

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

以 Hull-White 短利模型建構精確多元利率樹
**Accurate Multi-nomial Interest Rate Tree Model
for Hull-White Term structural Model**

研究生：顏妤芳

指導教授：王克陸 博士

戴天時 博士

中華民國九十七年六月

以 Hull-White 短利模型建構精確多元利率樹

**Accurate Multi-nomial Interest Rate Tree Model
for Hull-White Term structural Model**

研究生：顏好芳

Student: Yu-Fang Yen

指導教授：王克陸博士

Advisor: Dr. Keh-Luh Wang

戴天時博士

Dr. Tian-Shyr Dai



A Thesis
Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Finance

June 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年六月

以 Hull-White 短利模型建構精確多元利率樹

學生：顏好芳

指導教授：王克陸 博士

戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

2008 年 6 月



摘要

本論文將以Hull-White短利模型為基礎，建造一個更為精確的多元利率樹，使得樹狀結構法在評價上造成的兩種評價誤差：分配性誤差以及非線性誤差能加以改善。除了應用求面積法將Hull-White三元樹延伸至多元樹，來減少樹狀結構評價造成的分配性誤差，主要議題將介紹一個創新的造樹方法，來減少樹狀結構評價所造成的非線性誤差。再以此造樹方法處理bond option以及Cap。

關鍵字：Hull-White 模型、非線性誤差、多元利率樹。

Accurate Multi-nomial Interest Rate Tree Model for Hull-White Term structural Model

Student: Yu-Fang Yen

Advisors: Dr. Keh-Luh Wang

Dr. Tian-Shyr Dai

Institute of Finance
National Chiao Tung University



This paper proposes an accurate Multi-nomial Interest Rate Tree Model for Hull-White Term structural Model that can effectively decrease the pricing error from distribution error and nonlinearity error introduced by the lattices method. The quadrature method is use to extend the H-W trinomial tree model to a multi-nomial one to reduce the distribution error. A novel tree adjustment method is introduced to reduce the nonlinearity error. Numerical experiments on the bond options and the Cap verify the superiority of the proposed model.

Keywords: Hull-White Model; Nonlinearly error; Multi-nomial Interest Rate Tree.

誌 謝

在交通大學財金所求學的兩年中，承蒙指導教授王克陸老師與戴天時老師的栽培。謝謝王克陸老師引領學生進入專業的學術研究領域，謝謝戴天時老師在學生撰寫論文期間細心且不厭其煩的指導，並給予學生很多中肯的建議，使學生獲益匪淺，在此學生獻上最誠摯謝意與敬意。

研究所這段期間，感謝戴慈學姐從旁指導與協助，也要謝謝一起研究利率模型的俊儒和明璋給予相當寶貴的想法和建議，以及一起研究隨機微積分的夥伴們、其他同窗給予我在學術上的相伴與鼓勵，讓我在這兩年中過的既充實又快樂。在實務操作方面，感謝我以前就讀中央數學的宏彬學長，帶著我熟析利率市場資料的數值和用法，讓我能夠很快的把理論與實務結合。

最後要感謝的，是我最親愛的家人，這段時間給我無限的支持與鼓勵，才能讓我無後顧之憂的專心完成這篇論文。

顏好芳 謹致于

交通大學財務金融所

民國九十七年六月

目 錄

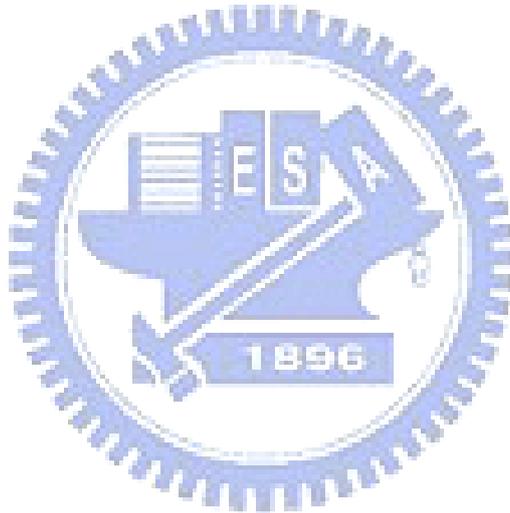
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究流程與論文架構.....	1
第二章 文獻探討.....	3
第一節 利率模型之演進.....	3
第二節 Black's模型介紹和Cap評價.....	6
第三節 樹狀結構法之評價誤差.....	9
第四節 造樹方法.....	12
第三章 研究方法.....	18
第一節 創新數值方法.....	18
第二節 Bond Option以及Cap的評價方法.....	21
第四章 實證分析與敏感度分析.....	23
第一節 評價Bond Option以及Cap.....	23
第二節 敏感度分析.....	26
第五章 結論與建議.....	30
參考文獻.....	31
附錄 A.....	33

圖目錄

圖(2.3.1) 分配性誤差以及非線性誤差.....	11
圖(2.3.2) 障礙選擇權三元樹.....	12
圖(2.4.1) Hull-White 三元樹的三種利率走勢.....	13
圖(2.4.2) Hull-White三元利率樹.....	14
圖(2.4.3) 計算多元樹的最大最小可能利率.....	15
圖(2.4.4) 調整多元樹的最大最小可能利率.....	16
圖(2.4.5) 第一階段平行樹.....	16
圖(2.4.6) 求算節點(i,j)的分枝機率.....	17
圖(3.1.1) 創新方法建構多元利率樹.....	21
圖(3.2.1) 兩年後執行一年期零息債券的Bond option.....	22
圖(4.2.1) 波動度 σ 對價格的影響.....	26
圖(4.2.2) 利率回歸速度a對價格的影響.....	27
圖(4.2.3) 樹枝數目對bond option價格的影響.....	28
圖(4.2.4) Coupon對bond option價格的影響.....	28
圖(4.2.5) 利率上限變動對三個月Cap價格的影響.....	29

表目錄

表(3.1.1) H-W三元樹第一期調整 ΔR 對 α 以及機率的影響.....	19
表(4.1.1) 自2008/4/1起的遠期利率.	23
表(4.1.2) 自2008/4/1起的零息利率.....	24
表(4.1.3) 十年期上限買權之波動度.....	25



第一章 緒論

第一節 研究背景與動機

利率結構型商品近年來蓬勃發展，任何商品推出之後的成敗，主要關鍵在於其價格的訂定是否合理，而評價方式是否夠精確會影響評價的結果。市面上利率衍生性商品評價方法眾多，大致可區分成下列幾類：封閉公式解、樹狀結構(Lattice methods)、PDE(Partial differential equation)等數值方法及蒙地卡羅法。封閉公式通常在標的物的隨機結構模型不複雜，且被評價的衍生性商品合約不複雜才會存在。當處理具有美式條款(例如提前履約和贖回)的商品時，不易使用封閉公式解或蒙地卡羅法處理。使用樹狀結構法最大好處為可以很容易處理提前贖回的問題，但是採用的利率期間結構如果太複雜，例如HJM或是BGM 這些非馬可夫過程(Non-Markov process)的利率模型，則會創造出節點無法合併(Non-recombining)的利率樹，會造成利率樹的規模大到無法使用電腦處理；此外，樹狀結構法存在兩種影響評價準確性的誤差：分配誤差(distribution error, 見Figlewski and Gao (1999))以及非線性誤差(nonlinearity error, 見Figlewski and Gao (1999))；因此我們選擇已經發展出利率樹的利率期間結構，例如Hull-White利率模型，配合Andricopoulos et al.(2003)的求面積法(Quadrature methods)來減少分配誤差，以及本文將介紹一個創新的數值方法來解決非線性誤差，處理Bond option 以及Cap的評價。

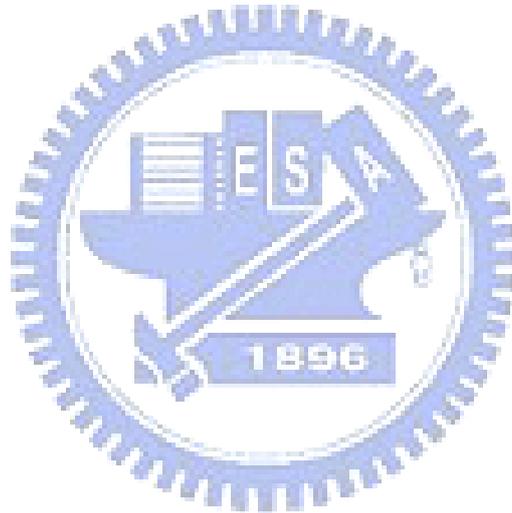
第二節 研究流程與論文架構

第二章 文獻探討: 簡介利率模型之演進、探討與本文相關的模型、樹狀結構法之評價誤差以及造樹方法。

第三章 研究方法: 介紹一種創新的數值方法結合Hull-White利率模型以及求面積法，解決非線性誤差的評價。

第四章 實證分析與敏感度分析：針對bond option以及Cap進行實證分析，並且探討利率模型對價格的影響。

第五章 結論與建議：對本文研究結果提出結論與建議。



第二章 文獻探討

本章將介紹利率模型之演進，Black's模型介紹和Cap評價、樹狀結構法存在的評價誤差以及求面積法等造樹方法。

第一節 利率模型之演進

利率模型之發展，可視為學者在尋找「如何能精準描述現行利率期間結構，使利率商品的模型理論價值能與市場價格一致」的演進過程，而利率模型一般可分為均衡模型（Equilibrium Models）與無套利模型（No Arbitrage Models）。

（一）均衡模型

當資本市場之供給與需求達到均衡時，能決定唯一的利率解，這就是均衡模型所隱含的經濟意義，此時利率期間結構模型為內生的，也就是利率是由模型產出的，但由於參數的自由度不夠，不能完全符合市場的利率期間結構，以致於會產生評價之理論價值與市場價格不符的問題。典型之均衡模型如下：

1. Vasicek (1977)

Vasicek 為短期利率模型的一種，為最早假設短期利率具有均數復歸（Mean Reversion）特性的模型，其假設在風險中立下，短期利率 r 服從Ornstein-Uhlenbeck（O-U）隨機過程：

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.1.1)$$

其中， a 為利率均數復歸的速度， b 為短期利率的長期平均水準， σ 為短期利率的波動度， dW 為布朗運動的變化量、 $dW \sim N(0, dt)$ 。

在此設定之下只要利率偏離長期平均水準 b 時，便會以 a 之速度收斂回復至 b ，但由於O-U隨機過程為常態分配，故短期利率可能會出現負值，這與真實情

況並不相符。

2. CIR (1985)

Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 模型改進Vasicek 模型中短期利率為負的缺點，將擴散項 (Diffusion) 的係數重新定為 $\sigma\sqrt{r(t)}$ ，因此短期利率波動度會隨利率上升而上升，其動態過程如下：

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2.1.2)$$

CIR 模型為在滿足效用極大化下所推導出的，利率的動態過程及風險的市場價格都是內生決定，故CIR 模型會滿足一般均衡條件，但內生模型難與現行利率期間結構一致，又因其短型利率服從非中央卡方分配，因此並不利於模型參數的校準。

(二) 無套利模型

為了克服利率模型與市場利率期間結構並不一致的缺點，在無套利模型中，將目前市場利率期間結構設為輸入值，且平移項(Drift term)設定為時間的函數，使利率模型完全符合市場真實情況，讓期初零息利率曲線會影響模型中未來短期利率的平均路線。大致包含以下幾種模型：

1. Ho and Lee (1986)

Ho and Lee 是最早提出的無套利模型，其假設短期利率動態如下：

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t) \quad (2.1.3)$$

其中， σ 為固定常數， $\theta(t)$ 為時間 t 之函數。

Ho and Lee 模型雖然改善了與市場利率期間結構不一致的問題，但此模型並不具備均數復歸特性，即不論利率多高或多低，利率的平均走勢都相同，且利率可能會為負，與真實情況並不符。

2. Hull and White (1990)

Hull and White 模型為 Vasicek 模型的延伸，此模型將漂移項的參數設定為隨時間變動，以便能夠配適市場的期初利率期間結構，並且保留了均數復歸的特性如下：

$$dr(t) = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW(t)$$

或是

$$dr(t) = a\left(\frac{\theta(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dW(t) \quad (2.1.4)$$

其中 a ， σ 為常數， σ 為短期利率的波動度， $\theta(t)$ 為使模型符合期初期間結構的時間函數。此模型可視為 Vasicek 模型加上隨時間變動的利率回歸水準 $\frac{\theta(t)}{a}$ 。在時間 t ，短期利率會以 a 的速率回復到 $\frac{\theta(t)}{a}$ 的利率水準， $\theta(t)$ 可由期初期間結構推出

$$\theta(t) = f_t(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (2.1.5)$$

其中 $f(0, t)$ 為在時間零觀察到，於時間 t 到期的瞬間遠期利率，下標 t 表對 t 做偏微分。最後一項通常非常小，如果將之忽略，這個式子隱含利率 r 在時間的 t 的平移項為 $f_t(0, t) + a(f(0, t) - r)$ ，因此利率 r 的平均變動會遵循期初瞬間遠期利率曲線的斜率。

評價零息債券歐式選擇權

利用 Hull-White 模型評價零息債券歐式選擇權，考慮一個以本金 L ，在時間 S 到期的零息債券為標的物的歐式賣權，且賣權的到期日為時間 T ，其中時間 $0 < T < S$ 。此賣權在時間零的價值為

$$LP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, S)N(-h) \quad (2.1.6)$$

其中

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} \left[1 - e^{-a(s-T)} \right] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0,s)}{P(0,T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

K 為歐式賣權的執行價格，P(0,T) 為在時間 T 時支付 \$1 的零息債券於現在的價值，N(.) 為常態分佈的累積分配函數。

3. HJM (1992)

遠期利率模型中最具代表性的就是由 Heath、Jarrow、Merton (HJM) 所提出的以瞬間遠期利率為基礎之多因子模型，其模型表達如下：

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \quad (2.1.7)$$

其中， $f(t,T)$ 為瞬間遠期利率， $\alpha(t,T)$ 為 drift 項， $\sigma(t,T)$ 為 diffusion 項 (為多維度向量)， $W(t)$ 為多維度的布朗運動。

此模型之漂移項與波動度皆為時間的函數，較符合市場之利率與波動度期間結構，但由於瞬間遠期利率無法從市場上直接觀察到，且其過程為非馬可夫過程 (Non-Markovian Process)，故增添了校準的困難。

4. BGM (1997)

由於 HJM 模型下所描述的瞬間遠期利率，無法在市場上直接觀察，因此有另外一群學者在 HJM 模型基礎上，發展出可以直接使用市場上間斷簡單指標利率的市場模型 (LIBOR Market Model)。

這類的研究，根據描述的利率不同，一般可分成兩派：一派為 Brace、Gatarek、Musielá 的遠期 LIBOR 利率，稱為 BGM 模型，或稱為 LIBOR 市場模型 (LIBOR market model, LMM)；另一派為 Jamshidian 的遠期交換利率，稱為交換市場模型 (Swap market model, SMM)。

第二節 Black's模型介紹和Cap評價

(一) Black's模型

Black將Black-Scholes模型延伸至利率領域。

考慮以價值V的變數為標的資產之歐式選擇權，定義

T：選擇權的到期期間

F：到期日為T的契約中V的遠期價格

F_0 ：F在時間零的價值

K：選擇權的執行價格

$P(t,T)$ ：在時間T支付\$1的零息債券於時間t的價格

V_t ：V在時間T的價值

σ ：F的波動度

假設 $\ln V_t$ 為服從期望值為 F_0 ，變異數為 $\sigma^2 T$ 的常態分配，則買權在時間零的價值為

$$c = P(0,T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (2.2.1)$$

賣權在時間零的價值為

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (2.2.2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[F_0 / K] + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln[F_0 / K] - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

(二) 利率上限(Interest rate caps)

利率上限是一種金融機構經常於店頭市場發行的利率選擇權，被設計用來避免利率不斷上升的損失。利率上限是由一組履約價格相同，但到期日不同的上限買權(Caplets)所組成，即一個發行期間為T的利率上限，其本金為L，上限水準

K_{cap} ，重設日期為 $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} = T$ ，設 r_k 為介於 t_k 到 t_{k+1} 之間，在時間 t_k 觀察到的利率水準 ($k=1, 2, \dots, n$)，可分解為 n 個上限買權，對應的報酬支付時間為 $t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}$ 。

上限買權對應於時間 t_k 觀察到的利率 r_k ，會於時間 t_{k+1} 支付如下的報酬

$$L\delta_k \max(r_k - k_{cap}, 0) \quad (2.2.3)$$

其中 $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ ，若假設 r_k 服從指數常態分配，且其波動度為 σ_k ，則上式可藉由 Black's 模型得到上限買權於時間零的價值為

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - K_{cap} N(d_2)] \quad (2.2.4)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[F_k / K_{cap}] + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_k / K_{cap}] - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

F_k 為 t_k 到 t_{k+1} 的遠期利率， $P(0, t_{k+1})$ 為在時間 t_{k+1} 時支付 \$1 的零息債券於現在的價值， $N(\cdot)$ 為常態分佈的累積分配函數。

同時，也可將利率上限視為一組零息債券賣權組成的投資組合，推導如下，(2.2.3) 的報酬會於 t_{k+1} 支付，在時間 t_k 會等值於

$$\frac{L\delta_k}{1 + r_k \delta_k} \max(r_k - k_{cap}, 0)$$

上式可改寫為

$$\begin{aligned}
\frac{L\delta_k}{1+r_k\delta_k}\max(r_k-K_{\text{cap}},0) &= L\max\left(\frac{\delta_k(r_k-K_{\text{cap}})}{1+r_k\delta_k},0\right) \\
&= L\max\left(\frac{1+\delta_k r_k-\delta_k K_{\text{cap}}-1}{1+r_k\delta_k},0\right) \\
&= L\max\left(\frac{(1+\delta_k r_k)-(\delta_k K_{\text{cap}}+1)}{1+r_k\delta_k},0\right) \\
&= L\max\left(1-\frac{(1+\delta_k K_{\text{cap}})}{1+r_k\delta_k},0\right) \\
&= \max\left(L-\frac{L(1+\delta_k K_{\text{cap}})}{1+r_k\delta_k},0\right)
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

即代表一個到期日為 t_k 的賣權，執行價格 L ，標的資產為一張票面價格為

$L(1+\delta_k K_{\text{cap}})$ ，到期日為 t_{k+1} 的零息債券。因此利率上限可被視為一組以零息債券為標的的歐式賣權投資組合。

如前所述，利率上限可以表示為一組上限買權的投資組合或是一組零息債券選擇權的投資組合，即利用(2.1.6)(在H-W模型下)和(2.2.4)(在Black模型下)式子評價。因此可藉由市場利率上限的報價(用Black模型)來校正Hull-White模型的參數 a 、 σ 。

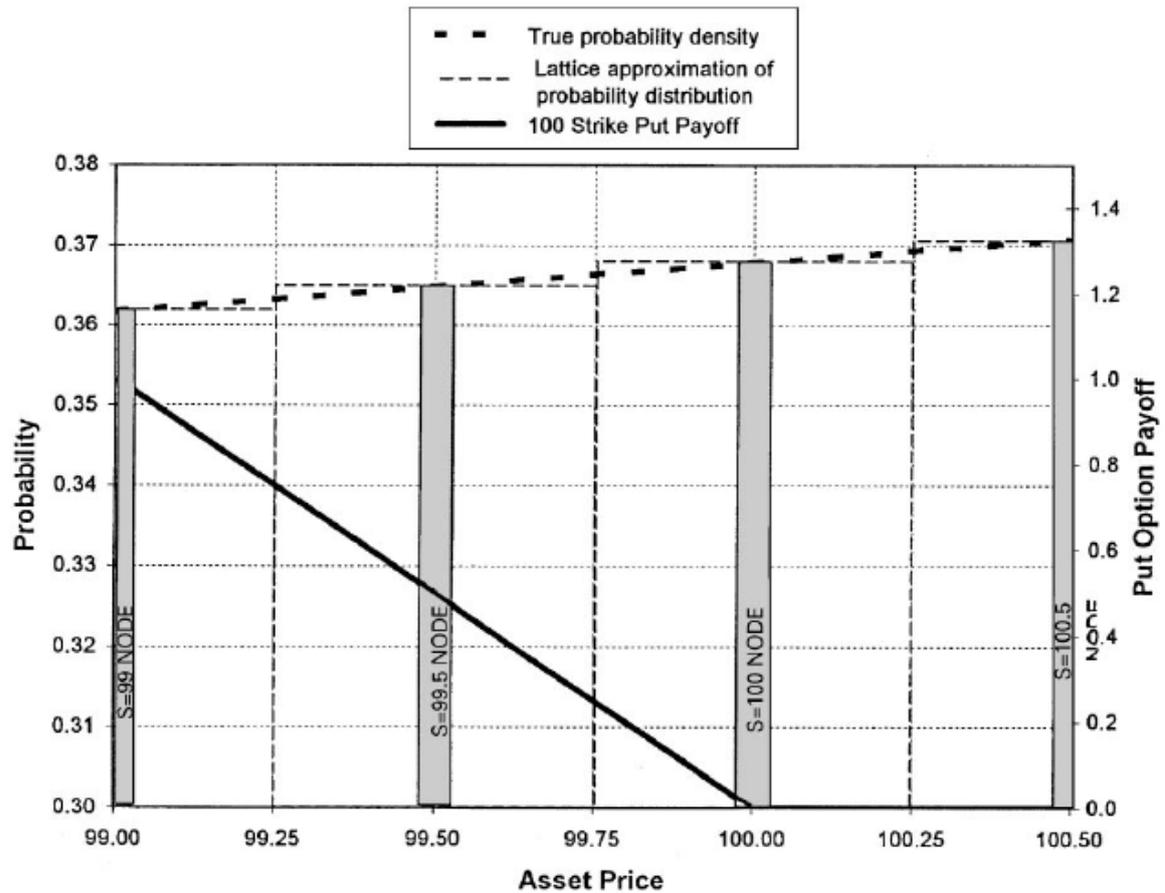
第三節 樹狀結構法之評價誤差

樹狀結構法包含的兩種誤差：分配性誤差(distribution error)和非線性誤差(Non-linearity Error)。由於二元樹或三元樹等數值方法，皆是以離散型分配去近似連續型分配，而產生分配誤差，當樹的期數切得不夠多時(Δt 不夠小時)，會因為分配誤差太大而導致評價結果不準確。而非線性誤差存在於兩種情形，由於選擇權價值於到期日是非線性，離散的樹狀格無法完整個描述出來，故選擇權到期日在於履約價格的附近即會產生非線性誤差；另一個非線性誤差的情形，發生在障礙選擇權的障礙限制條件附近。以下由圖(2.3.1)以及圖(2.3.2)來說明此兩種誤

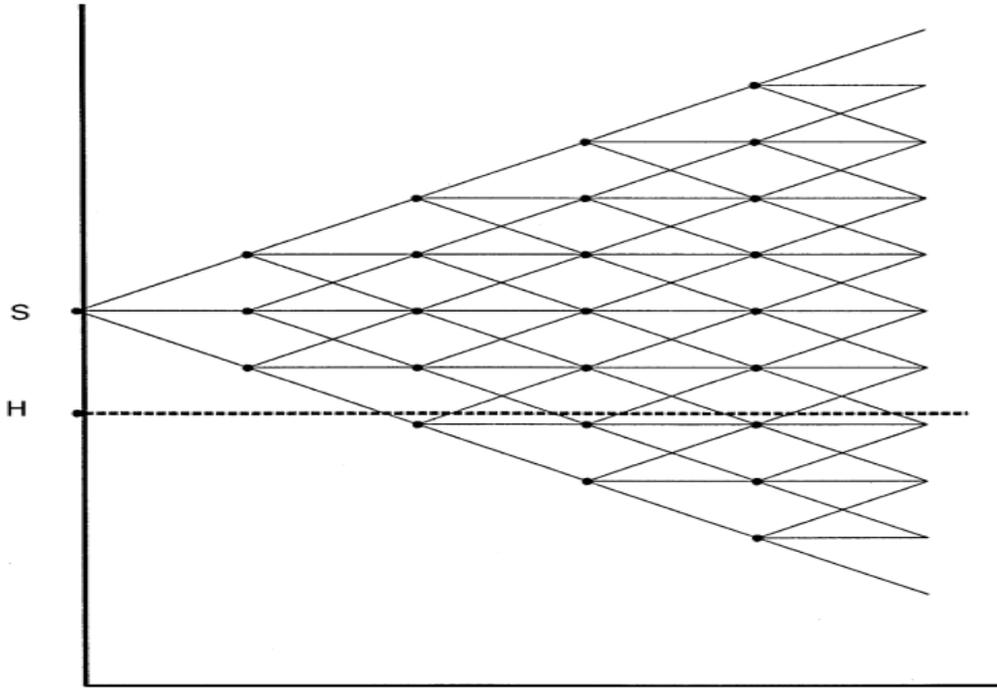
差。

以三元樹模型來評價一個履約價格為100，期初價格100的一年期歐式賣權，利率10%，波動度25%，圖(2.3.1)為到期日各節點值與所對應機率分佈之示意圖。粗實線為此歐式賣權期末報酬，圖中擷取三元樹狀圖中的四個期末節點以四個灰色長方條狀表示，對應股價分別為99、99.5、100以及100.5；而細虛線所圍成的長方形面積代表樹狀結構法對應各個價格之機率密度，以期末股價為99.5的節點來看，前一期到此節點的機率即為一個長方形面積其寬度為99.25到99.75，長度同99.5的灰色長方條狀的長度；粗虛線為此價格區間lognormal的分配密度。以區間(99.25,99.75]探討機率差異，真實機率密度(粗虛線)並非固定常數，和樹狀結構法的機率密度(細虛線)相比較，左半區間的真實機率密度稍微小於樹狀結構法的機率密度，右半區間的真實機率密度稍微大於樹狀結構法的機率密度，很明顯地，細虛線和粗虛線之間的差距即為分配性誤差所在，此誤差會導致樹狀結構法評價選擇權報酬不準確。

接著再以股價99.5節點的區間(99.25,99.75]考慮非線性誤差問題，當股價為99.25時選擇權報酬為0.75，股價99.75時選擇權報酬為0.25，中點股價9.5時選擇權價格為0.5等於此區間平均報酬，很明顯地此區間選擇權報酬是線性的，並沒有非線性誤差的存在；但若考慮履約價格100節點的股價區間(99.75,100.25]，當股價為99.75時選擇權報酬為0.25，股價100.25時選擇權報酬為0，中點股價100時選擇權價格為0並不等於此區間選擇權的平均報酬，此區間選擇權報酬並不是線性的，故非線性誤差存在於履約價格附近，即股價區間(99.75,100.25]內。另一種非線性誤差發生情形見圖(2.3.2)，對於一個障礙選擇權，其障礙條件H，並沒有和節點重合，導致在評價上在判斷出局或入局的條件時會產生非線性誤差，可見 Stephen Figlewski, Bin Gao, 1999, “The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing”。



圖(2.3.1) 此段價格區間內存在分配性誤差以及非線性誤差。粗實線為一個履約價為100，利率10%，波動度0.25的一年期歐式賣權期末報酬；圖中擷取三元樹狀圖中的四個期末節點以四個灰色長方條狀表示，對應股價分別為99、99.5、100以及100.5；粗虛線為此價格區間lognormal的分配密度；細虛線所圍成的長方形面積代表各個價格之機率密度。細虛線和粗虛線之間的差距即為分配性誤差，而在股價為100的節點附近為非線性誤差所在。



圖(2.3.2) 障礙選擇權三元樹。H為障礙條件，S為資產價格，由於障礙條件不一定會落於樹狀節點上，故存在非線性誤差。

第四節 造樹方法

(一) Hull-White三元樹

Hull-White(1994)提出的兩階段法建立三元樹，將連續型隨機過程的Hull-White 短利模型改用離散時間型(discrete time)的隨機過程表達，意即將原模型模擬的瞬間短期利率 r 改成模擬距到期日為 Δt 的零息利率 R ，其中 Δt 表利率樹每期時間間隔， R 的隨機過程可表示如下：

$$dR=(\theta(t)-aR)dt+\sigma dz$$

以下分別介紹這兩階段的造樹過程。

第一階段

第一階段為建立期初值為零， $\theta(t)$ 為零，且對稱於 $R^*=0$ ，服從如下 R^* 隨機過程的三元樹：

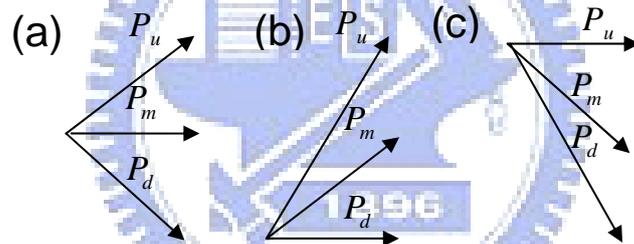
$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

$R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma^2\Delta t$ 的常態分配，亦即

$$E(\Delta R^*) = E(R^*(t+\Delta t) - R^*(t)) = -aR^*(t)\Delta t$$

$$\text{Var}(\Delta R^*) = \text{Var}(R^*(t+\Delta t) - R^*(t)) = \sigma^2\Delta t$$

定義 $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ 為利率樹上的利率間距，且任一節點 (i,j) 代表時間為 $i\Delta t$ ，利率 R^* 為 $j\Delta R^*$ 的節點，利率在下一期往上走的機率為 P_u ，持平的機率為 P_m ，往下走的機率為 P_d 。在第一階段下，當期的利率變化到下一期，會有三種走勢，當變數 j 夠大時必須用圖(2.4.1)(c)走勢，相對地，當 j 夠小時則採圖(2.4.1)(b)的走勢，其餘狀況利率走勢採用圖(2.4.1)(a)，這是因為利率具有回歸平均值的特性，節點的走勢會隨著當時利率高低而改變，並且利用一階與二階常態分配的動差函數與機率總和等於一，這三個方程式求得 P_u 、 P_m 、 P_d 機率值。



圖(2.4.1) Hull-White 三元樹的三種利率走勢

第二階段

第一階段建構的利率樹和當時市場所觀察到的利率期間結構未必相同，所以第二階段要將 R^* 上的節點能完全符合期初利率期間結構，把 R^* 三元樹轉為 R 三元樹，定義 α_i 為 $\alpha(i\Delta t)$ ，是 R 在 R 三元樹中 $i\Delta t$ 時的利率減去對應的 R^* 三元樹中 R^* 在 $i\Delta t$ 時的利率，其中 α_0 為現在到 Δt 時間的即期利率 (spot rate)。 $Q_{i,j}$ 為一個在利率走到節點 (i,j) 時支付 \$1，否則報酬為零的商品之現值。 α_i 與 $Q_{i,j}$ 可以在期初期間結構完全吻合的條件下以前推法 (Forward induction) 求出，得到下列公式。

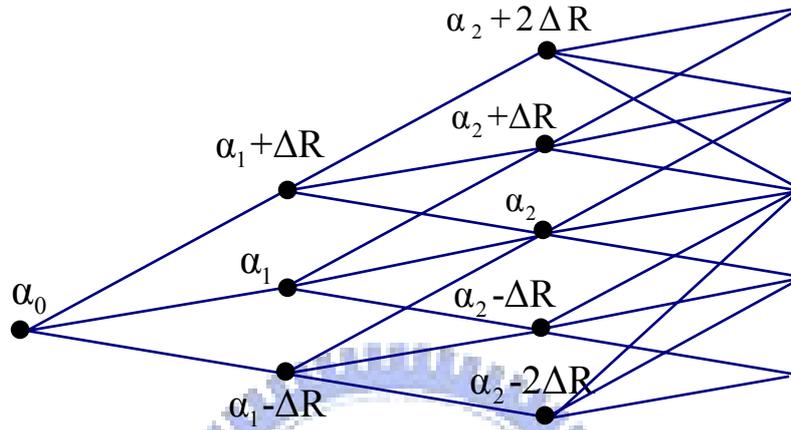
$$\alpha_i = \frac{\ln \sum_{j=n_i}^{n_i} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln B_{i+1}}{\Delta t} \quad (2.4.1)$$

其中 B_{i+1} 為在 $(i+1)\Delta t$ 到期的零息債券價格， n_i 為三元樹在 $i\Delta t$ 時，變數 j 的最大

值。一旦 α_i 決定了， $Q_{i+1,j}$ 由下列公式算出。

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_i + k\Delta R)\Delta t] \quad (2.4.2)$$

其中 $q(k,j)$ 為節點 (i,k) 走到節點 $(i+1,j)$ 的機率。算出每一期的 α_i 後，搭配由市場利率上限報價校正出的 a 、 σ 常數參數，便可得到與市場一致的利率樹如圖(2.4.2)。



圖(2.4.2) Hull-White 三元利率樹

(二) 應用求面積法(Quadrature methods) 建構Hull-White多元樹

為了處理樹狀結構評價造成的分配性誤差，我們採用Andricopoulos et al.(2003)介紹的求面積法(quadrature method) 將三元樹轉換成多元樹，提高樹的每個節點分支的個數，讓樹所模擬的離散型分配更貼近連續型分配，以解決分配誤差的問題。

在 Hull-White 建構三元樹的第一階段中， $R^*(t+\Delta t)-R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma^2\Delta t$ 的常態分配，是以三元樹近似此常態分配，也就是經過一單位時間 Δt ， ΔR^* 只有三種可能值，但利率經過 Δt 後的可能走勢不該只有三種，當 Δt 太大時，分配誤差將會顯著地影響評價的準確度。評價雪球型利率連動債券分為兩階段：第一階段是考慮在 Hull-White 第一階段中加入求面積法的概念，讓三元樹能擴展至多元樹；第二階段為將多元樹調整成 Hull-White 第二階段

的利率樹，其介紹如下。

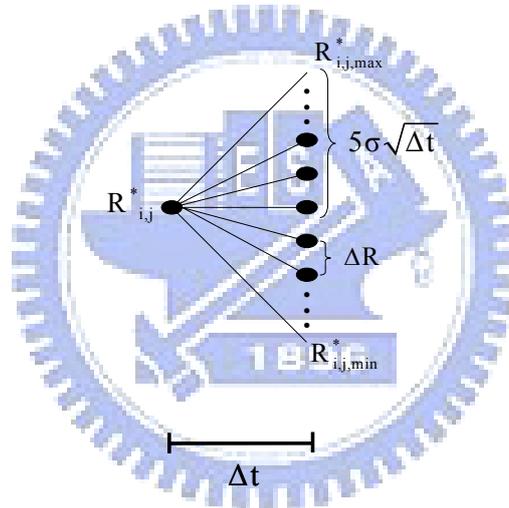
第一階段

一樣建構對稱於 $R^*=0$ ，服從 $dR^*=-aR^*dt+\sigma dz$ 隨機過程的平行利率樹，定義 R_{ij}^* 為節點 (i,j) 的短期利率， $R_{ij,max}^*$ 為節點 (i,j) 至 $(i+1)\Delta t$ 最大的可能利率， $R_{ij,min}^*$ 為節點 (i,j) 至 $(i+1)\Delta t$ 最小的可能利率，亦即

$$R_{ij,max}^* = R_{ij}^* + q^* = R_{ij}^* + 5\sigma\sqrt{\Delta t} \quad , \quad R_{ij,min}^* = R_{ij}^* - q^* = R_{ij}^* - 5\sigma\sqrt{\Delta t}$$

定義 $\Delta R = \frac{5\sigma\sqrt{\Delta t}}{(b-1)/2}$ 為利率的間隔， b 為樹枝個數，將三元樹延伸至多元樹，如圖(2.4.3)

所示



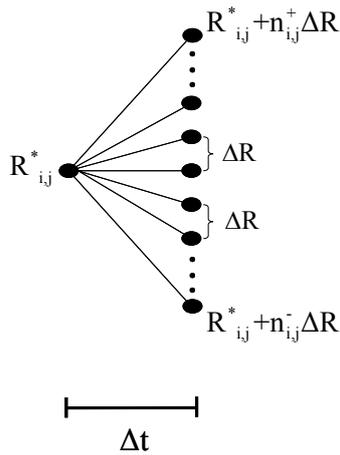
圖(2.4.3) 計算多元樹的最大最小可能利率

R_{ij}^* 經過 Δt 後，最大的可能利率 $R_{ij,max}^*$ 及最小的可能利率 $R_{ij,min}^*$

定義 n_{ij}^+ 為節點 (i,j) 至 $(i+1)\Delta t$ 最大可能利率距離 R_{ij}^* 的步數，同理， n_{ij}^- 為節點 (i,j) 至 $(i+1)\Delta t$ 最小可能利率距離 R_{ij}^* 的步數，如圖(2.4.4)。 n_{ij}^+ ， n_{ij}^- 公式如下

$$n_{ij}^+ = \frac{R_{ij,max}^* - R_{ij}^*}{\Delta R}$$

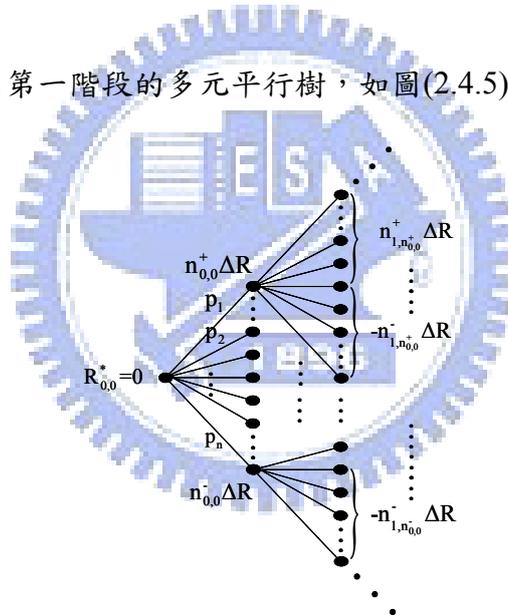
$$n_{ij}^- = \frac{R_{ij,min}^* - R_{ij}^*}{\Delta R}$$



圖(2.4.4) 調整多元樹的最大最小可能利率

$R_{i,j,\max}^*$ 調整為 $R_{ij}^* + n_{ij}^+ \Delta R$, $R_{i,j,\min}^*$ 調整為 $R_{ij}^* + n_{ij}^- \Delta R$

如此我們可以建造出第一階段的多元平行樹，如圖(2.4.5)

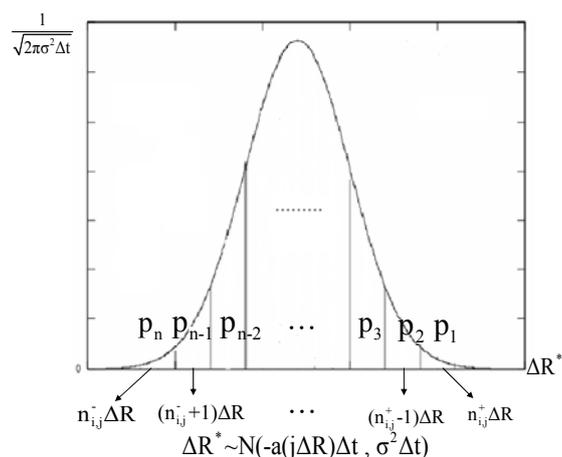


圖(2.4.5) 第一階段平行樹

假設每一節點會有 n 條分枝， $p_1, p_2 \dots p_n$ 為其對應的機率，因為 $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma^2 \Delta t$ 的常態分配，我們利用辛普森積分法求出每個節點對應的 $p_1 \cdot p_2 \dots p_n$ ，即

$$p_1 = \int_{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ + 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*) \quad p_2 = \int_{(n_{ij}^+ - 1.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*) \quad \dots \quad p_n = \int_{(n_{ij}^- - 0.5)\Delta R}^{(n_{ij}^- + 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*)$$

如圖(2.4.6)。



圖(2.4.6) 求算節點(i,j)的分枝機率

利用辛普森積分法求算節點(i,j)的 $p_1, p_2 \dots p_n$

越高的節點 node(i,j)會有越大的變數 j，所求得的 p_1 會越小，即再往上的機率越小，相反地，越低的節點 node(i,j)會有越小的變數 j，再往下的機率越小，恰能反映出 Hull-White 利率模型回歸平均值的特性。此數值方法和 moments matching tree 有關，可見 Tian-Shyr Dai, Yuh-Dauh Lyuu, 2006, "The Bino-trinomial Tree: A simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing"。

第二階段

同 Hull-White 三元樹的第二階段，調整每一期往上平移的利率 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，建構與期初利率期間結構相同的利率樹。

第三章 研究方法

第一節 創新數值方法

本章介紹一個創新的數值方法來建構更為精確的多元利率樹，除了運用前面章節所用的Hull-White結合求面積法建構多元樹，以減少了樹狀結構法所造成的分配性誤差，並可調整多元利率樹的結構以減少非線性誤差。而主要差異，為了使樹狀圖節點和邊界條件(或是所想要fit的點)重合，所調整的參數為每期樹枝間隔高度 ΔR ，亦即每期利率間隔高度不盡相同，不同於以往的樹狀結構法其利率間隔高度 ΔR 皆相同。分為三個步驟：首先建構隨著期間結構路徑的多元利率樹，以上一個章節求面積法建構Hull-White多元樹的兩階段造樹方法決定出每期平移項 α ，再來調整利率間隔高度，最後求各個節點樹枝上的機率，以下詳細說明建構此精確多元利率樹的方法。

(一) 建構隨著期間結構路徑的多元利率樹

前面章節所述求面積法建構Hull-White多元樹的造樹方法，先設定好利率間隔高度 ΔR ，再推得每期平移項 α ；而創新造樹方法為在得知每期平移項 α 之後，再根據每期平移項 α 和給定限制條件的間距來決定如何調整每期利率間隔高度 ΔR ，但得知每期平移項 α 又是根據前述方法必須先給定利率間隔高度 ΔR ，如此產生兩難的問題。而我們發現了，調整利率間隔高度 ΔR 幾乎不會影響 α ，主要影響機率的變動，如表(3.1.1)為H-W三元樹第一期調整 ΔR 對 α 以及機率的影響，模型參數 $a=0.1$ ， $\sigma=0.01$ ， $\Delta t=1$ ，第一年到期零息利率為0.03824，第二年到期零息利率為0.04512。發現調整利率間隔高度 ΔR_1 減少0.001則 α_1 減少 10^{-10} ，對於 α_1 的影響幾乎為零，故調整每期利率間隔高度是可行的，如此便解決了此兩難問題。

表(3.1.1) 為H-W三元樹第一期調整 ΔR 對 α 以及機率的影響，模型參數

$a=0.1$ ， $\sigma=0.01$ ， $\Delta t=1$ ，第一、二年到期零息利率分別為0.03824，0.04512。

Delta R	0.017321	0.016321	0.015321	0.014321	0.013321	0.012321
Pu=Pd	0.166667	0.187717	0.213022	0.243811	0.281792	0.329392
pm	0.666667	0.624567	0.573957	0.512378	0.436416	0.341216
Alpha	0.05205	0.05205	0.05205	0.05205	0.05205	0.05205

此例子以公式來探討利率間隔高度 ΔR 對於每期平移項 α 的影響，假設第一、二年到期零息利率分別為 Z_1 、 Z_2 ，以 P_1 、 P_2 、 P_3 分別代表三元樹枝上的機率，首先為了使 α_0 符合市場上期間結構，一年期零息債券於期初的價格為 $e^{-\alpha_0\Delta t}$ 必須和市場一年期零息利率折現值 $e^{-Z_1\Delta t}$ 相等，亦即 $e^{-\alpha_0\Delta t} = e^{-Z_1\Delta t}$ ，求得 $\alpha_0 = Z_1$ ，同樣概念求 α_1 ，下式等號必須成立：

$$(P_1 \times e^{-(\alpha_1 + \Delta R)\Delta t} + P_2 \times e^{-\alpha_1\Delta t} + P_3 \times e^{-(\alpha_1 - \Delta R)\Delta t}) \times e^{-Z_1\Delta t} = e^{-2 \times Z_2\Delta t} \quad (3.1.1)$$

(3.1.1)式推導如下，

$$e^{-\alpha_1\Delta t} \times (P_1 \times e^{-\Delta R\Delta t} + P_2 + P_3 \times e^{\Delta R\Delta t}) = e^{-2 \times Z_2\Delta t + Z_1\Delta t}$$

$$e^{-\alpha_1\Delta t} = \frac{e^{-2 \times Z_2\Delta t + Z_1\Delta t}}{(P_1 \times e^{-\Delta R\Delta t} + P_2 + P_3 \times e^{\Delta R\Delta t})}$$

$$\alpha_1\Delta t = -\ln \left[\frac{e^{-2 \times Z_2\Delta t + Z_1\Delta t}}{(P_1 \times e^{-\Delta R\Delta t} + P_2 + P_3 \times e^{\Delta R\Delta t})} \right]$$

$$\alpha_1 = 2 \times Z_2 - Z_1 + \frac{1}{\Delta t} \ln [P_1 \times e^{-\Delta R\Delta t} + P_2 + P_3 \times e^{\Delta R\Delta t}] \quad (3.1.2)$$

若(3.1.2)式以泰勒展開式 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 取代，則得式子(3.1.3)，

$$\alpha_1 = 2Z_2 - Z_1 + \frac{1}{\Delta t} \ln \left[P_1(1 - \Delta R\Delta t + \frac{1}{2}\Delta R^2\Delta t^2 + o(\Delta R^2)) + P_2 + P_3(1 + \Delta R\Delta t + \frac{1}{2}\Delta R^2\Delta t^2 + o(\Delta R^2)) \right] \quad (3.1.3)$$

由於此例子機率為對稱即 $P_1 = P_3$ ，且 $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ 代入(3.1.3)得下式(3.1.4)，

$$\alpha_1 = 2 \times Z_2 - Z_1 + \frac{1}{\Delta t} \ln \left[1 + P_1 \times \Delta R^2 \Delta t^2 + o(\Delta R^2) \right] \quad (3.1.4)$$

式子(3.1.4)以泰勒展開式 $\ln x = (x-1) + o(x)$ 展開得

$$\alpha_1 = 2Z_2 - Z_1 + \frac{1}{\Delta t} \left[P_1 \Delta R^2 \Delta t^2 + o(\Delta R^2) \right] \quad (3.1.5)$$

由式子(3.1.5)可知，若 ΔR 變動0.001， ΔR^2 即變動0.000001，再乘以機率以及 Δt ，很明顯地 $P_1 \times \Delta R^2 \Delta t$ 值對於 α_1 的影響微乎其微，若樹枝數目增加又使得 ΔR 變小；以同樣方式推得第二期平移項

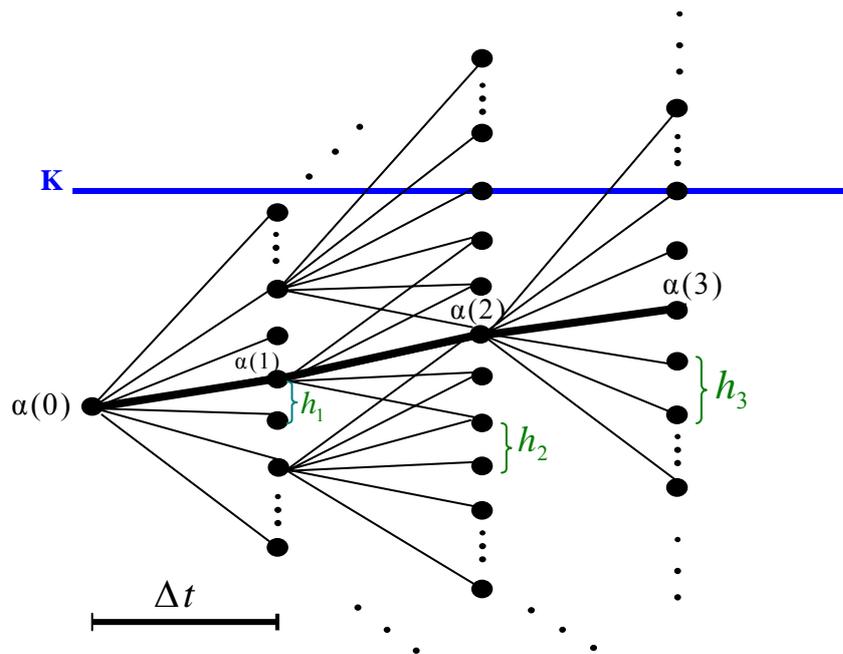
$$\alpha_2 = 3Z_3 - \alpha_1 + \frac{1}{\Delta t} \left[Q_{1,1} \Delta R^2 \Delta t^2 + e^{-Z_1 \Delta t} + o(\Delta R^2) \right]$$

同樣地，多元利率樹的間隔高度 ΔR 變動對於 α 的影響幾乎為零，故調整每期利率間隔高度確實是可行的。

(二) 給定限制條件調整每期利率間隔高度

設定一條限制條件為 K ，為了使得樹狀結構圖的節點與其重合，調整每期利率間隔高度。見圖(3.1.1)，假設一期間隔 $\Delta t = 1$ ，當 $t=1$ 時最大可能利率小於限制條件 K ，故第一期利率間隔高度 h_1 不變，即為前面章節求面積法所定義的利率間隔高度 ΔR ；第二期最大可能利率大於限制條件 K ，代表 K 必定會落在第二期的任兩個利率節點之間，故為了使節點和 K 重合，調整第二期利率間隔高度 h_2 ，為了使 K 和期間結構 α_2 之間的距離能夠整除以 h_2 ，定義 $h_2 = \frac{K - \alpha_2}{n_2}$ ，其中

$$n_2 = \left\lceil \frac{K - \alpha_2}{h_2} \right\rceil, \lceil \cdot \rceil \text{ 為上高斯；而之後 } h_3, h_4, \dots \text{ 依此類推。}$$



圖(3.1.1) 創新方法建構多元利率樹

(三) 求各節點機率

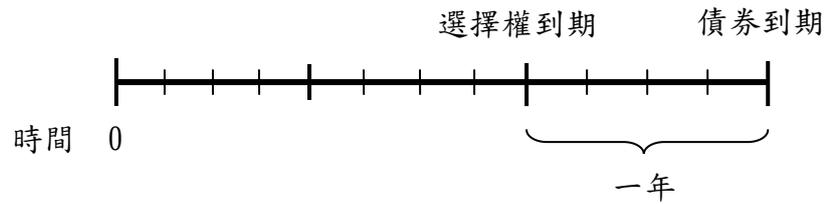
建構多元樹的機率部分，以求面積法常態分配面積求機率，即完成了此精確的多元利率樹。

第二節 Bond Option以及Cap的評價方法

(一) 評價Bond Option

考慮如圖(3.2.1)商品，於兩年後執行一年期零息債券的Bond option，期間間隔為三個月一期，履約價格為0.96元。評價方法為 $\Delta t=0.25$ ， $K=0.96$ ，先建構尚未調整利率間隔高度的 $n=12$ 期多元利率樹，再以此利率樹求算最後四期的債券價格，於第二年時間點求得履約價格所對應的利率為 $r_K=0.032258$ ，確定了限制利率條件後調整利率間隔高度，使得利率樹節點在 $n=8$ 時會和 r_K 重合，再由到期日即 $n=12$ 時的節點為1，以此調整過後的利率樹折現至一年期 $n=8$ 時，判斷債券價格減掉履約價格是否大於零，即 $n=8$ 時報酬為 $(\text{債券價格} - \text{履約價格})^+$ ，往前

折現至期初即可算出期初理論價格。



圖(3.2.1) 兩年後執行一年期零息債券的Bond option

(二) 評價Cap

考慮一個利率上限為2.77%的三年期Cap，給付頻率為每季。評價方法為 $\Delta t=0.25$ ， r_f =固定利率2.77%，展開 $n=12$ 的多元利率樹，每季報酬為 $(\text{市場利率}-\text{利率上限})^+$ ，由最後一期報酬往前一季折現再加上當季報酬，再往前一季折現等方式求出期初理論價格。



第四章 實證分析與敏感度分析

本章以bond option和Cap作為範例，根據第三章的創新數值方法，進行實證分析與敏感度分析，首先利用市場上限買權(Caplets)報價校正Hull-White模型參數(a 、 σ)，建構符合市場期初期間結構的利率樹，並求出這兩種商品的理論價格；最後說明bond option和cap價格與Hull-White模型參數以及零息利率曲線之間的關連性。

第一節 評價Bond Option以及Cap

(一)參數估計

(1)建構零息利率曲線

假設各年期遠期利率是線性的，根據bloomberg的台灣利率市場資料，利用各年期CP和IRS報價拔靴出forward rate如表(4.1.1)，再利用forward rate轉換成zero rate，而得到表(4.1.2)資料，為2008/4/1到2018/4/1的零息利率。

表(4.1.1) 自2008/4/1起的遠期利率

T_1	T_2	$F(0, T_1, T_2)$	T_1	T_2	$F(0, T_1, T_2)$
0.25	0.5	2.479124%	5	5.25	2.908516%
0.5	0.75	2.356410%	5.25	5.5	2.913268%
0.75	1	2.236364%	5.5	5.75	2.918019%
1	1.25	2.273871%	5.75	6	2.922667%
1.25	1.5	2.311790%	6	6.25	2.927366%
1.5	1.75	2.349709%	6.25	6.5	2.932117%
1.75	2	2.386804%	6.5	6.75	2.936869%
2	2.25	2.411250%	6.75	7	2.941517%
2.25	2.5	2.435964%	7	7.25	2.988225%

2.5	2.75	2.460678%	7.25	7.5	3.035447%
2.75	3	2.484854%	7.5	7.75	3.082669%
3	3.25	2.503136%	7.75	8	3.129377%
3.25	3.5	2.521618%	8	8.25	3.176086%
3.5	3.75	2.540101%	8.25	8.5	3.223307%
3.75	4	2.558382%	8.5	8.75	3.270529%
4	4.25	2.644504%	8.75	9	3.316724%
4.25	4.5	2.731573%	9	9.25	3.363433%
4.5	4.75	2.818641%	9.25	9.5	3.410655%
4.75	5	2.903817%	9.5	9.75	3.457876%
			9.75	10	3.504072%

表(4.1.2) 自2008/4/1起的零息利率

期限 (年)	零息 利率	期限 (年)	零息 利率	期限 (年)	零息 利率	期限 (年)	零息 利率
0.25	2.2259%	2.75	2.3486%	5.25	2.4932%	7.75	2.6404%
0.5	2.3359%	3	2.3592%	5.5	2.5120%	8	2.6552%
0.75	2.3404%	3.25	2.3696%	5.75	2.5293%	8.25	2.6706%
1	2.3132%	3.5	2.3800%	6	2.5450%	8.5	2.6866%
1.25	2.3041%	3.75	2.3902%	6.25	2.5598%	8.75	2.7030%
1.5	2.3043%	4	2.4002%	6.5	2.5738%	9	2.7194%
1.75	2.3098%	4.25	2.4140%	6.75	2.5870%	9.25	2.7364%
2	2.3184%	4.5	2.4312%	7	2.5991%	9.5	2.7539%
2.25	2.3279%	4.75	2.4512%	7.25	2.6121%	9.75	2.7717%
2.5	2.3381%	5	2.4730%	7.5	2.6259%	10	2.7894%

(2)校正Hull-White模型參數

假設每年內四個Caplet的Vol都一樣，即第一年內每個Caplet的Vol等於第一年Cap的Vol報價，再來根據bloomberg的兩年Cap Vol報價，分別算出第二年之四個Caplet的Vol，之後依此類推。十年期的上限買權之波動度如表(4.1.3)。

表(4.1.3) 十年期上限買權之波動度

期限 (年)	Vol	期限 (年)	Vol	期限 (年)	Vol	期限 (年)	Vol
0.25	16.500000%	2.75	16.911219%	5.25	17.905804%	7.75	13.089643%
0.5	16.500000%	3	19.467777%	5.5	17.905804%	8	13.089643%
0.75	16.500000%	3.25	19.467777%	5.75	17.905804%	8.25	13.089643%
1	22.132775%	3.5	19.467777%	6	17.905804%	8.5	13.089643%
1.25	22.132775%	3.75	19.467777%	6.25	17.905804%	8.75	13.089643%
1.5	22.132775%	4	17.273261%	6.5	17.905804%	9	13.089643%
1.75	22.132775%	4.25	17.273261%	6.75	17.905804%	9.25	13.089643%
2	16.911219%	4.5	17.273261%	7	13.089643%	9.5	13.089643%
2.25	16.911219%	4.75	17.273261%	7.25	13.089643%	9.75	13.089643%
2.5	16.911219%	5	17.905804%	7.5	13.089643%		

以十年期的IRS當作履約價格為0.0277，因為利率上限的價格可由式子(2.1.6)或式子(2.2.4)求出，故將所有參數帶入此兩個式子來校正式子(2.1.6)中的利率回歸速度 a 、利率波動度 σ 。考慮能使兩者價格的平方差之和為最小的 a 和 σ ，使用Matlab的內建lsqnonlin，當 a 等於0.011072和 σ 等於0.0046369，得到最小SSE為4.7894e-007。故選擇(0.011072, 0.0046369)作為Hull-White模型的參數(a, σ)。

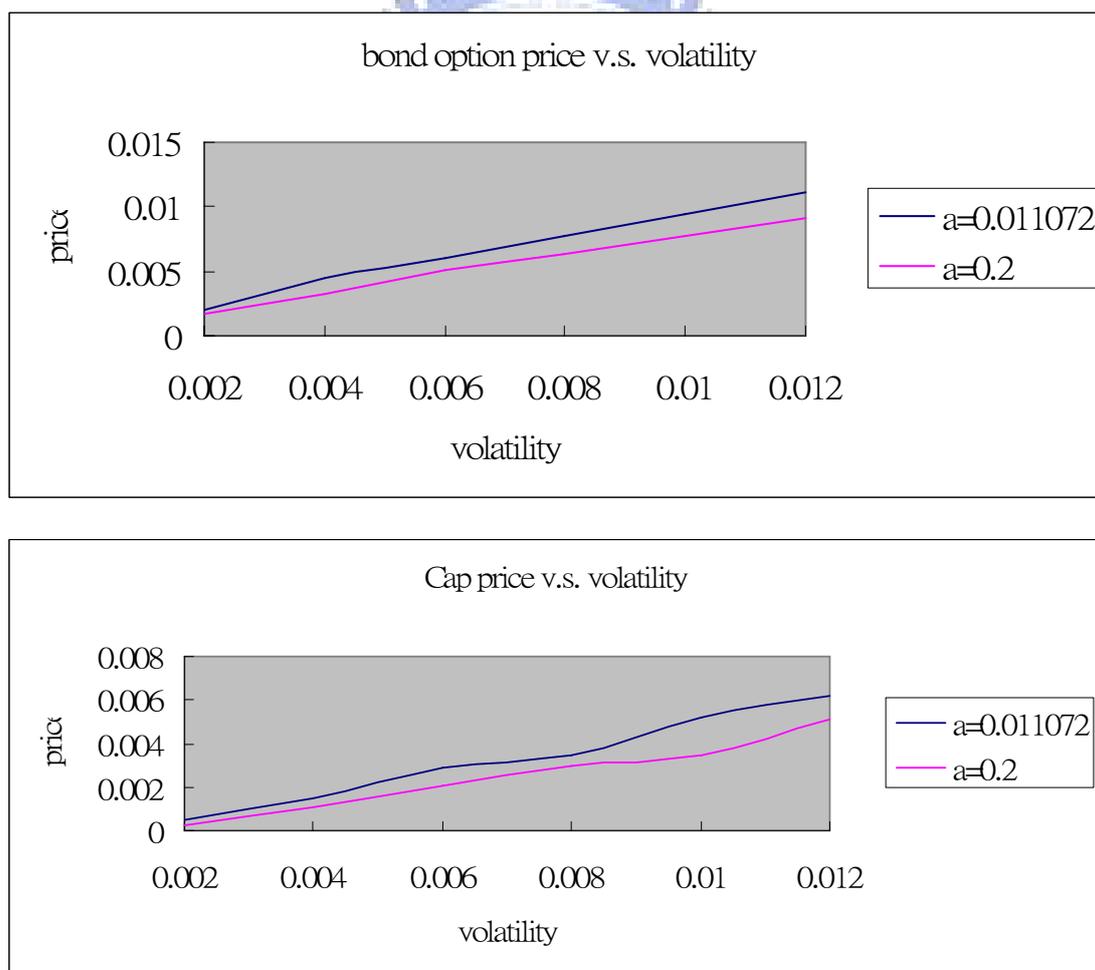
(二)實證結果

設面額為1元整，利用第三章的數值方法以及利用利率上限所估計出來的參數，展開七元利率樹，求得bond option價格為0.01488元，若有付息2%的bond option價格為0.033668元；Cap價格為0.0084489元。

第二節 敏感度分析

以下設面額為一元整，分析Hull-White利率模型的參數對評價商品價格的影響。

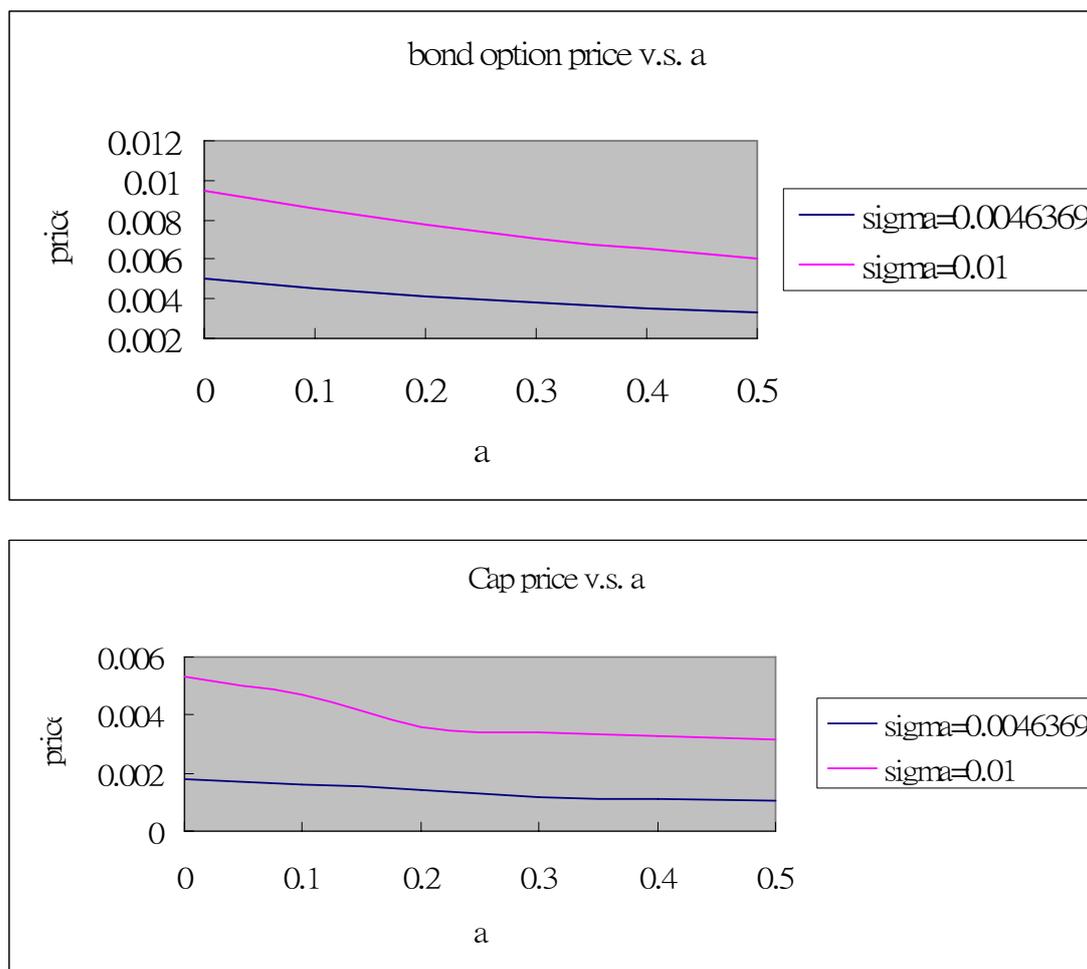
(一) 波動度 σ 對價格的影響



圖(4.2.1) 波動度 σ 對價格的影響

由圖(4.2.1)可知，當波動度 σ 越高，價格會越高。

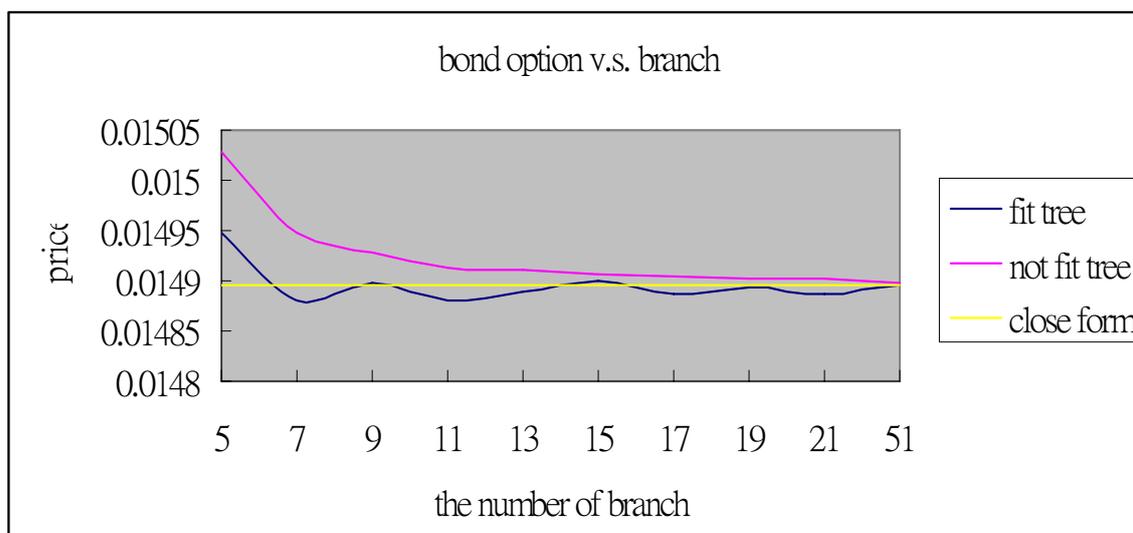
(二) 利率回歸速度 a 對價格的影響



圖(4.2.2) 利率回歸速度 a 對價格的影響

由圖(4.2.2)可知，對於bond option，利率回歸速度 a 越小時，bond option價值會越高。 a 越小，代表利率處高檔或低檔時，需要一段時間才會回歸到利率長期平均水準；利率跟債券價格呈反比，利率處於低檔時bond option價格上升，利率處於高檔時價格下降，但bond option價格有下限，並不會無限下降，故兩者效果相加，還是會造成價格與利率回歸速度呈負相關。

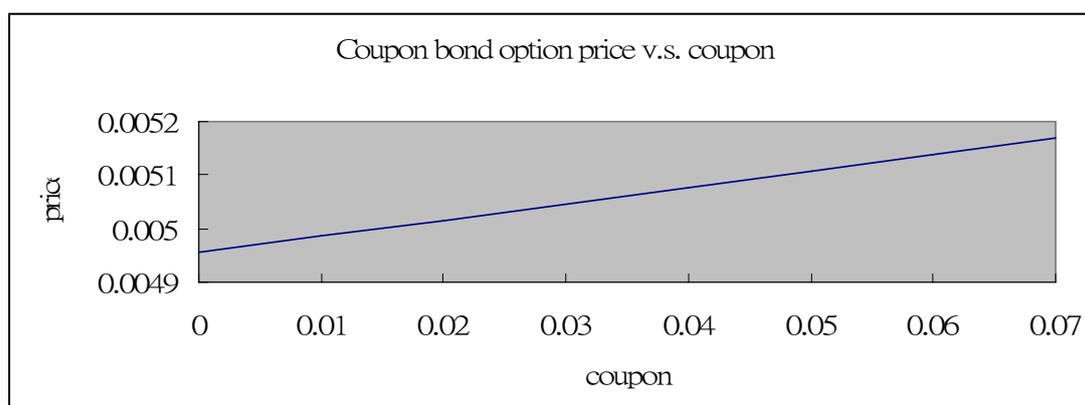
(三) 樹狀結構樹枝數目對價格的影響



圖(4.2.3) 樹枝數目對bond option價格的影響

以Black's模型得bond option價格的close form(參考附錄A)為0.014895元，由圖(4.2.3)可知，樹枝數目越密集，價格越接近close form，而以程式時間及收斂度來看最適樹枝數目範圍為19到25元樹；粉紅線為尚未調整利率間隔高度(not fit tree)即以W-H結合求面積法造樹方法所求得的價格，藍線為調整過後(fit tree)的價格，確實有減少價格與close form之間的差距。

(四) Coupon對bond option價格的影響

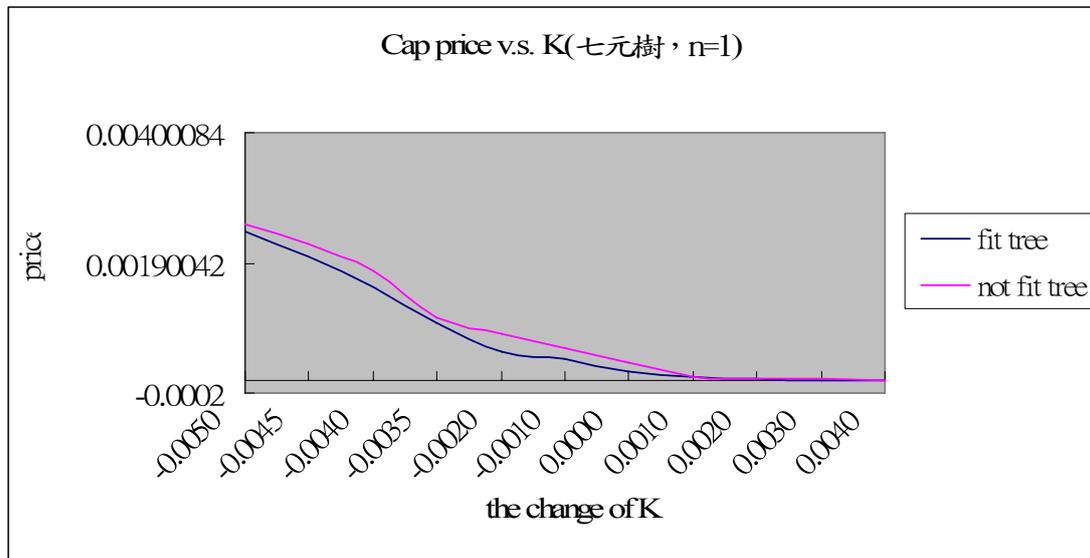


圖(4.2.4) Coupon對bond option價格的影響

由圖可知，付息bond option的價格和付息的多寡成正比，即買一個coupon bond option的商品，若每期收到的利息越多，期初所需要花的價格越多，的確符

合市場特性。

(五) 利率上限變動對三個月Cap價格的影響



圖(4.2.5) 利率上限變動對三個月Cap價格的影響

藍色線為調整利率間格高度後(fit tree)的價格，粉紅色線為未調整利率間格高度(not fit tree)即以W-H結合求面積法造樹方法所求得的價格，藍色線比粉紅色線平滑，但由於在利率上限K很接近每期平移項 α 時，會出現類似barrier too close的問題，故在K接近 α 附近的價格會使得藍色線不平滑。

第五章 結論與建議

本文結合Hull-White模型和求面積法，創造一個新的數值方法，除了以求面積法減少使用三元樹近似常態分配時所發生的分配誤差外，新的造樹方法減少了樹狀結構法另一種評價誤差：利率樹節點與利率商品履約條件之間的非線性誤差。

在實證分析中，算出理論bond option價格為0.004957元(面額為一元)，若有付息2%的bond option價格為0.0050375元；Cap價格為0.0084489元。在敏感度分析中，得知利率波動度與債券價值為正向變動，而利率回歸速度以及零息利率曲線與債券價值為反向變動。當樹枝數目越大新造樹方法評價bond option價格會越收斂至公式解，比原始造樹方法收斂速度快。而付息多寡和bond option價格成正比。

本論文模型，僅能處理單一利率標的商品，至於涉及兩個以上利率連結商品如CMS等在執行上有難處。建議使用此模型概念再增加限制條件，如給定上下界線兩個限制條件來調整利率間隔高度，或給定下界線以排除利率為負的問題，也可使用不同的利率模型，來評價複雜的結構債等熱門的利率衍生性商品。

參考文獻

- Andricopoulos, A.D., M. Widdicks, P.W. Duck, and D.P. Newton, 2003, “Universal option valuation using quadrature methods.” *Journal of Financial Economics*, 67, 447–471
- Black, F. 1976, “The pricing of commodity contracts.” *Journal of Financial Economics* 3, 167-179.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, 1982, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates.” *Econometrica*, 53, 385-407
- Hull, J. and A. White, 1990, “Pricing Interest Rate Derivative Securities.” *Review of Financial Studies*, 3, no. 4, 573-592
- Hull, J. and A. White, 1993, “The Pricing of Options on Interest Rate Caps and Floors Using the Hull-White Model.” *Journal of Financial Engineering*, 2, no.3, 287-296
- Hull, J. and A. White, 1994, “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Model I : Single Factor Models.” *Journal of Derivatives*, 2, 7-16
- Hull, J. and A. White, 1996, “Using Hull-White Interest Rate Trees.” *Journal of Derivatives*, 26-36
- John C. Hull, 2006, “Options, Futures, and Other Derivatives Securities”, *Sixth Edition Hull, J.*
- Kijima, M. and I. Nagayama, 1994, “Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model.” *Journal of Financial Engineering*, 3, 275-292
- Stephen Figlewski, Bin Gao, 1999, “The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing”, *Journal of Financial Economics*, 53, 313-351

Tian-Shyr Dai, Yuh-Dauh Lyuu, 2006, “The Bino-trinomial Tree: A simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing”



附錄 A

在 Hull and White 短率模型下， T 到期的零息債券 t 時點的價格動態為

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sigma B(t,T)dW(t)$$

其中 $B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$ ，而到期日 U 、履約價 K 的買權權利金為

$$C_t = P(t,T)N(d_1) - KP(t,U)N(d_2)$$

$$\text{其中 } d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{P(t,T)}{KP(t,U)}\right) \pm \frac{1}{2}v_U^2}{v_U}, \quad v_U^2 = \sigma^2 B(U,T)^2 \frac{1 - e^{-2a(U-t)}}{2a}$$

證明如下：

在 Hull and White 模型下， t 時點的債券價格為

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \quad (\text{A.1})$$

其中 $r(t)$ 的動態

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (\text{A.2})$$

$$A(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} e^{-\frac{B(t,T)f(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a^2}(1 - e^{-2at})B(t,T)^2}{1}}$$

由的公式可得

$$dB(t,T) = -e^{-a(T-t)}dt \quad \text{和} \quad aB(t,T) = 1 - e^{-a(T-t)}$$

因此

$$dB(t,T) = (aB(t,T) - 1)dt$$

對(A.1)兩邊同取 log，並令 $Y(t) \triangleq \ln P(t,T)$

$$Y(t) = \ln A(t,T) - B(t,T)r(t) \quad (\text{A.3})$$

接著利用(A.3)求 $dY(t)$ 與 $(dY(t))^2$ ，其過程如下

$$\begin{aligned} dY(t) &= d \ln A(t,T) - d[B(t,T)r(t)] \\ &= d \ln A(t,T) - B(t,T)dr(t) - r(t)dB(t,T) - dB(t,T)dr(t) \\ &= d \ln A(t,T) - B(t,T)[(\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)] \\ &\quad - r(t)(aB(t,T) - 1)dt \\ &= d \ln A(t,T) - B(t,T)[(\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)] \\ &\quad - B(t,T)\left(ar(t) - \frac{r(t)}{B(t,T)}\right)dt \\ &= d \ln A(t,T) - B(t,T)\left[(\theta(t) - ar(t) + ar(t) - \frac{r(t)}{B(t,T)})dt + \sigma dW(t)\right] \\ &= d \ln A(t,T) - B(t,T)\left(\theta(t) - \frac{r(t)}{B(t,T)}\right)dt - \sigma B(t,T)dW(t) \end{aligned}$$

$$(dY(t))^2 = \sigma^2 B(t, T)^2 dt$$

利用 $P(t, T) = e^{Y(t)}$ 與 Ito's lemma

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= de^{Y(t)} = e^{Y(t)} dY(t) + \frac{1}{2} e^{Y(t)} (dY(t))^2 \\ &= P(t, T) dY(t) + \frac{1}{2} P(t, T) (dY(t))^2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = dY(t) + \frac{1}{2} (dY(t))^2$$

在無套利假設下，因(A.2)是在即期風險中立測度下的動態，且擴散項僅出現在 $dY(t)$ 中。因此 $\frac{dP(t, T)}{P(t, T)}$ 之漂移項為無風險利率，而擴散項與 $dY(t)$ 之擴散項相同，故其動態為

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)dt - \sigma B(t, T)dW(t)$$

另一方面，債券在 U 時點的遠期價格動態為

$$d\left(\frac{P(t, T)}{P(t, U)}\right) = \left(\frac{P(t, T)}{P(t, U)}\right) [\sigma B(t, U) - \sigma B(t, T)] dZ(t)$$

$Z(t)$ 為遠期測度下的布朗運動。根據 Black 的公式，買權價格為

$$C_t = P(t, T)N(d_1) - KP(t, U)N(d_2)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{P(t, T)}{KP(t, U)}\right) \pm \frac{1}{2} v_U^2}{v_U}$$

$$v_U^2 = \int_t^U (\sigma B(u, T) - \sigma B(u, U))^2 du$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^U (e^{-a(T-u)} - e^{-a(U-u)})^2 du$$

$$\therefore (e^{-a(U-u)} - e^{-a(T-u)})^2 = (e^{-a(U-u)})^2 (1 - e^{-a(T-u)+a(U-u)})^2 = e^{-2a(U-u)} (1 - e^{-a(T-U)})^2$$

$$v_U^2 = \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-a(T-U)})^2 \int_t^U e^{-2a(U-u)} du = \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-a(T-U)})^2 \frac{e^{-2a(U-u)}}{2a} \Big|_{u=t}^{u=U}$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-a(T-U)})^2 \frac{1 - e^{-2a(U-t)}}{2a} = \sigma^2 B(U, T)^2 \frac{1 - e^{-2a(U-t)}}{2a}$$