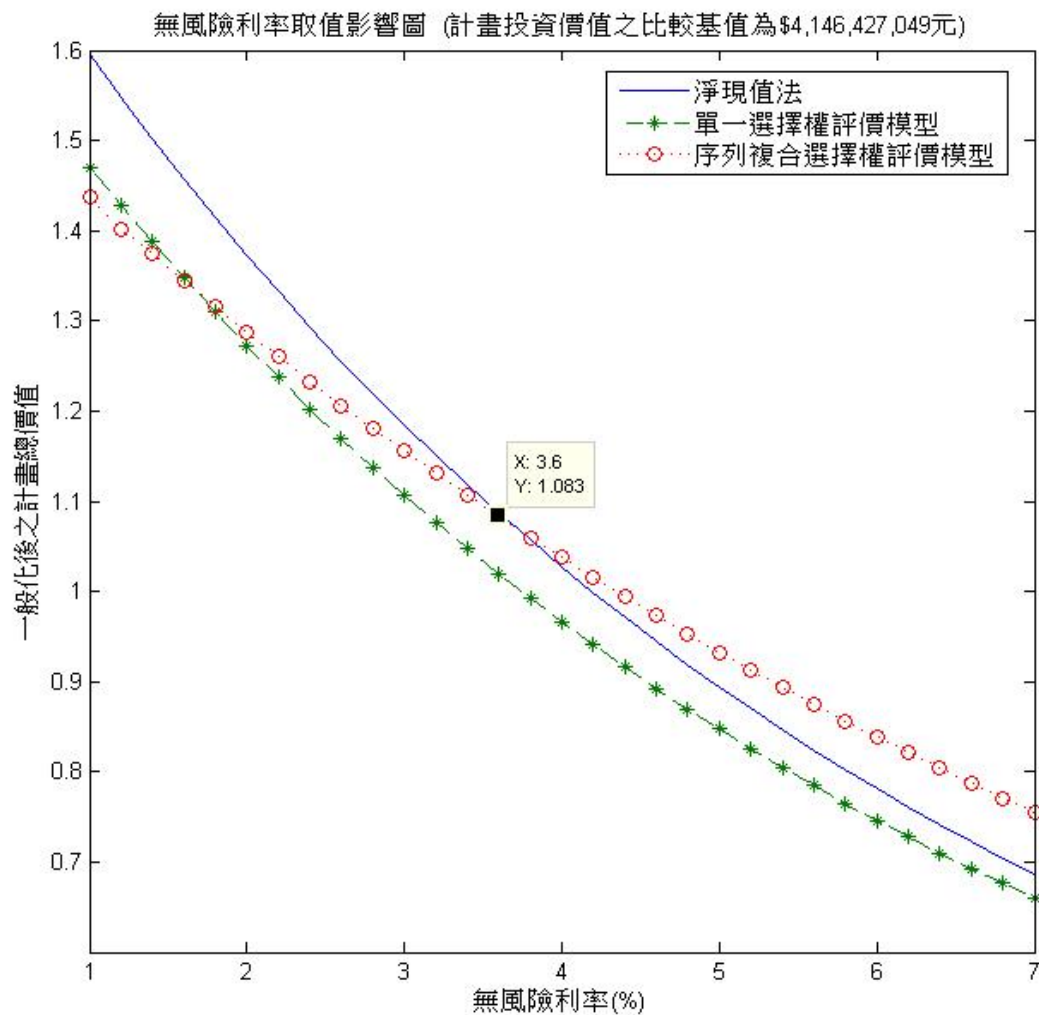


圖 5-9 計畫價值評估結果之比較 (無風險利率之取值影響)

圖 5-9 顯示，無風險利率對於計畫價值具有負向之影響。結果顯示，無風險利率之取值對於淨現值法的敏感度最高，其次為單一選擇權法，序列複合選擇權評價法對於無風險

利率向參數之敏感度最低。並且，圖中顯示當無風險利率大於 3.6%時，經由序列複合選擇權評價模型評估之計畫價值就會大於淨現值法所評估之計畫價值。

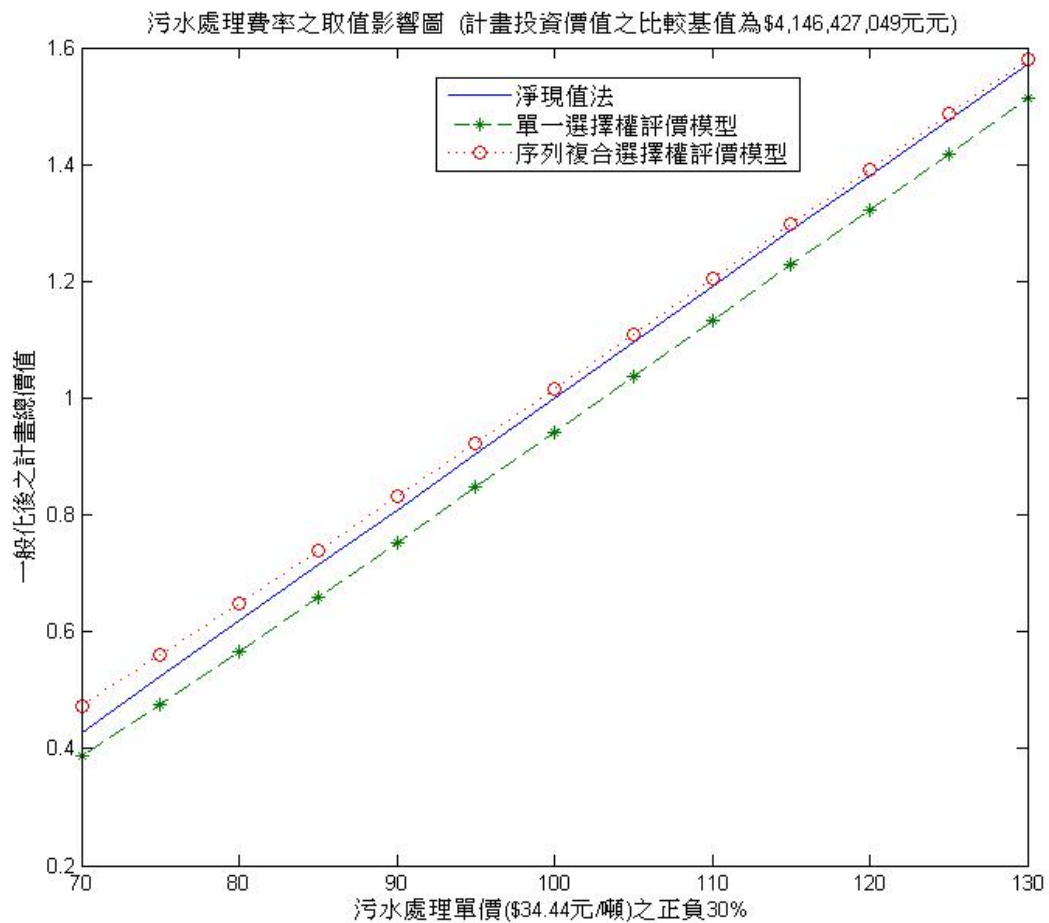


圖 5-10 計畫價值評估結果之比較 (污水處理費率之取值影響)

圖 5-10 顯示，污水處理費率之取值，對於計畫價值具有正向之影響。污水處理費率愈高，計畫之價值就愈高。污水處理費率之取值對於不同評價方法所得到的計畫價值，評估結果得比較上，不同的評估方法具有相同的斜率，污水處理費率的取值影響程度各評價方法大致相同。

5.2.8 小結

利用選擇權評價模型評估專案的價值，由於資料收集的過程不同，評估的結果會受到這些資料數據的影響。表 5-26 中顯示，在其他條件不變的情況下，選擇權評價模型中之無風險利率參數值愈大，評估的計畫價值就愈小。同樣，在其他條件不變的情況下，資產變異的標準差之參數取值愈大，經由序列複合選擇權評價模型評估後的計畫總價值會愈大。

NPV	折現率	無風險利率	序列複合選擇權計算															
			0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25
6,619,933	3.99%	1.00%	5,706,122	5,739,607	5,776,792	5,817,408	5,861,202	5,907,932	5,957,376	6,009,324	6,063,578	6,119,949	6,178,256	6,238,325	6,299,988	6,363,084	6,427,458	6,492,963
6,420,204	4.14%	1.20%	5,576,084	5,606,502	5,640,601	5,678,118	5,718,800	5,762,411	5,808,727	5,857,540	5,908,652	5,961,877	6,017,034	6,073,950	6,132,461	6,192,406	6,253,633	6,315,996
6,227,617	4.30%	1.40%	5,487,649	5,515,023	5,546,002	5,580,347	5,617,822	5,658,206	5,701,284	5,746,857	5,794,733	5,844,730	5,896,670	5,950,383	6,005,706	6,062,482	6,120,558	6,179,790
6,041,882	4.46%	1.60%	5,381,224	5,405,876	5,434,061	5,465,561	5,500,156	5,537,633	5,577,788	5,620,425	5,665,358	5,712,408	5,761,401	5,812,169	5,864,551	5,918,392	5,973,541	6,029,857
5,862,726	4.61%	1.80%	5,276,607	5,298,748	5,324,338	5,353,180	5,385,072	5,419,813	5,457,208	5,497,069	5,539,215	5,583,471	5,629,666	5,677,635	5,727,221	5,778,269	5,830,632	5,884,171
5,689,884	4.77%	2.00%	5,173,751	5,193,585	5,216,769	5,243,133	5,272,494	5,304,663	5,339,457	5,376,696	5,416,205	5,457,812	5,501,353	5,546,665	5,593,592	5,641,984	5,691,695	5,742,589
5,523,105	4.93%	2.20%	5,072,622	5,090,341	5,111,302	5,135,361	5,162,354	5,192,110	5,224,456	5,259,221	5,296,236	5,335,336	5,376,359	5,419,148	5,463,550	5,509,416	5,556,605	5,604,979
5,362,148	5.08%	2.40%	4,973,187	4,988,977	5,007,888	5,029,807	5,054,590	5,082,084	5,112,128	5,144,561	5,179,220	5,215,948	5,254,586	5,294,982	5,336,985	5,380,450	5,425,239	5,471,216
5,206,783	5.24%	2.60%	4,875,419	4,889,452	4,906,480	4,926,415	4,949,141	4,974,518	5,002,401	5,032,637	5,065,073	5,099,557	5,135,937	5,174,063	5,213,789	5,254,973	5,297,479	5,341,175
5,056,790	5.40%	2.80%	4,779,294	4,791,735	4,807,034	4,825,138	4,845,949	4,869,349	4,895,203	4,923,373	4,953,713	4,986,077	5,020,319	5,056,294	5,093,859	5,132,877	5,173,213	5,214,739
4,911,957	5.55%	3.00%	4,684,791	4,695,792	4,709,511	4,725,925	4,744,959	4,766,513	4,790,468	4,816,696	4,845,060	4,875,423	4,907,642	4,941,579	4,977,096	5,014,056	5,052,330	5,091,791
4,772,084	5.71%	3.20%	4,591,882	4,601,585	4,613,863	4,628,721	4,646,108	4,665,943	4,688,121	4,712,526	4,739,031	4,767,505	4,797,813	4,829,821	4,863,394	4,898,402	4,934,717	4,972,215
4,636,977	5.87%	3.40%	4,500,590	4,509,126	4,520,094	4,533,522	4,549,385	4,567,619	4,588,136	4,610,831	4,635,586	4,662,278	4,690,780	4,720,961	4,752,693	4,785,848	4,820,301	4,855,933
4,506,451	6.02%	3.60%	4,410,862	4,418,354	4,428,131	4,440,250	4,454,705	4,471,453	4,490,419	4,511,511	4,534,622	4,559,636	4,586,432	4,614,886	4,644,873	4,676,270	4,708,956	4,742,813
4,380,330	6.18%	3.80%	4,322,698	4,329,257	4,337,957	4,348,877	4,362,035	4,377,403	4,394,923	4,414,515	4,436,082	4,459,515	4,484,702	4,511,522	4,539,857	4,569,587	4,600,595	4,632,767
4,258,444	6.34%	4.00%	4,236,090	4,241,818	4,249,545	4,259,371	4,271,334	4,285,424	4,301,598	4,319,786	4,339,903	4,361,850	4,385,518	4,410,795	4,437,566	4,465,716	4,495,131	4,525,702
4,140,631	6.49%	4.20%	4,151,027	4,156,018	4,162,869	4,171,698	4,182,563	4,195,470	4,210,390	4,227,268	4,246,026	4,266,574	4,288,810	4,312,629	4,337,920	4,364,573	4,392,477	4,421,526
4,026,735	6.65%	4.40%	4,067,492	4,071,832	4,077,894	4,085,817	4,095,674	4,107,488	4,121,244	4,136,898	4,154,383	4,173,616	4,194,504	4,216,946	4,240,837	4,266,071	4,292,542	4,320,145
3,916,609	6.81%	4.60%	3,985,483	3,989,247	3,994,604	4,001,704	4,010,637	4,021,443	4,034,118	4,048,630	4,064,922	4,082,921	4,102,539	4,123,681	4,146,249	4,170,139	4,195,250	4,221,481
3,810,108	6.96%	4.80%	3,904,989	3,908,247	3,912,971	3,919,326	3,927,415	3,937,290	3,948,963	3,962,411	3,977,588	3,994,428	4,012,850	4,032,767	4,054,083	4,076,701	4,100,523	4,125,452
3,707,097	7.12%	5.00%	3,825,996	3,828,810	3,832,971	3,838,651	3,845,969	3,854,988	3,865,733	3,878,190	3,892,324	3,908,077	3,925,374	3,944,135	3,964,269	3,985,683	4,008,283	4,031,975
3,607,445	7.28%	5.20%	3,748,494	3,750,919	3,754,577	3,759,650	3,766,264	3,774,496	3,784,381	3,795,918	3,809,077	3,823,810	3,840,050	3,857,721	3,876,738	3,897,013	3,918,454	3,940,973
3,511,026	7.43%	5.40%	3,672,474	3,674,561	3,677,772	3,682,297	3,688,270	3,695,780	3,704,870	3,715,550	3,727,800	3,741,578	3,756,824	3,773,468	3,791,430	3,810,627	3,830,971	3,852,377
3,417,720	7.59%	5.60%	3,597,922	3,599,714	3,602,530	3,606,561	3,611,952	3,618,799	3,627,155	3,637,040	3,648,441	3,661,324	3,675,637	3,691,313	3,708,280	3,726,457	3,745,762	3,766,111
3,327,412	7.75%	5.80%	3,524,826	3,526,362	3,528,828	3,532,417	3,537,279	3,543,518	3,551,197	3,560,344	3,570,953	3,582,999	3,596,435	3,611,201	3,627,228	3,644,441	3,662,761	3,682,108
3,239,990	7.90%	6.00%	3,453,169	3,454,484	3,456,640	3,459,833	3,464,215	3,469,898	3,476,953	3,485,415	3,495,288	3,506,550	3,519,163	3,533,072	3,548,213	3,564,515	3,581,902	3,600,299
3,155,350	8.06%	6.20%	3,382,945	3,384,068	3,385,952	3,388,789	3,392,737	3,397,912	3,404,392	3,412,220	3,421,406	3,431,936	3,443,777	3,456,880	3,471,184	3,486,625	3,503,129	3,520,625
3,073,388	8.22%	6.40%	3,314,133	3,315,091	3,316,735	3,319,255	3,322,810	3,327,521	3,333,472	3,340,713	3,349,260	3,359,106	3,370,223	3,382,567	3,396,083	3,410,709	3,426,378	3,443,019
2,994,008	8.37%	6.60%	3,246,715	3,247,532	3,248,966	3,251,203	3,254,402	3,258,690	3,264,155	3,270,852	3,278,805	3,288,011	3,298,449	3,310,080	3,322,854	3,336,711	3,351,589	3,367,420
2,917,116	8.53%	6.80%	3,180,682	3,181,377	3,182,627	3,184,611	3,187,491	3,191,392	3,196,410	3,202,605	3,210,005	3,218,615	3,228,417	3,239,377	3,251,450	3,264,581	3,278,710	3,293,774
2,842,621	8.69%	7.00%	3,115,993	3,116,584	3,117,672	3,119,433	3,122,023	3,125,574	3,130,182	3,135,912	3,142,799	3,150,852	3,160,058	3,170,388	3,181,801	3,194,247	3,207,667	3,222,003

表 5-26 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果

NPV	折現率	無風險利率	序列複合選擇權計算																
			0.27	0.28	0.29	0.3	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.4	0.41	0.42	0.43
6,619,933	3.99%	1.00%	6,626,807	6,694,886	6,763,575	6,832,761	6,902,338	6,972,208	7,042,278	7,112,462	7,182,678	7,252,852	7,322,915	7,392,801	7,462,450	7,531,807	7,600,820	7,669,443	7,737,631
6,420,204	4.14%	1.20%	6,443,582	6,508,548	6,574,138	6,640,240	6,706,752	6,773,576	6,840,622	6,907,803	6,975,043	7,042,266	7,109,404	7,176,395	7,243,179	7,309,702	7,375,913	7,441,766	7,507,218
6,227,617	4.30%	1.40%	6,301,181	6,363,086	6,425,640	6,488,734	6,552,264	6,616,135	6,680,257	6,744,545	6,808,923	6,873,316	6,937,658	7,001,885	7,065,940	7,129,768	7,193,321	7,256,550	7,319,416
6,041,882	4.46%	1.60%	6,145,454	6,204,485	6,264,181	6,324,435	6,385,146	6,446,220	6,507,567	6,569,105	6,630,758	6,692,453	6,754,123	6,815,708	6,877,150	6,938,395	6,999,395	7,060,105	7,120,482
5,862,726	4.61%	1.80%	5,994,245	6,050,533	6,107,503	6,165,048	6,223,069	6,281,472	6,340,170	6,399,081	6,458,131	6,517,247	6,576,366	6,635,425	6,694,369	6,753,145	6,811,704	6,870,004	6,928,001
5,689,884	4.77%	2.00%	5,847,399	5,901,074	5,955,443	6,010,403	6,065,856	6,121,709	6,177,877	6,234,280	6,290,843	6,347,496	6,404,175	6,460,820	6,517,376	6,573,791	6,630,017	6,686,011	6,741,732
5,523,105	4.93%	2.20%	5,704,775	5,755,957	5,807,847	5,860,341	5,913,343	5,966,762	6,020,514	6,074,521	6,128,708	6,183,007	6,237,355	6,291,693	6,345,966	6,400,123	6,454,118	6,507,907	6,561,450
5,362,148	5.08%	2.40%	5,566,235	5,615,041	5,664,565	5,714,707	5,765,370	5,816,466	5,867,911	5,919,629	5,971,547	6,023,597	6,075,717	6,127,849	6,179,939	6,231,937	6,283,797	6,335,477	6,386,937
5,206,783	5.24%	2.60%	5,431,644	5,478,185	5,525,454	5,573,351	5,621,782	5,670,660	5,719,903	5,769,435	5,819,185	5,869,085	5,919,076	5,969,099	6,019,102	6,069,035	6,118,854	6,168,516	6,217,982
5,056,790	5.40%	2.80%	5,300,875	5,345,257	5,390,376	5,436,132	5,482,433	5,529,194	5,576,334	5,623,778	5,671,456	5,719,302	5,767,257	5,815,264	5,863,271	5,911,230	5,959,096	6,006,827	6,054,385
4,911,957	5.55%	3.00%	5,173,802	5,216,128	5,259,196	5,302,910	5,347,179	5,391,919	5,437,050	5,482,500	5,528,199	5,574,082	5,620,092	5,666,171	5,712,269	5,758,339	5,804,336	5,850,220	5,895,952
4,772,084	5.71%	3.20%	5,050,299	5,090,665	5,131,779	5,173,545	5,215,875	5,258,686	5,301,901	5,345,446	5,389,253	5,433,261	5,477,411	5,521,647	5,565,920	5,610,183	5,654,393	5,698,508	5,742,493
4,636,977	5.87%	3.40%	4,930,278	4,968,777	5,008,027	5,047,935	5,088,415	5,129,385	5,170,768	5,212,493	5,254,494	5,296,708	5,339,079	5,381,553	5,424,080	5,466,614	5,509,112	5,551,536	5,593,848
4,506,451	6.02%	3.60%	4,813,601	4,850,321	4,887,795	4,925,932	4,964,647	5,003,859	5,043,493	5,083,480	5,123,754	5,164,255	5,204,926	5,245,714	5,286,571	5,327,451	5,368,312	5,409,116	5,449,826
4,380,330	6.18%	3.80%	4,700,170	4,735,196	4,770,977	4,807,425	4,844,455	4,881,990	4,919,955	4,958,281	4,996,906	5,035,768	5,074,814	5,113,990	5,153,248	5,192,546	5,231,840	5,271,093	5,310,270
4,258,444	6.34%	4.00%	4,589,884	4,623,296	4,657,464	4,692,301	4,727,724	4,763,657	4,800,028	4,836,769	4,873,817	4,911,113	4,948,604	4,986,238	5,023,968	5,061,751	5,099,545	5,137,314	5,175,022
4,140,631	6.49%	4.20%	4,482,645	4,514,520	4,547,151	4,580,451	4,614,342	4,648,746	4,683,595	4,718,820	4,754,362	4,790,161	4,826,165	4,862,325	4,898,592	4,934,925	4,971,284	5,007,631	5,043,933
4,026,735	6.65%	4.40%	4,378,351	4,408,763	4,439,929	4,471,765	4,504,193	4,537,138	4,570,533	4,604,311	4,638,412	4,672,781	4,707,364	4,742,112	4,776,980	4,811,925	4,846,909	4,881,895	4,916,850
3,916,609	6.81%	4.60%	4,276,916	4,305,935	4,335,705	4,366,145	4,397,177	4,428,730	4,460,737	4,493,132	4,525,857	4,558,857	4,592,081	4,625,479	4,659,007	4,692,625	4,726,292	4,759,975	4,793,639
3,810,108	6.96%	4.80%	4,178,252	4,205,944	4,234,384	4,263,493	4,293,194	4,323,418	4,354,098	4,385,173	4,416,583	4,448,274	4,480,197	4,512,304	4,544,550	4,576,896	4,609,304	4,641,737	4,674,165
3,707,097	7.12%	5.00%	4,082,271	4,108,700	4,135,873	4,163,712	4,192,143	4,221,099	4,250,513	4,280,325	4,310,478	4,340,919	4,371,597	4,402,468	4,433,488	4,464,616	4,495,816	4,527,054	4,558,297
3,607,445	7.28%	5.20%	3,988,888	4,014,115	4,040,081	4,066,710	4,093,930	4,121,674	4,149,879	4,178,485	4,207,436	4,236,681	4,266,169	4,295,857	4,325,703	4,355,665	4,385,709	4,415,801	4,445,908
3,511,026	7.43%	5.40%	3,898,029	3,922,111	3,946,927	3,972,402	3,998,467	4,025,055	4,052,105	4,079,559	4,107,361	4,135,461	4,163,812	4,192,368	4,221,088	4,249,935	4,278,871	4,307,865	4,336,884
3,417,720	7.59%	5.60%	3,809,612	3,832,605	3,856,326	3,880,701	3,905,663	3,931,148	3,957,095	3,983,448	4,010,152	4,037,157	4,064,419	4,091,891	4,119,535	4,147,313	4,175,188	4,203,129	4,231,105
3,327,412	7.75%	5.80%	3,723,566	3,745,523	3,768,199	3,791,526	3,815,437	3,839,868	3,864,762	3,890,062	3,915,716	3,941,675	3,967,894	3,994,330	4,020,943	4,047,696	4,074,554	4,101,487	4,128,463
3,239,990	7.90%	6.00%	3,639,815	3,660,785	3,682,467	3,704,794	3,727,702	3,751,128	3,775,015	3,799,309	3,823,959	3,848,917	3,874,139	3,899,582	3,925,208	3,950,980	3,976,864	4,002,830	4,028,847
3,155,350	8.06%	6.20%	3,558,296	3,578,327	3,599,062	3,620,436	3,642,387	3,664,853	3,687,779	3,711,112	3,734,802	3,758,802	3,783,069	3,807,562	3,832,242	3,857,074	3,882,025	3,907,064	3,932,162
3,073,388	8.22%	6.40%	3,478,937	3,498,075	3,517,908	3,538,374	3,559,411	3,580,961	3,602,969	3,625,383	3,648,155	3,671,239	3,694,593	3,718,175	3,741,949	3,765,881	3,789,937	3,814,087	3,838,303
2,994,008	8.37%	6.60%	3,401,673	3,419,960	3,438,934	3,458,534	3,478,700	3,499,375	3,520,506	3,542,042	3,563,936	3,586,143	3,608,622	3,631,333	3,654,239	3,677,308	3,700,506	3,723,804	3,747,174
2,917,116	8.53%	6.80%	3,326,445	3,343,923	3,362,079	3,380,854	3,400,188	3,420,028	3,440,321	3,461,018	3,482,072	3,503,440	3,525,082	3,546,958	3,569,033	3,591,274	3,613,649	3,636,130	3,658,689
2,842,621	8.69%	7.00%	3,253,172	3,269,880	3,287,258	3,305,245	3,323,786	3,342,828	3,362,321	3,382,215	3,402,466	3,423,032	3,443,871	3,464,948	3,486,227	3,507,675	3,529,261	3,550,958	3,572,739

表 5-26 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)

NPV	折現率	無風險利率	序列複合選擇權計算																
			0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.5	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.6
6,619,933	3.99%	1.00%	7,805,344	7,872,545	7,939,202	8,005,282	8,070,759	8,135,606	8,199,802	8,263,324	8,326,156	8,388,281	8,449,683	8,510,352	8,570,276	8,629,446	8,687,854	8,745,494	8,802,362
6,420,204	4.14%	1.20%	7,572,230	7,636,765	7,700,791	7,764,278	7,827,197	7,889,524	7,951,237	8,012,315	8,072,739	8,132,495	8,191,567	8,249,943	8,307,613	8,364,566	8,420,796	8,476,297	8,531,062
6,227,617	4.30%	1.40%	7,381,877	7,443,899	7,505,449	7,566,496	7,627,014	7,686,978	7,746,365	7,805,154	7,863,329	7,920,872	7,977,769	8,034,008	8,089,578	8,144,469	8,198,674	8,252,186	8,304,999
6,041,882	4.46%	1.60%	7,180,488	7,240,088	7,299,249	7,357,942	7,416,140	7,473,818	7,530,954	7,587,528	7,643,522	7,698,920	7,753,707	7,807,871	7,861,401	7,914,288	7,966,522	8,018,099	8,069,011
5,862,726	4.61%	1.80%	6,985,658	7,042,941	7,099,817	7,156,257	7,212,234	7,267,725	7,322,707	7,377,160	7,431,066	7,484,409	7,537,175	7,589,352	7,640,928	7,691,894	7,742,241	7,791,963	7,841,054
5,689,884	4.77%	2.00%	6,797,142	6,852,208	6,906,897	6,961,181	7,015,033	7,068,430	7,121,349	7,173,771	7,225,677	7,277,053	7,327,884	7,378,157	7,427,861	7,476,986	7,525,524	7,573,469	7,620,814
5,523,105	4.93%	2.20%	6,614,710	6,667,654	6,720,250	6,772,470	6,824,288	6,875,680	6,926,624	6,977,101	7,027,093	7,076,584	7,125,560	7,174,009	7,221,919	7,269,281	7,316,086	7,362,326	7,407,997
5,362,148	5.08%	2.40%	6,438,140	6,489,053	6,539,646	6,589,891	6,639,761	6,689,233	6,738,285	6,786,899	6,835,057	6,882,743	6,929,942	6,976,643	7,022,834	7,068,505	7,113,648	7,158,255	7,202,321
5,206,783	5.24%	2.60%	6,267,216	6,316,186	6,364,862	6,413,215	6,461,219	6,508,853	6,556,094	6,602,923	6,649,324	6,695,279	6,740,776	6,785,801	6,830,344	6,874,394	6,917,944	6,960,985	7,003,512
5,056,790	5.40%	2.80%	6,101,735	6,148,845	6,195,684	6,242,226	6,288,444	6,334,317	6,379,822	6,424,942	6,469,658	6,513,956	6,557,821	6,601,240	6,644,203	6,686,699	6,728,721	6,770,260	6,811,310
4,911,957	5.55%	3.00%	5,941,499	5,986,828	6,031,909	6,076,716	6,121,223	6,165,409	6,209,252	6,252,733	6,295,836	6,338,544	6,380,844	6,422,724	6,464,172	6,505,178	6,545,734	6,585,832	6,625,466
4,772,084	5.71%	3.20%	5,786,313	5,829,937	5,873,335	5,916,480	5,959,349	6,001,919	6,044,168	6,086,080	6,127,635	6,168,820	6,209,621	6,250,024	6,290,019	6,329,596	6,368,746	6,407,462	6,445,738
4,636,977	5.87%	3.40%	5,636,014	5,678,004	5,719,790	5,761,344	5,802,642	5,843,662	5,884,385	5,924,791	5,964,864	6,004,588	6,043,950	6,082,937	6,121,538	6,159,744	6,197,545	6,234,935	6,271,905
4,506,451	6.02%	3.60%	5,490,409	5,530,836	5,571,076	5,611,105	5,650,899	5,690,435	5,729,694	5,768,657	5,807,308	5,845,632	5,883,614	5,921,243	5,958,507	5,995,397	6,031,904	6,068,020	6,103,739
4,380,330	6.18%	3.80%	5,349,337	5,388,265	5,427,026	5,465,594	5,503,946	5,542,059	5,579,915	5,617,495	5,654,782	5,691,762	5,728,421	5,764,747	5,800,728	5,836,356	5,871,620	5,906,514	5,941,031
4,258,444	6.34%	4.00%	5,212,638	5,250,130	5,287,473	5,324,641	5,361,611	5,398,360	5,434,871	5,471,124	5,507,103	5,542,794	5,578,184	5,613,259	5,648,009	5,682,425	5,716,497	5,750,217	5,783,580
4,140,631	6.49%	4.20%	5,080,157	5,116,275	5,152,259	5,188,085	5,223,729	5,259,171	5,294,391	5,329,372	5,364,097	5,398,551	5,432,722	5,466,598	5,500,166	5,533,418	5,566,345	5,598,939	5,631,193
4,026,735	6.65%	4.40%	4,951,741	4,986,542	5,021,223	5,055,763	5,090,137	5,124,324	5,158,307	5,192,067	5,225,589	5,258,857	5,291,859	5,324,582	5,357,016	5,389,151	5,420,978	5,452,490	5,483,679
3,916,609	6.81%	4.60%	4,827,254	4,860,791	4,894,225	4,927,530	4,960,686	4,993,671	5,026,467	5,059,056	5,091,422	5,123,552	5,155,431	5,187,048	5,218,393	5,249,455	5,280,226	5,310,698	5,340,864
3,810,108	6.96%	4.80%	4,706,556	4,738,883	4,771,120	4,803,243	4,835,230	4,867,062	4,898,718	4,930,183	4,961,441	4,992,478	5,023,280	5,053,835	5,084,134	5,114,165	5,143,922	5,173,395	5,202,578
3,707,097	7.12%	5.00%	4,589,515	4,620,682	4,651,771	4,682,760	4,713,627	4,744,351	4,774,915	4,805,302	4,835,496	4,865,482	4,895,250	4,924,785	4,954,079	4,983,121	5,011,902	5,040,416	5,068,654
3,607,445	7.28%	5.20%	4,476,003	4,506,057	4,536,046	4,565,947	4,595,738	4,625,401	4,654,916	4,684,267	4,713,439	4,742,418	4,771,192	4,799,748	4,828,076	4,856,167	4,884,012	4,911,602	4,938,932
3,511,026	7.43%	5.40%	4,365,901	4,394,888	4,423,822	4,452,679	4,481,439	4,510,082	4,538,590	4,566,947	4,595,139	4,623,150	4,650,969	4,678,584	4,705,985	4,733,161	4,760,106	4,786,809	4,813,266
3,417,720	7.59%	5.60%	4,259,089	4,287,053	4,314,975	4,342,830	4,370,600	4,398,265	4,425,807	4,453,210	4,480,459	4,507,541	4,534,443	4,561,153	4,587,662	4,613,961	4,640,039	4,665,890	4,691,507
3,327,412	7.75%	5.80%	4,155,456	4,182,439	4,209,389	4,236,284	4,263,104	4,289,829	4,316,443	4,342,929	4,369,274	4,395,462	4,421,483	4,447,325	4,472,977	4,498,430	4,523,677	4,548,708	4,573,517
3,239,990	7.90%	6.00%	4,054,890	4,080,932	4,106,950	4,132,923	4,158,830	4,184,654	4,210,376	4,235,982	4,261,457	4,286,788	4,311,962	4,336,968	4,361,797	4,386,438	4,410,884	4,435,126	4,459,158
3,155,350	8.06%	6.20%	3,957,293	3,982,431	4,007,555	4,032,643	4,057,675	4,082,632	4,107,499	4,132,259	4,156,899	4,181,405	4,205,765	4,229,968	4,254,004	4,277,864	4,301,540	4,325,023	4,348,308
3,073,388	8.22%	6.40%	3,862,560	3,886,832	3,911,097	3,935,335	3,959,526	3,983,652	4,007,696	4,031,644	4,055,481	4,079,194	4,102,771	4,126,202	4,149,477	4,172,585	4,195,520	4,218,274	4,240,839
2,994,008	8.37%	6.60%	3,770,592	3,794,032	3,817,474	3,840,895	3,864,279	3,887,605	3,910,860	3,934,026	3,957,092	3,980,043	4,002,868	4,025,556	4,048,098	4,070,484	4,092,706	4,114,756	4,136,629
2,917,116	8.53%	6.80%	3,681,302	3,703,944	3,726,594	3,749,232	3,771,840	3,794,399	3,816,894	3,839,310	3,861,633	3,883,852	3,905,953	3,927,927	3,949,764	3,971,454	3,992,990	4,014,365	4,035,571
2,842,621	8.69%	7.00%	3,594,579	3,616,455	3,638,345	3,660,231	3,682,093	3,703,914	3,725,679	3,747,374	3,768,984	3,790,497	3,811,903	3,833,189	3,854,348	3,875,369	3,896,244	3,916,968	3,937,532

表 5-26 序列複合選擇權評價模型之計畫價值評估結果 (續)

第6章 結論與建議

針對多期序列複合選擇權模型評估多期開發之 BOT 投資計畫的應用結果，提出結論與建議。

6.1 結論

首先，就分兩期興建的投資案例而言，經由序列複合選擇權評估後之計畫投資價值並未如預期的高，其中的關鍵在於資產變異數。當資產變異標準差取值不大時，計畫投資價值將低於淨現值法所評估的淨現值。但當資產變異之標準差達到 0.31 時，經由本評價模型評估出之計畫價值將高於傳統淨現值法的評估結果。

其次，就分三期興建的投資案例而言，經由序列複合選擇權評價模型評估後之計畫總投資價值，在資產變異之標準差項的參數大於 0.1 時，計畫的投資價值即大於傳統淨現值法的評估結果。並且，當資產變異之標準差愈大，即專案價值面對越愈高的風險時，經由序列複合選擇權評價模型評估之計畫總投資價值愈大。這些結果顯示，當計畫投資彈性愈大，而且專案風險愈高時，傳統淨現值法將嚴重低估計畫投資價值。

總之，利用序列複合選擇權評價模型評估分期開發的 BOT 建設專案，經由兩個實際案例的應用，說明了此評價模型在實務上應用的可行性。同時，經由本論文實際案例的應用，後續在進行分期開發之網狀(network)建設的投資評估時，或可利用此序列複合買權評價模型作為財務的評估工具，進一步探討這類型複雜專案的投資特性。

6.2 建議

對於評價模型中的無風險利率以及資產變異之標準差，在案例的應用上，未來可進一步依照當時的實際情況進行分年度或分期之參數取值的調整。例如：可將參數進行模擬，可視為一個隨機變數或者找尋參數在過去之變動過程分布特性，利用類似的函數型式作為其未來數值的變動依據，而非單純以某一期間之平均值(定值)作為參數的值。此舉將會使得計畫價值的評估結果更為符合實際情況。但是，如何解決多個隨機變數的聯動性，對實質選擇權的評價模型而言，是一個非常複雜的問題，不易找到封閉解。

參考文獻

英文部分

1. Agliardi E. & Agliardi R., "A generalization of the Geske formula for compound option", Mathematical Social Science 45, 75-82, 2003
2. Agliardi E. & Agliardi R., "A closed-form solution for multiconpound options" Risk Letters 1, 1-2
3. Black, F., Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, p.637-654, 1973
4. Brealey, Myers and Allen, 2006, "Corporate Finance", 8th edition, McGraw Hill Companies Inc., USA, 1028p.
5. Cassimon, D., Engelen, P.J., Thomassen, L. and Van Wouwe, M. "The valuation of a NDA using a 6-fold compound option", Research Policy, Volume 33, Issue 1, January 2004, Pages 41-51
6. Chen S. Park, "Contemporary engineering economics" , 3rd edition, Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2002
7. Cortazar, G., Casassus, J. , "A Compound Option Model for Evaluating Multi-Stage Natural Resource Investments" in Project Flexibility, Agency, and Competition: New Developments in the Theory and Application of Real Options, Brennan and Trigeorgis (Eds), Chapter 11, 205-223, Oxford University Press, New York, 2000
8. Curnow, R.N., Dunnett, C.W., "The numerical evaluation of certain multivariate normal integrals" , Annals of Mathematical Statistics 33, 1962
9. Geske R., "The valuation of compound options", Journal of Financial Economics, Volume 7, Issue 1, March 1979, Pages 63-81
10. Geske R. and Johnson H.E., "The valuation of corporate liabilities as compound options : a correction", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 19, No. 2 (Jun., 1984), pp. 231-232
11. Hogg, R. V. And Craig, A. T., "Introduction to Mathematical Statistics", Fifth edition, 1995
12. Lajeri-Chaherli R., "A note on the valuation of compound options", The Journal of Futures Markets, Vol.22, No.11, 1103-1115, 2002
13. Meng-Yu Lee, Fang-Bo Yeh and An-Pin Chen, "The generalized sequential compound options pricing and sensitivity analysis", Mathematical Social Sciences, Vol.55, Issue 1, Jan.2008, Pages 38-54

14. Thomassen, L., Van Wouwe, M., "The n-fold compound option", Research Paper 2001-041, University of Antwerp, Department of Mathematics and Statistics, 2001
15. Trigeorgis L., "Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation", Cambridge, Mass. MIT Press, 1996.
16. Yu-Lin Huang and Shih-Pei Chou, "Valuation of the minimum revenue guarantee and the option to abandon in BOT infrastructure projects", Construction Management and Economics, Vol.24, Nunber4, April 2006, pp. 379-389(11)

中文部分

1. John C. Hull 著，選擇權、期貨與其他衍生性商品，黃達業譯，普林斯頓國際，2004
2. Larson, Kermit D. & Wild, John J. & Chiappetta, Barbara，財務會計，高妹月譯，麥格羅.希爾，2005
3. T. Copeland and V. Antikarov，實質選擇權，顏錫銘 譯，華泰文化，2003。
4. 陳松男，金融工程學：金融商品創新選擇權理論，第二版，新陸書局，2005。
5. 張孟元、劉江彬，無形資產評估鑑價之理論與實務，華泰文化，2005
6. 張智星，MATLAB 程式設計入門篇，第二版，鈦思科技，2007
7. 鄭偉廷，實質選擇權評價供水及污水系統 BOT 計畫－最低營收保證複式選擇權，國立交通大學，碩士論文，2005
8. 林育霖，BOT 垃圾資源回收場最低營收保證價值之研究－應用複合選擇權理論，國立交通大學，碩士論文，2006
9. 詹傑麟，BOT 放棄選擇權之研究－以台灣南北高速鐵路計畫為例，國立交通大學，碩士論文，1999

附件一 政府公債利率

民國 年月	十年期中央 政府 公債次級 市場利率 ¹⁵	民國 年月	十年期中央 政府 公債次級 市場利率 ¹⁵	民國 年月	十年期中央 政府 公債次級 市場利率 ¹⁵	民國 年月	十年期中央 政府 公債次級市 場利率 ¹⁵	民國 年月	十年期中央 政府 公債次級 市場利率 ¹⁵
84 年 01 月	7.45	86 年 10 月	6.36	89 年 07 月	5.57	92 年 04 月	1.91	95 年 01 月	1.73
84 年 02 月	7.33	86 年 11 月	6.28	89 年 08 月	5.40	92 年 05 月	1.49	95 年 02 月	1.80
84 年 03 月	7.63	86 年 12 月	6.50	89 年 09 月	5.42	92 年 06 月	1.42	95 年 03 月	1.82
84 年 04 月	7.36	87 年 01 月	6.57	89 年 10 月	5.34	92 年 07 月	1.81	95 年 04 月	1.93
84 年 05 月	7.22	87 年 02 月	6.70	89 年 11 月	5.22	92 年 08 月	2.24	95 年 05 月	2.23
84 年 06 月	6.72	87 年 03 月	6.54	89 年 12 月	5.13	92 年 09 月	2.77	95 年 06 月	2.17
84 年 07 月	6.43	87 年 04 月	6.33	90 年 01 月	5.13	92 年 10 月	2.78	95 年 07 月	2.15
84 年 08 月	6.16	87 年 05 月	6.45	90 年 02 月	4.84	92 年 11 月	2.87	95 年 08 月	2.06
84 年 09 月	6.38	87 年 06 月	6.40	90 年 03 月	4.58	92 年 12 月	2.80	95 年 09 月	1.96
84 年 10 月	6.22	87 年 07 月	6.22	90 年 04 月	4.59	93 年 01 月	2.62	95 年 10 月	2.00
84 年 11 月	6.26	87 年 08 月	5.99	90 年 05 月	4.48	93 年 02 月	2.70	95 年 11 月	1.96
84 年 12 月	6.31	87 年 09 月	5.22	90 年 06 月	3.84	93 年 03 月	2.33	95 年 12 月	1.99
85 年 01 月	6.27	87 年 10 月	5.14	90 年 07 月	3.50	93 年 04 月	2.39	96 年 01 月	1.99
85 年 02 月	6.17	87 年 11 月	5.24	90 年 08 月	3.85	93 年 05 月	2.68	96 年 02 月	1.98
85 年 03 月	6.25	87 年 12 月	5.12	90 年 09 月	3.51	93 年 06 月	2.97	96 年 03 月	1.96
85 年 04 月	6.19	88 年 01 月	5.02	90 年 10 月	2.98	93 年 07 月	2.85	96 年 04 月	2.02
85 年 05 月	6.17	88 年 02 月	5.02	90 年 11 月	3.19	93 年 08 月	2.89	96 年 05 月	2.11
85 年 06 月	6.08	88 年 03 月	5.20	90 年 12 月	3.81	93 年 09 月	2.64	96 年 06 月	2.43
85 年 07 月	6.12	88 年 04 月	5.61	91 年 01 月	3.52	93 年 10 月	2.70	96 年 07 月	2.58
85 年 08 月	5.93	88 年 05 月	5.99	91 年 02 月	3.71	93 年 11 月	2.67	96 年 08 月	2.46
85 年 09 月	5.66	88 年 06 月	6.20	91 年 03 月	4.03	93 年 12 月	2.43	96 年 09 月	2.45
85 年 10 月	5.71	88 年 07 月	6.17	91 年 04 月	4.12	94 年 01 月	2.44	96 年 10 月	2.69
85 年 11 月	5.82	88 年 08 月	6.15	91 年 05 月	4.02	94 年 02 月	2.39	96 年 11 月	2.63
85 年 12 月	6.14	88 年 09 月	6.06	91 年 06 月	3.78	94 年 03 月	2.32	96 年 12 月	2.53
86 年 01 月	6.15	88 年 10 月	6.16	91 年 07 月	3.50	94 年 04 月	2.24		
86 年 02 月	6.07	88 年 11 月	5.98	91 年 08 月	3.37	94 年 05 月	2.03		
86 年 03 月	6.12	88 年 12 月	6.03	91 年 09 月	3.23	94 年 06 月	1.87		
86 年 04 月	6.09	89 年 01 月	6.06	91 年 10 月	2.99	94 年 07 月	1.99		
86 年 05 月	6.01	89 年 02 月	5.96	91 年 11 月	2.82	94 年 08 月	2.01		
86 年 06 月	5.84	89 年 03 月	6.00	91 年 12 月	2.48	94 年 09 月	1.75		
86 年 07 月	5.97	89 年 04 月	5.87	92 年 01 月	1.96	94 年 10 月	1.83		
86 年 08 月	6.12	89 年 05 月	5.87	92 年 02 月	1.90	94 年 11 月	1.85		
86 年 09 月	6.17	89 年 06 月	5.78	92 年 03 月	1.93	94 年 12 月	1.84		

附件二 公共事業指數

利用從事瓦斯事業之相關上市、上櫃公司股票，包括：大台北瓦斯、欣欣天然氣、新海瓦斯、欣高石油氣、欣雄、新泰，等六間上市、上櫃公司於 2005 至 2007 年股票價格的週報酬率之標準差，再經由轉換算得年標準差，以此作為資產變異數之標準差的參考基值。

日期	瓦斯類股		日期	瓦斯類股		日期	瓦斯類股	
	股價	報酬率		股價	報酬率		股價	報酬率
2003/1/3	48.78		2003/10/17	63.75	1.29%	2004/8/6	74.57	0.63%
2003/1/10	50.13	2.69%	2003/10/24	61.36	-3.90%	2004/8/13	73.56	-1.37%
2003/1/17	50.3	0.34%	2003/10/31	63.19	2.90%	2004/8/20	74.31	1.01%
2003/1/24	51.34	2.03%	2003/11/7	62.6	-0.94%	2004/8/27	75.07	1.01%
2003/1/28	50.9	-0.86%	2003/11/14	61.95	-1.05%	2004/9/3	77.18	2.73%
2003/2/7	49.65	-2.52%	2003/11/21	61.19	-1.24%	2004/9/10	79.36	2.75%
2003/2/14	50.28	1.25%	2003/11/28	63.31	3.35%	2004/9/17	80.45	1.35%
2003/2/21	50.65	0.73%	2003/12/5	63.51	0.31%	2004/9/24	79.9	-0.69%
2003/2/27	52.89	4.24%	2003/12/12	62.48	-1.65%	2004/10/1	82.07	2.64%
2003/3/7	53.47	1.08%	2003/12/19	62.4	-0.13%	2004/10/8	79	-3.89%
2003/3/14	56.58	5.50%	2003/12/26	62.44	0.06%	2004/10/15	78.73	-0.34%
2003/3/21	56.95	0.65%	2003/12/31	63.48	1.64%	2004/10/22	78.66	-0.09%
2003/3/28	57.42	0.82%	2004/1/2	62.67	-1.29%	2004/10/29	77.64	-1.31%
2003/4/4	57.69	0.47%	2004/1/9	65.17	3.84%	2004/11/5	76.68	-1.25%
2003/4/11	55.87	-3.26%	2004/1/16	64.83	-0.52%	2004/11/12	78.21	1.96%
2003/4/18	54.63	-2.27%	2004/1/30	68.16	4.89%	2004/11/19	78.02	-0.24%
2003/4/25	53.38	-2.34%	2004/2/6	68.7	0.79%	2004/11/26	77.1	-1.19%
2003/5/2	53.26	-0.23%	2004/2/13	71.61	4.06%	2004/12/3	78.81	2.17%
2003/5/9	53.63	0.69%	2004/2/20	71.62	0.01%	2004/12/10	77.33	-1.91%
2003/5/16	54.38	1.38%	2004/2/27	70.93	-0.97%	2004/12/17	77.25	-0.10%
2003/5/23	54.44	0.11%	2004/3/5	73.05	2.90%	2004/12/24	80.92	4.54%
2003/5/30	54.64	0.37%	2004/3/12	72.83	-0.30%	2004/12/31	79.34	-1.99%
2003/6/6	55.48	1.51%	2004/3/19	70.83	-2.82%	2005/1/7	79.16	-0.23%
2003/6/13	55.68	0.36%	2004/3/26	71.73	1.25%	2005/1/14	79.26	0.13%
2003/6/20	55.98	0.54%	2004/4/2	72.99	1.73%	2005/1/21	79.77	0.64%
2003/6/27	57.45	2.56%	2004/4/9	71.8	-1.66%	2005/1/28	79.85	0.10%
2003/7/4	57.57	0.21%	2004/4/16	72.3	0.69%	2005/2/3	81.12	1.57%
2003/7/11	58.17	1.03%	2004/4/23	71.4	-1.26%	2005/2/18	80.26	-1.07%
2003/7/18	58.8	1.07%	2004/4/30	70.44	-1.36%	2005/2/25	81.73	1.80%
2003/7/25	58.63	-0.29%	2004/5/7	70.23	-0.30%	2005/3/4	84.1	2.82%
2003/8/1	57.94	-1.19%	2004/5/14	70.9	0.94%	2005/3/11	84.22	0.14%
2003/8/8	59.2	2.13%	2004/5/21	71.29	0.55%	2005/3/18	85.13	1.07%
2003/8/15	59.59	0.65%	2004/5/28	71.81	0.72%	2005/3/25	86.1	1.13%
2003/8/22	58.96	-1.07%	2004/6/4	71.6	-0.29%	2005/4/1	86.33	0.27%
2003/8/22	58.96	-1.07%	2004/6/11	71.35	-0.35%	2005/4/8	86.76	0.50%
2003/8/29	60.05	1.82%	2004/6/18	70.82	-0.75%	2005/4/15	85.25	-1.77%
2003/9/5	53.64	-11.95%	2004/6/25	71.67	1.19%	2005/4/22	82.12	-3.81%
2003/9/12	59.77	10.26%	2004/7/2	72.16	0.68%	2005/4/29	84.71	3.06%
2003/9/19	61.87	3.39%	2004/7/9	73.71	2.10%	2005/5/6	83.88	-0.99%
2003/9/26	61.58	-0.47%	2004/7/16	73.93	0.30%	2005/5/13	86.76	3.32%
2003/10/3	63.14	2.47%	2004/7/23	73.43	-0.68%	2005/5/20	86.4	-0.42%
2003/10/9	62.93	-0.33%	2004/7/30	74.1	0.90%	2005/5/27	84.11	-2.72%

日期	瓦斯類股		日期	瓦斯類股		日期	瓦斯類股	
	股價	報酬率		股價	報酬率		股價	報酬率
2005/6/3	84.8	0.81%	2006/4/14	97.51	7.51%	2007/3/3	113.17	1.44%
2005/6/10	84.99	0.22%	2006/4/21	94.92	-2.73%	2007/3/9	111.94	-1.10%
2005/6/17	85.34	0.41%	2006/4/28	97.12	2.27%	2007/3/16	112.03	0.08%
2005/6/24	87.56	2.54%	2006/5/5	96.03	-1.14%	2007/3/23	110.22	-1.64%
2005/7/1	89.7	2.39%	2006/5/12	101.21	5.12%	2007/3/30	109.6	-0.57%
2005/7/8	88.2	-1.70%	2006/5/19	95.77	-5.68%	2007/4/4	111.97	2.12%
2005/7/15	90.49	2.53%	2006/5/26	94.83	-0.99%	2007/4/14	114.7	2.38%
2005/7/22	91.3	0.89%	2006/6/2	96.72	1.95%	2007/4/20	115.93	1.06%
2005/7/29	90.2	-1.22%	2006/6/9	98.87	2.17%	2007/4/27	114.51	-1.24%
2005/8/4	91.67	1.60%	2006/6/16	100.88	1.99%	2007/5/4	115.24	0.63%
2005/8/12	90.44	-1.36%	2006/6/23	98.68	-2.23%	2007/5/11	115.65	0.35%
2005/8/19	88.75	-1.90%	2006/6/30	100.02	1.34%	2007/5/18	116.18	0.46%
2005/8/26	90.83	2.29%	2006/7/7	101.2	1.17%	2007/5/25	117.79	1.37%
2005/9/2	91.33	0.55%	2006/7/14	96.44	-4.94%	2007/6/1	118.43	0.54%
2005/9/9	90.49	-0.93%	2006/7/21	98.28	1.87%	2007/6/8	113.25	-4.57%
2005/9/16	88.43	-2.33%	2006/7/28	100.34	2.05%	2007/6/15	119.38	5.13%
2005/9/23	88.45	0.02%	2006/8/4	98.64	-1.72%	2007/6/23	122.67	2.68%
2005/9/30	86.79	-1.91%	2006/8/11	101.03	2.37%	2007/6/29	123.65	0.79%
2005/10/7	87.45	0.75%	2006/8/18	102.18	1.13%	2007/7/6	124.6	0.76%
2005/10/14	88.43	1.11%	2006/8/25	99.59	-2.60%	2007/7/13	127.38	2.18%
2005/10/21	92.04	3.92%	2006/9/1	100.8	1.20%	2007/7/20	129.51	1.64%
2005/10/28	95.13	3.25%	2006/9/8	101.37	0.56%	2007/7/27	129.91	0.31%
2005/11/4	96.32	1.24%	2006/9/15	101.08	-0.29%	2007/8/3	127.01	-2.28%
2005/11/11	97.12	0.82%	2006/9/22	102.33	1.22%	2007/8/10	125.7	-1.04%
2005/11/18	97	-0.12%	2006/9/29	102.56	0.22%	2007/8/17	117.35	-7.12%
2005/11/25	96.12	-0.92%	2006/10/5	102.36	-0.20%	2007/8/24	120.8	2.86%
2005/12/2	95.12	-1.05%	2006/10/14	104.85	2.37%	2007/8/31	122.15	1.11%
2005/12/9	95.06	-0.06%	2006/10/20	102.52	-2.27%	2007/9/7	123.19	0.84%
2005/12/16	94.76	-0.32%	2006/10/27	101.28	-1.22%	2007/9/14	124.43	1.00%
2005/12/23	93.94	-0.87%	2006/11/3	99.76	-1.52%	2007/9/21	128.85	3.43%
2005/12/30	95.58	1.72%	2006/11/10	102.28	2.46%	2007/9/29	133.15	3.23%
2006/1/6	95.57	-0.01%	2006/11/17	103.34	1.03%	2007/10/5	129.45	-2.86%
2006/1/13	92.5	-3.32%	2006/11/24	105.43	1.98%	2007/10/12	127.6	-1.45%
2006/1/20	95	2.63%	2006/12/1	105.89	0.43%	2007/10/19	129.05	1.12%
2006/1/25	95.28	0.29%	2006/12/8	106.98	1.02%	2007/10/26	127	-1.61%
2006/2/3	95.27	-0.01%	2006/12/15	106.74	-0.22%	2007/11/2	128.25	0.97%
2006/2/10	94.33	-1.00%	2006/12/22	106.4	-0.32%	2007/11/9	124.9	-2.68%
2006/2/17	90.57	-4.15%	2006/12/29	107.79	1.29%	2007/11/16	125.75	0.68%
2006/2/24	86.66	-4.51%	2007/1/5	105.57	-2.10%	2007/11/23	125.05	-0.56%
2006/3/3	89	2.63%	2007/1/12	105.27	-0.28%	2007/11/30	124.8	-0.20%
2006/3/10	88.71	-0.33%	2007/1/19	106.27	0.94%	2007/12/7	124.55	-0.20%
2006/3/17	89.96	1.39%	2007/1/26	105.33	-0.89%	2007/12/14	123.1	-1.18%
2006/3/24	89.74	-0.25%	2007/2/2	106.1	0.73%	2007/12/21	121.3	-1.48%
2006/3/31	88.62	-1.26%	2007/2/9	107.12	0.95%	2007/12/28	122.85	1.26%
2006/4/7	90.19	1.74%	2007/2/14	111.54	3.96%	2007/12/31	122.9	0.04%
報酬率標準差約為 0.02209288								

週報酬率的標準差 $\sigma = 0.02209288$ 。

「標準差(年)」為週標準差之值乘上 52 週。最終可得年標準差約為 0.16。

附件三 案例(一)總成本及收入折現計算

項目	年	第一期工程					第二期工程					108	109	110	111	112	113	114	115
		98	99	100	101	102	103	104	105	106	107								
年污水處理量(千噸)		-	-	325	974	1908	2805	3567	4485	5130	5532	6516	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300
第一期污水廠污水處理量		-	-	325	974	1908	2805	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567
第二期污水廠污水處理量		-	-	-	-	-	-	-	918	1563	1965	2949	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733
污水處理單價=\$34.92(元/噸)																			
收入	第一期	-	-	11349	34012.08	66627.36	97950.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6
	1,256,000																		
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	32056.56	54579.96	68617.8	102979.1	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4
	922,583																		
	TOTAL	-	-	11349	34012.08	66627.36	97950.6	124559.6	156616.2	179139.6	193177.4	227538.7	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916
	2,178,583																		
(K)成本=操作及維護費用(O&M)+折舊費用(DEPRECIATION)																			
成本	第一期	2500	2500	38677.79	47562.85	56287.96	62924.05	69820.42	66834.61	64273	63049.78	60215.18	58691.8	58659.06	58626.32	58594.07	58561.82	58529.08	45594.32
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	17985.84	28913.56	34940.32	41282.53	46785.19	46750.93	46716.67	46682.92	46649.17	46614.91	46710.53
	TOTAL	2500	2500	38677.79	47562.85	56287.96	62924.05	69820.42	84820.45	93186.56	97990.1	101497.7	105477	105410	105343	105277	105211	105144	92304.86
	1,017,856																		
項目	年	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
年污水處理量(千噸)		7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	7300	
第一期污水廠污水處理量		3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	3567	
第二期污水廠污水處理量		3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	3733	
污水處理單價=\$34.92(元/噸)																			
收入	第一期	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	124559.6	
	第二期	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	130356.4	
		254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	254916	
(K)成本=操作及維護費用(O&M)+折舊費用(DEPRECIATION)																			
成本	第一期	45677.88	53461.8	53430.04	53397.79	53429.06	53455.93	53424.17	53392.41	53360.65	53329.38	53297.62	53265.86	53234.1	53202.33	53171.06	53138.81	45291.37	
	第二期	46797.98	46764.74	46731.5	46697.75	46664.5	46631.25	46598.0	46564.75	46531.5	46498.25	46465.0	46431.75	46398.5	46365.25	46332.0	46298.75	46265.5	
	TOTAL	92475.86	100226.5	100161.5	100095.5	93527.74	93582.74	101333.4	101268.4	101203.4	101139.4	101074.4	101009.4	100944.4	100879.4	100815.4	100749.4	92868.74	

附件四 案例(二)總成本及收入折現計算

年度		第一期						第二期				第三期							
		98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
許可年限		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
水資源中心建設時程		29,000CMD						58,000CMD				87,000CMD							
預估污水處理量(噸)		-	-	-	2,605	5,195	8,494	9,666	10,542	13,877	18,331	19,550	21,126	23,727	26,352	28,916	30,676	31,125	31,616
污水處理量	第一期	-	-	-	2,605	5,195	8,494	9,666	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542
	第二期	-	-	-	-	-	-	-	-	3,335	7,788	9,008	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584
	第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,601	5,225	7,789	9,549	9,999	10,490
收入=污水處理量*總工程平均處理費率(\$34.44 元/噸)																			
收入		第一期	-	-	-	89,729	178,930	292,518	332,895	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077
		第二期	-	-	-	-	-	-	-	-	114,845	268,231	310,230	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510
		第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89,578	179,961	268,269	328,885	344,359
		總工程收入	-	-	-	89,729	178,930	292,518	332,895	363,077	477,922	631,308	673,306	727,586	817,164	907,547	995,856	1,056,471	1,071,945
\$ 28,215,830																			
成本	維護成本	第一期	6,575	6,575	6,575	35,259	55,037	66,712	71,028	75,642	70,955	64,180	64,012	61,557	60,475	59,656	57,709	56,562	56,687
		第二期	-	-	-	-	-	-	-	3,288	3,288	22,444	47,415	55,014	61,791	60,714	59,892	57,937	56,785
		第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,192	2,192	14,920	29,569	42,640	
	折舊成本	第一期	-	-	-	65,840	81,154	97,689	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092	114,092
		第二期	-	-	-	-	-	-	-	-	48,539	69,639	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151	92,151
		第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56,944	77,721	97,598	
	成本合計	第一期	6,575	6,575	6,575	103,099	138,191	166,401	187,120	191,734	185,047	178,272	178,104	175,649	174,568	173,748	171,802	170,654	170,779
		第二期	-	-	-	-	-	-	-	3,288	3,288	70,983	117,054	147,165	153,942	152,865	152,043	150,089	148,936
		第三期	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,192	2,192	71,865	107,290	140,238	
		總工程成本	6,575	6,575	6,575	103,099	138,191	166,401	190,407	195,021	256,030	295,326	327,460	331,782	399,298	433,081	462,128	486,622	
\$ 12,836,016																			
年度		116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	
許可年限		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
水資源中心建設時程																			
預估污水處理量(噸)		31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	31,616	
污水處理量	第一期	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	10,542	
	第二期	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	10,584	
	第三期	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	10,490	
收入=污水處理量*總工程平均處理費率(\$34.44 元/噸)																			
收入	34.44	第一期	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	363,077	
		第二期	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	364,510	
		第三期	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	361,279	
		總工程收入	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	1,088,865	
成本	維護成本	第一期	55,646	55,336	55,195	54,874	54,552	54,230	54,262	53,757	53,442	53,128	52,833	52,667	52,350	52,367	51,717	51,400	
		第二期	55,866	55,555	55,413	55,090	54,768	54,445	54,477	53,969	53,653	53,338	53,042	52,874	52,557	52,574	51,921	51,603	
		第三期	55,371	55,062	54,922	54,602	54,282	53,962	53,994	53,491	53,178	52,865	52,571	52,406	52,091	52,108	51,461	51,145	
	折舊成本	第一期	92,511	92,511	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460	105,460
		第二期	92,151	92,151	92,151	92,151	75,755	75,755	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170	89,170
		第三期	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	119,642	103,247	103,247	127,840	127,840	127,840	127,840	127,840	127,840
	成本合計	第一期	148,157	147,847	160,655	160,333	160,012	159,690	159,722	159,216	158,902	158,588	158,293	158,126	157,810	157,826	157,176	156,860	
		第二期	148,017	147,706	147,565	147,242	130,523	130,200	143,647	143,139	142,823	142,508	142,212	142,045	141,727	141,744	141,091	140,773	
		第三期	175,013	174,705	174,565	174,244	173,925	173,604	173,636	173,133	172,820	156,112	155,818	180,246	179,931	179,948	179,301	178,986	
		總工程成本	471,187	470,257	482,784	481,819	464,459	463,494	477,005	475,488	474,545	457,207	456,322	480,417	479,468	479,518	477,568	476,618	