

國立交通大學

電子物理學系

碩士論文

體積全像光柵作為光譜儀分光元件之研究

Volume Holographic Gratings Utilized in the Dispersive
Element of Spectrometers



研究生：粘容蓉

指導教授：林烜輝 老師

許根玉 老師

中華民國九十七年七月

體積全像光柵作為光譜儀分光元件之研究

學生：粘容蓉

指導教授：林烜輝 老師

國立交通大學 電子物理學系



本文闡述如何利用穿透式體積全像術的方式記錄於材料中，製作光柵光譜儀的繞射光柵元件，是一篇體積全像光學元件應用的描述。這種製作分光光柵元件的設計與方法，目的為改進傳統以薄光柵作為色散元件的解析度與頻譜響應。依據體積全像適用的《耦合波理論》並經計算而發現，體積全像容易記錄成擁有比一般薄光柵較好的解析度。而薄全像無法記錄成組合光柵，體積全像之繞射特性可以讓我們利用多工方式，在同一介質內將其記錄成組合光柵。一般用於光譜儀的分光薄光柵，設計成以馬達驅動而旋轉。（光柵所需轉動之角度是由單晶片擷取光電流訊號，將訊號轉為驅動馬達之電壓回傳而決定。）若以體積全像記錄組合光柵，則固定一入射角，便可為一定頻譜範圍內的多色光源作色散，讀取時無須轉動光柵。我們將設定如何製作此種分光光柵，包括記錄時所選取的入射角度，以及材料所能涵蓋到的波長。

Volume Holographic Gratings Utilized in the Dispersive Element of Spectrometers

Student: RongRong Nien

Advisor: Shiuan-Huei Lin

Institute of Electro-Physics, National Chiao-Tung University

Abstract

The thesis, about an application of the volume holographic optical elements (VHOE), describes how to apply the technique of the transmission volume hologram recording to fabricate the diffraction grating elements for a spectrometer. The purpose of the designment and the method to produce dispersive grating elements is in order to improve the resolution and the spectral response of the dispersive thin grating elements. According to “the coupled wave theory” suitable for volume holographic gratings and due to calculating, we find volume gratings easily possess higher resolution than ordinary thin gratings after recording. For the thin hologram, however, the multiple gratings can not to be recorded. Due to the diffraction features of the volume hologram, we can utilize the trick of multiplexing to record multiple gratings in a medium. Generally, the thin holographic grating used in the spectrometer was designed rotatably by the driving motor. If we record multiple gratings to the volume hologram, we can fix the incident angle to disperse any multicolor light source in some given spectral ranges without rotating the grating during reading out. We will set how to make this kind of gratings, including the angles of incidence we choose during recording, and what kinds of wavelength the medium can relate.

誌謝

感謝我的指導教授林烜輝老師、光電所教授許根玉老師，您們兩年來的諄諄教導，讓我的研究生涯順利告一段落，任何課業上、生活上給予的指導與鼓勵，都成為我的寶貴經驗。謝謝老師們。

謝謝實驗室朝夕相處的：男哥學長、俊華學長，您們平日為我好的關心與叨唸，對於很多人事道理的教導在日後都是受用無窮，感謝且謹記在心；謝謝柏霖學長，兩年來的師兄妹情，言說不盡，難忘的是在我口試前一天你的鼓勵，真的要謝謝一下；謝謝仁崇學長，學業上、生活上的指教與以身作則，曾經這些給我的幫助莫大；阿倫學弟，謝謝你我永遠記得請你幫忙時的義不容辭，無論是搬宿舍、準備口試，或者我們一起擔任助教時的互相 cover，你給予的情誼值得珍惜。謝謝工五館的義勝學長、以及今年碩一的啟新、翊安學弟，雖然我們認識不久，仍領受過你們幫助與建議，謝謝；更要謝謝我的同學晟齊，兩年來的幫忙與分擔銘謝在心。

此外，同棟樓但不同實驗室的：邵瑛、孟秋、逸君、老王…，新竹哪裡好吃、好玩因為認識你(妳)而經歷，不同實驗室卻時常在關鍵時刻相互鼓勵，點點滴滴都成了生活中小小不可或缺的感動；侯朝、阿吉、帥哥…曾經相助過、共勉過的好同學；還有我的大學學妹：皓皓、衣惟，打球時就會找到妳們！

由衷感謝兩年來不論生活上、經濟上、心理上，在我遇到困挫適時的各種支持，使我總算完成學業的全家人：爸爸、媽媽、弟弟，以及來參加我畢業典禮的阿姨、表妹…，一切因為有你們的鼓勵。我的高中好友、我的大學好友，無形或有形的支持與幫助，一路走來得到的愛與感動都是具體的。

”該感謝的人太多了，憶起國中課文，那就謝天吧！”謝謝交大土地公伯伯，有拜有保佑(台)……。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vi
第一章、序論	1
1.1 薄全像光柵之繞射特性	2
1.2 論文編寫順序	9
1.3 感光記錄材料與全像光學系統簡介	10
第二章、體積全像光柵繞射特性與分光原理	12
2.1 穿透式體積全像光柵	12
2.1.1 體積全像光柵之產生方法與光柵參數定義	12
2.1.2 耦合波理論	14
2.1.3 無吸收相位光柵	24
2.1.4 含吸收率之相位光柵	25
2.2 反射式體積全像光柵	28
2.2.1 體積全像光柵之記錄機制與耦合波分析	28
2.2.2 無吸收率變化之純相位光柵	28
2.2.3 反射式體積全像之色散關係	32
2.3 多工組合光柵簡介	34
2.4 體積光柵元件色散能力分析	37
第三章、體積全像光柵色散光學元件之設計	44
3.1 設計原理（一）	44
3.1.1 分光元件記錄方法	50
3.1.2 讀取波長色散情形模擬	51
3.1.3 系統元件優缺點的評估	54
3.2 設計原理（二）	55
3.2.1 元件設計與結果模擬	55

3.2.2 優缺點評估.....	59
3.3 設計原理(三).....	60
第四章、結論.....	62
參考文獻.....	63
附錄.....	65
一、設計方法(一)的體積光柵繞射角度及繞射效率參數模擬.....	65
二、設計方法(二)的體積光柵繞射角度及繞射效率參數模擬.....	74



表目錄

表 1.1	商用光譜儀規格比較表	8
表 3.1	參數模擬	51
表 3.2	系統參數	51
表 3.3	系統參數模擬	57
表 3.4	傾斜角參數	61

圖目錄

圖 1.1	光譜分析儀結構圖	1
圖 1.2	反射式 (Czerny-Turner) 光柵光譜儀	2
圖 1.3	Bessel 函數各階隨參數的變化	4
圖 1.4	薄光柵之各階繞射	4
圖 1.5	穿透式光柵光譜儀系統	5
圖 1.6	全像記錄系統裝置圖	11
圖 2.1	記錄光之角度與光柵週期性條紋的傾斜角	12
圖 2.3	單一張體積光柵之色散分光示意圖	20
圖 2.4	體積光柵的繞射能力與材料之物理性質及幾何形狀關係	21
圖 2.5	繞射光的相位失配與角度偏移關係	22
圖 2.6	繞射光的相位失配與波長偏移關係	23
圖 2.7	相位光柵的 DE 是波長選擇性的函數	25
圖 2.8	介質吸收率對「無吸收調變之純相位光柵」DE 的影響	27
圖 2.9	吸收性質對相位光柵最大繞射效率的影響	27
圖 2.10	反射式光柵的記錄	28
圖 2.11	反射式光柵的繞射效率	31
圖 2.12	反射式光柵的繞射能力與材料參數之關係	32
圖 2.13	反射式光柵記錄條件	32
圖 2.14	角度選擇性為多工記錄光柵的角度選擇依據	35
圖 2.15	繞射效率對讀取光波長作圖	35
圖 2.16	角度多工記錄、讀取向量圖	36
圖 2.17	全像光柵記錄系統、讀取系統	39
圖 2.18	厚度改變對光點大小的影響	42

圖 3.1	組合光柵的色散向量.....	45
圖 3.2	擬似彩色體積全像記錄波向量圖.....	45
圖 3.3	光柵向量與波向量幾何.....	47
圖 3.4	設計方法 (一) 繞射效率與頻寬.....	52
圖 3.5	不同波長在 CCD 平面上的繞射分布.....	53
圖 3.6	0.5um 波長對相鄰兩張光柵的繞射分布.....	54
圖 3.8	光柵向量圖.....	55
圖 3.9	設計方法 (二) 的繞射效率與頻寬.....	58
圖 3.10	波長 0.526um 與 0.538um 的繞射.....	59
圖 3.11	0.45um、0.532um、0.614um 波長繞射在 CCD 上不同列.....	61



一、序論

光譜學是研究物質本身所發出的電磁波輻射或物質與電磁波間交互作用的科學，由於不同物質含有不同元素或化合物，因此任何物質之光譜皆具專一性：來自特定物質的光譜，好比人類的指紋一樣，對個體而言都是獨一無二的，讓光譜分析特別適合用以研究原子、分子、晶體、有機物質等的組成及結構，另外，由於光譜分析的方法具有非入侵性、非破壞性、快速數據分析、高鑑別率以及高靈敏度等好處，讓光譜分析物質組成的應用蓬勃發展推展到不同的領域中，如：材料分析、物質檢定、行星探測、生醫檢測等等科技領域。然而，要分析光譜特性都必須要使用光譜儀來將待測之電磁波分光量測不同波長的相對強度關係。

一般光譜儀結構分為五部分的基本組成，各為：光源、準直元件、分光元件（單色器）、聚焦元件(或偵測器)及放大器(圖 1.1)。其光源依應用的不同通常分成兩種，一種是激發被測物質的發射光譜，另一是於研究物質的吸收、拉曼、或螢光光譜，作用為照射被測物，多以鎢絲燈或鹵素燈為光源。準直元件的作用為將一般點光源校正成平行光束始投射至分光元件，一般可為透鏡、瞄準器(collimator)、或凹面鏡。分光器為可進行色散之光學元件，可為三稜鏡或光柵。而色散後，為提高光譜儀量測的精確度、靈敏度及速率，絕大多數的儀器多使用光電、電熱元件、或氣體接收器作為偵測、接收元件。而分光後的單色光束能量傳遞至光電轉換元件，即可經由電訊號放大作量測與讀出。如圖 1.2 為 Czerny-Turner 型式的光譜儀示意圖。

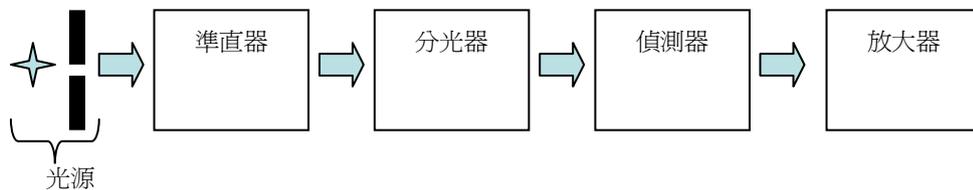


圖 1.1 光譜分析儀結構圖

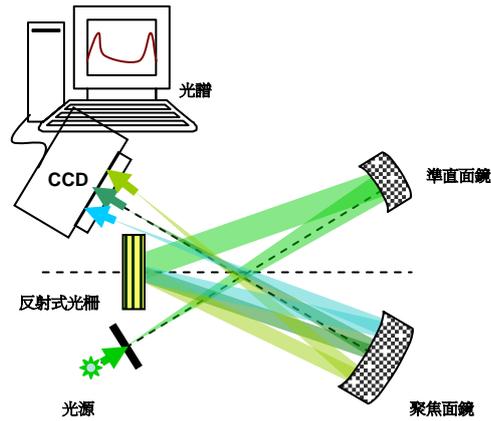


圖 1.2 反射式 (Czerny-Turner) 光柵光譜儀

要得到較佳的分光效果，系統結構中的分光器必須要有高的色散能力，一般以具有高密度的週期性繞射元件來達成所需，稱之為繞射光柵元件。繞射光柵的種類繁多，可依其不同的型式、用處、甚至製作方式分門別類。像是因材料介面對光徑作用之方向不同，分為穿透式光柵、反射式光柵；因調制材料的吸收率或折射率等不同的物理量，分為振幅光柵、相位光柵；甚至因製作方法不同，分為蝕刻光柵、複製光柵、全像光柵等。然而，由光柵繞射理論可知，光柵的週期愈密，分光效果愈好，以蝕刻或鑽石刀刻劃的製程方法由於技術的限制均無法製作很高密度的光柵($<1\mu\text{m}$)，全像干涉的方法是另一種選擇，其利用全像記錄方式讓兩道光波於材料干涉曝光改變介質的介電常數(亦即折射率)或吸收率，使其在材料產生與干涉條紋相對應的週期性分佈，得以改變入射讀取光束的相位或振幅，亦使入射光繞射分光。

當兩道光夾角夠大時，干涉條紋的間距可輕易小於 $1\mu\text{m}$ 以下，達到記錄光波波長量級，產生極佳的分光效果。因此，本論文將採用此優點，探討以穿透式體積全像光柵來作為光譜儀分光元件之研究。

穿透式全像光柵依其記錄底片之厚度不同可分成薄光柵與體積光柵，在此我們先以薄全像光柵說明光柵之繞射分光特性，以作為接下來研究基礎。

1.1 薄全像光柵之繞射特性

薄光柵和體積光柵的繞射機制大不相同，薄光柵遵守 Raman-Nath 繞射，體積光柵遵守 Bragg 繞射。一個薄光柵因折射率的影響，其入射光與透射光可記為：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_0 e^{-i\varphi + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\end{aligned}\quad (1.1)$$

其中， E_0 為光波振幅， ω 為光波角頻率， \vec{k} 為入射光波向量， φ 為光束通過光柵後的相位變化量，我們可以用沿光前進方向對光柵介質內折射率與路徑乘積積分求得，假設對一個純相位光柵折射率的調變量可寫成 $\Delta n = n_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r})$ ，可得

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^{d \sec \theta_i} \frac{\omega}{c} \Delta n ds \\ &= \frac{\omega}{c} d \sec \theta_i \Delta n \\ &= \frac{\omega}{c} \frac{d}{\cos \theta_i} n_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \\ &= \delta \cos(\vec{K} \cdot \vec{r})\end{aligned}\quad (1.2)$$

其中， θ_i 為入射角， d 為光柵厚度， Δn 為調制折射率， n_1 為調制的振幅， $\vec{K} = \frac{2\pi}{\Lambda} \hat{z}$ 為光柵波向量， Λ 為光柵週期，且 $\delta \equiv \frac{\omega}{c} \frac{d}{\cos \theta_i} n_1$ ，故穿透光可以化簡如下：

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \vec{E}_0 e^{-i\varphi + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ &= \vec{E}_0 e^{-i\delta \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) + i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\end{aligned}\quad (1.3)$$

上式可由下式 Bessel 函數展開式化簡之，

$$e^{-i\delta \cos x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(\delta) e^{-imx}\quad (1.4)$$

其中， m 可為整數，可得到穿透光光場為

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(\delta) e^{-im\vec{K} \cdot \vec{r}} \\ &= \vec{E}_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(\delta) e^{i[\omega t - (\vec{k} + m\vec{K}) \cdot \vec{r}]} \\ &= \dots + iJ_{-1}(\delta) \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (\vec{k} - \vec{K}) \cdot \vec{r}]} + J_0(\delta) \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - iJ_1(\delta) \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (\vec{k} + \vec{K}) \cdot \vec{r}]} + \dots\end{aligned}\quad (1.5)$$

我們可以看到上式中對不同的 m 值，會產生不同方向傳播之平面光波，相當於將入射平面光波繞射到不同方向，我們可以定義不同的 m 值，為 m 階繞射光，故各繞射階的波向量 $\vec{k} + m\vec{K}$ ，恰對應到 Bessel 函數的階數，得到各階之繞射效率為 $\eta_m = J_m(\delta)$ ，可以求出各階的繞射效率如下圖所示。

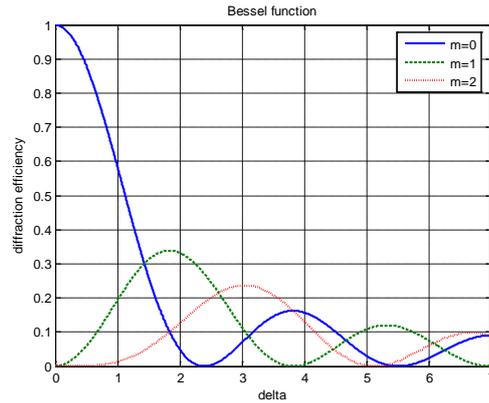


圖 1.3 Bessel 函數各階隨參數的變化

從圖中我們可以看到不論 δ 值如何變化，光柵最大繞射效率為第 1 階的 30% 左右，無法將入射光有效的分光解析，在光譜儀應用時，需要較靈敏的偵測器來偵測，是一個不利的因素，要克服此問題我們可以用體積光柵增加厚度來增加繞射效率，留待下一章說明。其次，說明薄光柵的色散特性：

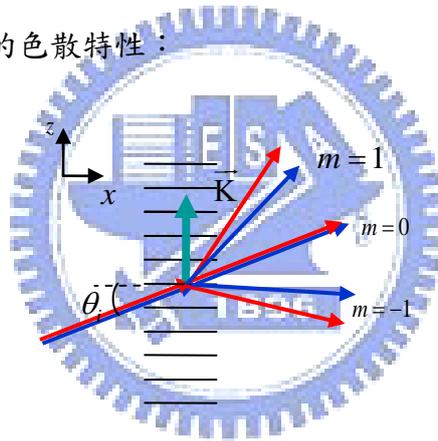


圖 1.4 薄光柵之各階繞射

上圖為薄光柵色散分光的示意圖，若有波長為 λ 光波入射至該光柵，從上小節之分析我們可以得到第 m 階繞射光之波向量 \vec{k}_d 將滿足 $\vec{k}_d = \vec{k} + m\vec{K}$ 的關係，因此若光柵波向量 \vec{K} 沿 z 軸方向不傾斜，則入射光與 x 軸方向夾角 θ_i 與第 m 階繞射光與 x 軸方向夾角 θ_m 將滿足薄光柵繞射方程式：

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} (\sin[\theta_m(\lambda)] + \sin\theta_i) &= m \frac{2\pi}{\Lambda} \\ \Rightarrow \theta_m(\lambda) &= \sin^{-1} \left(\frac{m\lambda}{\Lambda} - \sin\theta_i \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中，下標 m 代表一整數，表示「第 m 階」繞射。因此，由此公式知在某一階下，不同波長的入射光波的繞射角度不同，波長愈大繞射角度也愈大，故可將不同波長的光波分散到不同的角度。這為薄光柵的分光原理，也就是各式光柵用於光譜儀應用之基礎原理。

利用式(1.7)的光柵分光原理，配合圖 1.1 及 1.2 的光譜儀架構，我們可以將基礎的光譜儀分光示意圖等效成下圖的型式，以作為本論文設計分光光柵元件之光學分析系統。S 為狹縫，L1 為瞄準透鏡，G 為穿透式光柵，L2 為聚焦透鏡。其波長將成像於 CCD 平面上的不同點。

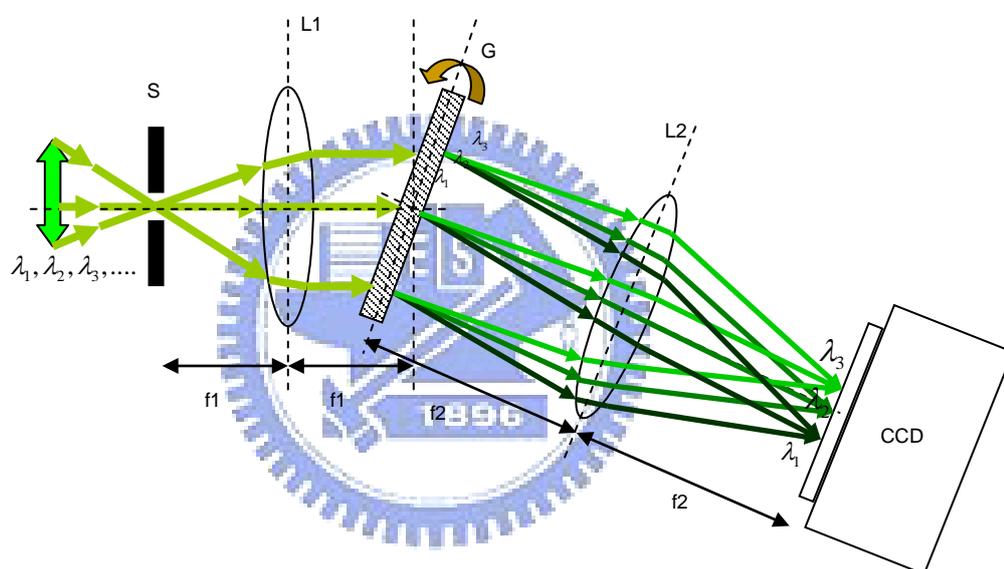


圖 1.5 穿透式光柵光譜儀系統

CCD 全名為「感光耦合元件」(Charge-coupled Device)，一種可記錄光線變化的半導體，通常以「百萬像素」為單位。CCD 的解析度，指的是其上有幾百萬個像素，即多少感光元件。此系統的工作概念說明如下：系統中以狹縫 S 限制入射光成點光源做為整個光譜儀成像分光系統的目標物，此標的物發出的線光源經由準直透鏡 L1 形成一平行的準直光束，此光束經過繞射光柵 G 後色散分光，再經由聚焦透鏡 L2 將不同波長之色光聚焦在 CCD 不同位置上，換言之，我們只要看到 CCD 上光點出現位置，即可判定其波長。因此，光譜儀系統的各種特性將由狹縫 S 寬度、成像系統的總像差、繞射光柵之週期密度 Λ 、及 CCD 大小及像素解析度來決定，說明如下：

1. 頻譜響應範圍

指的是光譜儀可量測的光波波長範圍。取決於光柵 G 的繞射能力、聚焦透鏡 L2 的大小焦距以及 CCD 之大小，假設 CCD 之橫向大小為 D，聚焦透鏡為理想之無窮大透鏡，則可量測之波長範圍 $\Delta\lambda$ 為 $\Delta\lambda < \frac{\Lambda}{m} \sin\left(\frac{D}{2f}\right)$ ，換言之，光柵密度愈高，分光所用之繞射階數愈大，範圍愈小。

2. 角色散率

角色散率的定義為 $D_\theta \equiv \frac{d\theta_d}{d\lambda}$ ，表示從色散系統中繞射出不同的兩波長，在空間上彼此分開的程度。角色散率的單位為 rad/nm，其數值愈大，代表光柵的色散能力愈大，光譜儀分光之解析度愈大。對上述系統而言，分光的角色散率與階數 m 有關，為：

$$D_\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{\Lambda \cos \theta_m} \quad (1.7)$$

換言之，要增加光柵的解析能力，需要更高密度之光柵。

3. 線色散率

線色散率指的是在測量系統的 CCD 平面上，不同波長之光波分開的程度。因此，若為某波長光波繞射角，則在 CCD 平面上將會距參考點 $l = f_2 \theta_m$ 之距離，故線色散率之定義與角色散率稍異，為

$$D_l \equiv \frac{dl}{d\lambda} = f D_\theta \quad (1.8)$$

f 為聚焦透鏡的等效焦距，故光柵的線色散率可寫為：

$$D_l \equiv \frac{dl}{d\lambda} = \frac{mf}{\Lambda \cos \theta_m} \quad (1.9)$$

換言之，繞射光柵的密度愈大(即週期愈小)，則線色散率愈高。實際的應用上，光譜儀的色散能力通常以線色散率之倒數(單位：nm/mm)判斷，數值愈小代表分光能力愈好。

4. 解析度

解析度又稱辨色率，表示系統可解析兩波長很接近的譜線的能力。定義為

$$R \equiv \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} \quad (1.10)$$

其中， $(\Delta\lambda)_{\min}$ 意義為可解析的兩譜線的最小波長差，有兩個限制的因素，其一為 CCD 的

畫素大小限制，因為系統中我們利用 CCD 上亮點之位置來判定波長，所以系統不可能分辨出小於一個畫素的資訊，若 CCD 的畫素大小為 Δ ，則 $(\Delta\lambda)_{\min}$ 推導可得為：

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\Delta}{f_2 D_\theta} = \frac{\Delta \Lambda \cos \theta_m}{f_2 m} \quad (1.11)$$

第二個限制為光柵繞射光波在 CCD 上波形分布之限制，因為光柵有一定的大小，故經過 L2 透鏡聚焦後，繞射光波之分布為一個 sinc 函數，可以寫成 $E_d(z) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{N\Lambda}{\lambda f_2} z\right)$ ，其

中 $N\Lambda$ 為光柵橫向大小。這樣之分佈與光學繞射極限類似，因此可以 Rayleigh criterion 作為判斷法則，亦即在 CCD 上相鄰可分辨波長所造成的 sinc 函數分布最小可重疊之距離

為 $\Delta z = \frac{\lambda f_2}{N\Lambda}$ ，故此光學極限限制之 $(\Delta\lambda)_{\min}$ 可以寫成：

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\Delta z}{D_l} = \left(\frac{\lambda f_2}{N\Lambda}\right) \left/ \left(\frac{mf_2}{\Lambda \cos \theta_m}\right) \right. = \frac{\lambda \cos \theta_m}{mN} \quad (1.12)$$

所以，系統分光解析度為上述兩個因素中，取較大 $(\Delta\lambda)_{\min}$ 代入(1.12)式中，可得

$$R \equiv \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = \begin{cases} \frac{mf_2 \lambda}{\Delta \Lambda \cos \theta_m} \\ \frac{mN}{\cos \theta_m} \end{cases} \quad (1.13)$$

兩者中較小者。

從上面的分析來看，影響光譜儀分光特性除了系統元件幾何限制外，最主要的因素為光柵的週期 Λ 及繞射階數 m 。而對於薄光柵繞射而言，因厚度限制較小，會產生多階繞射，一般常用高階繞射 m 來增進其特性，但同時這會引起倍頻信號混合，造成波長誤判。

舉例來說，我們分析第一階和第二階的繞射光，若兩個不同波長 λ 及 λ' 同時入射至系統中，則由薄光柵色散方程式，此 λ 波長之光波在第一階繞射角度 $\theta_1(\lambda)$ 及 λ' 波長之光波在第二階繞射角度 $\theta_2(\lambda')$ 分別滿足下式關係：

$$\begin{aligned} \Lambda(\sin[\theta_1(\lambda)] + \sin \theta_i) &= \lambda \\ \Lambda(\sin[\theta_2(\lambda')] + \sin \theta_i) &= 2\lambda' \end{aligned} \quad (1.14)$$

因此若 $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$ ，則 $\theta_1(\lambda) = \theta_2(\lambda')$ ，表示 λ' 第二階繞射光與 λ 第一階繞射光有同樣大小的發散角， λ' 會繞射到 λ 第一階繞射光的位置，兩波長信號會混合在一起無法判斷。

綜合來說，本小節所建立之光柵繞射分光基本特性應都適用於厚記錄介質的體積光柵，因為它們均是利用繞射分光為基礎，所不同的是體積光柵因厚度的限制，定性來說會產生所謂的布拉格繞射條件，只能產生 $m=1$ 階之繞射，也因此會改變其繞射分光細部特性，這可能是一種優點，或者是缺點。

同時，在本小節中，我們亦指出以薄光柵來進行色散分光會產生繞射效率不佳及倍頻信號干擾等問題，這些在現今的商用光譜可以用改善其他元件或是加入濾波器的方法來改進，會增加系統設計之複雜度。

因此，本論文即著眼於此，研究是否能以體積全像光柵來取代薄全像光柵，進行色散分光，來改進光譜儀分光特性。下表我們整理出三種商用光譜儀中，分光光柵之特性。

表 1.1 商用光譜儀規格比較表(來源資料)

公司	Newport	Andor	Shimadzu
型號	LineSpec TM	Shamrock 303	UV-2450
光譜儀種類	Czerny-Turner	Czerny-Turner	Czerny-Turner
光柵類型	Ruled	holographic	blazed holographic
溝槽密度	600g/mm	1800g/mm	900g/mm
頻譜範圍	450-2000nm	350-900nm	190-1100nm
最大繞射效率	>20%	62%	55%
金屬鍍膜	Aluminum	(不詳)	Aluminum
Spectral Resolution	0.43nm	0.1nm	0.1nm

來源資料

<http://gratings.newport.com/products/table1.asp>

<http://www.shimadzu.com/products/opt/dif/oh80jt0000001nm8.html>

由此表可以看到：對於較高密度之分光光柵元件是用全像技術來製作的薄光柵。因

此，在論文中，我們將以 Andor 公司的 Shamrock_303 在光譜儀作為目標，設計並分析我們的體積全像光柵分光器。分析的準則即採用本小節上述的 4 個標準特性：頻譜響應範圍、角色散率、線色散率、以及光柵分光解析度。

1.2 論文編寫順序

在上述的目標下，吾人將論文章節順序安排如下：第一章為序論，除了前述這些基礎描述外，1.3 節將說明論文研究中我們用來記錄體積全像的材料及記錄光學系統。

第二章為體積全像光柵之繞射特性分析，我們將採用 2 種不同的方法，耦合波理論及純量繞射之波恩近似法則來分析體積全像光柵之繞射特性，作為設計我們的色散分光元件之基礎。

第三章為體積全像色散分光元件之設計，說明我們如何以第二章之基礎來設計與 Andor 公司之光譜儀規格相仿所需的分光元件。我們將提出三種設計方法，說明其製作記錄方法並分析模擬分光情形，同時比較其優缺點。

第四章為結論。



1.3 感光記錄材料與全像光學系統簡介

在體積全像儲存的應用方面，所用之材料的選擇有諸多要求，其參數包括：光敏感度(sensitivity)、照光後的收縮率(shrinkage)、動態範圍(dynamic range，記為 M/#)，光柵強度(strength)、穩定度(stability)等。近年來，因感光高分子材料發展出具有高繞射效率與低雜訊的良好光學性質，在光學元件製作上及資訊儲存、處理、顯示上，感光高分子是常選用的材料媒體。如今全像記錄物質的選擇，感光高分子也成為最普遍利用的介質材料。

感光高分子(photopolymer)物質是單體(monomer)、聚合體(polymer)、光啟始劑(photoinitiator)，與其餘不活潑的化學成分(binder)等的組成。在曝光程序裡，光啟始劑接收光子產生自由基，促使單體開始聚合，稱作「光聚合」(photopolymerization)。全像干涉條紋的記錄為不均勻曝光，愈高聚合體濃度之生成，是經由曝照較強的曝光能量而來。因而介質內聚合體的濃度不均勻，在空間分布上形成濃度梯度，導致未反應的單體在介質內發生擴散，往聚合體濃度較高的區域移動。聚合體濃度高的部分為亮區(bright regions)，即全像干涉圖樣亮紋的位置。藉由聚合體分布不均勻的濃度梯度，使介質內直接關係到整體折射率的其他成份也開始擴散至暗區(dark regions)，調控了介質折射率在空間上的分布，而得到相位光柵。

單體移動至亮區的過程，止於反應完畢或定影(fixing)發生。定影可經由記錄後，將全像片均勻曝光的程序而完成。這步驟是為消耗照光後介質內未反應的殘餘單體，使其完全聚合。感光高分子因聚合物的濃度不均勻，使材料的其他化學組成在介質內擴散，形成介質折射率的不均勻分布。在全像記錄過程中，因為介質分子的移動及聚合，提升了介質材料原始的折射率，即先前稱之的平均折射率。故記錄後除了調制折射率生成外，平均折射率的量值也增加了，但增加微量，且能經由全像塊材因照光產生收縮之兩效應相互抵制，故在理論計算上不考慮這個量。

本論文希望採用的感光高分子為DuPont公司開發的HRF-150x001 藥膜，是一種適於用來記錄穿透式體積全像純相位光柵的材料。該材料遵從上述殘餘單體會往亮區擴散的

反應機制。在文獻上過去的光學實驗中，通常以 488nm 波長的雷射光波為記錄光源，但是其對 532nm 也感光，所以本論文將以此波長作為記錄光源來設計，另外，已知此材料的厚度 38 μm 、可產生的折射率調制量 n_1 約為 10^{-3} ，本論文也將以此材料參數作為設計參數來模擬我們所設計的體積全像光柵分光器之特性。

以此記錄材料，我們設計如下圖為體積全像光柵的記錄系統，將 HRF(全像記錄膜) 用透明膠帶固定於載玻片玻璃上，置放兩光交會點之處，記錄下平面波干涉條紋，藉由改變不同的夾角 θ ，我們可產生不同的體積全像光柵。

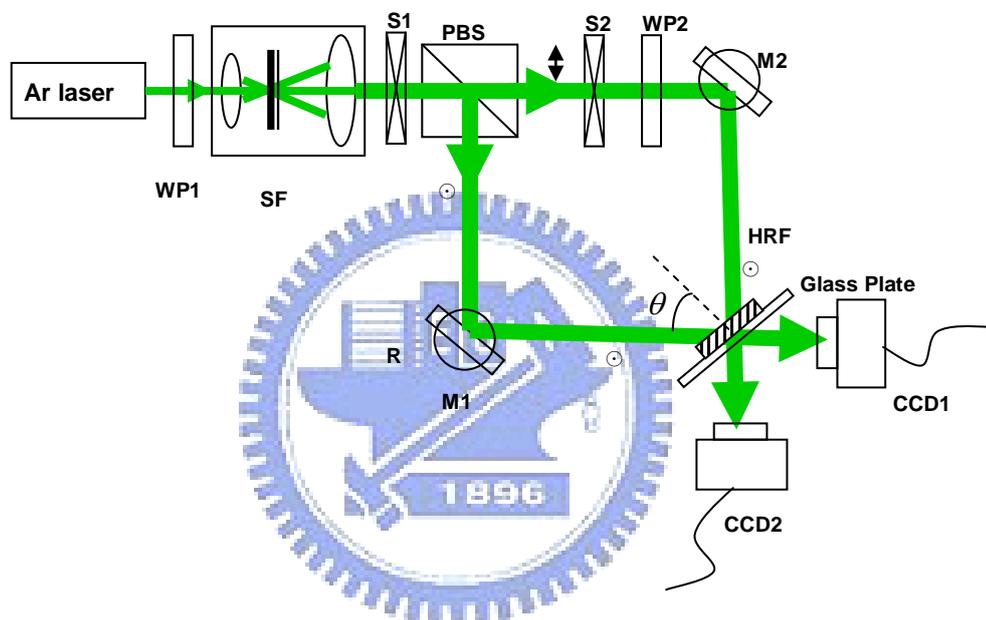


圖 1.6 全像記錄系統裝置圖

二、體積全像光柵繞射特性與分光原理

2.1 穿透式體積全像光柵

如前所述，本論文之目標是希望以體積全像光柵來取代傳統光譜儀之薄光柵分光器，來增進光譜儀之特性，因此本章中我們將採用兩種方法：耦合波理論及波恩近似法則來說明穿透式體積全像光柵之繞射特性，作為我們設計色散分光元件之基礎。首先，說明我們的體積光柵。

2.1.1 體積全像光柵之產生方法與光柵參數定義

假設我們的感光材料在 x 方向上的厚度為 d ，於 y 、 z 方向分布無限大，以兩道空氣中波長皆為 λ_0 的同調光記錄全像光柵，入射角各為 θ_{i1} 、 θ_{i2} ，於 x - z 平面為記錄平面，如圖 2.1 所示。

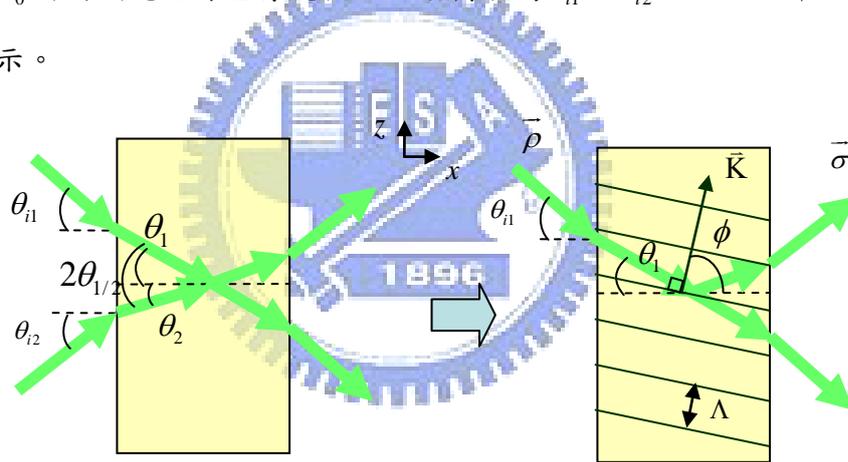


圖 2.1 記錄光之角度(左)與光柵週期性條紋的傾斜角(右)

通常為了討論上的方便，我們會假設介質外的折射率與介質材料內部的平均折射率相同，光通過介面時，因而沒有角度偏折的問題。但為了更整體的情況，且所用的材料之平均折射率與空氣之折射率亦有差異，可用 Snell 定律來換算。因此，介質內部實際上的角度為 θ_1 、 θ_2 ，與入射時的角度具下列之關係：

$$\begin{aligned} n_{0(\text{air})} \sin \theta_{i1} &= n_0 \sin \theta_1 \\ n_{0(\text{air})} \sin \theta_{i2} &= n_0 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

因材料非為磁性物質， $\mu_r \cong 1$ ，所以 $n_0 = \sqrt{\epsilon_{r0}}$ 為材料未經調制時的折射率，即平均折射率。

令 β 為記錄光的波數 ($\beta = \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}$)，則穿透介質的兩道平面波，電場可以寫為

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \bar{E}_{01} e^{-j\beta(x\cos\theta_1 - z\sin\theta_1)} \\ \bar{E}_2 &= \bar{E}_{02} e^{-j\beta(x\cos\theta_2 + z\sin\theta_2)}\end{aligned}\quad (2.2)$$

又介電常數的週期性調制與其光場強度變化成正比，可寫為

$$\Delta\epsilon_r \propto |\bar{E}|^2 \quad (2.3)$$

因此

$$|\bar{E}|^2 = |\bar{E}_1 + \bar{E}_2|^2 = |\bar{E}_1|^2 + |\bar{E}_2|^2 + 2E_{01}E_{02} \cos[x\beta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) - z\beta(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)] \quad (2.4)$$

上式 $|\bar{E}_1|^2 + |\bar{E}_2|^2$ 為背景光， $2E_{01}E_{02} \cos[x\beta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) - z\beta(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)]$ 為干涉條紋的強度變化，我們可以定義一參數

$$\begin{aligned}\bar{K} &= -\hat{x}\beta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \hat{z}\beta(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \\ &= 2\beta \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \hat{x} + 2\beta \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \hat{z} \\ &= 2\beta \sin\theta_{1/2} (\hat{x} \cos\phi + \hat{z} \sin\phi)\end{aligned}\quad (2.5)$$

\bar{K} 為光柵向量 (grating vector)，表示一垂直於「介質內之介電常數值相等處所形成之各平行的平面」的向量。可發現 $\frac{2\pi}{\Lambda} = 2\beta \sin\theta_{1/2}$ 及 $\phi = 90^\circ - \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$ ，其中 Λ 為於入射平面上觀看的條紋間距， ϕ 為條紋之傾斜角， $\theta_{1/2}$ 為記錄參考光與物體光兩光所夾角度之半 ($\theta_{1/2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$)。

由這個算法歸納出，當記錄光的入射條件給定時，可算得所記錄下之光柵的兩項參數資訊：

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{\pi}{\beta |\sin\theta_{1/2}|} = \frac{\lambda_0}{2n_0 \left| \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right|} \\ \phi = 90^\circ - \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

其中的 θ_1 、 θ_2 為記錄光打在介質內部的角度，此角度是將外部的入射角經由 Snell 定律換算一次。

感光後，若為像位光柵記錄材料，則介質中介電常數 ε_r 為具空間週期性分布：

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} + \varepsilon_{r1} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \quad (2.7)$$

其中 \vec{r} 為空間座標 (\hat{x}, \hat{z}) ， ε_{r0} 為介質之平均介電常數， ε_{r1} 為介電常數的調制振幅，且 $\varepsilon_{r1} \ll \varepsilon_{r0}$ ，則記錄物質材料之折射率變化，如下：

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\varepsilon_{r0} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right)} \\ &= \sqrt{\varepsilon_{r0}} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r0}} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \sqrt{\varepsilon_{r0}} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1}}{2\varepsilon_{r0}} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right) \\ &= \sqrt{\varepsilon_{r0}} + \frac{\varepsilon_{r1}}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \\ &= n_0 + n_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中， $n_0 = \sqrt{\varepsilon_{r0}}$ 為材料內部之平均折射率， $n_1 = \frac{\varepsilon_{r1}}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}}$ 為介質折射率之調制振幅。於是可推知此光柵之折射率 n ，亦有空間週期調制的情形。

同理，介質之吸收係數 α 亦可以具空間週期性。將介質材料之吸收係數 α 以電導率之週期調制 $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r})$ 展開：

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{\mu_0 c \sigma}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}} \\ &= \frac{\mu_0 c}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}} \left[\sigma_0 + \sigma_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right] \\ &= \frac{\mu_0 c \sigma_0}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}} + \frac{\mu_0 c \sigma_1}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 $\alpha_0 = \frac{\mu_0 c \sigma_0}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}}$ 、 $\alpha_1 = \frac{\mu_0 c \sigma_1}{2\sqrt{\varepsilon_{r0}}}$ ，各為材料吸收係數的平均及調制值。

2.1.2 耦合波理論

耦合波理論分析描述的是，既定入射條件的參考光電磁波入射至體積全像光柵，其

布拉格繞射之特性，以及布拉格角度與波長的選擇性(Bragg selectivity)。

由 Maxwell 方程式導出，介質(非導電體)內的波動方程式為

$$(\nabla^2 + k^2)E = 0 \quad (2.10)$$

E 為電場函數，也就是此波動方程式的解。將 Kogelnik 的耦合常數(coupling coefficient/ coupling constant)可以寫成：

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi\epsilon_{r1}}{\lambda_0\sqrt{\epsilon_{r0}}} - j \frac{\mu_0 c \sigma_1}{\sqrt{\epsilon_{r0}}} \right) \\ &= \frac{\pi}{\lambda_0} \left(\frac{\epsilon_{r1}}{2\sqrt{\epsilon_{r0}}} \right) - \frac{j}{2} \left(\frac{\mu_0 c \sigma_1}{2\sqrt{\epsilon_{r0}}} \right) \\ &= \frac{\pi n_1}{\lambda_0} - j \frac{\alpha_1}{2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

利用(2.7)、(2.9)、及上式，並由電磁學理論推導，得(2.10)式中

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - j\omega\mu_0\sigma \\ &= k_0^2 \left[\epsilon_{r0} + \epsilon_{r1} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right] - jk_0 c \mu_0 \left[\sigma_0 + \sigma_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right] \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_{r0} + \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_{r1} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) - j \frac{2\pi}{\lambda_0} c \mu_0 \sigma_0 - j \frac{2\pi}{\lambda_0} c \mu_0 \sigma_1 \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \\ &= \beta^2 - j2 \left(\frac{2\pi\sqrt{\epsilon_{r0}}}{\lambda_0} \right) \left(\frac{c\mu_0\sigma_0}{2\sqrt{\epsilon_{r0}}} \right) + \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_{r0}}}{\lambda_0} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon_{r1}}{\sqrt{\epsilon_{r0}}} - j \frac{c\mu_0\sigma_1}{\sqrt{\epsilon_{r0}}} \right) \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \\ &= \beta^2 - j2\beta\alpha_0 + 2\kappa\beta \left(e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

即得到其波數為包含耦合常數的波動方程式，光波於不同位置而有不同相位。

設介質中的波動方程，其解為參考光與訊號光兩波的疊加，令為

$$E = R(x)e^{-j\vec{\rho} \cdot \vec{r}} + S(x)e^{-j\vec{\sigma} \cdot \vec{r}} \quad (2.13)$$

其中 $\vec{\rho}$ 為讀取參考光波向量， $\vec{\sigma}$ 為訊號光波向量，具相同大小 $\left(\rho \equiv \frac{2n_0\pi}{\lambda} = \sigma \right)$ 。且 R(x)、S(x)各自為參考光及訊號光之電場振幅，僅因 x 方向上的位置不同而變化。因所用之座標是令介質的厚度平行 x 軸，而將介質的長寬視為一個無限大平面，如此一來振幅的衰減或變化，只歸因於 x 軸向上能量的吸收或交換之影響，將電場振幅為 y、z 之函數的

可能去除了。

欲從電磁波動方程式得我們耦合波方程，首先將(2.12)、(2.13)代回(2.10)，則可將波動方程式化簡得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2 R}{dx^2} - 2j\rho_x \frac{dR}{dx} + (\beta^2 - \rho^2 - 2j\alpha_0\beta)R \right] e^{-j\bar{\rho}r} \\ & + \left[\frac{d^2 S}{dx^2} - 2j\sigma_x \frac{dS}{dx} + (\beta^2 - \sigma^2 - 2j\alpha_0\beta)S \right] e^{-j\bar{\sigma}r} \\ & + 2\kappa\beta R \left(e^{-j(\bar{\rho}-\bar{K})r} + e^{-j(\bar{\rho}+\bar{K})r} \right) + 2\kappa\beta S \left(e^{-j(\bar{\sigma}-\bar{K})r} + e^{-j(\bar{\sigma}+\bar{K})r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 ρ_x 、 σ_x 為 $\bar{\rho}$ 與 $\bar{\sigma}$ 在 x 方向之分量。令 $\rho = \sigma = \beta$ ，又與光波振動 ρ_x 、 σ_x 比起來，參考光、訊號光兩波之間的振幅隨位置變化非常緩慢，因而式中的二階微分項可忽略不計：

$$\begin{aligned} & \left[-2j\rho_x \frac{dR(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta R(x) \right] e^{-j\bar{\rho}r} + \left[-2j\sigma_x \frac{dS(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta S(x) \right] e^{-j\bar{\sigma}r} \\ & + 2\kappa\beta R(x) e^{-j(\bar{\rho}-\bar{K})r} + 2\kappa\beta R(x) e^{-j(\bar{\rho}+\bar{K})r} + 2\kappa\beta S(x) e^{-j(\bar{\sigma}-\bar{K})r} + 2\kappa\beta S(x) e^{-j(\bar{\sigma}+\bar{K})r} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

將上式依次同乘以 $e^{j\bar{\rho}r}$ 、 $e^{j\bar{\sigma}r}$ 後對 z 積分，得到：

$$\begin{aligned} & \int \left[-2j\rho_x \frac{dR(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta R(x) \right] dz \\ & + \int \left[-2j\sigma_x \frac{dS(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta S(x) \right] e^{j[(\rho_x - \sigma_x)x + (\rho_z - \sigma_z)z]} dz \\ & + \int \left[2\kappa\beta R(x) e^{j(K_x x + K_z z)} + 2\kappa\beta R(x) e^{-j(K_x x + K_z z)} \right. \\ & \left. + 2\kappa\beta S(x) e^{j[(\rho_x - \sigma_x - K_x)x + (\rho_z - \sigma_z - K_z)z]} + 2\kappa\beta S(x) e^{j[(\rho_x - \sigma_x + K_x)x + (\rho_z - \sigma_z + K_z)z]} \right] dz \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.16.1)$$

與

$$\begin{aligned} & \int \left[-2j\rho_x \frac{dR(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta R(x) \right] e^{-j[(\rho_x - \sigma_x)x + (\rho_z - \sigma_z)z]} dz \\ & + \int \left[-2j\sigma_x \frac{dS(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta S(x) \right] dz \\ & + \int \left[2\kappa\beta R(x) e^{-j[(\rho_x - \sigma_x - K_x)x + (\rho_z - \sigma_z - K_z)z]} + 2\kappa\beta R(x) e^{-j[(\rho_x - \sigma_x + K_x)x + (\rho_z - \sigma_z + K_z)z]} \right. \\ & \left. + 2\kappa\beta S(x) e^{j(K_x x + K_z z)} + 2\kappa\beta S(x) e^{-j(K_x x + K_z z)} \right] dz \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.16.2)$$

檢查上兩式，我們可以看到除非入射光波及繞射光波之波向量與光柵向量 \vec{K} 間的關係式須符合 $\Delta\beta \equiv \rho_z - \sigma_z + K_z = 0$ ，否則波動方程式中的 $R(x)$ 與 $S(x)$ 將不會有非零解而得不到耦合波方程式，故：

$$\sigma_z = \rho_z + K_z \quad (2.17)$$

這個關係一般稱其為布拉格條件(Bragg condition)。進一步將此條件代入，則(2.16)式化簡為

$$\begin{aligned} & \int \left[-2j\rho_x \frac{dR(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta R(x) + 2\kappa\beta S(x)e^{j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} \right] dz \\ &= z \left[-2j\rho_x \frac{dR(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta R(x) + 2\kappa\beta S(x)e^{j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.1)$$

與

$$\begin{aligned} & \int \left[-2j\sigma_x \frac{dS(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta S(x) + 2\kappa\beta R(x)e^{-j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} \right] dz \\ &= z \left[-2j\sigma_x \frac{dS(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta S(x) + 2\kappa\beta R(x)e^{-j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18.2)$$

上式要對所有的 z 都成立，所以

$$\begin{aligned} -2j\rho_x \frac{dR(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta R(x) + 2\kappa\beta S(x)e^{j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} &= 0 \\ -2j\sigma_x \frac{dS(x)}{dx} - 2j\alpha_0\beta S(x) + 2\kappa\beta R(x)e^{-j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

換言之，訊號光與讀取光之光強度的變化關係會滿足一組耦合波方程式，如下：

$$\begin{cases} \left(\frac{\rho_x}{\beta} \right) \frac{dR}{dx} + \alpha_0 R = -j\kappa S e^{j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} \\ \left(\frac{\sigma_x}{\beta} \right) \frac{dS}{dx} + \alpha_0 S = -j\kappa R e^{-j(\rho_x - \sigma_x + K_x)x} \end{cases} \quad (2.20)$$

若將方程組中角度參數定義如下：

$$\begin{cases} c_R \equiv \frac{\rho_x}{\beta} \approx \cos \theta_1 \\ c_S \equiv \frac{\sigma_x}{\beta} \approx \cos \theta_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

c_R 、 c_S 為記錄光的角因子，或稱傾斜度。(2.20)式可化簡為

$$\begin{aligned} c_R \frac{dR}{dx} + \alpha_0 R &= -j\kappa S e^{j(\Delta\alpha)x} \\ c_S \frac{dS}{dx} + \alpha_0 S &= -j\kappa R e^{-j(\Delta\alpha)x} \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中 $\Delta\alpha \equiv \rho_x - \sigma_x + K_x$ 稱為相位失配量(phase mismatching value)，要從耦合波方程組中解出 $R(x)$ 與 $S(x)$ ，首先將上式移項

$$\left[j \left(\frac{c_R}{\kappa} \right) \frac{dR}{dx} + j \left(\frac{\alpha_0}{\kappa} \right) R \right] e^{-j(\Delta\alpha)x} = S \quad (2.23.1)$$

$$\left[j \left(\frac{c_S}{\kappa} \right) \frac{dS}{dx} + j \left(\frac{\alpha_0}{\kappa} \right) S \right] e^{j(\Delta\alpha)x} = R \quad (2.23.2)$$

並且微分

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{\kappa} \left[jc_S \frac{d^2 S}{dx^2} + (j\alpha_0 - c_S \Delta\alpha) \frac{dS}{dx} - \alpha_0 \Delta\alpha S \right] e^{-j(\Delta\alpha)x} \quad (2.24)$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{\kappa} \left[jc_R \frac{d^2 R}{dx^2} + (c_R \Delta\alpha + j\alpha_0) \frac{dR}{dx} + \alpha_0 \Delta\alpha R \right] e^{-j(\Delta\alpha)x}$$

代回(2.22)得

$$c_R c_S \frac{d^2 S}{dx^2} + (\alpha_0 c_R + \alpha_0 c_S + jc_R c_S \Delta\alpha) \frac{dS}{dx} + (\alpha_0^2 + \kappa^2 + j\alpha_0 c_R \Delta\alpha) S = 0 \quad (2.25)$$

$$c_R c_S \frac{d^2 R}{dx^2} + (\alpha_0 c_R + \alpha_0 c_S - jc_R c_S \Delta\alpha) \frac{dR}{dx} + (\alpha_0^2 + \kappa^2 - j\alpha_0 c_S \Delta\alpha) R = 0$$

即將一階微分方程轉變為二階方程組，並去除了相位係數。微分方程式的通解如下：

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{sx} [A_1 \sin(\gamma_s x) + A_2 \cos(\gamma_s x)] \\ s &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{c_R} + \frac{\alpha_0}{c_S} + j\Delta\alpha \right); \quad \gamma_s = \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} - \left[\left(\frac{\alpha_0}{c_R} - \frac{\alpha_0}{c_S} \right) + j\Delta\alpha \right]^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

已知穿透式光波的邊界條件為 $S(0) = 0$ ，故 $A_2 = 0$ ：

$$S(x) = A_1 e^{sx} \sin(\gamma_s x) \quad (2.27)$$

代入(2.23.2)得

$$R(x) = \frac{j}{\kappa} A_1 \left[(c_s s + \alpha_0) \sin(\gamma_s x) + c_s \gamma_s \cos(\gamma_s x) \right] e^{rx}$$

$$r = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{c_R} + \frac{\alpha_0}{c_S} - j\Delta\alpha \right)$$
(2.28)

因此，我們可將繞射光 $S(x=d)$ 處之強度與入射光 $R(x=0)$ 處強度之相對關係定義為光柵之繞射效率：

$$\eta \equiv \frac{c_S |S(d)|^2}{c_R |R(0)|^2} = \frac{c_S |A_1 e^{sd} \sin(\gamma_s d)|^2}{c_R \left| \frac{j}{\kappa} A_1 \gamma_s c_S \right|^2} = \frac{1}{c_R c_S} \left| \frac{\kappa e^{sd} \sin(\gamma_s d)}{\gamma_s} \right|^2$$
(2.29)

此時

$$s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{c_R} + \frac{\alpha_0}{c_S} + j\Delta\alpha \right); \quad \gamma_s = \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} - \left[\left(\frac{\alpha_0}{c_R} - \frac{\alpha_0}{c_S} \right) + j\Delta\alpha \right]^2}$$
(2.29.1)

1. 色散角發散關係

若我們要將此體積光柵應用於光譜儀，必須知道其色散關係，已知讀取光入射角 $\theta_i = \theta_1$ ，可以(2.17)與 $\bar{K} = \frac{2\pi}{\Lambda} (\hat{x} \cos \phi + \hat{z} \sin \phi)$ ，導出

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \rho_z + K_z \\ &= -\rho \sin \theta_1 + \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \phi \\ &= -\frac{2n_0\pi}{\lambda} \sin \theta_1 + \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \phi \end{aligned}$$
(2.31)

而比較

$$\bar{\sigma}(\lambda) = \left(\frac{2n_0\pi}{\lambda} \cos \theta_d \right) \hat{x} + \left(\frac{2n_0\pi}{\lambda} \sin \theta_d \right) \hat{z} \Big|_{\lambda \approx \lambda_0}$$
(2.32)

由此可知當多色光通過光柵後，其繞射光的偏折角 θ_d 與讀取波長有關，其關係如下：

$$\begin{aligned} \frac{2n_0\pi}{\lambda} \sin \theta_1 + \frac{2n_0\pi}{\lambda} \sin \theta_d &= \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \phi \\ \Rightarrow \theta_d(\lambda) &= \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{n_0 \Lambda} \sin \phi - \sin \theta_1 \right) \end{aligned}$$
(2.33)

故複合光束中因各波長稍有差異，而發散至不同角度如圖：

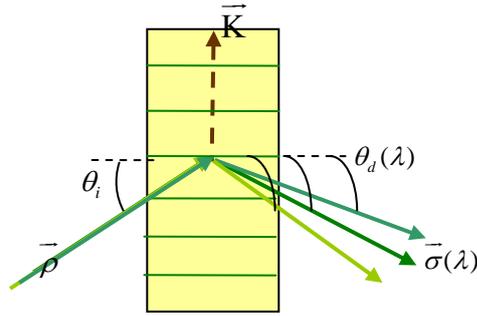


圖 2.3 單一張體積光柵之色散分光示意圖

大小稍微不同的波長，可經由同一張光柵繞射到不同的位置，這為單一張體積光柵的分光原理。

另外，由於記錄光的波向量條件會符合 $\vec{k}_0 = \vec{k}_R + \vec{K}$ ，其中 \vec{k}_R 為記錄參考光波向量， \vec{k}_0 為記錄物光波向量，對各張光柵的記錄皆成立。因而在以下的計算皆可套用

$$-\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \cos \phi \text{ 且 } \sin \theta_1 + \sin \theta_2 = \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \sin \phi \text{ 兩個等式來代入。}$$

除了上式，又因布拉格條件 $\sigma_z = \rho_z + K_z$ 的守恒，故 $\sin \theta_i + \sin \theta_d = \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \sin \phi$ ，其中 θ_i 為讀取光於介質內側的入射角， θ_d 為介質內側的繞射光角度。

2a. 相位匹配情況

發生於 $\Delta \alpha = 0$ 的情況，故 $\rho_x - \sigma_x + K_x = 0$ ，此時 $\theta_i = \theta_1$ 且 $\theta_d = \theta_2$

$$\begin{aligned} -\cos \theta_1 + \cos \theta_2 &= \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \cos \phi \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_2 &= \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.34)$$

θ_1 、 θ_2 為記錄條件，需滿足上式。

設光柵沒有吸收變化，為一單純之相位光柵，則繞射效率變成：

$$\eta = \sin^2 \left(\frac{\kappa d}{\sqrt{c_R c_S}} \right) \quad (2.35)$$

呈正弦變化如圖

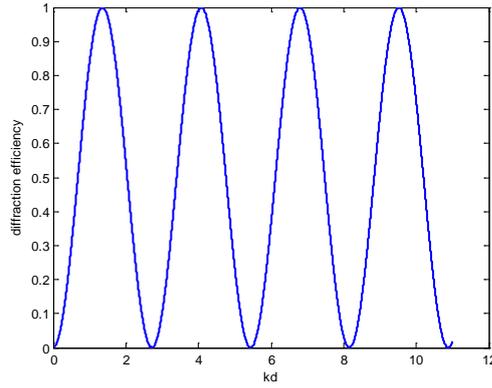


圖 2.4 體積光柵的繞射能力與材料之物理性質及幾何形狀關係

2b. 相位失配情況

$\Delta\alpha \neq 0$ ，發生於入射角或讀取波長稍微偏離布拉格角 θ_1 或布拉格波長 λ_0 的記錄條件。在波長未偏離的例子中， $\theta_i = \theta_1 - \Delta\theta$ ，已知

$$\begin{aligned}
 -\cos \theta_1 + \cos \theta_2 &= \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \cos \phi \\
 \sin \theta_i + \sin \theta_d &= \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \sin \phi
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

為了滿足上式，則 $\theta_d = \theta_2 + \Delta\theta$ ，故失配量為

$$\begin{aligned}
 \Delta\alpha &= \rho_x - \sigma_x + K_x \\
 &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \cos(\theta_1 - \Delta\theta) - \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \cos(\theta_2 + \Delta\theta) + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
 &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} [\cos(\theta_1 - \Delta\theta) - \cos(\theta_2 + \Delta\theta)] + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
 &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi + \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \Delta\theta \\
 &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \Delta\theta \\
 &= \frac{2\pi \sin \phi}{\Lambda} \Delta\theta
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

如下圖，為角度變化造成相位失配的情形。

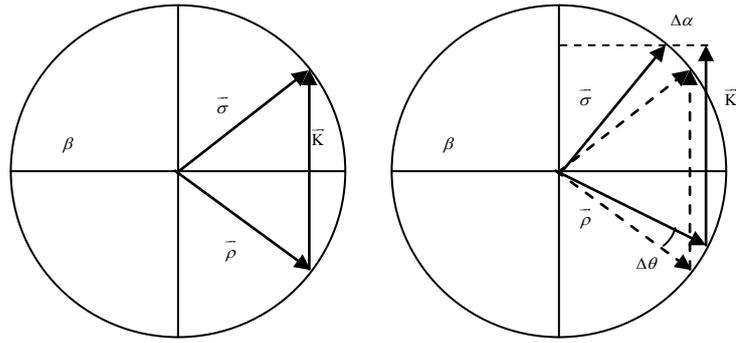


圖 2.5 繞射光的相位失配與角度偏移關係

在滿足布拉格角，角度未偏離的例子中， $\theta_i = \theta_1$ 且 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ ，故

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 + \sin \theta_2 &= \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \sin \phi \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_d &= \left(\frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} + \frac{\Delta\lambda}{n_0 \Lambda} \right) \sin \phi \end{aligned} \quad (2.38)$$

在滿足上式的條件下，算得

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin \theta_1 + (\sin \theta_2 + \cos \theta_2 \Delta\theta) &= \frac{\lambda_0}{n_0 \Lambda} \sin \phi + \frac{\Delta\lambda}{n_0 \Lambda} \sin \phi \\ \Rightarrow \cos \theta_2 \Delta\theta &= \frac{\Delta\lambda}{n_0 \Lambda} \sin \phi \\ \theta_d = \theta_2 + \Delta\theta &= \theta_2 + \frac{\sin \phi}{n_0 \Lambda \cos \theta_2} \Delta\lambda \end{aligned} \quad (2.39)$$

則失配量

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= \rho_x - \sigma_x + K_x \\
&= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \cos \theta_1 - \frac{2n_0\pi}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \cos(\theta_2 + \Delta\theta) + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
&= 2n_0\pi (\lambda_0 + \Delta\lambda)^{-1} [\cos \theta_1 - \cos(\theta_2 + \Delta\theta)] + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
&= 2n_0\pi \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \Delta\theta) + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
&= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \Delta\theta) + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
&= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \left[\cos \theta_1 - \cos \theta_2 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \sin \theta_2 \Delta\theta \right] + \frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \\
&= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{n_0\Lambda} \cos \phi \right) + \sin \theta_2 \left(\frac{\sin \phi \Delta\lambda}{n_0\Lambda \cos \theta_2} \right) \right] \\
&= \left[\frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \right) + \sin \theta_2 \left(\frac{2\pi \sin \phi}{\lambda_0 \Lambda \cos \theta_2} \right) \right] \Delta\lambda \\
&= \frac{\pi}{n_0\Lambda^2 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \left[\cos \phi + \left(\frac{\sin \theta_2 \sin \phi}{\cos \theta_2} \right) \right] \Delta\lambda \\
&= \frac{\pi}{n_0\Lambda^2 \cos \theta_2 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} (\cos \phi \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \sin \phi) \Delta\lambda \\
&= \frac{\pi}{n_0\Lambda^2 \cos \theta_2 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \cos \left[90^\circ - \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) - \theta_2 \right] \Delta\lambda \\
&= \frac{\pi}{n_0\Lambda^2 \cos \theta_2} \Delta\lambda
\end{aligned} \tag{2.40}$$

我們也可以從布拉格繞射常用的波向量關係圖，來說明相位失配的意義如下圖所示。

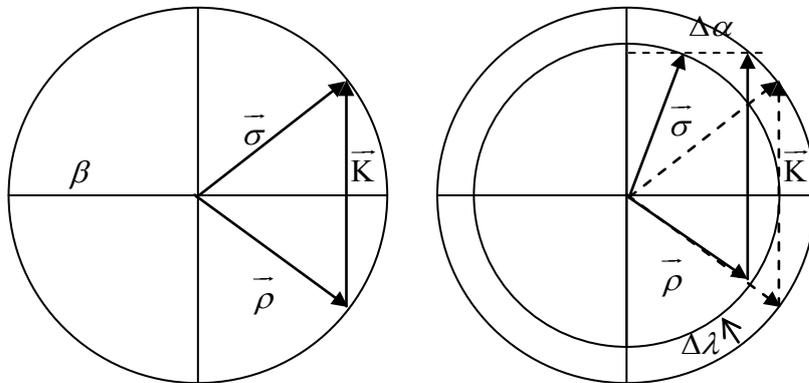


圖 2.6 繞射光的相位失配與波長偏移關係

由(2.37)、(2.40)式，相位失配量為一與偏離量有關之參數，整理如下：

$$\Delta\alpha = \begin{cases} \frac{2\pi \sin \phi}{\Lambda} \Delta\theta; & \lambda = \lambda_0 \\ \frac{\pi}{n_0 \Lambda^2 \cos \theta_2} \Delta\lambda; & \theta_i = \theta_1 \end{cases} \quad (2.41)$$

如圖所示，我們可以看到當入射讀取光波長變大時，為滿足布拉格條件繞射光之角度產生變化，引起 $\bar{\rho}$ 與 $\bar{\sigma}$ 產生一失配量 $\Delta\alpha$ 。

2.1.3 無吸收相位光柵

設光柵沒有吸收變化，為一單純之相位光柵，介質的吸收係數及調制量 $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ ，

而耦合常數 $\kappa = \frac{\pi n_1}{\lambda_0}$ 。繞射效率變為：

$$\eta(\lambda, \Delta\theta) = \frac{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} \sin^2 \left(\frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \Delta\alpha^2} \right)}{\left(4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \Delta\alpha^2 \right)} \quad (2.42)$$

其中

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi \sin \phi}{\Lambda} \Delta\theta = \frac{\pi}{n_0 \Lambda^2 \cos \theta_2} (\lambda - \lambda_0) \quad (2.43)$$

λ_0 為記錄光之波長，可視為對應特定光柵的中心波長。若為532nm，且設定 $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$ ，我們可計算不同厚度下光柵繞射效率隨之變化情形，如下圖，除了符合布拉格條件波長的光波通過光柵，還有稍微偏離原記錄波長的光能以較低的強度繞射出來。

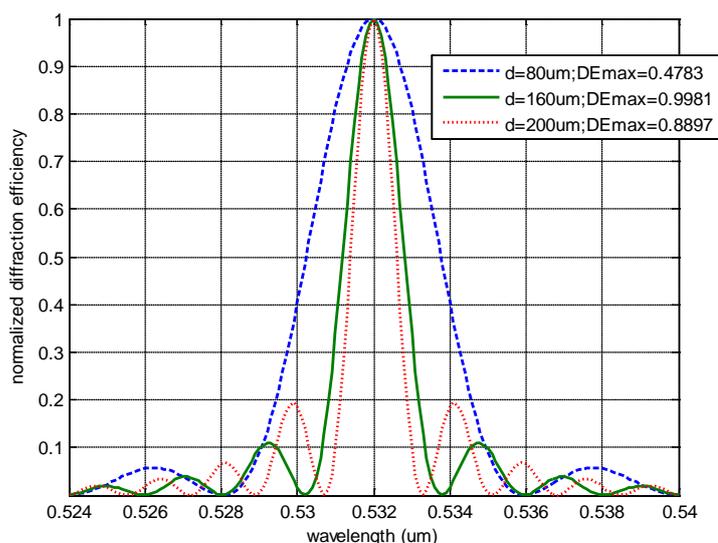


圖 2.7 相位光柵的 DE 是波長選擇性的函數

對不同厚度參數的光柵而言，繞射效率之最大值不同，且亦造成波長(或角度)選擇性的不同。體積光柵繞射效率的特性為波長的 sinc^2 函數，愈厚的材料函數寬度愈小，可將此函數主峰(main lobe)的半高寬視為光柵色散的頻寬。故得厚度愈大，光柵可用分光之頻率範圍愈小，此為體積全像光柵不利分光之因素之一。

2.1.4 含吸收率之相位光柵

若考慮介質吸收對相位光柵繞射特性的影響，則在此將 $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = 0$ 代入，而耦合常數仍為 $\kappa = \frac{\pi n_1}{\lambda_0}$ 。則繞射效率為

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{c_R c_S} \left| \frac{\kappa e^{sd} \sin(\gamma_s d)}{\gamma_s} \right|^2 \\
&= \frac{\kappa^2}{c_R c_S} e^{-\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_0}{c_R + c_S}\right)d} \left| \frac{\sin \left[\frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} - \left(\frac{\alpha_0}{c_R} - \frac{\alpha_0}{c_S} + j\Delta\alpha \right)^2} \right]}{\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} - \left(\frac{\alpha_0}{c_R} - \frac{\alpha_0}{c_S} + j\Delta\alpha \right)^2}} \right|^2 \\
&= \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} e^{-\frac{\alpha_0 d}{c_R} \left(1 + \frac{c_R}{c_S}\right)} \left| \frac{\sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} - \left[\frac{\alpha_0 d}{c_R} \left(1 - \frac{c_R}{c_S}\right) + jd\Delta\alpha \right]^2} \right]}{\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} - \left[\frac{\alpha_0 d}{c_R} \left(1 - \frac{c_R}{c_S}\right) + jd\Delta\alpha \right]^2}} \right|^2 \\
&= \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} e^{-D_0(1+C)} \left| \frac{\sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} - \left[D_0(1-C) + jd\Delta\alpha \right]^2} \right]}{\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} - \left[D_0(1-C) + jd\Delta\alpha \right]^2}} \right|^2 \\
&= \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} e^{-D_0(1+C)} \left| \frac{\sin \left[\frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} - \left(\left[\frac{\alpha_0^2}{c_R^2 c_S^2} (c_S - c_R)^2 - \Delta\alpha^2 \right] + j \left[\frac{2\alpha_0}{c_R c_S} (c_R - c_S) \Delta\alpha \right] \right)} \right]}{\frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} - \left(\left[\frac{\alpha_0^2}{c_R^2 c_S^2} (c_S - c_R)^2 - \Delta\alpha^2 \right] + j \left[\frac{2\alpha_0}{c_R c_S} (c_R - c_S) \Delta\alpha \right] \right)}} \right|^2
\end{aligned} \tag{2.44}$$

在此定義 $D_0 \equiv \frac{\alpha_0 d}{c_R}$ 為吸收因子，與材料之吸收係數有關； $C \equiv \frac{c_R}{c_S}$ 為角度因子。發現當 $c_R = c_S$ (對稱記錄) 或 $\Delta\alpha = 0$ (相位匹配) 時，sinc 函數之變數沒有虛部項。而在非特例的情況中，對任何吸收率不可忽略的介質而言，繞射效率 η 亦為相位失配量 $\Delta\alpha$ 的函數，用同樣之參數，我們計算繞射效率隨 $\Delta\alpha$ 變化在不同吸收係數 α_0 下之情形，如下圖所示。

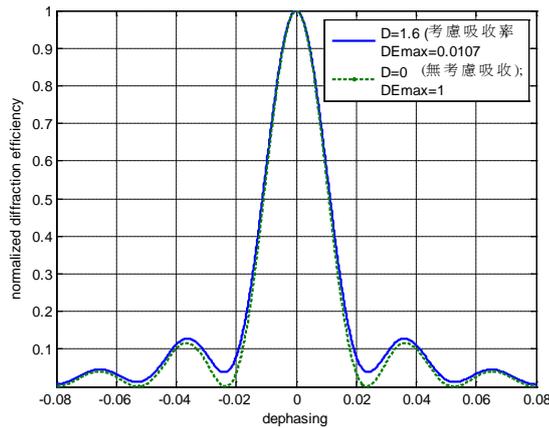


圖 2.8 介質吸收率對「無吸收調變之純相位光柵」DE 的影響

從圖中，我們可以看到高吸收 ($D_0 = 1.6$) 性質對光柵的最大繞射效率有顯著的影響，使其明顯降低，但卻對角度、波長選擇性頻寬的影響程度輕微，幾乎沒有變化。另外，我們亦可相位匹配 ($\Delta\alpha = 0$) 的最簡形式，討論吸收大小對光柵整體繞射效率造成的改變情形。此時繞射公式為

$$\eta_{\max}(D_0, C) = e^{-D_0(1+C)} \frac{\sin^2 \left[\frac{\kappa d}{\sqrt{c_R c_S}} \sqrt{1 - \left[\frac{\alpha_0^2}{c_R^2 c_S^2} (c_S - c_R)^2 \right]} \right] / \left(4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} \right)}{1 - \left[\frac{\alpha_0^2}{c_R^2 c_S^2} (c_S - c_R)^2 \right] / \left(4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} \right)} \quad (2.45)$$

如下圖：

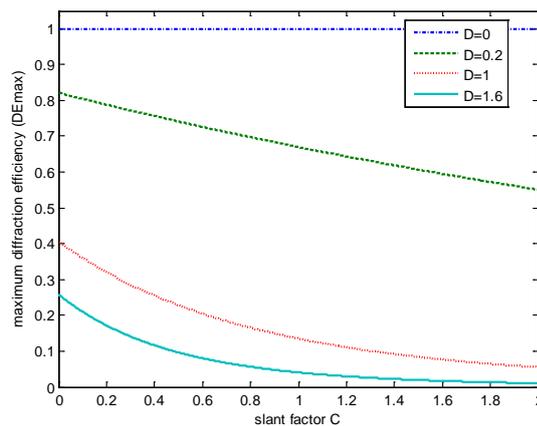


圖 2.9 吸收性質對相位光柵最大繞射效率的影響

考慮穿透式光柵，設定 C 值大於 0。很符合常理地，吸收數值愈大，則繞射效率愈降低。

2.2 反射式體積全像光柵

2.2.1 體積全像光柵之記錄機制與耦合波分析

假設介質的 x 、 y 方向均勻分布，則振幅不隨 x 、 y 方向變化，只為 z 的函數。令 $\rho_x = \sigma_x = \beta_x$ ，此時電場函數可寫為

$$E = e^{-j\beta_x x} [R(z)e^{-j\rho_z z} + S(z)e^{-j\sigma_z z}] \quad (2.46)$$

上式代入波動方程式(2.10)，要使方程式有非零解，以如同(2.14)至(2.19)式的近似與推導方法歸論邊界條件 $\sigma_x = \rho_x + K_x$ 為必要條件，可得到屬於反射式的耦合波方程組

$$\begin{cases} \left(\frac{\rho_z}{\beta}\right) \frac{dR}{dz} + \alpha_0 R = -j\kappa S e^{j(\rho_z - \sigma_z + K_z)z} \\ \left(\frac{\sigma_z}{\beta}\right) \frac{dS}{dz} + \alpha_0 S = -j\kappa R e^{-j(\rho_z - \sigma_z + K_z)z} \end{cases} \quad (2.47)$$

差別的是，此時

$$\Delta\beta = \rho_z - \sigma_z + K_z \quad (2.48)$$

為方程式的相位條件。

下圖為反射式光柵的記錄模型：

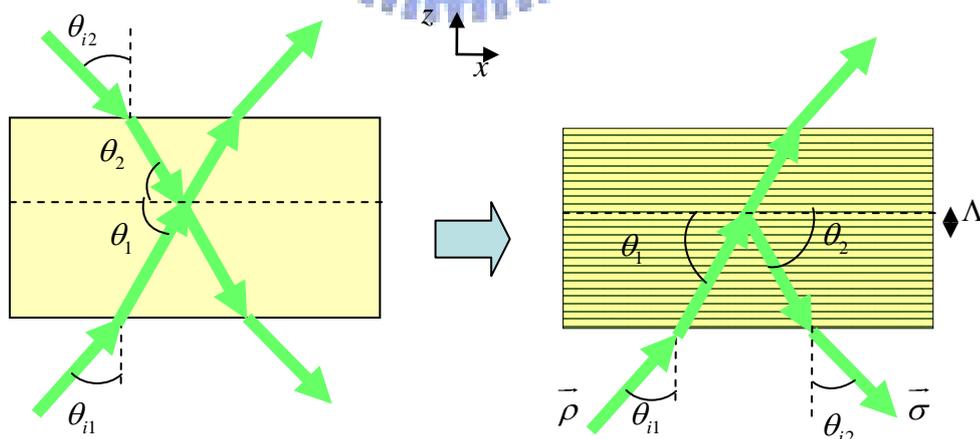


圖 2.10 反射式光柵的記錄

此時 θ_1 、 θ_2 為介質內部光束與 x 軸向條紋的夾角，與入射角的定義無關。

2.2.2 無吸收率變化之純相位光柵

由(2.47)

$$\begin{cases} \sin \theta_1 \frac{dR}{dz} + \alpha_0 R = -j\kappa S e^{j(\Delta\beta)z} \\ \sin \theta_2 \frac{dS}{dz} + \alpha_0 S = -j\kappa R e^{-j(\Delta\beta)z} \end{cases} \quad (2.49)$$

將上式移項

$$\begin{cases} \left[j \left(\frac{\sin \theta_1}{\kappa} \right) \frac{dR}{dz} + j \left(\frac{\alpha_0}{\kappa} \right) R \right] e^{-j(\Delta\beta)z} = S \\ \left[j \left(\frac{\sin \theta_2}{\kappa} \right) \frac{dS}{dz} + j \left(\frac{\alpha_0}{\kappa} \right) S \right] e^{j(\Delta\beta)z} = R \end{cases} \quad (2.50)$$

並微分

$$\begin{cases} \frac{dR}{dz} = \frac{1}{\kappa} \left[j \sin \theta_2 \frac{d^2 S}{dz^2} + (j\alpha_0 - \sin \theta_2 \Delta\beta) \frac{dS}{dz} - \alpha_0 \Delta\beta S \right] e^{-j(\Delta\beta)z} \\ \frac{dS}{dz} = \frac{1}{\kappa} \left[j \sin \theta_1 \frac{d^2 R}{dz^2} + (\sin \theta_1 \Delta\beta + j\alpha_0) \frac{dR}{dz} + \alpha_0 \Delta\beta R \right] e^{-j(\Delta\beta)z} \end{cases} \quad (2.51)$$

代回(2.49)，可得

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 \frac{d^2 S}{dz^2} + (\alpha_0 \sin \theta_1 + \alpha_0 \sin \theta_2 + j \sin \theta_1 \sin \theta_2 \Delta\beta) \frac{dS}{dz} + (\alpha_0^2 + \kappa^2 + j\alpha_0 \sin \theta_1 \Delta\beta) S = 0 \quad (2.52.1)$$

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 \frac{d^2 R}{dz^2} + (\alpha_0 \sin \theta_1 + \alpha_0 \sin \theta_2 - j \sin \theta_1 \sin \theta_2 \Delta\beta) \frac{dR}{dz} + (\alpha_0^2 + \kappa^2 - j\alpha_0 \sin \theta_2 \Delta\beta) R = 0 \quad (2.52.2)$$

先將(2.52.1)微分方程式求得通解如下

$$\begin{aligned} S(z) &= e^{sz} (A_1 e^{\gamma_s z} + A_2 e^{-\gamma_s z}) \\ s &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\sin \theta_1} + \frac{\alpha_0}{\sin \theta_2} + j\Delta\beta \right); \quad \gamma_s = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\sin \theta_1} - \frac{\alpha_0}{\sin \theta_2} \right) + j \frac{\Delta\beta}{2} \right]^2 - \frac{\kappa^2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

由反射式的另一邊界條件 $S(d) = 0$ ，故 $A_1 e^{\gamma_s d} + A_2 e^{-\gamma_s d} = 0$ ，令

$$\begin{aligned} A_1 &= A' e^{-\gamma_s d} \\ A_2 &= -A' e^{\gamma_s d} \end{aligned} \quad (2.54)$$

A' 為一常數。代回(2.53)式，得到

$$\begin{aligned} S(z) &= A' e^{sz} \left(e^{\gamma_s(z-d)} - e^{-\gamma_s(z-d)} \right) \\ &= A e^{sz} \sinh[\gamma_s(z-d)] \end{aligned} \quad (2.55)$$

A 為另一常數，由上式代入(2.50)亦得到

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{j}{\kappa} A \left\{ (s \sin \theta_2 + \alpha_0) \sinh[\gamma_s(z-d)] + \gamma_s \sin \theta_2 \cosh[\gamma_s(z-d)] \right\} e^{rz} \\ r &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\sin \theta_1} + \frac{\alpha_0}{\sin \theta_2} - j \Delta\beta \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

經介質作用行進 d 的距離，入射光轉換為繞射光，反射式的繞射效率定義為：

$$\eta \equiv \frac{c_s |S(0)|^2}{c_R |R(0)|^2} \quad (2.57)$$

已知 $s = -\frac{\alpha_0}{\sin \theta_2} - j \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)$ ，故這個例子下，其繞射效率

$$\begin{aligned} \eta &= \left| \frac{S(0)}{R(0)} \right|^2 = \left| \frac{\kappa \sinh(\gamma_s d)}{\gamma_s \sin \theta_2 \cosh(\gamma_s d) - (s \sin \theta_2 + \alpha_0) \sinh(\gamma_s d)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\kappa \sinh(\gamma_s d)}{\gamma_s \sin \theta_2 \cosh(\gamma_s d) + j \sin \theta_2 \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right) \sinh(\gamma_s d)} \right|^2 \\ &= \frac{\left| \frac{\kappa}{\sin \theta_2} \right|^2 \sinh^2(\gamma_s d)}{\gamma_s^2 \cosh^2(\gamma_s d) + \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)^2 \sinh^2(\gamma_s d)} \end{aligned} \quad (2.58)$$

其中

$$\gamma_s \equiv \sqrt{\left| \frac{\kappa}{\sin \theta_2} \right|^2 - \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)^2} \quad (2.58.1)$$

故(2.58)式可再化簡為

$$\eta = \frac{\left| \frac{\kappa}{\sin \theta_2} \right|^2 \sinh^2(\gamma_s d)}{\left| \frac{\kappa}{\sin \theta_2} \right|^2 \cosh^2(\gamma_s d) - \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)^2 \cosh^2(\gamma_s d) + \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)^2 \sinh^2(\gamma_s d)} \quad (2.59)$$

$$= \frac{\sinh^2(\gamma_s d)}{\cosh^2(\gamma_s d) - \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)^2 \left/ \left| \frac{\kappa}{\sin \theta_2} \right|^2 \right.}$$

若此時 $\frac{\kappa d}{\sin \theta_2}$ 值固定，則繞射效率隨 $\Delta\beta$ 變化。以 $\Delta\beta d$ 為橫軸，可作下圖：

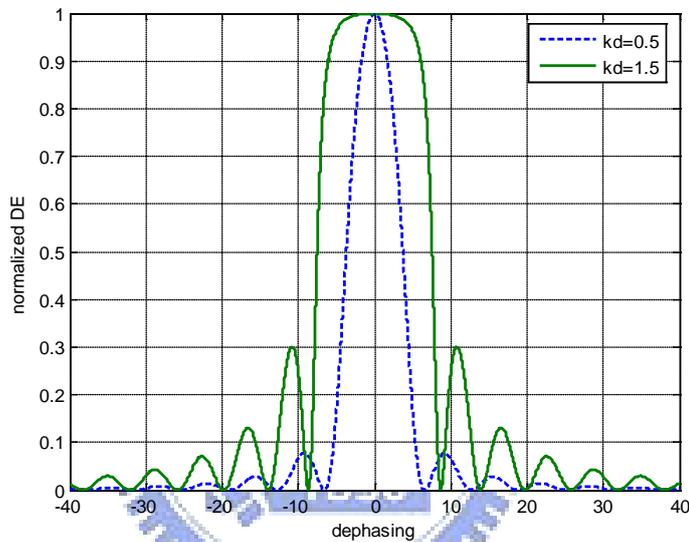


圖 2.11 反射式光柵的繞射效率

發現反射式光柵具有類似穿透式的繞射特性。

若 $\Delta\beta = 0$ ，則

$$\eta = \tanh^2 \left(\frac{\kappa d}{\sin \theta_2} \right) \quad (2.60)$$

為相位匹配時之繞射效率，即最大繞射效率。下圖為最大繞射效率隨 $\frac{\kappa d}{\sin \theta_2}$ 變化之曲線。

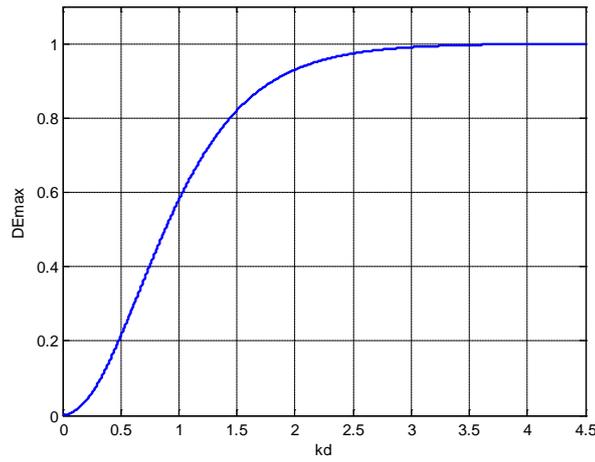


圖 2.12 反射式光柵的繞射能力與材料參數之關係

2.2.3 反射式體積全像之色散關係

由於反射式光柵除了邊界條件不同外，其餘則完全跟從穿透式光柵的推導邏輯，故在此將條件式或角度關係快速帶算過，便不作多餘解釋。公式意義皆可參照上節。

因為已知記錄時的條件，由幾何關係，反射式光柵可寫出以下的公式：

$$\frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \cos \theta_1 - \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \cos \theta_2 = -\frac{2\pi}{\Lambda} \cos \phi \quad (2.61)$$

$$\frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \sin \theta_1 + \frac{2n_0\pi}{\lambda_0} \sin \theta_2 = \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \phi$$

即

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = -\frac{\lambda_0}{n_0\Lambda} \cos \phi \quad (2.62)$$

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = \frac{\lambda_0}{n_0\Lambda} \sin \phi$$

如下圖：

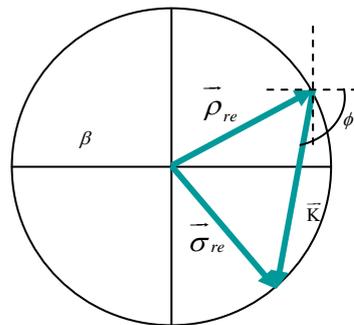


圖 2.13 反射式光柵記錄條件

又對反射式光柵而言，布拉格條件為

$$\frac{2n_0\pi}{\lambda}\cos\theta_i - \frac{2n_0\pi}{\lambda}\cos\theta_d = -\frac{2\pi}{\Lambda}\cos\phi \quad (2.63)$$

$\theta_i = \theta_1$ ，且令 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ 可得到色散關係式

$$\theta_d(\lambda) = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda}{n_0\Lambda}\cos\phi + \cos\theta_1\right) \quad (2.64)$$

當讀取光的入射角與記錄參考光無異，而 $\theta_d = \theta_2 + \Delta\theta$ 。讀取波長不同時，可發現繞射角

之於記錄物體光角度的變化 $\Delta\theta$ 和波長變化 $\Delta\lambda$ 的關係：

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 - \cos(\theta_2 + \Delta\theta) &= -\left(\frac{\lambda_0}{n_0\Lambda} + \frac{\Delta\lambda}{n_0\Lambda}\right)\cos\phi \\ \Rightarrow \sin\theta_2\Delta\theta &= -\frac{\Delta\lambda}{n_0\Lambda}\cos\phi \\ \Rightarrow \Delta\theta &= -\frac{\Delta\lambda}{n_0\Lambda\sin\theta_2}\cos\phi \end{aligned} \quad (2.65)$$

因而，相位失配量與波長變化的關係為：

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \rho_z - \sigma_z + K_z \\ &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\sin\theta_1 + \frac{2n_0\pi}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\sin(\theta_2 + \Delta\theta) - \frac{2\pi}{\Lambda}\sin\phi \\ &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cos\theta_2\Delta\theta) - \frac{2\pi}{\Lambda}\sin\phi \\ &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\left[\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) + \cos\theta_2\Delta\theta\right] - \frac{2\pi}{\Lambda}\sin\phi \\ &= \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\left[-\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{n_0\Lambda}\sin\phi\right) + \cos\theta_2\left(\frac{-\cos\phi\Delta\lambda}{n_0\Lambda\sin\theta_2}\right)\right] \\ &= -\left[\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\sin\phi\right) + \cos\theta_2\left(\frac{2\pi\cos\phi}{\lambda_0\Lambda\sin\theta_2}\right)\right]\Delta\lambda \\ &= -\frac{\pi}{n_0\Lambda^2\sin\theta_2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}(\sin\phi\sin\theta_2 + \cos\theta_2\cos\phi)\Delta\lambda \\ &= -\frac{\pi}{n_0\Lambda^2\sin\theta_2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}\cos\left[90^\circ - \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) - \theta_2\right]\Delta\lambda \\ &= -\frac{\pi}{n_0\Lambda^2\sin\theta_2}\Delta\lambda \end{aligned} \quad (2.66)$$

2.3 多工組合光柵簡介

接續前面的討論，探討組合光柵(multiple grating)的問題。組合光柵有兩種不同的記錄方式：多道光同時記錄、或多道光依先後次序記錄。在此指的是後者，藉由變化不同參考光條件在介質同一區域上重疊多張光柵，記錄的過程為「多工」。當重建或讀取時，單一參考光入射至光柵可作單獨重建，而不受其他張干擾。

一般而言多工定址方式的應用，是用以分開儲存多張不同的物體影像，以定址器選擇不同條件的參考光與物波作干涉，這種方法適合用來儲存大量的三維光資訊。以角度多工為例，多工方式的記錄原則與運作模式如下說明。

依(2.42)式，極化態相同的訊號光對重建參考光的繞射效率改寫如下：

$$\begin{aligned}
 \eta(\lambda, \Delta\theta) &= \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} \frac{\sin^2 \left(\frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \Delta\alpha^2} \right)}{\left(\frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \Delta\alpha^2} \right)^2} \\
 &= \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{d}{2\pi} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \Delta\alpha^2} \right) \\
 &= \frac{\kappa^2 d^2}{c_R c_S} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{d}{\pi} \sqrt{\frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \left(\frac{\pi^2 \sin^2 \phi}{\Lambda^2} \right) \Delta\theta^2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

因 sinc^2 函數特性於第一零點處得極小繞射效率，適合用來作第二次記錄，使原先的布拉格條件失配，讀不出第一次記錄的資訊。故每張光柵記錄所需的最小角度間隔 $\Delta\theta_{\min}$ ，為 sinc^2 函數的第一零點處，即

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{\pi} \sqrt{\frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \left(\frac{\pi^2 \sin^2 \phi}{\Lambda^2} \right) \Delta\theta^2} = \pi &\Rightarrow \left(\frac{n_1 d}{\lambda_0 \sqrt{\cos \theta_1 \cos \theta_2}} \right)^2 + \left(\frac{d \sin \phi}{\Lambda} \Delta\theta \right)^2 = 1 \\
 \Rightarrow \Delta\theta &= \frac{\Lambda}{d \sin \phi} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 d}{\lambda_0 \sqrt{\cos \theta_1 \cos \theta_2}} \right)^2}
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

所以多工記錄時，角度最小偏移量的選取與介質厚度、條紋密度等有關，並且每記錄完一張，再記錄下一張所需選取的角度改變量皆不一樣，因 θ_1 、 θ_2 、 ϕ 等條件都不同了。各張之間角度偏移量可以for迴圈模擬出數值，其繞射效率如圖 2.14 所示。

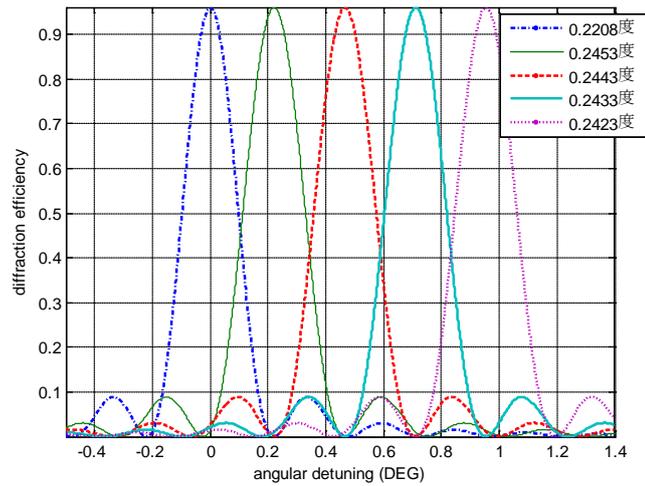


圖 2.14 角度選擇性為多工記錄光柵的角度選擇依據

在此，分光元件的組合光柵欲模仿這種方式擴張其頻譜範圍，因為介質內的單一光柵有布拉格條件的限制，如(2.41)式描述，對體積光柵而言，當波長偏離一定的大小後，繞射效率會下降。對一穿透式純相位光柵而言，波長對繞射效率作圖為一 sinc^2 函數，不考慮任何材料收縮的情況下，此函數中心點即對應到此介質繞射的布拉格波長，也就是記錄光波長 λ_0 。若讀取光對布拉格波長漸偏離，則繞射效率驟降。於是，對布拉格波長偏離一個量時，繞射效率幾乎為零，得到第一零點。

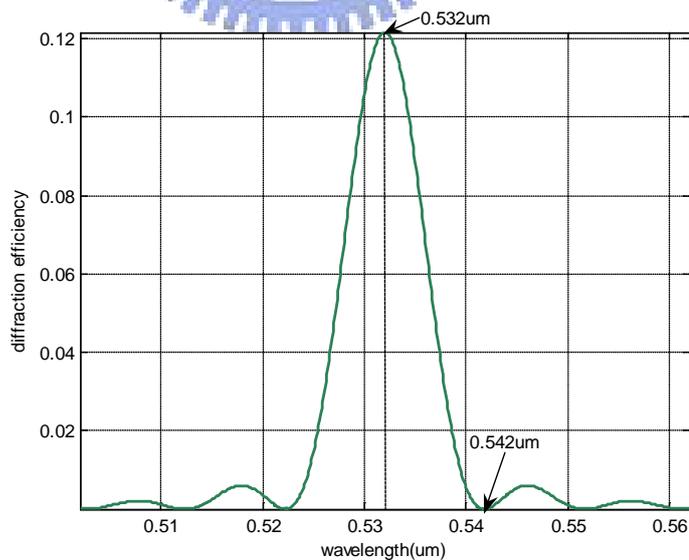


圖 2.15 繞射效率對讀取光波長作圖

圖 2.15 是設定光柵介質厚度為 38um、記錄光波長 0.532um、入射角 45° 等條件下，

繞射值理論上的結果。其繞射效率的半寬大約在 $0.527\mu\text{m}$ - $0.537\mu\text{m}$ ，將其解釋為單一張光柵能繞射分光最保守的範圍，大小約只有 10nm 。若只有單一張光柵的話，會讓儀器的頻譜響應範圍過小。在這個情況下，我們需要改變不同的記錄角或波長，設計一張光柵，使 $0.542\mu\text{m}$ 的光可以最大值的效率讀取出，並作其鄰近波長的色散。而如何選取每一次的記錄條件，使各張光柵皆相獨立互不干擾，是多工組合重要探討的課題。

本文的設計主軸將於第三章詳細描述，雖然亦是變化記錄角度，組合不同張光柵，卻不能真正稱之為角度多工，也不是真正的波長多工。若為記錄角度多工組合光柵，通常會固定物體光的入射角度，只以改變參考光角度來記錄，如圖 2.16 所示。而我們的設計方式與波長多工的差異又在於只以單一種波長來記錄。

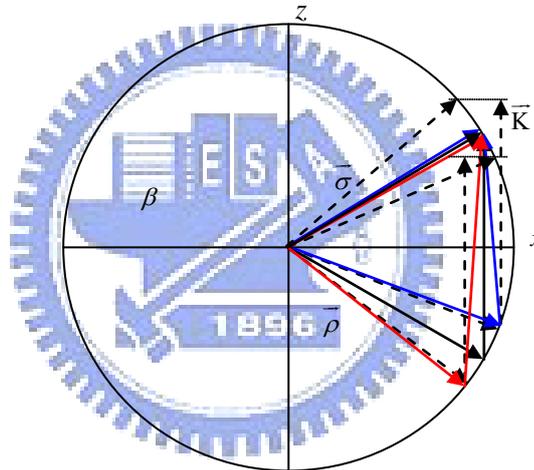


圖 2.16 角度多工記錄、讀取向量圖

2.4 體積光柵元件色散能力分析

體積全像光柵分光器特性分析以上述所得的體積全像繞射特性之基礎，我們可以仿效第 1.2 節分析薄光柵之特性指標來分析穿透式體積光柵的特性。

1. 頻譜適用範圍

對體積全像光柵之適用範圍的限制，實際上來自於光柵繞射效率隨波長變化產生相位失配逐漸降低之限制，如前述我們可以看到其為一個 sinc 函數變化，所以 sinc 函數的峰值半高頻寬即為其適用的頻譜範圍，依式(2.40)

$$\Delta\lambda \approx \frac{n_0\Lambda^2 \cos\theta_2}{\pi} \quad (2.68)$$

舉例來說，若以先前所提的材料參數來模擬，當記錄波長為 532nm，角度 $\theta_1 = \theta_2 = 15^\circ$ 時， $\Delta\lambda$ 約只有 16nm 的範圍，遠小於我們所設定之目標，要改善此問題，我們可以用多工組合多個體積全像光柵的方法，為下一章之重點。

2. 體積光柵的角色散率

角色散率的定義為若入射光波長變化 $\Delta\lambda$ ，繞射光繞射角度之相對變化量，所以其關係可由色散關係(2.39)式得到：

$$D_\theta \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\sin\phi}{n_0\Lambda \cos\theta_2} \quad (2.69)$$

此型式與薄光柵的關係式類似，最大差別在於體積光柵因布拉格條件限制只有 $m=1$ 的第一階繞射，所以要改善其角色散率無法使用高階繞射，只能用增加光柵密度的方法來達成。

3. 體積光柵的線色散率

如同薄光柵一樣，線色散率實際上為系統參數，與聚焦透鏡之焦距 f_2 有關，如下：

$$D_l = f \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{f \sin\phi}{n_0\Lambda \cos\theta_2} \quad (2.70)$$

4. 體積光柵的解析度

從薄光柵之特性分析可以看到光柵解析度實際上會與繞射光場在 CCD 平面上分布型式有關，然而，雖然耦合波理論可以非常方便的來分析體積全像光柵之分光特性，但在

分析過程中均假設入射光波與繞射光波為平面波，且光柵的橫剖面無窮大，因此無法有效得到繞射光波光場在系統中 CCD 輸出平面上分布的型式，自然無法進一步得到光柵解析度之參數，來說明其分光能力。

進一步檢查圖 1.5 所示，我們所使用的穿透式光柵光譜儀光學系統，實際上是一個記錄與讀取平面光波的體積全像系統。記錄用的兩道平面光波是利用將兩點波源分別放置在參考平面 (y_R, z_R) 及輸入信號平面 (y_0, z_0) 來產生，偵測系統與信號光波對稱。依據波恩近似法則與近軸光學，重建時之繞射光場分布為

$$E(\vec{r}) \approx \int_V d\vec{r}' e^{-j\vec{K}\cdot\vec{r}'} \Delta\epsilon_r \quad (2.71)$$

其中 $\vec{K} = \vec{\sigma} - \vec{\rho}$ 為光柵向量，並根據全像理論，儲存 $2M+1$ 張光柵於介質後，材料中的折射率會被調製，可寫成

$$\Delta\epsilon_r = \sum_{m=-M}^M R_m^* S_m + c.c. \quad (2.72)$$

上式中， R_m 為在參考光平面上的「第 m 次」記錄所對應之點光源，經過透鏡 L1 之後等效成第 m 個入射角度的平面光波，分別對應為不同記錄角度的參考光波入射。 S_m 為物體光波，經透鏡作一次傅氏轉換後於記錄平面上的分布。這樣的系統適合用來分析影像的儲存。

而本論文所使用記錄光柵的系統可參照圖 1.6，本論文的光柵設計，是將折射定律考慮進去，光束於介質外部入射角與內部角度不同。雖然實際上兩光干涉所形成光柵之幾何結構，是與兩記錄光介質內部之夾角有關，但對元件外部的整個系統而言，所要討論的皆為外部角度，我們在此所討論的角度為外角。本論文光學系統的物體光為平面光波，記錄時於介質內與另一平面波(參考光波)干涉。由於本論文的讀取系統為圖 1.5，記錄系統為圖 1.6，將記錄、讀取分開來看，如圖 2.17 所示，先將圖 1.6 之記錄光平面波等效成點光源加一透鏡。 θ_{1m} 為透鏡 L1 之光軸與光柵元件對稱軸的夾角、 θ_{2m} 為透鏡 L 之光軸與光柵元件對稱軸的夾角，用於第 m 次記錄。而將圖 1.5 穿透式光譜儀系統表為圖 2.17 之讀取系統， θ_i 為固定的讀取光入射角、以任意波長 λ 讀取，並假設聚焦透鏡之橫向大小為無限大平面且入射的對稱軸皆在元件中心位置之理想情況，因而系統的輸

出使用近軸近似。令 θ_1 為初始的參考光記錄角、 θ_2 為初始的物體光記錄角，在此已經把讀取角度都假設於 $\theta_i = \theta_1$ ，故重建光會繞射到 θ_2 的方向去，因此輸出平面的對稱軸與 X 軸夾 θ_2 角，即可與物體光輸入平面對稱。

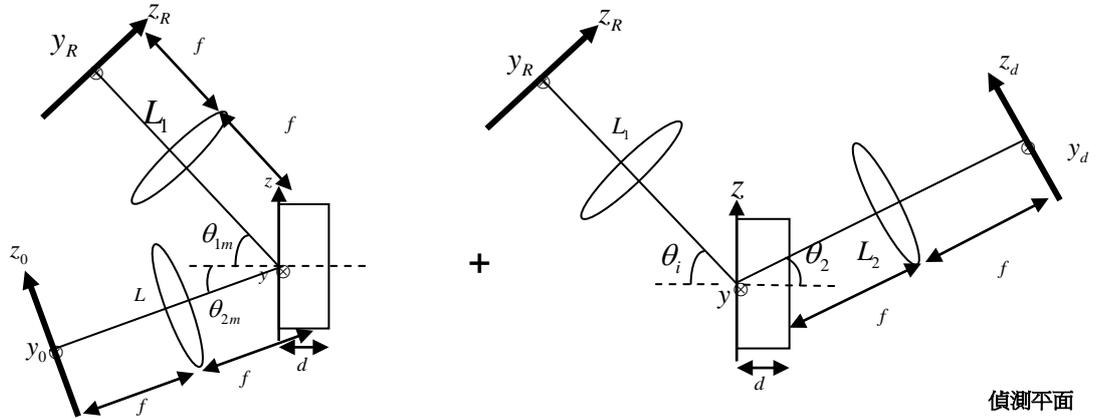


圖 2.17 全像光柵記錄系統、讀取系統

在此參考光平面波與物體光平面波為

$$\begin{aligned} R_m(\vec{r}) &= e^{-j\vec{k}_m \cdot \vec{r}} \\ S_m(\vec{r}) &= e^{-j\vec{k}_{0m} \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (2.73)$$

根據傅氏光學，參考光、物體光平面位置的點光源經透鏡 L_1 、 L 後，會形成平面波，參考光波向量為

$$\vec{k}_m = [k_{mx}, k_{my}, k_{mz}] \quad (2.74)$$

$$\begin{cases} k_{mx} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{y_m^2}{2f^2} - \frac{z_m^2}{2f^2} \right) \cos \theta_{1m} + \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{z_m}{f} \sin \theta_{1m} \\ k_{my} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{y_m}{f} \\ k_{mz} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{z_m}{f} \cos \theta_{1m} - \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{y_m^2}{2f^2} - \frac{z_m^2}{2f^2} \right) \sin \theta_{1m} \end{cases}$$

物體光波向量為

$$\vec{k}_{0m} = [k_{0mx}, k_{0my}, k_{0mz}] \quad (2.75)$$

$$\begin{cases} k_{0mx} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{y_{0m}^2}{2f^2} - \frac{z_{0m}^2}{2f^2} \right) \cos \theta_{2m} + \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{z_{0m}}{f} \sin \theta_{2m} \\ k_{0my} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{y_{0m}}{f} \\ k_{0mz} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{z_{0m}}{f} \cos \theta_{2m} + \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{y_{0m}^2}{2f^2} - \frac{z_{0m}^2}{2f^2} \right) \sin \theta_{2m} \end{cases}$$

為了積分運算的統一，(2.74)、(2.75)式的波向量是以(x, y, z)為參考座標系，視為座標 (x_R, y_R, z_R) 、 (x_0, y_0, z_0) 各自旋轉了 θ_{1m} 、 $-\theta_{2m}$ 角，而將原波向量表示成在(x, y, z)三個方向上的波向量分量。同理，讀取參考光的平面波向量可寫為

$$\vec{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z] \quad (2.76)$$

$$\begin{cases} \rho_x = \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 - \frac{y_R^2}{2f^2} - \frac{z_R^2}{2f^2} \right) \cos \theta_i + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_R}{f} \sin \theta_i \\ \rho_y = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y_R}{f} \\ \rho_z = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_R}{f} \cos \theta_i - \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 - \frac{y_R^2}{2f^2} - \frac{z_R^2}{2f^2} \right) \sin \theta_i \end{cases}$$

在近軸近似下，繞射光波可寫成

$$\vec{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z] \quad (2.77)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 - \frac{y_d^2}{2f^2} - \frac{z_d^2}{2f^2} \right) \cos \theta_2 + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_d}{f} \sin \theta_2 \\ \sigma_y = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y_d}{f} \\ \sigma_z = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_d}{f} \cos \theta_2 + \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 - \frac{y_d^2}{2f^2} - \frac{z_d^2}{2f^2} \right) \sin \theta_2 \end{cases}$$

令光柵的橫向大小為 $D = N\Lambda$ ，將(2.72)至(2.77)式代入(2.71)式中，可得輸出平面 (y_d, z_d) 上繞射圖樣的二維分布：

$$\begin{aligned}
g(y_d, z_d) &\propto \sum_{m=-M}^M \int_V dr' e^{j(\bar{\sigma}-\bar{\rho})\cdot\bar{r}'} \times R_m^* S_m \\
&= \sum_{m=-M}^M \int_V dr' e^{j\bar{\sigma}\cdot\bar{r}'} \times e^{j(\bar{k}_m-\bar{\rho})\cdot\bar{r}'} \times e^{-j\bar{k}_{0m}\cdot\bar{r}'} \\
&= \sum_{m=-M}^M \int_0^d dx e^{j(\sigma_x+k_{mx}-\rho_x-k_{0mx})x} \times \int_{-D/2}^{D/2} dy e^{j(\sigma_y+k_{my}-\rho_y-k_{0my})y} \times \int_{-D/2}^{D/2} dz e^{j(\sigma_z+k_{mz}-\rho_z-k_{0mz})z} \\
&= \sum_{m=-M}^M \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{rect}\left(\frac{x}{d}-\frac{d}{2}\right) e^{-j(-\sigma_x-k_{mx}+\rho_x+k_{0mx})x} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{rect}\left(\frac{y}{D}\right) e^{-j(-\sigma_y-k_{my}+\rho_y+k_{0my})y} \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \text{rect}\left(\frac{z}{D}\right) e^{-j(-\sigma_z-k_{mz}+\rho_z+k_{0mz})z} \\
&= \sum_{m=-M}^M D^2 d \times e^{-j(\sigma_x+k_{mx}-\rho_x-k_{0mx})d/2} \times \text{sinc}\left[\frac{d}{2\pi}(\sigma_x+k_{mx}-\rho_x-k_{0mx})\right] \\
&\quad \times \text{sinc}\left[\frac{D}{2\pi}(\sigma_y+k_{my}-\rho_y-k_{0my})\right] \times \text{sinc}\left[\frac{D}{2\pi}(\sigma_z+k_{mz}-\rho_z-k_{0mz})\right]
\end{aligned} \tag{2.78}$$

令 $V=D^2d$ ，於 (y_d, z_d) 上輸出的強度分布

$$\begin{aligned}
|g(y_d, z_d)|^2 &\propto V^2 \sum_{m=-M}^M \text{sinc}^2 \left\{ \frac{d}{\lambda f} \left[\begin{array}{l} \left(f \cos \theta_2 - \frac{y_d^2 + z_d^2}{2f} \cos \theta_2 + z_d \sin \theta_2 \right) \\ \left(-f \cos \theta_i + \frac{y_R^2 + z_R^2}{2f} \cos \theta_i - z_R \sin \theta_i \right) \\ \left(f \cos \theta_{1m} - \frac{y_m^2 + z_m^2}{2f} \cos \theta_{1m} + z_m \sin \theta_{1m} \right) \\ \left(-f \cos \theta_{2m} + \frac{y_{0m}^2 + z_{0m}^2}{2f} \cos \theta_{2m} - z_{0m} \sin \theta_{2m} \right) \end{array} \right] \right\} \\
&\quad \times \text{sinc}^2 \left\{ \frac{D}{\lambda f} \left[-y_d + y_R + \frac{\lambda}{\lambda_0} (-y_m + y_{0m}) \right] \right\} \\
&\quad \times \text{sinc}^2 \left\{ \frac{D}{\lambda f} \left[\begin{array}{l} \left(-z_d \cos \theta_2 + f \sin \theta_2 - \frac{y_d^2 + z_d^2}{2f} \sin \theta_2 + z_R \cos \theta_i + f \sin \theta_i - \frac{y_R^2 + z_R^2}{2f} \sin \theta_i \right) \\ \left(-z_m \cos \theta_{1m} - f \sin \theta_{1m} + \frac{y_m^2 + z_m^2}{2f} \sin \theta_{1m} + z_{0m} \cos \theta_{2m} - f \sin \theta_{2m} + \frac{y_{0m}^2 + z_{0m}^2}{2f} \sin \theta_{2m} \right) \end{array} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

上式的說明如下：已知 $\theta_i = \theta_1$ ，若對一張 $\theta_1 = \theta_2$ 的光柵而言，則 $\theta_i = \theta_2 = \theta_1$ ；可以代入驗證上式，當讀取波長為 λ_0 時，可以得到其繞射效率為1(歸一化)。仔細觀察上式函數，因為比起長寬， d 很小，所以主瓣半寬(即光點半徑)主要由第三個 sinc^2 函數項支配。

如圖 2.18 說明：

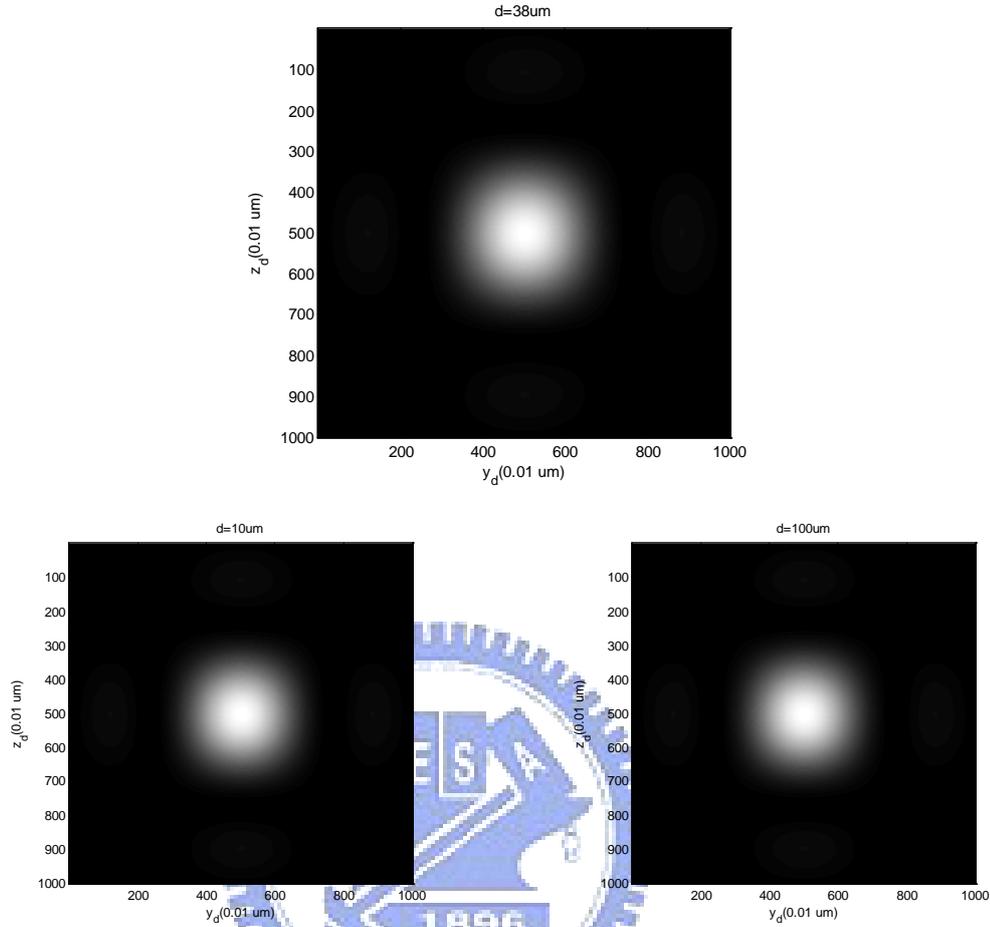


圖 2.18 厚度改變對光點大小的影響

上圖為設定， $\lambda_0 = 0.532\mu\text{m}$ 、 $\theta_1 = \theta_2 = 15^\circ$ ，取光柵厚度 10 μm 、38 μm 、100 μm ，觀察其光點變化。可以察覺厚度因子的改變，對於光點大小影響不大。故對波長 λ 的繞射光而言，其光點半徑大小為 $\frac{\lambda f}{D} \cos \theta_2$ ，則相鄰可分辨波長造成的 sinc 函數分布此光學極限制之 $(\Delta\lambda)_{\min}$ 可以寫成：

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\Delta z}{D_l} = \left(\frac{\lambda f}{N\Lambda} \cos \theta_2 \right) \bigg/ \left(\frac{f \sin \phi}{n_0 \Lambda \cos \theta_d} \right) = \frac{n_0 \lambda \cos \theta_d \cos \theta_2}{N \sin \phi} \quad (2.80)$$

而 CCD 的畫素大小限制系統解析度的推導為：

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\Delta}{D_l} = \frac{\Delta}{\left(\frac{f_2 \sin \phi}{n_0 \Lambda \cos \theta_d} \right)} = \frac{\Delta n_0 \Lambda \cos \theta_d}{f_2 \sin \phi} \quad (2.81)$$

故解析度為下式兩者較小者，

$$R \equiv \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = \begin{cases} \frac{f_2 \lambda \sin \phi}{\Lambda \Delta n_0 \cos \theta_d} \\ \frac{N \sin \phi}{n_0 \cos \theta_d \cos \theta_2} \end{cases} \quad (2.82)$$

但解析度的計算通常是哪一個？經由實際的數值代入(3.1.2節)，會發現對成像系統之解析度而言，其 $(\Delta\lambda)_{\min}$ 大於對光學解析度而言的 $(\Delta\lambda)_{\min}$ ，故解析度多以 $R = \frac{f_2 \lambda \sin \phi}{\Delta n_0 \Lambda \cos \theta_d}$

公式計算。



三、體積全像光柵色散光學元件之設計

關於體積全像光柵作為分光元件，本論文提供三種不同設計法則，其記錄原理皆將描述於下，並包含繞射結果的模擬。若用感光材料(HRF-150x001)作記錄，依此感光底片的規格，皆以光柵材料厚度 $d=38\mu\text{m}$ ，平均折射率 $n_0=1.5$ ，調制折射率 $n_1=1.4\times 10^{-3}$ ，光柵橫向大小 $D=2\text{cm}$ ，且以綠光(波長 $0.532\mu\text{m}$)記錄等等作計算。市售的 CCD 規格，若長寬大小 $8\text{mm} \times 6\text{mm}$ ，通常為 5 百萬像素，故一個畫素之大小以 $\Delta=3\mu\text{m}$ 計算。除了分光元件的參數，系統皆以等效焦距 $f_1=f_2=10\text{cm}$ ，CCD 畫素間距 $3\mu\text{m}$ 作計算。

3.1 設計原理 (一) -- 擬似波長多工

這個設計最根本的想法是為了可以將 θ_i 入射的不同波長 λ_i 色散到不同角度 $\theta_d(\lambda_i)$ ，所利用的方法是逐次改變記錄角度，以達到每一張光柵的布拉格波長之讀取限制，實行類似「波長多工」組合光柵的概念。

在進行詳細的分析前，我們先說明記錄的原理與讀取的過程。在全像記錄介質內，參考光入射角 θ_1 且物體光入射角 θ_2 以 λ_0 在介質記錄後，此時這張光柵若讀取光以 θ_1 入射，其布拉格繞射的中心波長為 λ_0 。由於此光柵元件設計之目的必須適合使各色光自相同方向入射來讀取，假設讀取光的入射角度 θ_i ，令 $\theta_i = \theta_1$ ，若以不同於 λ_0 的波長來讀取，則其繞射效率皆比 λ_0 波長之繞射效率來得低。令任何波長的讀取光於 θ_1 入射， λ_1 為讀取 \bar{K}_1 的中心波長，若以對第一張光柵 \bar{K}_1 繞射之繞射效率第一零點所對應到的波長

$\lambda_1 + \Delta\lambda_2$ 作為讀取第二張光柵 \bar{K}_2 的布拉格繞射中心波長 λ_2 ，經由改變原先記錄光入射角等條件記錄下第二張光柵 \bar{K}_2 ，則對 \bar{K}_2 繞射的中心波長： $\lambda_2 \equiv \lambda_1 + \Delta\lambda_2$ ，第 m 張光柵的中心波長以此類推。配合 λ_2 波長以 θ_1 入射 \bar{K}_2 所對應到的布拉格條件，就會發生圖 3.1 的繞射結果示意圖。這是於 k -space 下作圖的色散情形說明，簡言之，於 $\theta_i = \theta_1$ 入射的 λ_1 、 λ_2 各自與光柵 \bar{K}_1 、 \bar{K}_2 有布拉格條件的匹配，並且 λ_1 、 λ_2 附近的波長也有接近鋒值

的繞射效率，於不同的繞射角度發散出，這為組合光柵的色散原理。

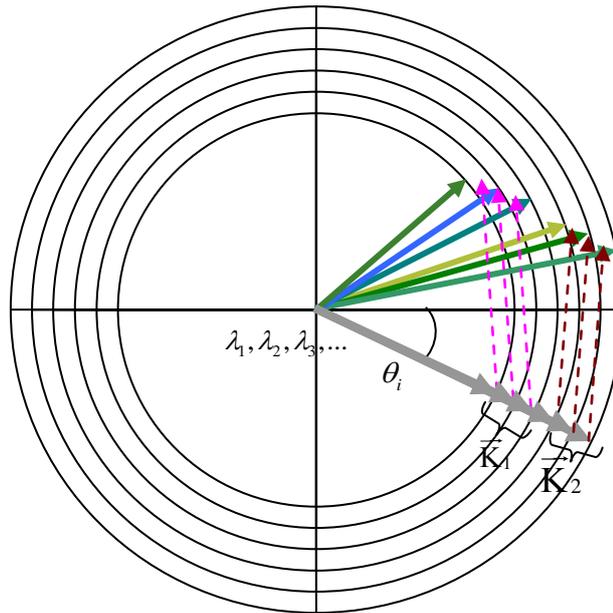


圖 3.1 組合光柵的色散向量

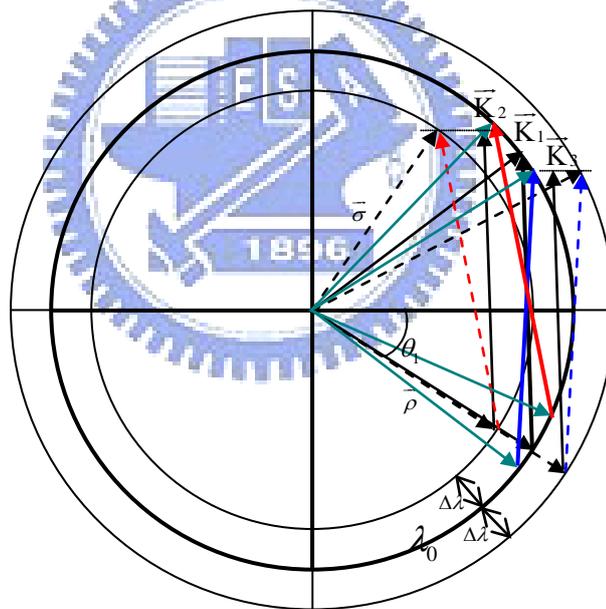


圖 3.2 擬似彩色體積全像記錄波向量圖

因為各不同的波長難以取得，我們不以各種波長記錄多張光柵來擴張頻譜範圍，而是利用「擬似彩色全像」的概念(pseudo-color hologram)，以單一波長變化不同的記錄角度，記下對應不同色散中心的各張光柵。記錄的原則如圖 3.2，我們只以單一波長 λ_0 來記錄，對 \bar{K}_1 這張光柵而言，其中心波長 $\lambda_1 = \lambda_0$ 。若以波長 $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ 於 θ_1 入射來讀取，則在介質的 x 軸向會產生一相位失配量 $\Delta\alpha$ ，故在對應於波長 $\lambda_0 + \Delta\lambda$ 的 k-space 圓

上我們畫出一張光柵 \overline{K}_2 。此時我們需要記錄這樣一張光柵，來補償發生相位失配的波長，使該波長可以繞射出。但我們無法以 $\lambda_0 + \Delta\lambda$ 波長以及後續的各中心波長 λ_m 來記錄組合每一張光柵，而只能以 λ_0 來記錄 \overline{K}_2 及後續需要的光柵 \overline{K}_m 。因此，將 \overline{K}_2 移至 λ_0 所對應到的圓上，可作出兩道新的記錄光，發現我們每一次記錄，必須同時改變參考光與物體光的角度。因此，我們需要找到第二次記錄的角度條件，作為產生一張與波長匹配的光柵的方法。令記錄波長固定為 λ_0 ，新的記錄參考光入射角為 $\theta_1' = \theta_1 - \Delta\theta_1$ 、新的記錄物體光入射角為 $\theta_2' = \theta_2 + \Delta\theta_2$ ，其中， $\Delta\theta_1$ 、 $\Delta\theta_2$ 為新記錄光較原記錄光角度的變化。由 2.1 小節的分析，以 λ_0 記錄、 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ 讀取(入射角 θ_i)，會滿足下式：

$$\begin{aligned} -\frac{2n_0\pi}{\lambda}\cos\theta_i + \frac{2n_0\pi}{\lambda}\cos\theta_d &= K_x = -\frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\cos\theta_1' + \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\cos\theta_2' \\ \frac{2n_0\pi}{\lambda}\sin\theta_i + \frac{2n_0\pi}{\lambda}\sin\theta_d &= K_z = \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\sin\theta_1' + \frac{2n_0\pi}{\lambda_0}\sin\theta_2' \end{aligned} \quad (3.1)$$

設 $\theta_i = \theta_1 = \theta_1' + \Delta\theta_1$ ，並利用幾何圖形作圖(圖 3.3)，可得到 $\theta_2' = \theta_d - \Delta\theta_1$ ，將上式移項並展開，而寫出：

$$\begin{aligned} \lambda_0[-\cos(\theta_1' + \Delta\theta_1) + \cos(\theta_2' + \Delta\theta_1)] &= (\lambda_0 + \Delta\lambda)(-\cos\theta_1' + \cos\theta_2') \\ \lambda_0[\sin(\theta_1' + \Delta\theta_1) + \sin(\theta_2' + \Delta\theta_1)] &= (\lambda_0 + \Delta\lambda)(\sin\theta_1' + \sin\theta_2') \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_0(\sin\theta_1' - \sin\theta_2')\Delta\theta_1 &= \Delta\lambda(-\cos\theta_1' + \cos\theta_2') \\ \lambda_0(\cos\theta_1' + \cos\theta_2')\Delta\theta_1 &= \Delta\lambda(\sin\theta_1' + \sin\theta_2') \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

由 2.1 小節的分析，記錄條件會滿足 $-\cos\theta_1' + \cos\theta_2' = \frac{\lambda_0}{n_0\Lambda'}\cos\phi'$ 、

$\sin\theta_1' + \sin\theta_2' = \frac{\lambda_0}{n_0\Lambda'}\sin\phi'$ ，將其代入(3.2.1)，則

$$\begin{aligned} \lambda_0(\sin\theta_1' - \sin\theta_2')\Delta\theta_1 &= \frac{\lambda_0}{n_0\Lambda'}\cos\phi'\Delta\lambda \\ \lambda_0(\cos\theta_1' + \cos\theta_2')\Delta\theta_1 &= \frac{\lambda_0}{n_0\Lambda'}\sin\phi'\Delta\lambda \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

經由運算如下：

光柵，此光柵皆為其 k-space 圓上的弦(\overline{AB} 、 \overline{CD})，角平分線 \overline{PQ} 會垂直平分等腰三角形 $\triangle OAB$ 及 $\triangle OCD$ 的底邊，又 $\angle POB = (\theta_1 + \theta_d)/2$ 且 $\angle QOC = (\theta_1' + \theta_2')/2$ 。已知大圓的半徑為 λ_0 的波數、小圓的半徑為 λ 的波數，且 $\triangle OPB$ 、 $\triangle OQC$ 兩直角三角形的股等長($\overline{PB} = \overline{QC}$)，故利用正弦關係，得到(3.5)式。我們可由(3.4)式與(3.5)式得到一角度關係的聯立方程式，為

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_d}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) \\ \theta_1 - \theta_1' &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\right) \tan\left(\frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

並解得

$$\theta_1' = \theta_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \tan\left\{\sin^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_d}{2}\right)\right]\right\} \quad (3.7.1)$$

並由 $\theta_2' = \theta_d + \theta_1' - \theta_1$ 之關係解得

$$\theta_2' = \theta_d + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \tan\left\{\sin^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_d}{2}\right)\right]\right\} \quad (3.7.2)$$

而其中 θ_d 先當作已知的量，如(2.39)式所述 $\theta_d = \theta_2 + \frac{\sin\phi}{n_0\Lambda \cos\theta_2} \Delta\lambda$ 與波長變化有關。

將(3.7)式作「第 m 張」光柵 (\overline{K}_m) 記錄的推廣。若要記錄一張色散中心波長為 $\lambda_m \equiv \lambda_0 + \Delta\lambda_{0m}$ 的光柵 (\overline{K}_m)，我們參考光的記錄角度為 $\theta_{1m} \equiv \theta_1 - \Delta\theta_{1m}$ ，物體光記錄角度為 $\theta_{2m} \equiv \theta_2 + \Delta\theta_{2m}$ 。其中， $\Delta\theta_{1m}$ 、 $\Delta\theta_{2m}$ 各自為記錄下所求「第 m 張」光柵之參考光、物體光入射角較「最原始記錄之參考光、物體光入射角」所需的變化。

令 $\lambda_1 = \lambda_0$ ， $\theta_{11} = \theta_1$ ，且 $\theta_{21} = \theta_2$ ，則

$$\begin{aligned} \theta_{1m} &= \theta_1 + \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_0}\right) \tan\left\{\sin^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda_m} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_{dm}}{2}\right)\right]\right\} \\ \theta_{2m} &= \theta_{dm} + \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_0}\right) \tan\left\{\sin^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda_m} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_{dm}}{2}\right)\right]\right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中， θ_{dm} 為 λ_m 於 θ_1 角度入射 \bar{K}_m 時得到的繞射角度，先當作已知的量。

若記錄光波長固定，對穿透式光柵而言，單一張光柵繞射效率之 sinc^2 函數的第一零點，可由下式推算得到

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{2} \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{c_R c_S} + \Delta \alpha^2} &= \pi \\
 \Rightarrow 4 \frac{n_1^2 \pi^2}{\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d(m-1)}} + \left(\frac{\pi}{n_0 \Lambda_{(m-1)}^2 \cos \theta_{2(m-1)}} \Delta \lambda_{(m-1)m} \right)^2 &= 4 \frac{\pi^2}{d^2} \\
 \Rightarrow \frac{n_1^2}{\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d(m-1)}} + \left(\frac{1}{2n_0 \Lambda_{(m-1)}^2 \cos \theta_{2(m-1)}} \Delta \lambda_{(m-1)m} \right)^2 &= \frac{1}{d^2} \\
 \Rightarrow \Delta \lambda_{(m-1)m} = \frac{2n_0 \Lambda_{(m-1)}^2 \cos \theta_{2(m-1)}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{d^2} - \frac{n_1^2}{\cos \theta_1 \cos \theta_{d(m-1)}}} &
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中， $\Delta \lambda_{(m-1)m} \equiv \lambda_m - \lambda_{(m-1)}$ 是針對 $\bar{K}_{(m-1)}$ 光柵入射而言，其為「繞射效率的第一零點與波長 $\lambda_{(m-1)}$ 的距離」，這是選取下一張(第 m 張)之波長改變量的依據。另外，若要求「對 $\bar{K}_{(m-1)}$ 繞射的第一零點與記錄光波長 λ_0 的距離」 $\Delta \lambda_{0m}$ ，則將(3.9)式的偏離量對張數連加：

$$\Delta \lambda_{0m} \equiv \lambda_m - \lambda_0 = \sum_{\substack{j=1 \\ (m \geq j)}}^{m-1} \frac{2n_0 \Lambda_j^2 \cos \theta_{2j}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{d^2} - \frac{n_1^2}{\cos \theta_1 \cos \theta_{dj}}} \tag{3.10}$$

故對 \bar{K}_m 繞射的中心波長 $\lambda_m = \lambda_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ (m \geq j)}}^{m-1} \frac{2n_0 \Lambda_j^2 \cos \theta_{2j}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{d^2} - \frac{n_1^2}{\cos \theta_1 \cos \theta_{dj}}}$ 。

再回到(3.8)式，對 \bar{K}_m 而言，式中

$$\theta_{dm} = \theta_{d(m-1)} + \frac{\sin \phi_{(m-1)}}{n_0 \Lambda_{(m-1)} \cos \theta_{2(m-1)}} \Delta \lambda_{(m-1)m} \tag{3.11}$$

將(3.9)式代入，則

$$\theta_{dm} = \theta_{d(m-1)} + 2\Lambda_{(m-1)} \sin \phi_{(m-1)} \sqrt{\frac{1}{d^2} - \frac{n_1^2}{\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d(m-1)}}} \tag{3.12}$$

為 λ_m 入射第 m 張光柵得到的繞射角度，是與 λ_m 對前一張之繞射角度有關的遞迴式。

3.1.1 分光元件記錄方法

上面已經說明若我們欲在同一介質內記下共 M 張光柵，則參考光角度需改變 M 次，物體光角度亦是。假設於介質外部，記下第 m 張光柵的記錄參考光入射角度為 θ_{1m} 、與第 m 張記錄物體光的入射角度 θ_{2m} ，可依(3.8)、(3.12)式作出下表數據。說明如下：

步驟一

我們以 $\lambda_0 = 0.532\mu\text{m}$ 記錄、布拉格角外角 $\theta_1 = 15^\circ$ 。設定 for 迴圈的起始值：初始的記錄參考光入射角設定為 15 度 ($\theta_{11} = \theta_1$)、初始物體光入射角設定為 15 度 ($\theta_{21} = \theta_2 = 15^\circ$)，且初始繞射光為初始物體光的重建，繞射角設定為 $\theta_{d1} = \theta_{21}$ 。初始波長改變量 $\Delta\lambda = 0$ ，將中心波長 $\lambda_m = \lambda_{(m-1)} + \Delta\lambda$ 也寫入同一個迴圈。以上設定則為表 3.1 的第五行。

步驟二

將第五行資料代入(3.12)式，則可運算 $\theta_{d2} = \theta_{d1} + 2\Lambda_1 \sin \phi_1 \sqrt{1/d^2 - n_1^2 / (\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d1})}$ 與中心波長 $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2$ 的數值。將輸出的數值代入(3.8)式，則可得另一組記錄參考光與物體光的角度數值，即 for 迴圈程式輸出的第二個參考光入射角數值 θ_{12} 與第二個物體光入射角數值 θ_{22} 等等，為第二筆資料，作為表 3.1 的第六行。

步驟三

將第六行資料再輸入(3.12)式，求得 $\theta_{d3} = \theta_{d2} + 2\Lambda_2 \sin \phi_2 \sqrt{1/d^2 - n_1^2 / (\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d2})}$ 與 $\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_{23}$ 的數值。將數值代回(3.8)式，則可得 for 迴圈輸出的第三筆資料，為表 3.1 的第七行，依此類推。

須注意的是，所得數據皆經過內角、外角的換算，將用於分析光柵元件的介質內部角度，均依折射定律換算為介質外部角度。寫程式時也要注意徑度與角度的互換。

表 3.1 參數模擬

m_th	記錄參考光入射角(DEG)	記錄物體光入射角(DEG)	條紋傾斜角(DEG)	條紋間距(um)
第一張	24.6171	5.7222	83.8441	1.0246
第二張	22.1739	8.0093	85.3785	1.0262
第三張	19.7568	10.3181	86.9172	1.0272
第四張	17.3651	12.6480	88.4584	1.0278
第五張	15	15	90	1.0277
第六張	12.6498	17.3669	91.5416	1.0277
第七張	10.3257	19.7636	93.0825	1.0268
第八張	8.0305	22.1917	94.6202	1.0249
第九張	5.7675	24.6529	96.1521	1.0219

依照上表，第一張以入射角為 24.62 度的參考光與入射角為 5.72 度的物體光來記錄，則產生一張條紋間距 Λ 為 1.025um 且傾斜角 ϕ 為 83.84 度的光柵。接著，須將參考光之角度變化成 22.17 度，且物體光的角度變為 8.01 度兩相干涉，產生另一張條紋間距 Λ 為 1.026um 且傾斜角 ϕ 為 85.34 度的光柵。記錄的順序依上表計算出的角度依次感光。在第五次記錄的時候，物體光的入射角度與參考光的入射角度相同，則產生一張條紋傾斜角 ϕ 為 90 度的「對稱型」光柵。

3.1.2 讀取波長色散情形模擬

表 3.2 系統參數

m_th	第一張	第二張	第三張	第四張	第五張	第六張	第七張	第八張	第九張
色散中心波長(um)	0.2036	0.2859	0.3682	0.4503	0.532	0.6137	0.695	0.7756	0.8554
線色散率(cm/um)	6.4837	6.5037	6.5272	6.5542	6.71581	6.6171	6.6548	6.6997	6.7527
系統解析度(nm)	0.0463	0.0461	0.0460	0.0458	0.0456	0.0453	0.0451	0.0448	0.0444

以這種方法記錄，於介質外 15 度入射，其第一張光柵可使 0.2036um 的波長有最大繞射效率，第二張光柵可使 0.2859um 的波長有最大繞射效率，依此類推。而對每張光柵而言，線色散率大約為 6.5cm/um，以 6mm x 8mm 的 CCD 偵測，解析度的理論值為 0.045nm 上下。我們以選取這些入射角組合九張光柵所能涵蓋的頻譜範圍，約為 200nm-900nm。

上節所述以這樣的方式記錄之下，讀取時，各色光於材料外部 15 度角入射，各波段的繞射效率如圖 3.4 分布，並依據繞射角度公式(2.33)式模擬出各波長繞射之發散角與繞射效率於附錄一。

圖 3.4 為九張光柵的繞射效率，效率之峰值的位置代表該光柵分光所對應的中心波長。一張光柵分光的頻寬約為 82nm。在這樣的記錄架構下，參照圖 3.4 與附錄一，我們以第五張光柵為例，光柵色散具最大繞射效率的中心波長即為 0.532 μm ，其繞射角之於 x 軸為 15 度，繞射效率為 0.09832。而與中心波長鄰近的 0.531 μm 與 0.533 μm 大小的波長，各發散到 14.94 度與 15.06 度的方位，繞射效率同為 0.09827。第五張光柵對波長大小 0.45 μm 及 0.614 μm 及其鄰近波長的繞射效率幾乎為零，故這些範圍的波長是分別利用第四張、第六張光柵來分光。入射後 0.45 μm 之於 x 軸的繞射角為 10.30 度，繞射效率為 0.09839；而 0.614 μm 的繞射角為 19.78 度，繞射效率為 0.09839。表 3.2 為套用此記錄方式的光柵其光柵光譜儀系統的分光能力數值資料，表中解析度為 CCD 平面上的光譜解析度。

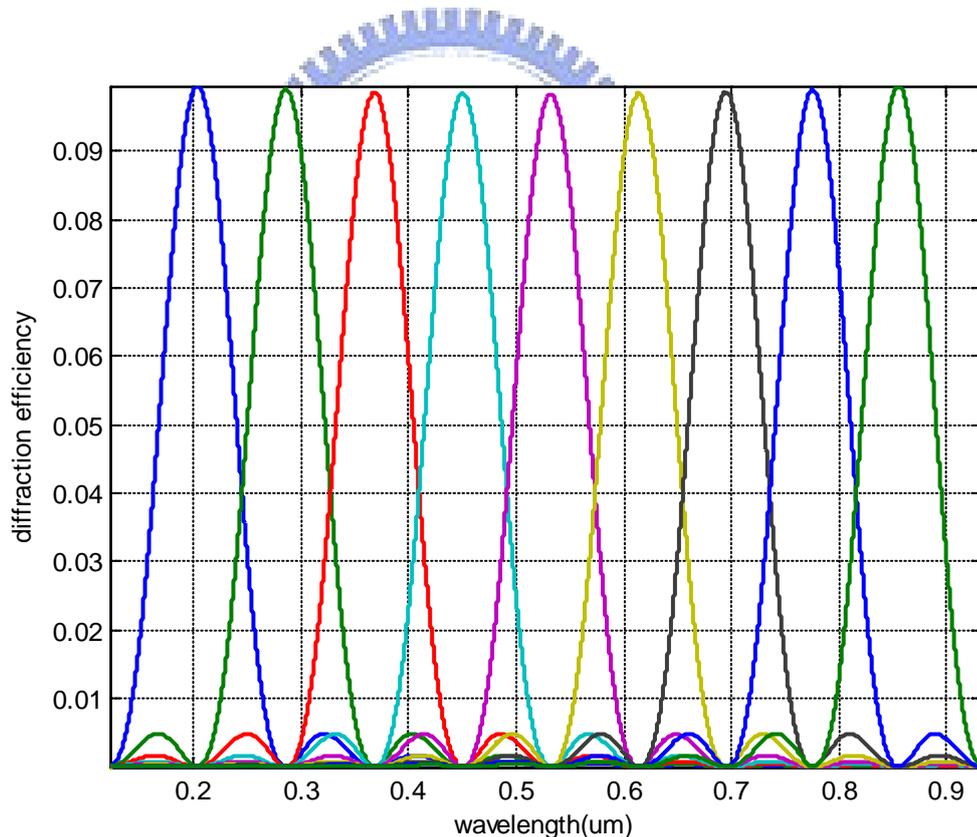


圖 3.4 設計方法（一）繞射效率與頻寬

將表 3.1 的參數代入(2.79)式電腦作圖，得到不同波長的繞射圖樣分布如圖 3.5，為 (y_d, z_d) 平面上各波長繞射光點所在的位置，區域中心點處為 $(0, 0)$ ，【a】至【d】每格

的刻度設定各有差異。圖【a】設定的參數為 $\theta_i = \theta_2 = 15^\circ$ 、 $\lambda = 0.532$ ，結果為 $0.532\mu\text{m}$ 波長在 $(0, 0)$ 位置的分布；圖【b】設定的參數為 $\theta_i = \theta_2 = 15^\circ$ 、 $\lambda = 0.5318\mu\text{m}$ ，其結果為 $0.5318\mu\text{m}$ 的波長在 $(0, -20\mu\text{m})$ 的位置；圖【c】設定的參數為 $\theta_i = \theta_2 = 15^\circ$ 、 $\lambda = 0.45\mu\text{m}$ ，結果位置在 $(0, -8000\mu\text{m})$ ；圖【d】設定的參數為 $\theta_i = \theta_2 = 15^\circ$ 、 $\lambda = 0.614$ ，繞射結果位置在 $(0, 8000\mu\text{m})$ 。由此可知不同波長的光點雖在同一平面但位置差距甚大，可藉由平移 CCD 位置或在同一平面上置放多組同規格的 CCD 來解決。

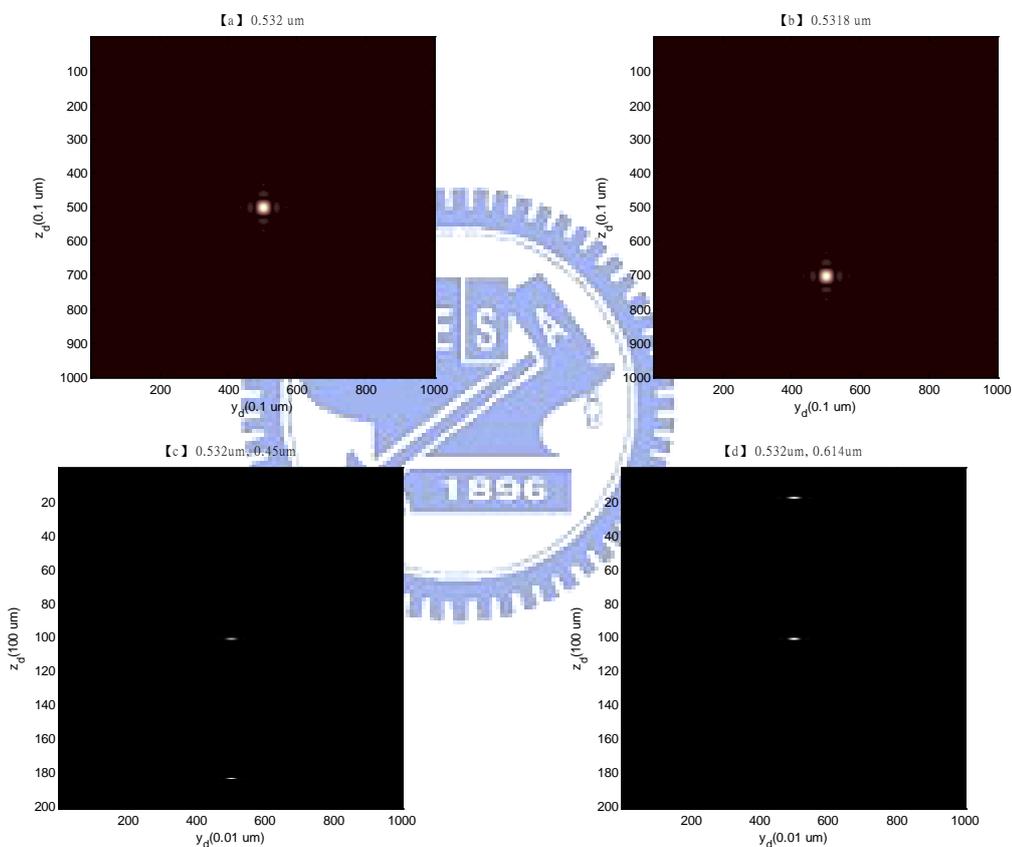


圖 3.5 不同波長在 CCD 平面上的繞射分布

此外，單一波長入射有可能繞射成兩個光點以上。舉例來說，由圖 3.4，波長 $0.491\mu\text{m}$ 對第四張光柵的繞射效率約 4%，對第五張光柵的繞射效率也是 4%，對相鄰的兩張光柵同時有繞射效率，卻會發散到不同的角度去(附錄一)。因而偵測平面上對不同波長而言，可能不只一個光點。如圖 3.6，為波長 $0.5\mu\text{m}$ 對該組合光柵的繞射圖樣，可以看到約在 $(0, -10\mu\text{m})$ 與 $(0, -3000\mu\text{m})$ 處有兩個繞射極大值。【註：縱軸的中心為原點，一個刻

度標記大小為 100 μm 。該座標(0, -3000 μm)的估計方法是：(130-100) x 100 μm 】

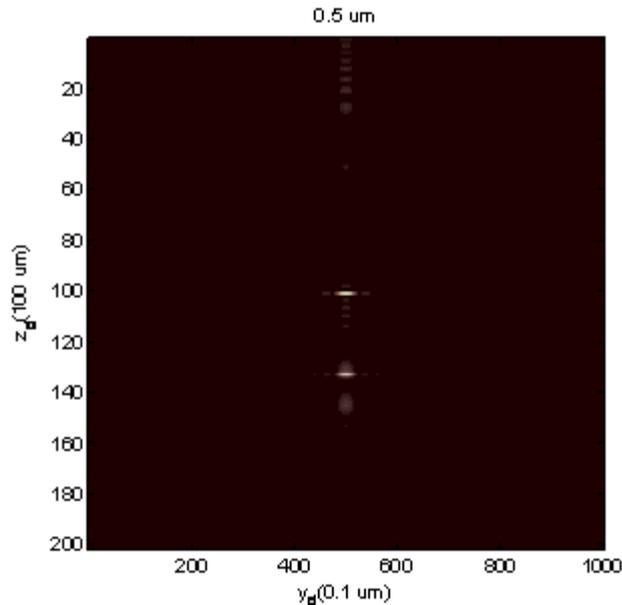


圖 3.6 0.5 μm 波長對相鄰兩張光柵的繞射分布

3.1.3 系統元件優缺點的評估

雖然各張組合的光柵各對應到其響應的波段，但相鄰的兩張組合光柵可色散的波長有重疊的部分。換句話說，這個問題即是針對特定波長而言，可以同時對「第 m 張」與「第 $(m+1)$ 張」光柵繞射。故這種設計方式有可能使單一頻率繞射成兩組圖樣(兩個光點以上)，但對一個光譜儀之系統功能來說，只要確知繞射點位於 CCD 上哪個位置，我們就得以推測出該光源是何種頻率。

這個設計的解析度不錯是一項優點。通常商用元件的全像光柵，因可以具有極高的條紋密度，光柵光譜儀的系統解析度通常在 0.1nm 上下。根據表 3.2，小角度的記錄方法可達到 0.045nm 的高解析光柵。

雖然以夾小角度的方式來記錄組合光柵的繞射效率峰值較低，但極大的波長選擇性頻寬使我們輕易涵蓋到、甚至超出於一般商用光譜儀的頻譜範圍。少張數的組合也可以讓全像材料的動態範圍不被消耗太多，有較佳的光柵強度。

3.2 設計原理（二）--零點重合法

承上節的設計方法，這次的設計原則是為了試著克服前者串音干擾的問題與增加繞射效率，所使用的方法目的在使對不同兩張光柵的繞射效率於峰值不同側的第一零點波長重合。並附帶嘗試以大角度記錄，縮小條紋之間距且提高繞射之峰值。讓第一零點重合的設計，可使相鄰兩張光柵之間的串化雜訊(crosstalk) 大大降低，入射時除了對符合布拉格條件的光柵繞射外，理論上很難對其他張光柵產生繞射，限制了各張間的干擾。若要使同一波長對兩張光柵皆不能繞射，則記錄的原則我們可把原本相鄰的三張光柵中間的一張抽掉不計，如下圖所示：

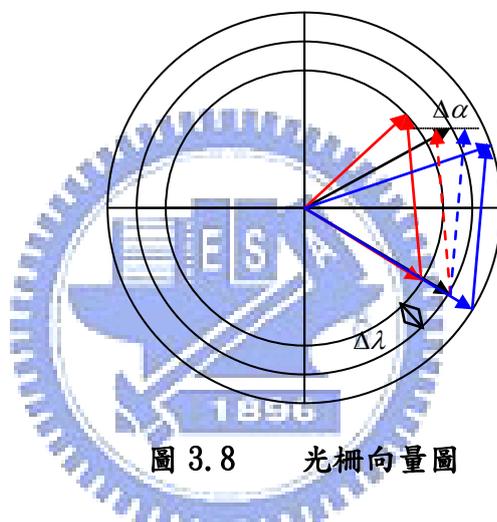


圖 3.8 光柵向量圖

三個中心波長原本各差 $\Delta\lambda$ ，將此相鄰的三張光柵抽掉中間一張 \bar{K}_c 不計，於是原本由 \bar{K}_c 繞射的中心波長 λ_c 對另外兩張光柵的繞射效率皆為零，而偵測不到 λ_c 波長的繞射光。

3.2.1 元件設計與結果模擬

若我們欲在同一介質內記下共 M 張光柵，則參考光角度需改變 M 次，物體光角度亦需改變 M 次。假設於介質外部，記下第 m 張光柵的記錄參考光入射角度為 θ_{1m} 、與第 m 張記錄物體光的入射角度 θ_{2m} ，可依(3.8)、(3.12)式作出下表數據：

步驟一

我們以 $\lambda_0 = 0.532\mu m$ 記錄、布拉格角外角 $\theta_1 = 60^\circ$ 。設定 for 迴圈的起始值：初始的記錄

參考光入射角設定為 60 度 ($\theta_{11} = \theta_1$)、初始物體光入射角設定為 60 度 ($\theta_{21} = \theta_2 = 60^\circ$)，且初始繞射光為初始物體光的重建，繞射角設定為 $\theta_{d1} = \theta_{21}$ 。初始波長改變量 $\Delta\lambda = 0$ ，將中心波長 $\lambda_m = \lambda_{(m-1)} + \Delta\lambda$ 也寫入同一個迴圈。以上設定不包括於表 3.3。

步驟二

將步驟一資料代入(3.12)式，則可運算 $\theta_{d2} = \theta_{d1} + 2\Lambda_1 \sin \phi_1 \sqrt{1/d^2 - n_1^2 / (\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d1})}$ 與中心波長 $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}$ 的數值。將輸出的數值代入(3.8)式，則可得另一組記錄參考光與物體光的角度數值，即 for 迴圈程式輸出的第二個參考光入射角數值 θ_{12} 與第二個物體光入射角數值 θ_{22} 等等。這為第一筆資料，作為表 3.3 的第八行。

步驟三

將第八行資料再輸入(3.12)式，求得 $\theta_{d3} = \theta_{d2} + 2\Lambda_2 \sin \phi_2 \sqrt{1/d^2 - n_1^2 / (\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d2})}$ 與 $\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_{23}$ 的數值。將數值代回(3.8)式，則可得 for 迴圈輸出的第二筆資料，但不鍵入表 3.3。將第二筆資料輸入(3.12)求 $\theta_{d4} = \theta_{d3} + 2\Lambda_3 \sin \phi_3 \sqrt{1/d^2 - n_1^2 / (\lambda_0^2 \cos \theta_1 \cos \theta_{d3})}$ 與 $\lambda_4 = \lambda_3 + \Delta\lambda_{34}$ 的數值。將數值代回(3.8)式，則可得 for 迴圈輸出的第三筆資料，為表 3.3 的第九行。隔行生效的填表數據資料，依此類推。

表 3.3 即為我們以選取這些入射角組合十四張光柵所能涵蓋的頻譜範圍：約為 450nm-650nm。若我們必須以達到 350nm-900nm 的分光範圍為目標，則我們必須以此方法組合 42 張光柵，則可涵蓋到這個頻譜範圍。

表 3.3 系統參數模擬

m_th	記錄參考光入射角(DEG)	記錄物體光入射角(DEG)	色散的中心波長(um)	線色散率(cm/um)
第一張	82.8347	47.5975	0.4512	24.915
第二張	76.6761	49.2819	0.4639	25.1368
第三張	72.5202	51.0319	0.4765	25.3698
第四張	69.1376	52.8557	0.4891	25.6149
第五張	66.1996	54.7637	0.5015	25.873
第六張	63.5609	56.7692	0.5138	26.1454
第七張	61.1425	58.8896	0.526	26.433
第八張	58.8897	61.1426	0.538	26.7347
第九張	56.7708	63.5616	0.55	27.0515
第十張	54.7699	66.2031	0.5618	27.3874
第十一張	52.8705	69.1491	0.5735	27.7436
第十二張	51.0605	72.5502	0.5849	28.1219
第十三張	49.3306	76.7489	0.5962	28.5236
第十四張	47.6735	83.0601	0.6073	28.9506

上表包括記錄方法與分光能力的度量參數。我們以 DuPont 的 HRF 材料參數與計算角度的作法，模擬出此方法記錄的角度條件，求得夾大角度（相較於前一節兩光之間夾角平均約為 30 度，上表兩記錄光之間的夾角皆約為 120 度）記錄後，光柵與系統的分光效果。經由電腦計算，這個記錄方法可達到的解析度為 0.01nm。

依 sinc^2 函數的特性，當兩記錄光的夾角變大，實際上於光柵內部的條紋間隔會縮小，讀取光的繞射效率會變高，即函數的峰值變大且寬度變窄，繞射效率對波長的變化亦更明顯地驟升驟降，如圖 3.9 的繞射效率分布。由圖可知有些頻率系統不能讀取出，如 520nm、532nm、544nm，其繞射效率明顯極低，因而可以判斷某些光源是屬於這些波長，亦是頻譜推測之準確性的一種依據。圖 3.9 配合附錄二，告訴我們若所有波長於介質外部角 $\theta_1 = 60^\circ$ 入射，對第七張和第八張光柵而言，0.526um 的波長會發散到 57.83 度的繞射角去，0.538um 的波長會發散到 62.31 度的繞射角，上述兩波長各為此兩張光柵的中心波長，繞射效率約 14%。然而，0.532um 波長理論上會繞射到 59.99 度的方位，但對第七張或第八張光柵的繞射效率皆趨近於零。

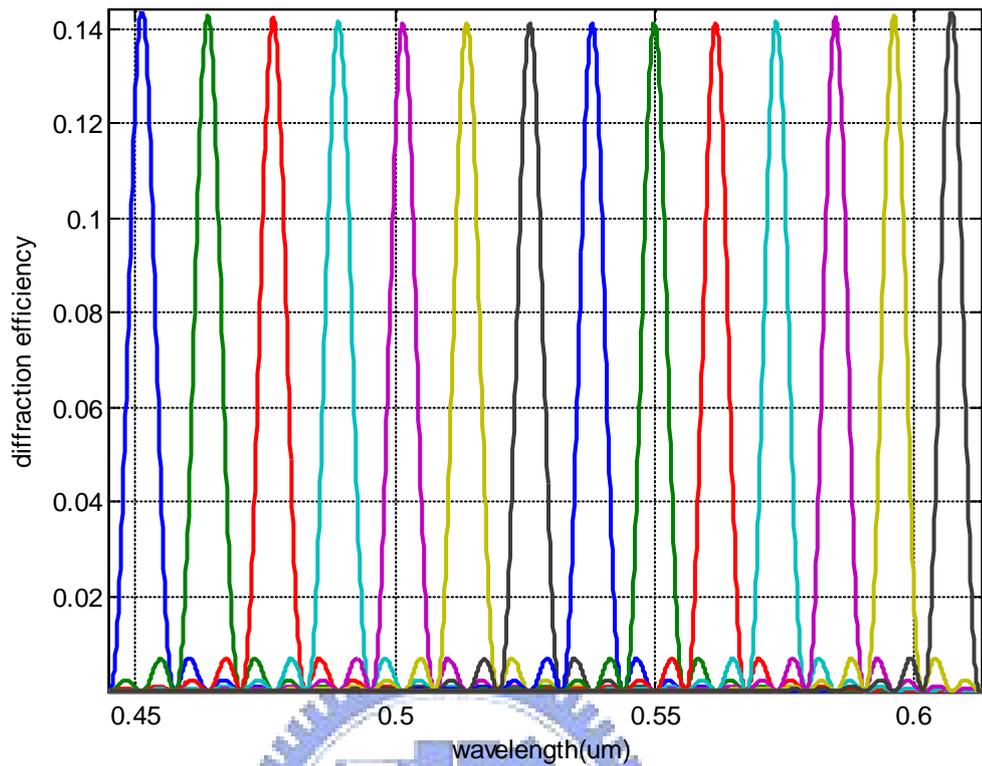


圖 3.9 設計方法 (二) 的繞射效率與頻寬

依上圖，一張光柵分光的頻寬約為 6nm，這種方法我們需要組合較多張光柵才能涵蓋到所要的頻譜範圍。大角度的記錄方式，則需要組合更多張光柵。圖 3.10 為兩不同波長對此光柵組合的繞射圖樣電腦作圖，參照表 3.3，圖(a)設定的參數為 $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ 、 $\lambda = 0.526$ 得到的繞射圖形；圖(b)設定的參數為 $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ 、 $\lambda = 0.538$ 得到的繞射圖形。由圖，此兩中心波長約相距 8000um。

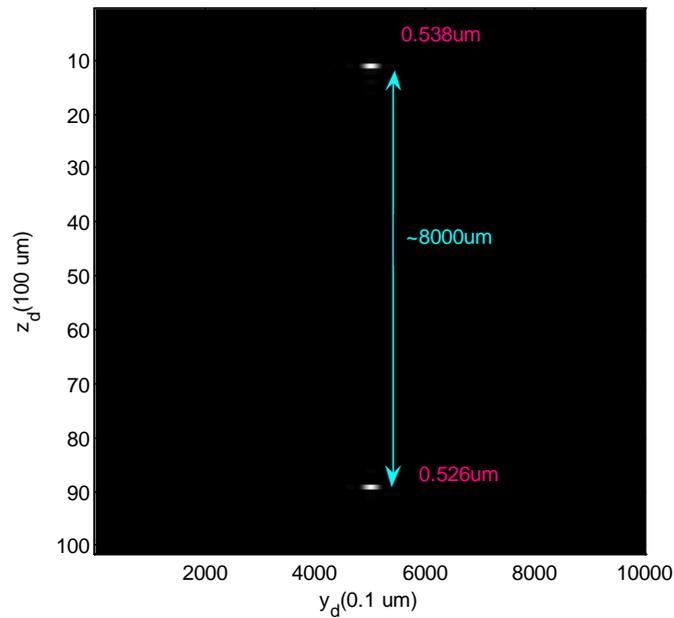


圖 3.10 波長 0.526 μm 與 0.538 μm 的繞射

3.2.2 優缺點評估

這種設計方法優點是有較高的繞射效率，且繞射效率大小隨波長的變化亦較明顯，鄰近的波長更容易被偵測元件分別。但由於波長選擇性的頻寬較小，我們需要組合更多張光柵才能達到較廣的頻譜範圍。

讓繞射第一零點重合，這樣的想法也有些缺點。其一為零點附近的波長，理論上為單一繞射，但繞射效率太小，可能偵測不出。另一缺點則是，若一個單頻光源入射至此組合光柵讀出的繞射效率為零，我們推測此光源可能是零點的波長，卻不能知道其波長是哪個零點。針對這個設計的小結論是：比較好的做法仍是讓所有光皆有繞射效率，確實讓所有波長都能讀取出，某些光源才得以分辨。

3.3 設計原理（三）--傾斜法

在這個設計原則裡，我們欲動用 y 軸向的記錄條件，將原本設計（一）侷限於 z 軸向上可能重疊的繞射光點，分隔到「高度」的維度去。設計的原則是欲使第 m 張組合光柵所響應的波長，剛好會繞射到 CCD 讀取介面的「第 m 列」上。在這個設計方法之中，我們將套用設計原理（一），將其做個改進。所用的方法簡言之，就是記錄時，使其中一道記錄波的光徑不平行於桌面，依據全像重建原理，我們則可以混合波長的重建光重建出多道具有傾斜度的繞射光而投射到偵測平面的不同列。

這裡我們仍將記錄參考光源固定於 $y=0$ 之平面，而記錄所用物體光源以一傾斜角入射及與參考光干涉，即第 m 次記錄物體光入射時對 $x-z$ 平面的傾斜角 $\varphi_{0m} \neq 0$ ，而 $\varphi_m = 0$ 。由公式(2.79)，若 φ_{0m} 不等於零則 y_{0m} 有值，將 $y_{0m} = -f \tan \varphi_{0m}$ 代入，求得表 3.4 的記錄參數與結果，此資料即為表 3.1、表 3.2 的延伸。

將參數 $\lambda = 0.45\mu m, 0.532\mu m, 0.614\mu m$ 代入，表 3.1 之第四張的傾斜度 $y_{04} = -20\mu m$ 、第六張的傾斜度 $y_{06} = 20\mu m$ ，與表中的記錄角度代入(2.79)式，將三個函數疊在同一張圖上，得到圖 3.11。



表 3.4 傾斜角參數

m_th	色散中心波長(um)	記錄物體光傾斜角(DEG)	像點與 CCD 平面中心點的距離(um)
第一張	0.2036	0.119535	-80
第二張	0.2859	0.0639469	-60
第三張	0.3682	0.0331319	-40
第四張	0.4503	0.0135473	-20
第五張	0.532	0	0
第六張	0.6137	-0.00992878	20
第七張	0.695	-0.0175432	40
第八張	0.7756	-0.0235681	60
第九張	0.8554	-0.0285206	80

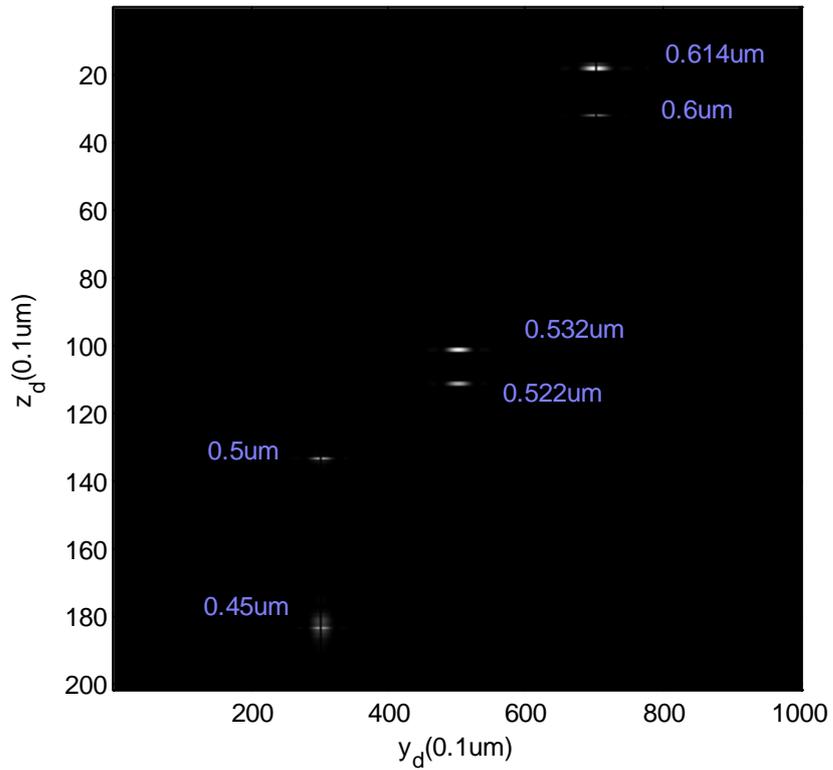


圖 3.11 0.45um、0.532um、0.614um 及其鄰近的波長繞射在 CCD 的平面上的不同列

四、結論

本文以體積全像光學元件的研究為主，以體積光柵的繞射特性及全像的記錄本質說明體積全像光柵製成分光元件，用來色散的結果預期分析。第一部份為光譜學地位與光譜儀之重要的簡介，分光光柵是光譜儀器的不可或缺元件，若分光元件以本實驗室研究的「體積全像」製作，將會有何優勢與需待克服的地方。

第二部分以應用數學理論分析了體積光柵所適用的原理。關於體積全像光柵的繞射，最常用理論就是 Kogelnik 的耦合波分析，以材料的物理性質與幾何形狀描述了體積光柵遵從高繞射效率與高重建精確度的工程上「等價交換」(trade-off)原則，並且這套理論也適合用來作為體積全像光學元件(VHOE)的設計基礎。

第二章之第一節描述穿透式光柵，記錄前、後全像介質固有的材料幾何(厚度、條紋等)及物理性質(折射率等)，角度或波長的選擇性會依據設定的光柵參數而有不可略的頻寬，再由遵從布拉格條件的相位匹配關係式出發，導出耦合波方程組及其色散關係式，代入邊界條件求解耦合波微分方程組，能得到與繞射效率有關的穿透式訊號光振幅，並跟從耦合波理論探討穿透式相位光柵與振幅光柵的不同，比較材料吸收率或其調制的有無對繞射光的影響。第二節由不同於穿透式光柵的邊界條件，雷同第一節的作法，推導出反射式光柵的繞射效率公式及色散發散關係。第三節裡，則以理論為根據，針對光譜分析儀去計算體積分光元件的色散能力。

本文的第三部分，為元件之設計重點。色散結果必須與整個光譜儀系統結合，與現有的 CCD 元件匹配。這些模擬可進一步作為設計體積全像多工組合光柵的基礎。

參考文獻

- [1] X. Yi, P. Yeh, C. Gu, and S. Campbell, " *Crosstalk in Volume Holographic Memory* " , Proc. IEEE, vol. 87, pp. 1912-1930, Nov 1999
- [2] E. Hecht, Optics, 4th, San Francisco, 2002
- [3] P. Yeh, Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1993
- [4] H. Kogelnik, " *Coupled Wave Theory for Thick Hologram Gratings* " , The Bell system technical journal, vol. 48, pp. 2909-2941, Sep 1969
- [5] L. Solymar, D. J. Cooke, Volume Holography and Volume Gratings, 5th, New York, 1981
- [6] B. C. Cho, H. B. Chung, E. S. Kim, " *Rotation-angularly Multiplexed Holographic Memory System using Moving Window and Double-Focusing Lens* " , Proc. SPIE, vol. 4659, pp. 205-210, 2002
- [7] 陳立偉, 「體積全像拉曼濾波片之研究」, 國立交通大學碩士論文, 民國 96 年
- [8] E. G. Loewen, E. Popov, Diffraction Gratings and Applications, New York, 1997
- [9] H. Gao, et al., " *Analysis on Diffraction Properties of the Transmission Phase Grating* " , Optik, vol. 118, pp. 452-456, Sep 2007
- [10] A. Yan, et al., " *Anisotropic Bragg Diffraction of Finite-Sized Volume Holographic Grating in Photorefractive Crystals* " , Optik, vol. 118, pp. 418-424, Sep 2007
- [11] 張博宇, 「PQ:PMMA 高分子全像片之製作與全像儲存特性的研究」, 國立交通大學碩士論文, 民國 93 年
- [12] L. Hesselink, S. S. Orlov, M. C. Bashaw, " *Holographic Data Storage System* " , Proc. IEEE, vol. 92, pp. 1231-1280, Aug 2004
- [13] 王瓊姿, 「波恩近似法則用於體積全像資訊記憶之探討」, 國立交通大學碩士論文, 民國 91 年

- [14]S. Blaya, L. Carretero, R.F. Madrigal, M. Ulibarrena, P. Acebal, A. Fimia, " *Photopolymerization Model for Holographic Gratings Formation in Photopolymers*" , Appl. Phys. B, vol.77, pp.639-662, 2003
- [15]K. Curtis, D. Psaltis, " *Recording of Multiple Holograms in Photopolymer Films*" , Applied Optics, vol.31, N.35, pp.7425-7428, Dec 1992
- [16]K.T. Weitzel, U.P. Wild, V.N. Mikhailov, V.N. Krylov, " *Hologram Recording in DuPont Photopolymer Films by use of Pulse Exposure*" , Optics Letters, vol.22, N.24, pp.1899-1901, Dec 1997
- [17]U.S. Rhee, et al., " *Dynamics of Hologram Recording in DuPont Photopolymer*" , Appl. Opt., vol.34, N.5, pp.846-853, Feb 1995



附錄

一、設計方法（一）的體積光柵繞射角度及繞射效率參數模擬：

{繞射角度(degree), 繞射效率}

wavelength(nm)	{degree, DE} for 4_th	{degree, DE} for 5_th	{degree, DE} for 6_th
368	5.68697		
369	5.74297		
370	{5.79898, 0.0000488827}		
371	{5.85499, 0.000121949}		
372	{5.91101, 0.00023044}		
373	{5.96704, 0.000376382}		
374	{6.02307, 0.000561758}		
375	{6.07911, 0.00078849}		
376	{6.13515, 0.00105844}		
377	{6.1912, 0.00137338}		
378	{6.24726, 0.00173503}		
379	{6.30332, 0.002145}		
380	{6.35938, 0.0026048}		
381	{6.41546, 0.00311585}		
382	{6.47154, 0.00367945}		
383	{6.52762, 0.00429676}		
384	{6.58371, 0.00496886}		
385	{6.63981, 0.00569666}		
386	{6.69592, 0.00648093}		
387	{6.75203, 0.00732232}		
388	{6.80815, 0.00822132}		
389	{6.86427, 0.00917824}		
390	{6.9204, 0.0101933}		
391	{6.97654, 0.0112664}		
392	{7.03268, 0.0123975}		
393	{7.08883, 0.0135862}		
394	{7.14499, 0.014832}		
395	{7.20116, 0.0161342}		
396	{7.25733, 0.017492}		
397	{7.31351, 0.0189043}		
398	{7.36969, 0.02037}		
399	{7.42589, 0.0218876}		

400	{7.48209, 0.0234556}		
401	{7.53829, 0.0250722}		
402	{7.59451, 0.0267355}		
403	{7.65073, 0.0284435}		
404	{7.70696, 0.0301938}		
405	{7.7632, 0.0319842}		
406	{7.81944, 0.033812}		
407	{7.87569, 0.0356745}		
408	{7.93195, 0.0375688}		
409	{7.98822, 0.039492}		
410	{8.04449, 0.0414408}		
411	{8.10078, 0.0434122}		
412	{8.15707, 0.0454025}		
413	{8.21337, 0.0474085}		
414	{8.26967, 0.0494264}		
415	{8.32599, 0.0514526}		
416	{8.38231, 0.0534833}		
417	{8.43864, 0.0555147}		
418	{8.49498, 0.057543}		
419	{8.55133, 0.059564}		
420	{8.60768, 0.061574}		
421	{8.66405, 0.0635688}		
422	{8.72042, 0.0655443}		
423	{8.7768, 0.0674967}		
424	{8.83319, 0.0694217}		
425	{8.88959, 0.0713155}		
426	{8.946, 0.073174}		
427	{9.00241, 0.0749932}		
428	{9.05884, 0.0767693}		
429	{9.11527, 0.0784984}		
430	{9.17171, 0.0801768}		
431	{9.22817, 0.0818007}		
432	{9.28463, 0.0833667}		
433	{9.3411, 0.0848712}		
434	{9.39757, 0.0863108}		
435	{9.45406, 0.0876824}		
436	{9.51056, 0.0889828}		

437	{9.56707, 0.0902091}		
438	{9.62358, 0.0913586}		
439	{9.68011, 0.0924285}		
440	{9.73664, 0.0934165}		
441	{9.79319, 0.0943203}		
442	{9.84974, 0.0951378}		
443	{9.9063, 0.0958672}		
444	{9.96288, 0.0965066}		
445	{10.0195, 0.0970547}		
446	{10.0761, 0.0975102}		
447	{10.1327, 0.097872}		
448	{10.1893, 0.0981393}		
449	{10.2459, 0.0983114}		
450	{10.3025, 0.098388}	10.3134	
451	{10.3592, 0.0983688}	10.3701	
452	{10.4158, 0.098254}	{10.4268, 0.0000456334}	
453	{10.4725, 0.0980437}	{10.4835, 0.000117039}	
454	{10.5292, 0.0977386}	{10.5402, 0.000224049}	
455	{10.5858, 0.0973392}	{10.5969, 0.000368721}	
456	{10.6425, 0.0968465}	{10.6536, 0.000553062}	
457	{10.6992, 0.0962617}	{10.7103, 0.000779023}	
458	{10.756, 0.0955861}	{10.7671, 0.00104849}	
459	{10.8127, 0.0948213}	{10.8238, 0.00136327}	
460	{10.8694, 0.0939691}	{10.8806, 0.0017251}	
461	{10.9262, 0.0930313}	{10.9374, 0.0021356}	
462	{10.9829, 0.0920103}	{10.9942, 0.00259633}	
463	{11.0397, 0.0909082}	{11.0509, 0.0031087}	
464	{11.0965, 0.0897277}	{11.1078, 0.00367405}	
465	{11.1533, 0.0884713}	{11.1646, 0.00429355}	
466	{11.2101, 0.0871421}	{11.2214, 0.00496829}	
467	{11.2669, 0.0857429}	{11.2782, 0.00569919}	
468	{11.3237, 0.084277}	{11.3351, 0.00648704}	
469	{11.3806, 0.0827475}	{11.392, 0.00733249}	
470	{11.4374, 0.0811579}	{11.4488, 0.00823602}	
471	{11.4943, 0.0795118}	{11.5057, 0.00919796}	
472	{11.5511, 0.0778127}	{11.5626, 0.0102185}	
473	{11.608, 0.0760643}	{11.6195, 0.0112976}	

474	{11.6649, 0.0742705}	{11.6765, 0.0124351}	
475	{11.7218, 0.0724351}	{11.7334, 0.0136307}	
476	{11.7787, 0.070562}	{11.7903, 0.0148839}	
477	{11.8357, 0.0686552}	{11.8473, 0.0161939}	
478	{11.8926, 0.0667188}	{11.9043, 0.0175599}	
479	{11.9496, 0.0647567}	{11.9612, 0.0189808}	
480	{12.0065, 0.0627729}	{12.0182, 0.0204554}	
481	{12.0635, 0.0607716}	{12.0752, 0.0219822}	
482	{12.1205, 0.0587567}	{12.1322, 0.0235598}	
483	{12.1775, 0.0567323}	{12.1893, 0.0251862}	
484	{12.2345, 0.0547023}	{12.2463, 0.0268596}	
485	{12.2915, 0.0526707}	{12.3034, 0.0285778}	
486	{12.3486, 0.0506413}	{12.3604, 0.0303385}	
487	{12.4056, 0.048618}	{12.4175, 0.0321393}	
488	{12.4627, 0.0466044}	{12.4746, 0.0339776}	
489	{12.5198, 0.0446043}	{12.5317, 0.0358506}	
490	{12.5769, 0.0426212}	{12.5888, 0.0377554}	
491	{12.634, 0.0406584}	{12.646, 0.0396889}	
492	{12.6911, 0.0387194}	{12.7031, 0.0416479}	
493	{12.7482, 0.0368074}	{12.7602, 0.0436292}	
494	{12.8053, 0.0349255}	{12.8174, 0.0456292}	
495	{12.8625, 0.0330766}	{12.8746, 0.0476445}	
496	{12.9197, 0.0312634}	{12.9318, 0.0496713}	
497	{12.9768, 0.0294888}	{12.989, 0.051706}	
498	{13.034, 0.0277551}	{13.0462, 0.0537447}	
499	{13.0912, 0.0260647}	{13.1034, 0.0557836}	
500	{13.1485, 0.0244198}	{13.1607, 0.0578186}	
501	{13.2057, 0.0228224}	{13.218, 0.0598457}	
502	{13.2629, 0.0212744}	{13.2752, 0.061861}	
503	{13.3202, 0.0197774}	{13.3325, 0.0638604}	
504	{13.3775, 0.0183329}	{13.3898, 0.0658396}	
505	{13.4348, 0.0169423}	{13.4471, 0.0677948}	
506	{13.4921, 0.0156066}	{13.5045, 0.0697217}	
507	{13.5494, 0.0143268}	{13.5618, 0.0716163}	
508	{13.6067, 0.0131038}	{13.6191, 0.0734746}	
509	{13.664, 0.0119381}	{13.6765, 0.0752925}	
510	{13.7214, 0.0108302}	{13.7339, 0.0770662}	

511	{13.7788, 0.00978028}	{13.7913, 0.0787918}	
512	{13.8361, 0.00878851}	{13.8487, 0.0804654}	
513	{13.8935, 0.00785478}	{13.9061, 0.0820833}	
514	{13.951, 0.00697888}	{13.9636, 0.0836421}	
515	{14.0084, 0.0061604}	{14.021, 0.0851381}	
516	{14.0658, 0.0053988}	{14.0785, 0.0865679}	
517	{14.1233, 0.00469339}	{14.136, 0.0879285}	
518	{14.1807, 0.00404332}	{14.1935, 0.0892166}	
519	{14.2382, 0.00344762}	{14.251, 0.0904293}	
520	{14.2957, 0.0029052}	{14.3085, 0.0915638}	
521	{14.3532, 0.00241481}	{14.3661, 0.0926176}	
522	{14.4108, 0.00197512}	{14.4236, 0.0935882}	
523	{14.4683, 0.00158466}	{14.4812, 0.0944732}	
524	{14.5259, 0.00124189}	{14.5388, 0.0952708}	
525	{14.5834, 0.000945156}	{14.5964, 0.095979}	
526	{14.641, 0.000692714}	{14.654, 0.0965962}	
527	{14.6986, 0.000482751}	{14.7116, 0.0971208}	
528	{14.7563, 0.000313383}	{14.7693, 0.0975518}	
529	{14.8139, 0.000182662}	{14.8269, 0.0978881}	
530	{14.8715, 0.0000885869}	{14.8846, 0.0981288}	
531	{14.9292, 0.0000291123}	{14.9423, 0.0982735}	
532	14.9869	{15., 0.0983217}	14.9905
533		{15.0577, 0.0982735}	15.0482
534		{15.1155, 0.0981288}	{15.1059, 0.0000396259}
535		{15.1732, 0.0978881}	{15.1636, 0.000107554}
536		{15.231, 0.0975518}	{15.2214, 0.000211253}
537		{15.2888, 0.0971208}	{15.2791, 0.000352819}
538		{15.3466, 0.0965962}	{15.3369, 0.000534298}
539		{15.4044, 0.095979}	{15.3947, 0.00075768}
540		{15.4622, 0.0952708}	{15.4525, 0.00102489}
541		{15.5201, 0.0944732}	{15.5104, 0.00133776}
542		{15.5779, 0.0935882}	{15.5682, 0.00169808}
543		{15.6358, 0.0926176}	{15.6261, 0.0021075}
544		{15.6937, 0.0915638}	{15.684, 0.00256759}
545		{15.7516, 0.0904293}	{15.7419, 0.00307983}
546		{15.8096, 0.0892166}	{15.7998, 0.00364555}
547		{15.8675, 0.0879285}	{15.8577, 0.00426598}

548		{15.9255, 0.0865679}	{15.9156, 0.00494221}
549		{15.9835, 0.0851381}	{15.9736, 0.0056752}
550		{16.0415, 0.0836421}	{16.0316, 0.00646574}
551		{16.0995, 0.0820833}	{16.0896, 0.00731451}
552		{16.1575, 0.0804654}	{16.1476, 0.00822199}
553		{16.2156, 0.0787918}	{16.2056, 0.00918854}
554		{16.2736, 0.0770662}	{16.2637, 0.0102143}
555		{16.3317, 0.0752925}	{16.3217, 0.0112994}
556		{16.3898, 0.0734746}	{16.3798, 0.0124435}
557		{16.4479, 0.0716163}	{16.4379, 0.0136463}
558		{16.5061, 0.0697217}	{16.496, 0.0149073}
559		{16.5642, 0.0677948}	{16.5542, 0.0162258}
560		{16.6224, 0.0658396}	{16.6123, 0.0176009}
561		{16.6806, 0.0638604}	{16.6705, 0.0190315}
562		{16.7388, 0.061861}	{16.7287, 0.0205163}
563		{16.797, 0.0598457}	{16.7869, 0.0220539}
564		{16.8553, 0.0578186}	{16.8451, 0.0236428}
565		{16.9135, 0.0557836}	{16.9033, 0.025281}
566		{16.9718, 0.0537447}	{16.9616, 0.0269665}
567		{17.0301, 0.051706}	{17.0199, 0.0286973}
568		{17.0884, 0.0496713}	{17.0781, 0.0304709}
569		{17.1468, 0.0476445}	{17.1365, 0.032285}
570		{17.2051, 0.0456292}	{17.1948, 0.0341367}
571		{17.2635, 0.0436292}	{17.2531, 0.0360233}
572		{17.3219, 0.0416479}	{17.3115, 0.0379418}
573		{17.3803, 0.0396889}	{17.3699, 0.0398891}
574		{17.4387, 0.0377554}	{17.4283, 0.0418619}
575		{17.4971, 0.0358506}	{17.4867, 0.0438569}
576		{17.5556, 0.0339776}	{17.5452, 0.0458706}
577		{17.6141, 0.0321393}	{17.6036, 0.0478992}
578		{17.6726, 0.0303385}	{17.6621, 0.0499392}
579		{17.7311, 0.0285778}	{17.7206, 0.0519866}
580		{17.7896, 0.0268596}	{17.7791, 0.0540376}
581		{17.8482, 0.0251862}	{17.8376, 0.0560883}
582		{17.9068, 0.0235598}	{17.8962, 0.0581346}
583		{17.9654, 0.0219822}	{17.9548, 0.0601724}
584		{18.024, 0.0204554}	{18.0134, 0.0621976}

585		{18.0826, 0.0189808}	{18.072, 0.0642061}
586		{18.1413, 0.0175599}	{18.1306, 0.0661937}
587		{18.2, 0.0161939}	{18.1893, 0.0681562}
588		{18.2587, 0.0148839}	{18.2479, 0.0700895}
589		{18.3174, 0.0136307}	{18.3066, 0.0719895}
590		{18.3761, 0.0124351}	{18.3654, 0.073852}
591		{18.4349, 0.0112976}	{18.4241, 0.0756731}
592		{18.4936, 0.0102185}	{18.4828, 0.0774486}
593		{18.5524, 0.00919796}	{18.5416, 0.0791748}
594		{18.6112, 0.00823602}	{18.6004, 0.0808477}
595		{18.6701, 0.00733249}	{18.6592, 0.0824637}
596		{18.7289, 0.00648704}	{18.7181, 0.084019}
597		{18.7878, 0.00569919}	{18.7769, 0.0855102}
598		{18.8467, 0.00496829}	{18.8358, 0.0869338}
599		{18.9056, 0.00429355}	{18.8947, 0.0882866}
600		{18.9646, 0.00367405}	{18.9536, 0.0895654}
601		{19.0235, 0.0031087}	{19.0125, 0.0907674}
602		{19.0825, 0.00259633}	{19.0715, 0.0918897}
603		{19.1415, 0.0021356}	{19.1305, 0.0929297}
604		{19.2005, 0.0017251}	{19.1895, 0.093885}
605		{19.2596, 0.00136327}	{19.2485, 0.0947533}
606		{19.3186, 0.00104849}	{19.3075, 0.0955327}
607		{19.3777, 0.000779023}	{19.3666, 0.0962212}
608		{19.4368, 0.000553062}	{19.4257, 0.0968172}
609		{19.496, 0.000368721}	{19.4848, 0.0973194}
610		{19.5551, 0.000224049}	{19.5439, 0.0977265}
611		{19.6143, 0.000117039}	{19.6031, 0.0980376}
612		{19.6735, 0.0000456334}	{19.6622, 0.098252}
613		19.7327	{19.7214, 0.098369}
614		19.7919	{19.7806, 0.0983886}
615			{19.8399, 0.0983105}
616			{19.8991, 0.098135}
617			{19.9584, 0.0978625}
618			{20.0177, 0.0974937}
619			{20.0771, 0.0970294}
620			{20.1364, 0.0964708}
621			{20.1958, 0.0958191}

622			{20.2552, 0.0950758}
623			{20.3146, 0.0942429}
624			{20.374, 0.0933221}
625			{20.4335, 0.0923157}
626			{20.493, 0.091226}
627			{20.5525, 0.0900556}
628			{20.612, 0.0888071}
629			{20.6716, 0.0874836}
630			{20.7311, 0.0860879}
631			{20.7907, 0.0846234}
632			{20.8504, 0.0830933}
633			{20.91, 0.0815012}
634			{20.9697, 0.0798506}
635			{21.0294, 0.0781453}
636			{21.0891, 0.076389}
637			{21.1489, 0.0745856}
638			{21.2086, 0.0727392}
639			{21.2684, 0.0708537}
640			{21.3282, 0.0689332}
641			{21.3881, 0.0669819}
642			{21.4479, 0.0650039}
643			{21.5078, 0.0630032}
644			{21.5677, 0.0609842}
645			{21.6277, 0.058951}
646			{21.6877, 0.0569076}
647			{21.7476, 0.0548582}
648			{21.8077, 0.0528068}
649			{21.8677, 0.0507575}
650			{21.9278, 0.048714}
651			{21.9879, 0.0466804}
652			{22.048, 0.0446603}
653			{22.1081, 0.0426575}
654			{22.1683, 0.0406754}
655			{22.2285, 0.0387175}
656			{22.2887, 0.036787}
657			{22.3489, 0.0348873}
658			{22.4092, 0.0330213}

659			{22.4695, 0.0311918}
660			{22.5298, 0.0294017}
661			{22.5902, 0.0276535}
662			{22.6506, 0.0259496}
663			{22.711, 0.0242922}
664			{22.7714, 0.0226834}
665			{22.8318, 0.0211251}
666			{22.8923, 0.019619}
667			{22.9528, 0.0181665}
668			{23.0134, 0.0167691}
669			{23.0739, 0.0154278}
670			{23.1345, 0.0141437}
671			{23.1951, 0.0129176}
672			{23.2558, 0.0117499}
673			{23.3165, 0.0106412}
674			{23.3772, 0.00959175}
675			{23.4379, 0.00860151}
676			{23.4987, 0.00767043}
677			{23.5594, 0.00679823}
678			{23.6203, 0.00598447}
679			{23.6811, 0.00522855}
680			{23.742, 0.00452972}
681			{23.8029, 0.0038871}
682			{23.8638, 0.00329963}
683			{23.9247, 0.00276615}
684			{23.9857, 0.00228537}
685			{24.0467, 0.00185586}
686			{24.1078, 0.0014761}
687			{24.1689, 0.00114446}
688			{24.23, 0.000859198}
689			{24.2911, 0.000618513}
690			{24.3523, 0.000420508}
691			{24.4134, 0.00026322}
692			{24.4747, 0.000144623}
693			{24.5359, 0.0000626405}
694			{24.5972, 0.000015152}
695			24.6585

二、設計方法（二）的體積光柵繞射角度及繞射效率參數模擬：

wavelength(nm)	{degree, DE} for7_th	{degree, DE} for8_th
520	{55.7819, 0.0000192627}	
521	{56.115, 0.00588755}	
522	{56.4511, 0.0255214}	
523	{56.7901, 0.0586631}	
524	{57.1323, 0.0974118}	
525	{57.4776, 0.128812}	
526	{57.8262, 0.140894}	
527	{58.1782, 0.128812}	
528	{58.5338, 0.0974118}	
529	{58.893, 0.0586631}	
530	{59.2559, 0.0255214}	
531	{59.6228, 0.00588755}	
532	{59.9937, 0.0000192627}	59.9939
533		{60.3691, 0.00521545}
534		{60.7486, 0.0243003}
535		{61.1326, 0.0573711}
536		{61.5214, 0.0965567}
537		{61.9151, 0.128545}
538		{62.3139, 0.140894}
539		{62.7181, 0.128545}
540		{63.1279, 0.0965567}
541		{63.5435, 0.0573711}
542		{63.9653, 0.0243003}
543		{64.3936, 0.00521545}
544		64.8287