國立交通大學

物理研究所

碩 士 論 文

Bianchi Type II & VI_h與膜宇宙學

Bianchi type II & VI_h Models and Brane Cosmology

研 究 生：賴祐仁

指導教授：高文芳　教授

中 華 民 國 九 十 七 年 七 月

Bianchi Type II & VIh與膜宇宙學
Bianchi type II & VIh Models and Brane Cosmology

研 究 生：賴祐仁　　Student：Yu-Ren Lai

指導教授：高文芳　　Advisor：W. F. Kao

國 立 交 通 大 學
物 理 研 究 所
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Institute of Physics
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Physics

July 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月

Bianchi Type II & VI_h 與膜宇宙學

學生：賴祐仁　　　　　　　　　　　　　　　　指導教授：高文芳 博士

國立交通大學物理研究所碩士班

摘　　　要

本論文由 John D. Barrow 一篇非均向暴漲宇宙出發，先探討 Bianchi type II & VI_h 在考慮了曲率二次修正項的 Lagrangian density 中，透過直接解其場方程式，計算出其能量動量張量為何。然而，由於違背了能量條件，因此我們嘗試引入膜宇宙學的概念，探討四維時空是一個鑲嵌在五維時空中的膜時，這多出來的一個多餘維度會使場方程式改變，最後再計算在這兩種時空結構下其能量動量張量為何。

Bianchi type II & VI_h Models and Brane Cosmology

student：Yu-Ren Lai Advisors：Dr. W. F. Kao

Institute of Physics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this thesis, we start at John D. Barrow's paper, the "Anisotropically inflating universes". We discuss the Bianchi type II & VI_h for the Lagrangian density with the quadratic curvature terms, and calculate the energy-momentum tensor by solving the field equation. However, the energy condition is violated. So we introduce the concept of brane and discuss the extra dimension affect the field equation when we consider the 3-brane world. Finally we calculate the energy-momentum tensor of these two cosmology models once again.

誌　　謝

首先，我最感謝的是我的家人，非常感謝老爸老媽在我求學的日子裡，一直都讓我不用擔心課業以外的事，不用自己賺生活費與學費，雖然距離遙遠，但偶爾會打個電話來關心我最近過的怎麼樣，老姊跟老弟則是偶爾會跟我閒聊，讓我抒發一下心情，有這樣子的家庭環境真的帶給我很大的幫助與鼓勵。

其次是我的指導教授，高文芳老師，老師的學識非常淵博，在研究中給予我們的指導與幫助很大，雖然我總是拖拖拉拉，但老師仍然給了我許多包容，非常感謝老師，不論是研究上、教學上、心態上，我學到了很多。所上的其他老師們也都很親切，教學及研究也都很認真，同學跟學長姊學弟妹們都很融洽，整個物理所的空間都和樂融融，連所辦小姐們也都很和善，非常謝謝所有物理所的人。

最後是我的大學同學們，在有些苦悶的研究生活中，你們是最佳的良伴，雖然我跟大部分人的選擇不同，不太能討論或著閒聊有關研究的東西，但在生活上或是其他地方需要幫助時，大家都會毫不猶豫的伸出援手，這就是 95 級的友情呀！謝謝你們！

目錄

1 緒論 **1**
1.1 宇宙論 . . . 1
1.2 研究動機 . . . 1

2 Bianchi type model **3**
2.1 Bianchi Group . . . 3
2.2 Bianchi classfication . . . 3
2.3 Killing equation . . . 4
2.4 三維下的九種 G_3 運動群 . . . 4
2.5 Bianchi type II 的度規 . . . 5
2.6 Bianchi type VI$_h$的度規 . . . 7

3 膜上的等效愛因斯坦方程式 **9**
3.1 Braneworld . . . 9
3.2 Effective 4-dim gravitation equations of the brane . . . 9

4 Bianchi type II,VI$_h$ models **13**
4.1 Bianchi type II . . . 13
4.1.1 metric . . . 13
4.1.2 計算場方程式的解 . . . 14
4.1.3 引入膜宇宙學之概念 . . . 18
4.1.4 解出能量動量張量 . . . 20
4.2 化簡brane equation . . . 21
4.2.1 驗證其解相同 . . . 22
4.2.2 能量動量張量守恆 . . . 24
4.2.3 解1 . . . 25
4.2.4 解2 . . . 25
4.3 Bianchi type VI_h 模型 . . . 25
4.3.1 度規 . . . 25
4.3.2 brane equation . . . 26
4.3.3 計算出方程式中各項 . . . 26
4.3.4 解出能量動量張量 . . . 27
4.3.5 改用化簡方法處理Bianchi type VI_h 模型 . . . 28

4.4 結論 30

A 符號定義 **31**

B curvature的計算結果 **32**

B.1 Bianchi type II model 32

B.2 Bianchi type VI_h model 34

C 各Bianchi type model 的原始度規 **36**

D 單位 **37**

Chapter 1

緒論

1.1 宇宙論

自一兩千年前起, 人們就開始以自己的想法來研究宇宙的性質、構造與歷史, 然而在17世紀之前, 由於科學進展不足, 頂多只能於哲學、宗教學、倫理學或是形上學之類精神思想方面進行探討, 觀測實驗方面也都只能進行長期的星體位置紀錄來做推論。直到17世紀望遠鏡的發明後, 伽利略（Galileo）發現金星的盈虧, 木星的衛星等等來證實了哥白尼（Copernicus）的日心說, 而後牛頓（Newton）提出萬有引力定律, 至此, 人類還是只能粗略的了解宇宙星體的運作。

宇者, 上下四方也, 亦即空間全體之意; 宙者, 古往今來也, 亦即時間全體之意。牛頓認爲時間與空間各自是絕對的, 互不干涉。而在20世紀初,1914年愛因斯坦（Einstein）提出了相對論, 整合了時間與空間, 完全顛覆了傳統概念, 又在1917年發表了一篇”廣義相對論下的宇宙論考察”,[1] 便正式將廣義相對論引入, 建立了宇宙學的研究基礎。其後, 由於觀測技術的進步, 也漸漸觀察到一些宇宙的資訊, 諸如: 1919年, 艾丁頓（Eddington）觀察到水星的歲差, 先驗證了廣義相對論的正確性; 1929年哈伯（Hubble）觀測到的紅位移現象並將其公式化, 證實了宇宙中的星體都在遠離地球, 成爲大霹靂說的一項重要證據; 1964年彭齊亞斯（Penzias）與威爾遜（Wilson）發現各向同性的宇宙背景輻射, 大約爲 $2.7^{\circ}K$ 的黑體輻射, 與許多物理學家的預測吻合, 並且是更進一步的大霹靂說之證據; 1989年更進一步的測量到宇宙背景輻射存在一個極微小的各向異性（Anisotropic）, 大約爲 $\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}$, 目前普遍認爲是由初期宇宙小尺度下的量子起伏(quantum fluctuation）造成的 [15] , [6] , [7] , [5]。

最近這一百年科技的進展, 已經大大的幫助人類, 進行多方的觀察, 漸漸也驗證或推翻各個宇宙論理論之論證。

1.2 研究動機

正如前節所述, 宇宙是均勻的, 但有一個極微小的各向異性, 因此不採用 Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker 這個各向同性的標準模型, 本論文中主要探討的是Bianchi

[1]原文爲 Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitatstheorie , 發表於 Sitzungsberichte der Preusischen Akademie der Wissenschaften, 142-152

type model 這系列可研究各向異性的模型。而在 John D. Barrow 一篇 Anisotropically inflating universes 中 [1] , 已經研究過Bianchi II 、VI$_h$兩個模型了, 在該篇文章中, 算出了在愛因斯坦 Action 中加入二次曲率修正項的精確解, 由這些解中可以看出一些非均向暴漲的新現象, 然而, 這些解違反了相關的能量條件 (Energy condition) , 使得宇宙演化不會變成各向同性。因此我們要套入其他理論, 來探討其他解的可能性。例如考慮 de sitter background 的情況下做微擾的分析[11]、引入膜的概念, 將我們的四維時空放到五維的膜上再做討論[14] [13] 、導入 Kaluza-Klein induced gravity 理論的穩定性探討[9] 、或是引入induced gravity 後的爆漲數值模擬[12]。膜宇宙論是一個很有趣的概念, 可以解釋很多目前各種理論中的缺失, 因此我們決定探討Bianchi II 、VI$_h$兩個模型在膜上會有怎樣的性質。

Chapter 2

Bianchi type model

在前一章我們知道宇宙目前觀測結果是均勻, 幾乎各向同性的, 但卻也存在一個很小的各向異性, 因此, 我們選擇均勻, 但非各向同性的 Bianchi 宇宙模型來做研究。在這一章中將會介紹 Bianchi type model 的由來及推導。

2.1 Bianchi Group

Bianchi Group 是一類射影特殊線性群 (projective special linear group), 於1890年代由義大利數學家畢安奇 (Luigi Bianchi) 研究提出, 在各個維度下皆可分類, 計算元素, 而用於宇宙學的 Bianchi type model , 自然就是其在空間3維中的分類。

2.2 Bianchi classfication

任意維度下的線元素 (line element) 爲

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{2.1}$$

用來定義 n 維下S_n空間中的極小弧長,g_{ik}則稱爲此空間的度規 (metric)。

這邊先說明一下等距同構 (isometric) 的定義。同構 (isomorphism) 的意思是指兩個群或是其他的抽象代數, 彼此之間存在一個一對一的關係, 使兩者有相同的運作型態, 稱爲同構。而等距同構又多了一個在這種對應下, 兩者的長度是不變的, 此種情況稱爲等距同構。其實從英文字面上也可以看出, 等距同構其實就是兩個度量空間其度規是等效的, 在我們討論的部分, 只要兩度量空間可藉由座標轉換求得彼此, 便稱爲等距同構。更精確的定義是兩個 n 維的度量空間S_n,S^prime_n, 可以一對一對應, 使線元素相等, 就是等距同構了。此外, 如果一個空間等距同構映回自己, 這樣的情形就像是那個空間做了某種運動 (motion), 當然, 並不是任意的運動都能讓該空間映回自己。

畢安奇在1890年代所做的工作, 便是找出 n 維空間中的分類方法, 使不同的類別都不是等距同構的。而三維中畢安奇將之分爲9類, 就稱爲 Bianchi classfication 。

2.3 Killing equation

在這節中, 我們將介紹如何將之分類。

前節中已經提過, 空間本身可透過特定的運動映回自己, 因此分類的關鍵, 就在於哪些運動是符合該類型空間的。所以我們先定義運動算符:

$$Xf = \xi^r \partial_r f \tag{2.2}$$

李群 (Lie group) 就是由 m 個運動算符構成的, 稱為 G_m

$$G_m \equiv (X_1 f, X_2 f, \ldots, X_m f) \tag{2.3}$$

而當經過這個運動後, 線元素不被改變, 那很明顯的就是該空間經過此運動後是等距同構的, 透過此李群轉換為自己, 故該線元素必符合此方程式:

$$X(ds^2) = 0 \tag{2.4}$$

展開後可得

$$\begin{aligned} X(ds^2) &= X(g_{ik})dx^i dx^k + g_{ik} dX(x^i) dx^k + g_{ik} dx^i dX(x^k) \\ &= \xi^r(\partial_r g_{ik}) dx^i dx^k + g_{rk} d\xi^r dx^k + g_{ir} dx^i d\xi^r \\ &= (\xi^r \partial_r g_{ik} + g_{rk}\partial_i \xi^r + g_{ir}\partial_k \xi^r) dx^i dx^k \end{aligned} \tag{2.5}$$

由式 (2.4) 及 (2.5) 可知

$$\xi^r \partial_r g_{ik} + g_{rk}\partial_i \xi^r + g_{ir}\partial_k \xi^r = 0 \tag{2.6}$$

此方程組 (i,k 為整個空間維度的 index, 故共有$\frac{n(n+1)}{2}$條一階偏微分方程式) 即稱為Killing equation。

2.4 三維下的九種 G_3 運動群

下面列出畢安奇推出的九類 G_3 運動群

$$\text{(Type I)}\ [X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = [X_2, X_3]f = 0 \tag{2.7}$$

$$\text{(Type II)}\ [X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = 0, [X_2, X_3]f = X_1 f \tag{2.8}$$

$$\text{(Type III)}\ [X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = 0 \tag{2.9}$$

$$\text{(Type IV)}\ [X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = X_1 f + X_2 f \tag{2.10}$$

$$\text{(Type V)}\ [X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = X_2 f \tag{2.11}$$

$$\text{(Type VI)}\ [X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = hX_2 f, \quad (h \neq 0, 1) \tag{2.12}$$

$$\text{(Type VII)}\ [X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_2 f, [X_2, X_3]f = -X_1 f + hX_2 f, \quad (0 \leq h < 2) \tag{2.13}$$

$$\text{(Type VIII)}\ [X_1, X_2]f = X_1 f, [X_1, X_3]f = 2X_2 f, [X_2, X_3]f = X_3 f \tag{2.14}$$

$$\text{(Type IX)}\ [X_1, X_2]f = X_3 f, [X_2, X_3]f = X_1 f, [X_3, X_1]f = X_2 f \tag{2.15}$$

至於分類的方法, 首先我們先只看三維空間中的 G_2 運動群, 很自然的, G_2 運動群只會有兩種可能, 分別是 $[X_1, X_2]f = 0$ 以及 $[X_1, X_2]f = X_1 f$ 兩種, 可以看出前八類都是由 G_2 建構出來的, G_2 是這幾個 G_3 群的子群 (subgroup)。而至於為什麼只有這九類, 在此就不詳述了, 若想深入看其證明請看畢安奇的兩篇 paper [2] , [3]。

2.5 Bianchi type II 的度規

由前節我們可以得到 Bianchi type II 的構成方程式(composition equation), 因其含有 G_2 的子群, 所以我們先探討 $[X_1, X_2]f = 0$ 的結構, 再進一步推出 Bianchi type II 的度規。由式 (2.2) 的定義得到, $X_1 f = {}^{(1)}\xi^i \partial_i f$, $X_2 f = {}^{(2)}\xi^i \partial_i f$, 我們先假設此運動被侷限在某個 $x_1 = constant$ 的面上, 因此我們可以將線元素寫成:

$$ds^2 = {dx_1}^2 + g_{22}{dx_2}^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + g_{33}{dx_3}^2 \tag{2.16}$$

此時 ${}^{(i)}\xi^1 = 0$, 則式 (2.6)Killing equation 為 (取 $\{i,k\} = \{1,2\}$ 及 $\{i,k\} = \{1,3\}$):

$$g_{r2}\partial_1{}^{(i)}\xi^r = g_{22}\partial_1{}^{(i)}\xi^2 + g_{32}\partial_1{}^{(i)}\xi^3 = 0 \tag{2.17}$$
$$g_{r3}\partial_1{}^{(i)}\xi^r = g_{23}\partial_1{}^{(i)}\xi^2 + g_{33}\partial_1{}^{(i)}\xi^3 = 0 \tag{2.18}$$

又度規的行列式值必不為零, 因此 $g_{22}g_{33} - {g_{23}}^2 \neq 0$, 故此聯立方程組必符合 $\partial_1{}^{(i)}\xi^2 = \partial_1{}^{(i)}\xi^3 = 0$, 也就是 $\partial_1{}^{(i)}\xi^j = 0$, $X_i f$ 的係數完全與 x_1 無關。接著再取這兩個運動分別沿著兩座標軸 (x_2 與 x_3), 故 $X_1 f = {}^{(1)}\xi^2 \partial_2 f$, $X_2 f = {}^{(2)}\xi^3 \partial_3 f$, 而 $[X_1, X_2]f = 0$, 所以 $\partial_2{}^{(2)}\xi^j = \partial_3{}^{(1)}\xi^j = 0$, 方便起見, 我們可以假設 ${}^{(1)}\xi^j = {}^{(2)}\xi^j = 1$, 將目前算出的所有條件代回運動算符的定義便可得:

$$X_1 f = \partial_2 f \;,\; X_2 f = \partial_3 f \tag{2.19}$$

如此一來,Killing equation 就可得到 (對分別將 X_1 與 X_2 的 ξ 代入)

$$\partial_2 g_{ik} = 0 \tag{2.20}$$
$$\partial_3 g_{ik} = 0 \tag{2.21}$$

由此可知 g_{ik} 只與 x_1有關, 因此我們將線元素重新寫為這個形式:

$$ds^2 = {dx_1}^2 + \alpha {dx_2}^2 + 2\beta dx_2dx_3 + \gamma {dx_3}^2 \tag{2.22}$$

其中 α , β , γ 都只是 x_1 的函數。

接下來再將第三個運動算符計算進來, 考慮所有可能的情況, 將構成方程式寫為:

$$[X_1, X_3]f = aX_1 f + bX_2 f + cX_3 f \tag{2.23}$$
$$[X_2, X_3]f = a'X_1 f + b'X_2 f + c'X_3 f \tag{2.24}$$

展開後可以得到

$$
\begin{aligned}
&\partial_2({}^{(3)}\xi^i\partial_i)f - {}^{(3)}\xi^i\partial_i\partial_2 f = a\partial_2 f + b\partial_3 f + c{}^{(3)}\xi^i\partial_i f \\
\Rightarrow&(\partial_2{}^{(3)}\xi^i)\partial_i f = a\partial_2 f + b\partial_3 f + c{}^{(3)}\xi^i\partial_i f \\
&\partial_3({}^{(3)}\xi^i\partial_i)f - {}^{(3)}\xi^i\partial_i\partial_3 f = a'\partial_2 f + b'\partial_3 f + c'{}^{(3)}\xi^i\partial_i f \\
\Rightarrow&(\partial_3{}^{(3)}\xi^i)\partial_i f = a\partial_2 f + b\partial_3 f + c{}^{(3)}\xi^i\partial_i f
\end{aligned}
$$

對應係數後可得六個方程式:

$$
\begin{aligned}
&\partial_2{}^{(3)}\xi^1 = c{}^{(3)}\xi^1, \partial_2{}^{(3)}\xi^2 = c{}^{(3)}\xi^2 + a, \partial_2{}^{(3)}\xi^3 = c{}^{(3)}\xi^3 + b \\
&\partial_3{}^{(3)}\xi^1 = c'{}^{(3)}\xi^1, \partial_3{}^{(3)}\xi^2 = c'{}^{(3)}\xi^2 + a', \partial_3{}^{(3)}\xi^3 = c'{}^{(3)}\xi^3 + b'
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

得到這些關係式後, 便可進一步化簡 $X_3 f$ 的 Killing equation:

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}\xi^r\partial_r g_{11} + g_{r1}\partial_1{}^{(3)}\xi^r + g_{1r}\partial_1{}^{(3)}\xi^r = 0 \\
{}^{(3)}\xi^r\partial_r g_{12} + g_{r2}\partial_1{}^{(3)}\xi^r + g_{1r}\partial_2{}^{(3)}\xi^r = 0 \\
{}^{(3)}\xi^r\partial_r g_{13} + g_{r3}\partial_1{}^{(3)}\xi^r + g_{1r}\partial_3{}^{(3)}\xi^r = 0 \\
{}^{(3)}\xi^r\partial_r g_{22} + g_{r2}\partial_2{}^{(3)}\xi^r + g_{2r}\partial_2{}^{(3)}\xi^r = 0 \\
{}^{(3)}\xi^r\partial_r g_{23} + g_{r3}\partial_2{}^{(3)}\xi^r + g_{2r}\partial_3{}^{(3)}\xi^r = 0 \\
{}^{(3)}\xi^r\partial_r g_{33} + g_{r3}\partial_3{}^{(3)}\xi^r + g_{3r}\partial_3{}^{(3)}\xi^r = 0
\end{aligned}
$$

將已知的 g_{ij} 及 ${}^{(3)}\xi^i$ 微分項代入便得:

$$\partial_1{}^{(3)}\xi^1 = 0 \tag{2.26}$$

$$\alpha\partial_1{}^{(3)}\xi^2 + \beta\partial_1{}^{(3)}\xi^3 + c{}^{(3)}\xi^1 = 0 \tag{2.27}$$

$$\beta\partial_1{}^{(3)}\xi^2 + \gamma\partial_1{}^{(3)}\xi^3 + c'{}^{(3)}\xi^1 = 0 \tag{2.28}$$

$${}^{(3)}\xi^1\partial_1\alpha + 2\alpha(c{}^{(3)}\xi^2 + a) + 2\beta(c{}^{(3)}\xi^3 + b) = 0 \tag{2.29}$$

$${}^{(3)}\xi^1\partial_1\beta + \alpha(c'{}^{(3)}\xi^2 + a') + \beta(c{}^{(3)}\xi^2 + a + c'{}^{(3)}\xi^3 + b') + \gamma(c{}^{(3)}\xi^3 + b) = 0 \tag{2.30}$$

$${}^{(3)}\xi^1\partial_1\gamma + 2\beta(c'{}^{(3)}\xi^2 + a') + 2\gamma(c'{}^{(3)}\xi^3 + b') = 0 \tag{2.31}$$

最後將前節之方程式, 對應得到 $a = b = c = b' = c' = 0, a' = 1$ 後代入, 則方程式變爲

$$\partial_1{}^{(3)}\xi^1 = 0 \tag{2.32}$$

$$\alpha\partial_1{}^{(3)}\xi^2 + \beta\partial_1{}^{(3)}\xi^3 = 0 \tag{2.33}$$

$$\beta\partial_1{}^{(3)}\xi^2 + \gamma\partial_1{}^{(3)}\xi^3 = 0 \tag{2.34}$$

$${}^{(3)}\xi^1\partial_1\alpha = 0 \tag{2.35}$$

$${}^{(3)}\xi^1\partial_1\beta + \alpha = 0 \tag{2.36}$$

$${}^{(3)}\xi^1\partial_1\gamma + 2\beta = 0 \tag{2.37}$$

由式 (2.25),(2.32) 可得到 ${}^{(3)}\xi^1$ 與座標無關, 只是一個常數。由式 (2.25),(2.35) 可得到 α 亦爲與座標無關之常數, 最後由 (2.36),(2.37) 兩式便可得到

$$\beta = \frac{-\alpha}{{}^{(3)}\xi^1} x_1 + l \tag{2.38}$$

$$\gamma = \frac{-\alpha}{({}^{(3)}\xi^1)^2} {x_1}^2 + 2\frac{l}{{}^{(3)}\xi^1} x_1 + m \tag{2.39}$$

因此其線元素就變爲

$$ds^2 = {dx_1}^2 + \alpha {dx_2}^2 + 2(\frac{-\alpha}{{}^{(3)}\xi^1} x_1 + l) dx_2 dx_3 + (\frac{-\alpha}{({}^{(3)}\xi^1)^2} {x_1}^2 + 2\frac{l}{{}^{(3)}\xi^1} x_1 + m) {dx_3}^2 \tag{2.40}$$

藉由座標轉換 $x_1 \rightarrow \sqrt{(m - \frac{l^2}{\alpha})\frac{({}^{(3)}\xi^1)^2}{\alpha}} {x_1}' + \frac{{}^{(3)}\xi^1 l}{\alpha}$, $x_2 \rightarrow \sqrt{(m - \frac{l^2}{\alpha})\frac{({}^{(3)}\xi^1)^2}{\alpha^2}} {x_2}'$, $x_3 \rightarrow -\frac{{}^{(3)}\xi^1}{\sqrt{\alpha}} {x_3}'$, 代入後可算出

$$ds^2 = ((m - \frac{l^2}{\alpha})\frac{({}^{(3)}\xi^1)^2}{\alpha})({dx_1}^2 + {dx_2}^2 + 2x_1 dx_2 dx_3 + ({x_1}^2 + 1){dx_3}^2) \tag{2.41}$$

前面的常數可用一相似空間代換而消去之, 故由此便可得到 Bianchi type II 原始的度規張量:

$$ds^2 = {dx_1}^2 + {dx_2}^2 + 2x_1 dx_2 dx_3 + ({x_1}^2 + 1){dx_3}^2 \tag{2.42}$$

最後再座標轉換一次 $dx_3 \rightarrow xdy$, $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow z$ 便可得到目前較常用的度規形式。

2.6　Bianchi type VI$_h$的度規

Bianchi type VI$_h$也包含有 G_2 的子群, 因此在引入 $X_3 f$ 之前, 跟 Bianchi type II 是完全一樣的。連後半部也大同小異, 不同的地方只有 $b = c = a' = c' = 0, a = 1, b' = h$, 代入式 (2.26),(2.31) 後, 得到方程式

$$\partial_1 {}^{(3)}\xi^1 = 0 \tag{2.43}$$

$$\alpha \partial_1 {}^{(3)}\xi^2 + \beta \partial_1 {}^{(3)}\xi^3 = 0 \tag{2.44}$$

$$\beta \partial_1 {}^{(3)}\xi^2 + \gamma \partial_1 {}^{(3)}\xi^3 = 0 \tag{2.45}$$

$${}^{(3)}\xi^1 \partial_1 \alpha + 2\alpha = 0 \tag{2.46}$$

$${}^{(3)}\xi^1 \partial_1 \beta + \beta(1 + h) = 0 \tag{2.47}$$

$${}^{(3)}\xi^1 \partial_1 \gamma + 2\gamma h = 0 \tag{2.48}$$

同樣由式 (2.25),(2.43) 可得到 ${}^{(3)}\xi^1$ 與座標無關, 只是一個常數。而式 (2.46) 、(2.47) 、(2.48) 各自積分 ,並且把 α 、γ 的積分常數吸收進 x_2 、x_3 座標中, 可得

$$\alpha = e^{-\frac{2}{{}^{(3)}\xi^1}x_1} \tag{2.49}$$

$$\beta = ne^{-\frac{h+1}{{}^{(3)}\xi^1}x_1} \tag{2.50}$$

$$\gamma = e^{-\frac{2h}{{}^{(3)}\xi^1}x_1} \tag{2.51}$$

由於線元素中四項都是座標的二次項, 因此我們可以由選擇相似空間來決定 x_1 前的係數 ${}^{(3)}\xi^1$ 之值, 方便起見選擇 ${}^{(3)}\xi^1 = -1$, 代入後便可得到 Bianchi type VI_h 原始的度規張量:

$$ds^2 = {dx_1}^2 + e^{2x_1}{dx_2}^2 + 2ne^{(h+1)x_1}dx_2dx_3 + e^{2hx_1}{dx_3}^2 \tag{2.52}$$

最後在附錄中, 我們順便將其餘的原始度規列出。

Chapter 3

膜上的等效愛因斯坦方程式

在這章中, 我們將介紹膜宇宙學概念下的等效愛因斯坦方程式。

3.1 Braneworld

我們將我們所處的四維時空 (3-brane) 想像是鑲嵌在一個高維度時空 (bulk) 中的一個膜, 五維以上的維度被稱爲超維度 (extra dimension), 這個模型主要是要解釋四大基本作用力中, 爲何只有重力特別的弱。在 brane 假說中, 認爲只有重力會受到超維度的影響, 而物質或電磁力只存在於四維時空裡。

其後,Lisa Randall 與 Raman Sundrum 在1999年提出 Randall-Sundrum model, 是一個考慮五維時空中的四維膜之模型, 而唯一的一個超維度其尺寸最多只有0.1mm, 並可以此模型來解釋數個問題, 例如宇宙初期奇點、宇宙的暗能量問題等等。未來則可由大型強子加速器的實驗來開始進行驗證。

3.2 Effective 4-dim gravitation equations of the brane

在這一節中, 我們參考白水哲也、前田惠一以及佐佐木節一篇 The Einstein equations on the 3-brane world 來推導此四維的等效重力方程式[16]。

首先, 描述五維bulk 的度規是 $g_{\mu\nu}$, 而描述膜中四維時空的則是誘生度規 (induced metric) $q_{\mu\nu}$, 兩者之間的關係爲

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \tag{3.1}$$

其中 n^α 爲垂直膜的單位向量。

接下來我們由 Gauss equation 與 Codacci equation 開始導起

$$^{(4)}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = {}^{(5)}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} q_\mu{}^\alpha q_\beta{}^\nu q_\gamma{}^\rho q_\delta{}^\sigma + K^\alpha{}_\gamma K_{\beta\delta} - K^\alpha{}_\delta K_{\beta\gamma} \tag{3.2}$$

$$\Delta_\nu K_\mu{}^\nu - \Delta_\mu K = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu{}^\rho \tag{3.3}$$

此處 Δ 定義爲於 $q_{\mu\nu}$ 下的共變微分, 也就是在膜中的共變微分, 而 $K_{\mu\nu}$ 是膜的外賦曲率 (extrinsic curvature) , 定義爲

$$K_{\mu\nu} = q_\mu{}^\alpha q_\nu{}^\beta D_\alpha n_\beta \tag{3.4}$$

接著將式 (3.2) 的 Gauss equation 中的α 與 γ 兩腳標收掉, 並將β、δ與μ、ν兩兩對換便可得到 Ricci tensor

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} q_\mu{}^\rho q_\nu{}^\sigma - {}^{(5)}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} n_\alpha q_\mu{}^b etan^\gamma q_\nu{}^\delta + KK_{\mu\nu} - K_\mu{}^\alpha K_{\nu\alpha} \tag{3.5}$$

再次收掉腳標便可得到純量曲率

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R - 2{}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \tag{3.6}$$

如此一來就有四維等效的愛因斯坦張量了

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu}{}^{(4)}R \\ &= [{}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma}{}^{(5)}R] q_\mu{}^\rho q_\nu{}^\sigma + {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} \\ &\quad - K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - \tilde{E}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中

$$\tilde{E}_{\mu\nu} = {}^{(5)}R^\alpha{}_{\beta\rho\sigma} n_\alpha n^\rho q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\sigma \tag{3.8}$$

再由 Riemann tensor 與 Weyl tensor 的關係式

$$\begin{aligned} {}^{(5)}C_{\mu\alpha\nu\beta} &= {}^{(5)}R_{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\gamma}{}^{(5)}R_{\delta\beta} + g_{\beta\delta}{}^{(5)}R_{\gamma\alpha} - (\delta \leftrightarrow \gamma)) \\ &\quad + \frac{1}{12}(g_{\alpha\gamma} g_{\delta\beta} - (\delta \leftrightarrow \gamma)){}^{(5)}R \end{aligned} \tag{3.9}$$

可將 $\tilde{E}_{\mu\nu}$ 代換掉

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\mu\nu} &= {}^{(5)}R_{\alpha\beta\gamma\sigma} n^\alpha n^\gamma q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\sigma \\ &= \frac{1}{3}({}^{(5)}R_{\delta\beta} q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\delta + {}^{(5)}R_{\gamma\alpha} n^\alpha n^\gamma q_{\mu\nu}) - \frac{1}{12} q_{\mu\nu}{}^{(5)}R \\ &\quad + {}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\sigma} n^\alpha n^\gamma q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\sigma \end{aligned} \tag{3.10}$$

若將 ${}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\sigma} n^\alpha n^\gamma q_\mu{}^\beta q_\nu{}^\sigma$ 令爲 $E_{\mu\nu}$, 再代回式 (3.7) 中得到

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= [\frac{2}{3}{}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{5}{12} g_{\rho\sigma}{}^{(5)}R] q_\mu{}^\rho q_\nu{}^\sigma + {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} \\ &\quad - K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - E_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.11}$$

又五維中的愛因斯坦方程式爲

$$ {}^{(5)}G_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(5)}R = {\kappa_5}^2 T_{\mu\nu} \tag{3.12} $$

這裡的 $T_{\mu\nu}$ 是五維的能量動量張量。將上式代回式 (3.11) 可得到

$$ \begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = \frac{2{\kappa_5}^2}{3}[T_{\rho\sigma}{q_\mu}^\rho {q_\nu}^\sigma + (T_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma - \frac{1}{4}{T^\rho}_\rho)q_{\mu\nu}] + KK_{\mu\nu} \\ - {K_\mu}^\rho K_{\nu\rho} - \frac{1}{2}q_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}) - E_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.13} $$

現在回到一開始的 Codacci equation (3.13), 配合五維之愛因斯坦方程式推到

$$ \begin{aligned} \Delta_\nu {K_\mu}^\nu - \Delta_\mu K &= {}^{(5)}R_{\rho\sigma}n^\sigma {q_\mu}^\rho \\ &= (\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}{}^{(5)}R + {\kappa_5}^2 T_{\rho\sigma})n^\sigma {q_\mu}^\rho \\ &= {\kappa_5}^2 T_{\rho\sigma} n^\sigma {q_\mu}^\rho \end{aligned} \tag{3.14} $$

接下來我們可以假設超維度是 χ，而我們所處的膜則是在 $\chi = 0$ 的幾何面上, 如此一來就可以將五維度規 $g_{\mu\nu}$ 寫做

$$ ds^2 = d\chi^2 + q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.15} $$

也因爲物質只存在於我們所處的膜中, 因此可以將五維中的能量動量張量寫爲

$$ T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}\delta(\chi) \tag{3.16} $$

其中

$$ S_{\mu\nu} = -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \tag{3.17} $$

Λ 、λ 與 $\tau_{\mu\nu}$ 分別是五維中的宇宙常數 、眞空能量與物質的能量動量張量, 要注意的是眞空能量 λ 同時也代表了我們所處的膜的張力。

最後再使用 Israel's junction condition [8],

$$ [X] \equiv lim_{\chi\to+0}X - lim_{\chi\to-0}X = x^+ - X^- \tag{3.18} $$

便可將外賦曲率以 $S_{\mu\nu}$ 表示

$$ [q_{\mu\nu}] = 0 \tag{3.19} $$

$$ [K_{\mu\nu}] = -{\kappa_5}^2(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3}q_{\mu\nu}S) \tag{3.20} $$

又整個時空有 Z_2 對稱, 故膜之兩側的值皆可求得

$$ {K^+}_{\mu\nu} = -{K^-}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}{\kappa_5}^2(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3}q_{\mu\nu}S) \tag{3.21} $$

代回式(3.13) 可得

$$^{(4)}G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}{\kappa_5}^2(\Lambda + \frac{1}{6}{\kappa_5}^2\lambda^2)q_{\mu\nu} + \frac{1}{6}{\kappa_5}^4\lambda\tau_{\mu\nu} + {\kappa_5}^4\pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \tag{3.22}$$

其中 $\pi_{\mu\nu}$ 爲能量動量張量的二次項

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{1}{12}\tau\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\tau_{\mu\alpha}{\tau_\nu}^\alpha + \frac{1}{24}q_{\mu\nu}(3\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} - \tau^2) \tag{3.23}$$

重新定義各項符號便可得到最後的等效愛因斯坦方程式了

$$^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + {\kappa_4}^2T_{\mu\nu} + {\kappa_5}^4S_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \tag{3.24}$$

此處除了 $E_{\mu\nu}$ 之外, 其餘張量皆爲四維時空中之張量或其函數, 係數則是直接代換。

Chapter 4

Bianchi type II,VI$_h$ models

在這一章中, 我們先重製 John D. Barrow 的結果[1], 先按照此文章計算在四維時空中這兩個宇宙模型中的能量動量張量形式, 之後再引入膜宇宙學探討之。

4.1 Bianchi type II

我們先討論Bianchi type II 模型。

4.1.1 metric

一般而言,Bianchi type II 較常使用的度規形式爲:

$$ds^2 = -dt^2 + a_z(t)^2(dz + \frac{x^2}{2}dy)^2 + a_1(t)^2(dx^2 + x^2dy^2) \qquad (4.1)$$

我們可以使用座標轉換將度規轉爲以下的形式而得其場方程式的解[1]:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2bt}[dx' + \frac{a}{2}(z'dy' - y'dz')]^2 + e^{bt}(dy'^2 + dz'^2) \qquad (4.2)$$

利用這樣的座標轉換$z \to ax'$, $x \sin y \to ay'$, $x \cos y \to az'$, 便可轉換回原始形式:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -dt^2 + e^{2bt}[dx' + \frac{a}{2}(z'dy' - y'dz')]^2 + e^{bt}(dy'^2 + dz'^2) \\
&= -dt^2 + e^{2bt}[\frac{1}{a}dz + \frac{1}{2a}(x \cos y \sin y dx + x^2 \cos^2 y dy \\
&\qquad - x \sin y \cos y dx + x^2 \sin^2 y dy)]^2 \\
&\qquad + e^{bt}((\frac{\sin y dx + x \cos y dy}{a})^2 + (\frac{\cos y dx - x \sin y dy}{a})^2) \\
&= -dt^2 + \frac{e^{2bt}}{a^2}(dz + \frac{x^2}{2}dy)^2 + \frac{e^{bt}}{a^2}(dx^2 + x^2dy^2) \\
\Rightarrow ds^2 &= -dt^2 + \frac{e^{2bt}}{a^2}(dz + \frac{x^2}{2}dy)^2 + \frac{e^{bt}}{a^2}(dx^2 + x^2dy^2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 因此其scalar factor 之形式為 $a_z(t)^2 = \frac{e^{2bt}}{a^2}, a_1(t)^2 = \frac{e^{bt}}{a^2}$ 。而此型態之度規張量為:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{bt}}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{bt}}{a^2}x^2 + \frac{e^{2bt}}{4a^2}x^4 & \frac{e^{2bt}}{2a^2}x^2 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2bt}}{2a^2}x^2 & \frac{e^{2bt}}{a^2} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{e^{bt}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{x^2e^{bt}} & -\frac{a^2}{2e^{bt}} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2}{2e^{bt}} & \frac{x^2a^2}{4e^{bt}} + \frac{a^2}{e^{2bt}} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

4.1.2　計算場方程式的解

§ 場方程式

Bianchi type II 模型之場方程式為下列三條

$$\mathcal{L} + H_i(\frac{d}{dt} + 3H)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i} = H_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} + \dot{H}_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i} \tag{4.5}$$

$$2\mathcal{L} + (\frac{d}{dt} + 3H)^2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_1} - (\frac{d}{dt} + 3H)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_1} + a_1\partial_{a_1}\mathcal{L} = 0 \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L} + (\frac{d}{dt} + 3H)^2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_1} - (\frac{d}{dt} + 3H)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_1} + a_z\partial_{a_z}\mathcal{L} = 0 \tag{4.7}$$

由 4.1.1 節度規的 scalar factor 可得到式中 $H_1 = \frac{\dot{a}_1}{a_1} = \frac{b}{2}$, $H_2 = \frac{\dot{a}_z}{a_z} = b$, $3H = 2H_1 + H_2 = 2b$, $\frac{a_z(t)^2}{a_1(t)^4} = a^2$ 。

§ **Lagrangian density**

空間尺度小到某個程度以後, 必須要在 Lagrangian density 中加入高次修正項。而我們的研究中考慮到曲率張量二次的修正項, 故其形式變為:

$$\mathcal{L} = -R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - 2\Lambda \tag{4.8}$$

各曲率項分別為:

$$R = \frac{a_z(t)^2}{2a_1(t)^4} - [(3H)^2 + 2(3\dot{H}) + 3H^2] \tag{4.9}$$

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = (3\dot{H} + 3H^2)^2 + 2[-\frac{a_z(t)^2}{2a_1(t)^4} + (2{H_1}^2 + H_1H_2 + \dot{H}_1)]^2 \tag{4.10}$$

$$+ [\frac{a_z(t)^2}{2a_1(t)^4} + ({H_2}^2 + 2H_1H_2 + \dot{H}_2)]^2 \tag{4.11}$$

爲了簡化其形式, 我們定義 $3\dot{H} = 2\dot{H}_1 + \dot{H}_2$, $(3H)^2 = (2H_1 + H_2)^2$, $3H^2 = 2{H_1}^2 + {H_2}^2$ 。

要注意的是, 二次的高階修正項應該還要有一項 $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 項, 但是因爲 R^2 、$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ 與此項以 1 、-4 、1 之比例結合時, 此 action 會是一全微分, 並不會對我們的計算結果有貢獻, 因此在這邊就將最複雜的此項直接略去。此三項也被稱做 Gauss-Bonnet 項。[4] [9]

§ 解出場方程式

同樣將4.1.1節中的 scalar factor 代入式中, 可得各曲率項及 Lagrangian density 分別爲:

$$\Rightarrow R = \frac{a_z(t)^2}{2a_1(t)^4} - [(3H)^2 + 2(3\dot{H}) + 3H^2] = \frac{1}{2}a^2 - \frac{11}{2}b^2 \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= [(3\dot{H} + 3H^2)]^2 + 2[-\frac{a_z(t)^2}{2a_1(t)^4} + (2{H_1}^2 + H_1H_2 + \dot{H}_1)]^2 \\ &\quad + [\frac{a_z(t)^2}{2a_1(t)^4} + ({H_2}^2 + 2H_1H_2 + \dot{H}_2)]^2 \\ &= \frac{3}{4}a^4 + \frac{33}{4}b^4 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - 2\Lambda \\ &= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{11}{2}b^2 + \alpha(\frac{1}{4}a^4 - \frac{11}{2}a^2b^2 + \frac{121}{4}b^4) + \beta(\frac{3}{4}a^4 + \frac{33}{4}b^4) - 2\Lambda \end{aligned} \tag{4.14}$$

接下來就可以計算出場方程式中的所有項, 其中 a, b, α, β 都只是常數, 因此所有對時間的微分項都可直接去掉。式 (4.5) 中各項分別爲:

$$\begin{aligned} H_i(\frac{d}{dt} + 3H)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_i} &= b^2(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_1} + 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_2}) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_1} &= (-1 + 2\alpha R)\frac{\partial R}{\partial\dot{H}_1} + \beta\frac{\partial R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{\partial\dot{H}_1} \\ &= 4 - 4\alpha(a^2 - 11b^2) + \beta(-2a^2 + 10b^2) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_2} &= (-1 + 2\alpha R)\frac{\partial R}{\partial\dot{H}_2} + \beta\frac{\partial R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{\partial\dot{H}_2} \\ &= 2 - 2\alpha(a^2 - 11b^2) + \beta(a^2 + 7b^2) \\ \Rightarrow H_i(\frac{d}{dt} + 3H)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_i} &= 8b^2[1 - \alpha(a^2 - 11b^2) + 3\beta b^2] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_i} &= \frac{b}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_1} + b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_1} \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_1} &= (-1+2\alpha R)\frac{\partial R}{\partial H_1} + \beta\frac{\partial R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{\partial H_1} \\
&= [-1+\alpha(a^2-11b^2)](-10b) + \beta(-4a^2b+26b^3) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_2} &= (-1+2\alpha R)\frac{\partial R}{\partial H_2} + \beta\frac{\partial R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{\partial H_2} \\
&= [-1+\alpha(a^2-11b^2)](-6b) + \beta(2a^2b+20b^3) \\
\Rightarrow H_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_i} &= 11b^2[1-\alpha(a^2-11b^2)+3\beta b^2]
\end{aligned}
$$

$$
\dot{H}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_i} = 0
$$

代入式 (4.5):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}a^2 + \frac{11}{2}b^2 + \alpha(\frac{1}{4}a^4 - \frac{11}{2}a^2b^2 + \frac{121}{4}b^4) + \beta(\frac{3}{4}a^4 + \frac{33}{4}b^4) - 2\Lambda \\
&+ 8b^2[1-\alpha(a^2-11b^2)+3\beta b^2] - 11b^2[1-\alpha(a^2-11b^2)+3\beta b^2] \\
&= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}b^2 + \alpha(\frac{1}{4}a^4 - \frac{5}{2}a^2b^2 - \frac{11}{4}b^4) + \beta(\frac{3}{4}a^4 - \frac{3}{4}b^4) - 2\Lambda = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow -\frac{1}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 + \alpha(\frac{1}{8}a^4 - \frac{5}{4}a^2b^2 - \frac{11}{8}b^4) + \beta(\frac{3}{8}a^4 - \frac{3}{8}b^4) - \Lambda = 0 \quad (4.15)
$$

同樣的, 式 (4.6)(4.7) 中各項爲:

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dt}+3H)^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{H}_1} &= (2b)^2[4-4\alpha(a^2-11b^2)+\beta(-2a^2+10b^2)] \\
(\frac{d}{dt}+3H)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial H_1} &= (2b)[(-1+\alpha a^2-11\alpha b^2))(-10b)+\beta(-4a^2b+26b^3)] \\
a_1\partial_{a_1}\mathcal{L} &= a_1[(-1+2\alpha R)\frac{\partial R}{\partial a_1} + \beta\frac{\partial R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{\partial a_1}] \\
&= -\frac{2{a_z}^2}{{a_1}^4}[-1+2\alpha(\frac{1}{2}a^2-\frac{11}{2}b^2)] - \beta\frac{{a_z}^2}{{a_1}^4}6a^2 \\
&= 2a^2[1-2\alpha(\frac{1}{2}a^2-\frac{11}{2}b^2)-3\beta a^2] \\
a_z\partial_{a_z}\mathcal{L} &= a_z[(-1+2\alpha R)\frac{\partial R}{\partial a_z} + \beta\frac{\partial R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{\partial a_z}] \\
&= \frac{{a_z}^2}{{a_1}^4}[-1+2\alpha(\frac{1}{2}a^2-\frac{11}{2}b^2)] + \beta\frac{{a_z}^2}{{a_1}^4}3a^2 \\
&= a^2[-1+2\alpha(\frac{1}{2}a^2-\frac{11}{2}b^2)+3\beta a^2]
\end{aligned}
$$

同樣代入式 (4.6)(4.7) 中可得另外兩條方程式:

$$\begin{aligned}
&-a^2+11b^2+\alpha(\frac{1}{2}a^4-11a^2b^2+\frac{121}{2}b^4)+\beta(\frac{3}{2}a^4+\frac{33}{2}b^4)-4\Lambda\\
&\quad+(4b^2)[4-4\alpha(a^2-11b^2)+\beta(-2a^2+10b^2)]\\
&\quad-(2b)[(-1+\alpha a^2-11\alpha b^2))(-10b)+\beta(-4a^2b+26b^3)]\\
&\quad+2a^2[1-2\alpha(\frac{1}{2}a^2-\frac{11}{2}b^2)-3\beta a^2]\\
&=a^2+7b^2+\alpha(-\frac{3}{2}a^4-15a^2b^2+\frac{33}{2}b^4)+\beta(-\frac{9}{2}a^4+\frac{9}{2}b^4)-4\Lambda=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}a^2+\frac{7}{4}b^2+\alpha(-\frac{3}{8}a^4-\frac{15}{4}a^2b^2+\frac{33}{8}b^4)+\beta(-\frac{9}{8}a^4+\frac{9}{8}b^4)-\Lambda=0 \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}a^2+\frac{11}{2}b^2+\alpha(\frac{1}{4}a^4-\frac{11}{2}a^2b^2+\frac{121}{4}b^4)+\beta(\frac{3}{4}a^4+\frac{33}{4}b^4)-2\Lambda\\
&\quad+(4b^2)[4-4\alpha(a^2-11b^2)+\beta(-2a^2+10b^2)]\\
&\quad-(2b)[(-1+\alpha a^2-11\alpha b^2))(-10b)+\beta(-4a^2b+26b^3)]\\
&\quad+a^2[-1+2\alpha(\frac{1}{2}a^2-\frac{11}{2}b^2)+3\beta a^2]\\
&=-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+\alpha(\frac{5}{4}a^4-\frac{25}{2}a^2b^2-\frac{55}{4}b^4)+\beta(\frac{15}{4}a^4-\frac{15}{4}b^4)-2\Lambda=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow-\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2+\alpha(\frac{5}{8}a^4-\frac{25}{4}a^2b^2-\frac{55}{8}b^4)+\beta(\frac{15}{8}a^4-\frac{15}{8}b^4)-\Lambda=0 \tag{4.17}$$

至此我們得到了三條 a,b,α,β 間的關係式:

$$\begin{cases}
-\frac{1}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2+\alpha(\frac{1}{8}a^4-\frac{5}{4}a^2b^2-\frac{11}{8}b^4)+\beta(\frac{3}{8}a^4-\frac{3}{8}b^4)-\Lambda=0\\
\frac{1}{4}a^2+\frac{7}{4}b^2+\alpha(-\frac{3}{8}a^4-\frac{15}{4}a^2b^2+\frac{33}{8}b^4)+\beta(-\frac{9}{8}a^4+\frac{9}{8}b^4)-\Lambda=0\\
-\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2+\alpha(\frac{5}{8}a^4-\frac{25}{4}a^2b^2-\frac{55}{8}b^4)+\beta(\frac{15}{8}a^4-\frac{15}{8}b^4)-\Lambda=0
\end{cases}$$

稍做計算便可得出其解爲: $\{a,b\}=\{\pm\imath\sqrt{\frac{2}{3}\Lambda},\pm\sqrt{\frac{2}{3}\Lambda}\}$,
或$\{a,b\}=\{\pm\sqrt{-8\Lambda+\frac{11(1+8\alpha\Lambda+24\beta\Lambda)}{30\beta}},\pm\sqrt{\frac{1+8\alpha\Lambda+24\beta\Lambda}{30\beta}}\}$。
但 a,b 爲實數, 因此其解爲:

$$a^2=-8\Lambda+\frac{11(1+8\alpha\Lambda+24\beta\Lambda)}{30\beta} \tag{4.18}$$

$$b^2=\frac{1+8\alpha\Lambda+24\beta\Lambda}{30\beta} \tag{4.19}$$

至此, 我們已經重製出其結果, 然而, 將這個結果代回, 計算出能量動量張量後, 在 John D. Barrow 的該篇文章中有提到其並不符合各種能量條件 [1] 。

4.1.3　引入膜宇宙學之概念

由於前節所重製的結果並不符合能量條件, 因此我們考慮前章推導出的等效重力方程式, 此方程式又稱為brane equation ,

$$G^{\mu}{}_{\nu} = -\Lambda g^{\mu}{}_{\nu} + {k_4}^2 T^{\mu}{}_{\nu} + {k_5}^4 S^{\mu}{}_{\nu} - E^{\mu}{}_{\nu} \tag{4.20}$$

$$S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{12} T T^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4} T^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2) g^{\mu}{}_{\nu} \tag{4.21}$$

而由度規張量我們可以計算出愛因斯坦張量為

$$G^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 4x^2\kappa & 5\kappa \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

其中 $\kappa = \frac{1+8\Lambda\alpha}{20\beta} + \frac{\Lambda}{5}$
因此, 我們可以將其動量能量張量定為

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & p_3 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

注意此處各零項, 是可以直接由方程式算出這些項為零的, 若先假設各個項都有值, 接著計算出 $S^{\mu}{}_{\nu}$ 帶入方程式中, 然後由於 $G^{\mu}{}_{\nu}$ 與時間無關, 就可以先得到一些計算後帶有 e^{-bt} 的項為零的方程式, 主要是由 $T^{\mu\alpha}T_{\nu\alpha}$ 此項來的, 將這些方程式解出後, 便可得到只有上述五項不為零了。

接著將此動量能量張量代入方程式中, 先計算出式中各項:

$$
\begin{aligned}
T = T^{\alpha}{}_{\alpha} =& \rho + p_1 + p_2 + p_3 \\
T^{0\alpha}T_{0\alpha} =& \rho^2 \\
T^{1\alpha}T_{1\alpha} =& {p_1}^2 \\
T^{2\alpha}T_{2\alpha} =& {p_2}^2 + \frac{e^{bt}x^2}{4} p_2 (\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3) \\
T^{3\alpha}T_{3\alpha} =& {p_3}^2 + \frac{e^{bt}x^2}{4} (\frac{2p_4}{x^2} - p_3)(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3) \\
T^{2\alpha}T_{3\alpha} =& \frac{e^{bt}}{2} p_2 (\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3) \\
T^{3\alpha}T_{2\alpha} =& p_2 p_4 - \frac{x^2}{2} p_3 (p_2 - p_3) + \frac{e^{bt}x^4}{8} (\frac{2p_4}{x^2} - p_3)(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3) \\
T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} =& \rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + \frac{e^{bt}x^2}{4} (\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)^2 \\
3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2 =& 2(\rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 - \rho p_1 - \rho p_2 \\
& - \rho p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3) \\
& + \frac{3e^{bt}x^2}{4} (\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)^2
\end{aligned}
$$

代入式 (4.21) $S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{12}TT^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4}T^{\mu\alpha}T_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2)g^{\mu}{}_{\nu}$
計算出各個非零之項:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow S^0{}_0 =& \frac{1}{12}(-\rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3) \\
&+ \frac{e^{bt}x^2}{32}(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)^2 \\
S^1{}_1 =& \frac{1}{12}(\rho^2 - {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 - \rho p_2 - \rho p_3 - p_2p_3) \\
&+ \frac{e^{bt}x^2}{32}(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)^2 \\
S^2{}_2 =& \frac{1}{12}(\rho^2 + {p_1}^2 - {p_2}^2 + {p_3}^2 - \rho p_1 - \rho p_3 - p_1p_3) \\
&+ \frac{e^{bt}x^2}{32}(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)(\frac{2p_4}{x^2} - p_2 - p_3) \\
S^3{}_3 =& \frac{1}{12}(\rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 - {p_3}^2 - \rho p_1 - \rho p_2 - p_1p_2) \\
&- \frac{e^{bt}x^2}{32}(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)(\frac{2p_4}{x^2} - p_2 - p_3) \\
S^2{}_3 =& -\frac{e^{bt}}{8}p_2(\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3) \\
S^3{}_2 =& \frac{1}{12}p_4(\rho + p_1 - 2p_2 - 2p_3) \\
&+ \frac{x^2}{32}[4p_3 - e^{bt}x^2(\frac{2p_4}{x^2} - p_3)](\frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3)
\end{aligned}
$$

4.1.4 解出能量動量張量

首先, 在我們的討論中, 因爲低能量近似而忽略掉 $E^{\mu}{}_{\nu}$ 造成的影響。

在上一節中, 可以發現有很多項中帶有一個跟時間有關的指數項 e^{bt}, 但是因爲 $G^2{}_3 = T^2{}_3 = 0$ 且 $G^{\mu}{}_{\nu}$ 與 t 無關, 因此可以推得

$$\Rightarrow \frac{2p_4}{x^2} + p_2 - p_3 = 0 \tag{4.24}$$

接著由 $G^2{}_2 = G^3{}_3$ 可以得到:

$$
\begin{aligned}
&{k_4}^2T^2{}_2 + {k_5}^4S^2{}_2 = {k_4}^2T^3_3 + {k_5}^4S^3{}_3 \\
\Rightarrow&[{k_4}^2 + \frac{1}{12}{k_5}^4(\rho + 2p_1 + 2p_2 + p_3)](p_2 - p_1) = 0 \\
\Rightarrow&p_2 = p_1 \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

因此, 這非零的五條方程式可以化簡爲

$$\begin{cases} {k_4}^2 p_3 + \frac{1}{12}{k_5}^4 S^3{}_3 = 5({k_4}^2\rho + \frac{1}{12}{k_5}^4 S^0{}_0) \\ {k_4}^2 p_1 + \frac{1}{12}{k_5}^4 S^2{}_2 = -3({k_4}^2\rho + \frac{1}{12}{k_5}^4 S^0{}_0) \\ {k_4}^2\rho + \frac{1}{12}{k_5}^4 S^0{}_0 = \kappa \end{cases} \tag{4.26}$$

於是就可以解出此能量動量張量的形式了:

$$\Rightarrow \rho = 6\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} + (10\kappa + \frac{2\sqrt{3}\mathrm{A}}{{\mathrm{k}_5}^4})\mathrm{B} \tag{4.27}$$

$$p_1 = 6\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} \pm \frac{6({k_4}^4 - {k_5}^4\kappa)}{{k_5}^4}B \tag{4.28}$$

$$p_3 = 6\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} + (14\kappa + \frac{2\sqrt{3}\mathrm{A}}{{\mathrm{k}_5}^4})\mathrm{B} \tag{4.29}$$

代入式(4.24),(4.25)

$$\Rightarrow p_2 = 6\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} \pm \frac{6({k_4}^4 - {k_5}^4\kappa)}{{k_5}^4}B \tag{4.30}$$

$$p_4 = x^2(\pm 10\kappa + \frac{\sqrt{3}A \mp 3{k_4}^4}{{k_5}^4})B \tag{4.31}$$

其中 κ 同前節之定義: $\kappa = \frac{1+8\Lambda\alpha}{20\beta} + \frac{\Lambda}{5}$
而 A, B 分別爲: $A = \sqrt{3{k_4}^8 + 8{k_5}^8\kappa^2}$, $B = \sqrt{\frac{-3}{3{k_4}^4 + 9{k_5}^4\kappa - 2\sqrt{3}A}}$ 。

4.2 化簡brane equation

不考慮 $E^\mu{}_\nu$, 我們發現可以藉由一些代數運算來將方程式中的一次項 $T^\mu{}_\nu$ 吸收到二次項 $S^\mu{}_\nu$ 中。

$$\begin{aligned} G^\mu{}_\nu + \Lambda g^\mu{}_\nu &= {k_4}^2 T^\mu{}_\nu + {k_5}^4 S^\mu{}_\nu \\ &= {k_4}^2(T^\mu{}_\nu + kS^\mu{}_\nu) \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中 $k = \frac{{k_5}^4}{{k_4}^2}$

接著重新定義 $T^\mu{}_\nu$ 先將 coupling constant 吸收掉

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &\rightarrow \frac{\widetilde{T^\mu{}_\nu}}{k} \\ \Rightarrow S^\mu{}_\nu &\rightarrow \frac{\widetilde{S^\mu{}_\nu}}{k^2} \\ \Rightarrow \frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}(G^\mu{}_\nu + \Lambda g^\mu{}_\nu) &= \widetilde{T^\mu{}_\nu} + \widetilde{S^\mu{}_\nu} \end{aligned} \tag{4.33}$$

然後假設 $\widetilde{T^\mu{}_\nu} = U^\mu{}_\nu + xg^\mu{}_\nu$ 。則可得

$$
\begin{aligned}
\tilde{T} =& U^\mu{}_\mu + xg^\mu{}_\mu = U + 4x \\
\Rightarrow \widetilde{S^\mu{}_\nu} =& \frac{1}{12}\tilde{T}\widetilde{T^\mu{}_\nu} - \frac{1}{4}\widetilde{T^{\mu\alpha}}\widetilde{T_{\nu\alpha}} + \frac{1}{24}g^\mu{}_\nu(\widetilde{T^{\alpha\beta}}\widetilde{T_{\alpha\beta}} - \tilde{T}^2) \\
=& \frac{1}{12}(U+4x)(U^\mu{}_\nu + xg^\mu{}_\nu) - \frac{1}{4}(U^{\mu\alpha} + xg^{\mu\alpha})(U_{\nu\alpha} + xg_{\nu\alpha}) \\
&+ \frac{1}{24}g^\mu{}_\nu[3(U^{\alpha\beta} + xg^{\alpha\beta})(U_{\alpha\beta} + xg_{\alpha\beta}) - (U+4x)^2] \\
=& \frac{1}{12}UU^\mu{}_\nu - \frac{1}{4}U^{\mu\alpha}U_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3U^{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} - U^2) \\
&+ \frac{x}{3}(U^\mu{}_\nu + xg^\mu{}_\nu) + \frac{x}{12}Ug^\mu{}_\nu - \frac{x}{4}(U^\mu{}_\nu + U_\nu{}^\mu) - \frac{x^2}{4}g^\mu{}_\nu \\
&+ \frac{x}{4}Ug^\mu{}_\nu + \frac{x^2}{2}g^\mu{}_\nu - \frac{x}{3}Ug^\mu{}_\nu - \frac{2x^2}{3}g^\mu{}_\nu \\
=& \widehat{S^\mu{}_\nu} + \frac{x}{12}U^\mu{}_\nu - \frac{x}{4}U_\nu{}^\mu - \frac{x^2}{12}g^\mu{}_\nu
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

又 $U^\mu{}_\nu = U_\nu{}^\mu$, 則我們可以算出在 x 爲何時, 一次項會消失:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \widetilde{T^\mu{}_\nu} + \widetilde{S^\mu{}_\nu} &= \widehat{S^\mu{}_\nu} + (1 + \frac{x}{12})U^\mu{}_\nu - \frac{x}{4}U_\nu{}^\mu + (x - \frac{x^2}{12})g^\mu{}_\nu \\
&= \widehat{S^\mu{}_\nu} + (1 - \frac{x}{6})U^\mu{}_\nu + (x - \frac{x^2}{12})g^\mu{}_\nu
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow x = 6 \tag{4.35}$$

$$\Rightarrow \frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}(G^\mu{}_\nu + \Lambda g^\mu{}_\nu) - 3g^\mu{}_\nu = \widehat{S^\mu{}_\nu} \tag{4.36}$$

因此, 令 $t^\mu{}_\nu = \frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}(G^\mu{}_\nu + \Lambda g^\mu{}_\nu) - 3g^\mu{}_\nu$ 便可得到化簡後無一次項之方程式:

$$t^\mu{}_\nu = \widehat{S^\mu{}_\nu} \tag{4.37}$$

4.2.1 驗證其解相同

按照上節定義,brane equation 等式左方爲:

$$
t^\mu{}_\nu = \frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}(G^\mu{}_\nu + \Lambda g^\mu{}_\nu) - 3g^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \kappa' - 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\kappa' - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\kappa' - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4x^2\kappa' & 5\kappa' - 3 \end{pmatrix} \tag{4.38}
$$

同4.1.3節, 我們可以直接將 $U^{\mu}{}_{\nu}$ 令爲類似形式:

$$U^{\mu}{}_{\nu} = kT^{\mu}{}_{\nu} - 6g^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & u_3 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

同樣也計算出 $U^{\mu}{}_{\nu}$ 來解之:

$$\widehat{S^{\mu}{}_{\nu}} = \frac{1}{12}UU^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4}U^{\mu\alpha}U_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3U^{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} - U^2) \tag{4.40}$$

由 $\widehat{S^2{}_3} = 0$

$$\Rightarrow \frac{e^b t}{8}u_2(\frac{2u_4}{x^2} + u_2 - u_3) = 0 \tag{4.41}$$

$$\Rightarrow u_2 = 0 \text{ or } \frac{2u_4}{x^2} + u_2 - u_3 = 0 \tag{4.42}$$

但 $U^{\mu}{}_{\nu} = U_{\nu}{}^{\mu}$ 成立時, $\frac{2u_4}{x^2} + u_2 - u_3 = 0$ 需成立

$$\Rightarrow \frac{2u_4}{x^2} + u_2 - u_3 = 0 \tag{4.43}$$

最後再由 $\widehat{S^1{}_1} = \widehat{S^2{}_2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}(u_1 - u_2)(2u_1 + 2u_2 - u_3 - \omega) = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \text{ or } \omega = 2u_1 + 2u_2 - u_3$$

分別討論此兩種情形。

$u_1 = u_2$ **時:**

$u_1 = u_2$ 代回式 (4.37) $\Rightarrow$ 方程式化簡爲:

$$\begin{cases} (u_2 - u_3 - \omega)(u_2 - u_3 + \omega) = 12\kappa' - 36 \\ \omega^2 - \omega u_2 - \omega u_3 - u_2u_3 + {u_3}^2 = 36\kappa' - 36 \\ (u_2 - u_3 - \omega)(u_2 + u_3 - \omega) = 60\kappa' - 36 \end{cases} \tag{4.44}$$

經計算後可得:

$$\Rightarrow \omega = \pm(10\kappa' - B)C \tag{4.45}$$

$$u_1 = u_2 = \pm(6\kappa' - 6)C \tag{4.46}$$

$$u_3 = \pm(14\kappa' - B)C \tag{4.47}$$

代回式(4.43)

$$\Rightarrow u_4 = \pm\frac{x^2}{2}(8\kappa' + 6 - B)C \tag{4.48}$$

其中 $B=\pm 2\sqrt{9+24\kappa'^2}$, $C=\sqrt{\frac{-3}{3+9\kappa'-B}}$, $\kappa'=\frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}(\frac{1+8\Lambda\alpha}{20\beta}+\frac{\Lambda}{5})$
當 $\kappa'<\frac{3}{5}$ 或 $\kappa'>3$ 時, C 爲實數.
此解與4.1.4節解出之結果完全相同。

$\omega=2u_1+2u_2-u_3$ 時

同前節之做法: $\Rightarrow$ 方程式可化簡爲

$$\begin{cases} -{u_1}^2-3u_1u_2-{u_2}^2+u_1u_3+u_2u_3=4\kappa'-12 \\ (u_1+u_2-u_3)^2=-12\kappa'-12 \\ {u_1}^2+u_1u_2+{u_2}^2-u_1u_3-u_2u_3=20\kappa'-12 \end{cases} \tag{4.49}$$

可得其解爲

$$\Rightarrow u_1=\pm 2(1-B)C \tag{4.50}$$
$$u_2=\pm 2(1+B)C \tag{4.51}$$
$$u_3=\pm 2(5+\frac{3}{\kappa'})C \tag{4.52}$$
$$\omega=2u_1+2u_2-u_3=\pm(-1-\frac{3}{\kappa'})C \tag{4.53}$$

代入式(4.43)

$$\Rightarrow u_4=\pm x^2(4+\frac{3}{\kappa'}-B)C \tag{4.54}$$

其中 $B=\pm\sqrt{\frac{9}{\kappa'^2}-8}$, $C=\sqrt{\frac{-\kappa'^2}{3(1+\kappa')}}$, $\kappa'=\frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}(\frac{1+8\Lambda\alpha}{20\beta}+\frac{\Lambda}{5})$
當 $-\frac{3}{2\sqrt{2}}\leq\kappa'<-1$ 時 , B,C 皆爲實數。
雖然在4.1.4節並無解出此解, 但是在該節中我們略去了一個解法非常複雜的部分, 即式 (4.25) 前另一項爲0時之解, 此解應該與其相同。

4.2.2　能量動量張量守恆

在此將驗證 $D_\mu T^\mu{}_\nu=0$, 由第4.2節可算出:

$$D_\mu T^\mu{}_\nu=(\frac{1}{2}b(4\rho-p_1-p_2-2p_3),\frac{1}{x}(p_1-p_2),0,0)$$
$$\Rightarrow D_\mu U^\mu{}_\nu=(\frac{1}{2}b(4\omega-u_1-u_2-2u_3),\frac{1}{x}(u_1-u_2),0,0)$$

4.2.3　解1

將式(4.45)~(4.48) 代入

$$D_\mu U^\mu{}_\nu = (-2b(-3+\sqrt{9+24\kappa'^2})\sqrt{\frac{-3}{3+9\kappa'-2\sqrt{9+24\kappa'^2}}}, 0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow b = 0 \text{ 或 } \kappa' = 0$$

4.2.4　解2

將式(4.50)~式(4.54) 代入

$$D_\mu U^\mu{}_\nu = (-2b(8+\frac{9}{\kappa'})\sqrt{\frac{-\kappa'^2}{3(1+\kappa')}}, -\frac{4}{x}\sqrt{\frac{-\kappa'^2}{3(1+\kappa')}}\sqrt{\frac{9}{\kappa'^2}-8}, 0, 0)$$
$$\Rightarrow b = 0 \text{ 且 } \kappa' = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

4.3　Bianchi type VI_h 模型

與第4.1節做法相同:

4.3.1　度規

Bianchi type VI_h 模型之度規爲[1]:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + e^{2(rt+ax)}[e^{-2(st+ahx)}dy^2 + e^{2(st+ahx)}dz^2] \tag{4.55}$$

故其度規張量爲:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(r-s)t+2(1-h)ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(r+s)t+2(1+h)ax} \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2(r-s)t-2(1-h)ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2(r+s)t-2(1+h)ax} \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

其中 $r^2 = \frac{8\beta s^2+(3+h^2)(1+8\Lambda\alpha)+8\Lambda\beta(1+h^2)}{8\beta h^2}$, $a^2 = \frac{8\beta s^2+8\Lambda(3\alpha+\beta)+3}{8\beta h^2}$

4.3.2 brane equation

與4.1.3節相同,

$$G^{\mu}{}_{\nu} = -\Lambda g^{\mu}{}_{\nu} + {k_4}^2 T^{\mu}{}_{\nu} + {k_5}^4 S^{\mu}{}_{\nu} - E^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.19}$$

$$S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{12} T T^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4} T^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2) g^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.20}$$

同樣的, 可由度規張量計算出 Einstein tensor:

$$G^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} A+B & D & 0 & 0 \\ -D & -A-3B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C+B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C+B \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

其中 $A = 2(a^2+s^2)$, $B = \frac{r^2-a^2}{2} + \frac{a^2h^2-s^2}{2}$, $C = 2(a^2h - rs)$, $D = 2a(r+hs)$

4.3.3 計算出方程式中各項

由於Einstein Tensor 有六個非零項, 同樣也能如同 4.1.3 節那樣將能量動量張量計算出只有此六個非零項:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & p_4 & 0 & 0 \\ p_5 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

分別計算出各項: $T = T^{\alpha}{}_{\alpha} = \rho + p_1 + p_2 + p_3$

$$T^{\mu\alpha}T_{\nu\alpha} = \begin{pmatrix} \rho^2 - {p_4}^2 & p_1p_4 - p_5\rho & 0 & 0 \\ -p_1p_4 - p_5\rho & {p_1}^2 - {p_5}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {p_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {p_3}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} =& \rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 - {p_4}^2 - {p_5}^2 \\ 3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2 =& 2(\rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 \\ & - \rho p_1 - \rho p_2 - \rho p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3) \\ & - 3({p_4}^2 + {p_5}^2) \end{aligned}$$

代入式 (4.21) $S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{12}TT^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4}T^{\mu\alpha}T_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2)g^{\mu}{}_{\nu}$
便可計算出各個二階項

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S^0{}_0 =& \frac{1}{12}(-\rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3) + \frac{1}{8}({p_4}^2 - {p_5}^2) \\
S^1{}_1 =& \frac{1}{12}(\rho^2 - {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 - \rho p_2 - \rho p_3 - p_2p_3) + \frac{1}{8}(-{p_4}^2 + {p_5}^2) \\
S^2{}_2 =& \frac{1}{12}(\rho^2 + {p_1}^2 - {p_2}^2 + {p_3}^2 - \rho p_1 - \rho p_3 - p_1p_3) + \frac{1}{8}(-{p_4}^2 - {p_5}^2) \\
S^3{}_3 =& \frac{1}{12}(\rho^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 - {p_3}^2 - \rho p_1 - \rho p_2 - p_1p_2) - \frac{1}{8}(-{p_4}^2 - {p_5}^2) \\
S^0{}_1 =& \frac{\rho}{4}(p_4 + p_5) + \frac{p_4}{12}(-2\rho - 2p_1 + p_2 + p_3) \\
S^1{}_0 =& \frac{p_1}{4}(p_4 + p_5) + \frac{p_5}{12}(-2\rho - 2p_1 + p_2 + p_3)
\end{aligned}$$

4.3.4　解出能量動量張量

因爲 $G^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}{}_{\nu}$ 爲反對稱形式

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow {k_4}^2(T^0{}_1 + T^1{}_0) + {k_5}^4(S^0{}_1 + S^1{}_0) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{12}(p_4 + p_5)[12{k_4}^2 + {k_5}^4(\rho + p_1 + p_2 + p_3)] = 0 \\
&\Rightarrow p_4 = -p_5 \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

又 $G^{\mu}{}_{\mu} + \Lambda g^{\mu}{}_{\mu} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow {k_4}^2 T^{\mu}{}_{\mu} + {k_5}^4 S^{\mu}{}_{\mu} = 0 \\
&\Rightarrow {k_4}^2(\rho + p_1 + p_2 + p_3) + \frac{{k_5}^4}{12}(3T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} - T^2) = 0 \\
&\Rightarrow \rho + p_1 + p_2 + p_3 = 0 \qquad (4.61) \\
&\text{且 } {p_4}^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

因此對角線上的四條方程式可化簡爲

$$\begin{cases}
{k_4}^2 p_1 + \frac{{k_5}^4}{4}({p_2}^2 + {p_3}^2 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) = -A - 3B \\
{k_4}^2 p_2 - \frac{{k_5}^4}{4}{p_2}^2 = C + B \\
{k_4}^2 p_3 - \frac{{k_5}^4}{4}{p_3}^2 = -C + B
\end{cases} \qquad (4.63)$$

如此便可解出能量動量張量之對角線上四項

$$\Rightarrow p_1 = -2\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} - Q_1 - Q_2 - \frac{A+2B}{8(\frac{k_4}{k_5})^4 + C + 4{k_4}^2 Q_2}(4\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} - Q_1 + Q_2) \tag{4.64}$$

$$p_2 = 2\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} + 2Q_1 \tag{4.65}$$

$$p_3 = 2\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} + 2Q_2 \tag{4.66}$$

代入式(4.61)

$$\Rightarrow \rho = -2\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} - Q_1 - Q_2 + \frac{A+2B}{8(\frac{k_4}{k_5})^4 + C + 4{k_4}^2 Q_2}(4\frac{{k_4}^2}{{k_5}^4} - Q_1 + Q_2) \tag{4.67}$$

(4.68)

其中 $Q_1 = \pm\frac{\sqrt{{k_4}^4 - (B+C){k_5}^4}}{{k_5}^4}$; $Q_2 = \pm\frac{\sqrt{{k_4}^4 - (B-C){k_5}^4}}{{k_5}^4}$
最後再由非對角線之方程式算出 p_4

$${k_4}^2 {T^0}_1 + {k_5}^4 {S^0}_1 = D$$

$$\Rightarrow p_4 = \frac{4D}{4{k_4}^2 + {k_5}^4(p_2+p_3)} = \frac{2D}{4{k_4}^2 + Q_1 + Q_2}$$

但是由式 (4.62), $p_4 = \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3}$
兩者互相矛盾。雖然在式 (4.60) 之處, 我們同樣只選用比較容易的條件來做 ,另一個條件非常困難, 似乎無法直接將其解出來, 因此必須採用與前節相同的方法將 brane equation 化簡才行。

4.3.5　改用化簡方法處理Bianchi type VI_h 模型

與4.2.1節相同, 我們重新定義 ${T^\mu}_\nu$ 將一次項吸收掉, 使方程式更簡潔:

$$\begin{aligned} {t^\mu}_\nu &= \frac{{k_5}^4}{{k_4}^4}({G^\mu}_\nu + \Lambda {g^\mu}_\nu) - 3{g^\mu}_\nu \\ &= \begin{pmatrix} A'+B'-3 & D' & 0 & 0 \\ -D' & -A'-3B'-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'+B'-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C'+B'-3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.69}$$

同樣的, 轉換過的能量動量張量也可以直接令成 Einstein tensor 中不爲零的部分有值。

$$U^{\mu}{}_{\nu} = kT^{\mu}{}_{\nu} - 6g^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \omega & u_4 & 0 & 0 \\ u_5 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

$$\widehat{S^{\mu}{}_{\nu}} = \frac{1}{12}UU^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4}U^{\mu\alpha}U_{\nu\alpha} + \frac{1}{24}(3U^{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} - U^2) \tag{2.38}$$

最後解此方程式 $\widehat{S^{\mu}{}_{\nu}} = t^{\mu}{}_{\nu}$：

反對稱條件仍然成立, 因此

$$t^0{}_1 + t^1{}_0 = \widehat{S^0{}_1} + \widehat{S^1{}_0} = 0 \tag{4.71}$$

可以得到

$$\Rightarrow \frac{1}{12}(u_4 + u_5)(\omega + u_1 + u_2 + u_3) = 0$$
$$\Rightarrow u_4 = -u_5 \text{ 或 } \omega + u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

但是在 $U^{\mu}{}_{\nu} = U_{\nu}{}^{\mu}$ 這條件中, 我們已經確定 $u_4 = -u_5$ 。故

$$\Rightarrow u_4 = -u_5 \tag{4.72}$$

再由張量轉換前 traceless 可得

$$t^{\mu}{}_{\mu} = \widehat{S^{\mu}{}_{\mu}} = -12 \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3{u_4}^2 =& \omega^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 \\ & - \omega u_1 - \omega u_2 - \omega u_3 - u_1u_2 - u_1u_3 - u_2u_3 + 72 \\ \Rightarrow u_4 =& \pm[\frac{1}{3}(\omega^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 - \omega u_1 - \omega u_2 - \omega u_3 - u_1u_2 \\ & - u_1u_3 - u_2u_3 + 72)]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.74}$$

由式 (4.72),(4.74) 可將原本的方程組化簡爲

$$\begin{cases} {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 - \omega^2 - u_1u_2 - u_1u_3 - u_2u_3 = 12(A' + B' - 3) \\ -{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 + \omega^2 - \omega u_2 - \omega u_3 - u_2u_3 = 12(-A' - 3B' - 3) \\ u_1u_2 - 2{u_2}^2 + u_2u_3 + \omega u_2 = 12(B' + C' + 3) \\ u_1u_3 + u_2u_3 - 2{u_3}^2 + \omega u_3 = 12(B' - C' + 3) \end{cases} \tag{4.75}$$

可得兩組解:
§解 1

$$\omega = \frac{2Q}{u_3} + \frac{32Q^3 + 4(6 - A')Qu_3{}^2 + 4Q^2u_3{}^2 + (3 - A' - B')u_3{}^4}{8Q^2u_3 + 2(3 + B')u_3{}^3} \tag{4.76}$$

$$u_1 = \frac{2Q}{u_3} + \frac{32Q^3 + 4(6 + A' + 4B')Qu_3{}^2 + 4Q^2u_3{}^2 + (3 + A' + 3B')u_3{}^4}{8Q^2u_3 + 2(3 + B')u_3{}^3} \tag{4.77}$$

$$u_2 = u_3 \tag{4.78}$$

§解 2

$$\omega = u_3 + \frac{24Q^3 + 4(3 - A' - B')Qu_3{}^2}{4Q^2u_3 + (3 + B')u_3{}^3} \tag{4.79}$$

$$u_1 = u_3 + \frac{24Q^3 + 4(3 + A' + 3B')Qu_3{}^2}{4Q^2u_3 + (3 + B')u_3{}^3} \tag{4.80}$$

$$u_2 = \frac{4Q}{u_3} \tag{4.81}$$

其中 $Q = 3 + B' - C'$

4.4　結論

在本節中將對本論文做個總結。

首先, 在John D. Barrow 的討論中, 我們得知了 Bianchi type II 的模型, 在考慮了二次曲率項的 action 後, 得到的精確解並不符合相關的能量條件。

接著, 因此我們嘗試考慮將這個解配合3-brane, 由四維的等效重力方程式再次計算出其能量動量張量, 然而計算出來的結果仍然不符合相關的能量條件, 無法演化出各向同性的宇宙。

Appendix A

符號定義

關於廣義相對論中各個符號的定義如下。index 的部分 0 爲時間, 大於 0 爲空間, 英文字母爲僅含空間部分 (1~n) , 希臘字母則爲整個時空 (0~n)。微分算符定義爲:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{A.1}$$

度規 $g_{\mu\nu}$ 中, 時間分量取負號, 空間分量取正號。共變微分與克里斯多福符號 (Christoff symbol) 分別爲:

$$D_\mu A_\nu \equiv \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \tag{A.2}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{A.3}$$

黎曼曲率張量 (Riemann curvature tensor) 爲:

$$R^\sigma{}_{\lambda\nu\mu} A_\sigma \equiv [D_\mu, D_\nu] A_\lambda = -\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} \tag{A.4}$$

里奇曲率張量 (Ricci curvature tensor) 爲:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\sigma{}_{\mu\nu\sigma} \tag{A.5}$$

純量曲率爲:

$$R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{A.6}$$

愛因斯坦張量 (Einstein tensor) 爲:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{A.7}$$

以上各定義皆來自[10]。

Appendix B

curvature的計算結果

以下列出所有關於曲率張量的計算結果。

B.1 Bianchi type II model

內文計算中所使用的度規爲

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{bt}}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{bt}}{a^2}x^2 + \frac{e^{2bt}}{4a^2}x^4 & \frac{e^{2bt}}{2a^2}x^2 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2bt}}{2a^2}x^2 & \frac{e^{2bt}}{a^2} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{e^{bt}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{x^2 e^{bt}} & -\frac{a^2}{2e^{bt}} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2}{2e^{bt}} & \frac{x^2a^2}{4e^{bt}} + \frac{a^2}{e^{2bt}} \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

非零的克里斯多福符號爲:

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \frac{b}{2} \qquad \Gamma^3_{03} = b$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{be^{bt}}{2a^2} \qquad \Gamma^0_{33} = \frac{be^{2bt}}{a^2}$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{be^{bt}x^2}{2a^2} + \frac{be^{2bt}x^4}{4a^2} \qquad \Gamma^0_{23} = \frac{be^{2bt}x^2}{2a^2}$$

$$\Gamma^1_{22} = -x - \frac{e^{bt}x^3}{2} \qquad \Gamma^1_{23} = -\frac{e^{bt}x}{2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{x} + \frac{e^{bt}x}{4} \qquad \Gamma^2_{13} = \frac{e^{bt}}{2x}$$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{bx^2}{4} \qquad \Gamma^3_{13} = -\frac{e^{bt}x}{4}$$

$$\Gamma^3_{12} = -\frac{e^{bt}x^3}{8}$$

非零的黎曼曲率張量之分量爲:

$$ {R^0}_{101} = \frac{b^2 e^{bt}}{4a^2} \qquad {R^0}_{202} = \frac{b^2 e^{bt} x^2}{4a^2}(1 + e^{bt} x^2) $$

$$ {R^0}_{302} = R^0_{203} = \frac{b^2 e^{2bt} x^2}{2a^2} \qquad {R^0}_{303} = \frac{b^2 e^{2bt}}{a^2} $$

$$ {R^0}_{312} = 2R^0_{213} = -2R^0_{123} = \frac{b e^{2bt} x}{2a^2} \qquad {R^0}_{212} = \frac{3b e^{2bt} x^3}{8a^2} $$

$$ {R^3}_{003} = 4{R^2}_{002} = 4{R^1}_{001} = b^2 \qquad {R^1}_{202} = -\frac{3b e^{bt} x^3}{8} $$

$$ {R^1}_{203} = 2R^1_{302} = 2R^1_{023} = -\frac{b e^{bt} x}{2} $$

$$ {R^1}_{212} = \frac{b^2 e^{bt} x^2}{8a^2}(2 + e^{bt} x^2) + \frac{e^{bt} x^2}{16}(e^{bt} x^2 - 12) $$

$$ {R^1}_{312} = R^1_{213} = \frac{e^{2bt} x^2}{8}(1 + \frac{2b^2}{a^2}) $$

$$ {R^2}_{103} = 2R^2_{013} = 2R^2_{301} = \frac{b e^{bt}}{4x} $$

$$ {R^2}_{102} = 2R^2_{201} = 2R^2_{012} = \frac{b e^{bt} x}{4} $$

$$ {R^2}_{223} = \frac{x^2}{2}{R^2}_{323} = \frac{e^{2bt} x^2}{8}(1 + \frac{2b^2}{a^2}) \qquad {R^2}_{112} = \frac{e^{bt}}{4}(3 - \frac{b^2}{a^2}) $$

$$ {R^3}_{201} = -\frac{bx}{4}(1 + \frac{e^{bt} x^2}{4}) \qquad {R^3}_{102} = \frac{bx}{4}(1 - \frac{e^{bt} x^2}{2}) $$

$$ {R^3}_{223} = -\frac{b^2 e^{bt} x^2}{8a^2}(4 + e^{bt} x^2) + \frac{e^{bt} x^2}{16}(4 + e^{bt} x^2) \qquad {R^3}_{112} = -\frac{1}{2} e^{bt} x^2 (\frac{b^2}{4a^2}) $$

$$ {R^3}_{323} = \frac{e^{bt} x^2}{2}{R^3}_{113} = -\frac{e^{2bt} x^2}{8}(1 + \frac{2b^2}{a^2}) \qquad {R^3}_{012} = \frac{bx}{2}(1 - \frac{e^{bt} x^2}{8}) $$

$$ {R^3}_{103} = 2R^3_{013} = 2R^3_{301} = -\frac{b e^{bt} x}{4} \qquad {R^3}_{002} = \frac{3b^2 x^2}{8} $$

在此只列出 ${R^\lambda}_{\rho\nu\mu}$ 中 $\nu < \mu$ 項, 剩下的用黎曼曲率張量的特性 ${R^\lambda}_{\rho\nu\mu} = -{R^\lambda}_{\rho\mu\nu}$ 即可得到, 並且可用其恆等式 ${R^\lambda}_{\rho\nu\mu} + {R^\lambda}_{\mu\rho\nu} + {R^\lambda}_{\nu\mu\rho} = 0$ 驗證之。

非零的里奇曲率張量則爲:

$$ R_{00} = \frac{3b^2}{2} \qquad R_{11} = \frac{e^{bt}}{2}(1 - \frac{2b^2}{a^2}) $$

$$ R_{22} = -\frac{b^2 e^{bt} x^2}{a^2}(1 + \frac{e^{bt} x^2}{2}) + \frac{1}{2} e^{bt} x^2 (1 - \frac{e^{bt} x^2}{4}) $$

$$ R_{23} = R_{32} = -\frac{1}{4} e^{2bt} x^2 (1 + \frac{4b^2}{a^2}) \qquad R_{33} = -\frac{1}{2} e^{2bt}(1 + \frac{e^{bt} x^2}{4}) $$

純量曲率爲:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{a^2}{2} - \frac{11b^2}{2} \tag{B.3}$$

愛因斯坦張量爲:

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(5b^2 - a^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(a^2 + 7b^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(a^2 + 7b^2) & -\frac{x^2}{2}(a^2 + b^2) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}(a^2 - b^2) \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

B.2 Bianchi type VI$_h$ model

內文計算中所使用的度規爲

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(r-s)t+2(1-h)ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(r+s)t+2(1+h)ax} \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2(r-s)t-2(1-h)ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2(r+s)t-2(1+h)ax} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

非零的克里斯多福符號爲:

$$\Gamma^2_{02} = r - s \qquad \Gamma^3_{03} = r + s$$
$$\Gamma^2_{12} = a(1-h) \qquad \Gamma^3_{13} = a(1+h)$$
$$\Gamma^0_{22} = (r-s)e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} \qquad \Gamma^0_{33} = (r+s)e^{2(r+s)t+2a(1+h)x}$$
$$\Gamma^1_{22} = -a(1-h)e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} \qquad \Gamma^1_{33} = -a(1+h)e^{2(r+s)t+2a(1+h)x}$$

非零的黎曼曲率張量之分量爲:

$$
\begin{array}{ll}
R^0{}_{202} = (r-s)^2 e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} & \\
R^0{}_{303} = (r+s)^2 e^{2(r+s)t+2a(1+h)x} & \\
R^0{}_{212} = -R^1{}_{202} = a(1-h)(r-s)e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} & \\
R^0{}_{313} = -R^1{}_{303} = a(1+h)(r+s)e^{2(r+s)t+2a(1+h)x} & \\
R^1{}_{212} = -a^2(1-h)^2 e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} & \\
R^1{}_{313} = -a^2(1+h)^2 e^{2(r+s)t+2a(1+h)x} & \\
R^2{}_{102} = R^2{}_{012} = a(1-h)(r-s) & R^2{}_{002} = (r-s)^2 \\
R^2{}_{323} = [-a^2(1-h^2)+r^2-s^2]e^{2(r+s)t+2a(1+h)x} & R^2{}_{112} = a^2(1-h)^2 \\
R^3{}_{103} = R^3{}_{013} = a(1+h)(r+s) & R^3{}_{003} = (r+s)^2 \\
R^3{}_{223} = -[-a^2(1-h^2)+r^2-s^2]e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} & R^3{}_{113} = a^2(1+h)^2
\end{array}
$$

與前節相同, 此處僅列出 $\nu < \mu$ 者。

非零的里奇曲率張量則爲:

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= 2(r^2+s^2) \\
R_{11} &= 2a^2(h^2+1) \\
R_{22} &= 2[(1-h)a^2 - r(r-s)]e^{2(r-s)t+2a(1-h)x} \\
R_{33} &= 2[(1+h)a^2 - r(r+s)]e^{2(r+s)t+2a(1+h)x} \\
R_{01} &= R_{10} = 2a(r+hs)
\end{aligned}
$$

純量曲率爲:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 2a^2(3+h^2) - 2(3r^2+s^2) \tag{B.7}$$

愛因斯坦張量爲:

$$G^0{}_0 = -a^2(3+h^2) + r^2 - s^2 \tag{B.8}$$
$$G^1{}_1 = -a^2(1-h^2) + 3r^2 + s^2 \tag{B.9}$$
$$G^2{}_2 = -a^2(1+h)^2 + (r+s)^2 \tag{B.10}$$
$$G^3{}_3 = -a^2(1-h)^2 + (r-s)^2 \tag{B.11}$$
$$G^0{}_1 = -G^1{}_0 = 2a(r+hs) \tag{B.12}$$

Appendix C

各Bianchi type model 的原始度規

以下列出各 model 之原始空間度規:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}\ ds^2 =& dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
\mathrm{II}\ ds^2 =& dx^2 + dy^2 + 2xdydz + (x^2+1)dz^2 \\
\mathrm{III}\ ds^2 =& dx^2 + e^{2x}dy^2 + 2ne^{x}dydz + dz^2 \\
\mathrm{IV}\ ds^2 =& dx^2 + e^{x}[dy^2 + 2dydz + (x^2+n^2)dz^2] \\
\mathrm{V}\ ds^2 =& dx^2 + e^{2hx}(dy^2 + dz^2) \\
\mathrm{VI}_h\ ds^2 =& dx^2 + e^{2x}dy^2 + 2ne^{(h+1)x}dydz + e^{2hx}dz^2 \\
\mathrm{VII}_h\ ds^2 =& dx^2 + e^{-hx}(n + \cos vx)dy^2 + e^{-hx}(h\cos vx + v\sin vx + nh)dydz \\
&+ e^{-hx}(\frac{2-v^2}{2}cosvx + \frac{hv}{2}\sin vx + n)dz^2 \\
\mathrm{VIII}\ ds^2 =& dx^2 + dy^2 + 2(\frac{x}{a} - y)dydz + [(\frac{x}{a} - y)^2 + 1]dz^2 \\
\mathrm{IX}\ ds^2 =& (\cos zdx + \sin z\sin xdy)^2 + (-\sin zdx + \cos z\sin xdy)^2 \\
&+ (dz + \cos xdy)^2
\end{aligned}
$$

Appendix D

單位

內文中我們使用幾何單位系統(geometrized unit system) 來計算, 以使常數部分較爲簡潔。在幾何單位系統中, 將光速及萬有引力常數定爲 1 , 使所有單位都變成長度的因次。

物理量	基本單位	幾何單位	換算率
長度	$[L]$	$[L]$	1
時間	$[T]$	$[L]$	c^{-1}
質量	$[M]$	$[L]$	Gc^{-2}
速度	$[LT^{-1}]$	1	c^{-1}
角速度	$[T^{-1}]$	$[L^{-1}]$	c^{-1}
加速度	$[LT^{-2}]$	$[L]$	c^{-2}
能量	$[ML^2T^{-2}]$	$[L]$	Gc^{-4}

注意內文中我們是將 $8\pi G$ 當作 1 順便將常數吸收掉。
另外, 若將迪拉克常數 (Dirac constant) 也設爲1則成爲自然單位系統。

Bibliography

[1] John D. Barrow. Anisotropically inflating univeres. *Physical Review D*, 73:023007, 2006.

[2] L. Bianchi. On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions. *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze*, 11:267–352, 1898.

[3] L. Bianchi. Lectures on the theory of finite continuous transformation groups. *Pisa*, pages 550–557, 1918.

[4] Guilherme de Berredo Peixoto and Ilya L. Shapiro. Conformal quantum gravity with the gauss-bonnet term. *PHYSICAL REVIEW D*, 70:044024, 2004.

[5] C. L. Bennett et al. Four year cobe dmr cosmic microwave background observations: maps and basic results. *Astrophysical*, 464:L1–L4, 1996.

[6] D. J. Fixsen et al. The cosmic microwave background spectrum from the full cobe firas data set. *Astrophys. J.*, 473:576–587, 1996.

[7] G. F. Smoot et al. Structure in the cobe dmr first year maps. *Astrophysical*, 396:L1–L5, 1992.

[8] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B Series 10*, 48:463, 1966.

[9] W. F. Kao. Kaluzaklein higher-derivative induced gravity. *Class. Quantum Grav.*, 24:4295–4311, 2007.

[10] W. F. Kao. Lecture notes for the course of general relativity, 2007.

[11] W. F. Kao. Anisotropic perturbation of de sitter space. *Eur. Phys. J.*, C 53:87–93, 2008.

[12] Sheng-Lan Ko. A study on the bianchi ix model universe. Master's thesis, National Chiao Tung University, 2007.

[13] L.Randall and R.Sundrum. An alternative to compactification. *Phys.Rev.Let*, 83:4690–4693, 1999.

[14] L.Randall and R.Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Let*, 83:3370–3373, 1999.

[15] S. S. Meyer S. Gulkis, P. M. Lubin and R. F. Silverberg. The cosmic background explorer. *Sci. Am.*, 262(1):122–129, 1990.

[16] Misao Sasaki Tetsuya Shiromizu, Kei-ichi Maeda. The einstein equations on the 3-brane world. *PHYSICAL REVIEW D*, 62:024012, 2000.