

# 國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

球面上的隨機漫步

Random Walk on The Surface of A Sphere

研究生：黃鈺玲

指導教授：彭南夫 博士

中華民國九十七年六月

# 球面上的隨機漫步

## Random Walk on The Surface of A Sphere

研究生：黃鈺玲  
指導教授：彭南夫

Student : Yu-Ling Huang  
Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

國立交通大學  
統計學研究所  
碩士論文



Submitted to Institute of Statistics  
College of Science  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master  
in  
Statistics  
June 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China  
中華民國九十七年六月

# 球面上的隨機漫步

研究生：黃鈺玲 指導教授：彭南夫 博士

國立交通大學統計學研究所



本篇論文目的在探討如何在球面上模擬出隨機漫步的方法。主要以賭徒破產理論為基礎，三維空間中的轉軸(rotation)公式和截面圓性質為輔助，模擬出球面上隨機漫步的進行。基本假設為自球面上(以北半球為例)的任一點出發，觸及赤道或北極圈範圍(北緯  $66^{\circ}33'$ )就停止漫步，且每一步所跨步伐等長(在球面上即指弧長等長)，但下一步的方向服從某分配(ex: uniform distribution)。最後計算出成功抵達目的地的機率和平均花費時間，由數據觀察出其結果與賭徒破產理論的表現相似。

關鍵字：隨機漫步、轉軸

# Random Walk on The Surface of A Sphere

Student : Yu-Ling Huang Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistic  
National Chiao Tung University



## ABSTRACT

This thesis is to find an easy way to simulate the random walk on the surface of a sphere. We use the gambler's ruin theory as the main idea, and the rotation formula and cross section property in three-dimension as a help to simulate the random walk process. Suppose the random walk will terminate when it reaches the area of equator or Arctic Circle. We set each step size in the random walk been fixed, and the direction of the next step is randomly chosen. Then we compute the probability of success to reach the goal and the expected step to terminate. The result shows that the behavior of the random walk on the surface of a sphere is similar to the gambler's ruin formula.

*Keyword: random walk , rotation*

## 誌謝

在交大就讀兩年以來，因為得到很多人的幫助，如今才能順利畢業，希望能透過簡短的文字傳達內心由衷的感謝。首先要感謝的就是花費許多心力，指導我完成論文的彭南夫教授，感謝老師在我研究遭遇挫折時，不厭其煩地提供我新的想法和方向。同時也非常感謝當我對於未來方向有些困惑時，適時給予我意見的統計所教授們，因為有諸位老師的幫助，我才能更堅定的向前進。

感謝同學們這兩年來的照顧，雖然與大家相處的時間不長，但仍感到非常愉快，留下了美好的回憶。此外，也非常感謝交大校園所提供的眾多資源和設備，讓我擁有完善的學習品質和健康的生活空間。最後，感謝父母無條件的支持，讓我無後顧之憂的完成學習。

未來，我會更努力地向前邁進，相信總有一天，我也可以找到屬於自己的那片藍天。



鈺玲 謹誌于  
國立交通大學統計研究所  
中華民國九十七年六月

# 目 錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
誌 謝 .....	iii
目 錄 .....	iv
圖、表目錄 .....	v
第一章 導論 .....	1
1-1 研究動機 .....	1
1-2 相關研究 .....	2
1-3 模擬流程 .....	3
1-4 論文架構 .....	5
第二章 理論部份 .....	6
2-1 賭徒破產定理 .....	6
2-2 轉軸公式 .....	7
2-3 模擬球面上隨機漫步演算法 .....	9
2-4 模擬圓周上隨機漫步演算法 .....	12
第三章 模擬結果分析 .....	16
3-1 模擬球面上的隨機漫步 .....	16
3-1-1 模擬步驟 .....	16
3-1-2 模擬結果 .....	17
3-2 圓周上隨機漫步結果與理論值比較 .....	19
3-2-1 模擬步驟 .....	19
3-2-2 模擬結果 .....	19
3-3 不同分配模擬結果比較 .....	20
3-3-1 Beta分配簡介 .....	20
3-3-2 模擬結果比較 .....	22
第四章 結論 .....	27
參考文獻 .....	28
附 錄 一、 .....	29
附 錄 二、 .....	37
附 錄 三、 .....	38

# 圖、表目錄

圖1.1 fixed random walk (2-D and 3-D) .....	1
圖1.2 floating random walk (Walk on spheres method).....	2
圖2.1 直角座標系統 .....	7
圖2.2 弧長 $c$ 與夾角 $\theta$ 的關係圖 .....	9
圖2.3 截面圓示意圖 .....	10
圖2.4 二維座標表示法圖示 .....	13
圖2.5 二維座標中向上移動圖示 .....	14
圖2.6 二維座標中向下移動圖示 .....	14
圖3.1 起始緯度對成功機率的散佈圖 .....	17
圖3.2 起始緯度對期望步數的散佈圖 .....	18
圖3.3 beta分配偏態圖示 .....	21
圖3.4成功抵達目的地機率：Beta分配與Uniform分配趨勢比較圖.....	23
圖3.5期望步數：Beta分配與Uniform分配趨勢比較圖 .....	24
表3.5 不同beta分配對應的機率值 .....	21
表3.1 緯度對映成功抵達北極圈機率模擬結果 .....	29
表3.2 緯度對期望步數模擬結果 .....	30
表3.3 緯度對成功機率值的理論值與模擬結果比較 .....	31
表3.4 緯度對停止步數的期望值理論值與模擬結果比較.....	32
表3.6 不同beta分配緯度對成功機率模擬結果 .....	33
表3.7 不同beta分配緯度對停止步數的期望值模擬結果.....	35

# 第一章 導論

## 1-1 研究動機

關於隨機漫步的方法，主要可依下一步所跨方向和步伐長度的選擇加以分類，步伐長度可為固定或任意步長；方向亦可分為限定方向或者隨機方向。其中最簡單的方法就是固定步長和限定方向條件下的簡單隨機漫步 (simple random walk)。若建立在一維空間上，可將其視為一個粒子在水平直線上左右移動，每步的距離皆為一個單位長；向右的機率為 $p$ ，向左的機率為 $1-p$ ，屬於布朗運動離散化的情形，常用於幫助了解布朗運動。若擴展到二維空間，同樣限制在固定步伐和限定方向條件下 (fixed random walk [3])，則可假定粒子在格子點上運動，方向可為上、下、左、右，機率各為 $1/4$ ，且每步的距離皆為一個單位長；相同的方法亦可擴展到三維的空間中，方向則為上、下、前、後、左、右，機率各為 $1/6$ 。

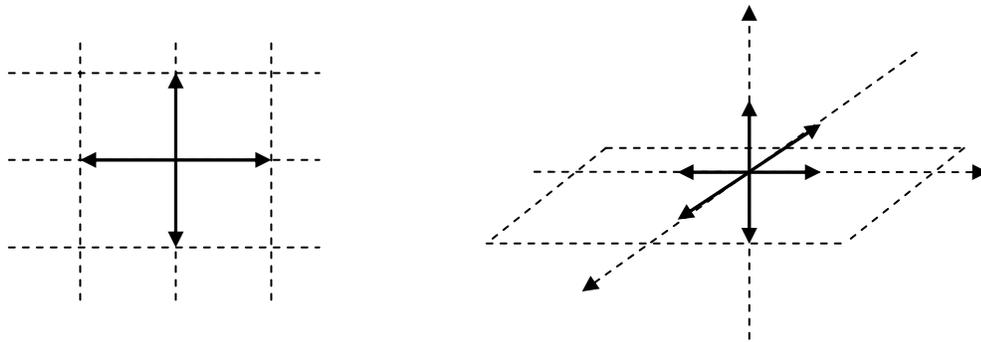


圖 1.1 fixed random walk (2-D and 3-D)

我們想進一步了解的是，隨機漫步在沒有限制方向和步長的情況下，是以什麼樣的情況進行，由相關研究可知，目前已有許多關於在多維空間

內隨機漫步的方法，但是我們發現大部分的研究都專注於在空間內部的隨機漫步，因此本篇論文希望能找出一個簡單的方法，模擬出三維空間中在球表面上的隨機漫步過程。

## 1-2 相關研究

關於不限制方向和步長(floating random walk [3])，但存在停止範圍的隨機漫步，常用的模擬方法為Muller在1956年提出的Walk on spheres method [7]，在二維空間中，以起始位置  $x_0$  為圓心，自  $x_0$  到停止範圍最短的距離為半徑畫圓，再從圓上隨機選取一點作為下一個起始位置  $x_1$ ，重複畫圓的步驟，直到所選取的下一個起始位置  $x_n$  恰好位於停止範圍才結束，所得到的  $x_1, \dots, x_n$  位置即為一組隨機漫步過程，如圖1.2。

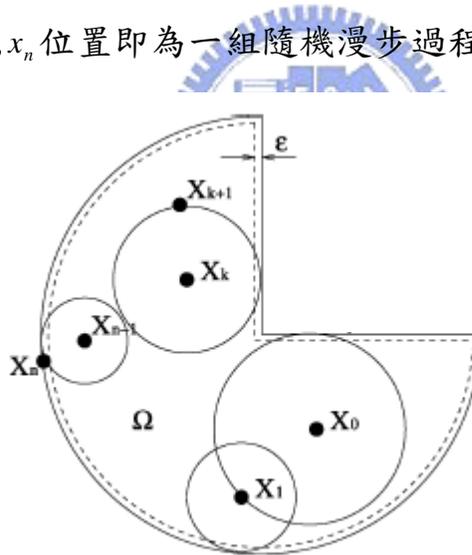


圖1.2 floating random walk (Walk on spheres method)

同樣的方法亦可拓展到三維空間。不過值得注意的是，由於WOS method中使用  $\epsilon$ -shell 以保證隨機漫步會在有限步數內停止，但因  $\epsilon$ -shell 的設定會使計算的結果產生誤差，因此Given等人於1997年提出了Green's function first-passage algorithm [5]，以改善  $\epsilon$ -shell 在誤差上的問題；近

來有研究〔6〕指出在WOS與GFFP皆可使用的情況下，GFFP有較高的準確性。

可想而知，若將前述資料的方法應用到三維空間的球上，皆可模擬出在球內部隨機漫步的過程，但我們較感興趣的是如何在球表面進行隨機漫步，關於球面上的隨機漫步Roberts & Ursell〔8〕在1960年曾計算出，球面上若已知起始位置的機率密度分配，當每一步跨出的步長為固定或服從某分配，且下一步方向為隨機選取條件下， $t$ 步後該移動點(moving point)的機率密度函數。作為延伸，我們提出一個簡單的方法，模擬出三維空間中球面上的隨機漫步，同樣限定每一步所跨步伐相同且下一步的方向為隨機選取，在上述條件限制下，將使隨機漫步每次向目的地接近或遠離的距離皆不相同，而且越高緯度，每一步所能向北移動的最長垂直距離都越短，因而產生越往北越難向上爬升的情況。與Roberts & Ursell論文最大的地方在於其隨機漫步並沒有停止範圍且主要目的是求出各移動點的機率密度函數，但我們則是希望結合賭徒破產定理，利用電腦模擬出球面上隨機漫步的運行，並找出成功抵達目的地的機率和平均花費的時間，再和一維空間中的賭徒破產理論值比較，觀察兩者間的差異性和相關性。透過本篇論文所提出的模擬方法，我們將計算自球面(以地球的北半球為例)上的非特定位置出發，以隨機漫步的方式行進，最後能抵達目的地(以北極圈為例)的機率和整個過程所花費的時間。

### 1-3 模擬流程

在此我們先約略介紹整個模擬的流程和結果，稍後於第三章再將完整的模擬過程和詳細結果呈現。本篇文章所提出的方法，主要是以賭徒破產理論為基礎，並以三維空間中的轉軸(rotation)公式和截面圓性質為輔

助，模擬出球面上隨機漫步的進行。基本假設為自球面上(以北半球為例)的任一點出發，觸及赤道或北極圈範圍(北緯  $66^{\circ}33'$ )就停止漫步，並設定每一步所跨步伐等長(在球面上即指弧長等長)，但下一步的方向服從某分配(ex: uniform distribution)，這將造成每次向目的地接近或遠離的距離皆不相同，且越往高緯度靠近，每一步所能向北靠近的最長距離越短。

模擬的步驟是先將所在經緯度位置轉換為三維空間的直角座標表示法，並利用轉軸公式旋轉，使得該點落在直角座標上的xyz軸的某一軸上(本篇論文以y軸為例)，接著依固定弧長的條件下找出截面圓，再透過指定的分配產生  $0\sim 2\pi$  範圍內的角度，作為下一步將跨到該截面圓上的位置；最後將所計算出的位置，旋轉回原座標系，並轉換為經緯度，以測定是否符合停止的條件。而一次球面上的完整隨機漫步過程，就是自球面上的任意點出發，重複上述步驟，直到符合停止條件，整個漫步過程才宣告結束。

因此，為了計算自起始位置出發最後能抵達目的地(例如：北極圈)的機率和整個隨機漫步所花費的時間，我們重複模擬同一位置出發的隨機漫步過程10000次，並記錄這一10000次中，成功抵達北極圈的次數和所跨的總步數，以及先觸及赤道而停止所跨的步數。由10000次中成功抵達北極圈的次數，我們得到成功抵達目的地(北極圈)的機率；而將10000次中，成功抵達北極圈或先抵達赤道而停止的步數加以平均，就可以得到整個隨機漫步所花費的時間。

為了確認此模擬方法是否正確可行，我們套用類似的方法於2維的圓上，並控制使每次跨的弧長恰等於一個緯度，且方向不是向上就是向下，在這樣的條件限制情況下，該圓周上的隨機漫步即等同於賭徒破產定理的過程。因此，我們可利用公式估計出成功到達的機率和停止的期望步數值，再將此理論值與模擬出的結果做比較，以確認此模擬方法的準確度，

由相對誤差的結果顯示與理論值相去不遠，因此我們認定這個模擬方法可行。

最後分析球面上隨機漫步模擬出的結果，我們發現當下一步的方向服從uniform distribution(可將其視為向上向下的機率相同的情況)，其數值表現近似於賭徒破產定理公式的結果，即：成功抵達目的地(北極圈)的機率與起始位置的緯度成正比關係；整個隨機漫步所花費的時間與起始位置的緯度成二次曲線關係，其中以位於目標緯度1/2的緯度為起始位置者所需花費的時間最多。而為了得到不同的向上和向下的機率的結果，我們藉由控制Beta分配的偏態來達到此目的，詳細的結果將於第三章的末節呈現。

#### 1-4 論文架構

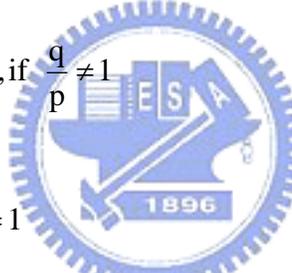
在本篇論文中，我們假設自球面上的任一點出發，每一步所跨出的步伐皆等長，但選擇的方向服從某分配(ex: uniform distribution)，透過結合座標軸旋轉及截面圓性質…等數學方法，利用電腦模擬方式，呈現出球面上隨機漫步的情況，並依此估計最後抵達目的地的機率和所花費的時間。在第二章我們將介紹模擬過程中所需用到的理論方法。在第三章則將詳述模擬的步驟並呈現模擬的結果，並在第四章做出結論。

## 第二章 理論部份

### 2-1 賭徒破產定理

假設一賭徒每次賭博，不是輸就是贏，贏一元的機率為 $p$ ，輸一元的機率為 $q=1-p$ ，每次賭博彼此獨立，且當賭徒輸光自己所有的錢或贏光莊家的錢時，就不能再繼續賭博。在符合前述條件下，計算莊家現有 $(N-i)$ 元，賭徒現有 $i$ 元，最後能在輸光自己的 $i$ 元(即：輸光所有的錢)之前擁有 $N$ 元(即：贏光莊家所有的錢)的機率，即為：賭徒破產定理〔9〕。

令 $f_i = f_{iN}$ ：表賭徒現有 $i$ 元，最後能擁有 $N$ 元的機率。已知：

$$f_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{if } \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{i}{N}, & \text{if } \frac{q}{p} = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$


若進一步想知道賭徒輸光自己所有的錢或贏光莊家的錢所需賭博的期望次數：令 $B_i$ 表賭徒現有 $i$ 元，到停止賭博(即：不是擁有 $N$ 元就是 $0$ 元)所需賭博的次數，可推得：

$$E(B_i) = \frac{N \times f_i - i}{2p - 1} \quad \text{if } \frac{q}{p} \neq 1 \quad (2.2)$$

$$E(B_i) = i \times (N - i) \quad \text{if } \frac{q}{p} = 1 \quad (2.3)$$

## 2-2 轉軸公式

已知球面上各點的直角座標系統表示法〔1〕： $(x,y,z)$ 表直角座標上的任意點， $r$ :球半徑， $\theta \in (0,2\pi)$ :表經度， $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ :表緯度，以 $y$ 軸為經緯度的起始點(0度)，則已知起始經緯度，可求得直角座標為：

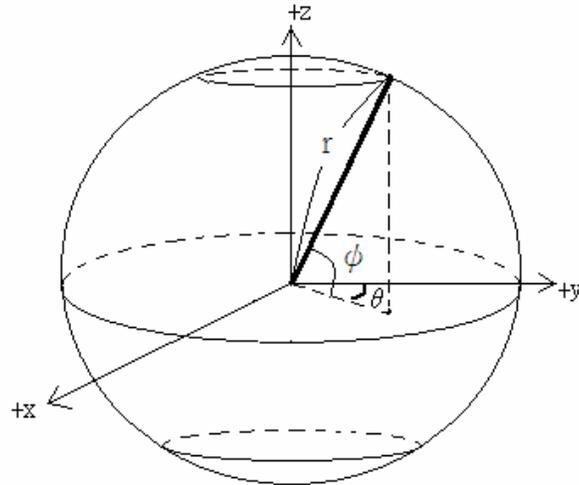


圖2.1 直角座標系統

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.4)$$

$$y = r \cos \theta \cos \phi \quad (2.5)$$

$$z = r \sin \phi \quad (2.6)$$

相對地，若已知直角座標，亦可求所在經緯度：

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{z}{r} \right) \quad (2.7)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{y}{r \cos \phi} \right) \quad (2.8)$$

因此在模擬球面上的隨機漫步時，我們可利用座標軸的旋轉〔1〕，來簡化計算的過程，方法是透過將三維直角座標的xyz軸，先繞x軸以逆時

針方式旋轉所在位置緯度的角度，再繞z軸以順時針方式旋轉所在位置經度的角度，使球面上的各點都能旋轉至y軸上，而方便在y軸上做運算。

若令(x,y,z)表原直角座標上的點，則：繞x軸逆時針旋轉 $\phi$ 角度後的直角座標為(x',y',z')，則：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

再繞z軸順時針旋轉 $\theta$ 角度後直角座標為(x'',y'',z'')，但因順時針旋轉 $\theta$ 等同於逆時針旋轉(- $\theta$ )，且 $\cos(-\theta) = \cos \theta, \sin(-\theta) = -\sin \theta$ ，所以：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

合併前兩式可得先繞x軸以逆時針方式旋轉所在位置緯度角度，再繞z軸以順時針方式旋轉所在位置經度角度的公式為：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

值得注意的是，因轉軸後長度會隨之變化，將產生隨緯度越高，每一步所能朝上方（北）移動的垂直距離越短的性質。

## 2-3 模擬球面上隨機漫步演算法

為模擬出球面上的隨機漫步，首先我們必須找出能使球面上任一點，符合下列兩條件：

- 1.每次跨出的步伐等長。
- 2.下一步所跨的方向服從特定分配(ex:Uniform(0,2 $\pi$ ))。

而產生下一步所在位置的計算方法。在本篇論文中，我們透過轉軸公式及截面圓性質，來達成此目標。

在此先說明我們如何決定每次跨出的步伐長。由於在球面上點到點移動的距離並非兩點間的直線距離，而是球面上的圓弧長，所以弧長可為任意常數；但為了因應2-4節的分析需要，本篇論文中弧長決定的方式是：由赤道朝正北方向上移一緯度時的弧長。因此，我們利用弧長 $c$ 與夾角 $\theta$ 的關係：

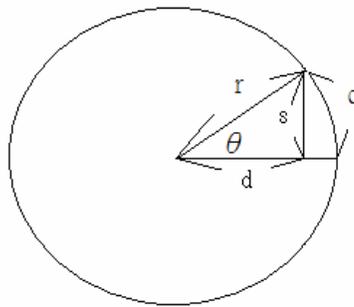


圖2.2 弧長 $c$ 與夾角 $\theta$ 的關係圖

$c = \frac{2\pi r \theta}{360}$ ，得到當 $\theta = 1$ ， $r = 100$ ， $c = 1.745329252$ ，所代表的意思也就是當我們限定球半徑為100，則每一次所跨出的弧長長度皆為1.745329252。此時，往北移動的垂直距離 $= s = r \sin(1) = 1.745240644$ ；向內移動的水平距離 $= r - d = r - r \cos(1) = 0.01523047$ 。



$$x_1'' = x_0'' + s \times \cos \alpha \quad (2.10)$$

$$y_1'' = y_0'' - (r - d) \quad (2.11)$$

$$z_1'' = z_0'' + s \times \sin \alpha \quad (2.12)$$

但必須注意的是，此處的 $(x_1'', y_1'', z_1'')$ 是在旋轉後的座標系表示法，因此為得到其在原始座標的位置，必須再將座標軸旋轉回原本的座標系，以得到下一步所在位置的座標 $(x_1, y_1, z_1)$ 。

根據上述方法，我們可寫出利用電腦模擬球面上隨機漫步的演算法：

1. 起始位置經緯度 $(\theta_0, \phi_0)$ ，利用式(2.4)、(2.5)、(2.6)可計算出其直角座標上的位置 $(x_0, y_0, z_0)$ 。
2. 利用轉軸公式(2.9)，得到轉軸後的直角座標 $(x_0'', y_0'', z_0'') = (0, r, 0)$ 。
3. 隨機選取下一步方向： $\alpha$ 角度， $\alpha \in$ 指定分配。
4. 利用式(2.10)、(2.11)、(2.12)找出下一步所在位置 $(x_1'', y_1'', z_1'')$ 。
5. 再利用轉軸公式，旋轉反方向角度，將座標轉回原直角座標位置，得到轉軸後的直角座標 $(x_1, y_1, z_1)$ 。
6. 最後利用式(2.7)、(2.8)求出所在位置的經緯度 $(\theta_1, \phi_1)$ 。
7. 判斷所在緯度 $\phi_1$ 是否已觸及停止的範圍：赤道(0)或北極圈( $66^\circ 33'$ )。
8. 若已抵達停止範圍，則計算至停止為止的總步數。
9. 若未抵達停止範圍，則視 $(\theta_1, \phi_1)$ 為起始位置重複前述步驟。

## 2-4 模擬圓周上隨機漫步演算法

為確認此模擬方法是否正確可行，我們套用轉軸的方法於2維的圓上，並製造特殊情況，使模擬的過程符合賭徒破產定理的條件，並據此將模擬的結果與賭徒破產公式的理論值做比較。

我們採用的方法是，將球投影到平面上(不考慮經度，只考慮緯度)，則此時球面上點的移動，等同於在球圓周上的移動；另外我們限制每步所跨出的長度恰等於跨越一緯度，即：當球半徑為100，則每一次所跨出的弧長長度皆為1.745329252。在此同時，依弧長所截切出的截面圓，將會因投影效果，而變成一直線， $\alpha$ 角度也只會90度和270度兩種選擇。在上述這些特殊情況成立下，將使每次皆跨行1緯度長度且下一步不是向上就是向下的假設成立，則由*i*緯度出發到達緯度66度時停止的情況，即等同於2.1的賭徒破產定理中，現有*i*元欲獲得66元的過程。此時，我們可利用式(2.1)及(2.2)估計出成功到達的機率和停止的期望步數值，並與模擬出的結果做比較，以確認此模擬方法的準確度。

而為了控制下一步向上或向下的機率，我們透過隨機選取一值*p*，*p*服從uniform(0,1)分配來加以控制。若*p*≤0.7，則方向 $\alpha=90$ ，即：向上一緯度；若*p*>0.7，則方向 $\alpha=270$ ，即：向下一緯度，即：每次出發，增加1緯度的機率為0.7，減少1緯度的機率為0.3，*N*=66，則由式(2.1)及(2.2)可知理論值為：

$$f_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^i \\ 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^{66} \end{cases}$$

$$E(B_i) = \frac{66 \times f_i - i}{2p - 1} = \frac{66 \times f_i - i}{0.4}$$

現在，我們將說明如何套用2-3模擬的方法到2維座標上(y-z軸)。已知將目前所在緯度  $\phi$  表示為2維座標的方法為：

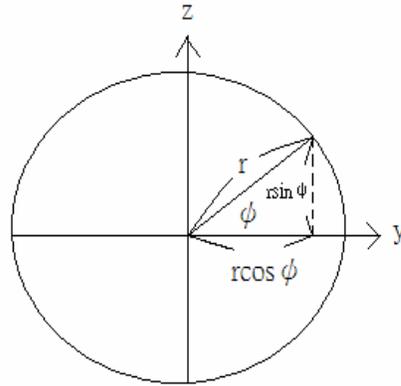


圖2.4 二維座標表示法圖示

$$y = r \cos \phi$$

$$z = r \sin \phi$$



若已知所在位置的直角座標，則可反推所在緯度：

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \text{ 或 } \phi = \sin^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

同樣地，我們可利用轉軸公式將圓上的任一點  $(y, z)$  都旋轉到y軸上  $(y', z')$ ：

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

但因為限制每次皆跨行1緯度長度(即： $c=1.745329252$ )，所以下一步所在位置的表示法只有兩種可能：

a. 若向上一緯度(由  $A(y_0', z_0')$  移動至  $A'(y_1', z_1')$ )

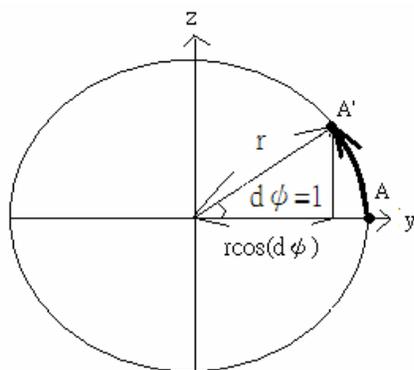


圖2.5 二維座標中向上移動圖示

$$y_1' = y_0' - (r - r \cos(1)) = y_0' - r \times 0.0001523$$

$$z_1' = z_0' + r \sin(1) = z_0' + r \times 0.01745$$

b. 同理，若向下一緯度

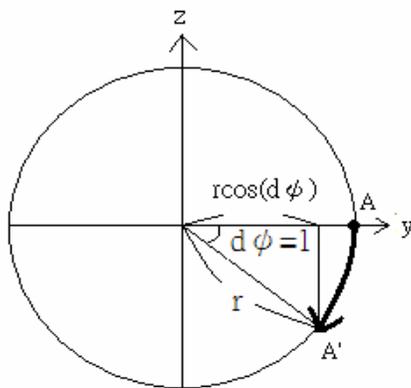


圖2.6 二維座標中向下移動圖示

$$y_1' = y_0' - (r - r \cos(1)) = y_0' - r \times 0.0001523$$

$$z_1' = z_0' - r \sin(1) = z_0' - r \times 0.01745$$

接下來，只要再旋轉回原始座標系，則可得到下一步所在位置 $(y_1, z_1)$ 及其緯度。

根據上述方法，我們可寫出利用電腦模擬球面上隨機漫步的演算法：

(前提假設:球半徑 $r=100$ ，每步所跨弧長 $=1.745329252$ )

1. 起始位置緯度 $(\phi_0)$ ，計算出其直角座標上的位置 $(y_0, z_0)$ 。
2. 利用轉軸公式，使點 $(y_0, z_0)$ 能旋轉至y軸上做運算，並得到轉軸後的直角座標 $(y_0', z_0') = (r, 0)$ 。
3. 決定下一步方向：隨機選取 $\rho \in \text{Uniform}(0, 1)$ ，若 $\rho \leq 0.7$ ，即緯度增加1度；若 $\rho > 0.7$ ，即緯度減少1度。
4. 找出下一步所在位置 $(y_1', z_1')$ 。
5. 再利用轉軸公式，旋轉反方向角度，將座標轉回原直角座標位置，得到轉軸後的直角座標 $(y_1, z_1)$ 。
6. 再利用直角座標 $(y_1, z_1)$ ，逆推出所在位置的緯度 $(\phi_1)$ 。
7. 判斷所在緯度 $\phi_1$ 是否已觸及停止的範圍：赤道(0)或北極圈( $66^\circ 33'$ )。
8. 若已抵達停止範圍，則計算至停止為止的總步數。
9. 若未抵達停止範圍，則視 $(\phi_1)$ 為起始位置重複前述步驟。



## 第三章 模擬結果分析

### 3-1 模擬球面上的隨機漫步

首先，我們先呈現當決定下一步所跨方向的  $\alpha$  角度為服從  $\text{Uniform}(0, 2\pi)$  下的情況，模擬球面上隨機漫步的計算結果；值得注意的是，由於  $\alpha$  角度定義的方式，此時下一步的方向屬於向上的機率或向下的機率相同。因此，我們期望觀察到近似於式(2.1)與式(2.3)的結果，即：成功抵達目的地(北極圈)的機率與起始位置的緯度成正比關係；整個隨機漫步所花費的時間與起始位置的緯度成二次曲線的關係，其中又以位於目標緯度  $1/2$  的緯度為起始位置者所需花費的時間最多。接著在3-3節，我們再利用不同的Beta分配來呈現不同的向上向下機率所模擬出的結果。

#### 3-1-1 模擬步驟

1. 依起始位置經緯度  $(\theta_0, \phi_0)$ ，計算出直角座標上位置  $(x_0, y_0, z_0)$ 。
2. 利用轉軸公式，得到轉軸後的直角座標  $(x_0'', y_0'', z_0'') = (0, r, 0)$ 。
3. 隨機選取下一步方向： $\alpha$  角度， $\alpha \in \text{Uniform}(0, 2\pi)$ 。
4. 找出下一步所在位置  $(x_1'', y_1'', z_1'')$ 。
5. 再利用轉軸公式，旋轉反方向角度，將座標轉回原直角座標位置，得到轉軸後的直角座標  $(x_1, y_1, z_1)$ 。
6. 求出所在位置的經緯度  $(\theta_1, \phi_1)$ 。
7. 判斷所在緯度  $\phi_1$  是否已觸及停止的範圍：赤道(0)或北極圈  $(66^\circ 33')$ 。

8. 若已抵達停止範圍，則計算至停止為止的總步數。
9. 若未抵達停止範圍，則視 $(\theta_1, \phi_1)$ 為起始位置重複1~7的步驟。

### 3-1-2 模擬結果

首先，我們列出在各個起始緯度(0~65度)範圍，各模擬10000次，所得到成功抵達北極圈的機率數值於附錄一、表3.1，並繪出模擬結果與現有*i*元欲獲得66元的賭徒破產理論值的散佈圖如圖3.1，其中「成功」代表先抵達北極圈而非赤道的機率：

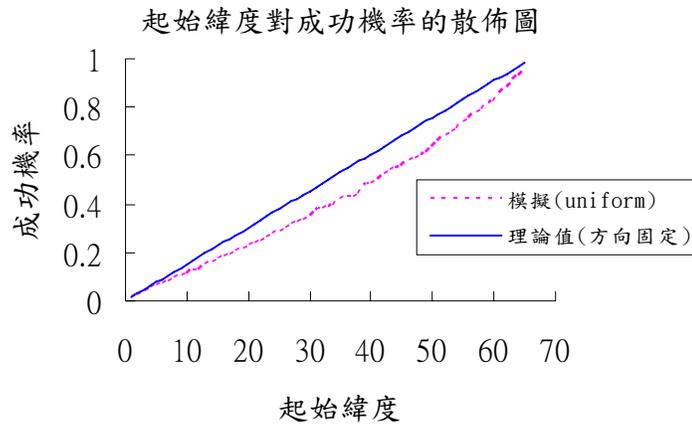


圖3.1 起始緯度對成功機率的散佈圖

由圖3.1可以看到，起始緯度與成功抵達北極圈的機率成正比，由於此時下一步的方向屬於向上的機率或向下的機率相同，因此我們發現這樣的關係其實與賭徒破產公式(2.1)出現的情況相似，即：

當 $\frac{p}{q}=1$ ， $f_i \propto i$ ；圖3.1同時也顯示出電腦模擬的成功機率要比理論

值的機率來得低，推論原因主要是因為將賭徒破產定理的情況套用在三維空間時，需建立在每一步都筆直地朝北或朝南跨相同的距離，但電腦模擬的情況則是朝任一方向跨相同距離，造成每一次朝北或朝南的垂直距離都不同，又因為轉軸的關係，使得緯度

越高，每次向北所能夠移動的最長距離都越短，因此比較起來，電腦模擬的成功抵達北極圈機率會比公式估計的值要低應是可以接受的結果。接下來，我們列出模擬的期望步數結果於附錄一、表3.2，並繪出其散佈圖如圖3.2：

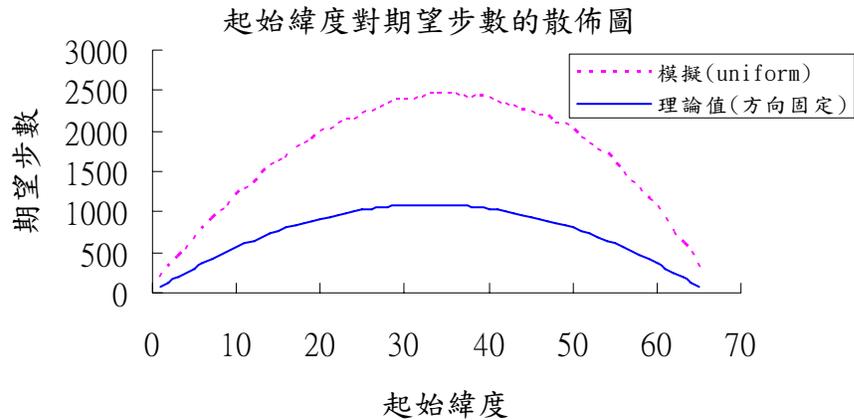


圖3.2 起始緯度對期望步數的散佈圖

由圖3.2我們可以看出，起始緯度與停止的期望步數的散佈圖成二次曲線的關係，其中又以位於目標緯度1/2的緯度為起始位置者所需花費的時間最多，亦與賭徒破產理論的公式(2.3)出現的情況相似。然而，圖3.2也顯示出電腦模擬的期望步數要比理論值的數值來得高，推論原因同樣是電腦模擬造成每一次朝北或朝南的垂直距離不同，又緯度越高向北所能夠移動的最長距離都越短，再加上賭徒破產定理停止的位置是66度，而電腦模擬停止的位置則是 $66^{\circ}33'$ 。因此綜合上述原因，電腦模擬的期望步數比公式估計的值要高且高出許多應是合理的結果。

## 3-2 圓周上隨機漫步結果與理論值比較

為了確認模擬方法的可行與否，我們套用轉軸的方法於2維的圓上，使模擬的過程近似於賭徒破產定理的條件，並將模擬的結果與公式(2.1)和(2.2)的理論值做比較。我們期望觀察到的結果是模擬出的數值，與公式解的理論值之間的差值越小越好。

### 3-2-1 模擬步驟

1. 起始位置緯度( $\phi_0$ )，計算其直角座標上的位置( $y_0, z_0$ )。
2. 利用轉軸公式，使點( $y_0, z_0$ )旋轉至y軸上做運算，並得到轉軸後的直角座標( $y'_0, z'_0$ )= $(r, 0)$ 。
3. 決定下一步方向：隨機選取  $\rho \in \text{Uniform}(0,1)$ ，若  $\rho \leq 0.7$ ，緯度增加1度；若  $\rho > 0.7$ ，緯度減少1度。
4. 找出下一步所在位置( $y'_1, z'_1$ )。
5. 將座標轉回原直角座標位置，得到轉軸後的直角座標( $y_1, z_1$ )。
6. 再利用直角座標( $y_1, z_1$ )，逆推出所在位置的緯度( $\phi_1$ )。
7. 判斷所在緯度 $\phi_1$ 是否已觸及停止的範圍：赤道(0)或北極圈( $66^{\circ}33'$ )。
8. 若已抵達停止範圍，則計算至停止為止的總步數。
9. 若未抵達停止範圍，則視( $\phi_1$ )為起始位置重複1~7的步驟。

### 3-2-2 模擬結果

我們利用上述演算法，將緯度(0~65度)範圍，各模擬100000次所得到的成功抵達北極圈機率數值與使用公式所估計出的理論

值列表比較於附錄一、表3.3。由表3.3可以看出，當我們套用此方法於2維的圓上，使模擬的過程近似於賭徒破產定理的條件時，所得電腦模擬結果與理論值的結果相對誤差幾乎都小於0.01，屬於可接受範圍。同樣地，我們列出電腦模擬的期望步數與理論值的列表比較於附錄一、表3.4。由表3.4我們也可以看出，套用此方法於電腦模擬出的結果與理論值相對誤差的值也大多小於0.01，因此我們認定利用轉軸方式來模擬球面上隨機漫步的方法應該可行。

### 3-3 不同分配模擬結果比較

事實上，附錄一的表3.1及表3.2所顯示的結果，皆建立在下一步的方向來自於Uniform分配的假設下，因此由下一步方向的選取方式可知，該條件下任一點位置下一步往上(北)或往下(南)的機率相同。接下來，我們想嘗試讓下一步的方向服從Beta分配，看看與服從Uniform分配的結果有何不同，並透過控制Beta分配的偏態，來改變向上和向下的機率，並比較彼此的差異。

#### 3-3-1 Beta分配簡介

已知Beta( $\alpha, \beta$ )的機率分配為〔4〕：

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0 < x < 1; \alpha, \beta > 0$$

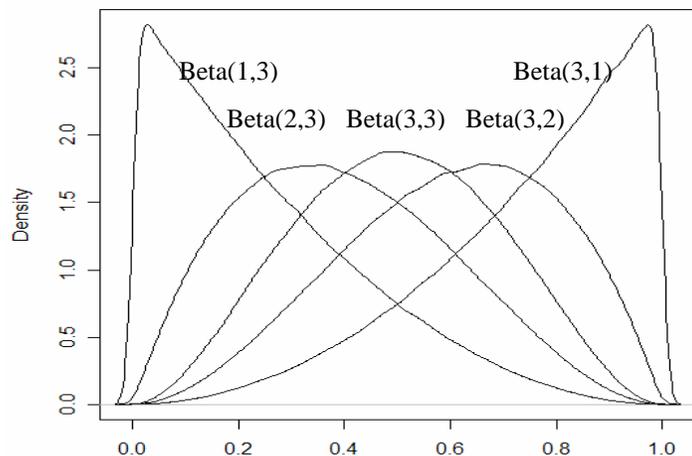


圖3.3 beta分配偏態圖示

由圖3.3，我們可以看出Beta分配的對稱與傾斜，可由  $\alpha$ ， $\beta$  之間的關係來控制：

1.  $\alpha < \beta$ ，為一右偏分配。
2.  $\alpha = \beta$ ，為一對稱分配。
3.  $\alpha > \beta$ ，為一左偏分配。

因為Beta( $\alpha, \beta$ )的x值介於(0,1)，因此模擬下一步方向時，需再乘上  $2\pi$ ，才能得到所需的角範圍，以做為下一步方向。另外，由於當角度介於  $0 \sim \pi$  範圍時，將導致下一步的方向往北移動；而  $\pi \sim 2\pi$  範圍時，則會令下一步的方向往南移動，因此利用各個beta分的累積分配函數(F)，計算當x值  $\leq 0.5$  時的函數值，我們就可以得到對應的向上機率分別為：

表3.5 不同beta分配對應的機率值

分配	期望值	偏態	$F(0.5)$	向上機率P	向下機率(1-P)
<b>Beta(1,3)</b>	0.25	右偏	0.875	0.875	0.125
<b>Beta(2,3)</b>	0.4	右偏	0.6875	0.6875	0.3125
<b>Beta(3,3)</b>	0.5	對稱	0.5	0.5	0.5
<b>Beta(3,2)</b>	0.6	左偏	0.3125	0.3125	0.6875
<b>Beta(3,1)</b>	0.75	左偏	0.125	0.125	0.875

由表3.5我們可以看出，由於Beta(3,3)的向上機率=0.5，於uniform分配的情況相同，因此我們期望看到  $\alpha$  角度服從Beta(3,3)分配時，

模擬出的結果近似於  $\alpha$  角度服從uniform分配。此外由於Beta(1,3)與Beta(2,3)分配，下一步向上的機率都大於0.5，因此模擬出的結果應會發現各緯度成功抵達北極圈的機率皆很高，而停止步數的期望值也不需太多；而且由於Beta(1,3)的向上機率大於Beta(2,3)，因此Beta(1,3)各緯度成功抵達北極圈的機率應會大於Beta(2,3)，而Beta(1,3)停止步數的期望值應會少於Beta(2,3)。同理可推測，因為Beta(3,2)與Beta(3,1)分配下一步向上的機率都小於0.5，因此模擬出的結果應會發現各緯度成功抵達北極圈的機率皆不高，相較之下返回赤道而停止步數的期望值也不會太多；而由於Beta(3,1)的向上機率小於Beta(3,2)，因此Beta(3,1)各緯度成功抵達北極圈的機率應會小於Beta(3,2)，且Beta(3,1)停止步數的期望值應會少於Beta(3,2)。

### 3-3-2 模擬結果比較

同樣地，利用前述的模擬方法，針對Beta分配不同的  $\alpha$ 、 $\beta$  值，在緯度(0~65度)範圍，各模擬10000次，模擬出的機率數值於附錄一表3.6，其中「成功」代表先抵達北極圈而非赤道的機率。由表3.6可看出，當Beta分配為一對稱分配(Beta(3,3))時，模擬出的機率與Uniform分配的結果相近，與原先所預期的結果相同，其散佈圖如圖3.4：

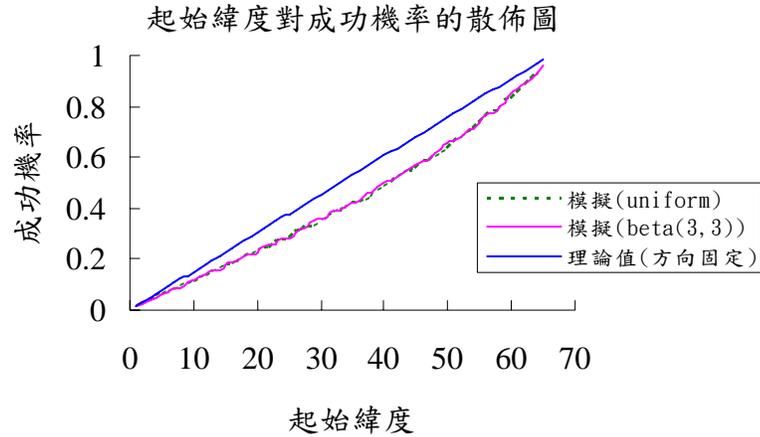


圖3.4成功抵達目的地機率：Beta分配與Uniform分配趨勢比較圖

而由表3.6可看出，當 $\alpha$ 角度服從Beta(3,3)分配時，成功抵達目的地的機率要比服從Beta(3,2)、Beta(3,1)分配來得高，但比Beta(3,1)、Beta(3,2)分配要低許多。推論原因應是當Beta分配為一左偏分配：Beta(3,2)、Beta(3,1)時，期望值分別為0.75和0.6，乘以 $2\pi$ 後換算成角度發現約為270度和216度，使平均而言下一步都朝所在緯度下方移動，因此向下移動的機率都大於0.5，不易向高緯度前進的情況，而產生0~60的起始緯度能成功抵達目標緯度的機率幾乎皆為零，即使能成功抵達，其機率值也都很小；而且在能抵達的前提下，Beta(3,2)成功抵達目標緯度的機率都比Beta(3,1)要高，符合原先預期的結果。相較之下，當Beta分配為一右偏分配：Beta(1,3)、Beta(2,3)時，期望值分別為0.25和0.4，乘以 $2\pi$ 後換算成角度發現約為90度和144度，使下一步方向平均來說都朝所在緯度上方移動，因此向上移動的機率都大於0.5，而產生8~65的起始緯度能成功抵達目標緯度的機率幾乎皆為1，其餘未能成功抵達的機率值也都很小的結果；而且在未有百分之百成功機率抵達目的地

的情況下，Beta(1,3)成功抵達目標緯度的機率都比Beta(2,3)要高，符合原先期待的結果。

此外，由3-1-1和3-1-2節的模擬結果分析，我們觀察到當下一步向上向下的機率相同時，球面上隨機漫步的模擬數值和起始緯度之間的關係，其實與賭徒破產定理公式的趨勢走向具有相似的結果。因此，為了確認這樣的情形是否在下一步向上向下的機率比值不同時，也可以得到相同的結論，我們嘗試計算依照賭徒破產定理對應本節不同Beta分配的向上向下機率時成功抵達目的地的機率的理論值，與實際模擬的結果做比較(附錄二)，發現兩者間同樣具有相同的趨勢，也就是當向上機率大於0.5時，成功抵達目的地的機率都高，幾乎等於1；相對來說，當向上機率小於0.5時，成功抵達目的地的機率則非常小，幾乎為零。

而針對Beta分配不同的 $\alpha$ 、 $\beta$ 值，我們列出模擬的期望步數數值於附錄一表3.7。由表3.7可看出，當Beta分配為一對稱分配：Beta(3,3)時，模擬出的期望步數與Uniform分配的結果相近，與原先所預期的結果相同，其散佈圖如圖3.5:

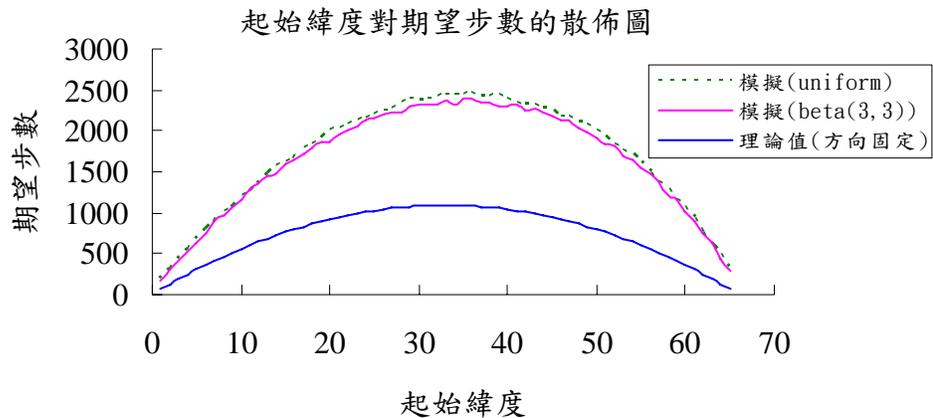


圖3.5期望步數：Beta分配與Uniform分配趨勢比較圖

另外，而由表3.7可看出，當 $\alpha$ 角度服從Beta(3,3)分配時，所花費的時間（期望步數）普遍要比服從Beta(3,2)、Beta(3,1)分配要高許多，推論原因應是Beta(3,3)分配的期望值為0.5，乘以 $2\pi$ 後換算成角度發現約為180度，容易朝水平方向移動，即使向上或向下，垂直移動的距離也不大，因此相較於左偏或右偏的Beta分配，到停止前所花的時間，自然要比較多。同時我們也發現，當Beta分配為一右偏分配：Beta(3,2)、Beta(3,1)時，起始緯度在0~47範圍所得到的期望步數值都不大，推論原因應是能成功抵達目標緯度的機率幾乎皆為零，換言之，即是很容易返回赤道而停止，導致很快就停止行動。相較之下，當Beta分配為一左偏分配：Beta(1,3)、Beta(2,3)時，起始緯度在0~47範圍所得到的期望步數值也都不大，但此時原因則應是其未能成功抵達的機率值都很小，即很容易抵達目標而停止，導致很快就停止漫步。

同樣地，我們計算賭徒破產定理對應本節不同Beta分配的向上向下機率時，期望步數的理論值，並與實際模擬的結果做比較(附錄三)，發現兩者之間也具有相同的趨勢。因此，我們可以說，當下一步向上向下的機率比值不等於1，球面上隨機漫步的模擬數值結果仍與賭徒破產定理公式具有類似的結論。另外不難發現，電腦模擬出的期望步數，在任意起始緯度都比賭徒破產公式定理得到的結果要多，而且在向上機率大於0.5時(即：下一步的方向有超過一半的機率都是向北移動)，起始緯度越低，兩者之間的差距越大，推論原因應該是因為由越低緯度出發，所需橫跨的緯度範圍就越長(ex:2~66)，雖然因為 $p>0.5$ ，幾乎都能成功抵達目的地，但

是仍存在返回赤道的風險，再加上電腦模擬的過程，每一步所能移動的垂直距離都小於等於賭徒破產理論所跨的步長，因此賭徒破產理論移動一步的距離，球面上都需要移動更多步來達成，因此橫跨的緯度範圍越大，來來往往的過程就需要更多的時間；反之，由較高緯度出發，因為 $p > 0.5$ ，成功抵達目的地幾乎為100%，縱使每一步向北移動的垂直距離皆不同，和賭徒破產公式定理得到的結果也都會越來越接近。相對來說，當向上機率小於0.5時（即：下一步的方向有超過一半的機率都是向南移動），則起始緯度越高的情況下，兩者之間的差距反而大，推論原因則是因為當 $p < 0.5$ ，同樣存在些微成功抵達目的地的機會，又電腦模擬的過程使每一步所能移動的垂直距離都小於等於賭徒破產理論所跨的步長，因此由越高緯度出發所橫跨的緯度範圍越長(ex:63~0)，來來往往的過程需要更多的時間；反之，由較低緯度出發，成功抵達目的地幾乎為0%，和賭徒破產公式定理得到的結果自然會越來越接近。

## 第四章 結論

本篇論文主要的目的是希望能夠以賭徒破產理論為基礎，三維空間中的轉軸公式和截面圓性質為輔助，建立一個簡單的演算法，模擬出三維空間中在球表面上的隨機漫步過程，並藉此進一步了解隨機漫步在沒有限制方向但步長固定的情況下，在球的表面上會以什麼樣的情況進行。由本篇論文提供的演算法，我們可以得到隨機漫步過程各點在經、緯度或直角座標移動的情況，同時能夠計算出成功抵達目的地的機率和整個漫步過程所花費的時間，即：期望步數。

由模擬出的數值我們發現，在固定步長以及下一步方向服從特定分配的球面上隨機漫步與賭徒破產定理公式具有相似的趨勢，即：當向上向下的機率比值等於1時，成功抵達目的地(北極圈)的機率與起始位置的緯度成正比關係，且整個隨機漫步所花費的時間與起始位置的緯度成二次曲線的關係，其中以位於目標緯度1/2的緯度為起始位置者所需花費的時間最多。而當向上向下的機率比值不等於1時，成功抵達目的地的機率和整個隨機漫步所花費時間的結果也與賭徒破產公式的結果有相同的趨勢。但球面上的隨機漫步因為每一步向上或向下移動的垂直距離都不同，因此花費的時間都更長，而且具有因橫跨緯度範圍不同而產生隨起始緯度遞增，與賭徒破產理論值的差異越大(當 $p < 0.5$ )或越小(當 $p > 0.5$ )的性質。

由於本篇論文中所建立隨機漫步方式，具有緯度越高向北所能夠移動的最長距離越短的特性，意即：緯度越高越不容易向上爬升；近似於股票市場中，當指數越接近歷史高點，漲幅越小的情況，因此希望所提出的模擬方法，未來能夠在相關領域加以應用。

## 參考文獻

- [ 1 ] Arfken, G., Mathematical Methods for Physicists, 3rd edition, Academic Press, Orlando, FL, 1985.
- [ 2 ] Coxeter, H.S.M., Introduction to Geometry, 2nd ed, Wiley, New York, 1969.
- [ 3 ] Dyutiman Das, "Quantum Monte Carlo With a Stochastic Potential solver", University of Illinois, degree of Doctor, 2005
- [ 4 ] Evans, M.; Hastings, N.; and Peacock, B., Statistical Distributions, 3rd edition, Wiley, New York, 2000
- [ 5 ] J.A. Given, J.B. Hubbard, J.F. Douglas, "A first-passage algorithm for the hydrodynamic friction and diffusion-limited reaction rate of macromolecules", J.Chem. Phys. 106, , 3721–3771, 1997.
- [ 6 ] Mascagni M. and C.-O. Hwang, " $\varepsilon$ -shell error analysis in “Walk On Spheres” algorithms", Math. Comput. Simulation, in press, 2002.
- [ 7 ] Muller M. E., "Some Continuous Monte Carlo Methods for the Dirichlet Problem", Annals of Mathematical Statistics, 27, 567-589 ,1956.
- [ 8 ] Roberts, P.H. and Ursell, H.D., "Random walk on a sphere and on a Riemannian manifold", PhUos. Trans. A ,Mathematical .and Physical Sciences ,252, 317-356, 1960.
- [ 9 ] Sheldon M. Ross, Stochastic Process, 2nd edition, WILEY, 1980.
- [ 10 ] Thisted, R. A., Elements of Statistical Computing, Chapman and Hall, New York, 1988.

# 附 錄 一、

表3.1 緯度對映成功抵達北極圈機率模擬結果

緯度	成功機率	緯度	成功機率	緯度	成功機率
1	0.0144	23	0.2626	45	0.5537
2	0.0247	24	0.2756	46	0.5833
3	0.0391	25	0.2845	47	0.5894
4	0.0517	26	0.3018	48	0.6012
5	0.0621	27	0.3146	49	0.6143
6	0.072	28	0.3292	50	0.6364
7	0.0801	29	0.3315	51	0.6574
8	0.0932	30	0.3504	52	0.6824
9	0.0998	31	0.3702	53	0.6972
10	0.1126	32	0.3836	54	0.7138
11	0.124	33	0.3892	55	0.7344
12	0.1307	34	0.3988	56	0.7547
13	0.1497	35	0.4195	57	0.779
14	0.1623	36	0.4247	58	0.7928
15	0.1784	37	0.4321	59	0.8177
16	0.1799	38	0.4482	60	0.8286
17	0.1884	39	0.4725	61	0.8537
18	0.2088	40	0.4852	62	0.8826
19	0.2158	41	0.5034	63	0.9091
20	0.2328	42	0.5223	64	0.9252
21	0.2388	43	0.5376	65	0.9561
22	0.2431	44	0.545		

表3.2 緯度對期望步數模擬結果

緯度	期望步數	緯度	期望步數	緯度	期望步數
<b>1</b>	185.7869	<b>23</b>	2132.031	<b>45</b>	2248.373
<b>2</b>	317.0791	<b>24</b>	2143.494	<b>46</b>	2187.003
<b>3</b>	430.5564	<b>25</b>	2202.633	<b>47</b>	2178.715
<b>4</b>	552.4942	<b>26</b>	2244.336	<b>48</b>	2093.866
<b>5</b>	670.5594	<b>27</b>	2280.125	<b>49</b>	2084.278
<b>6</b>	798.1686	<b>28</b>	2347.84	<b>50</b>	2017.356
<b>7</b>	902.2981	<b>29</b>	2387.121	<b>51</b>	1927.679
<b>8</b>	1012.038	<b>30</b>	2381.418	<b>52</b>	1847.946
<b>9</b>	1071.853	<b>31</b>	2391.437	<b>53</b>	1759.81
<b>10</b>	1199.587	<b>32</b>	2412.104	<b>54</b>	1711.938
<b>11</b>	1270.092	<b>33</b>	2454.929	<b>55</b>	1609.169
<b>12</b>	1355.005	<b>34</b>	2450.352	<b>56</b>	1502.505
<b>13</b>	1486.08	<b>35</b>	2449.169	<b>57</b>	1386.755
<b>14</b>	1568.415	<b>36</b>	2459.602	<b>58</b>	1298.695
<b>15</b>	1623.881	<b>37</b>	2426.542	<b>59</b>	1167.023
<b>16</b>	1664.632	<b>38</b>	2417.266	<b>60</b>	1081.353
<b>17</b>	1787.097	<b>39</b>	2432.37	<b>61</b>	940.4222
<b>18</b>	1850.396	<b>40</b>	2403.899	<b>62</b>	768.4553
<b>19</b>	1905.596	<b>41</b>	2358.658	<b>63</b>	610.9491
<b>20</b>	2002.244	<b>42</b>	2332.806	<b>64</b>	513.36
<b>21</b>	2023.779	<b>43</b>	2314.562	<b>65</b>	310.1307
<b>22</b>	2087.072	<b>44</b>	2273.538		

表3.3 緯度對成功機率值的理論值與模擬結果比較

緯度	理論機率( $\hat{p}$ )	模擬 機率( $\tilde{p}$ )	相對誤差 $\left  \frac{\hat{p}-\tilde{p}}{\hat{p}} \right $	緯度	理論機率( $\hat{p}$ )	模擬 機率( $\tilde{p}$ )	相對誤差 $\left  \frac{\hat{p}-\tilde{p}}{\hat{p}} \right $
0	0	0	0	33	1	1	0
1	0.571429	0.57105	0.000663	34	1	1	0
2	0.816327	0.81733	0.001229	35	1	1	0
3	0.921283	0.92074	0.000589	36	1	1	0
4	0.966264	0.96551	0.00078	37	1	1	0
5	0.985542	0.985	0.00055	38	1	1	0
6	0.993804	0.99408	0.000278	39	1	1	0
7	0.997344	0.99697	0.000375	40	1	1	0
8	0.998862	0.999	0.000138	41	1	1	0
9	0.999512	0.99955	3.78E-05	42	1	1	0
10	0.999791	0.99981	1.9E-05	43	1	1	0
11	0.99991	0.99989	2.04E-05	44	1	1	0
12	0.999962	0.99989	7.16E-05	45	1	1	0
13	0.999984	0.99999	6.46E-06	46	1	1	0
14	0.999993	0.99998	1.29E-05	47	1	1	0
15	0.999997	0.99999	6.98E-06	48	1	1	0
16	0.999999	1	1.3E-06	49	1	1	0
17	0.999999	0.99999	9.44E-06	50	1	1	0
18	1	1	0	51	1	1	0
19	1	1	0	52	1	1	0
20	1	1	0	53	1	1	0
21	1	1	0	54	1	1	0
22	1	1	0	55	1	1	0
23	1	1	0	56	1	1	0
24	1	1	0	57	1	1	0
25	1	1	0	58	1	1	0
26	1	1	0	59	1	1	0
27	1	1	0	60	1	1	0
28	1	1	0	61	1	1	0
29	1	1	0	62	1	1	0
30	1	1	0	63	1	1	0
31	1	1	0	64	1	1	0
32	1	1	0	65	1	1	0

表3.4 緯度對停止步數的期望值理論值與模擬結果比較

緯度	理論值 ( $\hat{\mu}$ )	模擬停止 步數( $\tilde{\mu}$ )	相對誤差		緯度	理論值 ( $\hat{\mu}$ )	模擬停止步數 ( $\tilde{\mu}$ )	相對誤差	
			$\left  \frac{\hat{\mu} - \tilde{\mu}}{\hat{\mu}} \right $					$\left  \frac{\hat{\mu} - \tilde{\mu}}{\hat{\mu}} \right $	
<b>0</b>	0	0	0		<b>33</b>	82.5	82.52696	0.000327	
<b>1</b>	91.78571	91.69662	0.000971		<b>34</b>	80	79.9395	0.000756	
<b>2</b>	129.6939	129.7817	0.000677		<b>35</b>	77.5	77.50962	0.000124	
<b>3</b>	144.5117	144.311	0.001388		<b>36</b>	75	74.97604	0.000319	
<b>4</b>	149.4336	149.3787	0.000367		<b>37</b>	72.5	72.56172	0.000851	
<b>5</b>	150.1144	150.0829	0.000209		<b>38</b>	70	70.05252	0.00075	
<b>6</b>	148.9776	149.238	0.001748		<b>39</b>	67.5	67.574	0.001096	
<b>7</b>	147.0618	147.0515	6.99E-05		<b>40</b>	65	65.01852	0.000285	
<b>8</b>	144.8122	144.8428	0.000211		<b>41</b>	62.5	62.48858	0.000183	
<b>9</b>	142.4195	142.3525	0.000471		<b>42</b>	60	59.95134	0.000811	
<b>10</b>	139.9655	139.9507	0.000106		<b>43</b>	57.5	57.4767	0.000405	
<b>11</b>	137.4852	137.4368	0.000352		<b>44</b>	55	54.98498	0.000273	
<b>12</b>	134.9937	135.1055	0.000828		<b>45</b>	52.5	52.49672	6.25E-05	
<b>13</b>	132.4973	132.5052	5.96E-05		<b>46</b>	50	49.96878	0.000624	
<b>14</b>	129.9988	129.954	0.000345		<b>47</b>	47.5	47.56354	0.001338	
<b>15</b>	127.4995	127.4178	0.000641		<b>48</b>	45	45.0165	0.000367	
<b>16</b>	124.9998	125.0077	6.3E-05		<b>49</b>	42.5	42.5962	0.002264	
<b>17</b>	122.4999	122.4856	0.000117		<b>50</b>	40	40.0061	0.000153	
<b>18</b>	120	119.8916	0.000903		<b>51</b>	37.5	37.48846	0.000308	
<b>19</b>	117.5	117.6291	0.001099		<b>52</b>	35	35.04942	0.001412	
<b>20</b>	115	114.9007	0.000863		<b>53</b>	32.5	32.47774	0.000685	
<b>21</b>	112.5	112.578	0.000693		<b>54</b>	30	30.00688	0.000229	
<b>22</b>	110	110.0418	0.00038		<b>55</b>	27.5	27.46874	0.001137	
<b>23</b>	107.5	107.4801	0.000185		<b>56</b>	25	24.9664	0.001344	
<b>24</b>	105	105.0422	0.000402		<b>57</b>	22.5	22.48946	0.000468	
<b>25</b>	102.5	102.4697	0.000296		<b>58</b>	20	20.01906	0.000953	
<b>26</b>	100	100.1001	0.001001		<b>59</b>	17.5	17.52362	0.00135	
<b>27</b>	97.5	97.60414	0.001068		<b>60</b>	15	15.04154	0.002769	
<b>28</b>	95	94.9919	8.53E-05		<b>61</b>	12.5	12.4802	0.001584	
<b>29</b>	92.5	92.40544	0.001022		<b>62</b>	10	10.01566	0.001566	
<b>30</b>	90	90.0864	0.00096		<b>63</b>	7.5	7.48448	0.002069	
<b>31</b>	87.5	87.55426	0.00062		<b>64</b>	5	5.015	0.003	
<b>32</b>	85	84.91768	0.000968		<b>65</b>	2.5	2.38083	0.047668	

表3.6 不同beta分配緯度對成功機率模擬結果

緯度	Beta(3,1)	Beta(3,2)	Beta(3,3)	Beta(2,3)	Beta(1,3)	uniform
1	0	0	0.0155	0.8081	0.9786	0.0144
2	0	0	0.0262	0.9374	0.9981	0.0247
3	0	0	0.0361	0.9792	0.9998	0.0391
4	0	0	0.0469	0.9927	1	0.0517
5	0	0	0.0594	0.9977	1	0.0621
6	0	0	0.0706	0.9991	1	0.072
7	0	0	0.0849	0.9999	1	0.0801
8	0	0	0.0897	1	1	0.0932
9	0	0	0.1055	1	1	0.0998
10	0	0	0.119	1	1	0.1126
11	0	0	0.1312	1	1	0.124
12	0	0	0.1385	1	1	0.1307
13	0	0	0.1543	1	1	0.1497
14	0	0	0.1601	1	1	0.1623
15	0	0	0.1789	1	1	0.1784
16	0	0	0.1891	1	1	0.1799
17	0	0	0.1968	1	1	0.1884
18	0	0	0.2084	1	1	0.2088
19	0	0	0.2217	1	1	0.2158
20	0	0	0.2271	1	1	0.2328
21	0	0	0.253	1	1	0.2388
22	0	0	0.2613	1	1	0.2431
23	0	0	0.2614	1	1	0.2626
24	0	0	0.283	1	1	0.2756
25	0	0	0.2833	1	1	0.2845
26	0	0	0.3082	1	1	0.3018
27	0	0	0.3194	1	1	0.3146
28	0	0	0.325	1	1	0.3292
29	0	0	0.3518	1	1	0.3315
30	0	0	0.3571	1	1	0.3504
31	0	0	0.3703	1	1	0.3702
32	0	0	0.3888	1	1	0.3836
33	0	0	0.3945	1	1	0.3892
34	0	0	0.4088	1	1	0.3988
35	0	0	0.4183	1	1	0.4195
36	0	0	0.4327	1	1	0.4247

37	0	0	0.4523	1	1	0.4321
38	0	0	0.4577	1	1	0.4482
39	0	0	0.4813	1	1	0.4725
40	0	0	0.4987	1	1	0.4852
41	0	0	0.5113	1	1	0.5034
42	0	0	0.524	1	1	0.5223
43	0	0	0.5355	1	1	0.5376
44	0	0	0.5578	1	1	0.545
45	0	0	0.5686	1	1	0.5537
46	0	0	0.5888	1	1	0.5833
47	0	0	0.5967	1	1	0.5894
48	0	0	0.618	1	1	0.6012
49	0	0	0.6341	1	1	0.6143
50	0	0	0.6537	1	1	0.6364
51	0	0	0.6655	1	1	0.6574
52	0	0	0.6784	1	1	0.6824
53	0	0	0.7045	1	1	0.6972
54	0	0	0.7142	1	1	0.7138
55	0	0	0.7323	1	1	0.7344
56	0	0	0.763	1	1	0.7547
57	0	0	0.7761	1	1	0.779
58	0	0	0.8001	1	1	0.7928
59	0	0	0.8164	1	1	0.8177
60	0	0	0.8479	1	1	0.8286
61	0	0.0007	0.864	1	1	0.8537
62	0.0001	0.003	0.8871	1	1	0.8826
63	0.0002	0.0125	0.9052	1	1	0.9091
64	0.0008	0.0397	0.9322	1	1	0.9252
65	0.0105	0.13	0.9574	1	1	0.9561

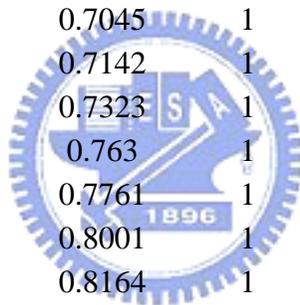


表3.7 不同beta分配緯度對停止步數的期望值模擬結果

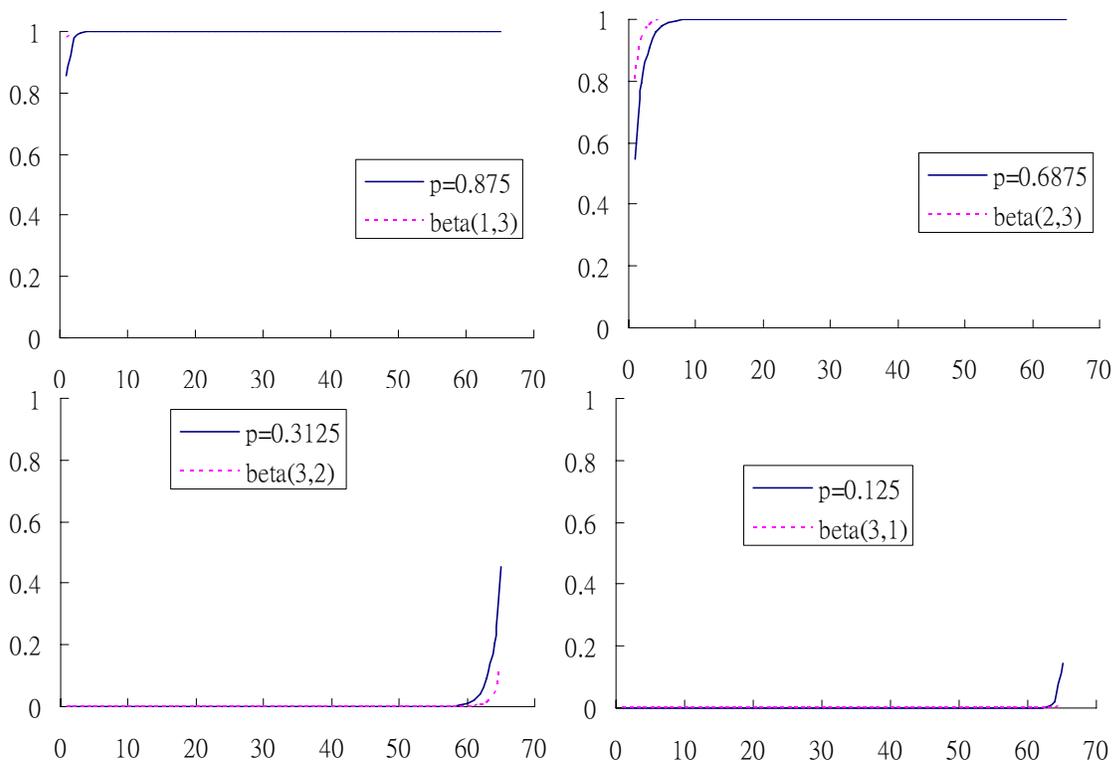
緯度	Beta(3,1)	Beta(3,2)	Beta(3,3)	Beta(2,3)	Beta(1,3)	uniform
1	3.0107	5.0035	180.3125	184.3015	135.593	185.7869
2	5.0573	8.2842	319.8471	211.2709	136.3318	317.0791
3	7.0851	11.5375	411.3669	217.0764	134.4115	430.5564
4	9.1766	15.2498	526.7513	216.8748	132.3252	552.4942
5	11.2345	18.4776	637.5655	214.7779	130.2504	670.5594
6	13.3317	21.8515	759.7591	211.4438	128.1467	798.1686
7	15.4696	25.5045	886.9566	208.3564	126.3201	902.2981
8	17.5481	28.7266	972.8154	204.6057	124.0601	1012.038
9	19.6669	32.1537	1060.774	201.2125	122.0637	1071.853
10	21.6731	35.6823	1172.046	197.6118	119.795	1199.587
11	23.8364	39.1877	1280.919	195.088	117.8662	1270.092
12	25.8858	42.4798	1363.118	190.2699	115.6743	1355.005
13	27.9707	46.0516	1439.68	187.5566	113.6164	1486.08
14	30.0505	49.0233	1483.542	183.2318	111.5113	1568.415
15	32.1885	52.8233	1603.091	180.1565	109.1784	1623.881
16	34.23	56.3425	1641.862	177.3172	107.2223	1664.632
17	36.2197	59.7091	1707.947	173.5929	105.1063	1787.097
18	38.3903	63.2145	1794.412	170.2867	102.9212	1850.396
19	40.6409	66.6959	1860.014	166.7295	100.7224	1905.596
20	42.4517	70.0618	1873.479	163.1231	98.7095	2002.244
21	44.7391	73.1979	1967.313	159.7736	96.5861	2023.779
22	46.8565	76.5753	2014.199	156.3728	94.5989	2087.072
23	48.7689	79.9759	2061.144	152.7598	92.4471	2132.031
24	50.9784	83.8929	2123.897	149.3525	90.4005	2143.494
25	53.1118	86.8056	2157.574	146.1692	88.3166	2202.633
26	55.0976	90.5261	2207.049	142.6508	86.3128	2244.336
27	57.238	93.8755	2234.421	138.785	84.1359	2280.125
28	59.4122	96.9957	2216.109	136.1427	82.0358	2347.84
29	61.4157	101.1855	2301.971	131.8018	79.8468	2387.121
30	63.4214	103.8144	2315.958	128.2073	77.6822	2381.418
31	65.6423	107.9886	2332.606	125.0758	75.8923	2391.437
32	67.6498	111.2967	2331.292	121.6061	73.5955	2412.104
33	69.827	114.4198	2366.955	118.4889	71.3944	2454.929
34	71.7706	117.7441	2333.543	114.7886	69.4419	2450.352
35	73.7005	121.2781	2396.634	110.9406	67.1696	2449.169
36	76.1081	124.7699	2394.805	107.725	65.1306	2459.602

<b>37</b>	78.1078	128.3355	2358.249	104.4098	63.0472	2426.542
<b>38</b>	80.0623	131.4538	2351.234	100.6605	60.9171	2417.266
<b>39</b>	82.1415	135.3498	2306.715	97.5422	58.6251	2432.37
<b>40</b>	84.2802	138.3091	2288.097	93.6528	56.7282	2403.899
<b>41</b>	86.4155	141.8152	2317.528	90.6306	54.5682	2358.658
<b>42</b>	88.4069	145.0424	2257.72	87.0748	52.5097	2332.806
<b>43</b>	90.3704	148.3557	2267.53	83.3361	50.331	2314.562
<b>44</b>	92.6086	151.919	2218.134	80.2903	48.3238	2273.538
<b>45</b>	94.5109	155.7997	2172.059	76.2367	46.0043	2248.373
<b>46</b>	96.8082	158.6885	2133.831	72.7141	44.1103	2187.003
<b>47</b>	98.9383	162.0521	2117.097	69.2155	41.8842	2178.715
<b>48</b>	100.6985	165.6327	2023.482	65.8812	39.7505	2093.866
<b>49</b>	102.9291	169.1571	1978.133	62.3041	37.7662	2084.278
<b>50</b>	104.9258	172.1504	1920.154	58.929	35.5115	2017.356
<b>51</b>	107.0889	175.2372	1846.762	55.2657	33.5173	1927.679
<b>52</b>	109.1558	179.0327	1820.404	51.9124	31.2601	1847.946
<b>53</b>	111.2604	182.352	1704.808	48.2845	29.1893	1759.81
<b>54</b>	113.4775	185.9548	1652.615	45.0079	27.053	1711.938
<b>55</b>	115.2988	189.3317	1546.27	41.3603	24.9659	1609.169
<b>56</b>	117.5313	192.9857	1468.109	37.8668	22.7669	1502.505
<b>57</b>	119.5189	195.6791	1368.416	34.0731	20.6828	1386.755
<b>58</b>	121.6093	198.8116	1219.535	31.0518	18.5684	1298.695
<b>59</b>	123.4326	203.2406	1151.206	27.3145	16.4353	1167.023
<b>60</b>	125.7872	205.8612	1019.12	23.945	14.2769	1081.353
<b>61</b>	127.8702	209.4816	888.3129	20.1534	12.1765	940.4222
<b>62</b>	129.8617	211.337	738.9128	16.608	10.1191	768.4553
<b>63</b>	131.8182	213.5076	620.4948	13.1995	7.9119	610.9491
<b>64</b>	133.7293	210.7151	446.6872	9.603	5.7467	513.36
<b>65</b>	134.5276	193.0658	294.8881	6.1457	3.6641	310.1307

## 附 錄 二、

(成功抵達目的地機率之模擬結果與賭徒破產理論值趨勢比較圖)

$$\text{賭徒破產理論值： } f_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{if } \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{i}{N}, & \text{if } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}, N=66$$

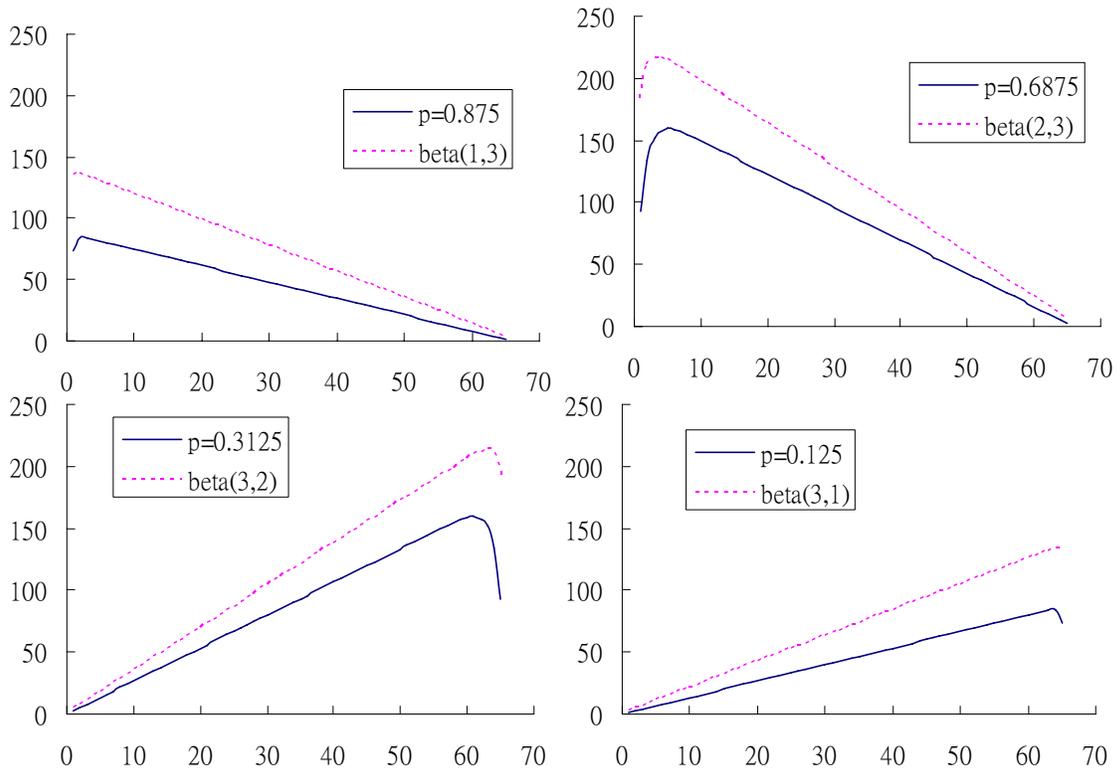


(註：其中實線代表步長固定且向上機率= $p$  的賭徒破產公式理論值。)

### 附 錄 三、

(期望步數之模擬結果與賭徒破產理論值趨勢比較圖)

賭徒破產理論值： $E(B_i) = \frac{N \times f_i - i}{2p - 1}$  ,  $N=66$



(註：其中實線代表步長固定且向上機率= $p$  的賭徒破產公式理論值。)