國 立 交 通 大 學

財 務 金 融 研 究 所

碩 士 論 文

使用改良結構式模型運用於
信用風險及資本結構
The Enhanced Structural Model for the Credit Risk and the Capital Structure Problem

研 究 生：陳政岳

指導教授：鍾惠民 博士

戴天時 博士

中 華 民 國 九 十 七 年 六 月

使用改良結構式模型運用於信用風險及資本結構

The Enhanced Structural Model for the Credit Risk and the Capital Structure Problem

研 究 生: 陳政岳　　Student: Cheng-Yueh Chen

指導教授: 鍾惠民博士　　Advisor: Dr. Huimin Chung

戴天時博士　　Dr. Tian-Shyr Dai

國立交通大學

財務金融研究所碩士班

碩士論文

A Thesis
Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Finance

June 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年六月

使用改良結構式模型運用於信用風險及資本結構

學生：陳政岳　　　　　　　　　　指導教授：鍾惠民　博士

戴天時　博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

摘　　要

財務金融日新月異，造就了許多公司企業運用各式各樣的方法美化財務報表或投資於高槓桿的金融商品。進而影響公司正常的營運，嚴重者甚至使公司發生違約而破產。因此，信用風險議題逐漸受到金融界重視，本文提出新的數值方法SJ-DFPM，以離散時間點觀察公司資產價值與違約門檻之間的關係。除了償還公司債的跳躍因子外，還增加公司營業所得稅及破產成本因子，期盼模型能更符合真實狀況來預測違約的發生。

關鍵字：FPM（首次通過模型）、Merton model、資本結構、公司債、違約門檻、稅、破產成本

The Enhanced Structural Model for the Credit Risk and the Capital Structure Problem

Student: Cheng-Yueh Chen Advisor: Dr. Huimin Chung

Dr. Tian-Shyr Dai

Institute of Finance

National Chiao Tung University

Abstract

As the knowledge of finance has its field extended and progressed, many corporations have tried to apply all kinds of methods to transfigure financial statements or invest in financial derivatives of high leverage. These attempts would influence corporations to operate normally or even account for default then lead to bankruptcy. This phenomenon therefore raises the concern of financial field on the issues of credit risk. This paper brings up a new numerical method: SJ-DFPM, which explores the relationship between the value of corporate assets and the threshold of default. In addition to the jump factors of corporate bond repayment, the paper further joins the factors of the corporate taxes and bankrupt cost into the model to make it correspond to real situation more and finally able to forecast corporate default.

Keywords： First Passage Model, Merton model, Capital Structure, Corporate Bond, Barrier, Tax, Bankruptcy Cost

誌　　謝

在交通大學財金所求學的兩年中，感謝所有教導我的老師，尤其承蒙指導教授鍾惠民老師、戴天時老師不厭其煩的指導。特別是戴天時老師，戴老師非常年輕，就像自己的學長般，只要研究中有問題，總是很快的提供意見給我們參考。而每星期的 meeting，除了個別的論文指導外，還花時間上隨機微積分，補強了研究中所不足的地方，對我而言實是受益良多。老師常鼓勵我們不要畫地自限，被自己所學的領域給侷限，而是要多方面地去嘗試與接受挑戰，這樣才能拓展自己的視野與增長自己的知識。老師的鼓勵每每都激勵我在研究所的課程中更向前挺進，精益求精。在此也要向老師致上歉意，我在寫論文的這段期間，還分心修了外所的課，真的要感謝老師的諒解與支持，我才得以取得輔所學位。

在寫論文的這段時間，還要感謝和我一起奮鬥的伙伴俊儒、一起討論論文的明璋以及其它 meeting 團的成員。更少不了一起互相鼓勵、互相訴說論文之苦的室友建佑與文誠。還有除了老師之外，義務的指導幫我解決不少問題及提供我各式各樣的意見的戴慈學姊。也謝謝其它財金所的同學。在寫論文這條漫長的路上，充滿枯燥、煩悶及痛苦，一起渡過既辛酸、又血淚的一年，We finally made it。

當然也要真誠的感謝我親愛的家人、爸媽及士庭，在發生這麼多事情仍無私地力挺我、安撫我這段期間焦躁的情緒及壓力。

最後，還有太多感謝，就借一句以前國中課文裡的句子:「就謝天吧!」。

目　　錄

圖 目 錄

符 號 說 明

V：公司資產

D：公司債券面額

E：公司股東權益

T：公司債券到期日

B：公司違約門檻

r：無風險利率

σ：公司資產波動率

τ：公司營業所得稅

V_B：公司違約時的資產

αV_B：公司破產成本

第一章　緒論

第一節 研究動機與背景

近年來，經常可以在報章雜誌或新聞媒體看到一些公司瀕臨破產而被收購或是直接宣告破產，如：貝爾斯登（The Bear Stearns Companies；2008）受到美國次級房貸（subprime mortgages）影響而嚴重虧損瀕臨破產，美國聯邦儲備局(聯準會)為了避免引起更大的金融危機，同意貸款給摩根大通公司（JPMorgan Chase & Co.)）緊急收購貝爾斯登。恩隆（Enron；2001）因從事複雜的衍生性金融商品(Derivatives)交易，以及投機性高的創業投資(Venture Capital)和併購(Merger and Acquisition)活動。同時大玩財務遊戲，膨脹公司獲利，隱藏巨額債務及損失，最後宣告破產。

然而當公司宣告破產時，由破產時的求償順位理論得知，債權人的求償順位通常優先於股東。因此，破產的宣告常常會造成股東權益價值莫大的損失，甚至使其血本無歸。有鑒於此，若有一個模型能夠精確地模擬公司資產的變化及公司債償還就顯得非常的重要。本篇文章使用了信用風險中以公司資產為主要變數的結構型模型，並加入公司債離散償還因子，試圖去預測公司的股東如何調整資本結構及公司最佳的破產條件，使得股東權益價值最大化。

本論文並延伸 M&M 理論，討論公司營所稅及破產成本對最適資本結構的影響。M&M 理論是由 Modigliani（1985 年諾貝爾經濟學獎得主）與 Miller（1990 年諾貝爾經濟學獎得主）(簡稱 M&M) 於 1958 年時，共同發表了「資本結構無關稅理論」。這個理論假設忽略公司的營業所得稅下，公司的價值不會受到公司本身資本結構改變的影響。也就是說對公司而言沒有最理想的資本結構的存在，即無任何一種資本結構的價值絕對優於另外一種。

1963 年 Modigliani 與 Miller 共同又發表了另一篇論文「資本結構有關稅理論」，這個理論考慮加入公司營業所得稅的情況下，公司會因舉債而產生利息費用，這個費用具有抵稅的效果，也就是利息稅盾（interest tax shield）價值，將使公司的平均資金成本會隨著負債融資比例的增加而下降，公司的價值也會伴隨著增加。因此，M&M 資本結構有關稅理論主張最理想的資本結構將會是「完全地（100%）的負債，而不須要任何的股東權益」。但是，在現實社會中不可能有此現象的產生，主要是因為此理論嚴格假設公司破產成本不存在及不會產生任何代理問題的緣故。

因此，本篇文章是以結構型模型來探討公司的信用風險議題之外，在模型之中，也加入了營業所得稅及公司破產時所需要支付的破產成本這兩種因子，來增加預測公司的股東權益的價值。

第二節 研究目的

M&M 資本結構有關稅理論主張有負債公司的價值相對於完全權益公司的價值會因繳稅而增加利息稅盾的價值。事實上，無論有無負債的公司，繳稅都會造成公司價值的降低，並非如 M&M 資本結構有關稅理論所述，有負債公司的價值會因加上利息稅盾而增加，而繳稅對有無負債公司主要的影響在於繳交營業所得稅的多寡。即有公司債的公司繳交的營業所得稅較無公司債繳交的稅來得少。

此外 Leland (1994)和 Leland 及 Toft (1996)這兩篇探討的是在連續課稅及支付債息的假定下，求出永續債券（consol bond）或流通在外固定面額的債券價格的封閉解（closed form），進而求出股東如何調整資本結構、違約門檻，使得股東權益最大化。但是，實務上公司並非是連續地（每分每秒）支付債息、償還公司債或繳稅，而是每間隔一段固定的時間才需支付債息、償還公司債或繳稅。

有鑒於理論或公式在過於完美的假設條件之下應用，與現實社會的情況不符。再加上公司的信用風險及資本結構日趨重要，本文將嘗試使用數值方法，以離散時間點模擬信用風險中的首次通過模型（First Passage Model），並加入了稅及破產成本因素，模擬公司的資產狀況。並假定公司資產價值會因支付公司債利息、公司債及公司的營業所得稅而產生離散跳躍，而違約門檻則會因公司資產及負債結構的改變及破產成本因子考量下而隨著改變。因此本文期盼此模型能更貼近市場，以利股東或投資人能做出正確的決策。

第三節 研究架構

第二章 文獻回顧。簡述信用風險模型的發展、資本結構理論、抵換理論及後續推廣。

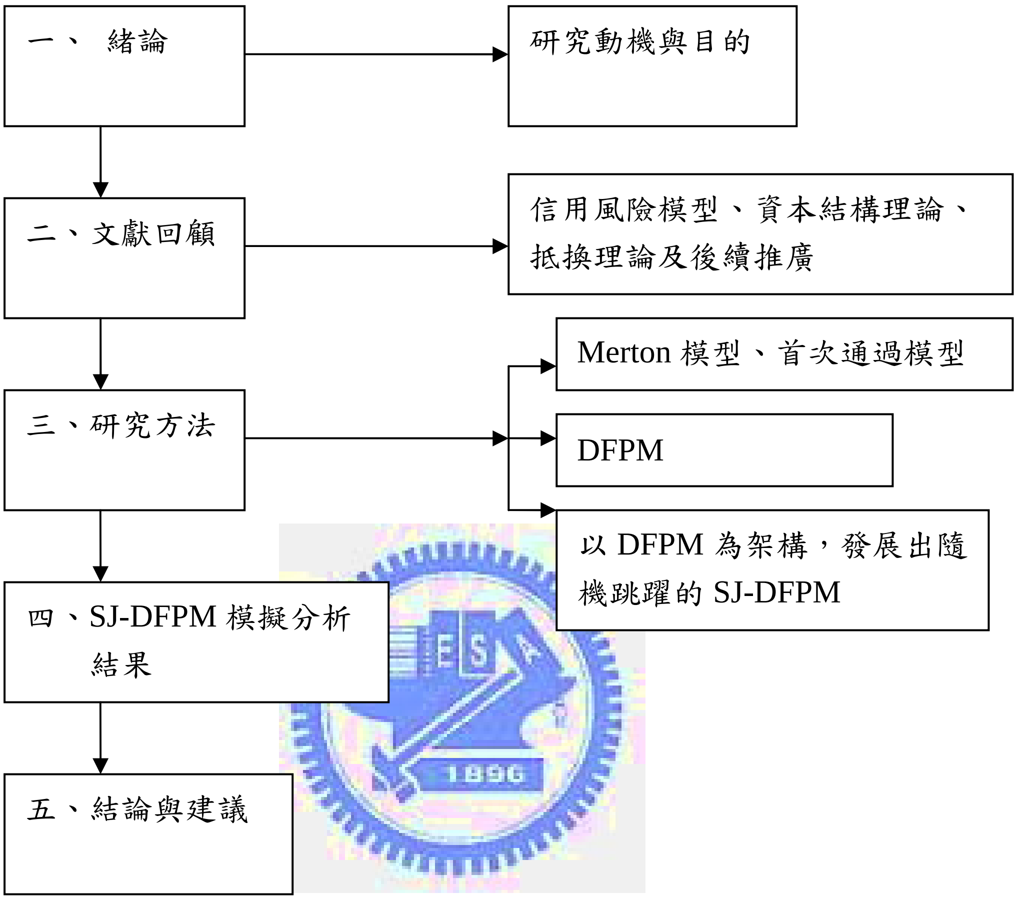
第三章 研究方法。延續 Merton 模型、首次通過模型（FPM）及離散 FPM（DFPM），以 Bino-Trinomial Tree 及 Stair Tree 為架構，建構新的數值模型隨機跳躍 FPM（SJ-DFPM）。

第四章 模型數值分析。以 SJ-DFPM 模擬比較 Merton 模型及 FPM。並利用此模型探討加入稅賦因子及破產成本。

第五章 結論與建議。針對本文研究結果做出結論，並提出意見，以提供後續研

究者繼續研究之參考。

本文架構圖，如圖 1-1



『圖 1-1』研究架構圖

第二章　文獻回顧

近年來，報章雜誌或新聞媒體常報導一些公司瀕臨破產而被收購或是直接宣告破產，如：貝爾斯登（The Bear Stearns Companies；2008）、恩隆（Enron；2001）…等知名企業。然而當公司被收購或宣告破產時，股東權益都造成莫大的損失。這些企業違約的發生都是由於無法償還公司債或者是無法支付債息。因此，本文選擇了信用風險中，公司資產變化以決定信用事件（credit event）是否發生的結構型模型（structural model），並假定公司資產及違約門檻會因債務結構及稅賦而產生離散的跳動，模擬預測公司風險的變化。

第一節 傳統信用風險模型之發展

傳統的信用風險型主要是利用過去的歷史資料來分析且評估違約機率的大小。以下將分別介紹兩種模型：專家意見法、信用評等法。

一、專家意見法

授信決策方法：

1. Character：借款人的還款意願、名聲、道德水準…等等。
2. Capacity：借款人的償債能力。
3. Capital：借款人的財務。
4. Collateral：借款人的用來貸款的擔保品狀況。
5. Condition：借款人在外在條件對貸款者的償還能力。

將這五種條件依過去的借款人的財務相關資料及其它相關資訊量化成數據，接下來再由徵信人員依個人過去的經驗法則及個人主觀判斷做出授信決策。但是常因過於費時、耗人力及徵信人員的道德操守問題而受到嚴重質疑。大部份的金融機構在評估貸款的信用風險時，皆採取此方法。

二、信用評等法（Credit scoring）

主要是以統計模型為主，將借款人過去的有關的經濟或財務方面有關的資訊，如財務報表、公司的銷售…等。選擇具有代表性或具有特殊含義的資訊來加以區分其風險等級。

(一)單變量分析

Beaver（1966）建議以財務報表上的財務比率來分析預測有無違約風險。分析方法主要是以統計上的 t 檢定檢驗對照組公司和實驗組公司的十四種財務比率，在違約發生的前五年是否有顯著的差異。

缺點：單以財務報表中的財務比率來分析，對於某些財務結構健全的公司將無法有效的預測其違約風險。

(二)多變量分析

1. 線性區別模型

Altman(1968)提出將財務報表中具有代表性的數個財務比率，賦予其各別不同權重，組合成一個綜合的財務違約指標，並用此模型來預測違約機率的發生。分析方法主要為線性區別分析，先將樣本資料依類別種類區分，並輔以統計學上的多變量分析方法，來檢視公司是否有財務困難。此模型又稱 Z-score。

缺點：權重之間的大小關係並無一套嚴謹的理論基礎加以輔佐，再加上變數間可能有交互影響，而影響判讀。另外財務報表在財務上屬於落後指標，無法即時地反應公司現有的財務狀況，且易受公司刻易地美化或造假。

2. Logit 模型與 Probit 模型

因為 Z-score 無法求出違約機率，Logit 與 Probit 模型根據 Z-score 的 Z 值分別依 Logistic 函數及累積常態分配函數轉換成違約機率。

缺點：除了公司財務會計上的問題外，還有此兩種模型必需建構在特定的分配上，有失客觀性。

第二節 信用風險評價模型發展

近年來，信用風險的議題日益重要，如何選擇一個適當的信用風險模型在信用風險議題中扮演重要的角色。主流信用風險評價模型分為兩類：一為結構式模型(structural form model)；二為縮減式模型(reduced form model)。結構式模型：使用隨機過程模擬公司資產的變化，考量公司資產與負債面值及違約門檻的關係，來決定公司是否發生違約。縮減式模型：此模型不使用公司資產作為參數，而改公司債市場交易價格及信用價差（credit spread）來推論違約機率模型。本文將著重於結構式模型，並加以延伸及應用。

一、結構式模型（Structural-Form Model）

(一) Black 和 Scholes（1973）& Merton（1974）

Black 和 Scholes(1973)提出的選擇權定價理論，已成為衍生性金融商品定價最主要的基礎，其模型最主要的優點為可找出一個選擇權封閉解(closed-form solution)，且評價選擇權的計算過程相當容易。Merton(1974)延伸 Black 和 Scholes 模型，將公司權益視為公司資產的買權，然後再依據此模型求出負債價值。

Black 和 Scholes 選擇權定價模型的基本假設：

1. 股價為對數常態分配且服從幾何布朗運動(geometric Brownian motion)，即：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

S:目前的股價

dS:股價的變動

μ:股價的預期報酬率

σ:股價的波動率

dz:遵循 Wiener 過程，$dz = \varepsilon\sqrt{\Delta z}$，$\varepsilon \sim N(0,1)$。

$\mu \cdot Sdt$:預期成長率

$\sigma \cdot Sdz$:不確定項

2. 在選擇權契約期間，不發放股利。
3. 選擇權為一歐式選擇權，只能在到期日執行履約。
4. 市場為效率市場。
5. 無風險套利機會不存在。
6. 交易為連續交易。
7. 所有有價證券皆可任意分割。
8. 無風險利率 r 為常數。

由以上嚴格的假設條件，推導出 Black 和 Scholes 選擇權評價公式：

$$c = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) \qquad (1)$$

$$p = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \qquad (2)$$

其中 $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ （3）

c:歐式買權的價格

p:歐式賣權的價格

$N(\cdot)$:標準常態分配的累積分配函數

S:目前的股價

K:履約價格

r:無風險利率

σ^2:股價波動率的變異數

T:選擇權距到期日的時間

Merton 模型：將公司股票視為公司資產的買權。並根據資產負債表，將公司資產 V 分為股東權益 E 及一個流通在外到期日為 T，面額為 D 的零息債券。在到期日 T 時，若公司資產 V 小於債券面額 D，則債權人拿到剩餘公司價值 V，而股東權益將為零；若公司資產 V 大於債券面額 D 時，則公司有能力償還債務，債權人收到債券面額 D，而股東將可獲得公司資產 V 扣除償還的債券面額 D。

因此，股東權益可視為資產價值的買權，其執行的履約價格等於債權人要求償還債券的面額，若公司資產小於債券面額，則不執行買權，但債權人將接收整個公司價值。將此概念套入 Black 和 Sholes 歐式買權公式，並延用 Black 和 Sholes 的基本假設，則可得到 Merton 評價公式。

而為了方便模型架構進行公司債務的評估，Merton 額外增加一些假設：
1. 根據 Modigliani 和 Miller 所提出的資本結構無關理論，公司的價值不受資本結構改變。
2. 沒有交易稅及公司營業所得稅。

Merton 公式：

$$V_E = V_A \cdot N(d_1) - D \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \qquad (4)$$

其中 $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{V_A}{D}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma_A{}^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}$，$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$ （5）

$$V_D = V_A - V_E \qquad (6)$$

V_E:股東權益市價
V_D:公司債券價值
V_A:公司資產市價
D:公司負債面額
σ_A:公司資產波動率
r:無風險利率
T:距到期日的時間

(二) Black 和 Cox

Black 和 Cox (1976)發表首次通過模型（First Passage Model；簡稱 FPM），主要為延伸 Merton (1974)的模型考慮公司在到期日之前違約的風險。

本文以 Black 和 Scholes (1973) & Merton (1974)模型和 Black 和 Cox (1976) FPM 模型為架構，以杜宛珮(2007)的創新數值方法 DFPM 來模擬公司資產。此模型將於第三章中詳細介紹。

二、縮減式模型（Reduced -Form Model）

縮減式模型之所以被稱為「縮減式」是因為模型將複雜的違約機制用簡單地違約機率模型呈現。其模型基本假設違約為隨機發生且違約為外生給定的變數。不像結構型模型需評估公司資產價值的變動，而只要有完整且精確的公司債券資料即可。所以在資本結構策略與公司的財務關係密切且日漸錯綜複雜的今日，縮

減式模型能將問題簡化，進而提升其實用價值。

Jarrow 和 Turnbull (1995)假設違約事件是無法預測的，但是違約機率則為非隨機且與時間有關。Jarrow, Lando 和 Turnbull (1997)延伸 Jarrow 和 Turnbull (1995)模型加入了信用風險評等資料來做為判斷違約的指標。後續還有 Lando (1998)、Duffie 和 Singleton (1999)…等將縮減式模型繼續延伸。

第三節 M&M 資本結構理論、靜態抵換理論、絕對優先權

一、M&M 資本結構無關理論

M&M 資本結構無關理論的基本假設：

(1) 公司每年的現金流量一致，即公司預期未來盈餘期望值皆相同且具永續年金的性質。

(2) 資本市場是完美市場（perfect market），即市場資訊公開，投資人與公司無資訊不對稱的問題；投資人買賣有價證券無須支付交易成本；市場上的有價證券價格無人能影響。

(3) 每家公司的風險等級相同，即公司具備同質性風險（homogeneous risk class）。

(4) 無破產成本。

(5) 投資者與公司的貸款利率皆為無風險利率。

(6) 公司發行的公司債均為無風險債券。

(7) 無稅考量，即無公司營業所得稅及個人所得稅。

M&M 理論命題 I：資本結構無關稅理論（M&M's Proposition Ⅰ without taxes）

任何公司不管有無負債，公司的價值皆為公司預期的息前稅前盈餘（earning before interest & taxes 簡寫為 EBIT）除以公司的加權平均資金成本（weighted average cost of capital 簡寫為 WACC），因此公司價值與公司的資本結構互相獨立。即公司的市場價值不會因公司資本結構的變動而隨之改變。而且投資人可以透過調整個人槓桿（homemade leverage）的方式，來調整投資人對公司財務槓桿的承受程度，故：

$$V_L = V_U \qquad (7)$$

V_L：有負債公司的價值

V_U：無負債的公司的價值

M&M 理論命題Ⅱ：資本結構無關稅理論（M&M's Debt Irrelevance Proposition Ⅱ without taxes）

有負債公司之權益預期報酬率會等於無負債公司之權益預期報酬率，加上財

務風險溢酬用以補償股東所承受的財務風險。然而隨著負債對權益並比率的增加，公司的財務風險溢酬亦會伴隨著上升。這表示當公司舉債的資金提高時，公司權益資金成本也會上升。故：

$$r_E = r_{assets} + \frac{D}{E} \times \left(r_{assets} - r_D\right) \tag{8}$$

r_E：權益的預期報酬率

r_D：負債的預期報酬率

r_{assets}：無負債資產的預期報酬率

D：公司負債的價值

E：公司權益的價值

二、M&M 資本結構有關理論

M&M 資本結構有關理論的基本假設：

資本結構有關理論將公司營業所得稅納入考量外，其它的假設同 M&M 資本結構無關理論。

M&M 理論命題 I：資本結構有關稅理論（M&M's Debt Relevance Proposition Ⅰ with taxes）

有負債公司的價值會等於無負債公司的價值，再加上利息稅盾(interest tax shield)。換言之，一個有負債的公司與一個無負債的公司在其它條件相同下，公司價值的差等於公司的稅率乘以負債金額。故：

$$V_L = V_U + D \times T_c \tag{9}$$

T_c：公司營業所得稅稅率

M&M 理論命題Ⅱ：資本結構有關稅理論（M&M's Debt Relevance Proposition Ⅱ with taxes）

有負債公司權益之預期報酬率會等於無負債公司權益之預期報酬率加上財務風險溢酬。在加入公司的營業所得稅因素之下，將造成公司的權益預期報酬率增加的幅度趨緩，而平均之後的加權平均成本也會伴隨著負債融資程度的增加而趨緩。

$$r_E = r_{assets} + \frac{D}{E} \times \left(r_{assets} - r_D\right) \times \left(1 - T_c\right) \tag{10}$$

三、靜態抵換理論（static trade-off theory）

根據 Modigliani 與 Miller 所提出的資本結構有關稅理論得知，最佳的資本結構應為百分之百負債，如此一來公司將可獲得最的利息稅盾。實際上提高負債雖

然增加公司價值（利息稅盾的價值），但是，也提高了公司其它方面的成本，統稱為槓桿成本（leverage related cost; LRC），介紹如下：

(一) 破產成本（bankruptcy costs）：或稱財務危機成本（financial distress costs）

1. 直接破產成本（direct costs of bankruptcy）：當公司違約遭到清算時，必需支付時的律師、會計師及法院費用等等。
2. 間接破產成本（indirect costs of bankruptcy）：當公司面臨違約時，公司信譽受損、公司產品將難以銷售、內部的優秀人才將流失及客戶將害怕公司無法保證履約…等。

(二)負債代理成本：代理成本主要是投資人與公司經理人互不信任產生的成本。如股東開會決定自利，這將損害債權人的權利。

1. 公司資產替換：公司經理人為了獲取最大的報酬，投資於「高槓桿、高風險、高報酬的投資案」。當公司獲利時，債權人一樣只領取固定的債息。但是，當公司虧損時，債權人則要一併承擔虧損而只能取回部份債權價值。
2. 公司投資不足：若某項投資計劃案是由股東自行出資，在公司獲利時，股東要與債權人分享利益；若公司虧損時，債權人將收不到應償還債權的價值。因此公司將延遲或取消此投資計劃案。
3. 債權稀釋：即將發行新的債務時，因負債水準比例上升，公司的財務風險增加，將損及原有的債權人權利。

所以，在最適資本結構下的靜態抵換理論下，公司應增加其負債，直到其產生額外的利息稅盾價值，正好被破產成本或代理成本給抵銷。也就是說抵換理論建議公司若有大量的有形或無形資產時，且須繳交大筆賦稅金額，則可以舉較高的負債。反過來說，若風險高且獲利較差的公司，則應舉較少的負債。

四、絕對優先權（Absolute Priority Rule; APR）

當公司破產時，經由公司清算協商後，公司剩餘價值償還順序依序為優先債務（senior debt）、次級債務（junior debt）…，當全部債務依序清償完畢後，最後剩餘的公司價值，才交由股東瓜分。也因此公司破產時，股東最後時常得不到任何的補償。

第四節 探討公司債務償還的種類

Merton（1974）、 Black 和 Cox（1976）and Brennan and Schwartz（1978，假設為

$$\frac{dV_t}{V_t}=\left(r-\kappa\right)dt+\sigma_V dz_t \qquad （11）$$

V_t :沒有舉債公司的資產價值

dV_t :沒有舉債公司的資產價值的變動

r :公司資產價值的預期報酬率

σ_V :公司資產價值的常數波動率

κ :公司支付率，即公司資產價值用來償還債權人的某個常數比例

dz_t :滿足 Wiener Process， $dz_t=\varepsilon\sqrt{dz_t}$ ， $\varepsilon \sim N\left(0,1\right)$

一、無法使用公司資產價值償還債務（ $\kappa=0$ ）:

在 $\kappa=0$ 的條件之下，表示股東不能任意地變賣公司資產或直接利用公司資產來支付債息或償還以公司債。換句話說，股東若想支付債息或償還公司債則必需藉由發行新股或者是另行舉債來清償。

Black 和 Cox（1976）將 Merton （1974）推導出來的價值方程式（valuation equation）延伸，導出公司債券的一般式：

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{vv}+rVF_v-rF+F_t+\sum_{j=1}^{n}c_j\delta\left(t-t_j\right)=0 \qquad （12）$$

c_j :第 j 期利息的支付

t_j :第 j 期利息支付的時間

n :利息支付的期數

$\delta\left(\cdot\right)$:Dirac delta 函數

V :公司的價值

F :公司債的價值

為了簡化模型複雜度和運算，Black 和 Cox 忽略公司債的時間價值，進而考慮一個永續債券，並將公式（12）改寫成

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{vv}+rVF_v-rF+c=0 \qquad （13）$$

另外假設公司的違約門檻 $\overline{V}$ 與公司現值無關，而且 $\overline{V}$ 的決定是由股東來決定，因此這個值的選擇將使債權人的價值極小化，換句話說即使股東的價值極大化。當公司價值近似於無限大時，債券的價格將趨近於 $\frac{c}{r}$ （無違約情況下的永續債券價

值），因此可得方程式（13）的上界條件為 $\lim_{V\to\infty} F_V(V)=0$（$F_V(V)$：表示 $F(V)$ 對 V 做一階偏微）。而下界條件為 $\min\left(\overline{V},\dfrac{c}{r}\right)$。利用常微分程，可解得

$$F(V)=\frac{c}{r}+\left(\overline{V}^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}-\frac{c}{r}\overline{V}^{\frac{2r}{\sigma^2}}\right)V^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{14}$$

Leland（1994）延伸了 Black 和 Cox（1976）導出的永續債券封閉解，並假設破產宣告時公司的資產價值為 V_B。考慮破產成本 αV_B（$0\le\alpha\le1$）及破產成本函數 $BC(V)$，並加入公司營業所得稅率 τ，導出公司債的價值函數為 $D(V)$，股東權益的價值函數為 $E(V)$，公司的總資產價值函數為 $v(V)$ 及稅盾的價值函數為 $TB(V)$。而公司的總資產為無負債公司的價值加上稅盾的價值減去破產成本。式子如下：

$$D(V)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)V_B-\frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \tag{15}$$

$$BC(V)=\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \tag{16}$$

$$TB(V)=\tau\cdot\frac{C}{r}-\tau\cdot\frac{C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}v(V)&=V+TB(V)-BC(V)\\&=V+\tau\cdot\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}\right]-\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}E(V)&=v(V)-D(V)\\&=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}\end{aligned} \tag{19}$$

Leland（1994）將公司債券分成兩大類 1. 未受契約保護的債權（unprotected debt）：任何時間點，當公司價值降至某個價值時，導致公司無法支付債息或償還公司債券，則股東有權宣告公司破產。換句話說公司價值有可能降至零時，股

東才宣告公司破產，債權人將無法收回債權價值；2. 受契約保護的債權（protected debt）：公司發行公司債券時附帶的契約，主要當公司價值降低至公司債券面額時，契約即生效。公司立即宣告破產，債權人將保有債權本金的價值。

Leland（1994）指出公司會發行受契約保護的債權，主要是債權人懼怕發生代理成本及資產抵換問題，造成債權價值的損失。所以，當公司資產風險提高時，無論債權有無受保護，債權的價值將會隨公司資產風險上升而下降。但是，債權有無受保對權益價值卻有完全相反的結果。當債權未受保護時，如預期一樣權益的價值會因風險的提高而增加；當債權受保護時，權益的價值反而會和債權一樣會因高風險而使得價值降低，故可降低股東藉由提高公司風險以提高權益價值，損害債權人的行為。

另外，Leland（1994）也對有無破產成本進行討論，

1. 當 $\alpha = 0$（即無破產成本時）：

a) 若公司債券受到契約保護，則變成一張無風險債券，其利率會轉成無風險利率。

b) 對任意債息 C，受契約保護的公司債券產生的稅盾效果將低於未受契約保護的公司債券。

c) 對任意債息 C，受契約保護的公司債券違約門檻會高於未受契約保護的公司債券。

2. 當 $\alpha \neq 0$（即有破產成本時）：

a) 給定債息 C 情況下，受契約保護的公司債券價值會低於未受契約保護的公司債券價值。

b) 公司發行契約保護的公司債券，將使破產更容易發生。即因為受契約保護的公司債券違約門檻為債債面額，若再加上破產成本，則需將違約門檻再往上調整。

二、利用公司資產價值償還債務（$\kappa \neq 0$）：

在 $\kappa \neq 0$ 的條件之下，表示股東被允許變賣公司資產或直接利用公司資產來支付債息或償還公司債。換句話說，只要公司還有價值，股東即可利用公司資產來償還債務。

Leland 和 Toft（1996）不再探討無期限的公司債，而是討論有到期日 T 的公司債。假設公司可以「連續地」發行到期日為 T 的公司債，在發行新公司債的同時也有到期日 T 的公司債償還。當公司債到期，又發行相同到期日和面額的公司債，使得流通在外的公司債總面額 P 和總債息 C 維持常數。因此，在時間 0 到時間 T 期間，債權的價值將表示如下：

$$
\begin{aligned}
D(V;V_B,t) &= \int_{t=0}^{T} d(V;V_B,t)dt \\
&= \frac{C}{r} + \left(P - \frac{C}{r}\right)\left(\frac{1-e^{-rT}}{rT} - I(T)\right) + \left((1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right)J(T)
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

其中 $I(T) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} e^{-rt}F(t)dt$，$J(T) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} G(t)dt$ （21）

$$F(t) = N\left[h_1(t)\right] + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2a} N\left[h_2(t)\right] \qquad (22)$$ [1]

$$G(t) = \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-a+z} N\left[q_1(t)\right] + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-a-z} N\left[q_2(t)\right] \qquad (23)$$ [2]

$d(V;V_B,t)$:表示在時間 t 到期的公司債券

接下來做法如前面 Leland 所提的做法類似。

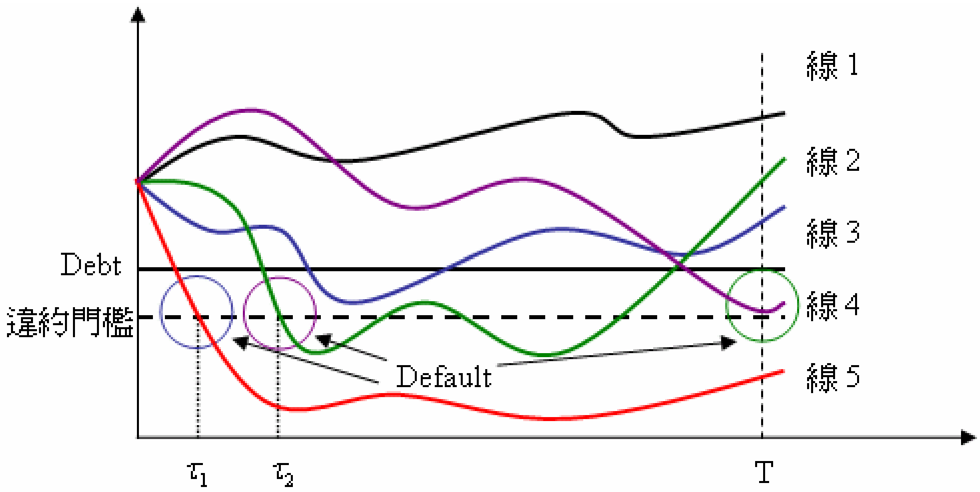
[1] $F(t)$的計算源自Harrison（1990）”Brownian motion and stochastic flow systems”。

[2] $G(t)$的計算源自Rubinstein和Reiner（1991）”Breaking down the barriers”

第三章　研究方法

第一節 首次通過模型

Merton（1974）假設公司資本結構為公司股東權益加上零息債券且視公司股東權益為公司資產的歐式買權。也就是說 Merton 模型只考慮在期日時，公司資產價值低於債權價值時才發生違約（如圖 3-1 線 4、線 5）。Black 和 Cox（1976）發表的首次通過模型，表示違約不再只發生在到期日（如圖 3-1 線 4），而是在到期日前的任何時間點，都有可能發生違約（如圖 3-1 線 2、線 5）。



『圖 3-1』FPM 和 Merton model

FPM 的違約機率：

假設違約機率為 $P(T)$，違約時間 $\tau=\min(\tau_1,\tau_2)$，公司在時間 t 的資產 V_t 服從對數常態分配，即 $\dfrac{dV_t}{V_t}=rdt+\sigma dz_t$，$dz_t$ 服從 Wiener 過程，$dz_t=\varepsilon\sqrt{\Delta z}\quad \varepsilon\sim N(0,1)$

，則 $V_t=V_0\exp(mt+\sigma z_t)$，$m=r-\dfrac{1}{2}\sigma^2$，　　（24）

$$
\begin{aligned}
P(T)&=P[\tau\le T]\\
&=P[\min(\tau_1,\tau_2)\le T]\\
&=1-P[\min(\tau_1,\tau_2)>T]\\
&=1-P[\tau_1>T,\tau_2>T]\\
&=1-P[\min V_t>B,V_T>D]
\end{aligned}
$$

$$= 1 - P\left[\min_{t\le T}\left(mt+\sigma z_t\right) > \log\left(\frac{B}{V_0}\right), mT+\sigma z_t > \log\left(\frac{D}{V_0}\right)\right]$$

$$= N\left(\frac{\log\left(\frac{D}{V_0}\right) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} N\left(\frac{\log\left(\frac{B^2}{DV_0}\right) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \qquad (25)$$

τ_1:公司資產價值第一次碰觸到門檻的時間（到期日前）；

τ_2:公司資產價值在到期日小於債券面額的時間；

T:到期日時間

B:違約門檻

D:債券面額

$N(\cdot)$:標準常態累積函數

首次通過模型（FPM）：

在FPM中，股東權益可視為一個下出局障礙買權（Down-and-out barrier call option）[3]，而為了方便計算可將Down-and-out障礙買權c''價值視為一個陽春選擇權（vanilla call option）c[4]價值減去一個下入局障礙買權（Down-and-in barrier call option）[5]c'價值。由Black和Scholes買權評價公式得：

Down-and-out 障礙買權：

$$E_0 = \text{down-and-out } \ c'' = c - \text{down-and-in } \ c' \qquad (26)$$

$$= V_0\cdot N\left(d_1\right) - D\cdot e^{-r\cdot T}\cdot N\left(d_2\right)c' - V_0\cdot\left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1}\cdot N\left(y_1\right) + D\cdot e^{-r\cdot T}\cdot\left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1}\cdot N\left(y_2\right)$$

[3] Down-and-out障礙買權：若資產價值在到期日前碰觸門檻，則買權失效。反之若沒有碰觸門檻，則買權存在。其價值為$\left(S_T - K\right)^+$，S_T:到期日股價，K:履約價。

[4] Vanilla call option值相當於由一個Down-and-in障礙買權的價值和一個Down-and-out障礙買權的價值構成的投資組合。Vanilla call option：$c = V_0\cdot N\left(d_1\right) - D\cdot e^{-r\cdot T}\cdot N\left(d_2\right)$ 其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{V_0}{D} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

[5] Down-and-in障礙買權：若資產價值在到期日前沒有碰觸門檻，則買權失效。反之若有碰觸門檻，則買權存在。其價值為$\left(S_T - K\right)^+$，S_T:到期日股價，K:履約價。Down-and-in障礙買權：

$$c' = V_0\cdot\left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1}\cdot N\left(y_1\right) - D\cdot e^{-r\cdot T}\cdot\left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1}\cdot N\left(y_2\right) \text{ 其中 } y_1 = \frac{\ln\frac{B^2}{V_0\cdot D} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$y_2 = y_1 - \sigma\sqrt{T}$$

其中 $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{V_0}{D} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ （27）

$$y_1 = \frac{\ln\dfrac{B^2}{V_0 \cdot D} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}}，y_2 = y_1 - \sigma\sqrt{T} \qquad (28)$$

所以，債券現值為

$$D_0 = V_0 - E_0 = V_0 - V_0 \cdot N(d_1) - D \cdot e^{-r\cdot T} \cdot N(d_2) c' -$$
$$V_0 \cdot \left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N(y_1) + D \cdot e^{-r\cdot T} \cdot \left(\frac{B}{V_0}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N(y_2) \qquad (29)$$

V_0:公司現值，E_0:股東權益現值，D:債券面額

r:無風險利率，T:到期日，σ:公司資產風險，B:違約門檻價值

第二節 數值方法 SJ-DFPM

Black 和 Cox（1974）發表 FPM 中，假設公司資產價值在連續時間條件下，一旦公司價值在任一時間點低於違約門檻，即公司宣告違約。另外 Black 和 Cox（1974）也假設永續債券為連續地支付債息。Leland（1994）及 Leland 和 Toft（1996）除了延續 Black 和 Cox 永續債券連續地支付債息外，還增加了連續繳交公司的營業所得稅及破產成本。但是，在現實社會中，公司的財務報表、重大的營運消息、債息的支付或債券的償還、營業所得稅的繳交、甚至是公司違約支付的破產成本…等，皆是以離散時間點促使公司資產價值地改變，而非是連續的變動公司資價值。此外 FPM 假設違約門檻為一常數，實際上當公司債償還部份公司債後，違約門檻應向下做修正，但 FPM 無法做到違約門檻隨著部份公司債償還而變動。

Wan-Pei Du（2007）提出了創新數值方法「DFPM」，以離散時間點來模擬支付公司債息及償還公司債，以及當部份公司債償還時違約門檻會伴隨著公司債權減少而降低。DFPM是結合Bino-Trinomial Tree（簡寫BTT）及階梯樹（Stair Tree）的創新數值方法。BTT可以解決使用樹模型（tree model）產生的分佈誤差（distribution error）[6]及非線性誤差（nonlinear error）[7]，進而使評價的收斂速度加快且更有效率及更準確。階梯樹則可以以離散跳躍來當作債息的支付及債券的償還。

[6] Figlewski和Gao（1999）定義分佈誤差為公司股價服從連續對數常態分佈，但模型以離散機率分佈來表示公司的連續股價。

[7] Figlewski和Gao（1999）定義非線性誤差由選擇權價值函數所造成的。

一、Bino-Trinomial Tree

Dai 和 Lyuu（2006a）提出 Bino-Trinomial Tree 模型（如圖 3-2），以 CRR 二元樹結構為主。假設 CRR 二元樹每期 Δt 的時間，將 CRR 二元樹首兩期截斷產生了 A、B 及 C 三個點，將這三個結點使用三元樹結構結合，令三元樹根點為 S_0 及期間為 $\Delta t'$，滿足 $\Delta t \le \Delta t' \le 2\cdot\Delta t$。由根點 S_0 展開一個三元樹，其機率分別為

$P_u = \dfrac{\Delta_u}{\Delta}$ 、 $P_m = \dfrac{\Delta_m}{\Delta}$ 及 $P_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta}$ （34）（$0 \le P_u, P_m, P_d \le 1$），其中

$$\mu = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\Delta t \text{ 、 } Var = \sigma^2\Delta t \text{ 、 } \hat{\mu} = \ln\left(\frac{S_B}{S_0}\right) \tag{30}$$

$$\beta = \hat{\mu} - \mu, \beta \in \left[-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t}\right] \tag{31}$$

$$\alpha = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{32}$$

$$\gamma = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{33}$$

$\alpha > \beta > \gamma$

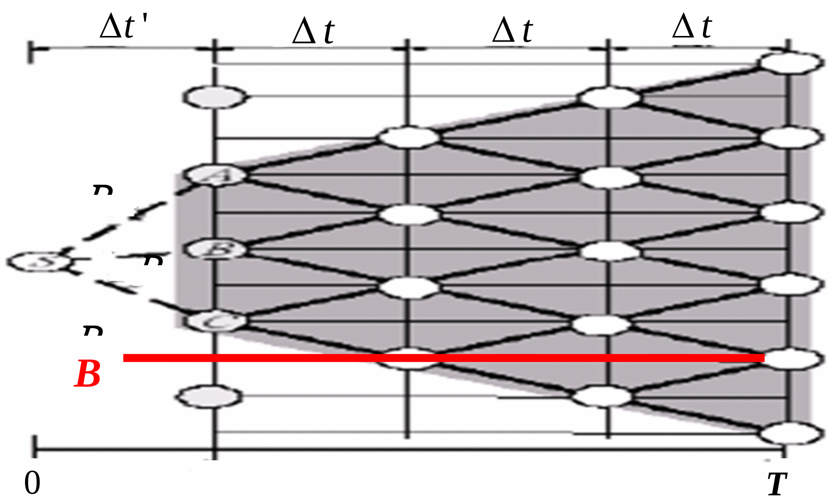
S_0:三元樹起始節點值

S_B:三元樹中間結點 B 值

σ:股價波動率

$$\begin{aligned} \Delta &= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \\ \Delta_u &= (\beta\gamma + Var)(\gamma-\beta) \\ \Delta_m &= (\alpha\gamma + Var)(\alpha-\gamma) \\ \Delta_d &= (\alpha\beta + Var)(\beta-\alpha) \end{aligned} \tag{34}$$

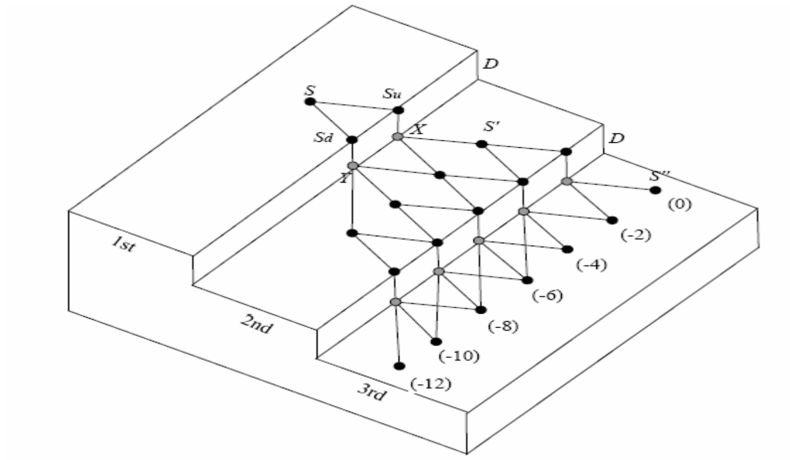
三元樹節點後接 CRR 二元樹，其向上的機率 $P\_u = \dfrac{e^{r\cdot\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$，向下的機率 $P\_d = 1 - P\_u$。其中 r:無風險利率。



『圖 3-2』 BTT

二、Stair Tree

Dai和Lyuu（2006b）提出階梯樹的數值方法（如圖 3-3），用以解決當公司支付股利時[8]，會產生後續的二元樹結點無法重合，且樹狀大小將成指數展開。階梯樹主要將支付股利視為樓梯般下降，如圖。當結點價值下降股利後，接著再以BTT模型展開。



『圖 3-3』 Stair Tree

三、數值方法 SJ-DFPM

延續 DFPM（discrete first passage model）方法以股票選擇權概念處理公司資產及支付固定債息、償還公司債，且違約門檻隨公司債償還而變動。本文使用 SJ-DFPM（stochastic jump-DFPM）方法除了處理 DFPM 面臨的固定跳躍問題外，對於因盈餘不同而繳交不同額度的稅、破產成本…等皆可處理，進而觀測公司在到期日前是否有違約的可能。SJ-DFPM 數值方法除有下列點優勢，其中（1）~（3）為 Wan-Pei Du（2007）提出：

（1）FPM 為連續時間觀測公司資產變化，與現實不符合。現實中公司財報、重大資訊的發佈…等以年、季、月甚至是日等離散時間公告。公司債或債息償還皆為離散償還。因此，以離散模擬較連續模型貼近現實。

（2）FPM 以樹模型來評價選擇權，會產生非線性誤差。而 DFPM 利用 BTT 可以解決這個問題。

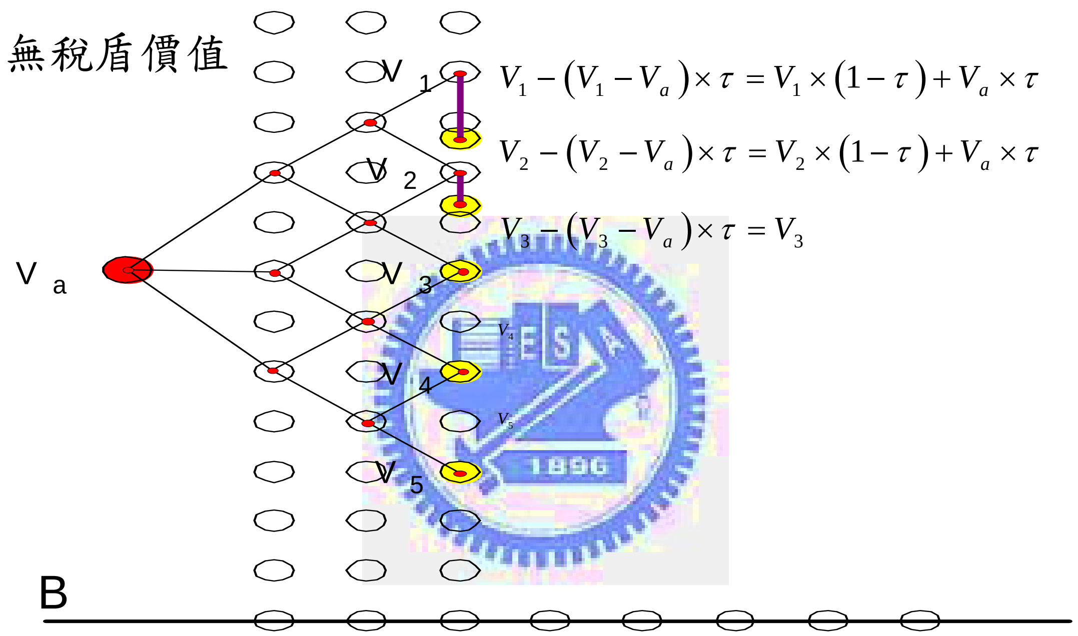
（3）階梯樹可以解債息支付產生資產下降的問題。

（4）Leland（1994）及 Leland 和 Toft 提出債券的封閉解，指出為連續賦稅，這與現實不合。現實繳稅為年繳且會依公司盈餘狀況而改變，且若公司呈現虧損則無需繳稅。

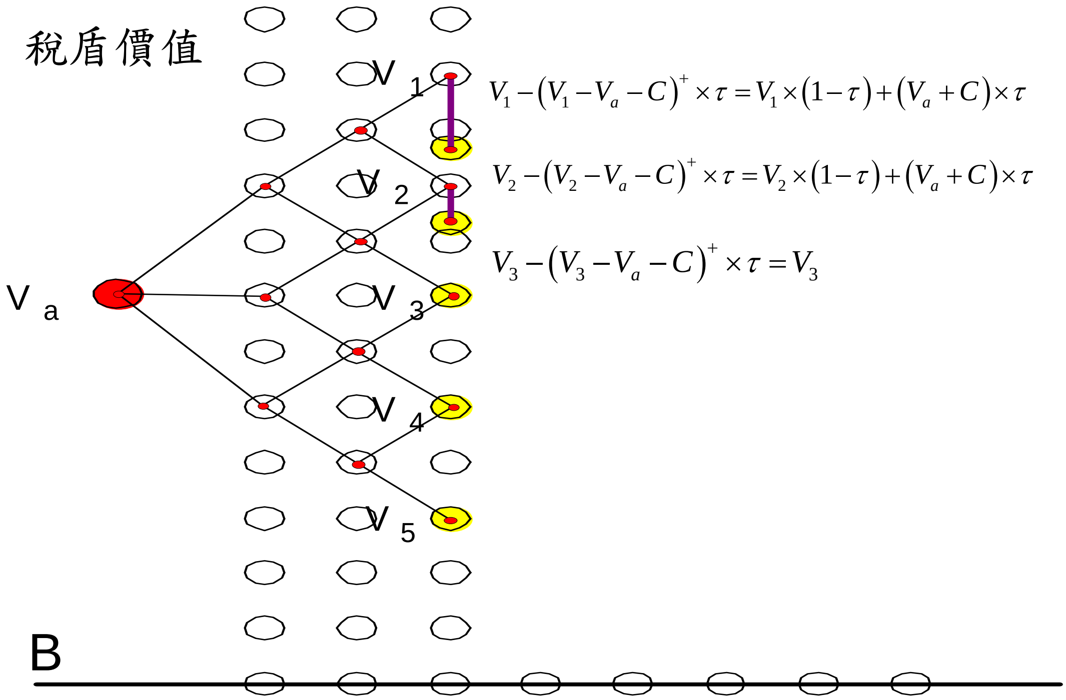
（5）假設違約沒有成本，實際上違約有破產成本的問題存在。

[8] Frishling（2002）說明三種處理股票股利的方法。

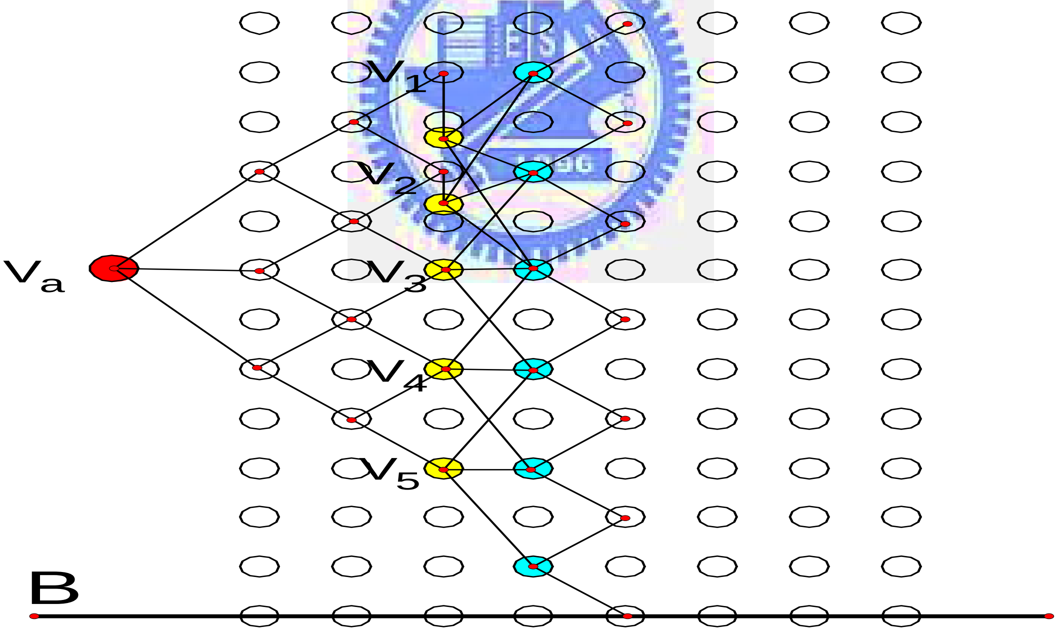
假設視公司資產V_A的資本結構為股東權益E及一筆到期日為T，面額為D的公司債券。公司的波動率σ_A、無風險利率r、違約門檻B、公司的營業所得稅τ、破產成本為αB，$0 \le \alpha \le 1$，時間為T，檢視期為L（如：季檢視、年檢視），檢視期L將時間T切割成k個區間。利用 BTT 展開期間分別為$\Delta t'$及Δt的三元樹及二元樹。機率如（34）。當支付債息或償還公司債時，公司資產V_A向下跳躍固定價值。或公司繳交公司營業所得稅，則公司資產V_A會因不同的起始價值，而有不同的盈餘，即以公司資產變化當作公司的 EBIT。進而造成公司資產V_A有不同的幅度的跳躍。違約門檻也會因公司債及破產成本變動而改變。則依據階梯樹公司資產跳躍下降，下降後再接一組 BTT，以此類推接下去。見圖 3-4、圖 3-5、圖 3-6、圖 3-7、圖 3-8、圖 3-9 及圖 3-10。



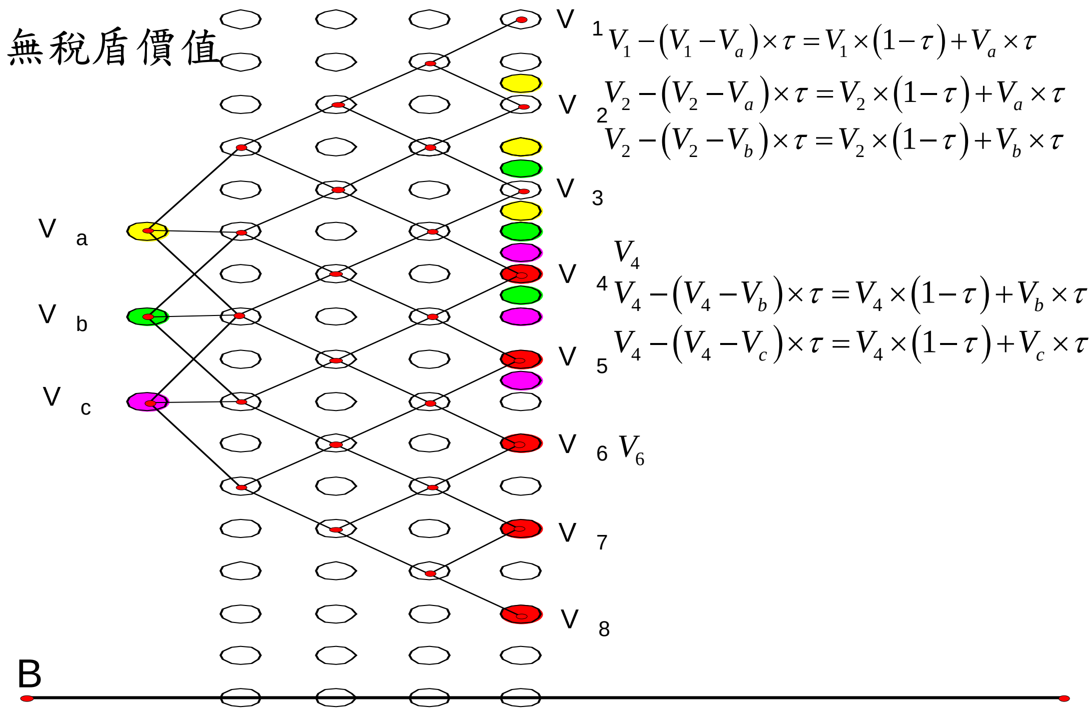
『圖 3-4』 無稅盾條件下的 jump1



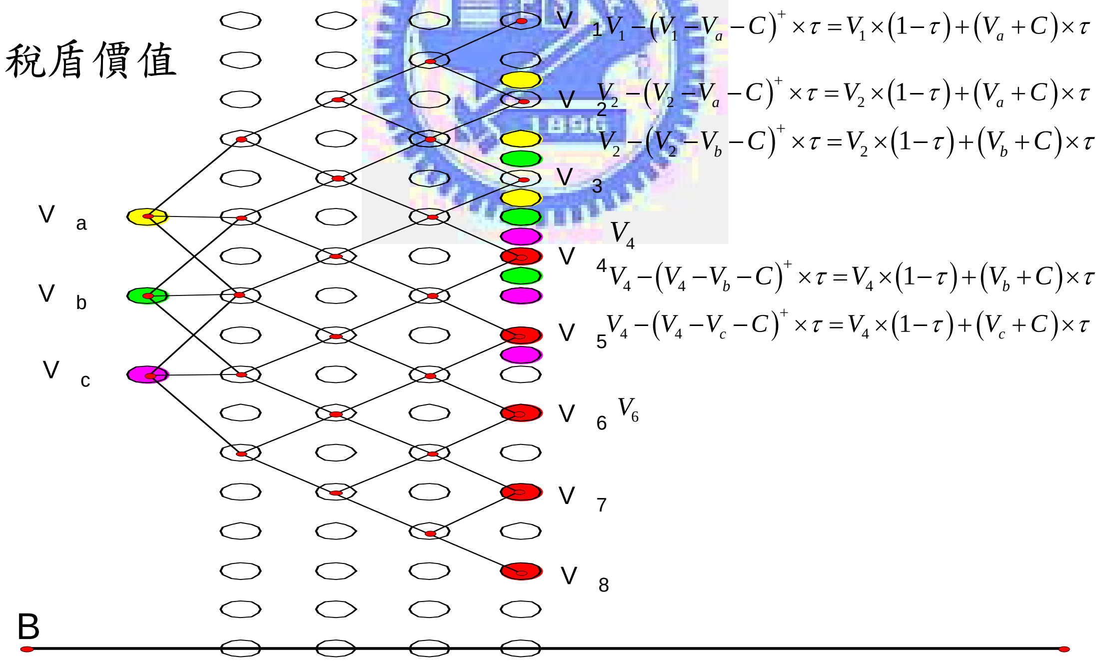
『圖 3-5』 稅盾條件下的 jump1



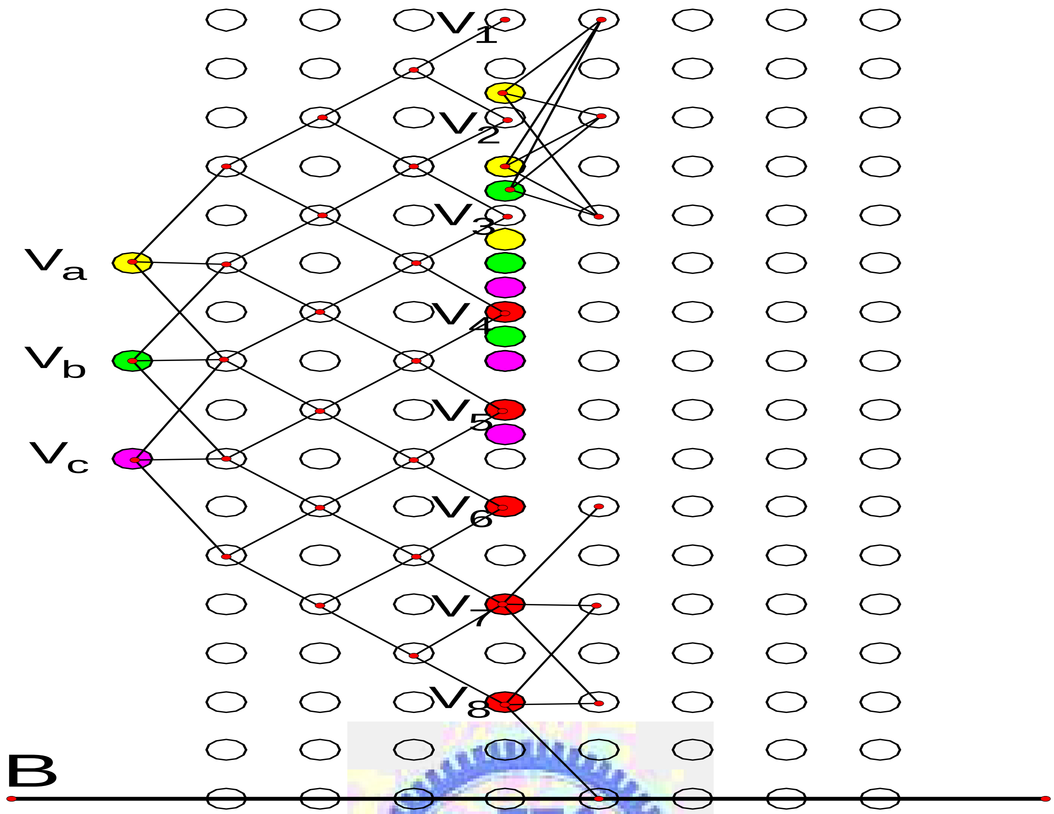
『圖 3-6』 課稅條件下的 jump1



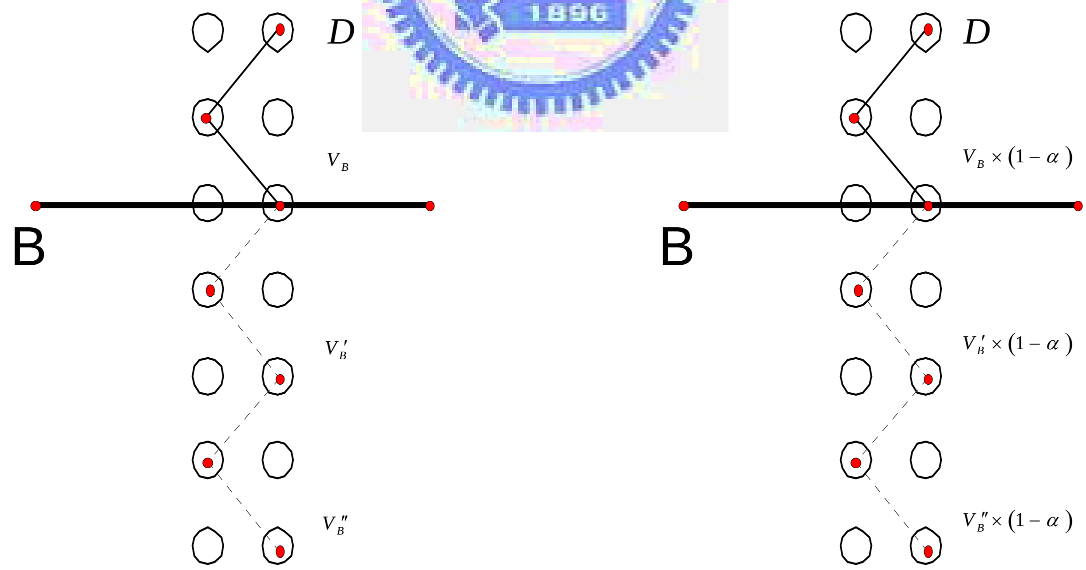
『圖 3-7』 無稅盾條件下的 jump2



『圖 3-8』 稅盾條件下的 jump2



『圖 3-9』 課稅條件下的 jump2



『圖 3-10』 無破產成本 有破產成本

第三節 參數定義與資料來源說明

一、參數定義：

SJ-DFPM 中的參數有：公司資產V、股東權益E、到期日為T，面額為D的公司債券、公司的波動率σ、無風險利率r、違約門檻B、公司的營業所得稅τ、破產成本為αB，$0 \le \alpha \le 1$。公司資產採用 Gaver 和 Gaver（1993）提出的公司資產等於公司權益市值加上公司的負債。無風險利率為十年期政府公債利率。公司波動率採用 KMV（2001）提出：公司資產服從對數常態分佈，使用 Ito's Lemma 求出公司波動率$\sigma = \dfrac{\sigma_E \cdot V_E}{V \cdot N(d_1)}$。其中$V_E$:股東權益價值；$\sigma_E$:股東權益波動率；

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_A}{D} + \left(r + \frac{\sigma_A{}^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}}$$

，$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$。股東權益波動，採用 John-Hull 選擇權、期貨及衍生性金融商品書提及的方法：$\sigma_E = s \cdot \sqrt{12}$，其中$s = \sqrt{\dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - \bar{u} \right)^2}$，

$u_i = \ln\left(\dfrac{S_i}{S_{i-1}} \right), i = 1, 2, \cdots, n$，$S_i$:第$i$月的股票收盤價，$i = 1, 2, \cdots, n$。

第四章　模擬分析

第一節 SJ-DFPM 數值方法模擬結果

Merton 模型只考慮在到期日是否公司資產有無違約發生。FPM 以連續時間連監測公司資產是否有無發生違約。這兩種模型不符合實際市場，現實社會中財務報表、重大資訊發佈…等皆是離散時間點。因此，SJ-DFPM 以離散時間點來模擬更符合現實社會。

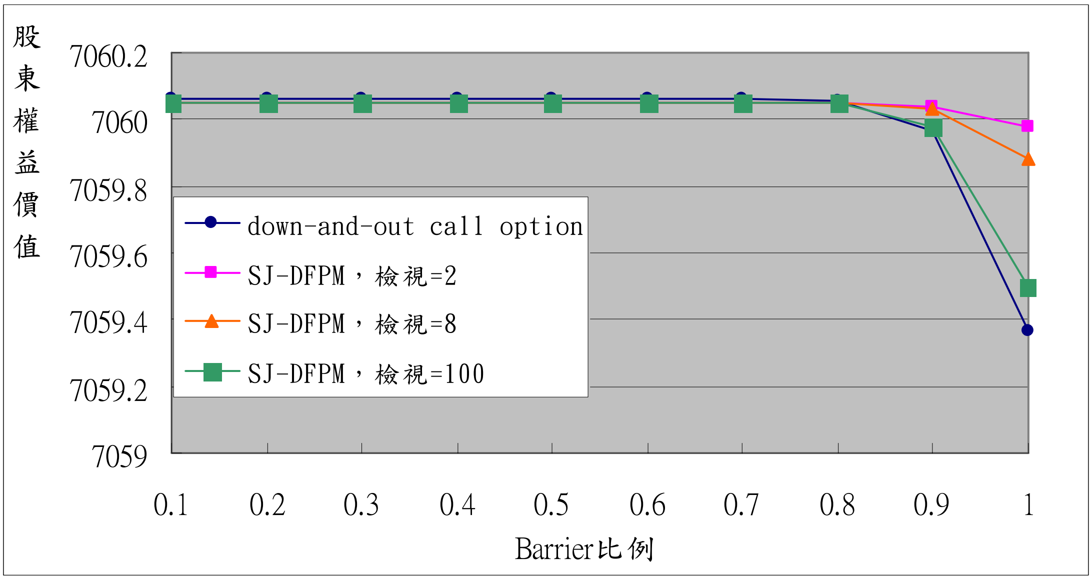
一、SJ-DFPM 模擬連續時間：

Merton 模型（1974）視公司資產為股票，股東權益為股票選擇權，公司償還公司債或支付債息則相當於支付股票股利。並依據 Black 和 Scholes 公式以連續的折現的概念，將償還債務或支付債息視為連續償還。這個假設與真實狀況不符合。因此，本文採用離散時間償還的概念，當公司償還公司債或支付債息及支付破產成本時，公司資產呈現固定跳躍。當公司繳交公司營業所得稅時，公司資產呈現隨機跳躍，如圖 3-4 ~ 圖 3-7。

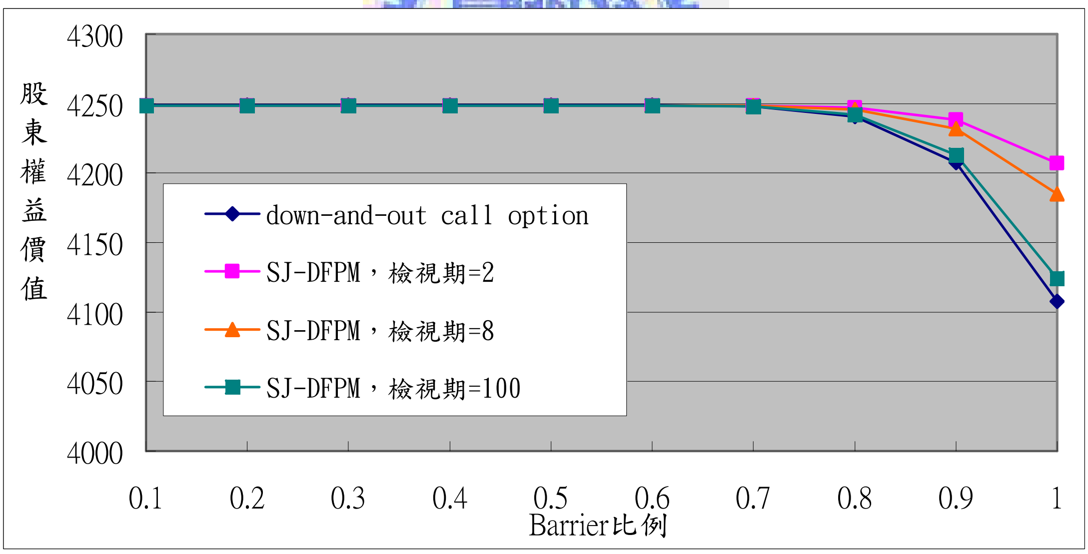
圖 4-1、圖 4-2 使用SJ-DFPM與down-and-out障礙買權數值模擬股東權益價值的比較，其中公司債券價值分別為 3000 及 6000。從圖 4-1、圖 4-2 中觀察使用SJ-DFPM模擬down-and-out障礙買權，當檢視期[9]切割的愈大時，SJ-DFPM模擬出來的值，就愈接近down-and-out障礙買權。另外，也可以發現當公司負債愈高時，股東權益價值較容易在較低的違約門檻開始緩慢下降，且當違約門檻逐漸上升時，下降的幅度會因負債的提高而使下降的幅度加大。最後，由圖 4-1、圖 4-2 可獲得一個結論為股東較傾向減少檢視期的次數，如此一來股東權益價值將提高。

因此，在違約門檻為零時，將發現股東權益價值在此門檻下價值極大化。但是，這和 Leland（1994）提出在對股東權益價值利用一階偏導數，求出最適違約門檻使股東權益極大化不太符合。主要的原因是，Leland 假設股東不能任意變賣公司現有的資產，若有公司債或債息要償還，則股東需向外籌資或由股東自行出資償還（即第二章，第四節討論 $\kappa = 0$ 的情況）。換句話說，即違約門檻為內生的變數，股東可以自行決定何時不再支付債權，使公司發生違約，同時使得自身的權益價值達到最大化。而本文是假設股東可以拿取公司資產價值去償還公司的債務（即第二章，第四節討論 $\kappa \neq 0$ 的情況），因此，違約門檻假設的愈低對股東權益價值就會相對地提高。

[9] 即監測公司資產有無發生違約的離散時間點。



『圖 4-1』SJ-DFPM 與 down-and-out 障礙買權數值模擬股東權益價值的比較（X 軸：違約門檻為債券面額的比例；Y 軸：股東權益價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債券面額 3000；公司債債息 0%；公司資產價值波動率 40%；無風險利率 2%；破產成本 0%）



『圖 4-2』SJ-DFPM 與 down-and-out 障礙買權數值模擬股東權益價值的比較（X 軸：違約門檻為債券面額的比例；Y 軸：股東權益價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債券面額 6000；公司債債息 0%；公司資產價值波動率 40%；無風險利率 2%；破產成本 0%）

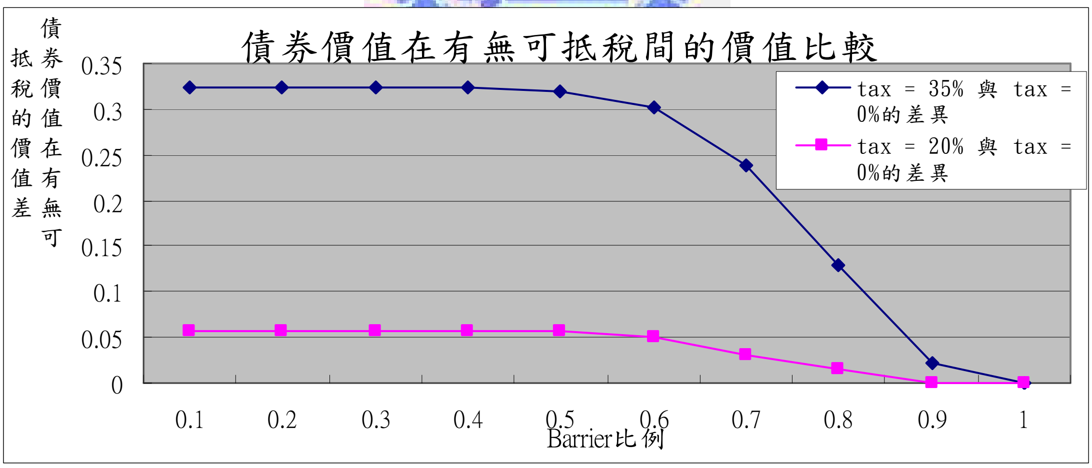
二、加入離散跳躍因子

（一）加入「公司營業所得稅」

本文首先假設公司營業所得稅為單一稅率。圖 4-3 使用 SJ-DFPM 模擬債券

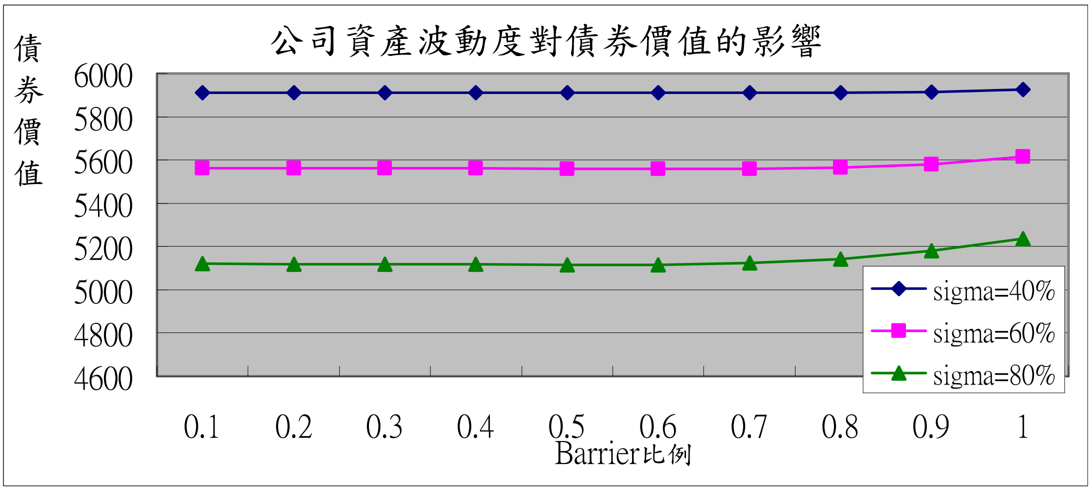
價值在債息可抵減與不可抵減的比較。從圖 4-3 中可以觀察到一家債息可抵公司營業所得稅的債券價值，即稅盾價值，大於有一家債息不可抵公司營業所得稅的公司。而且當公司的營業所得稅愈高，債權人的價值也會相對地提高。因此，一家有負債公司，在債息可抵稅的情況下，會因增加或提高公司營業所得稅而提高了債權人的價值。但是，稅盾價值為債券面額乘上票面利率再乘上稅率不符合。主要是因為稅盾的價值是由債權人及股東一起瓜分。因此，利用同樣的方法即可算出股東的稅盾價值。這和 Modigliani 及 Miller（1963）提出資本結構有關稅理論，理論說明一家有負債公司的價值會等於一家無負債公司的價值加上稅盾效果一致。另外，圖 4-3 中也可發現，當違約門檻提高時，股東權益的價值差會逐漸縮小。主要原因為違約門檻的提高會提高債權的價值，相對地即會降低股東權益的價值，因此，無論有無公司營業所得稅的股東權益的價值都會減小，造成了其價值差的縮小。

圖 4-4 使用 SJ-DFPM 模擬公司資產波動度對債券價值的變化，從圖中觀察公司資產波動度逐漸地提高（$\sigma=40\% \rightarrow \sigma=80\%$），會發現公司債券的價值會因公司違約風險增加（公司資產波動度上升）而降低公司債券的價值。另外也可發現公司債券價值會因公司資產價值波動度逐漸增加（$\sigma=40\% \rightarrow \sigma=60\% \rightarrow \sigma=80\%$），而使得增加每單位公司資產波動度對公司債券價值下降幅度大幅度的上升。這和 Leland（1994）和 Leland 及 Toft（1996）所提出公司資產波動度與公司債券價值呈現反相變動關係一致。



『圖 4-3』SJ-DFPM 模擬債券價值在債息可抵減與不可抵減的比較

（X 軸：違約門檻為債券面額的比例；Y 軸：不同稅率間股東權益價值的差。時間 T = 1；公司資產價值 10000；公司債券面額 6000；公司債債息 3%（半年支付）；公司資產價值波動率 60%；無風險利率 2%；破產成本 0%）



『圖 4-4』SJ-DFPM 模擬公司資產波動度對債券價值的變化

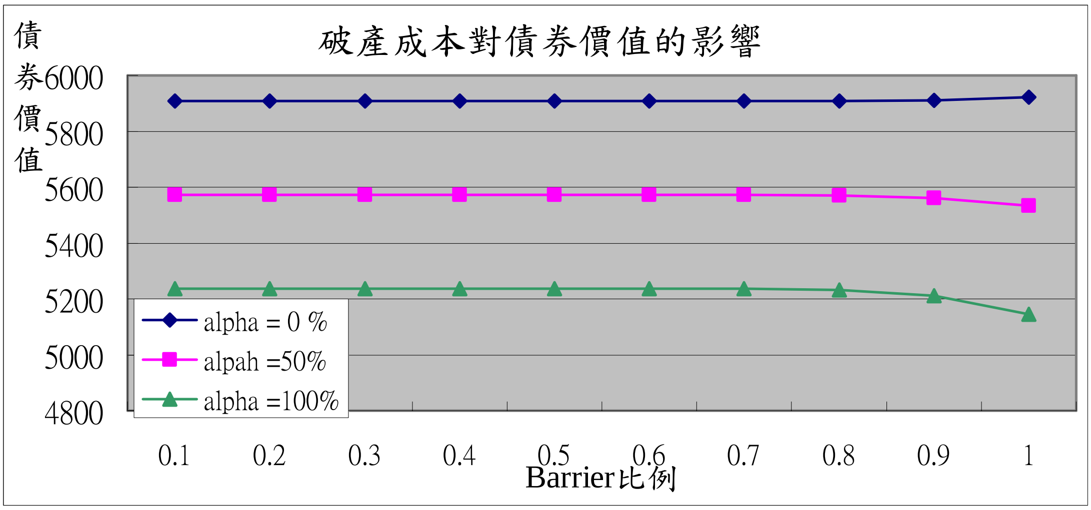
（X 軸：違約門檻為債券面額的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債券面額 6000；公司債債息 3%（半年支付）；無風險利率 2%；公司稅率 35%；破產成本 0%）

（二）加入「破產成本」

圖 4-5 使用 SJ-DFPM 模擬破產成本對公司債券價值的變化。圖中觀察當提高破產成本時，債券價值會因破產成本的提高而下降。這和 Leland（1994）和 Leland 及 Toft（1996）所提到當公司債券價值與破產成本呈現反相變動關係一致。不過 Leland（1994）和 Leland 及 Toft（1996）主要延續 Modigliani 及 Miller（1963）假設公司的 EBIT（ 稅前息前盈餘）為常數，因此公司繳交的公司營業所得稅為固定的常數，這與現實狀況不符合。現實中公司繳交的營業所得稅會因不同年度的 EBIT 而作改變，所以，本文為了接近現實狀況，以公司資產變化視為當年度的 EBIT，以此做 SJ-DFPM 數值模擬。另外，從圖 4-5 也可察覺在無破產成本條件下，債券價值會因違約門檻比例接近一時（即違約門檻等於債券面額，稱做 protected debt）而增加。然而，當破產成本逐漸提高時，愈接近違約門檻比例為一的債券，其債券價值會愈低。主要原因是因為提高違約門檻，在無破產成本情況下，是用來保護債權人的債權，但因加入了破產成本，原本用來保護債權人的債權，會因破產成本的增加，將部份公司價值轉移給清算人（即本文第二章，第四節，假設破產成本為 α 倍的違約門檻）。

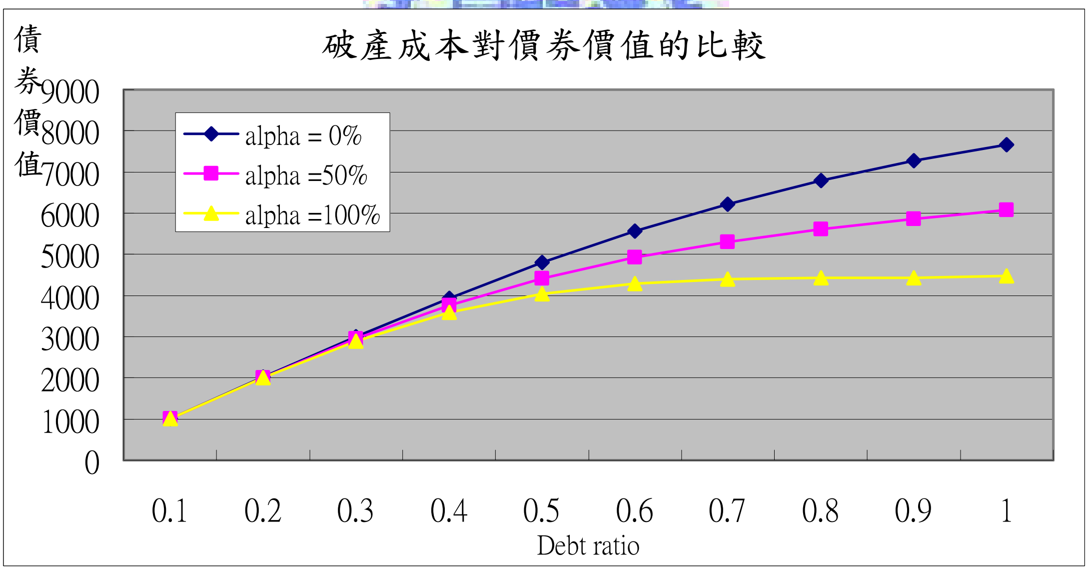
另外，靜態抵換理論指出 Modigliani 及 Miller（1963）提及最佳的資本結構為百分之百為負債的公司，如此才可獲得最大的稅盾價值的結果是不符合邏輯的。實際上提高負債雖然增加稅盾效果，但同時也提升其它成本，如破產成本…等。所以，圖 4-6 模擬破產成本對公司債券價值的比較，從圖中可發現破產成本的提高在高負債比例時，公司債券價值會如靜態抵換理論所提，公司債券價值會大幅

度地下降。



『圖 4-5』SJ-DFPM 模擬公司資產波動度對債券價值的變化

（X 軸：違約門檻為債券面額的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債券面額 6000；公司債債息 3%（半年支付）；公司資產價值波動率 60%；無風險利率 2%；公司稅率 35%）



『圖 4-6』SJ-DFPM 模擬破產成本對公司債券價值的比較

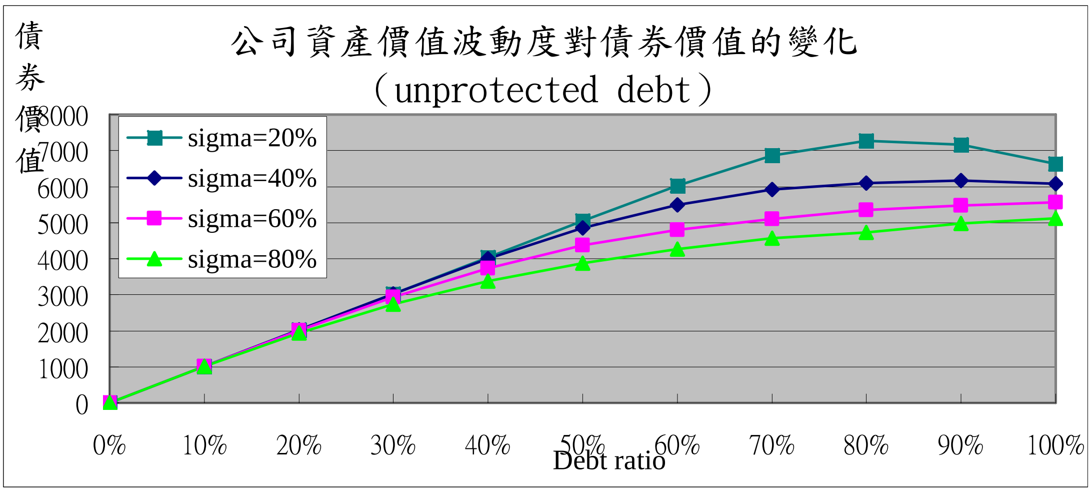
（X 軸：負債佔公司資產價值的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債債息 3%（半年支付）公司資產價值波動率 60%；無風險利率 2%；公司稅率 35%；違約門檻 0.6*債券面額）

三、Protected debt 與 Unprotected debt 的比較

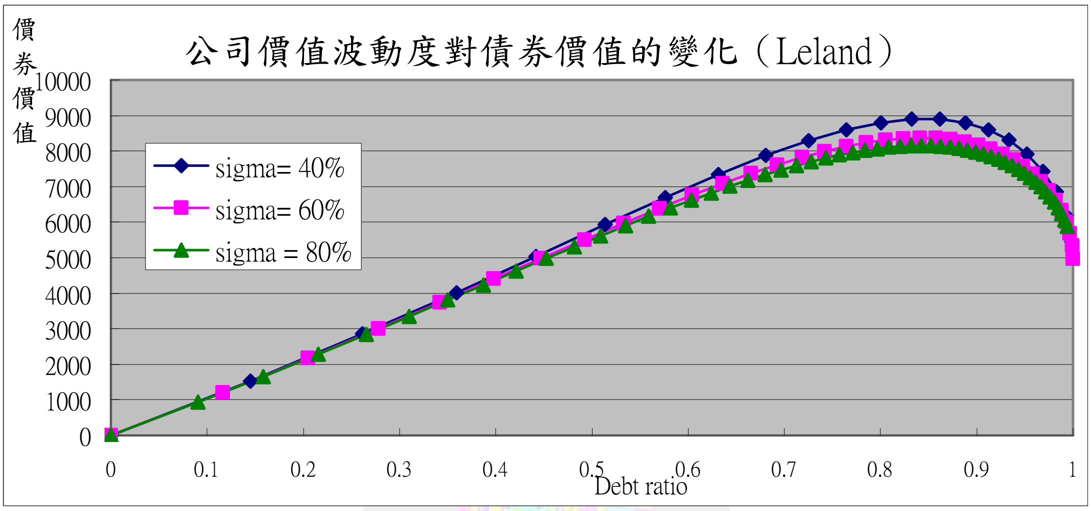
圖 4-7、圖 4-8 使用 SJ-DFPM 模擬公司資產價值波動度對債券價值的比較

（unprotected debt）。從圖 4-7、圖 4-8 中可觀察出當公司資產價值波動度增加時，債券價值隨著降低。同時也可發現公司資產價值波動度愈大時，債券價值會因負債比例增加而使得上升幅度減緩。所以從債權人的觀點來看，會傾向投資公司資產價值波動度較小的公司投資（即公司違約機率較小的公司），以獲取債權最大價值。而從圖 4-9 中當公司資產價值波動度愈大時，股東權益的價值將大幅度地上升。所以從股東的角度來觀察，股東將偏好投資風險較大的投資計劃來提高自身的權益價值，同時間也可降低債權人的價值。這和 Jensen 及 Meckling（1976）、Leland（1994）和 Leland 及 Toft（1996）所提及當公司債券價值未受契約保護時，股東將喜好高風險、高報酬的投資活動以增加股東權益的價值一致。另外，靜態抵換理論也提及，當股東做出利己的投資決策，如公司資產的替換、投資不足、債權稀釋（第二章，第二節）。可能會損及債權人的權益價值，進而衍生出股東與債權人之間的不信任關係，即代理問題。

在圖 4-7 的圖形中可觀察出在公司資產價值波動度較低時，如 20%、40%。債券價值曲線呈現一個開口向下的二次曲線，因此在最適的 debt ratio 下，可求出債券價值的最大值。而在公司資產波動度較大時，卻沒有上述的情況，而是隨著 debt ratio 的提高，債券價值也跟著增加。主要原因為公司資產波動度較大時，公司的違約機率也相對提高，債權人承受的風險也伴隨著增加，造成債權人要求的債權價值愈高愈好。圖 4-8 為 Leland（1994）利用永續債券求出的封閉解所得到的結果。圖形中無論在哪個公司價值波動度下，皆有一個最適 debt ratio 下，可求出債券價值的最大值。然而圖 4-7 與圖 4-8 在相同條件下，為何有如此的差異？Leland（1994）是假設在股東不可任意變賣公司資產的情況下來做探討（$\kappa = 0$），公司償還公司債或支付債息主要是由股東自行出資償還或向外籌資，因此，公司的違約時間點為股東自行決定（違約門檻為內生變數）。本文假設在 $\kappa \neq 0$ 股東可使用公司資產來償還債務情況下做探討，因此，公司違約的時間點主要在公司資產低於違約門檻時發生（違約門檻為外生變數）。

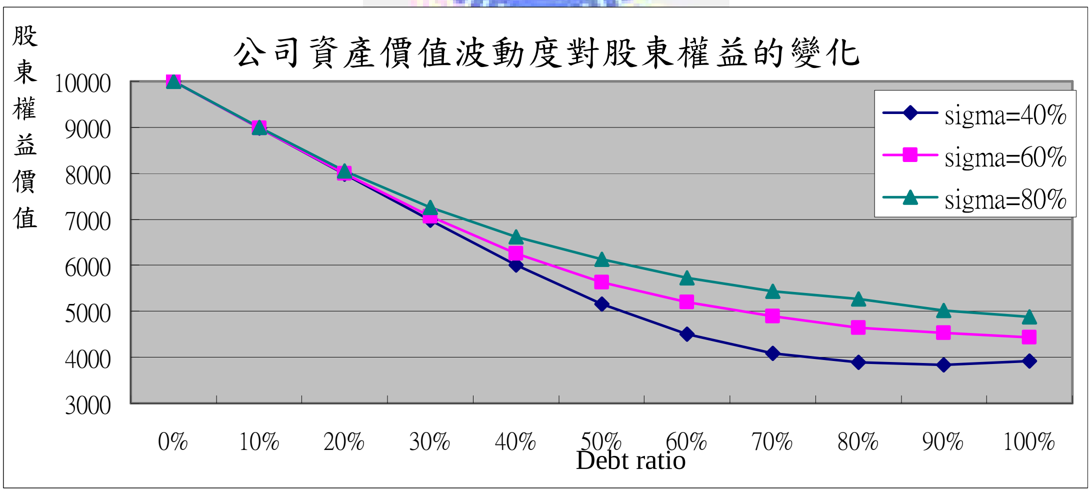


『圖 4-7』SJ-DFPM 模擬公司資產價值對公司債券價值的比較（unprotected debt）（X 軸：負債佔公司資產價值的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債債息 3%（半年支付）；無風險利率 2%；公司稅率 35%；破產成本 50%；違約門檻 0.3*債券面額）



『圖 4-8』Leland 提出公司資產價值的封閉解對公司債券價值的比較（unprotected debt）

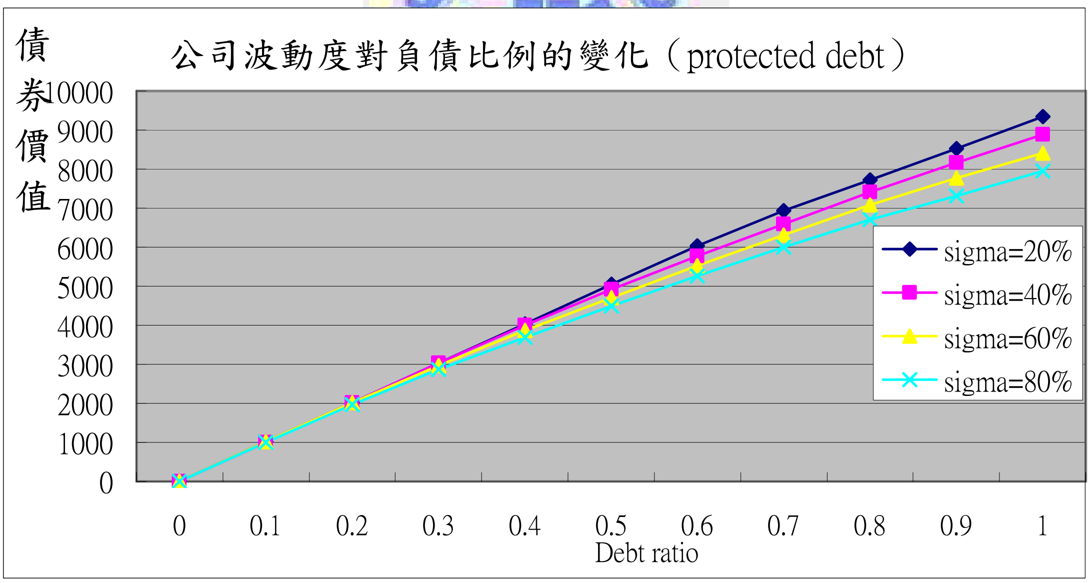
（X 軸：負債佔公司資產價值的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債債息 3%（半年支付）；無風險利率 2%；公司稅率 35%；破產成本 50%；違約門檻 0.3*債券面額）



『圖 4-9』SJ-DFPM 模擬公司波動度對股東權益價值的比較（unprotected debt）（X 軸：負債佔公司資產價值的比例；Y 軸：股東權益價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債債息 3%（半年支付）；無風險利率 2%；公司稅率 35%；破產成本 50%；違約門檻 0.3*債券面額）

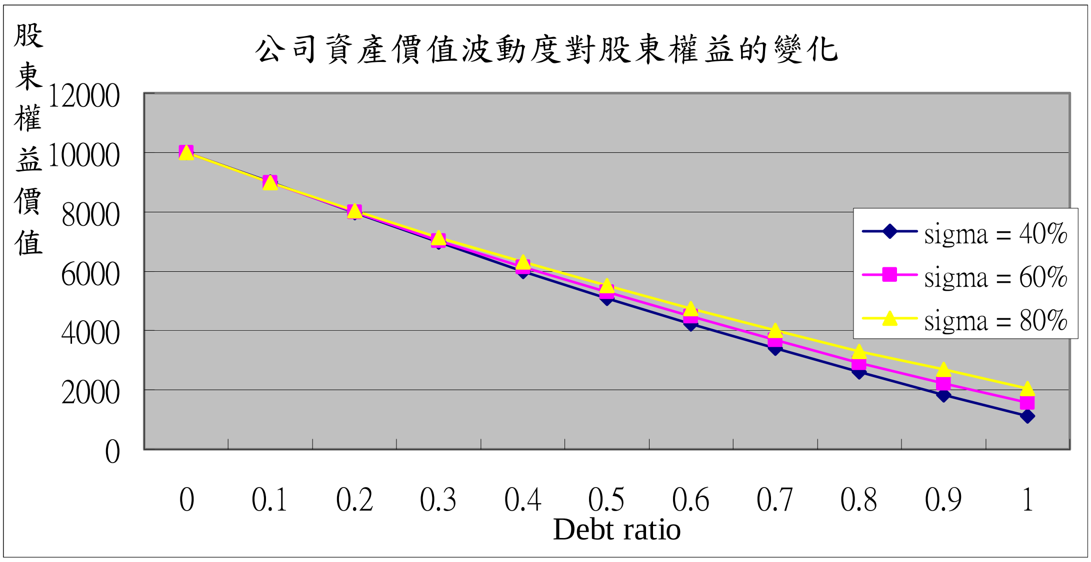
圖 4-10 使用 SJ-DFPM 模擬公司波動度對負債佔公司資產價值桿槓比例的比較（protected debt）。從圖 4-10 中可觀察出當公司資產價值波動度增加時，債券價值會隨著波動度增加而降低（與 unprotected debt 結果一樣），所以從債權人的觀點來看，會傾向投資公司資產價值波動度較小的公司投資，以獲取債權最大價值。圖 4-11 使用 SJ-DFPM 模擬公司波動度對股東權益價值的比較(protected debt）從股東的角度觀察，投資高風險的投資計劃對於提高自身的權益價值有限，因此，股東在 protected debt 情況下，會傾向公司波動度較低的計劃。這和 Leland（1994）結果一樣。protected debt 的圖形與 Leland（1994）考慮在 protected debt 的情況下的圖形一樣，本文就不再贅述。

由圖 4-7～ 圖 4-11 可推測出債權人傾向投資公司資產價值波動度較小的公司及債權有受契約保護的公司債券投資，以保障債權人的債權價值。這個部份和 Leland（1994）和 Leland 及 Toft（1996）所提到公司為何要發行受契約保護的公司債券，主要是因為債權人與股東之間的代理問題所產生一致。而股東在 protected debt 情況下，會傾向低風險的計劃。在 unprotected debt 情況下，則傾向投資高風險的計劃，來提高自身的價值，降低債權人的價值。



『圖 4-10』SJ-DFPM 模擬公司波動度對負債佔公司資產價值桿槓比例的比較（protected debt）

（X 軸：負債佔公司資產價值的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債債息 3%（半年支付）；無風險利率 2%；公司稅率 35%；破產成本 50%）



『圖 4-11』SJ-DFPM 模擬公司波動度對股東權益價值的比較（protected debt）
（X 軸：負債佔公司資產價值的比例；Y 軸：公司債券價值。時間 T＝1；公司資產價值 10000；公司債債息 3%(半年支付)；無風險利率 2%；公司稅率 35%；破產成本 50%）

第五章　結論與建議

第一節 結論

在這日新月異的世界，財務衍生性商品的進度，讓許多公司企業運用這些商品來美化財務報表或投資於高槓桿的金融商品。在景氣好時，公司營運一切正常。但在景氣不好時，公司開始發生違約而破產。因此，之前學者以連續時間點來監測公司狀況不符合現實，本文提出新的數值方法 SJ-DFPM，以離散時間點觀察公司資產價值與違約門檻之間的關係。除了償還公司債的跳躍因子外，還增加公司營業所得稅及破產成本因子，使模型能更加符合真實狀況來預測違約的發生。

第一點、SJ-DFPM 數值模擬方法中，放寬了公司未來的 EBIT 為常數的這個假設，使得公司營業所得稅產生的稅盾效果，會伴隨著 EBIT 改變而改變。進而可以修正 M&M 資本結構、Leland 和 Leland 及 Toft…等的基本假設，使公司未來的 EBIT 隨著資產變化而調整，模型更加貼近市場。

第二點、SJ-DFPM 數值模擬方法中，除了稅外，還有破產成本的考量，過去許多學者直接視為理想世界，沒有破產成本的產生。部份學者雖有提及，但都以連續時間點為主來探討破產成本的問題，但這些假設都處於理想狀態。與事實不符合，因此，本文假設在公司資產價值碰觸到違約門檻時才發生違約，破產成本為違約門檻乘上 α 倍 $(0 \le \alpha \le 1)$。

第三點、SJ-DFPM 數值模擬方法中，違約門檻可以依不同時間的檢視狀況，來進行調整，而非如 Black 及 Cox 和 Leland 及其它學者將違約門檻直接假設為固定常數。與現實不符合。

第四點、SJ-DFPM 數值模擬方法中，探討了 protected debt 及 unprotected debt 的情況，在 protected debt 的情況下，股東不再投資高風險、高報酬的計劃，因為投資高風險計畫會造成易違約的產生，對債權人來說，有無違約都可收到債券面額，對股東而言損失就比較大。在 unprotected debt 的情況下，則恰好相反，股東偏好投資高風險計劃，這樣可使自身的價值提高，同時也可使債權價值降低。

第二節 後續研究建議

本文主要在著重於探討首次通模型的一個新數值方法，尚有許多情況及問題尚未解決，本文提供以下幾點做為後續研究之參考：

（一）在$\kappa = 0$的條件下，股東只能自行償還債務或向外籌資清償。通常會事先假設違約門檻為一常數，無論變動或不變動皆是事先給定的某個常數。但實際上應該不是如此，違約門檻應該為在當下的檢視期，從最後一期將公司資產扣除總負債向前折現到檢視期，在檢視期找出當下的違約門檻。換句話說即在檢視期判斷 loan repayment 是否有無大於檢視期的股東權益價值。

（二）若將無風險利率改成隨機利率，則模型能更符合真實市場。

參考文獻

Allan, C. E., W. T. Moore, and R. L. Roenfeldt, 1990, Security Pricing and Deviations from the Absolute Priority Rule in Bankruptcy Proceedings, *Journal of Finance* 45, No.5 1457-1469.

Black F. and J. Cox, 1976, Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, *Journal of Finance* 31, 351-1367.

Dai, T.S. and Lyuu, Y.D., 2006a, The Bino-Trinomial Tree: a Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.

Dai, T.S. and Lyuu, Y.D., 2006b, Efficient Option Pricing on Stocks Paying Discrete or Path-Dependent Dividends with the Stair Tree.

Du, W.P., 2007, A Novel Lattice Model for Evaluating Credit Risk based on Structural Form.

Frishling, V. A Discrete Question, *Risk*, 15 (2002), 115–6.

Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull, "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk", *Journal of Finance*, Vol.50, No.1, 53-86

Haugen, R.A., and L.W. Senbet, 1978, The Insignificance of Bankruptcy Costs to the Theory of Optimal Capital Structure, *Journal of Finance* 33, 383-393.

Leland H. E., 1994, Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, *Journal of Finance* 49, 1213-1252.

Leland H. E. and Klaus Bjerre Toft, Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads, *Journal of Finance* 51, 987-1019.

Modigliani F. and M. Miller, 1958, The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment, *The American Economic Review* 48, 261-197

Modigliani F. and M. Miller, 1963, Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction, *The American Economic Review* 53, 433-443

Robert C. Merton, 1974, On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2

Sinkey, J.F., 1975, A Multivariate Statistical Analysis of the Characteristics of Problem Banks, *Journal of Finance* 30, 21-36.

Warner, J.b., 1977, Bankruptcy costs: some evidence, *Journal of Finance* 32, 239-276.