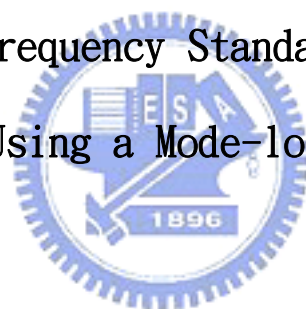


國立交通大學
光電工程研究所
碩士論文

以鎖模光纖雷射在光纖上同時傳遞微波和
光波頻率標準之研究

Study on Simultaneously Transferring Microwave and
Optical Frequency Standard Through
Optical Fiber Using a Mode-locked Fiber Laser



研究生：康峻維
指導教授：潘犀靈 教授
彭錦龍 博士

中華民國九十七年七月

以鎖模光纖雷射在光纖上同時傳遞微波和
光波頻率標準之研究

Study on Simultaneously Transferring Microwave and
Optical Frequency Standard Through
Optical Fiber Using a Mode-locked Fiber Laser

研究生：康峻維

Student : Chun-Wei Kang

指導教授：潘犀靈

Advisor : Prof. Ci-Ling Pan

彭錦龍

Dr. Jin-Long Peng



碩士論文

A Thesis
Submitted to Institute of Electro-Optical Engineering College of
Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of
Master
In Electro-Optical Engineering
July 2008
Hsin-chu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月

以鎖模光纖雷射在光纖上同時傳遞微波和 光波頻率標準之研究

研究生：康峻維 指導教授：潘犀靈 教授

彭錦龍 博士

國立交通大學光電研究所

摘要

鎖模雷射已經廣泛的應用在光頻率計量上，此論文即是研究利用鎖模光纖雷射在光纖上同時傳遞微波和光波頻率標準。論文中，實驗架構最主要分成兩個部分，第一部份是在光纖上利用鎖模光纖雷射傳遞微波頻率標準，鎖模光纖雷射輸出的微波頻率標準，頻率穩定度在積分時間為 1 秒時可以達到 1.9×10^{-13} ，經過連接工研院及清華大學間的 1.5 km 光纜傳遞微波頻率導致頻率不穩定度約為 10^{-14} (積分時間為 1 秒時)；第二部分即是在光纖上利用鎖模光纖雷射傳遞光波頻率標準，頻率穩定度在積分時間為 1 秒時可以達到 7.5×10^{-15} 。

Study on Simultaneously Transferring Microwave and Optical Frequency Standard Through Optical Fiber Using a Mode-locked Fiber Laser

Student : Chun-Wei Kang Advisor : Prof. Ci-Ling Pan

Dr. Jin-Long Peng

**Institute of Electro-Optical Engineering College of Electrical
Engineering and Computer Science Nation Chiao Tung University**



Mode-locked lasers have large applications to optical frequency metrology. In this thesis, I study on simultaneously transferring microwave and optical frequency standard through optical fiber using a mode-locked fiber laser. The experiment is divided into two parts. The first part describes the transferring microwave frequency standard through optical fiber using a mode-locked fiber laser, the instability at 1 s for the output of the microwave frequency standard with the comb itself is about 1.9×10^{-13} . The instability for transfer of microwave frequency standard with the comb through CMS-NTHU 1.5km-long fiber cable causes about 10^{-14} for a 1 s averaging time ; The second part describes the transferring optical frequency standard through optical fiber using a mode-locked fiber laser, this provides an instability at 1 s of 7.5×10^{-15} .

誌謝

終於完成這本論文了，回想起這兩年研究生生涯學習到的所有事情，實在是讓我成長許多。首先我要感謝指導教授潘犀靈老師在這兩年的指導提攜，感謝您在實驗及課業上教導我正確的觀念；以及工研院彭錦龍博士這一年的細心教誨，感謝您總是不厭其煩的指導我，讓我在理論和實作上都獲益良多。此外，劉子安學長在實驗過程中的幫助和意見，安惠榮老師在 meeting 時給予的寶貴意見也都惠我良多。也要特別感謝工研院光復分院量測中心提供了我寶貴的實驗儀器及環境，讓我可以順利完成實驗。當然很慶幸我身邊有許多好朋友陪我度過這兩年的研究生生涯，挑男友眼光很獨特又講英文很做作的綿姐，還好有你一直卡在我前面，讓我不致於做這一屆最老的碩士生；畢業生最閒代表又很敢來給我媽請的新聞，還好有你陪我臉也爛掉，讓我美容資訊可以不斷更新，順利拿到美容博士學位；很喜歡羊卻又超愛吃羊肉的咩咩娜，還好有你提供竹北避風港，不然還真不知道不逛街不唱歌看電影還能去哪裡；msn 暱稱永遠很無趣的冬山河，還好有你的粉紅色襯衫，讓我在口試時可以帥氣登場，迷倒眾生；跟神經病沒兩樣的好姐姐靖純，還好有你提供小道消息讓我沒有錯失太多好康；髮量超級多的翁，還好跑跑卡丁車有你在後面墊底，讓我不致於被罵太慘，會提到你我也很驚訝，可見我真的快沒朋友了；還有我的超級好朋友寶貝，有你的支持讓我有動力快把事情做完去陪你，希望我們寶貴的情誼可以一直維持下去。也要感謝我家外面的兩隻野喵小黃跟小黑，雖然你們真的很會吃又很愛磨蹭，但你們讓遠在新竹的我不致於擔心媽媽平常太無聊。

最後，我也感謝我最親愛的媽媽、爸爸、哥哥，在我求學過程中一直給我關心及金錢援助，讓我沒有後顧之憂，順利完成碩士學位，我永遠愛你們。在天上的甜甜、嘟嘟、大寶、小寶、來旺，哥哥也永遠愛你們。

目錄

中文摘要

英文摘要

誌謝

目錄

圖表目錄

第一章	緒論	1
1-1	研究背景	1
1-2	研究構想及動機	3
1-3	論文架構	4
第二章	光梳頻基本原理及頻率穩定度量測方法	6
2-1	飛秒光梳頻的基本原理及應用	6
2-1.1	被動鎖模摻鉍光纖雷射的鎖模原理	6
2-1.2	鎖模雷射的頻譜	10
2-1.3	飛秒雷射和光纖展頻	11
2-2	頻域上量測時序紊亂度(相位雜訊)	14
2-2.1	鎖模雷射時序紊亂度(相位雜訊)的分析	15
2-2.2	被動鎖模雷射時序紊亂度(相位雜訊)的量測方法	19
2-3	時域上量測頻率穩定度:Allan deviation	21
2-4	鎖模光纖雷射的實際製作	22
第三章	在光纖上利用鎖模光纖雷射傳遞微波頻率標準	24
3-1	鎖相迴路基本原理及其架構	24

3-2	低雜訊微波頻率源的基本原理與製作	33
3-3	實驗方法與結果討論	37
3-3.1	脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 的穩頻	37
3-3.2	頻域上量測相位雜訊	38
3-3.3	時域上量測頻率穩定度: Allan deviation	45
3-3.4	相位雜訊與 Allan deviation 的換算	52
第四章	在光纖上利用鎖模光纖雷射傳遞光波頻率標準	55
4-1	迴授電路	56
4-2	拍頻訊號	60
4-3	實驗方法與結果討論	63
4-3.1	偏差頻率 f_o (offset frequency) 的穩頻	63
4-3.2	量測飛秒光梳頻系統傳遞光波頻率的基本理論	63
4-3.3	拍頻量測	64
4-3.4	外腔式二極體雷射穩頻實驗方法與架構	66
4-3.5	頻域上量測相位雜訊	68
4-3.6	時域上量測頻率穩定度: Allan deviation	72
4-3.7	相位雜訊與 Allan deviation 的換算	75
第五章	總結與未來展望	77

參考資料

圖表目錄

【圖 2-1】疊加波鎖模機制	8
【圖 2-2】非線性偏振旋轉示意圖	9
【圖 2-3】鎖模雷射輸出在時域和頻域的關係	11
【圖 2-4】“f-2f self-referencing” 實驗原理	12
【圖 2-5】鈦藍寶石雷射利用之“f-2f self-referencing” 實驗架構	13
【圖 2-6】飛秒光纖雷射利用之“Single-Beam f-2f” 實驗架構	13
【圖 2-7】飛秒光纖雷射以及光纖展頻後的頻譜	14
【圖 2-8】時序紊亂度示意圖	18
【圖 2-9】Allan deviation 斜率對應雜訊類型示意圖	22
【圖 2-10】鎖模光纖雷射實驗系統圖	23
【圖 3-1】脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 穩頻區塊示意圖	24
【圖 3-2】鎖相迴路(PLL)的基本區塊	25
【圖 3-3】鎖相迴路線性模型圖	26
【圖 3-4】類比式相位偵測器工作原理示意圖	28
【圖 3-5(a)】被動式的迴路濾波器	31
【圖 3-5(b)】主動式的迴路濾波器	31
【圖 3-6】恆溫控制式晶體振盪器的工作原理區塊圖	34
【圖 3-7】低雜訊微波頻率源工作原理區塊圖	35
【圖 3-8】五倍頻電路圖	35
【圖 3-9】各種穩定輸出頻率源的相位雜訊比較圖	36
【圖 3-10】100 MHz OCXO 鎖相 10 MHz OCXO 後系統相位雜訊走向示意圖	36
【圖 3-11】clock stability	36
【圖 3-12】脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 穩頻架構圖	37
【圖 3-13】頻域量測鎖模光纖雷射相位雜訊架構圖	38

【圖 3-14】鎖模光纖雷射相位雜訊及累積相位紊亂度圖	39
【圖 3-15】連接工研院 16 館 229 室及國立清華大學物理館 307 室間的光纜路線圖	40
【圖 3-16】鎖模光纖雷射經光纜傳回工研院後相位雜訊以及累積相位紊亂度圖	41
【圖 3-17】鎖模光纖雷射經 4.5 km fiber 及光纜傳回工研院後相位雜訊以及累積相位紊亂度圖	42
【圖 3-18】鎖模光纖雷射經 4.5 km + 2.5 km fiber 及光纜傳回工研院後相位雜訊以及累積相位紊亂度圖	43
【圖 3-19】各種情形的相位雜訊比較圖(0.1 Hz ~ 50 Hz)	43
【圖 3-20】各種情形的相位雜訊比較圖(0.1 Hz ~ 104 KHz)	44
【圖 3-21】手動外加一振動後相位雜訊比較圖	45
【圖 3-22】時域量測穩頻後的脈衝重複頻率變化架構圖	46
【圖 3-23】測量系統量測極限架構圖	47
【圖 3-24】頻率穩定度系統量測極限	47
【表 3-1】調整光偵測器角度來改變入射光強度所量得的重複頻率穩定度變化	48
【圖 3-25】穩頻後的脈衝重複頻率變化以及其 Allan deviation	49
【圖 3-26】同時量測穩頻後的脈衝重複頻率變化架構圖	50
【圖 3-27】穩頻後經光纜傳回後的脈衝重複頻率變化及其 Allan deviation	50
【圖 3-28】穩頻後經 4.5 km fiber 及光纜傳回後的脈衝重複頻率變化及其 Allan deviation	50
【圖 3-29】穩頻後經 4.5 km + 2.5 km fiber 及光纜傳回後的脈衝重複頻率變化及其 Allan deviation	51
【圖 3-30】穩頻後各種情形的脈衝重複頻率 Allan deviation 比較圖	51
【圖 3-31】各種情形的相位雜訊經公式換算後得到的 Allan deviation 圖	54
【圖 4-1】偏差頻率 f_o (offset frequency) 穩頻區塊示意圖	55

【圖 4-2】 AD9901 結構圖	56
【圖 4-3】 鎖相狀況圖	57
【圖 4-4】 鎖相狀況圖震盪源領先參考源時	57
【圖 4-5】 鎖相狀況圖震盪源落後參考源時	58
【圖 4-6】 震盪頻率遠小於參考頻率時的輸出	58
【圖 4-7】 震盪頻率遠大於參考頻率時的輸出	59
【圖 4-8】 震盪頻率與參考頻率相同時的輸出	59
【圖 4-9】 拍頻現象	61
【圖 4-10】 拍頻訊號示意圖	62
【圖 4-11】 偏差頻率 f_o (offset frequency) 穩頻架構圖	63
【圖 4-12】 脈衝示意圖(上圖為經過光纜後傳回的雷射脈衝；下圖為未經過光纜的雷射脈衝)	64
【圖 4-13】 外腔式二極體雷射與飛秒光梳拍頻訊號圖	65
【圖 4-14】 外腔式二極體雷射與經過光纜傳回後的飛秒光梳拍頻訊號圖	66
【圖 4-15】 外腔式二極體雷射穩頻實驗架構圖	67
【圖 4-16】 參考訊號	67
【圖 4-17】 外腔式二極體雷射穩頻時與飛秒光梳拍頻訊號圖	68
【圖 4-18】 傳遞光波頻率標準架構圖	68
【圖 4-19】 頻域上量測傳遞光波頻率之相位雜訊示意圖(方法一)	69
【圖 4-20】 經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊圖(方法一)	70
【圖 4-21】 頻域上量測傳遞光波頻率之相位雜訊示意圖(方法二)	71
【圖 4-22】 經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊圖(方法二)	71
【圖 4-23】 系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限架構圖	72
【圖 4-24】 系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限	73
【圖 4-25】 時域上量測傳遞光波頻率之 Allan deviation 架構圖	74
【圖 4-26】 300 點量測的光波頻率變化及 Allan deviation	74

【圖 4-27】 2700 點量測的光波頻率變化及 Allan deviation	74
【圖 4-28】 經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊(方法一)經公式換算後得到的 Allan deviation 圖	75
【圖 4-29】 經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊(方法二)經公式換算後得到的 Allan deviation 圖	76



第一章 緒論

1-1 研究背景

1970年，初期皮秒級超短脈衝雷射的研究成功後，脈衝雷射就不斷的在創新。1991年，鈦藍寶石(Ti:sapphire)Kerr-lens鎖模脈衝雷射(Mode-locked laser)^[1]被Wilson Sibbett 研發出來後，鎖模雷射在產生超短脈衝的應用上扮演著相當重要的角色。1999年，美國Lucent公司研發了一種光子晶體光纖(photonic crystal fiber)，可使鎖模雷射的頻譜變寬。2005年諾貝爾物理獎得主霍爾(J. L. Hall)在2000年時利用光子晶體光纖將短脈衝的頻譜大幅展開，利用self-reference^[2]干涉法量測鎖模雷射之偏差頻率，使得鎖模雷射得以穩頻，做為量測頻率的工具，也使得微波頻率以及光波頻率的連結透過一套飛秒鎖模雷射就可以完成。

由於鈉原子鐘的研究，使得微波頻率標準可以比以往更穩定也更精準^{[3][4]}，目前為止，最好的微波頻率標準是由鈉噴泉原子鐘所提供^[5]。1993到1999年美國的國家標準與技術署(National Institute of Standards and Technology; NIST)是利用鈉原子束原子鐘來作為美國的時間標準，但從2000年開始，NIST改為採用以雷射冷卻技術(laser cooling)，現在的噴泉鈉原子鐘，已經可以做到 2×10^{-15} 的精準度，換句話說，大約二千萬年才有一秒的誤差^[5]。然而，現在根據單一冷卻捕捉(single cold trapped)離子及原子發展的光波頻率標準，精準度預估可以到達 10^{-18} ，短期的穩定度也可達 10^{-17} ^[6]，大約是比微波頻率標準好了1000倍。飛秒光頻梳雷射的光波頻率標準長期穩定度已可到達 10^{-18} ^[7]。現今在實驗室之間或到其它用戶之間微波頻率標準的比對，經常是使用全球性定位系統GPS(Global Positioning Satellite system)^[8]。因為GPS衛星載有與控制中心完全相同的最精確原子鐘，這個微波頻率標準隨同定位信號傳送至地球，這個頻率的校正，保證了距離測量的準確性。衛星雙向法時間頻率比對(Two-Way Satellite Time and Frequency Transfer; TWSTFT)和載波相位法技術(GPS carrier phase techniques)，

這些都是目前國際上建構國際原子鐘的比對技術，可以讓微波頻率傳輸穩定度經過一天可以達到 10^{-15} [9]。

然而，光頻率標準無法透過全球性定位系統GPS比對，若要進行光波頻率標準的比對，總是必須把光波頻率標準攜帶到其他國家再進行比對，如此是一件很麻煩的事，如果可以透過光纖傳遞頻率標準而不失真，那麼遠距光頻校正或比對就簡便多了，光纖是可用來傳遞光波頻率一個很好的介質，並且透過光纖也可以傳遞微波頻率。在過去幾年的研究中提出，透過光纖傳送頻率標準主要有三種方式。第一種方式最廣泛的技術為，藉由一台振幅調變的連續波雷射(amplitude-modulated continuous wave laser)透過光纖來傳遞微波頻率標準。2006年F. Narbonne等人利用連續波雷射來傳遞微波頻率標準，傳輸距離為86 Km，在沒有主動消除雜訊(active noise cancellation)情形下，在積分時間為1秒時之頻率穩定度為 3×10^{-14} ；藉由主動消除雜訊，在積分時間為1秒時之頻率穩定度可以達到 1×10^{-14} [10]。此種方式可以應用在天文望遠鏡，在不同的地點要同時接收從外太空來的微波信號，想要達到同步接收就必須統一把一個時間標準傳到各個天文台做比對，也就是時間的校正(calibration)及同步(synchronization)[11]。

第二種方式更適用於遠方使用者比對光波頻率標準的是藉由一台連續波雷射透過光纖直接傳遞光波頻率標準。此種方式相較於利用振幅調變的連續波雷射傳送微波頻率標準，其提供了更佳的短期穩定度，但此種方式有一個缺點，它不能直接傳送微波頻率標準的訊號讓遠方使用者做校正。由於調變的信號是載體本身，通常在幾百個THz以上，所以還是需要一台光頻梳雷射才能來獲得微波頻率標準。2003年J. Ye等人利用連續波雷射透過光纖傳遞光波頻率標準，從JILA到NIST傳輸距離為6.9 Km (round-trip)，在沒有主動消除雜訊(active noise cancellation)情形下，在積分時間為1秒時之頻率穩定度為 2×10^{-14} ；藉由主動消除雜訊，在積分時間為1秒時之頻率穩定度可以達到 3×10^{-15} [12]。2007年G. Grosche等人利用連續波光纖雷射透過光纖傳遞光波頻率標準，傳輸距離為86 Km下，穩定度為 6×10^{-18} (積分時間為8000秒)，傳輸距離為211 Km下，穩定度為 2×10^{-17} (積

分時間為 8000 秒)^[13]。

第三種方式是藉由一台光頻梳雷射透過光纖傳遞微波頻率標準^{[14][15]}以及光波頻率標準，期望利用鎖模雷射傳遞光波頻率標準的穩定度可以達到和直接利用連續波雷射傳遞光波頻率標準的穩定度一樣佳。2005 年 K. W. Holman 等人利用鎖模光纖雷射傳遞微波頻率標準，從 JILA 到 NIST 傳輸距離為 6.9 Km (round-trip)，在沒有主動消除雜訊(active noise cancellation)情形下，穩定度為 3×10^{-14} ；藉由主動消除雜訊，穩定度可以達到 7×10^{-15} ^[16]。

1-2 研究構想及動機

到目前為止，還沒有任何文獻發表以鎖模雷射在光纖上同時傳遞微波頻率標準以及光波頻率標準的結果。所以如果能做到利用鎖模光纖雷射在光纖上同時傳遞微波頻率以及光波頻率，而且透過光纖傳遞頻率標準不會失真的話，那麼遠距微波頻率以及光波頻率校正或比對只靠一台光梳頻系統就可以達到。

要利用鎖模光纖雷射傳遞微波頻率標準，必須把脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 鎖定在微波頻率標準上。當脈衝重複頻率 f_{rep} 穩頻時，表示每個脈衝的間隔是固定的，即可視為一個穩定的微波頻率源。實驗中利用了鎖相迴路(phase-locked loop; PLL) 回授控制鎖模光纖雷射，將其脈衝重複頻率 f_{rep} 鎖定在低雜訊微波頻率源(low-noise RF source)輸出的特定頻率。經過光纖傳遞，利用光偵測器偵測信號，達到微波頻率標準的傳遞。

要利用鎖模光纖雷射傳遞光波頻率標準，必須同時把脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 和偏差頻率 f_o (offset frequency) 鎖定在其特定頻率。當脈衝重複頻率 f_{rep} 和偏差頻率 f_o 穩頻時，表示每個光梳頻率是固定的，此時傳遞的鎖模雷射，可視為多個光波頻率標準。實驗中利用了鎖相迴路回授控制鎖模光

纖雷射的 f_o ，和脈衝重複頻率 f_{rep} 穩頻不同的是，迴授電路中用的是數位式相位偵測器以及使用了除頻器 (prescaler)，將其偏差頻率 f_o 鎖定在頻率合成器 (synthesizer) 輸出的特定頻率。經過光纖傳遞，我們引進一台連續波雷射當作媒介，讓穩頻後的鎖模光纖雷射和連續波雷射產生拍頻，利用光偵測器偵測拍頻，用來測量傳遞前後光頻率的穩定度。此法可以不用為了讓光纖傳遞前後的兩個脈衝重疊 (overlap) 而必須在時域上不斷去調整時間延遲 (time delay)，這也是本論文不同於 2006 年 Yi-Fei Chen 等人發表文獻^[17] 中去調整兩個脈衝時間延遲的作法，我們利用鎖模光纖雷射和連續波雷射產生拍頻，在實驗量測傳遞前後穩定度上會更為方便。

若能在台灣建立一套可以傳遞微波頻率標準及光波頻率標準的光梳頻系統 (femtosecond comb system)，如此一來，透過光纜使用遠端頻率校正系統，可以讓遠端使用者很方便的使用這個頻率標準，以達到高精準度的量測。這也是研究此一主題的主要動機。



1-3 論文架構

本論文的主要目的在探討微波頻率標準及光波頻率標準經過光纖傳遞後，是否還能維持原先的頻率穩定度。

首先會在第二章的內容介紹有關飛秒光梳頻的基本原理以及其應用，主要是介紹鎖模雷射 (mode-locked laser) 的頻譜特性，它包含了兩個重要的參數，週期性脈衝的重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 和偏差頻率 f_o (offset frequency)。以及介紹實驗中所使用的鎖模光纖雷射系統。同時我們會討論在頻域 (frequency domain) 上去量測雷射光脈衝時序紊亂度 (相位雜訊) 的原理，以及在時域 (time domain) 上去量測雷射光脈衝頻率穩定度 (Allan deviation) 的原理。在第三章主要是介紹傳遞微波頻率標準的實驗架構及量測結果，對於飛秒光梳頻系統 (femtosecond

comb system) 傳遞微波頻率標準來說，必須將脈衝重複頻率 f_{rep} 鎖定在其特定頻率。所以我們將會簡介鎖相迴路的基本理論以及 f_{rep} 穩頻方法。在第四章主要是介紹傳遞光波頻率標準的實驗架構及量測結果，此時必須也把偏差頻率 f_o 鎖定在其特定頻率，達到飛秒光梳頻系統的穩頻。此外，實驗中引進了外腔式二導體雷射作為媒介，與飛秒光梳頻系統產生拍頻，用來量測傳遞後光波頻率標準的穩定度，同時也將介紹外腔式二導體雷射的穩頻方法。最後在第五章的內容將述敘有關本實驗的未來展望。



第二章 光梳頻基本原理及頻率穩定度量測方法

2-1 飛秒光梳頻的基本原理及應用

鎖模雷射(mode-locked laser)在超短脈衝的應用上扮演相當重要的角色，鎖模雷射在頻域上具有許多等距同調的光梳(optical frequency comb)可以做為光頻率的標準源。我們所使用的飛秒鎖模雷射是由工業研究院量測中心所提供^[18]，他藉由光纖的非線性效應將鎖模光纖雷射的光梳展開到涵蓋可見光及近紅外光，擴大了可應用範圍。並且利用“f-2f self-referencing”技術穩定了光梳頻的頻率，成為良好的標準源。

2-1.1 被動鎖模摻鉀光纖雷射的鎖模原理

一般鎖模雷射可分為主動鎖模與被動鎖模兩大類。主動鎖模雷射是指利用電光、聲光調變等主動元件來做相位或振幅調變來產生脈衝輸出的方式^[19]，被動鎖模雷射則是利用共振腔中的非線性效應來達到鎖模狀態並得到脈衝輸出。一般來說，被動鎖模雷射能達到比主動鎖模雷射更短的脈衝輸出。製作被動鎖模光纖雷射的方式有許多，包括有半導體飽和吸收體被動鎖模、疊加波鎖模、非線性光纖環被動鎖模、非線性偏振旋轉鎖模、展波鎖模……等等。以下我們簡介半導體飽和吸收體被動鎖模雷射、疊加波鎖模雷射以及偏振加波鎖模雷射。

半導體飽和吸收體被動鎖模雷射

半導體飽和吸收體被動鎖模雷射所使用之半導體飽和吸收體主要可分為快速飽和吸收體與慢速飽和吸收體兩大類。快速或慢速是以飽和吸收體的回復時間相較於脈衝寬度的關係而定的，若飽和吸收體回復時間大於脈衝寬度則為慢速飽和吸收體，反之為快速飽和吸收體。半導體飽和吸收體被動鎖模雷射是利用半導

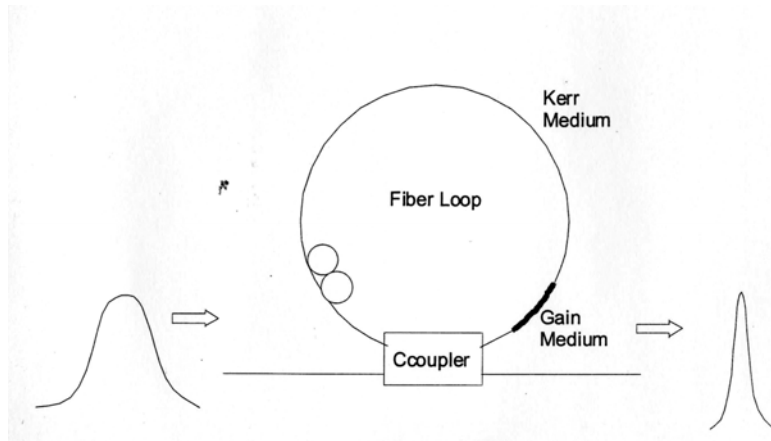
體飽和吸收體的非線性來達成鎖模機制的，當光脈衝通過飽和吸收體時，因脈衝中心的功率大於吸收體的飽和功率，所以脈衝中心看到較小的損耗。相反地，脈衝兩翼則會有較大的損耗，因此可以使脈衝變短進而達到鎖模，在飛秒級的鎖模雷射中，鎖模作用可以由快速飽和吸收體單獨達成，若是利用慢速飽和吸收體則需配合適當的雷射增益介質回復時間才能達成。

疊加波鎖模雷射

一般而言，除了以實際的飽和吸收體達到被動鎖模外，也能夠利用所謂的KLM(Kerr lens mode locking)^[20]與疊加波鎖模(Additive Pulse Mode-locking; APM)^[20]的方式實現被動鎖模，不過在光纖中無法利用KLM的效應，僅能使用疊加波鎖模。

疊加波鎖模的原理是利用由脈衝的同調相加而產生的脈衝壓縮的效果，在功能上我們可以將疊加波鎖模視為一種快速飽和吸收體被動鎖模機制，如【圖 2-1】所示。詳細言之，疊加波鎖模是利用克爾效應(Kerr Effect)使共振腔中的脈衝產生非線性的干涉，從而可使共振腔內的損耗與脈衝強度成反比，因為 gain 的不對稱，逆時針旋轉光先被放大，產生的克爾效應的量跟順時針的不一樣，所以高脈衝強度的會通過，而低脈衝強度的會衰減掉，因此可達到脈衝壓縮。因為不是利用實際的飽和吸收體，疊加波鎖模可以應用於很大的波長範圍。

疊加波鎖模架構可以是線性共振腔或環形共振腔，兩種架構可能是具有主、副兩共振腔的架構或是單一共振腔的架構。前者在副共振腔中存在具克爾非線性效應的介質，能夠產生自相位調變而達到上述的非線性干涉形成鎖模，後者則是利用單一共振腔內非線性干涉效應來達成鎖模。所謂的八字形(Figure 8)架構非線性光纖環鎖模機制以及本論文中使用的鎖模光纖雷射——單一環形共振腔結構的非線性偏振旋轉鎖模機制是最常見的兩種疊加波鎖模方式^[21]。一般疊加波鎖模雷射可達到百飛秒級脈衝。



【圖 2-1】疊加波鎖模機制

偏振加波鎖模雷射

因為光纖中的Kerr效應，橢圓偏振光在光纖中傳播時會產生偏振旋轉的現象，此即“非線性偏振旋轉”（Nonlinear Polarization Rotation；NPR）^[22]。此現象乃因在isotropic Kerr介質中CW圓形偏振光分量的傳播方程式為：

$$\frac{\partial E_L}{\partial z} = -iK \left(|E_L|^2 + 2|E_R|^2 \right) E_L$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial z} = -iK \left(2|E_L|^2 + |E_R|^2 \right) E_R$$

其解為：

$$E_L(z) = e^{-iK(|E_L(0)|^2 + 2|E_R(0)|^2)z} E_L(0)$$

$$E_R(z) = e^{-iK(2|E_L(0)|^2 + |E_R(0)|^2)z} E_R(0)$$

其中

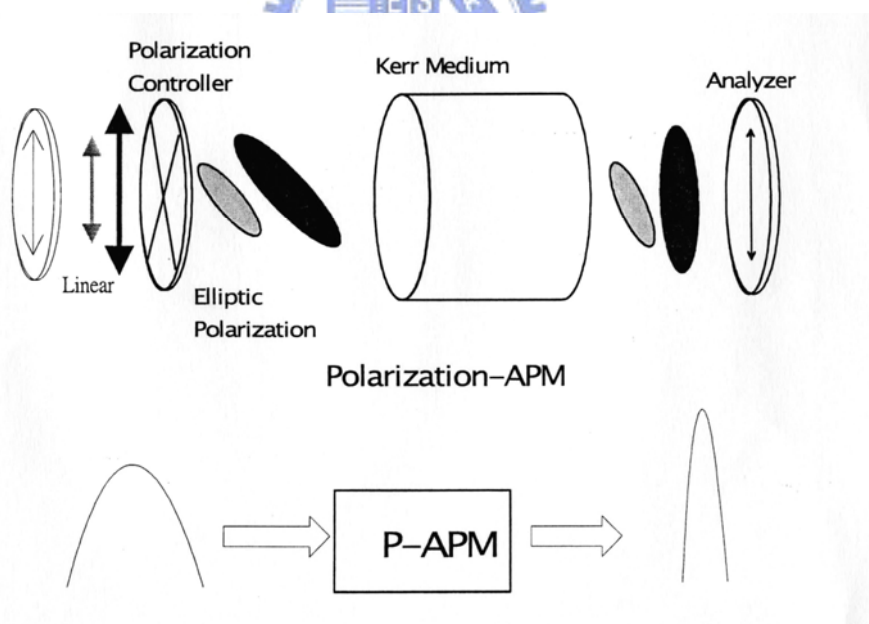
E_L 為左旋圓偏振光強度，

E_R 為右旋圓偏振光強度，

橢圓偏振光可分解成兩個強度不同的左旋及右旋圓偏振光，這兩個強度不同的圓偏振光會因為非線性 Kerr 效應造成自相位調變(Self Phase Modulation)及交互相位調變(Cross Phase Modulation)而分別得到非線性相位偏移(Nonlinear

Phase Shift)，因此橢圓偏振光($|E_L(0)|^2 \neq |E_R(0)|^2$)之偏振態軸向會旋轉，如【圖 2-2】所示。此一偏振旋轉角度的大小與光強度及傳播距離成正比。

利用非線性偏振旋轉加上偏振控制器(polarization controller)與線偏振片(Linear Polarizer)，我們能夠得到與在共振腔中加入快速飽和吸收體相同的效果^[20]。偏振加波鎖模(Polarization Additive Pulse Mode-locking; P-APM)可以看成是由二自相位調變光干涉而產生的非線性的振幅調變，如【圖 2-2】所示，使用適當調整後的偏振控制器將通過第一個線偏振片的脈衝轉為橢圓偏振^[22]，此橢圓偏振光在光纖中傳播後將產生非線性偏振旋轉，且旋轉角度與光強度成正比。因此我們可以控制偏振控制器使旋轉後的脈衝中心大部分通過第二個線偏振片，脈衝兩側與連續波的部分因振幅較小，產生的偏振旋轉亦較小，因此大部分不能通過第二個線偏振片，這可使得脈衝被壓縮而達到鎖模的效果，此現象可以看成是由第二個線偏振片將偏振方向的旋轉轉化為振幅上的調變。



【圖 2-2】非線性偏振旋轉示意圖

2-1.2 鎖模雷射的頻譜

要瞭解鎖模雷射如何應用在光頻計量，我們必須先對鎖模雷射的頻譜有所瞭解，飛秒脈衝雷射是藉由鎖定所有起振的雷射縱向模的相位而產生週期性的脈衝，由雷射腔輸出的脈衝雷射的電場強度可表為：

$$E(t) = A(t)e^{-i2\pi f_c t} + c.c \quad (2.1)$$

其中 $A(t)$ 為週期性的波封方程式， f_c 為載波頻率。

而週期性的波封方程式用富立葉級數可展開成：

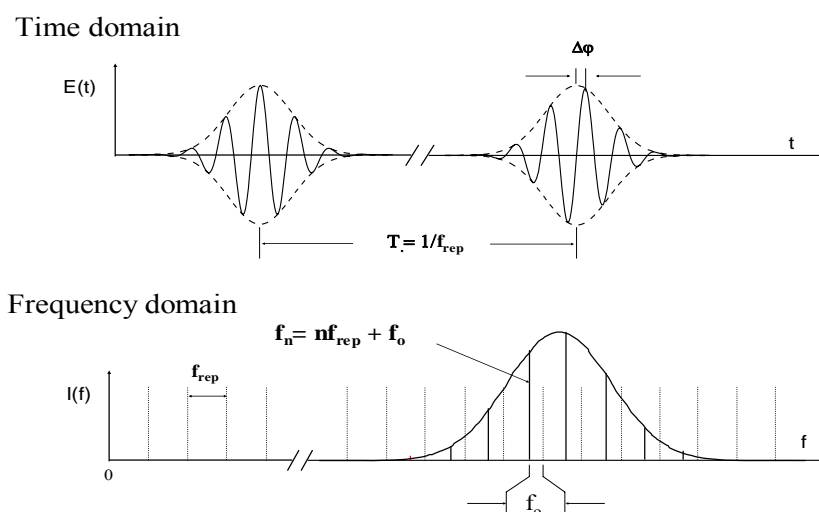
$$A(t) = \sum A_n e^{-i2\pi n f_r t} \quad (2.2)$$

其中 $f_{rep} = V_g / 2L$ 為脈衝的重複頻率， V_g 為群速度， L 為雷射腔長。因此該脈衝雷射的電場可以寫成：

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i2\pi(f_c + n f_{rep})t} + c.c. \quad (2.3)$$

在頻譜上看來，這個電場是由相等頻率間距 f_r 的光梳所構成，而第 n 根光梳的頻率為脈衝重複頻率的整數倍，亦即 $f_n = n \cdot f_{rep}$ 。以上的敘述並沒有考慮到載波相位和波封相位的問題，但是在雷射腔內的介質都有色散現象，因此會是造成波封以群速度而載波以相速度前進，由於這兩個速度不一樣，雷射脈衝每繞行雷射腔一週，載波相位和波封相位就會有 $\Delta\phi$ 的相位差 ($2\pi \geq \Delta\phi \geq 0$)，如【圖 2-3】所示，由於雷射在共振腔每繞一次，就要重複原來的狀態，因此雷射載波相位必須滿足 $2\pi f_c T + \Delta\phi = n \cdot 2\pi$ ，其中 T 為脈衝繞雷射腔一次所需時間、 n 為正整數，所以實際上滿足這樣條件的載波頻率為 $f_n = n \cdot f_{rep} + f_o$ ，其中 $f_o = (\Delta\phi / 2\pi) / T$ ，也可以表為 $f_o = (\Delta\phi / 2\pi) f_{rep}$ ，這個載波波封相位差使得各梳子的頻率並不等於雷射脈衝頻率的整數倍，而是有一個偏差頻率 f_o ，其中脈衝重複頻率 f_{rep} 和偏差頻率 f_o 都是在微波範圍，因此利用一個鎖模雷射就可以將微波

頻率和光波頻率連結起來。如果 f_{rep} 和 f_o 都是穩定的，那麼每一支光梳的頻率就穩定，一般飛秒雷射的頻譜寬度約在幾個 THz 以上，如果脈衝重複頻率是 1 GHz，那麼一個穩頻的飛秒雷射就含有數千個穩頻的雷射，這是傳統建議輻射所無法比擬的。

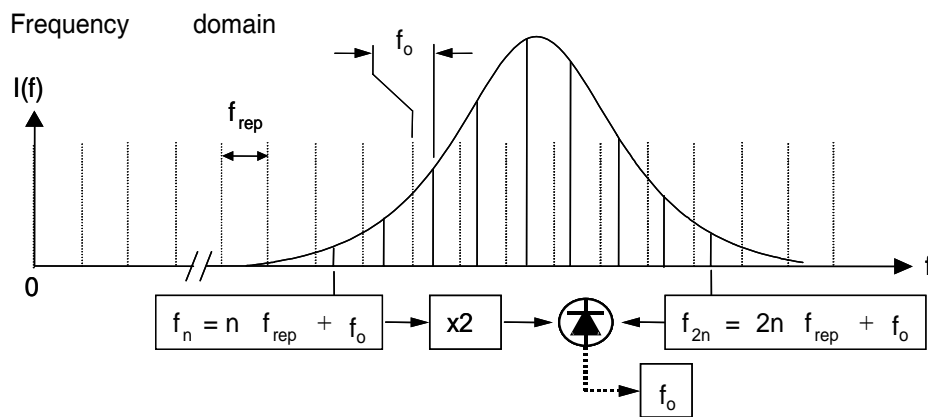


【圖 2-3】鎖模雷射輸出在時域和頻域的關係

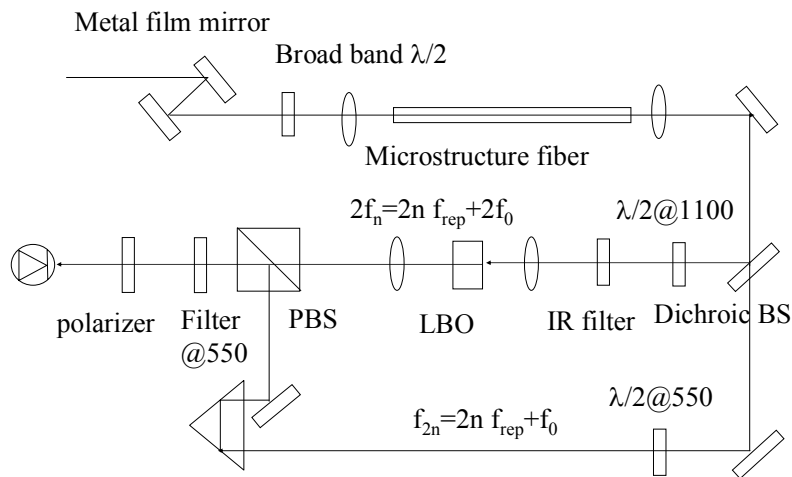
2-1.3 飛秒雷射和光纖展頻

要讓飛秒雷射能夠成為傳遞頻率標準的工具，必須要先穩定其脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 和偏差頻率 f_o (offset frequency)。脈衝重複頻率用快速的光二極體可以很容易偵測，藉由控制雷射的腔長即可控制重複頻率，至於 f_o 的量測方法，可以利用“f-2f self-referencing”的技術得知，其原理如【圖 2-4】所示。將光頻展開後，將較低頻的部分為 $f_n = n f_{rep} + f_o$ ，將其利用倍頻晶體產生倍頻後為 $2f_n = 2(n f_{rep} + f_o)$ ，再與原本的高頻部分 $f_{2n} = 2n f_{rep} + f_o$ 產生拍頻以量取 f_o ，即為 $2f_n - f_{2n} = 2(n f_{rep} + f_o) - (2n f_{rep} + f_o) = f_o$ ，因此必須要脈衝雷射的頻譜寬度夠寬，以致於涵蓋 f_n 及 $2f_n$ 的頻率範圍。在鈦藍寶石雷射延展頻譜的技術

上，目前僅有少數研究群可以直接由脈衝雷射產生兩倍頻寬，較為普及的方法是利用特殊的微結構光纖（microstructure fiber）或者稱為光子晶體光纖（photonic crystal fiber）來延展飛秒雷射的頻譜。這種光纖的波導色散（waveguide dispersion）比傳統光纖容易操控，因此可用來平衡物質色散使得零色散的波長不同於一般的通訊光纖，零色散已經可以移轉到可見光範圍，雷射光在這種光纖中可以傳遞較長的距離而其脈衝寬度不至於迅速變寬，因此非線性效應的作用距離較一般通訊光纖長，藉由光纖的非線性效應可以把飛秒雷射的頻譜寬度擴展到兩倍頻寬以上。參與的非線性效應機制包括自相位調制（self phase modulation）、四波混合（four wave mixing）、拉曼效應、孤粒子分裂（soliton fission）等等^{[23][24]}。其“f-2f self-referencing”的實驗架構如圖【圖 2-5】所示，由於 $2f_n$ 及 f_{2n} 產生的時間不一定相同，所以必須將低頻部分跟高頻部分分開，靠著調時間延遲(time delay)使 $2f_n$ 及 f_{2n} 在時域上可以產生重疊(overlap)，才能測得 f_o 。

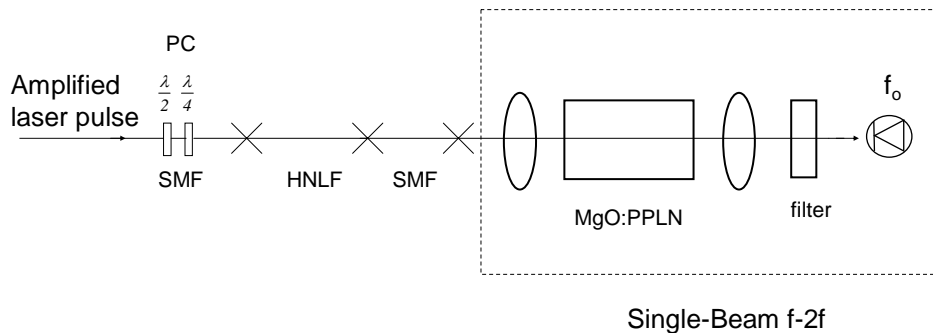


【圖 2-4】“f-2f self-referencing” 實驗原理

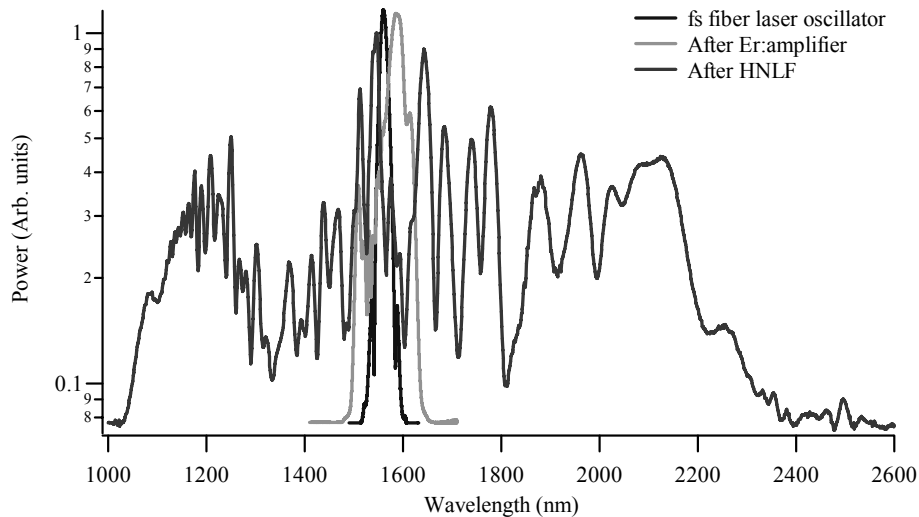


【圖 2-5】鈦藍寶石雷射利用之“f-2f self-referencing”實驗架構

而本實驗中，鎖模光纖雷射的延展頻譜則是利用高非線性光纖(Highly Nonlinear Fiber ; HNLF)，再接上單模光纖(SMF)，將鎖模光纖雷射輸出光的頻譜展寬，其“f-2f self-referencing”的實驗架構如圖【圖 2-6】所示，我們稱之為“Single-Beam f-2f”^[18]，頻譜展寬後其光梳頻的分布從 1050 nm到 2100 nm，如【圖 2-7】所示^[25]。



【圖 2-6】飛秒光纖雷射利用之“Single-Beam f-2f”實驗架構



【圖 2-7】飛秒光纖雷射以及光纖展頻後的頻譜

將飛秒鎖模雷射光頻梳穩定後，它的每個光頻梳 $f_n = nf_{rep} + f_o$ 就形同是在頻域上的一把尺。鎖模雷射的頻譜相當的穩定，可視為良好的頻率標準，經展寬後的光譜頻譜可用來應用的範圍更增加了。



2-2 頻域上量測時序紊亂度(相位雜訊)

時序紊亂度簡單的說，就是脈衝在時序上的不一致，也就是說相位是時間的隨機變化函數。如果我們將一個完美的沒有任何雜訊的脈衝假想成週期性的方波，脈衝的強度、週期及寬度都是固定的，而且我們可以預測它每次的行為。但真實的脈衝可能每一次來到的時間都不一定，而且脈衝寬度也不是固定的，此時脈衝的相位是時間的隨機變化函數，我們稱這是時序紊亂度(timing jitter)，或者是雷射的相位雜訊(phase noise)。

形成時序紊亂度的原因主要可以分為三項^[26]，第一是鎖模雷射激發光源(pumping source)本身的雜訊，第二是雷射增益介質的自發性輻射(spontaneous emission)，第三是雷射共振腔(laser cavity)的擾動，這些都會造成光脈衝的時序紊亂度。通常如果鎖模雷射的激發光源雜訊低，則時序紊亂度的主要成因為自發

性輻射的雜訊所造成，很多鎖模雷射中，自發性輻射的雜訊相對於腔長的調變是很敏感的，所以適當的微調腔長使其輸出的頻率穩定，或是增益介質做溫度的控制，都可以將時序紊亂度降低；至於造成共振腔的擾動的原因很多，例如環境溫度的變化導致腔長熱漲冷縮，及周邊一些聲波對腔體造成的調變等等，這些都直接影響了輸出光脈衝的品質，所以雷射共振腔需使用對溫度變化不敏感，而且機械穩定度要高的鏡架，以減少機械上的變動對光脈衝時序的影響。

2-2.1 鎖模雷射時序紊亂度(相位雜訊)的分析

時序紊亂度理論是基於光強度的自相關函數(autocorrelation function)傅立葉轉換(Fourier transform)，所以從雷射光脈衝串列的能量頻譜密度(power spectral density)我們可以精確的得到一些有關雷射雜訊的訊息，如脈衝能量的變動、脈衝重複時間的變動以及脈衝雷射寬度的變動。

一個良好的鎖模雷射(mode-locked laser)輸出，也就是沒有任何擾動的光脈衝串列，我們可以將其輸出光強度表示成：

$$P_0(t) = \sum_n p(t+nT) \quad (2.4)$$

其中 $P(t)$ 為每個脈衝時間上的光強度形狀(temporal intensity profile)， T 為光脈衝的重複週期， n 為 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整數。換言之，一個不完美的鎖模雷射，光脈衝輸出則可能產生些微的擾動，我們將其輸出強度表示為：

$$P(t) = P_0(t) + \delta P(t) \quad (2.5)$$

其中 $\delta P(t)$ 為光輸出強度的擾動量，相對於 $P_0(t)$ 而言是極小的，而 $P(t)$ 的能量頻譜密度可由輸出強度的自相關函數的傅利葉轉換得到：

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.6)$$

其中 $G_p(t)$ 光脈衝強度的自相關函數，可以表示成：

$$G_p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t+\tau)P(t)dt \quad (2.7)$$

一般而言我們喜歡用方均根誤差(root-mean-square deviation) ΔP ，來表示實際輸出光脈衝串列強度 $P(t)$ 相對於完美脈衝串列強度 $P_0(t)$ 的雜訊，即：

$$(\Delta P)^2 = \langle (P(t) - P_0(t))^2 \rangle = \langle \delta^2 P(t) \rangle \quad (2.8)$$

利用 Parsevals theorem，可以得到：

$$(\Delta P)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\delta P}(\omega) d\omega \quad (2.9)$$

根據上式理論分析，若我們將輸出光脈衝串列簡化，只討論其振幅和重複時上所具有的隨機擾動量，而忽略光脈衝形狀的變化，則可將光脈衝輸出強度 $P(t)$ 表示成：

$$P(t) = P_0(t) + P_0(t) \cdot A(t) + P_0'(t) \cdot TJ(t) \quad (2.10)$$

其中 $A(t)$ 為光脈衝振幅雜訊的隨機變化函數， $J(t)$ 為光脈衝相位雜訊的隨機變化函數， T 為光脈衝時間重複週期。光脈衝的時序紊亂度：

$$\delta T = TJ(t) \quad (2.11)$$

由 $P(t) = P_0(t) + P_0(t) \cdot A(t) + P_0'(t) \cdot TJ(t)$ 中求得光強度的自相關函數為：

$$G_P(\tau) = G_{P_0}(\tau) \cdot [1 + G_A(\tau)] + T^2 \cdot G_{P_0'}(\tau) \cdot G_J(\tau) \quad (2.12)$$

其中 $G_A(\tau)$ 為 $A(t)$ 的自相關函數， $G_J(\tau)$ 為 $J(t)$ 的自相關函數，而

$$G_{P_0}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(t+\tau) \cdot P_0(t) dt \quad (2.13)$$

光強度的能量頻譜密度 $S_p(\omega)$ ，可表示成摺合積分(convolution integrals)的形式：

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= \mathfrak{I}[G_{P_0}(\tau) \cdot [1 + G_A(\tau)]] + \mathfrak{I}[T^2 G_{P_0'}(\tau) \cdot G_J(\tau)] \\ &= \mathfrak{I}[G_{P_0}(\tau)] * \mathfrak{I}[1 + G_A(\tau)] + \mathfrak{I}[T^2 G_{P_0'}(\tau)] * \mathfrak{I}[G_J(\tau)] \\ &= S_{P_0}(\omega) * [\delta(\omega) + S_A(\omega)] + [(\omega_0 T)^2 S_{P_0'}(\omega)] * S_J(\omega) \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 為光脈衝重複頻率， $S_A(\omega)$ 為 $A(t)$ 的能量頻譜密度， $S_J(\omega)$ 為

$J(t)$ 的能量頻譜密度， $S_{P_0}(\omega)$ 為良好的光脈衝的能量頻譜密度：

$$S_{P_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{P_0}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \quad (2.15)$$

將(2.4)式代入(2.13)和(2.15)式可得：

$$S_{P_0}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \cdot |\tilde{P}(\omega)|^2 \cdot \sum_n \delta(\omega - 2n\pi/T) \quad (2.16)$$

其中 $|\tilde{P}(\omega)|$ 為光脈衝強度形狀 $P(t)$ 的傅立葉轉換函數。將(2.16)式代入

(2.14)式即可得：

$$S_P(\omega) \cong \bar{P}^2 e^{-\omega_0^2 \sigma_t^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [(1 - n^2 \omega_0^2 \sigma_J^2) 2\pi \delta(\omega_n) + (1 - n^2 \omega_0^2 \sigma_J^2) S_A(\omega_n) + n^2 \omega_0^2 S_J(\omega_n)]$$

$$S_P(\omega) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |\tilde{P}(\omega)|^2 \sum_n [\delta(\omega_n) + S_A(\omega_n) + (2\pi n)^2 S_J(\omega_n)] \quad (2.17)$$

$$\text{其中 } \omega_n = \left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

以上是我們在推導光脈衝能量頻譜密度時，都是以函數 $P(t)$ 表示每個脈衝時間上的光強度形狀。我們知道脈衝可用 δ 函數表示，可是 δ 函數並不是一個真函數，必須具有類似條件(函數的高度趨近於無限大，寬度趨近於零，而現在面積為 1)的函數來近似，所以可用高斯函數來近似 δ 函數。將鎖模雷射的光脈衝強度表示成由高斯函數所組成的級數，並加入振幅擾動量與時間擾動量，所以我們將光脈衝強度的數學式^[27]表示成：

$$P(t) = \bar{P} T [1 + A(t)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \cdot \exp[-(t - T_0 - nT - J(t))^2 / 2\sigma_t^2] \quad (2.18)$$

其中 \bar{P} 為雷射光平均輸出強度， σ_t 為光脈衝寬度的方均根值， $A(t)$ 為歸一化的光脈衝強度擾動量函數， $J(t)$ 為光脈衝串列的時間擾動量， T_0 為光脈衝串列固定的時間偏移量(timing offset)， T 為光脈衝的重複週期。

我們可將光脈衝強度相應的能量頻譜密度函數近似至 $n\omega_0\sigma_J$ 的二階項

$$\sigma_J = \sqrt{\langle J(t)^2 \rangle} = \sqrt{\langle J(\omega)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_L}^{\omega_H} S_J(\omega) d\omega}$$

$$S_P(\omega) \cong \bar{P}^2 e^{-\omega_0^2 \sigma_t^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [(1 - n^2 \omega_0^2 \sigma_J^2) 2\pi \delta(\omega_n) + (1 - n^2 \omega_0^2 \sigma_J^2) S_A(\omega_n) + n^2 \omega_0^2 S_J(\omega_n)]$$

(2.19)

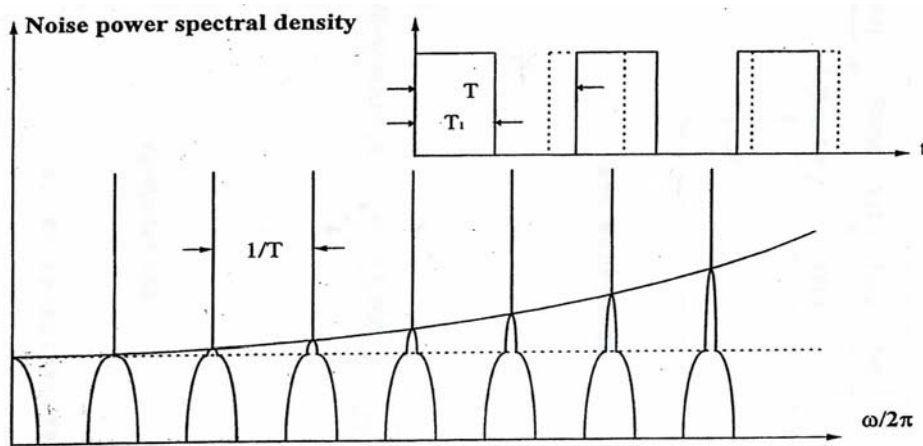
其中 σ_J 為方均根時序紊亂度(r.m.s. timing jitter)，如果 σ_J 很小，則上式可再近似成：

$$S_p(\omega) \cong \bar{P}^2 e^{-\sigma_J^2 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [2\pi\delta(\omega_n) + S_A(\omega_n) + n^2 \omega_0^2 S_J(\omega_n)] \quad (2.20)$$

由(2.8)式和(2.9)式可得

$$\sigma_J = \sqrt{\langle J(t)^2 \rangle} = \sqrt{\langle J(\omega)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_L}^{\omega_H} S_J(\omega) d\omega} \quad (2.21)$$

我們發現(2.20)是具有和(2.21)式相同的形式，將其表示成如【圖 2-8】，圖中為一連串以 ω_n 為中心頻率，間隔為 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 的諧波頻帶所組成，每個頻帶又分成三個部份，第一部份是 δ 函數所對應完全沒有雜訊的光脈衝頻譜；第二部份 $S_A(\omega_n)$ 所代表的是振幅雜訊的能量頻譜密度；第三部份 $n^2 \omega_0^2 S_J(\omega_n)$ 包含了相位雜訊的能量頻譜密度。值得注意的是，第一部份與第二部份其大小對於各個頻譜是相同的，而第三部份其大小是呈現 n^2 的關係，因此在比較高次諧頻時相對於較低次的諧頻的相位雜訊是比較高的，而且在較高諧頻時相位雜訊與振幅雜訊的相對值也較高。



【圖 2-8】時序紊亂度示意圖

2-2.2 被動鎖模雷射時序紊亂度的量測方法

時序紊亂度有分時域跟頻域的兩種量測方式^[28]。

頻域上量測時序紊亂度

根據 2.2.2 節我們知道利用光脈衝的能量頻譜密度可以得到光脈衝的振幅雜訊與相位雜訊。

從(2.20)式，如果我們只看雜訊旁帶(noise sideband)的部份，則我們可以將第 n 階諧頻的能量頻譜密度寫成以下形式^[29]

$$P_n(f) \cong P_C[S_A(f) + n^2 \omega_0^2 S_J(f)] \quad (2.22)$$

此處的 f 為相對於第 n 階諧頻中心頻率的偏移量(frequency offset)，而 P_C 為中心頻率處的功率(carrier power)。由於在較低階諧頻時，主要的訊來自振幅雜訊；在較高階諧頻時，雜訊是由相位雜訊所主導的，而且呈現 n^2 的關係，所以我們可以利用第 n 階諧頻的能量頻譜密度，以及基頻的能量頻譜密度計算出振幅雜訊的能量頻譜密度，以及相位雜訊的能量頻譜密度。根據(2.22)式，我們可以定義第 n 階諧頻的雜訊能量頻譜密度(noise power spectral density) $L_n(f)$ 為

$$L_n(f) \equiv 10 \cdot \log\left[\frac{P_n(f)}{BP_C}\right] \quad (2.23)$$

其中 B 為頻譜分析儀的解析度，若是頻譜分析儀的解析度不是 1 Hz 時，我們必須要加入此項影響。從頻譜分析儀在基頻及第 n 倍諧頻取得頻譜，我們可以得到 $L_1(f)$ 及 $L_n(f)$ ，藉由這兩個頻譜我們可以得到光脈衝的相位雜訊頻譜密度 $L_J(f)$ ，及振幅雜訊頻譜密度 $L_A(f)$ ，其數學式為

$$\begin{aligned} L_J(f) &\equiv 10 \cdot \log\left[\frac{(2\pi f_0)^2 S_J(f)}{B}\right] \\ &= 10 \cdot \log\left\{\left[10^{\frac{L_n(f)}{10}} - 10^{\frac{L_1(f)}{10}}\right] / (n^2 - 1)\right\} \\ L_A(f) &\equiv 10 \cdot \log\left[\frac{S_A(f)}{B}\right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$= 10 \cdot \log \left[10^{\frac{L_1(f)}{10}} - 10^{\frac{L_J(f)}{10}} \right] \quad (2.25)$$

其中 $f_0 = 1/T$ 為光脈衝的重複頻率。從(2.24)式根據(2.21)式，我們可推導出均方根時序紊亂度(r.m.s. timing jitter)

$$\sigma(f) \equiv \left[2 \cdot \int_{f_L}^{f_H} \frac{S(f)}{B} df \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi f_0} \left[2 \int_{f_L}^{f_H} 10^{\frac{L_J(f)}{10}} df \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

其中 $L_1(f)$ 、 $L_n(f)$ 、 $L_J(f)$ 的單位為 dB_C / Hz

時域上量測時序紊亂度

對一個微波振盪器(microwave oscillator)而言，考慮一個正弦輸出電壓 $V(t)$ ^[30]

$$V(t) = V_o [1 + \varepsilon(t)] \sin[2\pi f_r t + \varphi(t)] \quad (2.27)$$

其中 V_o 和 f_r 為主要的振幅和頻率， $\varepsilon(t)$ 和 $\varphi(t)$ 代表振幅雜訊和頻率雜訊。而相位雜訊主要的量測是 $\varphi(t)$ 的能量頻譜密度 S_φ (power spectral density; PSD)。而 Shoaf *et al.* 提出單旁帶能量雜訊頻譜 $L(f)$ (SSB PSD) 來取代 S_φ ，並且指出 rms 相位誤差在遠小於 1 徑度角：

$$\langle \varphi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \ll 1 \text{ rad} \quad (2.28)$$

$L(f)$ 與 $S_\varphi(f)$ 間有一個好的近似關係：

$$L(f) \approx S_\varphi(f) / 2 \quad (2.29)$$

由於 $S_\varphi(f)$ 比 $L(f)$ 不易取得，所以 $L(f)$ 幾乎成為傳統上標準的量測。但是 $L(f)$ 在定義上是忽略了振幅上的貢獻，從 von der Linde 的方法中 $L(f)$ 是由脈衝強度的第 n 倍諧頻 $V_n(t)$ 的計算得到。在時域上的表示為：

$$V_n(t) = V_{n0} [1 + \varepsilon(t)] \sin \{ n [2\pi f_r t + \varphi(t)] \} \quad (2.30)$$

不等式(2.28)的相位誤差在相位雜訊的量測上加入了一些限制。首先，它限制了量測上的動態範圍 (dynamic range)，所以此方法不適合時序擾動太大的雷

射系統。第二，一般而言隨著頻率的降低相位雜訊也跟著上升，所以在 10 Hz 以下的量測是有困難的。進一步來說，一台 RF 頻譜分析儀的解析度頻寬為 1-10 Hz 也不是適用於低頻的量測。

為了克服以上的困難，我們以一解調技術直接量測相位雜訊的能量頻譜密度 $S_\varphi(f)$ ，由(2.27)得知：

$$V(t) = V_o[1 + \varepsilon(t)] \cos \varphi(t) \sin(2\pi f_r t) + V_o[1 + \varepsilon(t)] \sin \varphi(t) \cos(2\pi f_r t) \quad (2.31)$$

而振幅分量分別為：

$$V_1 = V_o[1 + \varepsilon(t)] \cos \varphi(t) \quad (2.32)$$

$$V_2 = V_o[1 + \varepsilon(t)] \sin \varphi(t) \quad (2.33)$$

所以時域上的相位雜訊：

$$\varphi(t) = \tan^{-1}(V_2 / V_1) \quad (2.34)$$

我們可以將 $\varphi(t)$ 經過快速傅立葉轉換(FFT)得到相位雜訊的能量頻譜 S_φ ，再代入(2.23)(2.26)，可計算出相位雜訊。

2-3 時域上量測頻率穩定度: Allan deviation

時域上我們以Allan deviation(亞倫偏差)來估算頻率漂移量。Allan deviation在統計上常被用來表示頻率的穩定度(frequency stability)。Allan deviation可被定義^[31]為：

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (2.35)$$

其中

$$y_i: \text{每次量得的頻率比值, } y_i = \frac{\phi_i}{2\pi\nu_0},$$

τ = 積分時間；每次量取數據的間隔時間，

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, M,$$

亦可定義為：

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2(N-2)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2} \quad (2.36)$$

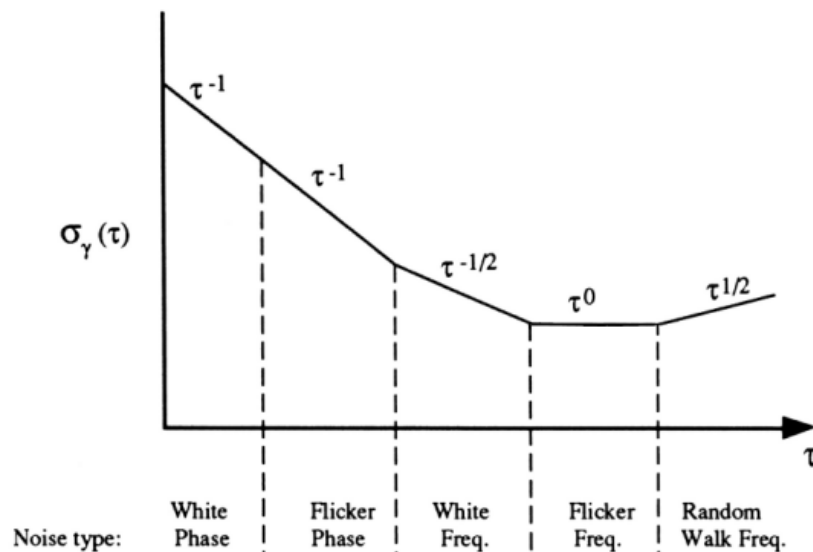
其中

$$x_i: \text{每次量得的相位}, x_i = \frac{\varphi_i}{2\pi\nu_0},$$

τ = 積分時間；每次量取數據的間隔時間，

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, N,$$

Allan deviation 也可被用來辨認系統量測到的雜訊(noise)類型。Allan deviation圖的斜率提供了何種雜訊為主要雜訊的資訊，如【圖 2-9】所示。舉例來說，若 $\sigma_y(\tau) \propto \tau^{-1}$ ，則代表white phase noise為主要的雜訊； $\sigma_y(\tau) \propto \tau^{-1/2}$ ，則代表white frequency noise為主要的雜訊^[32]。



【圖 2-9】 Allan deviation 斜率對應雜訊類型示意圖

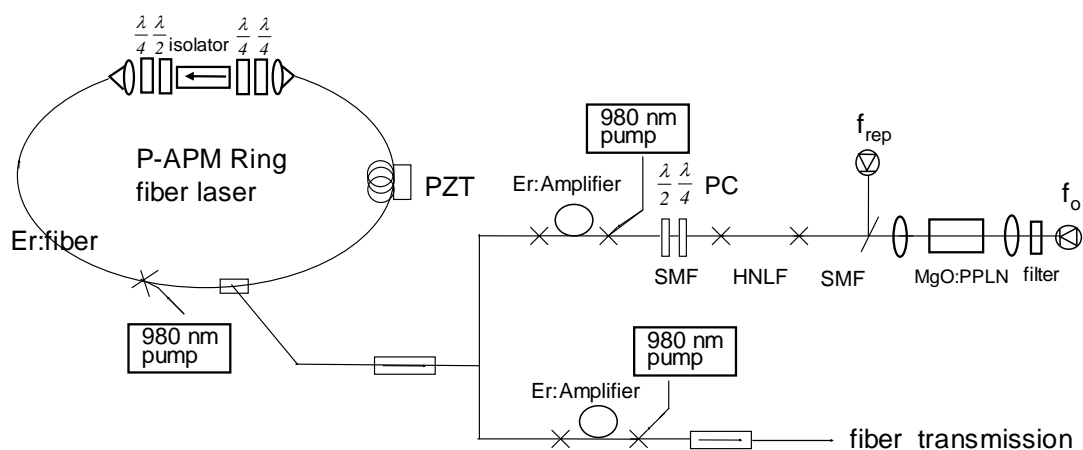
2-4 鎖模光纖雷射的實際製作

鎖模光纖雷射的架構如【圖 2-10】所示。摻鉕光纖鎖模雷射是一個使用偏振加波鎖模(Polarization Additive Pulse Mode-locking; P-APM)的環形雷射。雷射輸出重複頻率 f_{rep} 為 100 MHz 的脈衝列，波長為 1560 nm，平均能量大約為 4

mW。壓電致動器(Piezoelectric transducer ; PZT)鑲嵌在光纖上用來控制雷射的腔長。壓電致動器共振頻率為 68 KHz，當加到最大驅動電壓達 150 伏特時，可以調整脈衝的重複頻率達 3.5 KHz。

雷射的輸出使用摻鉕光纖放大器來放大能量，可達 180 mW。經過摻鉕光纖放大器後所變寬的脈衝列。可藉由使用單模光纖(Single Mode Fiber ; SMF)使脈衝的半峰寬度(Full Width at Half Maximum ; FWHM)壓縮到 50 fs。振盪器及放大器均是固定在 5mm厚，25x25 cm²的鋁板上，藉由電流致冷器(TE-cooler)來控制其對溫度的不穩定度。

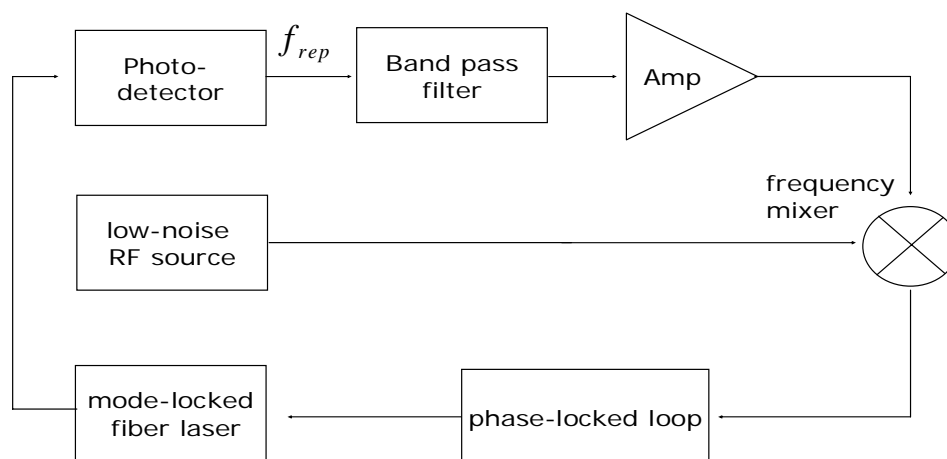
利用一段 18 公分長的高非線性光纖(Highly Nonlinear Fiber ; HNLF)，再接上單模光纖，使飛秒雷射的頻譜拉寬，為涵蓋一個八度音(octave)的超連續光譜。高非線性光纖在 1500 nm 頻段的非線性係數為 10.6 W⁻¹km⁻¹，色散(dispersion)係數為 1.74 ps/nm/km，色散斜率為 0.01 ps/nm²/km。其中超連續光譜涵蓋的範圍為從 1050 nm 到 2100 nm^[18]。



【圖 2-10】鎖模光纖雷射實驗系統圖

第三章 在光纖上利用鎖模光纖雷射傳遞微波頻率標準

要利用鎖模光纖雷射傳遞微波頻率標準，必須把脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 鎖定在微波頻率標準上。當脈衝重複頻率 f_{rep} 穩頻時，表示每個脈衝的間隔是固定的，即可視為一個穩定的微波頻率源。【圖 3-1】即為鎖模光纖雷射其脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 穩頻區塊示意圖，實驗中利用了鎖相迴路(phase-locked loop; PLL) 回授控制鎖模光纖雷射，將其脈衝重複頻率 f_{rep} 鎖定在低雜訊微波頻率源(low-noise RF source)輸出的特定頻率。經過光纖傳遞，利用光偵測器偵測信號，達到微波頻率標準的傳遞。



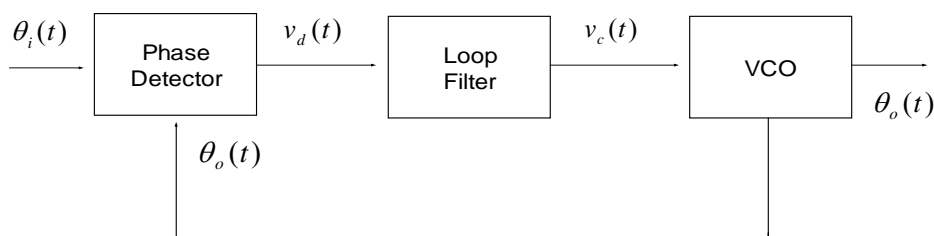
【圖 3-1】脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 穩頻區塊示意圖

3-1 鎖相迴路基本原理及其架構

鎖相迴路^[33](phase-locked loop; PLL)是一個迴授控制系統，它使得振盪器的輸出訊號與迴路的輸入訊號在頻率及相位上達到同步。

鎖相迴路(PLL)的基本區塊有三：相位偵測器(Phase Detector; PD)、迴路濾

波器(Loop Filter ; LF)、壓控振盪器(Voltage Controlled Oscillator ; VCO)，如【圖 3-2】所示。



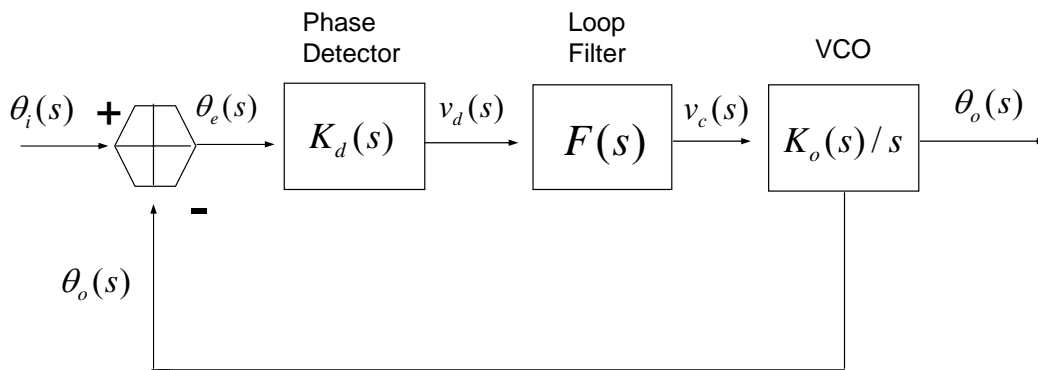
【圖 3-2】鎖相迴路(PLL)的基本區塊

相位偵測器比較輸入訊號和壓控振盪器的相位，並輸出一個訊號 $v_d(t)$ ， $v_d(t)$ 這個訊號是兩個輸入訊號相位差的函數。相位偵測器的輸出經過迴路濾波器，留下誤差雜訊的直流成份，用來驅動壓控振盪器。VCO 的控制電壓 $v_c(t)$ 驅動 VCO 改變振盪頻率，使得 VCO 的振盪頻率與輸入訊號頻率的差值逐漸變小，當這兩個頻率一樣，相位差為定值時(即輸出訊號與輸入訊號同步)，我們稱此狀態為“鎖定”(locked)，此時 VCO 的振盪頻率 f_o 等於輸入訊號頻率 f_i 。鎖定以後，PLL 就會去追蹤(tracking)輸入訊號頻率，也就是說 VCO 的頻率會隨著輸入訊號頻率的改變而改變。

鎖相迴路基本上是一個伺服控制系統，使壓控振盪器訊號與輸入訊號保持同步(synchronization)，所謂同步在鎖相迴路中稱為“鎖住”(locked)，及兩訊號的頻率相同，而相位差為定值當鎖相迴路開始工作時，首先要求一個獲得(acquisition)過程的時間，先達到頻率的一致再達到相位的鎖定(locked)。一旦鎖住後，需要鎖相迴路努力保持，使輸出得以隨時追蹤輸入訊號或是不被雜訊干擾，而這些性能均與迴路元件有密切關係。

鎖相迴路的線性模型

接下來要對鎖相迴路系統討論的是進一步的分析，鎖相迴路是一個非線性系統，但是在鎖定的情形下，若是相位誤差訊號(phase error signal)很小時，系統就可以簡化成為線性系統。如【圖 3-3】所示，我們可以利用線性控制系統原理，以拉氏轉換(Laplace transform)得到迴路中三個基本功能區塊的轉換函數。



【圖 3-3】鎖相迴路線性模型圖

鎖相迴路的基本功能是控制訊號相位，所以我們以相位為對象，進行系統的分析。假設輸入訊號相位為 θ_i ，VCO 的輸出訊號相位為 θ_o ，則相位偵測器的輸出為

$$v_d(t) = K_d(\theta_i - \theta_o) \quad (3.1)$$

其 Laplace transform 為

$$V_d(s) = K_d\theta_e(s) \quad (3.2)$$

其中 K_d 是相位偵測器的增益(單位 V/rad)， $\theta_e = \theta_i - \theta_o$ 為相位誤差函數。這個 $v_d(t)$ 訊號中含有直流與交流的成份，利用迴路濾波器將交流的訊號成份給濾掉。迴路濾波器的轉換函數用 $F(s)$ 表示，則

$$V_c(s) = F(s)V_d(s) \quad (3.3)$$

VCO 的輸出頻率

$$\omega_0 = \omega_c + K_0 v_c(t) \quad (3.4)$$

其中 ω_c 是 VCO 的中心頻率， K_0 是 VCO 的增益 (gain factor) 或是稱之為靈敏度 (sensitivity) (單位 Hz/V)。因為相位是角頻率對時間的積分，所以

$$\theta_0 = K_0 \int_0^t v_c(t) dt \quad (3.5)$$

由 Laplace transform 可得

$$\theta_0(s) = \frac{K_0 V_c(s)}{s} \quad (3.6)$$

由於鎖相迴路各部分的 Laplace transform 為

$$\text{相位偵測器 (PD)} \quad \frac{V_d(s)}{\theta_e(s)} = K_d \quad (3.7)$$

$$\text{迴路濾波器 (LF)} \quad \frac{V_c(s)}{V_d(s)} = F(s) \quad (3.8)$$

$$\text{壓控振盪器 (VCO)} \quad \frac{\theta_o(s)}{V_c(s)} = \frac{K_o}{s} \quad (3.9)$$

由 (3.7)、(3.8)、(3.9) 三式可計算出系統的相位及相位誤差轉換函數為：

$$\text{相位轉換函數} \quad \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{K_o K_d F(s)}{s + K_o K_d F(s)} \quad (3.10)$$

$$\text{相位誤差轉換函數} \quad \frac{\theta_e(s)}{\theta_i(s)} = \frac{s}{s + K_o K_d F(s)} = 1 - \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \quad (3.11)$$

這是在 PLL 接近鎖住附近的情形下所推導出來的結果。如果是在失鎖 (unlocked) 的情形下，則 PLL 模型就會變得很複雜，而且無法用線性模型去推演之。

相位偵測器

相位偵測器是一個相位比較裝置，用來檢測輸入訊號 $\theta_1(t)$ 與回饋訊號 $\theta_2(t)$ 之間的相位差 $\theta_e(t)$ 。輸出誤差訊號 $V_d(t)$ 是相位差 $\theta_e(t)$ 的函數，即

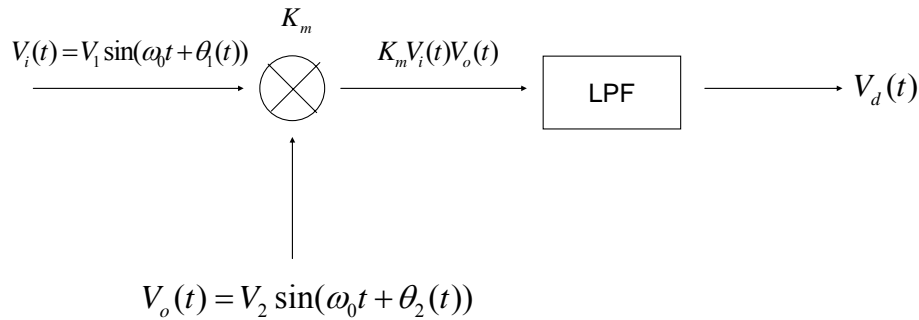
$$V_d(t) = f[\theta_e(t)] \quad (3.12)$$

我們就實驗中鎖相迴路內使用的類比式相位偵測器作介紹。

常用的正弦相位乘法器可用類比相位乘法器與低通濾波器的串聯做為模

型，如【圖 3-4】所示。 K_m 為相乘係數，輸入訊號 $V_i(t)$ 與回饋訊號 $V_o(t)$ 經相乘作用：

$$\begin{aligned} K_m V_i(t) V_o(t) &= K_m V_1 \sin[\omega_0 t + \theta_1(t)] V_2 \cos[\omega_0 t + \theta_2(t)] \\ &= 0.5 K_m V_1 V_2 \sin[2\omega_0 t + \theta_1(t) + \theta_2(t)] \\ &\quad + 0.5 K_m V_1 V_2 \sin[\theta_1(t) - \theta_2(t)] \end{aligned} \quad (3.13)$$



【圖 3-4】類比式相位偵測器工作原理示意圖

在經過低通濾波器濾除 $2\omega_0$ 成份後，得到誤差電壓：

$$\begin{aligned} V_d(t) &= 0.5 K_m V_1 V_2 \sin[\theta_1(t) - \theta_2(t)] \\ &= V \sin[\theta_e(t)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

這就是正弦相位偵測的特性。因為迴路應用了正弦相位偵測，所以模型跟方程式都是非線性的。但是在迴路的同步狀態下，瞬間相位差總是很小的，且相位偵測器工作在相位偵測特性的零點附近，零點附近的特性曲線可以用一條斜率等於正弦特性零點處的直線來進行分析：

$$K_d = \left. \frac{dV_d(t)}{d\theta_e(t)} \right|_{\theta_e=0} = V \quad (3.15)$$

K_d 為相位偵測器增益，單位是 (V/rad)，這就是正弦相位偵測特性，也就是相位偵測的數學模型。以 Laplace 函數表示：

$$V_d(s) = K_d \theta_e(s) \quad (3.16)$$

但只有在相位差極小的情況下，且相位偵測器工作在相位偵測特性的零點附近，才能符合前述線性的關係式。

另外，由式(3.14)得知相位偵測器增益為 $0.5K_m V_1 V_2$ ，正比於輸入電壓的大小，另外由式(3.10)亦可發現相位偵測器增益也是迴路增益的一個乘項，因此不同的訊號大小亦會造成整個迴路增益的不固定。在封閉迴路中，過大的增益容易引起振盪，所以必須調整後選定某個參數，之後固定這個參數來達到鎖住。

迴路濾波器

由迴路的轉換函數(3.10)、(3.11)得知迴路濾波器對系統性能的優劣有很大的影響。迴路濾波器必須要相位誤差訊號從非線性元件的相位偵測器的輸出取出來，濾除不必要的高頻訊號和雜訊，而且迴路濾波器也決定了系統的頻寬(bandwidth)和動態特性。如果鎖相迴路中不使用迴路濾波器，那麼(3.8)式中的 $F(s)$ 就用 1 代入，使得(3.10)變成


$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{K_o K_d}{s + K_o K_d} \quad (3.17)$$

很明顯的，我們可以發現對輸入相位訊號 θ_i 而言，PLL 系統是一個一階的低通濾波器，我們稱這個 PLL 為一階的鎖相迴路。通常使用的 PLL 階數都大於 1，因為越高階數的 PLL 有越好的雜訊抑制能力。從數學模型上看來，鎖相迴路是個低通濾波器。但實際上，鎖相迴路是一個以輸入訊號頻率為中心頻率的帶通濾波器。

迴路濾波器有被動式的迴路濾波器和主動式的迴路濾波器之分，因為主動式的迴路濾波器具有較大的鎖住範圍較大的直流增益以及穩態誤差為零等等優點，所以 PLL 系統大都是採用主動式的迴路濾波器。

1. 被動式的迴路濾波器

被動式的迴路濾波器如【圖 3-5(a)】所示，其轉換函數為

$$F(s) = \frac{1 + R_2Cs}{1 + R_2Cs} = \frac{1 + \tau_2s}{1 + \tau_1s} \quad (3.18)$$

$$\tau_1 = (R_1 + R_2)C \quad (3.19)$$

$$\tau_2 = R_2C \quad (3.20)$$

此種濾波器共有 τ_1 、 τ_2 兩個參數，其頻率響應為

$$F(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega\tau_1} \quad (3.21)$$

很明顯可以發現這是一個低通濾波器，當頻率很高的時候 ($\omega \rightarrow \infty$)，上式近似成

$$\omega_n F(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.22)$$

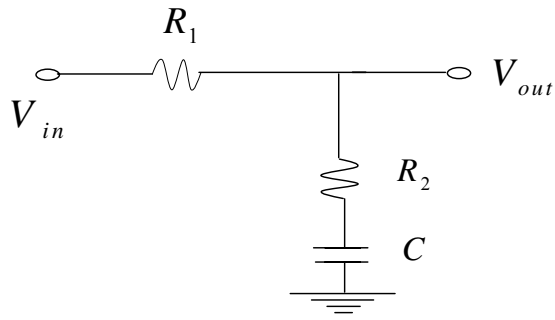
等於電阻的分壓比，這就是濾波器的比例作用。將此濾波器應用在鎖相迴路時，整個迴路的相位轉換函數(3.10)式可寫成

$$H(s) = \frac{2\zeta\omega_n + \omega_n^2 / K_o K_d}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.23)$$

$$\omega_n = \left(\frac{K_o K_d}{\tau_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{為 PLL 的自然頻率 (natural frequency)}$$

$$\zeta = \frac{\omega_n}{2} \left[\left(\frac{1}{K_o K_d} + \tau_2 \right) \right] \quad \text{為 PLL 的阻尼常數 (damping factor)}$$

由(3.23)式可看出，使用此種迴路濾波器的系統為一個二階迴路，其頻率響應具有低通的特性。式子中分子具有 $s\omega_n^2 / K_o K_d$ 項，事實上迴路增益 $K = K_o K_d$ 總是遠大於迴路的自然頻率 ω_n 的，因此此項近似於零^[34]。



【圖 3-5(a)】被動式的迴路濾波器

2. 主動式的迴路濾波器

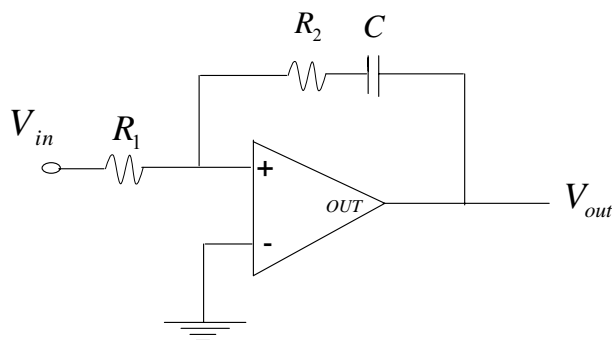
一般常用的主動式的迴路濾波器電路為主動式比例積分電路(PI circuit)，如

【圖 3-5(b)】所示，其轉換函數為

$$F(s) = \frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs} = \frac{\tau_2s + 1}{\tau_1s} = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (3.24)$$

$$\tau_1 = R_1C \quad ; \quad K_P = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\tau_2 = R_2C \quad ; \quad K_I = \frac{1}{R_1C}$$



【圖 3-5(b)】主動式的迴路濾波器

此電路也是個低通濾波器，以主動式比例積分微分電路作為迴路濾波器，則整個鎖住迴路的相位轉換函數(3.10)式可寫成

$$H(s) = \frac{K_o K_d K_p s + K_o K_d K_I}{s^2 + K_o K_d K_p s + K_o K_d K_I} = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.25)$$

其中 $\omega_n = \left(\frac{K_o K_d}{\tau_1} \right)^{1/2}$ 為 PLL 的自然頻率(natural frequency)

$$\xi = \frac{\tau_2}{2} \left(\frac{K_o K_d}{\tau_1} \right)^{1/2} = \frac{\tau_2 \omega_n}{2} \quad \text{為 PLL 的阻尼常數(damping constant)}$$

PI 電路是一個低通濾波器，因為積分控制的原因，使得系統的時域響應的上升時間和安定時間較長，但是具有良好的穩態誤差，而系統加入 PI 後會使得系統的頻寬變小，如果 PI 的增益參數 K_p 給的不合適，較容易引起系統振盪。實驗中，靠著改變【圖 3-5(b)】中的電容值，調整 PI corner frequency 及調整增益(gain)選擇適當的 K_p 使其不會震盪。



壓控振盪器

壓控振盪器是一個電壓-頻率轉換裝置，在迴路中作為被控振盪器，其振盪頻率是一個隨輸入控制電壓 $\theta_o(t)$ $v_c(t)$ 線性的變化，即應有轉變關係：

$$\omega_o(t) = \omega_c + K_o v_c(t) \quad (3.26)$$

式中 $\omega_c(t)$ 是壓控振盪器的瞬間角頻率， K_o 為控制靈敏度或是稱之為壓控振盪器的增益係數，單位是 $[(rad/s)V^{-1}]$ 。在實際的應用上壓控振盪器的控制特性只有在有限的線性範圍內，超過這個範圍靈敏度會下降。

由於壓控振盪器的輸出回饋到相位偵測器上，對相位偵測器輸出誤差電壓 $v_d(t)$ 起作用的不是頻率，而是其相位：

$$\int_0^t \omega_o(\tau) d\tau = \omega_o t + K_o \int_0^t v_c(\tau) d\tau = \omega_o t + \theta_o(t) \quad (3.27)$$

將上式(3.32)中的 $\theta_o(t)$ 改成 Laplace 轉換函數：

$$\theta_o(s) = K_o \frac{V_c(s)}{s} \quad (3.28)$$

這個函數具有一個積分因子 $1/s$ 是相位與角頻率之間的積分關係所造成的。鎖相迴路是不斷的利用回饋控制作補償，使得 VCO 的頻率與相位鎖住參考訊號。

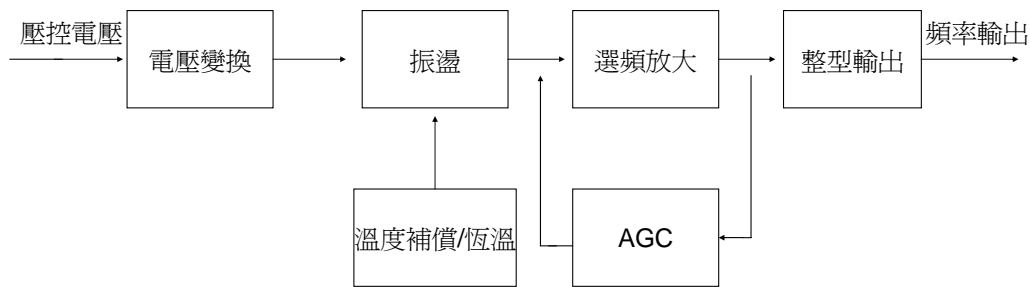
如上所述，壓控振盪器應是一個具有線性控制特性的調頻振盪器，在本實驗中的脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 的穩頻，我們利用的是壓電致動器 (PZT)，可調範圍為每 100 MHz 可微調 3.5 KHz，經由回授的電壓變化而改變其壓電致動器的電壓，達到改變雷射脈衝重複頻率，在此 PZT 控制的雷射就是扮演 VCO 的角色；而對於偏差頻率 f_o (offset frequency) 的穩頻，我們利用的是控制電流源驅動器 (current driver)，藉由控制幫浦雷射的功率，由於幫浦雷射的功率影響脈衝雷射的功率，透過 Kerr 效應而改變折射率，來達到改變雷射偏差頻率。



3-2 低雜訊微波頻率源的基本原理與製作

為了提供鎖模光纖雷射的脈衝重複頻率 f_{rep} 鎖頻有一個低雜訊的參考頻率，並且省去使用商用的頻率合成器，所以自組一個低雜訊的微波頻率源。

首先介紹一下恆溫控制式晶體振盪器 (Oven Controlled Crystal Oscillators ; OCXO)，這類型晶體振盪器對溫度穩定性的解決方案採用了恆溫槽技術，將晶體置於恆溫槽內，通過設置恆溫工作點，使槽體保持恆溫狀態，在一定範圍內不受外界溫度影響，達到穩定輸出頻率的效果。這類晶體振盪器主要用於各種類型的通信設備，包括交換機、SDH 傳輸設備、移動通信直放機、GPS 接收機、電台、數字電視及軍工設備等領域。恆溫控制式晶體振盪器的工作原理如【圖 3-6】所示：



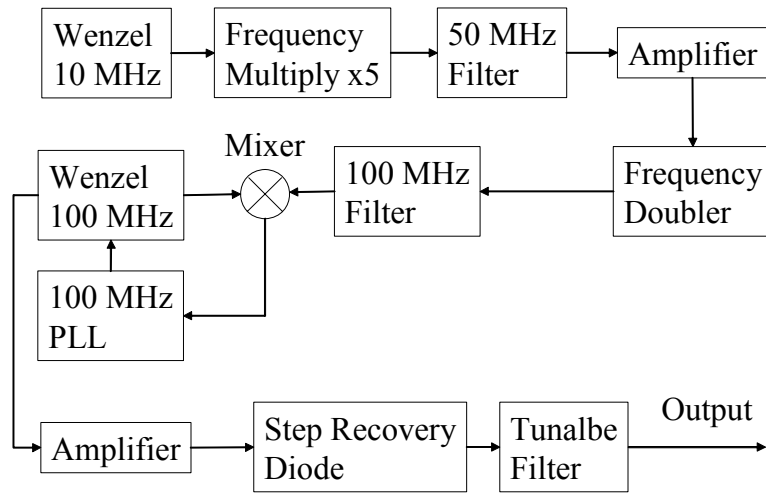
【圖 3-6】恆溫控制式晶體振盪器的工作原理區塊圖

恆溫控制式晶體振盪器的主要優點是，由於採用了恆溫槽技術，頻率溫度特性在所有類型晶體振盪器中是最好的，由於電路設計精密，其短期穩定性和相位雜訊都較好。

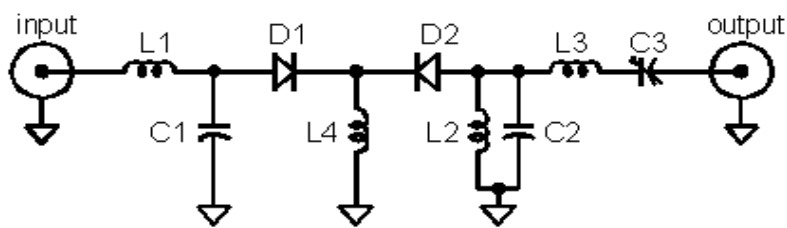
如【圖 3-7】所示，低雜訊微波頻率源(low-noise RF source)基本架構為，10 MHz恆溫控制式晶體振盪器先經過一個五倍頻的電路，如【圖 3-8】所示，再經過一倍頻器，形成 100 MHz的穩定輸出頻率源，另外有一個 100 MHz恆溫控制式晶體振盪器，鎖相到 10 MHz恆溫控制式晶體振盪器，而 10 MHz恆溫控制式晶體振盪器又鎖相到銣(Rb)原子鐘，其中銣原子鐘再鎖頻到全球定位系統(GPS)，由全球定位系統去調校銣原子鐘。此外，100 MHz的穩定輸出頻率源經過介質諧振振盪器(Dielectric Resonator Oscillator；DRO)，產生間隔為 100 MHz的梳頻，再用 1 GHz的帶通濾波器濾出 1 GHz的信號^[35]。

【圖 3-9】為各種穩定輸出頻率源的相位雜訊比較圖。為何說【圖 3-7】此微波頻率源能產生較低雜訊的訊號呢？如【圖 3-9】【圖 3-10】中所示，10 MHz恆溫控制式晶體振盪器在較低頻時(< 300 Hz)有較低的相位雜訊(【圖 3-10】中虛線部分)，100 MHz 恆溫控制式晶體振盪器在較高頻時有較低的相位雜訊(【圖 3-10】中點線部分)，所以我們把 100 MHz 恆溫控制式晶體振盪器，利用一個低頻寬(~ 300 Hz)的鎖相迴路鎖相到 10 MHz 恆溫控制式晶體振盪器，如此一來，

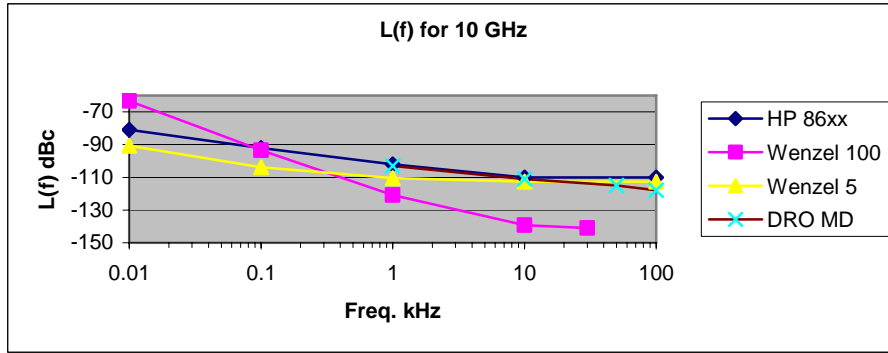
系統在較低頻時就會遵守 10 MHz 的相位雜訊曲線，較高頻時則保有原來 100 MHz 的相位雜訊曲線(【圖 3-10】中實線部分)。由於 10 MHz 恆溫控制式晶體振盪器以及 100 MHz 恆溫控制式晶體振盪器在約 300 Hz 時有相同的相位雜訊，所以我們鎖相迴路頻寬設定在 300 Hz。



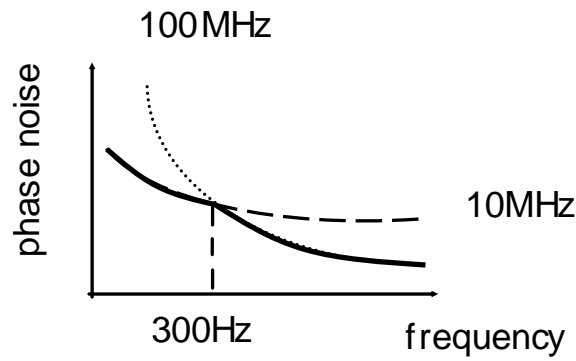
【圖 3-7】低雜訊微波頻率源工作原理區塊圖



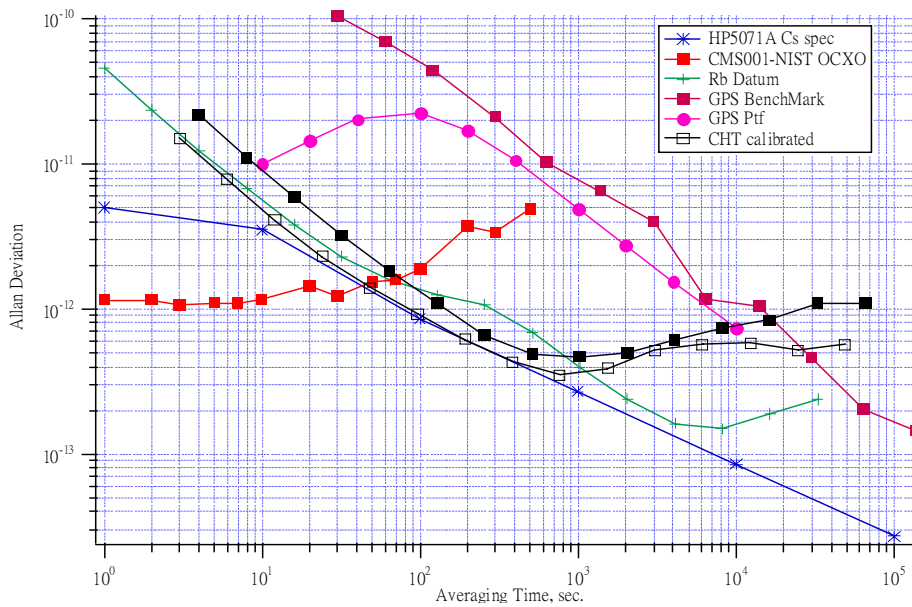
【圖 3-8】五倍頻電路圖



【圖 3-9】各種穩定輸出頻率源的相位雜訊比較圖



【圖 3-10】100 MHz OCXO 鎖相 10 MHz OCXO 後系統相位雜訊走向示意圖



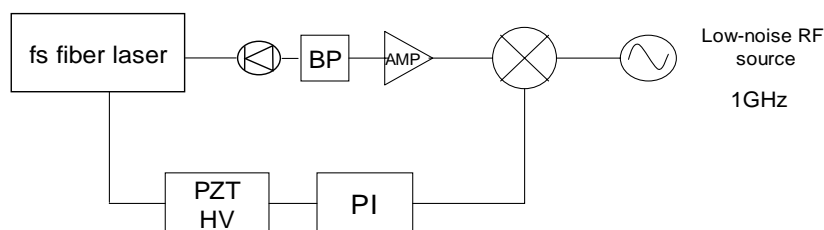
【圖 3-11】clock stability

【圖 3-11】中紅色點線是兩台獨立的OCXO去做比較，由於OCXO是free running，所以經過 10 幾秒後穩定度會開始慢慢往上飄。黑色點線的兩條（實心為颱風來臨前測得；空心為天氣正常時測得），是低雜訊頻率合成器拿到中華電信去校正的結果，但因為中華電信的校正系統短期穩定度不如我們的OCXO，所以短期穩定度如【圖 3-11】中所示，無法達到兩台獨立的OCXO做比較時的短期穩定度，又由於系統鎖相到銣(Rb)原子鐘，其中銣原子鐘再鎖相到全球定位系統(GPS)，由全球定位系統去調校銣原子鐘，所以長期穩定度會比沒有鎖相到銣原子鐘時差一些。大致來說，低雜訊頻率合成器的穩定度，短期會跟隨紅色點線，中期則沿著黑色點線，長期則會穩定在 10^{-12} ，平均來講會小於 2×10^{-12} 。

3-3 實驗方法與結果討論

3-3.1 脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 的穩頻

如【圖 3-12】所示，將直接由光偵測器偵測到的 f_{rep} 信號先經過 1GHz 帶通濾波器(Band Pass Filter)後，再使用放大器放大訊號，和一台低雜訊微波頻率源輸出的 1 GHz 信號送到頻率混頻器(frequency mixer)混頻，再由頻率混頻器輸出一誤差訊號(error signal)送至鎖相迴路(phase-locked loop; PLL)，藉由控制雷射腔上的壓電致動器 PZT (Piezoelectric Transducer)來改變雷射的腔長，可以將脈衝重複頻率鎖在 1 GHz 信號上。

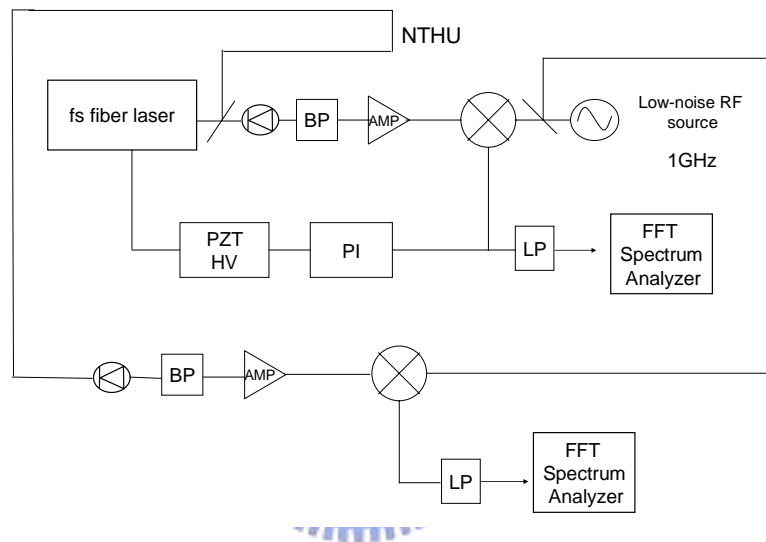


【圖 3-12】脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 穩頻架構圖

脈衝重複頻率 f_{rep} 鎖住之後我們要如何來探討其微波頻率的穩定度呢？分為在頻域上的量測相位雜訊以及在時域上的量測頻率穩定度，將在以下兩個小節分別介紹。

3-3.2 頻域上量測相位雜訊

【圖 3-13】為量測鎖模光纖雷射相位雜訊架構圖

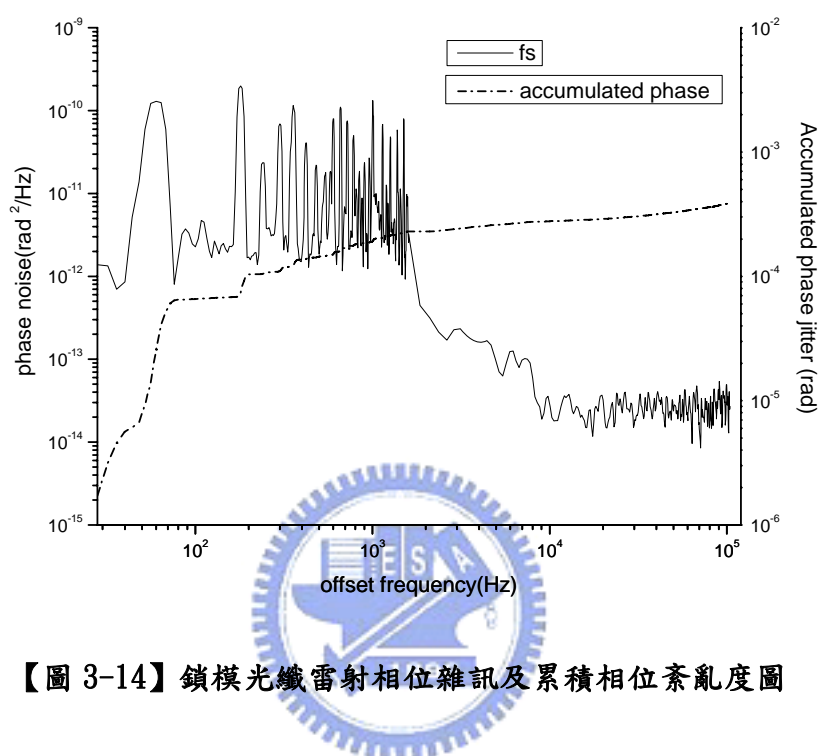


【圖 3-13】頻域量測鎖模光纖雷射相位雜訊架構圖

將由頻率混頻器輸出的誤差訊號(error signal)一部分送至鎖相迴路(phase-locked loop; PLL)用作迴授控制，一部分經過一低通濾波器(Mini-Circuits SLP 1.9)，傳到快速傅立葉轉換訊號分析儀(Fast Fourier Transform(FFT) signal analyzer HP 35670A)，量測相位雜訊 (phase noise)，利用第二章原理部分介紹的相位雜訊頻譜積分換算可得到時序紊亂度約為 62 fs，量測結果為【圖 3-14】所示。左邊的縱軸為單邊帶相位雜訊頻譜，右邊的縱軸則為對頻率積分後得到的累積相位紊亂度。由於快速傅立葉轉換訊號分析儀(Fast Fourier Transform(FFT) signal analyzer HP 35670A)能量取範圍只到 104 KHz，所以本實驗相位雜訊量取

範圍為 0.1 Hz ~ 104 KHz。為了能比較清楚觀察較低頻與較高頻的相位雜訊，相位雜訊做了兩段的量取，分別為 0.1 Hz ~ 1.6 KHz，以及 1.6 KHz ~ 104 KHz。

【圖 3-14】中可看到，在有些 60Hz 的整數倍諧波會有較大的峰值，ex：180Hz、300Hz，這是由於實驗室環境中交流電的影響所產生的現象。



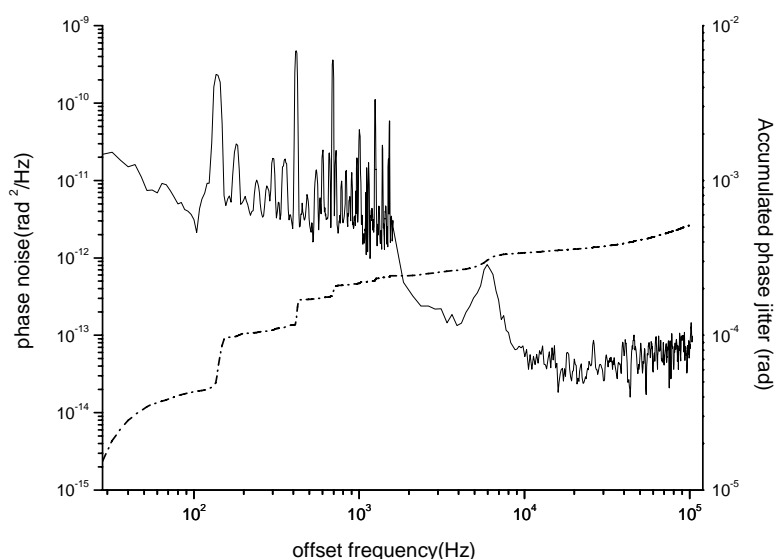
【圖 3-14】鎖模光纖雷射相位雜訊及累積相位紊亂度圖

如【圖 3-15】所示，我們在工研院 16 館 229 室及國立清華大學物理館 307 室(施宙聰教授的雷射光譜實驗室)之間，接了一段光纜(CMS-NTHU fiber cable)以做光纖傳輸(fiber transmission)的應用，來回全程(round-trip)總長為 3 km，藉由量測經過光纜後傳回工研院微波頻率訊號的相位雜訊(頻率穩定度)，與未經過光纜傳遞的微波頻率訊號作比較，探討相位雜訊(頻率穩定度)是否會因為光纖傳遞後而變大(差)。



【圖 3-15】連接工研院 16 館 229 室及國立清華大學物理館 307 室間的光纜路線圖

所以同樣的，將經過光纜傳回工研院後相位偵測器所偵測到的微波頻率訊號和一台低雜訊微波頻率源輸出的 1GHz 信號送到頻率混頻器混頻，將由頻率混頻器輸出的誤差訊號(error signal)經過一低通濾波器(Mini-Circuits SLP 1.9)傳到快速傅立葉轉換訊號分析儀(Fast Fourier Transform(FFT) signal analyzer HP 35670A)，量測相位雜訊，利用相位雜訊頻譜積分換算可得到時序紊亂度約為 83 fs，相位雜訊及累積相位紊亂度為【圖 3-16】所示。

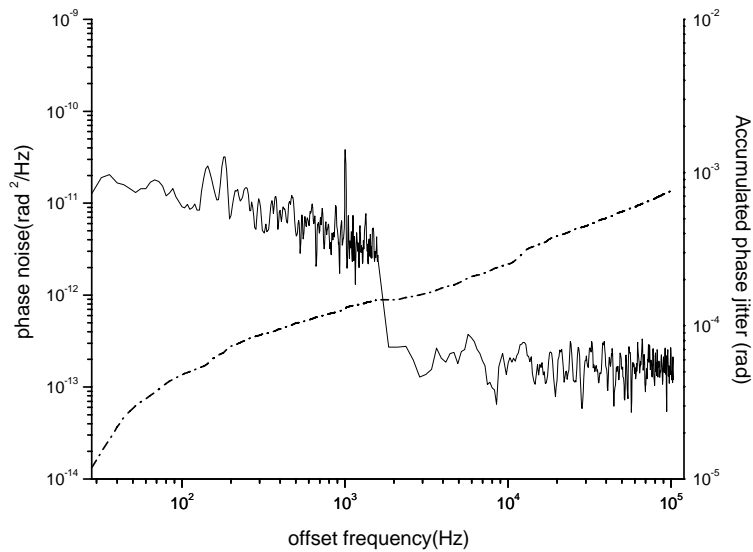


【圖 3-16】鎖模光纖雷射經光纜傳回工研院後相位雜訊以及累積相位紊亂度圖

以上我們可以看出，經過光纜傳遞微波頻率標準後，光纖傳遞 1 km 會使得時序紊亂度多了 7 fs，這也可以看成是因為光纖所引進的相位雜訊，使得雷射光脈衝的抖動增加了。

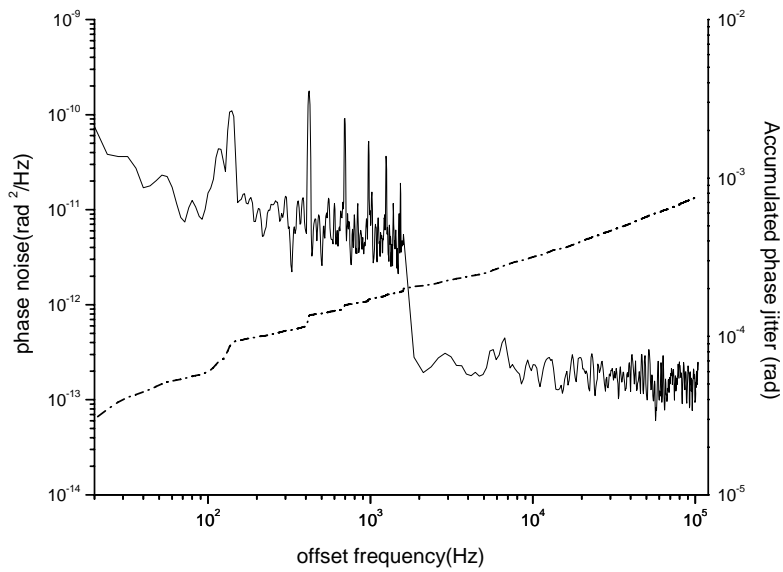
為了探討光纜之光纖長度長短，是否會讓回傳後的微波頻率訊號相位雜訊有所改變，我們做了兩個實驗，分別為原先的光纜來回全程(round-trip)為 3 km 外，一個實驗中多接了一捆 4.5 km 的光纖(4.5km-long fiber)，以及另一個實驗中多接了一捆 4.5 km 和 2.5 km 的光纖(4.5+2.5km-long fiber)。

首先，我們將多接上 4.5 km 光纖，再經過光纜傳回工研院後，相位偵測器所偵測到的微波頻率訊號和一台低雜訊微波頻率源輸出的 1GHz 信號送到頻率混頻器混頻，將由頻率混頻器輸出的誤差訊號(error signal)經過一低通濾波器(Mini-Circuits SLP 1.9)傳到快速傅立葉轉換訊號分析儀(Fast Fourier Transform(FFT) signal analyzer HP 35670A)，量測相位雜訊，利用相位雜訊頻譜積分換算可得到時序紊亂度約為 122 fs，相位雜訊及累積相位紊亂度為【圖 3-17】所示。



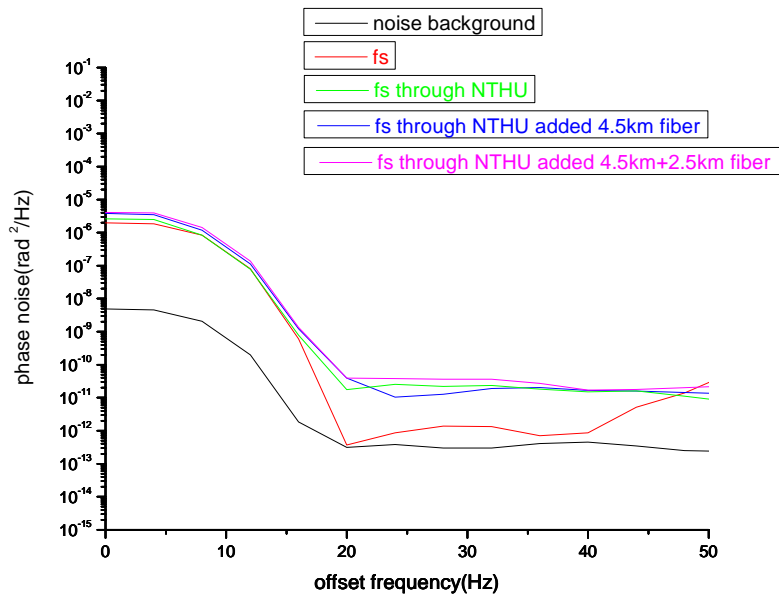
【圖 3-17】 鎖模光纖雷射經 4.5km fiber 及光纜傳回工研院後
 相位雜訊以及累積相位紊亂度圖

同樣的，我們將多接上 4.5 km 和 2.5 km 光纖，再經過光纜傳回工研院後，相位偵測器所偵測到的微波頻率訊號和一台低雜訊微波頻率源輸出的 1GHz 信號送到頻率混頻器混頻，將由頻率混頻器輸出的誤差訊號(error signal)經過一低通濾波器(Mini-Circuits SLP 1.9)傳到快速傅立葉轉換訊號分析儀(Fast Fourier Transform(FFT) signal analyzer HP 35670A)，量測相位雜訊，利用相位雜訊頻譜積分換算可得到時序紊亂度約為 121 fs，相位雜訊及累積相位紊亂度為【圖 3-18】所示。



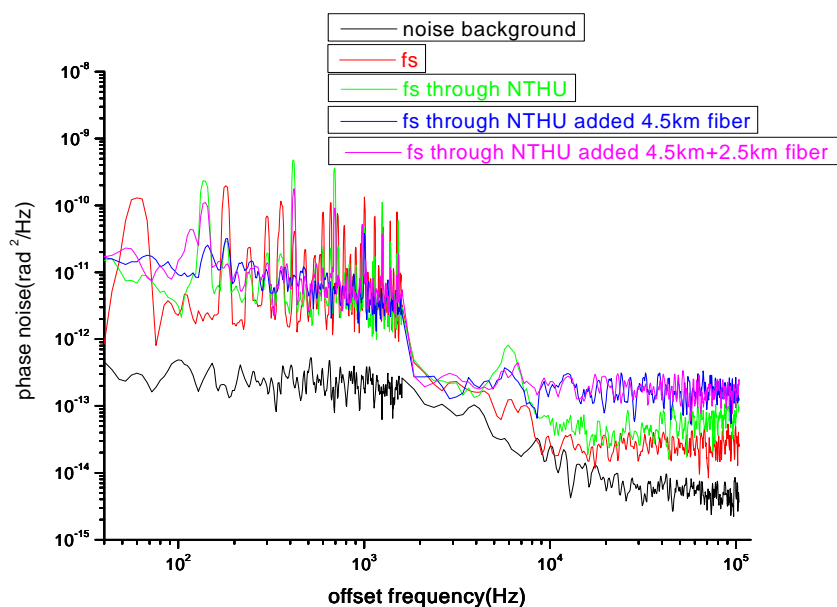
【圖 3-18】鎖模光纖雷射經 4.5km + 2.5km fiber 及光纜傳回工研院後
 相位雜訊以及累積相位紊亂度圖

【圖 3-19】為在較低頻 (0.1 Hz ~ 50 Hz) 時量取的單邊帶相位雜訊頻譜，可以看出大約在 0.1 Hz ~ 15 Hz 時的相位雜訊，不會因為經過光纜的傳遞，以及多接了光纖使得傳遞長度增加，而讓相位雜訊有明顯增加。



【圖 3-19】各種情形的相位雜訊比較圖(0.1 Hz ~ 50 Hz)

【圖 3-20】為各種情形下的單邊帶相位雜訊頻譜比較(0.1 Hz ~ 104 KHz)，可以看出在高頻(1.6 KHz ~ 104 KHz)時，經過光纜傳遞微波頻率後的相位雜訊明顯增加，以及多接了 4.5 Km 的光纖及 4.5 Km 和 2.5 Km 的光纖後，經過光纜傳遞微波頻率後的相位雜訊在 8 KHz 開始明顯增加，這些在高頻相位雜訊的增加，是否是造成頻率穩定度變差的原因，在之後介紹的時域量測 Allan deviation 中，會做一個更直接的比較。



【圖 3-20】各種情形的相位雜訊比較圖(0.1 Hz ~ 104 KHz)

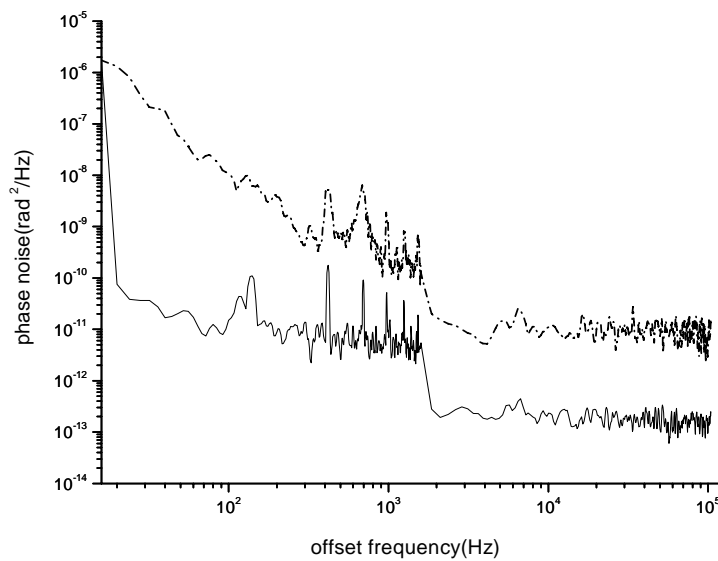
光纖特性容易因環境因素變化影響而有所改變，由於工研院連接到國立清華大學的光纜(CMS-NTHU fiber cable)大部分是地下管線，如此一來，我們無法探討外在環境的改變，是否因為光纖的變化而造成傳遞後微波頻率訊號相位雜訊的增加。所以我們改變實驗室內環境，藉由觀察實驗中多接了 4.5 km 及 2.5 km 的光纖再經過光纜後微波頻率訊號的相位雜訊，來探討環境改變對相位雜訊的關係。

如【圖 3-21】所示，我們以手動來外加一個振動(vibration)，影響放在實驗室的 2 個 4.5 km 及 2.5 km 的光纖，可以看出，經過光纜傳回後的微波頻率

訊號，量測到的相位雜訊明顯增加許多，這是由於群組延遲(group delay)的改變，而群組延遲對光纜的影響，相當於產生一個大量的雜訊干擾。

另外，溫度的變化亦會造成群組延遲(group delay)，玻璃的膨脹係數為 9×10^{-6} ，若溫度改變 0.1°C ，則會有 $\frac{0.1 \times 9 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 9 \text{ ps}$ 的群組延遲，所以亦會造成相位雜訊的增加。

這些環境的改變，都會影響光纖特性，進而影響到頻率標準傳遞後的頻率穩定性。

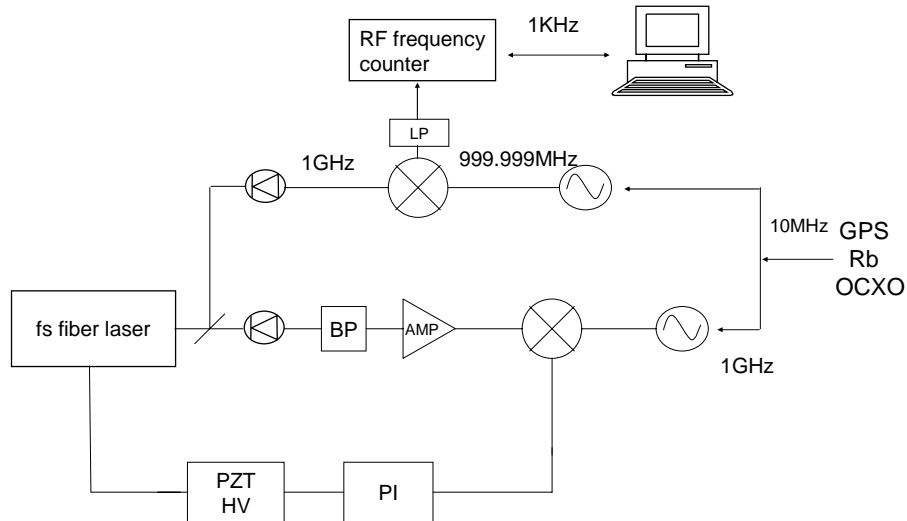


【圖 3-21】手動外加一振動後相位雜訊比較圖

3-3.3 時域上量測頻率穩定度:Allan deviation

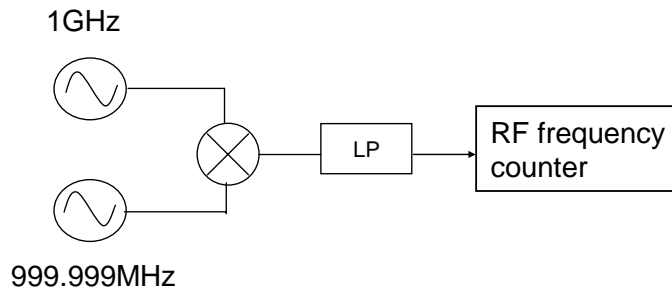
在時域上量測微波頻率穩定度的架構如【圖 3-22】所示，為了鎖住脈衝重複頻率，我們先將其第 10 倍諧頻和一台頻率設定在 1GHz 的頻率合成器(RF synthesizer Agilent E4400B)混頻，藉由控制雷射腔上的壓電致動器(PZT)，可以將脈衝重複頻率鎖在 1GHz 信號上，再用另一個光偵測器偵測鎖頻後的脈衝重複頻率，然後和一台頻率設定在 999.999 MHz 的頻率合成器(RF synthesizer Agilent E4423B)送到頻率混頻器去混頻，把偵測到的脈衝重複頻率降到 1 KHz 後才由

頻率計數器 (Agilent 53132A) 去計頻。

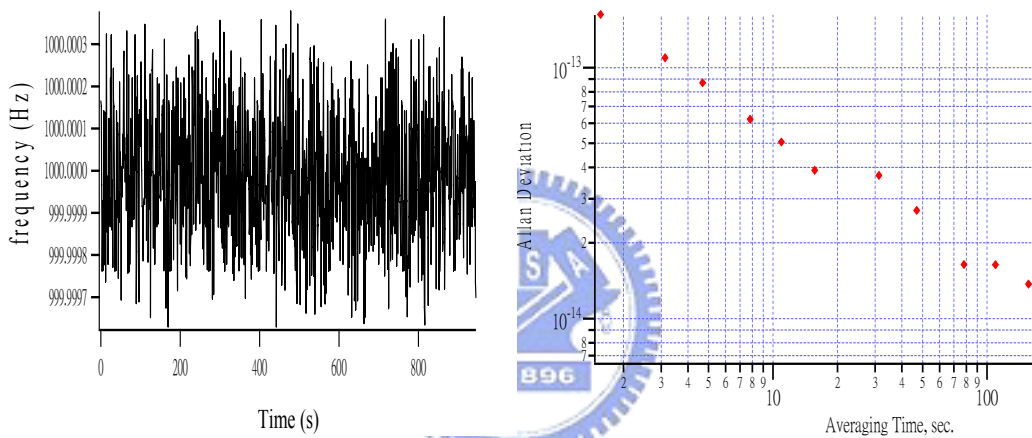


【圖 3-22】時域量測穩頻後的脈衝重複頻率變化架構圖

首先我們要先知道整個量測系統所能量測到頻率穩定度的極限。由一台頻率設定在 1GHz 的頻率合成器 (RF synthesizer Agilent E4400B) 以及一台頻率設定在 999.999 MHz 的頻率合成器 (RF synthesizer Agilent E4423B) 送到頻率混頻器去混頻，把信號頻率降到 1 KHz 後才由頻率計數器 (Agilent 53132A) 去計頻，架構為【圖 3-23】所示。而頻率計數器的準確度到 mHz。頻率合成器和頻率計數器的時基都是參考到低雜訊微波頻率源，即為銣 (Rb) 原子鐘輸入一 10 MHz 的訊號作為頻率標準，其中 10 MHz 參考信號在積分時間為 1 秒時，穩定度可達到 2×10^{-12} 。【圖 3-24】為在閘門時間 (gate time) 為 1 秒，無感時間 (dead time) 為 0.57 秒時量測到的信號頻率變化，標準差為 0.16 mHz，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 1.6×10^{-13} ，這個值即為整個量測系統所能量測到頻率穩定度的極限。



【圖 3-23】測量系統量測極限架構圖



【圖 3-24】頻率穩定度系統量測極限

由於發生在光偵測器中振幅雜訊對相位雜訊的轉換，以及入射到光偵測器偵測到的光強度大小，對偵測到的頻率穩定度有著十分重要的影響^[36]。

所以我們在達到良好的訊噪比(Signal-to-Noise Ratio; SNR)下，做了調整光偵測器角度來改變入射光偵測器的光強度(脈衝重複頻率 f_{rep} 穩頻後經光纜傳回後的微波頻率訊號)實驗，表中顯示在偵測到不同光強度下所測得的頻率穩定度，包含了穩頻後的重複頻率穩定度以及穩頻後經光纜傳回後的重複頻率穩定度，其中【表 3-1】中第一列是改變入射光強度所量到的值，為 1GHz 的信號經過放大器後在頻譜分析儀(Agilent E4411B)上量得的訊號大小。

【表 3-1】中，為在閘門時間(gate time)為 1 秒，無感時間(dead time)為 0.57

秒時量測到的信號頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 值，所以我們採取在 1 GHz 的信號經過放大器後在頻譜分析儀上量得的訊號大小為 -11db 的情形下，來做我們量測重複頻率穩定度的各個實驗。3-3.2 節量測到的相位雜訊，亦是在此情況下量得。

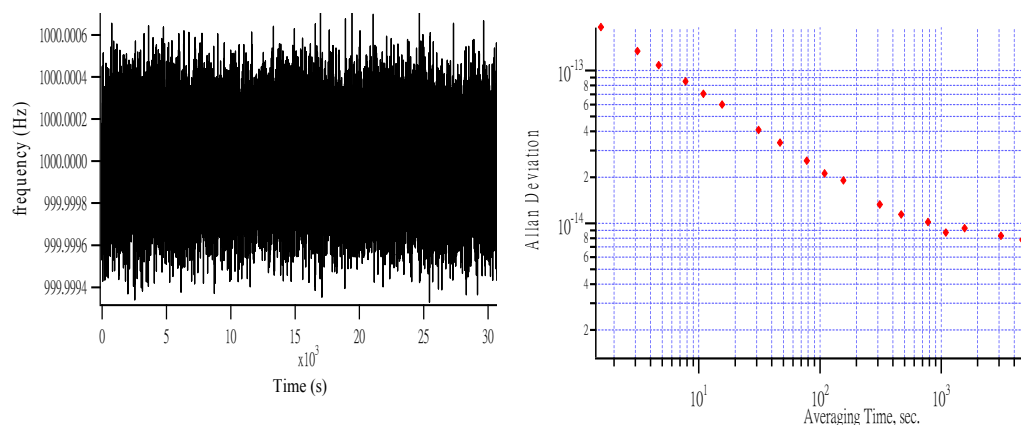
	-16db	-15db	-14db	-13db	-12db
穩頻後的重複頻率穩定度	2.6×10^{-13}	2.31×10^{-13}	2.4×10^{-13}	2.2×10^{-13}	1.9×10^{-13}
穩頻後經光纜傳回後的重複頻率穩定度	3.1×10^{-13}	2.8×10^{-13}	2.3×10^{-13}	2.4×10^{-13}	2.2×10^{-13}

	-11db	-10db	-9db	-8db	-7db
穩頻後的重複頻率穩定度	1.9×10^{-13}	2.1×10^{-13}	2.2×10^{-13}	2.4×10^{-13}	2.4×10^{-13}
穩頻後經光纜傳回後的重複頻率穩定度	2.0×10^{-13}	2.1×10^{-13}	2.5×10^{-13}	2.4×10^{-13}	2.7×10^{-13}

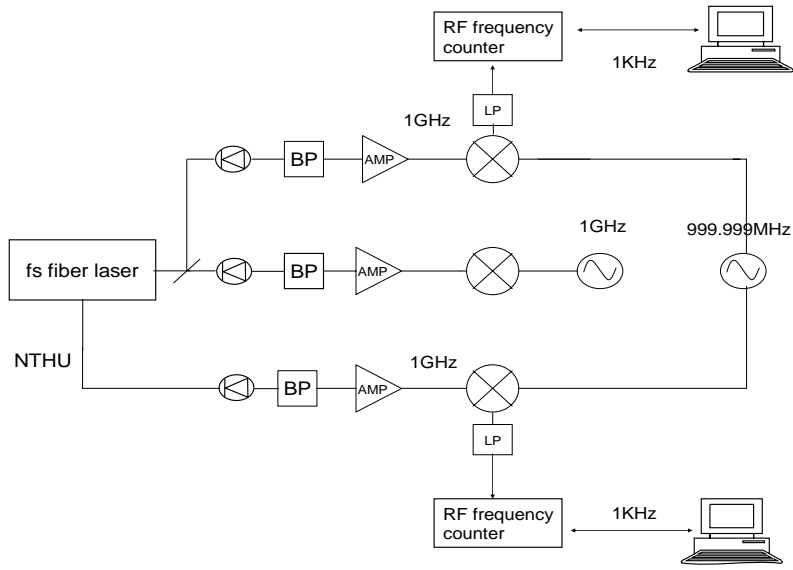
【表 3-1】調整光偵測器角度來改變入射光強度所量得的重複頻率穩定度變化

【圖 3-25】為在開門時間(gate time)為 1 秒，無感時間(dead time)為 0.57 秒時量測到的脈衝重複頻率變化，標準差為 0.19 mHz，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 1.9×10^{-13} ，這個穩定度只是表示脈衝重複頻率追蹤低雜

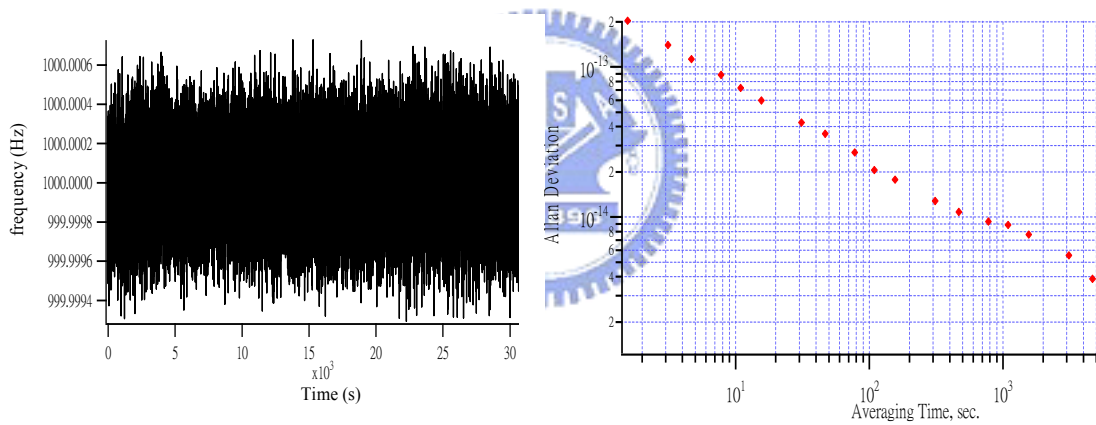
訊頻率源的能力，由於這個能力優於低雜訊頻率源的穩定度，所以表示脈衝重複頻率的穩定度與低雜訊頻率源的穩定度一樣。由於系統中經過光纜傳回工研院後的脈衝重複頻率，可由另一個獨立的光偵測器偵測，所以可以藉由【圖 3-26】的接法，能達到在同一時間內量取雷射本身脈衝重複頻率的變化以及經過光纜傳回工研院後的脈衝重複頻率變化。而經過光纜傳回工研院後的脈衝重複頻率變化，在開門時間(gate time)為 1 秒，無感時間(dead time)為 0.57 秒時所量測到的結果如【圖 3-27】所示，標準差為 0.20 mHz，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 2.0×10^{-13} 。我們同樣也量取了多接上 4.5 km 光纖，再透過光纜經過清大再傳回後的脈衝重複頻率變化，在開門時間(gate time)為 1 秒，無感時間(dead time)為 0.57 秒時所量測到的結果如【圖 3-28】所示，標準差為 0.21 mHz，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 2.1×10^{-13} 。而多接上 4.5 km 和 2.5 km 光纖，再透過光纜經過清大再傳回後的脈衝重複頻率變化，在開門時間(gate time)為 1 秒，無感時間(dead time)為 0.57 秒時所量測到的結果如【圖 3-29】所示，標準差為 0.22 mHz，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 2.2×10^{-13} 。以上可以看出，經過光纜傳遞微波頻率導致頻率不穩定度大約為 10^{-14} (積分時間為 1 秒時)，而接長光纖經過光纜傳遞微波頻率則導致頻率不穩定度大約為 3×10^{-14} (積分時間為 1 秒時)，由於現在頻率標準做到 10^{-13} 已經是很好，所以這個變化對於現階段的頻率標準量測來講影響不是很大。



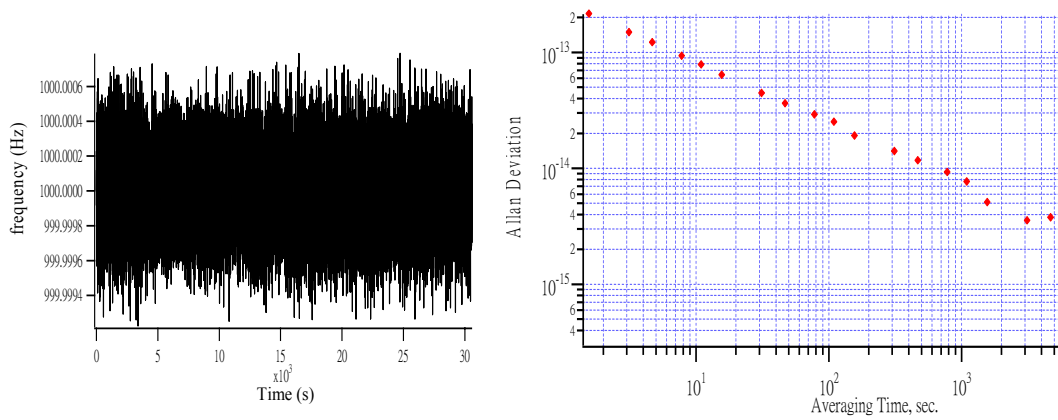
【圖 3-25】穩頻後的脈衝重複頻率變化以及其 Allan deviation



【圖 3-26】同時量測穩頻後的脈衝重複頻率變化架構圖

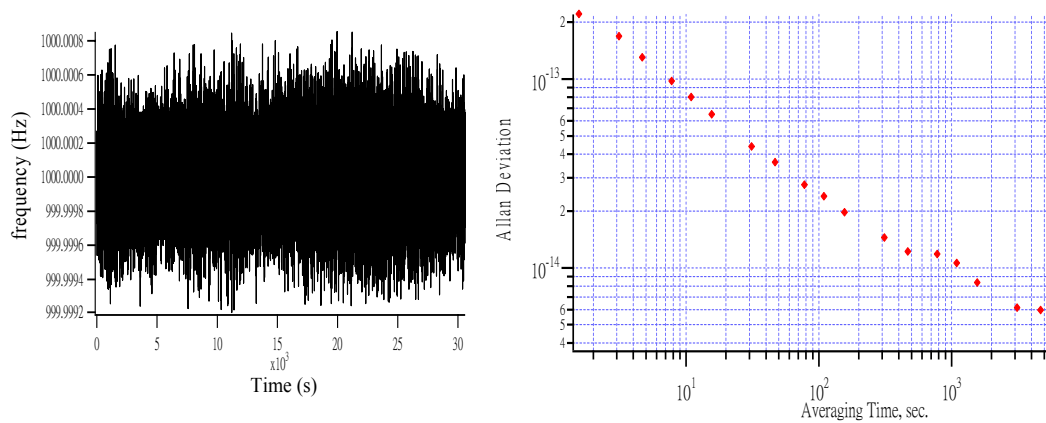


【圖 3-27】穩頻後經光纜傳回後的脈衝重複頻率變化以及其 Allan deviation



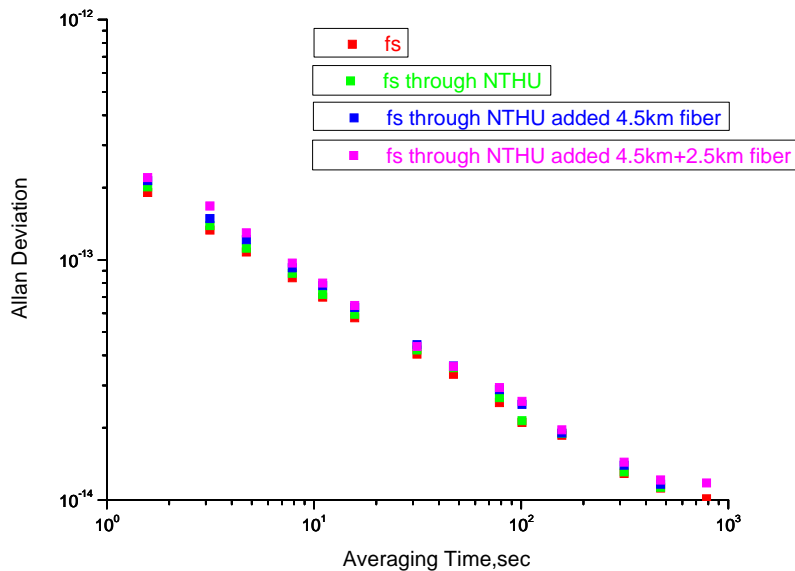
【圖 3-28】穩頻後經 4.5km fiber 及光纜傳回後的脈衝重複頻率變化以及其

Allan deviation



【圖 3-29】穩頻後經 4.5km + 2.5km fiber 及光纜傳回後的脈衝重複頻率變化以及其 Allan deviation

【圖 3-30】為各種情形下的 Allan deviation 比較圖(積分時間到 1000 秒)，可以看到即使經過比較長的積分時間，大致上來說，雷射本身的脈衝重複頻率穩定度還是優於經過光纜傳遞後的重複頻率穩定度，經過光纜傳遞後的重複頻率穩定度亦優於接長了光纖(4.5 km 以及 4.5 km+2.5 km)後經過光纜傳遞後的重複頻率穩定度。



【圖 3-30】穩頻後各種情形的脈衝重複頻率 Allan deviation 比較圖

3-3.4 相位雜訊與 Allan deviation 的換算

對一個微波振盪器 (microwave oscillator) 而言，考慮一個正弦輸出電壓 $V(t)$

$$V(t) = V_o[1 + \varepsilon(t)]\sin[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] \quad (3.29)$$

其中 V_o 和 ν_0 為主要的振幅和頻率， $\varepsilon(t)$ 和 $\varphi(t)$ 代表振幅雜訊和頻率雜訊。而相位雜訊主要的量測是 $\varphi(t)$ 的能量頻譜密度 S_φ (power spectral density; PSD)。

根據對瞬時頻率最普遍的定義，瞬時頻率可以寫成：

$$\nu(t) = \nu_0 + (1/2\pi)\dot{\varphi}(t) \quad (3.30)$$

穩定的頻率產生器會滿足：

$$|\dot{\varphi}(t)| / 2\pi\nu_0 \ll 1 \quad (3.31)$$

我們利用 Barnes et al^[37] 所提出的方程式：

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_0} \quad \text{and} \quad y(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad (3.32)$$

$x(t)$ 和 $y(t)$ 分別代表相位與頻率比值 (fractional frequency)。

頻率比值的能量頻譜可以寫成：

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha f^\alpha \quad (3.33)$$

相位的能量頻譜可以寫成：

$$S_x(f) = \left(\frac{1}{4\pi^2 f^2}\right) S_y(f) \quad (3.34)$$

而相位雜訊 $\varphi(t)$ 的的能量頻譜密度 S_φ 可以寫成：

$$S_\varphi(f) = (2\pi\nu_0)^2 S_x(f) \quad (3.35)$$

其中

$S_\varphi(f)$ 的單位是 $(rad)^2 Hz^{-1}$ ；

$S_x(f)$ 的單位是 $s^2 Hz^{-1}$ ；

$S_y(f)$ 的單位是 Hz^{-1} 。

ν_0 為主要頻率，亦是載波頻率，實驗中我們量取的是 1 GHz 的相位雜訊頻譜，所以 ν_0 用 1 GHz 代入，為一常數(constant)。

相位雜訊可依(3.36)式換算成Allan deviation^[38]

$$\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle = \int_0^\infty S_y(f) \frac{1}{1+(f/f_c)^2} |H_2(f)|^2 df \quad (3.36)$$

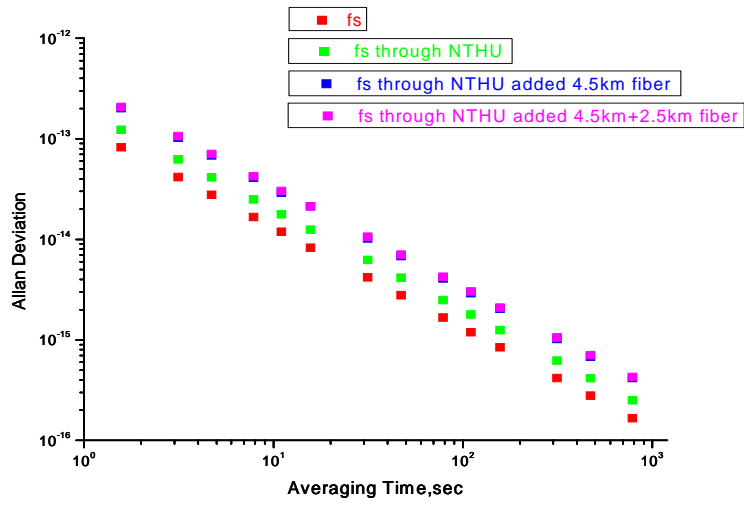
其中

$$|H_2(f)|^2 = 2 \left[\frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right] (\sin \pi f T)^2$$

f_c 為截止頻率(cutoff frequency)

【圖 3-31】為相位雜訊能量頻譜密度 S_ϕ 先經過(3.34)、(3.35)式換算成 $S_y(f)$ 後，再代入(3.36)式計算後得到的Allan deviation圖(積分時間到 1000 秒)，鎖模光纖雷射的脈衝重複頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation為 8.3×10^{-14} ；鎖模光纖雷射經光纜傳回後的脈衝重複頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation為 1.2×10^{-13} ；鎖模光纖雷射經 4.5 km fiber 及光纜傳回後的脈衝重複頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation 為 2.0×10^{-13} ；鎖模光纖雷射經 4.5 km + 2.5 km fiber及光纜傳回後的脈衝重複頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation為 2.1×10^{-13} 。

由於(3.36)式中的頻率積分範圍為 0 到無窮大，但由於實驗量測儀器的能力只能量測到 104 KHz (f_c 值為 104 KHz)，所以計算出來的值會略小於在時域上量測時所量測得到的 Allan deviation 值。不過可以從這個 Allan deviation 換算中驗證，在頻域上量測所量到的相位雜訊若比較大，經過(3.36)式計算出來的 Allan deviation 值亦會比較大，再對應到我們在時域上量測所量測到的 Allan deviation 值，可以得知頻域上量測到的相位雜訊大，相對的在時域上量測到的頻率穩定度也會比較差。

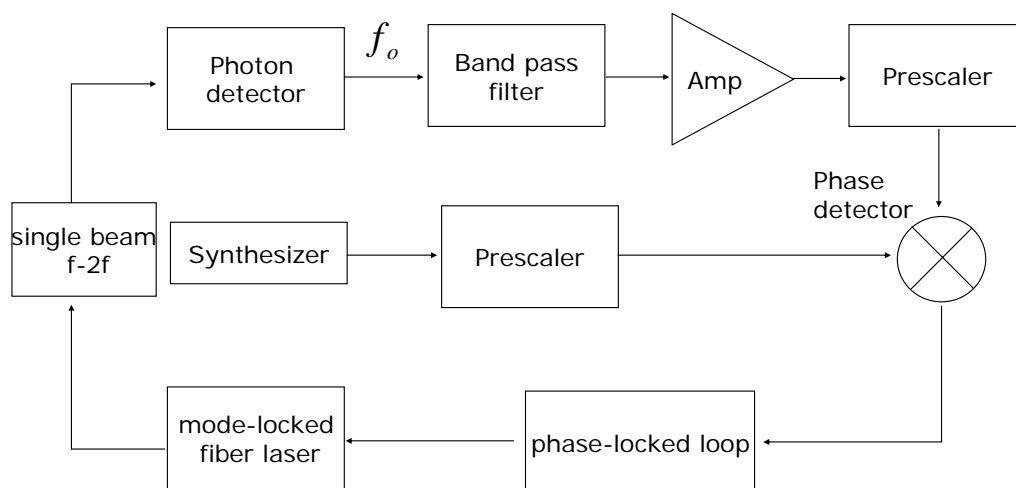


【圖 3-31】各種情形的相位雜訊經公式換算後得到的 Allan deviation 圖



第四章 在光纖上利用鎖模光纖雷射傳遞光波頻率標準

要利用鎖模光纖雷射傳遞光波頻率標準，必須同時把脈衝重複頻率 f_{rep} (repetition frequency) 和偏差頻率 f_o (offset frequency) 鎖定在其特定頻率。當脈衝重複頻率 f_{rep} 和偏差頻率 f_o 穩頻時，表示每個光梳頻率是固定的，此時傳遞的鎖模雷射，可視為多個光波頻率標準。【圖 4-1】即為鎖模光纖雷射其偏差頻率 f_o (offset frequency) 穩頻區塊示意圖，實驗中利用了鎖相迴路回授控制鎖模光纖雷射的 f_o ，和脈衝重複頻率 f_{rep} 穩頻不同的是，迴授電路中用的是數位式相位偵測器以及使用了除頻器 (prescaler)，將其偏差頻率 f_o 鎖定在頻率合成器 (synthesizer) 輸出的特定頻率。傳遞光波頻率標準實驗中，引進了一個連續波雷射當作媒介，與飛秒光梳頻系統產生拍頻，用來量測傳遞後光波頻率標準的穩定度。



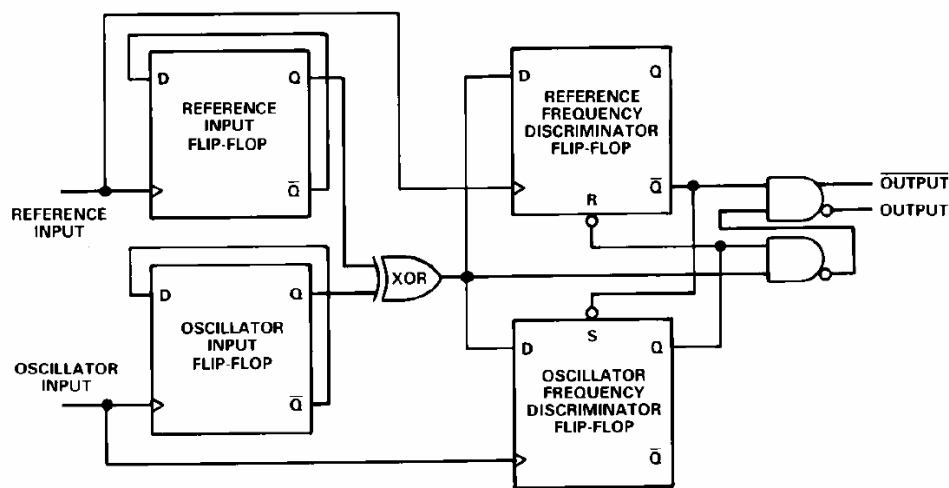
【圖 4-1】偏差頻率 f_o (offset frequency) 穩頻區塊示意圖

4-1 迴授電路

相位偵測器

在相位偵測器上，我們使用主要由 AD9901 所構成的“數位式相位偵測器”^[39]。AD9901 是一種超快速的相位/頻率鑑別器，其響應頻率可達 200 MHz，主要構造如【圖4-2】，為四個D type flip-flop 跟一個 exclusive-OR gate (XOR)。整個電路操作在兩個模態：作為線性相位偵測器或是作為頻率鑑別器。

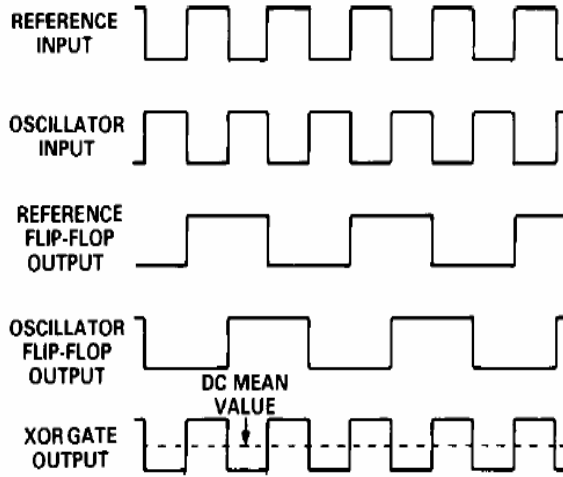
FUNCTIONAL BLOCK DIAGRAM



【圖4-2】AD9901 結構圖

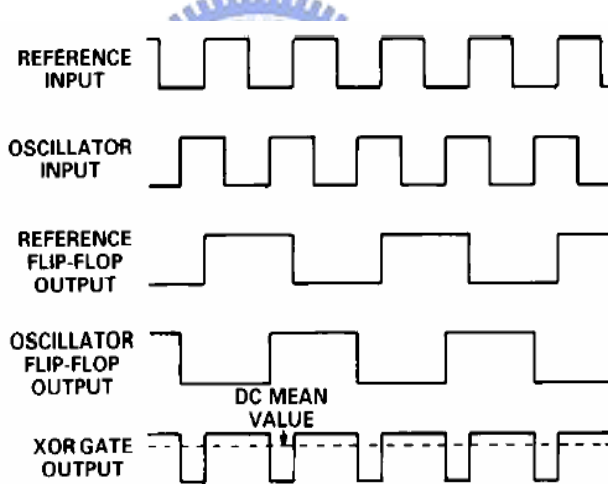
當輸入的振盪頻率跟參考頻率很接近時，它會作為相位偵測器。就是在接近鎖相的情況時，他會直接去量測兩個輸入訊號的相位差，任何相位的變動會使得輸出端產生變化。

當在鎖相狀況時，如【圖 4-3】，參考端跟振盪端的相位差會鎖在 180 度，輸出端為特定直流電壓均值(DC mean value)。



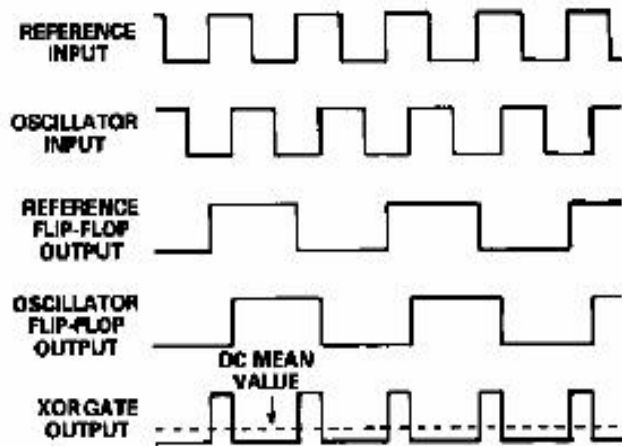
【圖 4-3】 鎖相狀況圖

在接近鎖相時，如【圖4-4】，若振盪源的相位領先參考源的相位時，輸出端的直流電壓訊號值大於該特定直流電壓均值。



【圖 4-4】 鎖相狀況圖震盪源領先參考源時

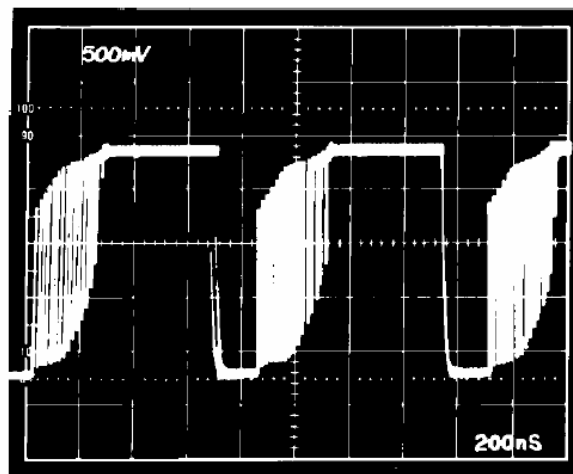
在接近鎖相時，如【圖4-5】，若振盪源的相位落後參考源的相位時，輸出端的直流電壓訊號值小於該特定直流電壓均值。



【圖4-5】 鎖相狀況圖震盪源落後參考源時

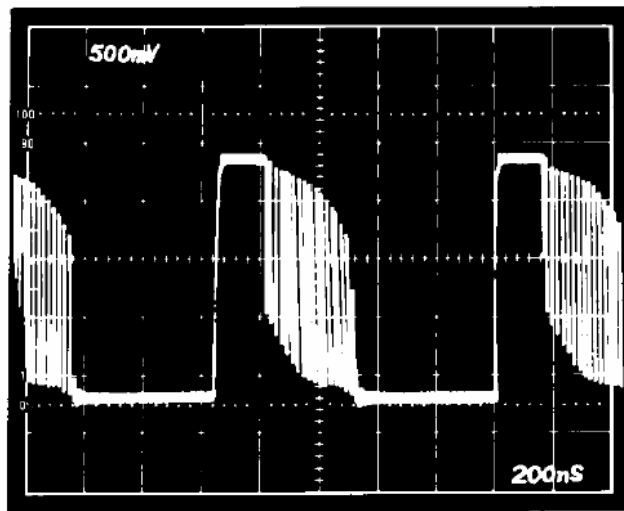
在輸入的震盪頻率跟參考頻率相差較遠時，它會作為頻率鑑別器。迴授到壓控振盪器VCO後，他的輸出端的直流電壓會保持在一個適當的準位把震盪頻率拉近參考頻率，一旦頻率差到達線性操作區域中時，相位偵測電路就會再次啟動而作為相位偵測器。

當震盪頻率遠小於參考頻率時，如【圖4-6】，輸出端的直流電壓值會保持在一正值以將震盪頻率拉近到參考頻率。



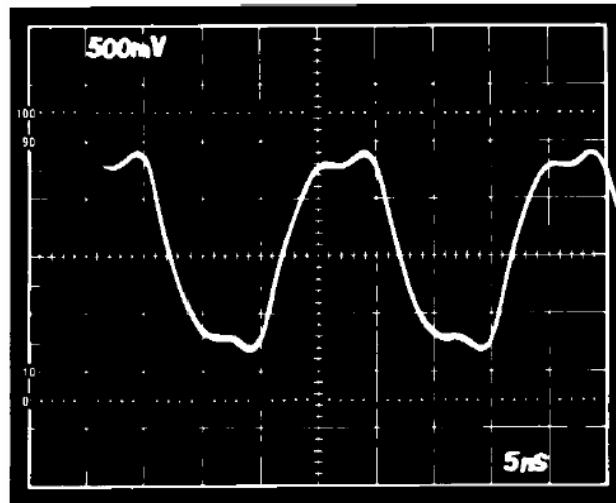
【圖4-6】 震盪頻率遠小於參考頻率時的輸出

當震盪頻率遠大於參考頻率時，如【圖4-7】，輸出端的直流電壓值會保持在一負值以將震盪頻率拉近到參考頻率。



【圖4-7】震盪頻率遠大於參考頻率時的輸出

當震盪頻率等於參考頻率時，此時的輸出來自於震盪頻率與參考頻率之間的相位差，如【圖4-8】所示。



【圖 4-8】震盪頻率與參考頻率相同時的輸出

除頻器(prescaler)

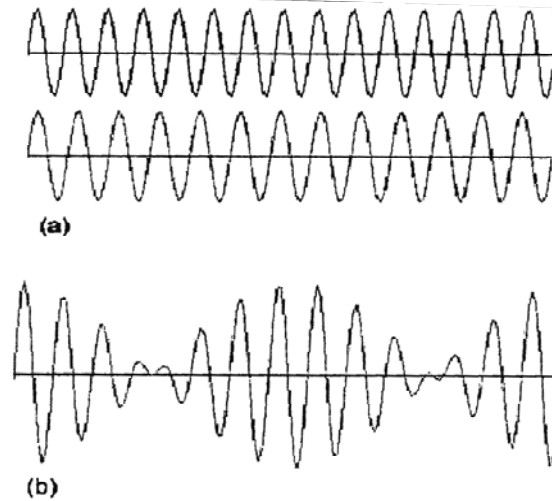
實驗中的鎖相迴路(PLL)參考源 f_{ref} ，是來自於頻率合成器的同步訊號。震盪源 $|f_{ECDL} - f_{comb}|$ 是來自於外腔式二極體雷射與飛秒鎖模雷射的拍頻訊號。由於相位偵測器的操作頻率最大極限大約在 200 MHz，偏差頻率 f_o 有時鎖定的頻率會大於 200 MHz，所以我們必須使用除頻器將震盪訊號頻率降低再輸入相位偵測器。同理參考源訊號頻率也是大於相位偵測器的操作頻率，所以也是要經過除頻器將參考源訊號頻率降低再輸入相位偵測器。

我們所使用的除頻器是 NEC 出產的 μ PB1509GV，它的輸入頻率極限是 1000 MHz，可以提供 2 倍除頻、4 倍除頻及 8 倍除頻。實驗中我們使用兩個 μ PB1509GV 晶片，利用跳線我們可選擇 16 倍除頻。

4-2 拍頻訊號

本實驗使用外腔式可調(tunable)二極體雷射(External Cavity Diode Laser ; ECDL)與飛秒鎖模雷射兩者之間的拍頻作為鎖相迴路中鎖相的訊號。將外腔式二極體雷射及鎖模光纖雷射兩道雷射光加以重合，由光偵測器接收後，即可得到拍頻訊號。

拍頻是一種隨時間變化的干涉現象。在【圖 4-9(a)】中有兩組波動，它們的頻率不同，但相差很小。【圖 4-9(b)】便是兩組波動疊加後的樣子，在開始時振幅很小，漸漸地振幅會變大，之後又回復到振幅較小的狀態，週而復始。



【圖 4-9】拍頻現象

在本實驗中，令外腔式二極體雷射的光波電場表示式為：

$$E_{ECDL} = A_{ECDL} e^{i\omega_{ECDL}t} \quad (4.1)$$

令飛秒鎖模雷射輸出的光梳電場表示式為：

$$E_{Comb} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t} \quad (4.2)$$

當外腔式二極體雷射的光與飛秒鎖模雷射輸出的光重合在一起時，

$$E_{total} = E_{ECDL} + E_{Comb} = A_{ECDL} e^{i\omega_{ECDL}t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t} \quad (4.3)$$

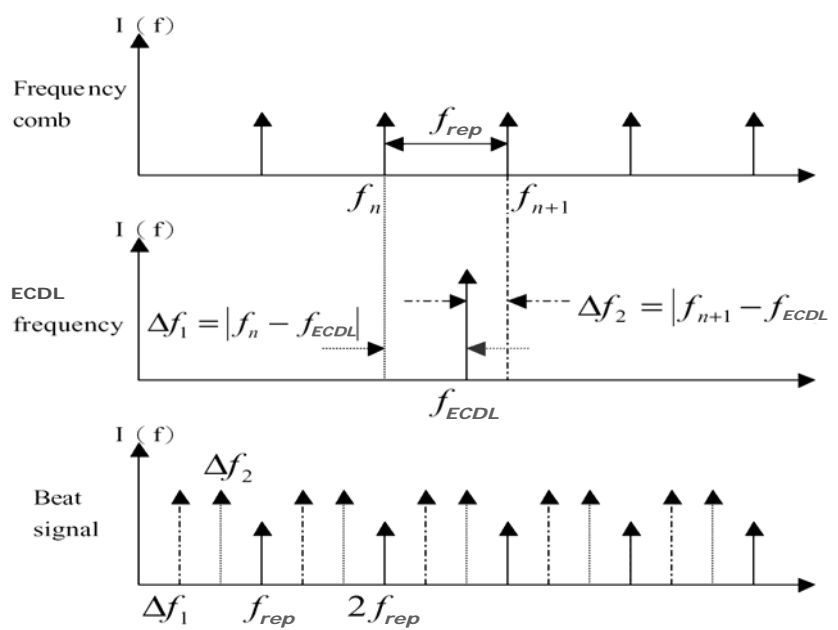
所以兩波相疊加後的光強度變為：

$$\begin{aligned} I_{total}^2 &= |E_{total}|^2 = E_{total} \cdot E_{total}^* \\ &= \left(A_{ECDL} e^{i\omega_{ECDL}t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t} \right) \cdot \left(A_{ECDL} e^{-i\omega_{ECDL}t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\omega_n t} \right) \\ &= A_{ECDL}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{ECDL} A_n e^{-i(\omega_n - \omega_{ECDL})t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{ECDL} A_n e^{i(\omega_n - \omega_{ECDL})t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\omega_n t} \\ &= A_{ECDL}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_{ECDL} A_n \cos[(\omega_n - \omega_{ECDL})t] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

所以當光偵測器偵測到以上的光波時，我們用頻譜分析儀觀察其輸出訊號，我們可以看到其頻譜包含數個頻率訊號，分別是外腔式二極體雷射與飛秒鎖模雷

射光梳的拍頻以及飛秒雷射光梳之間彼此的拍頻。

若我們令外腔式二極體雷射的頻率為 f_{ECDL} 、飛秒鎖模雷射光梳的頻率為 $f_n = nf_{rep}$ ，其中 n 是正整數。外腔式二極體雷射與飛秒鎖模雷射光梳之間的最小兩個拍頻就是 $\Delta f_1 = |nf_{rep} - f_{ECDL}|$ 以及 $\Delta f_2 = |(n+1)f_{rep} - f_{ECDL}|$ ；飛秒鎖模雷射光梳之間彼此的拍頻則是其光梳的頻率差 f_{rep} 與它的倍數。其示意圖如【圖 4-10】。

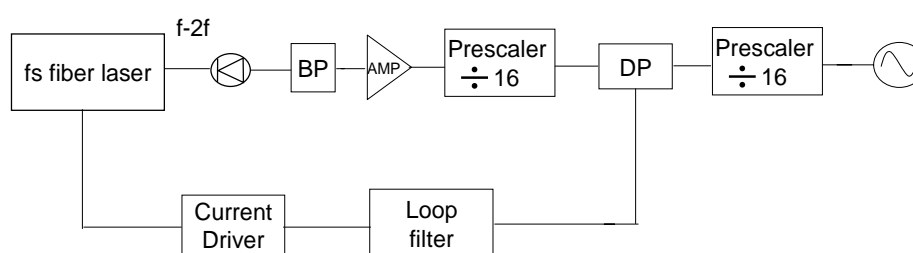


【圖 4-10】拍頻訊號示意圖

4-3 實驗方法與結果討論

4-3.1 偏差頻率 f_o (offset frequency) 的穩頻

如【圖 4-11】所示，將利用“f-2f self-referencing”技術偵測到的 f_o 信號和一台頻率合成器輸出的 140 MHz 信號都先經過除頻器 (prescaler) 後送到數位相位偵測器 (digital phase detector) 混頻，再由相位偵測器輸出的誤差訊號 (error signal) 送到鎖相迴路 (phase-locked loop; PLL)，藉由控制幫浦雷射的功率，由於幫浦雷射的功率影響脈衝雷射的功率，透過 Kerr 效應而改變折射率，來達到雷射偏差頻率 f_o 的穩頻。

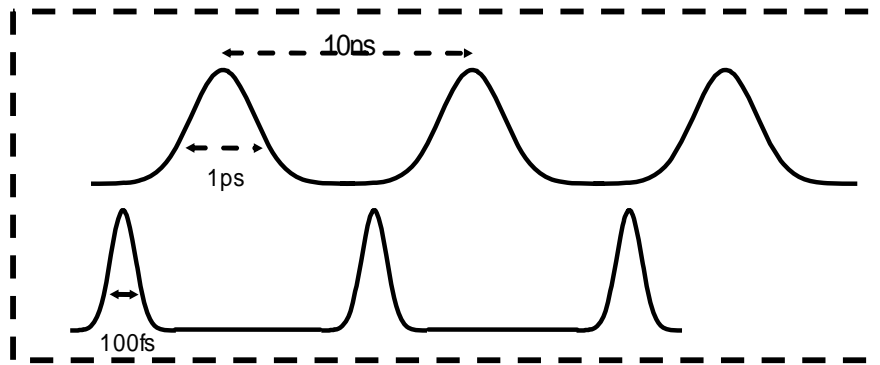


【圖 4-11】偏差頻率 f_o (offset frequency) 穩頻架構圖

4-3.2 量測飛秒光梳頻系統傳遞光波頻率的基本理論

我們想要探討光波頻率標準經過光纜傳遞後，是否還可以維持原先的頻率穩定度。實驗上有兩種作法，第一種作法是把未經過光纜的光梳及經過光纜傳遞後的光梳直接做比較，看頻率穩定度會改變多少，但是直接比較光梳時會有一個問題需要考慮，即是時間延遲 (time delay) 的問題。鎖模光纖雷射在經過放大，利用一段高非線性光纖 (HNLF)，再接上一段單模光纖 (SMF) 後，可以把脈衝寬度壓縮到 100 fs，而經過光纜後傳回的脈衝寬度會因為光纖的色散，使得脈衝寬度變寬為大約 1 ps，由於鎖模光纖雷射的脈衝重複頻率為 100 MHz，換算成週期相當於 $T=10$ ns (如【圖 4-12】所示)，如果沒有主動的調整時間延遲，在經過這麼

長的光纜後，兩個脈衝之間很可能會沒有重疊(overlap)，如此一來就會監測不到拍頻。另一方面，溫度的變化亦會造成群組延遲(group delay)，玻璃的膨脹係數為 9×10^{-6} ，若溫度改變 0.1°C ，則會有 $\frac{0.1 \times 9 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 9 \text{ ps}$ 的群組延遲，同樣的，會使得時間延遲的問題更加複雜。所以必須主動加上延遲線路(delay line)去調整時間延遲。



【圖 4-12】脈衝示意圖(上圖為經過光纜後傳回的雷射脈衝；
下圖為未經過光纜的雷射脈衝)

而我們使用第二種作法，引進了一個連續波雷射當作媒介，在實驗中我們使用的是外腔式二極體雷射，因為是連續波雷射，所以在時域上不會有時間延遲的問題，我們讓未經過光纜的光梳及經過光纜傳回後的光梳和連續波雷射分別產生拍頻，由於外腔式二極體雷射的輸出光在光波頻率範圍，所以藉由比較兩個拍頻，即可探討光波頻率標準經過光纜傳遞前後頻率穩定度變化的主題。

4-3.3 拍頻量測

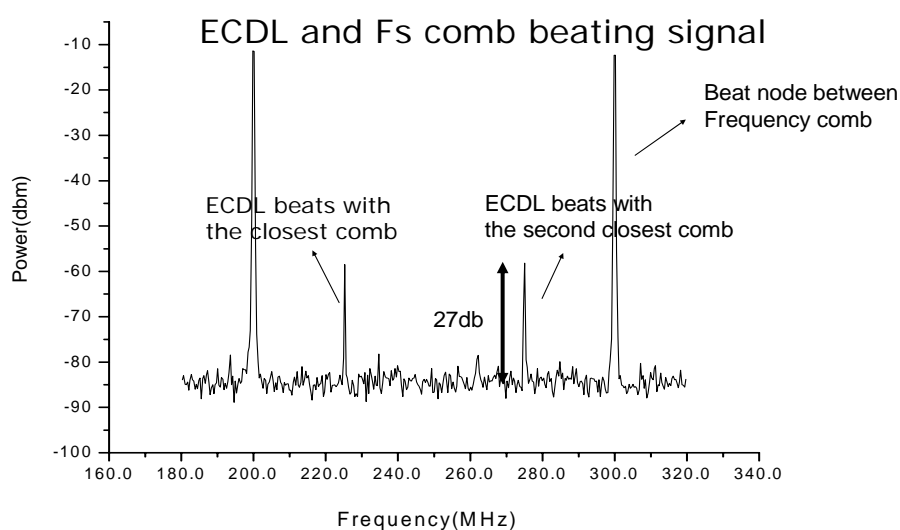
首先我們討論如何順利找到飛秒光梳和外腔式二極體雷射(New Focus 6300)產生的拍頻訊號，實驗上有幾點需要注意：

1. 飛秒光梳和外腔式二極體雷射兩者的極化不能是正交的(orthogonal)。
2. 飛秒光梳和外腔式二極體雷射的差頻是在偵測器的頻寬範圍內。

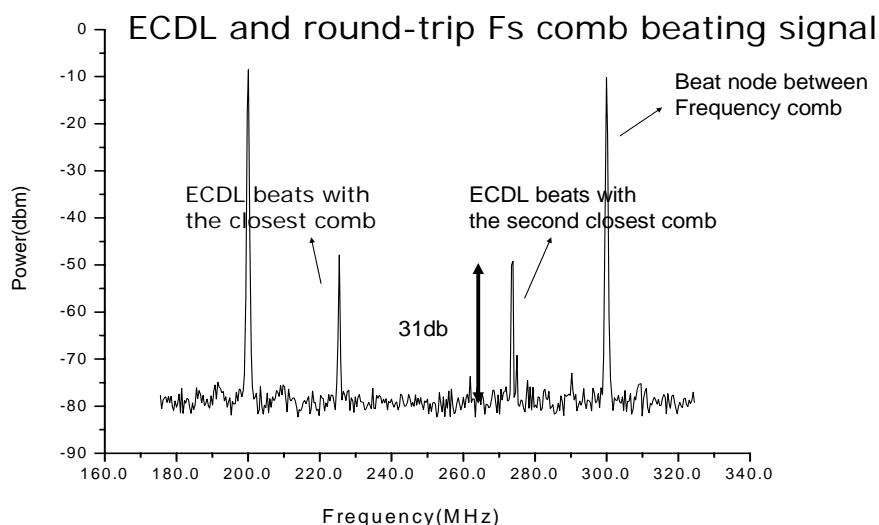
3. 偵測器頻寬範圍是適合飛秒光梳和外腔式二極體雷射波長做感測。

我們將光偵測器的輸出接至頻譜分析儀(Agilent E4411B)上去觀察光偵測器訊號的頻譜。當我們調整好光路使外腔式二極體雷射與飛秒鎖模雷射的光重合後，即可在頻譜分析儀上看到拍頻訊號，其結果如【圖4-13】所示。由於外腔二極體雷射在波長為1563.8 nm時有最強的光輸出，所以為了和飛秒光梳產生最大的拍頻，外腔式二極體雷射輸出波長就設定在1563.8 nm來進行接下來所有實驗的量測。

【圖4-13】為外腔式二極體雷射與飛秒光梳所產生的拍頻訊號。因為鎖模雷射的諧頻相差100 MHz，所以頻譜上會有 200 MHz 及 300 MHz的訊號代表鎖模雷射的諧頻彼此之間的拍頻。在 200 MHz 到 300 MHz之間有兩個頻率的訊號，分別在 200 MHz 到 250 MHz之間以及 250 MHz 到 300 MHz之間各有一個，一是外腔式二極體雷射與相距最近諧頻的拍頻，在圖中約是在 225 MHz；二是外腔式二極體雷射與相距第二近諧頻的拍頻，在圖中約是在 275 MHz，而拍頻大小為 27 dB。由於迴授電路電子元件的限制，拍頻的大小是要超過 30 dB 以上，才能將外腔式二極體雷射穩頻，所以必須將拍頻訊號調越大越佳。【圖4-14】為外腔式二極體雷射與經過光纜傳回後的飛秒光梳所產生的拍頻訊號，而拍頻大小為 31 dB。



【圖 4-13】外腔式二極體雷射與飛秒光梳拍頻訊號圖



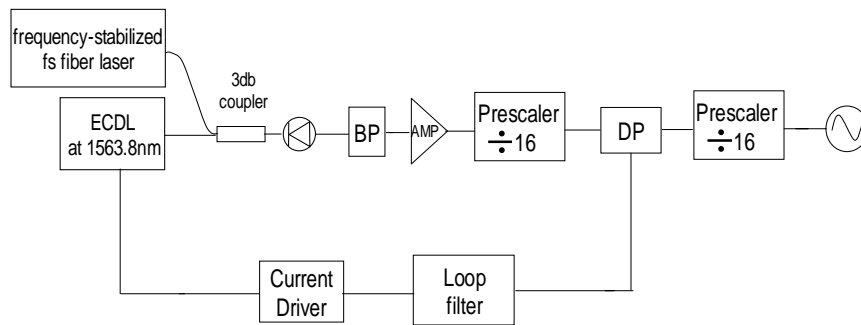
【圖 4-14】外腔式二極體雷射與經過光纜傳回後的飛秒光梳拍頻訊號圖

4-3.4 外腔式二極體雷射穩頻實驗方法與架構

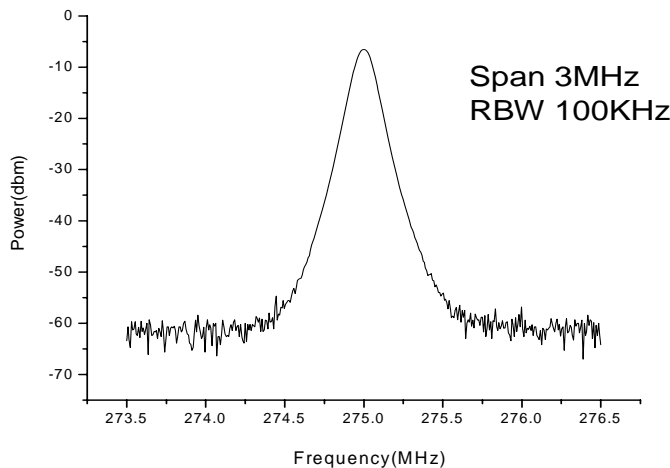
實驗中將外腔式二極體雷射(New Focus 6300)穩頻架構如【圖4-15】所示，將外腔式二極體雷射與飛秒鎖模雷射的輸出光重合後，照射在光偵測器去監測出拍頻訊號，得到拍頻訊號後，先經過可調帶通濾波器(Band Pass Filter)濾出我們所想要的拍頻訊號，再使用放大器放大拍頻訊號。實驗上我們所使用的可調帶通濾波器可調範圍為 250 MHz 至 500 MHz，頻寬(bandwidth)為 37.5 MHz，放大後的拍頻訊號即將要經過迴授電路作鎖頻處理。因為外腔式二極體雷射本身是 free running，若沒有鎖頻，相位會跑出帶通濾波器的頻寬而影響訊號量測，所以必須將外腔式二極體雷射作鎖頻的處理。我們使用鎖相迴路(phase lock loop)比較拍頻訊號與參考訊號的關係並回授控制外腔式二極體雷射的頻率，將拍頻訊號與參考訊號鎖住並完成外腔式二極體雷射的穩頻。

首先利用除頻器將拍頻訊號頻率降至相位偵測器的工作範圍後，輸入至相位偵測器的振盪訊號輸入端中。另一方面從頻率合成器產生 275 MHz 的參考訊

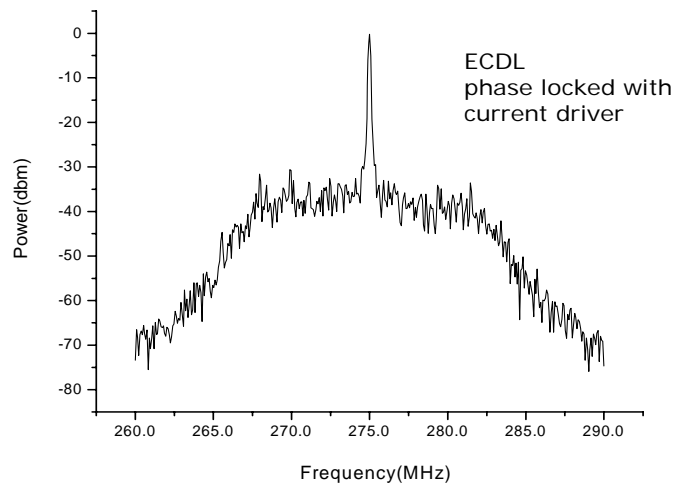
號，其電訊號由頻譜分析儀觀察如【圖4-16】所示，一樣經除頻器將訊號頻率降至相位偵測器的工作範圍後，送入至相位偵測器參考訊號輸入端中。相位偵測器將鑑別兩輸入端的訊號頻率並比較兩輸入端訊號的相位差異。比較後的結果就從輸出端送至迴路濾波器濾出直流電壓，以產生誤差訊號代表相位偵測器兩輸入端頻率及相位上的差異。此誤差訊號(error signal)就送至壓控振盪器即外腔式二極體雷射的電流源驅動器(current driver)上回授控制外腔式二極體雷射輸出的雷射頻率，將拍頻頻率鎖定在訊號產生器產生的參考頻率 275 MHz，之後我們可以在頻譜分析儀(Agilent E4411B)上看到拍頻訊號的位置幾乎固定不動，如【圖4-17】所示，如此便達成外腔式二極體雷射的穩頻。



【圖 4-15】外腔式二極體雷射穩頻實驗架構圖

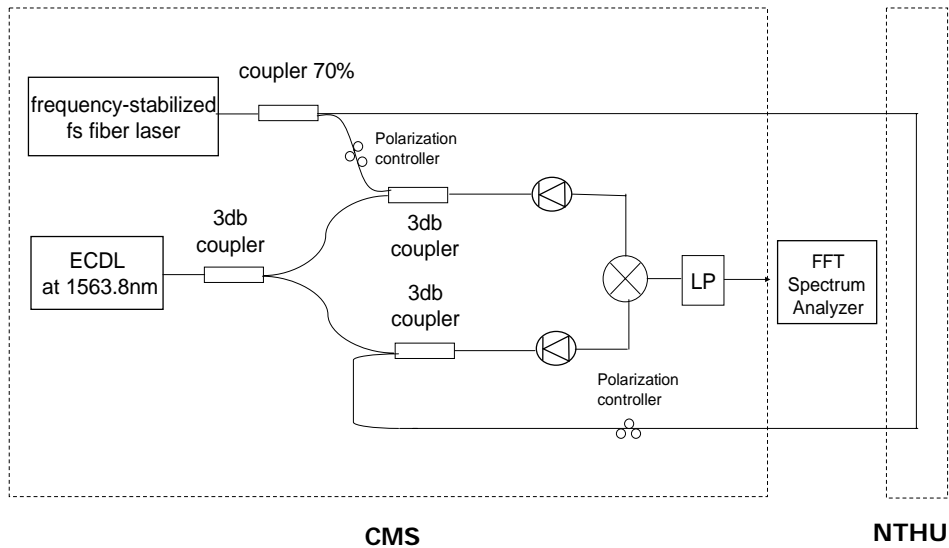


【圖 4-16】參考訊號



【圖 4-17】外腔式二極體雷射穩頻時與飛秒光梳拍頻訊號圖

4-3.5 頻域上量測相位雜訊

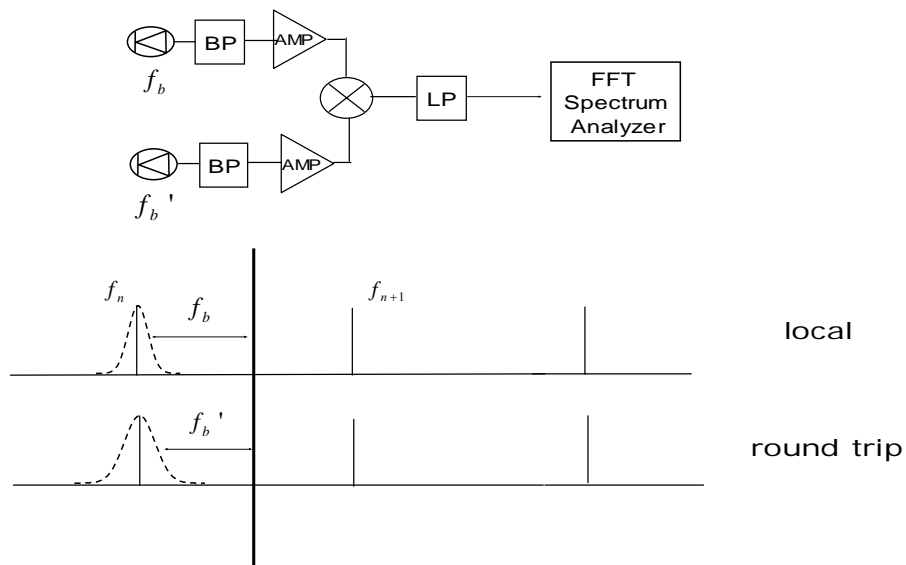


【圖 4-18】傳遞光波頻率標準架構圖

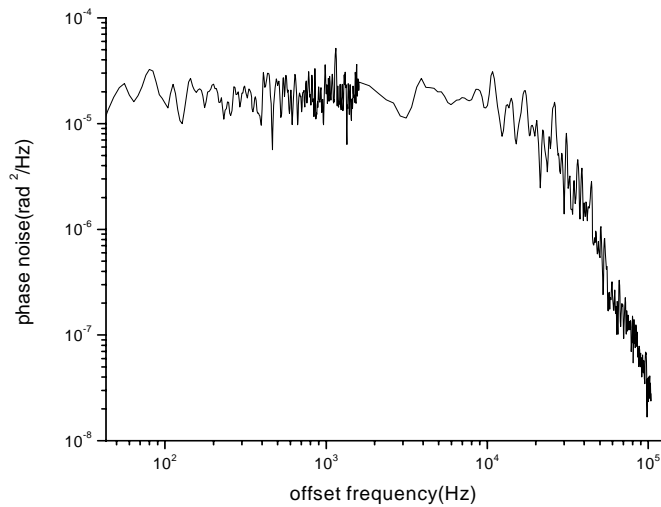
傳遞光波頻率標準架構圖如【圖 4-18】所示，穩頻光纖雷射經過 30/70 比例之耦合器後分成兩道光，一道光與外腔式二極體雷射的輸出光重合以產生拍

頻；另一道光則連接光纜，把傳回的光梳與外腔式二極體雷射的輸出光重合以產生拍頻，此拍頻訊號同時為用來作外腔式二極體雷射的穩頻。量測經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊有兩種方法，方法一架構如【圖 4-19】所示，假設未經過光纜的光梳及經過光纜傳回後的光梳同樣在第 n 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，令未經過光纜的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_b (275 MHz)，而經過光纜傳回後的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_b' (275 MHz)，送到頻率混頻器 (frequency mixer) 混頻，即可讓外腔式二極體雷射本身的擾動消除掉，將由頻率混頻器輸出的誤差訊號 (error signal) 經過一低通濾波器 (Mini-Circuits SLP 1.9) 傳到快速傅立葉轉換訊號分析儀 (Fast Fourier Transform (FFT) signal analyzer HP 35670A)，量測相位雜訊 (phase noise)，此相位雜訊即是 (4.18) 式中所示，為經過光纜傳遞光波頻率標準時，光纜所引進的相位雜訊，【圖 4-20】為所量測到的相位雜訊。

$$\begin{aligned}
 f_b - f_b' &= n f_{rep} + f_o - f_{ECDL} - [n(f_{rep} + \Delta f_{fiber}^{Group}) + f_o - f_{ECDL} + \Delta f_{fiber}^{phase}] \\
 &= \Delta f_{fiber}^{phase} + n \Delta f_{fiber}^{Group}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

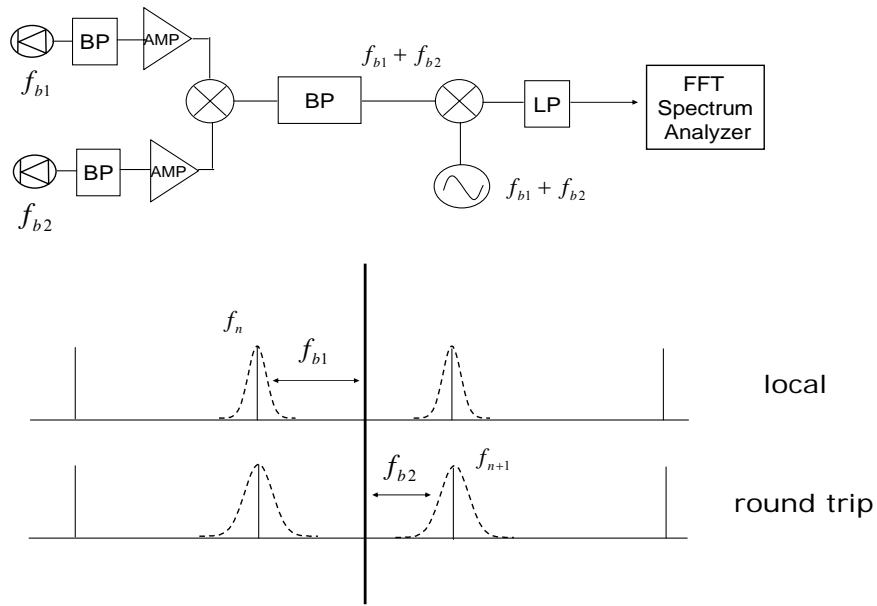


【圖 4-19】頻域上量測傳遞光波頻率之相位雜訊示意圖(方法一)

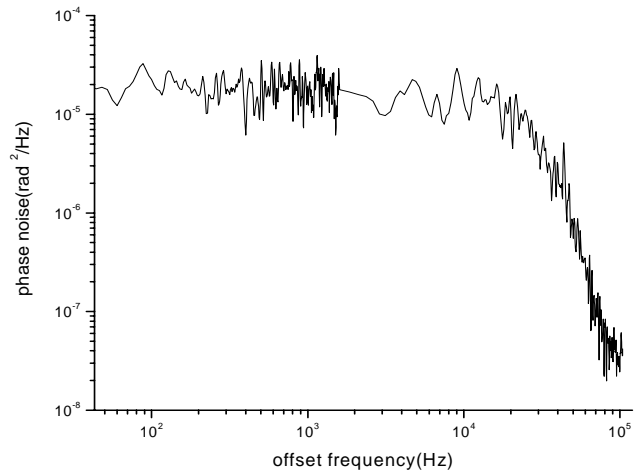


【圖 4-20】經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊圖(方法一)

第二種量測經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊的方法，架構如【圖 4-21】所示，假設未經過光纜的光梳在第 n 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，而經過光纜傳回後的光梳在第 $n+1$ 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，令未經過光纜的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_{b1} (225 MHz)，而經過光纜傳回後的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_{b2} (275 MHz)，送到頻率混頻器 (frequency mixer) 混頻，混頻後的頻率為 $f_{b1} + f_{b2}$ (500 MHz)，將此頻率訊號和一台頻率設定在 $f_{b1} + f_{b2} - 1\text{MHz}$ (499 MHz) 的頻率合成器 (RF synthesizer Agilent E4400B) 送到頻率相乘器去混頻，將由頻率相乘器輸出的誤差訊號 (error signal) 經過一低通濾波器 (Mini-Circuits SLP 1.9) 傳到快速傅立葉轉換訊號分析儀 (Fast Fourier Transform (FFT) signal analyzer HP 35670A)，量測相位雜訊 (phase noise)，量測到的相位雜訊如【圖 4-22】所示。



【圖 4-21】頻域上量測傳遞光波頻率之相位雜訊示意圖(方法二)

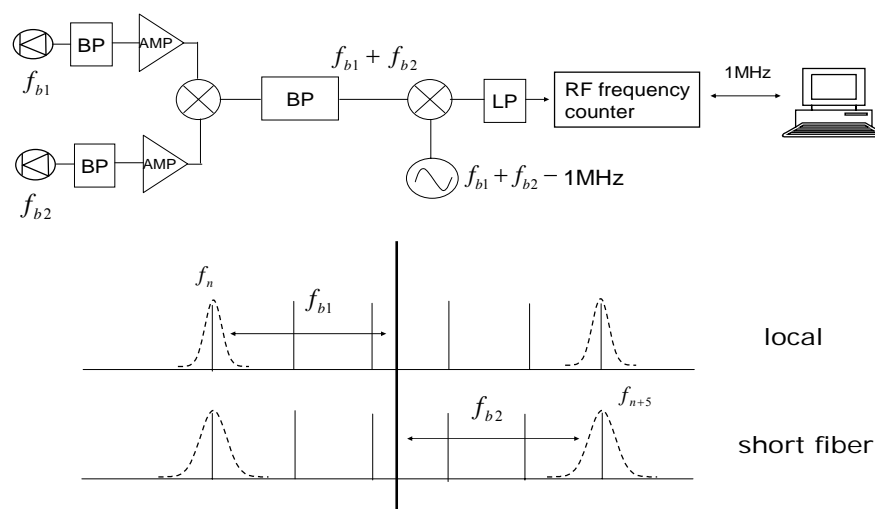


【圖 4-22】經過光纖傳遞光波頻率所產生的相位雜訊圖(方法二)

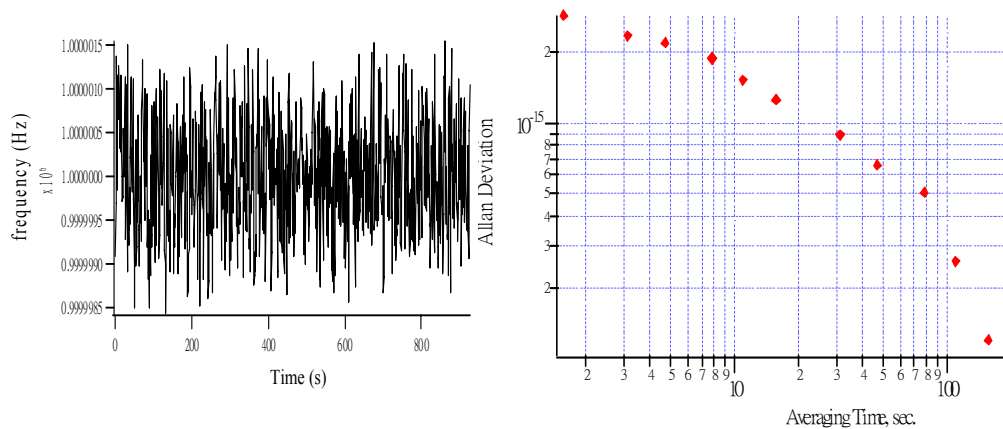
從【圖 4-20】【圖 4-22】量測到的相位雜訊看得出來，兩種方法所量測到的相位雜訊大致上是相同的。

4-3.6 時域上量測頻率穩定度:Allan deviation

我們藉由下述方法來知道系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限，架構如【圖 4-23】所示。穩頻光纖雷射經過 30/70 比例之耦合器後分成兩道光，兩道光分別與外腔式二極體雷射的輸出光重合以產生拍頻，假設未經過光纖的光梳在第 n 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，而另一個未經過光纖，只經過一段約長為 5m 的短光纖後的光梳在第 $n+5$ 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，令未經過光纖的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_{b1} (225 MHz)，而經過一段約長為 5m 的短光纖後的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_{b2} (275 MHz)，送到頻率混頻器混頻，混頻後的頻率為 $f_{b1} + f_{b2}$ (500 MHz)，將此頻率訊號和一台頻率設定在 $f_{b1} + f_{b2} - 1\text{MHz}$ (499 MHz) 的頻率合成器(RF synthesizer Agilent E4400B)送到頻率混頻器去混頻，把信號頻率降到 1 MHz 後才由頻率計數器(Agilent 53132A)去計頻，系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限的結果如【圖 4-24】所示。【圖 4-24】為 1000 點的量測，在閘門時間(gate time)為 1 秒，無感時間(dead time)為 0.57 秒時量測到的光波頻率變化，標準差為 0.64 Hz，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation 為 2.8×10^{-15} 。這個值即被設定為系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限。



【圖 4-23】系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限架構圖

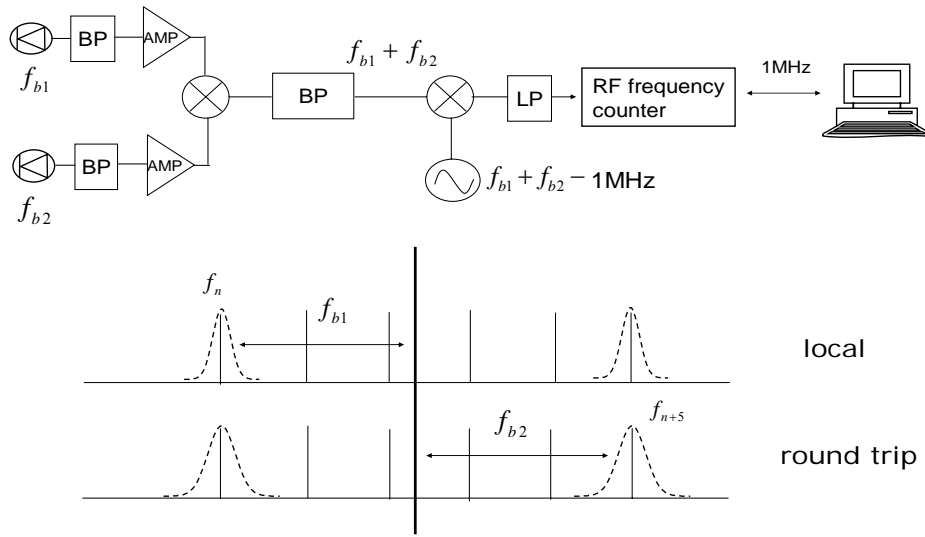


【圖 4-24】系統量測穩頻光纖雷射傳遞光波頻率之頻率穩定度的極限

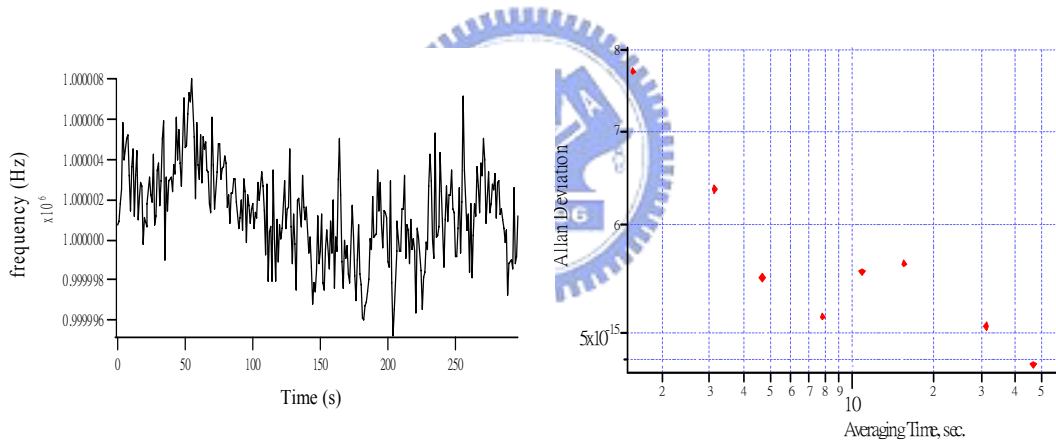
在時域上量測傳遞光波頻率之Allan deviation的架構如【圖 4-25】所示，假設未經過光纜的光梳在第 n 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，而經過光纜傳回後的光梳在第 $n+5$ 根光梳和外腔式二極體雷射產生拍頻，令未經過光纜的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_{b1} (225 MHz)，而經過光纜傳回後的光梳和外腔式二極體雷射產生的拍頻為 f_{b2} (275 MHz)，送到頻率混頻器 (frequency mixer) 混頻，混頻後的頻率為 $f_{b1} + f_{b2}$ (500 MHz)，將此頻率訊號和一台頻率設定在 $f_{b1} + f_{b2} - 1\text{MHz}$ (499 MHz) 的頻率合成器 (RF synthesizer Agilent E4400B) 送到頻率混頻器去混頻，把信號頻率降到 1 MHz 後才由頻率計數器 (Agilent 53132A) 去計頻，300 點及 2700 點的量測結果分別為【圖 4-26】及【圖 4-27】所示。【圖 4-26】為 300 點的量測，在閘門時間 (gate time) 為 1 秒，無感時間 (dead time) 為 0.57 秒時量測到的光波頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 7.7×10^{-15} 。【圖 4-27】為 2700 點的量測，在閘門時間 (gate time) 為 1 秒，無感時間 (dead time) 為 0.57 秒時量測到的光波頻率變化，在積分時間為 1 秒時相對應的 Allan deviation 為 7.5×10^{-15} 。【圖 4-27】中可以看到頻率計數器所計頻的頻率變化，大約每 200 秒有週期性的變化，這是由於頻率合成器和頻率計數器的時基都是參考到低雜訊微波頻率源，都是由銣 (Rb) 原子鐘輸入一 10 MHz 的訊號作為頻率標準，在接線的過程中形成了接地迴路 (ground loop) 所造成的影響。

從【圖 4-26】【圖 4-27】量測到的結果可看出，經過光纜傳遞光波頻率標準

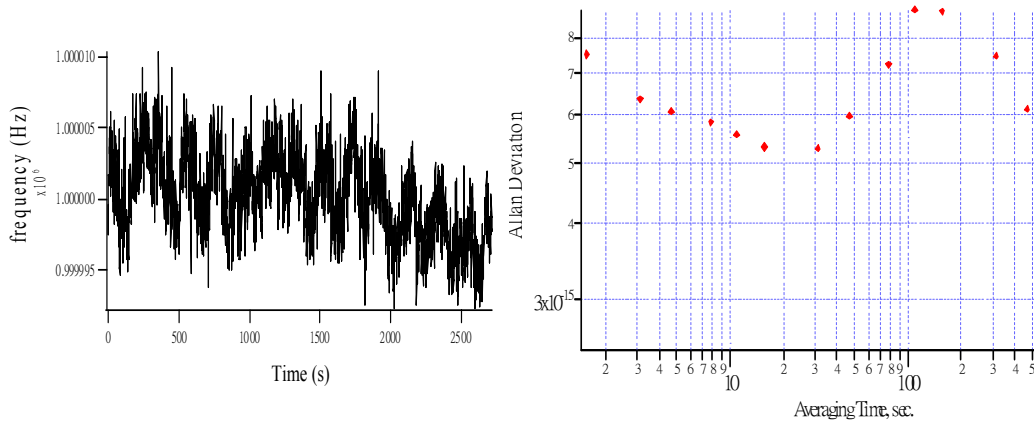
所導致的頻率不穩定度，在積分時間為 1 秒時，約為 5×10^{-15} 。



【圖 4-25】時域上量測傳遞光波頻率之 Allan deviation 架構圖



【圖 4-26】300 點量測的光波頻率變化及 Allan deviation



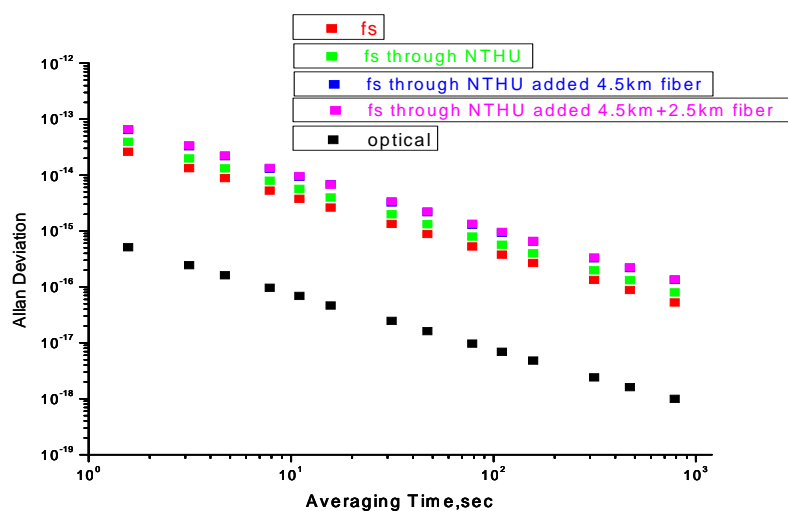
【圖 4-27】2700 點量測的光波頻率變化及 Allan deviation

4-3.7 相位雜訊與 Allan deviation 的換算

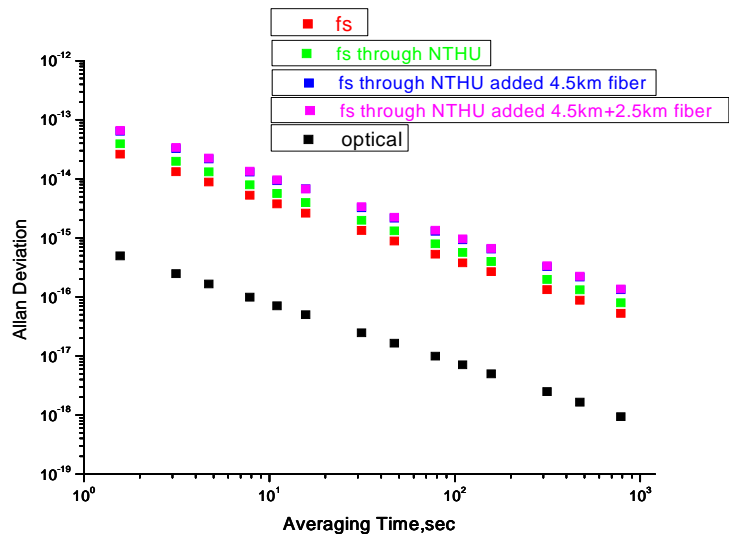
依 3-3.4 所討論，相位雜訊可依(3.36)式換算成Allan deviation^[38]。【圖 4-28】

【圖 4-29】為相位雜訊能量頻譜密度 S_{ϕ} 先經過(3.34)、(3.35)式換算成 $S_y(f)$ 後，再代入(3.36)式計算後得到的Allan deviation圖(積分時間到 1000 秒)，在第一種方法量測經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊中，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation 為 5.1×10^{-16} ；在第二種方法量測經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊中，在積分時間為 1 秒時相對應的Allan deviation 為 5.0×10^{-16} 。

同樣的，由於(3.36)式中的頻率積分範圍為 0 到無窮大，但由於實驗量測儀器的能力只能量測到 104 KHz，所以計算出來的值會略小於在時域上量測時所量測得到的 Allan deviation 值。不過可以從這個 Allan deviation 換算中驗證，在頻域上量測所量到的相位雜訊若比較大，經過(3.36)式計算出來的 Allan deviation 值亦會比較大，再對應到我們在時域上量測所量測到的 Allan deviation 值，可以得知頻域上量測到的相位雜訊大，相對的在時域上量測到的頻率穩定度也會比較差。



【圖 4-28】經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊(方法一)經公式換算後得到的 Allan deviation 圖



【圖 4-29】經過光纜傳遞光波頻率所產生的相位雜訊(方法二)經公式
換算後得到的 Allan deviation 圖



第五章 總結與未來展望

在光纖上利用鎖模雷射傳遞微波頻率標準，我們可以做到經過光纜傳遞微波頻率標準，在積分時間為 1 秒時頻率不穩定度大約為 2.0×10^{-13} ，相較於光梳頻雷射輸出的微波頻率標準而言，經過 3 km 光纜導致頻率不穩定度大約為 10^{-14} (積分時間為 1 秒時)，由於現在頻率標準做到 10^{-13} 已經是很好的，所以這個變化對於現階段的頻率標準量測來講影響不是很大。但在傳遞微波頻率標準的實驗中我們遇到了一個困難，由於頻率計數器是非常靈敏的電子儀器，所以只要實驗室整體環境的突然改變或者因為外界聲音的干擾以及電磁波的影響，往往會造成計數的值會有所誤差，所以每次實驗即使在光梳頻雷射的輸出設定都是一樣的情況下進行，仍然會因為上述的影響使得每次實驗量測的值對應到的 Allan deviation 會有所不同，在傳遞微波頻率標準的實驗中所陳述的值，都是實驗重複過好幾次後，所測量到的最佳值。

在光纖上利用鎖模雷射傳遞光波頻率標準，我們可以做到經過光纜傳遞光波頻率標準，在積分時間為 1 秒時頻率穩定度大約為 7.5×10^{-15} ，這個傳遞光波頻率標準的穩定度可以達到和發表過的文獻中^[11] 直接利用連續波雷射傳遞光波頻率標準的穩定度幾乎一樣佳。而經過 3 km 光纜傳遞光波頻率標準所導致的頻率不穩定度，在積分時間為 1 秒時，約為 5×10^{-15} 。一樣在傳遞光波頻率標準的實驗中我們遇到了一個困難，即是外腔式二極體雷射的穩頻，由於拍頻的大小要超過 30 dB 以上，才能將外腔式二極體雷射穩頻，由於我們是利用經過光纜傳回的光梳與外腔式二極體雷射輸出光的拍頻，來作外腔式二極體雷射的穩頻，但由於經過光纖後，光極化方向 (polarization) 會一直改變，以致於拍頻訊號可能會減小，若拍頻的大小無法超過 30 dB 時，會使得外腔式二極體雷射失去穩頻，也是因為這個原因使得我們無法如同傳遞微波頻率標準一樣，在時域上去做長時間的量測。

為了達到良好的光纖傳輸品質，必須應用色散補償 (Dispersion compensation) 技術。用 1550-nm 波帶信號作傳輸光源之優點為：(1) 在一般單模光纖 (SMF) 傳

播時，有最低的光傳輸損耗(~ 0.2 dB/km)。(2)摻鉕光纖光放大器在此頻帶使用，可直接放大光信號或補償光纖傳輸損耗。因 1550-nm 波帶信號遠離零色散點的 1310-nm，信號在單模光纖傳送時，因色散效應而變寬(Pulse broaden)，造成信號失真(distortion)，適當的色散補償可減低脈衝寬度變寬之現象，達到長距離傳輸之功能，如此可以使信號波形品質恢復和原先輸入端差不多。可以利用以下 2 種色散補償技術來減低經過光纖後傳回的脈衝寬度變寬之現象。(1)色散移位光纖(Dispersion-Shifted Fiber；DSF)，其特點為利用材料特性，在製造光纖時，使零色散點由 1310-nm 移至最低光損失之 1550-nm 附近，則光纖可兼具低損失與零色散兩個優點。(2)色散補償光纖(Dispersion Compensation Fiber；DCF)，其特點為利用材料特性，在製造光纖時，使其在 1550-nm 附近之色散值為負值(~ -85 ps/nm/km)，為一般單模光纖($+17$ ps/nm/km)之 5 倍大左右。在系統傳輸時，交錯使用單模光纖及色散補償光纖(總長度比約為 5:1)，使其總色散值約為零，交錯使用單模光纖及色散補償光纖，可得到較之於將所有色散補償光纖置於系統前端或後端稍佳之傳輸特性。因為色散補償光纖通常至於實驗室，並不隨光纜放於兩個目的地之間，故如果以 5 km 傳輸來說，即是包含 5 km 的單模光纖及 1 km 左右的色散補償光纖，則必須耗用額外的摻鉕光纖放大器(erbium-doped fiber amplifier；EDFA)，去補償色散補償光纖所造成之光傳輸損耗。

另一方面，可以去做主動消除雜訊(active noise cancellation)的動作，先偵測到光纖造成的相位雜訊，藉由在光纜前加上一個聲光調制器(Acousto-Optic Modulators；AOM)，反向輸入一個相位雜訊主動去消除光纖造成的雜訊，在發表過的文獻^[40]中指出，可以因此而讓頻率不穩定度降低。

使用更好的微波頻率標準或更穩定的光波頻率標準，可以去改善量測系統所量測到頻率穩定度的極限，或許傳遞微波及光波頻率標準的頻率穩定度可以量測到更佳的值。

參考資料

- [1] Herman A. Haus, “Mode-Locking of Lasers”, IEEE, Quantum Electronics , vol.6, No.6, pp.1173-1185 (2000).
- [2] D. J. Jones, S. A. Diddams, J. K. Ranka, A. Stentz, R. S. Windeler, J. L. Hall, and S. T. Cundiff, “Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis”, Science 288, 635 (2000).
- [3] S. A. Diddams, Th. Udem, J. C. Bergquist, E. A. Curtis, R. E. Drullinger, L. Hollberg, W. M. Itano, W. D. Lee, C. W. Oates, K. R. Vogel, and D. J. Wineland, “An optical clock based on a single trapped Hg⁺ ion”, Science 293, 825 (2001).
- [4] J. Ye, L. S. Ma, and J. L. Hall, “Molecular iodine clock”, Phys. Rev. Lett. 87, 270801 (2001).
- [5] T. P. Heavner, S. R. Jefferts, E. A. Donley, J. H. Shirley, and T. E. Parker, “Recent improvements in NIST-F1 and a resulting accuracy of $\delta f / f = 0.61 \times 10^{-15}$ ”, IEEE Trans. Instrum. Meas. 54, 842 (2005).
- [6] G. Wilpers, C. Degenhardt, T. Binnewies, U. Sterr, J. Helmcke, and F. Riehle, “An Optical Clock with Ultracold Neutral Atoms”, Phy. Rev. Lett. 89 230801 (2002).
- [7] A. Bartels, S.A. Diddams, C.W. Oates, G. Wilpers, J.C. Bergquist, W.H. Oskay and L. Hollberg, “Femtosecond laser based synthesis of ultrastable microwave signals from optical frequency references”, Opt. Lett. 30, 667 (2005).
- [8] J. Levine, “Introduction to time and frequency metrology”, Rev. Sci. Instrum. 70, 2567 (1999).
- [9] A. Bauch, et al., “Comparison between frequency standards in Europe and the USA at the 10^{-15} uncertainty level”, Metrologia 43, 109 (2006).
- [10] F. Narbonneau, M. Lours, S. Bize, A. Clairon, G. Santarelli, O. Lopez, Ch. Daussy, A. Amy-Klein, and Ch. Chardonnet, “High resolution frequency

- standard dissemination via optical fiber metropolitan network”, *Rev. Sci. Instrum.* 77, 064701 (2006).
- [11] B. Shillue, S. AlBanna, and L. D’Addario, “Transmission of low phase noise, low phase drift millimeter-wavelength references by a stabilized fiber distribution system”, in *Proc. IEEE Int. Topical Meeting on Microwave Photonics*, 2004, pp. 201–204.
- [12] J. Ye, J. L. Peng, R. J. Jones, K. W. Holman, J. L. Hall, D. J. Jones, S. Diddams, J. Kitching, S. Bize, J. C. Bergquist, L. W. Hollberg, L. Robertsson and L.-S. Ma, “Delivery of high stability optical and microwave frequency standards over an optical fiber network”, *J. Opt. Soc. Am. B* 20, 1459-1467 (2003).
- [13] G. Grosche, B. Lipphardt, H. Schnatz, G. Santarelli, P. Lemonde, S. Bize, M. Lours, F. Narbonneau, A. Clairon, O. Lopez, A. Amy-Klein, and Ch. Chardonnet, “Transmission of an Optical Carrier Frequency over a Telecommunication Fiber Link”, *OSA* (2007).
- [14] S. T. Cundiff, J. Ye, and J. L. Hall, “Optical frequency synthesis based on mode-locked lasers”, *Rev. Sci. Instr.* 72, 3749-3771 (2001).
- [15] S. T. Cundiff and J. Ye, “Colloquium: Femtosecond Optical Frequency Combs”, *Rev. Mod. Phys.* 75, 325 (2003).
- [16] K. W. Holman, D. D. Hudson, J. Ye, and D. J. Jones, “Remote transfer of a high-stability and ultralow-jitter timing signal”, *Opt. Lett.* 30, 1225–1227 (2005).
- [17] Yi-Fei Chen, Jie Jiang, and David J. Jones, “Remote distribution of a mode-locked pulse train with sub 40-as jitter”, *Opt. Express*, 14, 25 (2006).
- [18] J. L. Peng, H. Ahn, R. H. Shu, H. C. Chui, J. W. Nicholson, “Highly stable, frequency-controlled mode-locked erbium fiber laser comb”, *Appl. Phys.* B86, 49-53 (2007).
- [19] A. Yariv, “Optical Electronics in Modern Communications”, Oxford University

Press (1997).

- [20] H. A. Haus, J. G. Jujimoto, E. P. Ippen, “Analytic theory of additive pulse and Kerr lens mode locking”, IEEE J. Quant. Electron. QE-28, 2086 (1992).
- [21] D. U. Noske, N. Pandit and J. R. Taylor, “Subpicosecond soliton pulse formation from self-mode-locked erbium fiber laser using intensity dependent polarization rotation”, Electron. Lett. 28, 2185 (1992).
- [22] M. Hofer, M. E. Fermann, F. Haberl, M. H. Ober and A. J. Schmidt, “Mode locking with cross-phase and self-phase modulation”, Opt. Lett. 16, 502 (1991).
- [23] S. Cone, A. H. L. Chau, R. Leonhardt, J. D. Harvey, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St. J. Russel, J. Opt. Soc. Am. B19, 753.
- [24] A. V. Husakou and J. Herrmann, J. Opt. Soc. Am. B19, 2171 (2002).
- [25] J. L. Peng and R. H. Shu, “Determination of absolute mode number using two mode-locked laser combs in optical frequency metrology”, Opt. Express, 15, 4485 (2007).
- [26] H. A. Haus and A. Mecozzi, “Noise of Mode-Locked Lasers”, IEEE J. of Quantum Electron, Vol.29, NO.3, pp.983-996 (1993).
- [27] M. J. W. Rodwell, D. M. Bloom, and K. J. Weigarten, “Subpicosecond laser timing stabilization”, IEEE J. Quantum Electron, Vol.25, No.4, pp.817-827 (1989).
- [28] D. Henderson and A. G. Roddie, “A comparison of spectral and temporal techniques for the measurement of timing jitter and their application in a mode-locked argon ion and dye laser system”, Optics Communications, Vol.100, No.5-6, pp.456-460 (1993).
- [29] J. Son, J. V. Rudd, and J. F. Whitaker, “Noise characterization of a self mode-locked Ti:sapphire laser”, Optics Letters, Vol.17, No.10, pp.733-735 (1992).

- [30] Hidemi Tsuchida, “Wideband phase-noise measurement of mode-locked laser pulses by a demodulation technique”, *Optics Letters*, Vol.23, No.4 (1998).
- [31] D. W. Allan, “Statistics of atomic frequency standards”, *Proc.IEEE*, Vol.54, pp.221-230 (1966).
- [32] F. L. Walls, in *Laser Frequency Stabilization, Standards, Measurement, and Applications*, Vol.4269 of *Proceedings of SPIE*, edited by J. L. Hall and J. Ye (SPIE, Bellingham, WA, 2001), pp.170–177.
- [33] 張順雄、張忠誠、李榮乾譯, “電子元件與電路理論(下)” .
- [34] 張厥盛、萬心平、鄭繼禹, “鎖相技術”, 儒林圖書 (1992).
- [35] J. L. Peng, “Constructing a highly stable synthesized low-noise RF source”
Industrial Technology Research Institute Center for Measurement Standards.
- [36] E. N. Ivanov, S. A. Diddams, and L. Hollberg, “Analysis of noise mechanisms limiting the frequency stability of microwave signals generated with a femtosecond laser”, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 9, 1059 (2003).
- [37] J. A. Barnes et al., “Characterization of frequency stability”, in *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol.IM-20, p.105, NBS Tech. Note 394 (1971).
- [38] P. Lesage and C. A udoin, “Characterization and measurement of time and frequency stability” , *Radio Science*, Vol.14, No.4 (1979).
- [39] R. W. Tkach and A. R. Chraplyvy, “Regimes of Feedback effects in 1.5-um distributed feedback lasers” , *Lightwave Technology, Journal of* , VOL. LT-4, NO. 11, NOVEMBER (1986).
- [40] Kevin W. Holman, David J. Jones, Darren D. Hudson and Jun Ye, “Precise frequency transfer through a fiber network by use of 1.5- μm mode-locked sources ”, *Opt., Lett.* 29, 13 (2004).