國　立　交　通　大　學

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

獨立且相同分佈的韋伯隨機變數之和的尾端機率

The Tail Probability of Sum of Independent and Identical Weibull Distributions

研 究 生 ：邱世民

指導教授 ：彭南夫　博士

中華民國九十七年六月

獨立且相同分佈的韋伯隨機變數之和的尾端機率

The Tail Probability of Sum of Independent and Identical Weibull Distributions

研究生：邱世民　　Student：Shih-Min Chiu

指導教授：彭南夫 博士　　Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

國 立 交 通 大 學 理 學 院

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Institute of Statistics
College of Science
National Chiao Tung University
In Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Statistics

June 2008

Hsinchu,Taiwan,Republic of China

中華民國九十七年六月

獨立且相同分佈的韋伯隨機變數和的尾端機率

研究生：邱世民　　　　　　　　　　指導教授：彭南夫 博士

國立交通大學統計學研究所

摘　　要

本篇論文主要目的是要找出韋伯隨機變數之和尾端部分的機率。針對從原本的韋伯隨機變數之和再多增加一個獨立相同分佈的韋伯隨機變數，希望能提供一個簡便的計算方法，來求出擴展後的尾端機率。首先，我們必須先知道 n 的韋伯隨機變數之和的尾端機率。再來，我們則利用這 n 個韋伯隨機變數之和的尾端機率，增加一個獨立且相同分佈韋伯隨機變數之和，觀察其尾端機率的變化。

關鍵詞：韋伯隨機變數之和、危險函數、尾端機率

The Tail Probability of Sum of Independent and Identical Weibull Distributions

Student：Shih-Min Chiu　　　　　Advisor：Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistic
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The main intention of this thesis is to find the tail probability of sum of independent and identical Weibull distributions. About enlarging the sum of independent and identical Weibull distributions with another independent and identical Weibull random variable, we hope that we can provide a straightforward calculation to find the new tail probability. First, we must obtain the tail probability of sum of n Weibull random variables. And then, employing the tail probability of sum of the n Weibull random variables , we intend to observe the changes of the tail probability by increasing a new independent and identical Weibull random variable.

Keyword: *sum of independent and indentical Weibull distributions , hazard function , tail probability*

誌　謝

經過了兩年的學習，最後終於完成碩士論文。在這裡，除了要謝謝所上所有老師的教導之外，我更要由衷的感謝我的指導老師彭南夫教授的細心指導。由於有彭南夫老師一步一步的指導，讓我的論文可以順利的完成。再來也要感謝洪慧念老師在口試時所提出的問題，對我論文的修改助益良多。另外也要感謝口試委員鄭天澤老師與王鴻龍老師，給予我論文的建議與指導，讓我的論文能更加清楚與完善。

也很感謝我所有的朋友們，撰寫論文的時候，因為有了你們的協助，我才能更順利的完成我的論文。還要感謝我的家人，你們給予我的支持與鼓勵，是我在這段期間最有力的後盾。最後，我要把這篇論文獻給半年前不幸去世的祖父，雖然你來不及看到，但是我想跟你說，阿公，我畢業了！

邱世民　　謹誌于

國立交通大學統計學研究所

中華民國九十七年六月

目錄

第一章、簡介

1.1 研究動機

在生活中，描述壽命的運轉都是服從著某種分布。然而，韋伯 *(Weibull)* 分佈則是其中一種我們常見的兩個參數，型態參數*(shape parameter)* α 和尺度參數*(scale parameter)* β，的分佈。由韋伯分佈的危險函數 *(hazard function)*[1]可得知，型態參數 α 大於 **1** 則危險函數為一遞增函數，若以機器的運轉壽命為例，表示機器在使用過一定的時間之後，其損害的機率會隨著時間增加而變大；反之，若 α 小於 **1** 則危險函數為遞減，表示機器在使用初期損壞的機率較大，然而隨著時間的增加而損壞機率變小；若 α 等於 **1** 時危險函數是一常數，則機器的壽命會服從一指數分配，表示機器的損壞率不會因時間改變而產生變化。因此，對於壽命的運轉，我們認為用韋伯分佈作描述會更符合資料型態。

假設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為 n 個分配相同且獨立來自於 $Weibull(\alpha, \beta)$ 分佈的隨機變數，(其機率密度函數為 $f(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^{\alpha}}{\beta}}$)，文獻[2]中，針對大部分的 t 值，可以利用三次多項式來估得 $P(S_n \le t)$，其中 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$。

而另一方面，針對$t \to \infty$的部分，文獻[3]提供了一個不錯的漸進展開式來逼近韋伯分佈的尾端機率*(tail probability)*，$P\left(S_n > t\right)$。在此，我們這篇研究主要針對的是在已知 n 個分配相同且獨立*(indentical and independent)* 韋伯隨機變數*(Weibull random variable)* 之和的尾端機率，再增加一個獨立且相同分佈韋伯隨機變數之後，整個隨機變數之和的尾端機率的改變。在此我們也提出了一些計算，並期待能提供一個較簡便的逼近式。

1.2 論文結構

第二章中，我們會再簡單介紹如何估計韋伯隨機變數之和的分佈函數以及如何運用漸進展開式來逼近其尾端機率。而在第三章，我們將會利用這個結果，考慮再增加一個韋伯隨機變數，觀察整個尾端部分的展開式子會有如何的變化。進一步地，在第四章裡，我們會示範如何用第三章中所推出的結果來實際做尾端部分的展開式子推導。又由文獻[2]可知，在不失一般性之下，我們都可以將韋伯分佈的尺度參數假設成 1，因此，本篇研究中所作推導的都是尺度參數為 1 的韋伯分佈。

第二章、相關研究

2.1 三次多項式近似法

要估計韋伯隨機變數之和的機率分佈，文獻[2]提供了一個三次多項式逼近法，該方法已經針對大部分[0, t]範圍之下，都有相當不錯的表現。假設X_i是來自$Weibull(\alpha,1)$分佈的隨機變數，因此，$Y_i = X_i^c$則為來自 *Exponential(1)* 分佈的隨機變數，$i=1\cdots n$。因為這兩個分佈函數都是連續可微分*(continuously differentiable)* 的函數，所以對於每一個$t\geq 0$，可以找到一個$w(t)$，使得

$$P\left(X_1+\cdots+X_n\leq t\right)=P\left(Y_1+\cdots+Y_n\leq w(t)\right)$$

其中$w(t)$是連續可微分，且$w(0)=0$，所以令 $w(t)=\gamma t^{3\alpha}+\tau t^{2\alpha}+\eta t^{\alpha}$。接著利用$t_p$滿足$P\left(X_1+\cdots+X_n\leq t_p\right)=p$且 θ_p 滿足$P\left(Y_1+\cdots+Y_n\leq\theta_p\right)=p$，找出三個分位點則可求得三個參數$(\gamma,\tau,\eta)$，估得$w(t)$而求出$P\left(X_1+\cdots+X_n\leq t\right)$。

2.2 漸進展開式逼近尾端機率

在文獻[3]的研究中，補強了在$t\to\infty$之後的尾端部分，利用韋伯

分佈的各階動差*(moments)* ，累積分佈函數*(cumulative distribution function)* ，可以定義一係數 g_i，之後利用此係數 g_i 以及韋伯分佈的危險函數，可以得到一個展開式藉以逼近韋伯分佈分佈的尾端機率：

$$\overline{G} = \sum_{0 \le i \le m} g_i \overline{F}^{(i)} + o\left(h^m \overline{F}\right) \tag{1}$$

假設 $X_1, X_2, \cdots$ 是服從型態參數 α 和尺度參數 **1** 的韋伯分佈的隨機變數，F 是其機率分佈函數，且 m 階動差必須存在，而 $\overline{F} = 1 - F$ ，$\overline{F}^{(i)}$ 是 $\overline{F}$ 的第 i 次的微分，其中 h 為其危險函數，則可以得到上述式(1)，其中 $\overline{G} = P\left(X_1 + \cdots + X_n > t\right)$。以 $\mu_{F,i}$ 來表示 F 的第 i 階動差*(i-th moment)*，而在此篇研究中，我們主要是針對韋伯隨機變數之和的尾端機率做研究，所以得知韋伯分佈的 $\mu_{F,i} = \Gamma\left(1 + \frac{i}{\alpha}\right)$。再來，利用 N 的階乘動差*(factorial moments)*，令 $(N)_p = N(N-1)\cdots(N-p+1)$ 為 N 的 p 階階乘動差。若再給定一個非負整數的向量 $\vec{k} = \left(k_1, \cdots, k_n\right)$，將其一般的標記方法延伸成為多維的係數表示法，用

$$\binom{n}{\vec{k}} \quad or \quad \binom{n}{k_1, \cdots, k_n} \tag{2}$$

來表示 $\frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}$ ，並且 $\left|\vec{k}\right| = k_1 + \cdots + k_n$ ，則以 F 的動差以及 N 的階

乘動差，對任意的正整數 i 都可以定義出(1)中的係數 g_i ：

$$g_i = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i \\ k_1,\cdots,k_i \geq 0}} \binom{i}{\vec{k}} (N)_{|\vec{k}|+1} \left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i} \qquad (3)$$

其中，當 $i=0$ 時，令 $g_0 = N$ 。

第三章、主要結果

3.1 係數改變

在這一章中，我們主要是延伸韋伯隨機變數之和的的尾端機率的問題加以探討。現在，我們已經可以計算韋伯隨機變數之和的尾端機率；如果，我們再增加一個相同分佈且獨立的隨機變數，那麼其尾端機率的改變又引起我們的興趣。其中，由(2)中可得知係數 g_i 與隨機變數的個數 N 有關，由此可知，改變隨機變數 N 的個數，則對係數 g_i 也會造成改變。在此，我們以 $g_{i,N}$ 表示隨機變數個數為 N 時的係數 g_i，$g_{i,N+1}$ 表示隨機變數個數為 N+1 時的係數 g_i：

$$g_{i,N+1} = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i \\ k_1,\cdots,k_i\geq 0}} \binom{i}{\vec{k}} (N+1)_{|\vec{k}|+1} \left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i} \tag{4}$$

由(3)和(4)得知，對任意的正整數 i

$$
\begin{aligned}
g_{i,N+1}-g_{i,N} = {} & \frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}(N+1)_{|\vec{k}|+1}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i} \\
& -\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}(N)_{|\vec{k}|+1}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i} \\
= {} & \frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(N+1-N+|\vec{k}|\right)(N)\cdots\left(N-|\vec{k}|+1\right)\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i} \\
= {} & \frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(|\vec{k}|+1\right)N_{|\vec{k}|}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}
\end{aligned}
$$

(5)

而當 $i=0$ 時，$g_{0,N+1}-g_{0,N}=(N+1)-N=1$。因此，再增加一個相同分佈且獨立的韋伯隨機變數，我們就可以得到了係數的改變。所以，對任意的正整數 i，我們可以利用(5)推得

$$
g_{i,N+1}=g_{i,N}+\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(|\vec{k}|+1\right)N_{|k|}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i} \qquad (6)
$$

其中，$g_{0,N+1}=g_{0,N}+1$。

3.2 尾端機率的改變

得到係數的改變情形，我們當然就可以利用此一變化進而求出尾

端機率的改變狀況。我們定義$\overline{G}_{N+1}$為N+1個韋伯隨機變數和的尾端機率，$\overline{G}_N$則為N個韋伯隨機變數和的尾端機率。則利用(1)知道

$$\overline{G}_{N+1}=\sum_{0\le i\le m} g_{i,N+1}\overline{F}^{(i)}+o\left(h^m\overline{F}\right) \tag{7}$$

利用(6)式，我們可以推得

$$\begin{aligned}\overline{G}_{N+1}&=\left(g_{0,N}+1\right)\overline{F}\\&+\sum_{1\le i\le m}\left(g_{i,N}+\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}(N+1)_{|\vec{k}|+1}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}\right)\overline{F}^{(i)}\\&+o\left(h^m\overline{F}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

則再把上述式子加以整理，將可以得到

$$\begin{aligned}\overline{G}_{N+1}&=\overline{F}+\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(\left|\vec{k}\right|+1\right)N_{|\vec{k}|}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}\right)\overline{F}^{(i)}\\&+\sum_{0\le i\le m} g_{i,N}\overline{F}^{(i)}+o\left(h^m\overline{F}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

則我們可以由(9)得到$\overline{G}_{N+1}$和$\overline{G}_{N}$ 之間的關係如下：

$$\overline{G}_{N+1}=\overline{G}_{N}$$

$$+\overline{F}+\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(\left|\vec{k}\right|+1\right)N_{\left|\vec{k}\right|}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}\right)\overline{F}^{(i)}+o\left(h^m\overline{F}\right)$$

(10)

其中式(10)裡面的

$$\overline{F}+\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}(N+1)_{\left|\vec{k}\right|+1}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}\right)\overline{F}^{(i)}$$

皆為正數，也符合了

$$P\left(X_1+\cdots+X_N+X_{N+1}>t\right)\ge P\left(X_1+\cdots+X_N>t\right)$$

的事實。

第四章、範例

在本章中，我們將根據第三章所得到的結果，我們分別要以一到四階的動差來逼近 N+1 個韋伯隨機變數和的尾端機率，來觀察上一章的結果對於尾端機率的計算如何運用。首先，我們假設我們使用的最高動差階數 m=1。當 m=1，則由式(10)得知，N+1 個韋伯隨機變數之和的尾端機率滿足以下的形式：

$$\overline{G}_{N+1} = \overline{G}_N + \overline{F} + \sum_{i=1} \left(\frac{(-1)^i}{i!} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i \\ k_1,\cdots,k_i \geq 0}} \binom{i}{\vec{k}} \left(\left|\vec{k}\right| + 1 \right) N_{|\vec{k}|} \left(\frac{\mu_{F,1}}{1!} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\mu_{F,i}}{i!} \right)^{k_i} \right) \overline{F}^{(i)} + o\left(h^1 \overline{F} \right) \tag{11}$$

我們已知 $Weibull(\alpha,1)$ 分佈中，累積分佈函數 $F = 1 - e^{-t^{\alpha}}$，且 $\overline{F} = 1 - F = e^{-t^{\alpha}}$。而其危險函數 $h = \frac{f}{\overline{F}} = \frac{\alpha t^{\alpha-1} e^{-t^{\alpha}}}{e^{-t^{\alpha}}} = \alpha t^{\alpha-1}$，利用(11)式，我們可以得到

$$\overline{G}_{N+1} = \overline{G}_N + e^{-t^{\alpha}} + \frac{-1}{1!}\binom{1}{1}(1+1)N_1\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^1 \overline{F}^{(1)} + o\left(h^1\overline{F}\right) \qquad (12)$$

利用 $\overline{F}^{(1)} = -\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}}$ 將其代入式(12)，可以得到

$$\begin{aligned}\overline{G}_{N+1} &= \overline{G}_N + e^{-t^{\alpha}} + \left(-2N\mu_{F,1}\right)\left(-\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}}\right) + o\left(\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}}\right) \\ &= \overline{G}_N + e^{-t^{\alpha}} + 2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}} + o\left(\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}}\right)\end{aligned} \qquad (13)$$

我們推得(13)，即為已知N個韋伯隨機變數之和的尾端機率，再增加一個相同分佈且獨立的韋伯隨機變數，用一階動差來逼近N+1個隨機變數和的展開式子。

當m=2時，我們用到二階的動差函數來推估尾端函數，利用式子(10)，得知

$$\overline{G}_{N+1}=\overline{G}_N + \overline{F}+\sum_{1\le i\le 2}\left(\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\ k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(\left|\vec{k}\right|+1\right)N_{\left|\vec{k}\right|}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}\right)\overline{F}^{(i)}+o\left(h^2\overline{F}\right)$$

(14)

利用 $\overline{F}^{(2)}=\alpha^2t^{2(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t^\alpha}$ ，代入(14)中，得到

$$\begin{aligned}\overline{G}_{N+1}&=\overline{G}_N+e^{-t^\alpha}+2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}\\&\quad+\frac{(-1)^2}{2!}\left(\binom{2}{2,0}(2+1)N_2\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^2+\binom{2}{0,1}(1+1)N_1\left(\frac{\mu_{F,2}}{2!}\right)^1\right)\overline{F}^{(2)}+o\left(h^2\overline{F}\right)\\&=\overline{G}_N+e^{-t^\alpha}+2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}\\&\quad+\left[\frac{3}{2}N(N-1)\mu_{F,1}{}^2+N\mu_{F,2}\right]\left(\alpha^2t^{2(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t^\alpha}\right)\\&\quad+o\left(\alpha^2t^{2(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}\right)\end{aligned}$$

(15)

式(15)即為由二階動差推估 N+1 個韋伯隨機變數之和的尾端機率。

如同上列兩個例子，我們也可以得知 m=3 和 m=4 的尾端機率。當 m=3 時，只要再利用到

$\overline{F}^{(3)}=-\alpha^3t^{3(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}+3\alpha^2(\alpha-1)t^{2\alpha-3}e^{-t^\alpha}-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)t^{\alpha-3}e^{-t^\alpha}$ ，則可得

$$\overline{G}_{N+1}$$

$$=\overline{G}_N+\overline{F}+\sum_{1\le i\le 3}\left(\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+ik_i=i\\k_1,\cdots,k_i\ge 0}}\binom{i}{\vec{k}}\left(\left|\vec{k}\right|+1\right)N_{\left|\vec{k}\right|}\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\mu_{F,i}}{i!}\right)^{k_i}\right)\overline{F}^{(i)}+o\left(h^3\overline{F}\right)$$

$$\begin{aligned}
&=\overline{G}_N+e^{-t^\alpha}+2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}+\left[\frac{3}{2}N(N-1)\mu_{F,1}{}^2+N\mu_{F,2}\right]\left(\alpha^2t^{2(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t^\alpha}\right)\\
&\quad+\frac{(-1)^3}{3!}\left[\binom{3}{3,0,0}4N_3\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^3+\binom{3}{1,1,0}3N_2\left(\frac{\mu_{F,1}}{1!}\right)^1\left(\frac{\mu_{F,2}}{2!}\right)^1+\binom{3}{0,0,1}2N_1\left(\frac{\mu_{F,3}}{3!}\right)^1\right]\overline{F}^{(3)}\\
&\quad+o\left(\alpha^3t^{3(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}\right)\\
&=\overline{G}_N+e^{-t^\alpha}+2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}\\
&\quad+2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^\alpha}+\left[\frac{3}{2}N(N-1)\mu_{F,1}{}^2+N\mu_{F,2}\right]\left(\alpha^2t^{2(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t^\alpha}\right)\\
&\quad+(-1)\left[\frac{2}{3}N(N-1)(N-2)\mu_{F,1}{}^3+\frac{3}{2}N(N-1)\mu_{F,1}\mu_{F,2}+\frac{1}{3}N\mu_{F,3}\right]\\
&\quad\times\left[-\alpha^3t^{3(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}+3\alpha^2(\alpha-1)t^{2\alpha-3}e^{-t^\alpha}-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)t^{\alpha-3}e^{-t^\alpha}\right]+o\left(\alpha^3t^{3(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

(17)

得到用三階動差推導出的 N+1 個韋伯隨機變數之和的尾端機率。

同理，m=4 時，已知 $\overline{F}$ 的第四次微分函數

$$\begin{aligned}
\overline{F}^{(4)}&=\alpha^4t^{4(\alpha-1)}e^{-t^\alpha}-6\alpha^3(\alpha-1)t^{3\alpha-4}e^{-t^\alpha}+\alpha^2(\alpha-1)(7\alpha-11)t^{2\alpha-4}e^{-t^\alpha}\\
&\quad-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-4)t^{\alpha-4}e^{-t^\alpha}
\end{aligned}$$

(18)

以及四階動差函數，利用式子(10)並加以化簡可以得知

$$
\begin{aligned}
\overline{G}_{N+1} = {} & \overline{G}_{N} + e^{-t^{\alpha}} + 2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}} \\
& + 2N\mu_{F,1}\alpha t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}} + \left[\frac{3}{2}N\left(N-1\right)\mu_{F,1}{}^{2} + N\mu_{F,2}\right]\left(\alpha^{2}t^{2(\alpha-1)}e^{-t^{\alpha}} - \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t^{\alpha}}\right) \\
& + \left(-1\right)\left[\frac{2}{3}N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\mu_{F,1}{}^{3} + \frac{3}{2}N\left(N-1\right)\mu_{F,1}\mu_{F,2} + \frac{1}{3}N\mu_{F,3}\right] \\
& \quad \times\left[-\alpha^{3}t^{3(\alpha-1)}e^{-t^{\alpha}} + 3\alpha^{2}\left(\alpha-1\right)t^{2\alpha-3}e^{-t^{\alpha}} - \alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)t^{\alpha-3}e^{-t^{\alpha}}\right] \\
& + \{\frac{5}{24}N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\left(N-3\right)\mu_{F,1}{}^{4} + 24N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\mu_{F,1}{}^{2}\mu_{F,2} \\
& \quad + \left[N\left(N-1\right)\right]\left(9\mu_{F,2}{}^{2} + 12\mu_{F,1}\mu_{F,3}\right) + 2N\mu_{F,4}\}\times[\alpha^{4}t^{4(\alpha-1)}e^{-t^{\alpha}} - 6\alpha^{3}\left(\alpha-1\right)t^{3\alpha-4}e^{-t^{\alpha}} \\
& \quad + \alpha^{2}\left(\alpha-1\right)\left(7\alpha-11\right)t^{2\alpha-4}e^{-t^{\alpha}} - \alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\left(\alpha-4\right)t^{\alpha-4}e^{-t^{\alpha}}] + o\left(\alpha^{4}t^{4(\alpha-1)}\right)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

可以得到利用四階動差函數所估得 N+1 個韋伯隨機變數和的尾端機率。

此外，我們也針對此四個例子，畫圖觀察其尾端機率個別增加的狀況：

當$\alpha>1$時：

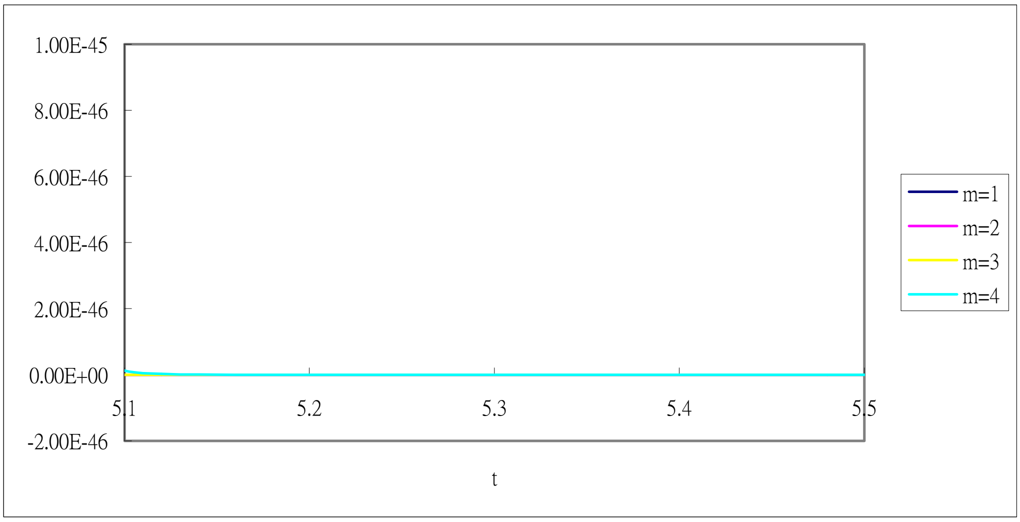

圖 1　$\alpha>1$時四階展開式分別增加的量

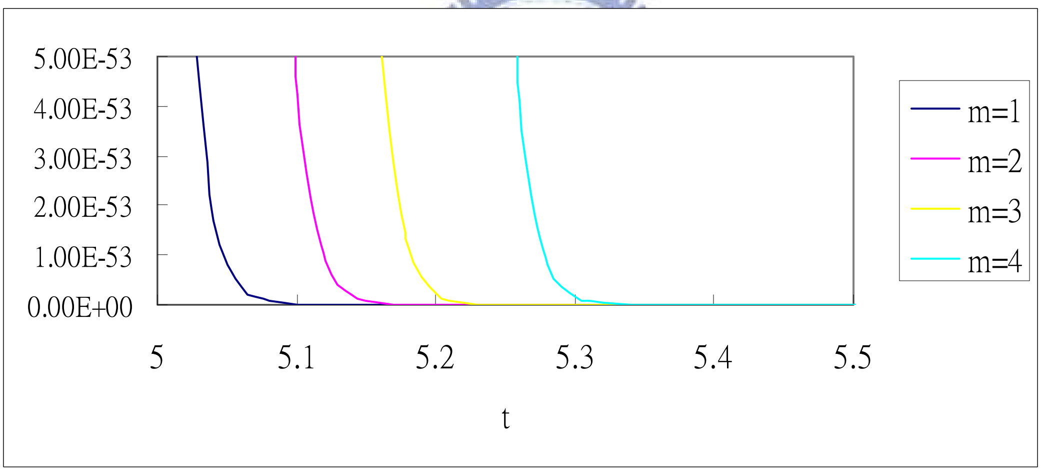

圖 2　$\alpha>1$時四階展開式分別增加的量(局部放大)

根據圖 1，可以發現，四階展開式增加的量都相當趨近於 0。放大來看(圖 2)，我們仍可發現，用愈高階的展開式，增加的情形愈明顯。所以針對不同的 t，我們將選擇不同階的展開式。

當$\alpha<1$時：

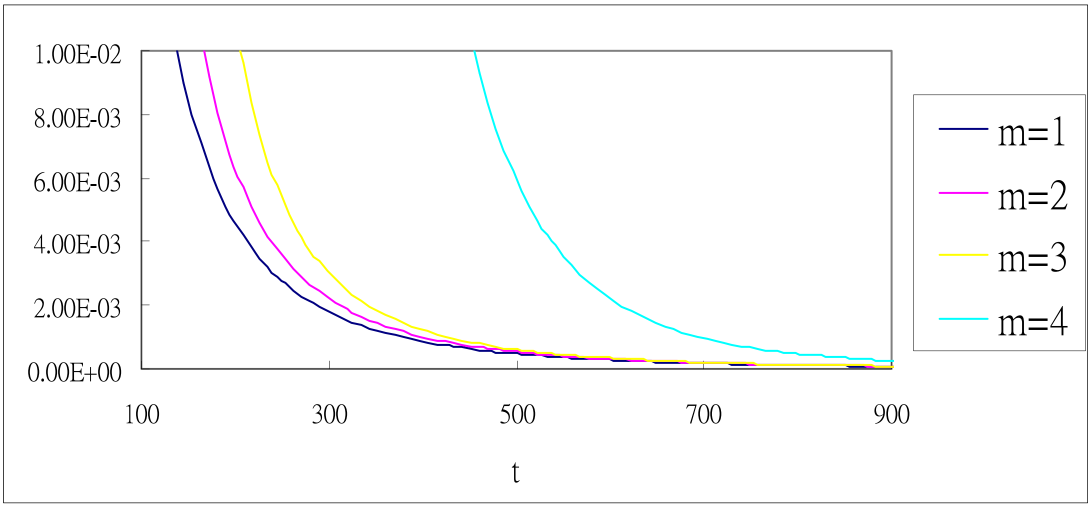

圖 3　$\alpha<1$時四階展開式分別增加的量

在$\alpha<1$時，我們也可以得到相同的結論，針對愈大的 t 值，我們可以選用愈高的階數來做逼近，較能觀察出其尾端機率的變化。

第五章、結論與未來展望

藉由上述的公式延伸以及推導，我們有了一個不錯的方法，可以在已知 N 個隨機變數和的尾端機率的情況之下，比起直接積分的方法來說，能夠更輕易的推估出 N+1 個隨機變數之和的尾端機率。

有了這個公式之後，相信未來針對此一問題也可以有更多幫助。又或著可以考慮直接用 N 個隨機變數來推導出 N+2 個隨機變數的尾端機率等等。也希望我們的結果能夠對後人的研究有所幫助，提供他們解決相關問題的一種推導方法。

參考文獻

[1] Elsayed,A.(1996). *Reliability Endineering*. MA:Addison-Wesley.

[2] 盧信銘,「韋伯隨機變數之和的分佈函數的逼近法」,國立交通大學統計學研究所，碩士論文，民國 92 年

[3] Barbe,P.,McCormick,W.P. ,and Zhang,C.(2007）,*Asymptotic Expansions for Distribution of Compound Sums of Random Variables with Rapidly Varying Subexponential Distribution*, J.Appl.Prob.44,670-684.