

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

探討股票市場與債券市場的關聯結構

— 動態 Copula 模型

Modeling Stock-Bond dependent structure
with Time-Varying Copula model

研究生：李振綱

指導教授：王克陸 博士

中華民國九十七年六月

探討股票市場與債券市場的關聯結構
—動態 Copula 模型

Modeling Stock-Bond dependent structure with
Time-Varying Copula model

研究生：李振綱

Student: Chen-Kang Lee

指導教授：王克陸博士

Advisor: Dr. Keh-Luh Wang

國立交通大學

財務金融研究所碩士班



Submitted to Graduate Institute of Finance
College of Management
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science in Finance

June 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年六月

探討股票市場與債券市場的關聯結構

— 動態 Copula 模型

學生：李振綱

指導教授：王克陸 博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

摘要

本文主要目的是要藉由動態 Copula 模型來對股市與債市之間的關聯結構作一個精確的描述，以美國、加拿大、英國、法國、德國的股票指數和十年期公債價格指數來做為研究對象，根據各種可能用來描述股債市關聯結構的 copula 函數(Gaussian、Student t、Frank)，來選出最適當的模型，結果以 Student t copula 為三個 copula 函數中最能夠描述股債市之間關聯結構的模型，指出股債市在呈現正相關的同時也伴隨著 tail dependence 的現象，較能捕捉股債市報酬同時落於極端狀況的機率，並藉由 copula 函數的關聯結構參數來回顧過去 1990 年到 2008 年這段期間，當金融市場發生金融危機時，兩個最主要的投資市場：股市與債市，兩者之間的結構是否發生了轉變，結果發現從 1990 年到 2000 年間股債市維持在正相關的結構，而從 2000 年網際網路泡沫化之後，股債市則產生結構的轉變，由正相關轉為負相關的結構，但在 2003 年之後，發現美國國內股債市關聯性產生劇烈的波動，而主要的原因是跟許多外匯貿易國(如：中國、日本...等)，對美國的出口而長期所累積下來巨額的外匯存底有關，尤其以目前外匯存底居世界第一的中國，這些國家把擁有外匯存底投入在美國的政府公債或房貸抵押證券，使得當時正處於升息的美國，債券價格呈現上下劇烈的波動，導致美國股債市之間的關聯性出現大幅的震盪。

關鍵詞：動態 Copula、關聯結構、相關係數。

Modeling Stock-Bond Dependent Structure with Time-Varying Copula Model

Student : Chen-Kang Lee

Advisor : Dr. Kuh-Luh Wang

Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The purpose of the article is modeling stock-bond dependent structure with time varying copula model. Using daily returns from US、Canada、UK、France、Germany stock index which represent stock market and 10-year government bond index of each countries represent bond market. To select suitable copula function from some copulas have a chance fit stock-bond dependent structure. The results show that, Student t copula is adequate model to fit stock-bond dependent structure. When the correlation between stock-bond is positive trend, indicates the dependent structure on stock-bond accompanied tail dependence and Student t copula are more ability to capture that stock and bond returns fall on extreme. According to estimating copula time varying parameters, we reviewed stock-bond dependent structure from 1990—2008 and indicating stock-bond keep positive correlation coefficients from 1990—2000, but during Internet bomb, the stock-bond correlation change to negative. After the 2003s, the volatility in correlation coefficients is higher in US domestic stock market and bond market. The phenomenon mainly resulted from some exporting countries. Especially, Now China is the first one country of the foreign reserve in the world. So those countries accumulate a big amount foreign exchange reserves and purchase US government bond and some mortgage backed securities (MBS) through foreign exchange reserves. Let US long term bond price volatility is higher when Federal Fund Rate arose. The result in US stock-bond correlation shocks.

Keywords : Time-Varying Copula model、Dependent Structure、correlation coefficients

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
目錄	iii
表目錄	iv
圖目錄	V
一、 緒論	1
二、 Copula 理論	4
2.1 Copula 理論和動態 Copula 模型	5
2.2 Elliptical copula and Archimedean copula	8
2.3 關聯性的衡量	10
2.4 Copula 參數估計方法	11
三、 研究流程架構	12
四、 實證資料	20
五、 實證結果	21
5.1 Copula 參數估計結果	21
5.2 區域落點檢定(Region hit test)	26
5.3 股債市相關結構變異劇烈的探討	30
六、 結論	34
參考文獻	35

表 目 錄

表 1	歐美 5 國股票市場指數以及十年期公債價格指數的敘述統計量.....	18
表 2	歐美 5 國股票市場與債券市場分別的報酬時間序列模型.....	19
表 3	Copula 關聯結構參數的時間序列模型係數估計值.....	20
表 4.1	Region hit test 結果(US & Canada).....	26
表 4.2	Region hit test 結果(UK & France).....	27
表 4.3	Region hit test 結果(Germany).....	28



圖 目 錄

圖 1	常用 copula 函數的 contour plot.....	5
圖 2	美國股市與債市標準化報酬的散佈圖.....	13
圖 3	Copula contour plot (Gaussian、Student t、Frank).....	14
圖 4	估計 rolling 的 Gaussian copula 關聯結構參數.....	15
圖 5	估計 rolling 的 Student t copula 關聯結構參數.....	15
圖 6	估計 rolling 的 Frank copula 關聯結構參數.....	16
圖 7	rolling 的 Frank copula 線性相關係數.....	16
圖 8.1	Student t copula 所估計關聯結構的參數 ρ_t (US & Canada).....	21
圖 8.2	Student t copula 所估計關聯結構的參數 ρ_t (UK & Germany & France).....	22
圖 9	Student t copula 的對稱 tail dependence 係數.....	23
圖 10	六個極端的區域.....	24
圖 11	歐美 5 國十年期政府公債走勢圖.....	29
圖 12	歐美 5 國股票指數走勢圖.....	29
圖 13	中國外匯存底數據.....	30
圖 14	美國十年公債價格指數 vs. 美國聯邦利率.....	31
圖 15	中美貿易循環圖.....	31

一、緒論

資產間的關聯結構常常是投資人在做資產配置或投資組合避險所必須了解的重要量化指標，對於基金的風險控管也是，比方說把資金投資在一些走勢極為正相關的資產，遇到多頭市場固然報酬會加倍，但是如果長時間處於空頭市場，此投資組合就完全沒有避險的效果，反而會造成損失倍增，因此若投資於負相關的資產則可以達到避險的效果，就像一般人認為的股債平衡投資策略(也就是所謂 flight-to-quality，當投資人察覺股票市場將面臨較高的風險時，會轉向購買較安全、風險較低的商品，如政府公債)，而且在以前的金融市場；股市和債市幾乎是一般投資大眾和法人主要在交易的兩大市場，但是股債市確實是從以前到現在都是呈現負相關的結構嗎？投資於股債市是否真的能夠達到避險的效果？

本文研究的目的之一，以歐美 5 個重要工業國家(美國、加拿大、英國、法國、德國)的十年期政府公債指數和股票指數為研究對象，利用動態 Copula 模型來建構股市與債市的關聯結構，目的之二則是要藉由此模型的關聯結構參數來回顧過去當金融市場發生危機時，股債市之間的關聯結構是否會發生轉變？本文描述了歐美 5 國股債市在 1990~2008 年間發生了關聯結構上的轉變，發現股票市場和十年期公債指數從 1990~1999 年長期呈現正相關的結構，在網際網路泡沫後股債市的關聯性轉變為負相關，而且特別注意的是，從 2003 年後，美國國內股債市的結構似乎不如以前那樣穩定，更明確的說，美國國內股債市之間短期相關性的波動變得比以往還要來得劇烈，而這樣對於股債市平衡策略的投資者而言將無法得到適當的避險效果，而本文在第五章的最後則提出一些數據來論證為何在這段期間股債市相關性波動劇烈。

近幾年有許多文獻研究股債市的相關係數主要是受到什麼樣的因素影響，Connolly et al.(2006)檢驗了美國與歐洲國家在 1992~2002 年股價指數和長期政府公債報酬的相關性，研究股票指數的隱含波動度(IV)可以解釋股債市報酬相關的程度，認為股債市的相關係數會因為高隱含波動度指數的日數較高而有負相關的趨勢，在低隱含波動度指數的日數較高時，股債市會有正相關的趨勢，這也符合一般投資人的觀念，當股市處於高度的不確定性(VIX 較高)會使得股債市的避險有較高的效益。接續 Connolly et al.(2006)的

研究，Magnus et al.(2007)也對消費者物價指數(CPI：用來衡量通膨的因子)、股票指數的隱含波動度(VIX)以及國內生產毛額(GDP：用來衡量經濟成長)這三個因子來探討是否會影響股市與債市間的相關性，發現 GDP 對於股債市的相關性並沒有顯著的影響，但 CPI 和 VIX 似乎能夠預期股債市的關聯性，研究發現在高通膨的情形下，股債市的走勢較為一致，負相關則伴隨著低通膨，同樣的在股市不確定因素增加時(也就是 VIX 較高)，股債市則呈現負相關的現象。而在 Lingfeng Li(2002)的研究中，也探討七大工業國在 1958~2001 年的相關係數的變化情形，且利用一些總體經濟因素來解釋股債市之間的相關性，發現預期通膨的不確定性為決定股債市之間相關性的主要因子，當預期通膨浮動劇烈時，股債市的走勢會較為一致，也就是有正相關的趨勢。

本文希望運用以往探討股債市之間關聯性文獻沒有用過的計量方法，來建構一國國內股市與債市間的關聯結構並以質化的方式來解釋以往的文獻中的結果。利用各種不同的 copula 函數特性，來找出較能夠描述各國股債市關聯結構的 copula 函數，發現股債市在呈現正相關時，也伴隨 tail dependence 的現象，尤其以美國與德國較為明顯，也發現雖然在 2003 年以前，各國國內股債市的相關性走勢非常的一致，但在 2003~2007 年間美國國內的股債市相關性變動的特別劇烈，會造成這種情況的原因，本文以經濟面因素的角度出發，在這段時間，國外對於美國公債的需求量大幅度的增加，且主要是來自於近幾年一些長期對美國貿易的出口國利用對美國賺取的巨額外匯存底，投資在美元的資產上，為求安全風險低，則會把這些美元投資在美國的長期政府公債，雖然美國的聯準會此時不斷的調升利率，原本因為通膨預期心理，10 年公債殖利率會快速反應通膨預期上升風險，造成股市與債市同步下跌，但十年期政府公債價格下降幅度卻是不如預期的，因為這些外匯存底龐大的國家對於美國公債的需求，卻使得公債價格上升，而造成股市和債市呈現了反向的走勢，導致自從 2003 年 6 月以後股債市的相關性在正負之間劇烈震盪，股債相關係數的波動度跳增。

近幾年來，運用 Copula 在財務金融領域的研究可說是不勝枚舉，主要有兩大類，第一類是研究公司信用風險違約的關聯性以及對於信用風險衍生性商品的訂價，另一個主題則是研究市場間的關聯結構(如：國際間的股票市場、各國的匯率市場)。第一類是信用風險以及相關信用衍生性商品的研究，探討對於多資產的聯合違約機率的計算，進而用來評價擔保債務憑證(CDO)、一籃子信用違約交換(Basket Default swap)...等信用衍

生性金融商品。尤其以評價擔保債務憑證的研究最為廣泛，因為 copula 函數可以用來描述多資產的聯合違約機率，在 Meneguzzo 和 Vecchiato(2004)應用了 copula 函數來對 CDO 作評價，模擬的結果發現 Student t copula 較為合適，因為 Student t copula 具有可以來描述 tail dependence 的特性，許多研究也發現信用風險具有 tail dependence，也就是說債券的違約具有群聚的現象，Clemente and Romano (2004) 也發現在衡量貸款投資組合的 credit risk 時，具有 tail dependence 的 copula 函數，例如：Clayton、Student t，比 Gaussian copula 具有更高的解釋能力。

第二大類則是研究不同市場以及不同資產間的關聯結構，如股票市場、匯率市場、... 等，或是研究在特定重大事件(如:亞洲金融風暴、911 恐怖攻擊事件)後，資產會有金融傳染(financial contagion)的效應，因為資產報酬為常態分配的假說已經被許多研究所推翻，發現資產報酬分配常常具有厚尾(fat tail)以及高狹峰的現象，當然，資產間的關聯結構也並不都只是具有線性相關(linear dependence)，更不一定符合多元常態分配，而 Copula 則是具有可以描述 non-linearity dependence 的特性。在[14]Patton(2006)更擴展了 Copula 的原理，延伸至動態條件 Copula (Conditional Copula)，因為資產間的結構並非是固定不變的，有時金融市場某些重大的因素衝擊可能會使資產間的結構發生變化，而 [14]Patton(2006)則是以匯率市場為研究對象，探討德國馬克對美元的匯率以及日圓兌美元的匯率之間的關聯結構，發現在歐元引進前，兩個資產間具有明顯的 upper tail dependence 的現象，主要是跟國家的進出口貿易有關，當日本為了保持和德國對於美國出口的競爭優勢，迫使國內貨幣貶值，使得兩國匯率具有強烈的 upper tail dependence，相反的，當本國希望追求本國價格的穩定時，所以當德國的匯率升值時，日本央行也會穩定匯率，而研究發現在歐元制度實施以前，競爭的出口情況支配了穩定價格的情況，使得兩國對美元的匯率貶值時的相關性較升值時高，所以產生了 asymmetric tail dependence，但在歐元制度實施之後，穩定價格的情況支配了競爭出口使得出口國貨幣貶值的情況。

在研究國際股票市場間的關聯結構方面，Eric and Michael(2007)是以亞洲以及拉丁美洲的國家為研究對象，時間背景在亞洲金融風暴前後以及墨西哥風暴前後，實證研究發現 5 個東亞國家(泰國、馬來西亞、印尼、韓國、菲律賓)在經歷亞洲金融風暴使得 lower tail dependence 上升，也就是有 financial contagion 的現象。而在 4 個拉丁美洲國家中(墨

西哥、阿根廷、巴西、智利)，因為墨西哥風暴發生使得各國間的股票市場相關性增加，但並沒有顯著的 tail dependence 上升。而在 Sohnke et al.(2007)的研究中，引用了 [14]Patton(2006)的模型，用歐洲各國的股票指數建立了歐元區域指數(Euro-zone regional index)，利用 Gaussian copula 建構歐洲 12 個國家個別的股票指數與此歐元區域指數之間的關聯結構，發現在 1999 年歐元制度的建立後，一方面穩定了歐元區各國之間的匯率，也使得歐元區幾個股票市場比較熱絡的國家，如：德國、法國、義大利，和歐洲指數的相關性較歐元建立前上升許多，也隱約指出歐元國家在歐元建立後降低匯率風險而增加了國際股票市場間的關聯性。

本文的研究主要是以 [14]Patton(2006)的模型為基礎，以動態 Copula 的架構來建立歐美各主要工業國(美國、加拿大、英國、德國、法國)國內股債市的關聯結構，並以三種不同的 copula 函數來當作初步篩選較能夠建構股市與債市的關聯結構，而研究發現以 Student t copula 最能描述股債市的關聯結構，也顯示出這 5 個國家的股債市關聯結構在 2003 年間都具有一致的相關性，但在 2003 年後，美國以及加拿大的股債市關聯結構卻有異常劇烈變化的現象，以美國最為明顯，本文在 5.3 節中也提出造成此現象的主要原因。



本篇文章的架構如下：第二章將介紹 Copula 的理論以及本文所引用的動態 Copula 模型，以及運用 Copula 的關聯結構參數來衡量兩個市場之間的相關性。第三章則是描述建構關聯結構的流程步驟，以便更加了解兩個市場之間的結構。第四章則是說明研究的資料數據和敘述統計量。第五章則提出實證的結果以及模型的檢定並由過去的金融市場所遭遇的重大事件來探討股債市之間的結構為何會產生變化，第六章提出本文結論。

二、Copula 理論

在研究兩個資產或多資產間的關聯結構時，Copula 模型為近年來常被學者廣泛使用的一種方法，可以先把資產的邊際分配估計出來，再用一個適合的 Copula 函數作連結，來準確的描述資產間的相關程度，特別的是，Copula 不但可以用來描述線性相關的特性，如 Pearson correlation、Kendall's tau...等，也可用來建構具有非線性關聯結構的投

資組合。像是 upper tail dependence(用來描述當兩個資產之間的相關性為正時，在多頭市場相較於空頭市場具有較強烈的相關性，例如：Gumbel copula)、lower tail dependence(例如：Clayton copula)、不對稱的 tail dependence(例如：SJC copula)以及對稱的 tail dependence(例如：Student t copula)，下面為各種常用 copula 函數的圖形可看出其特性，特別注意的是以下幾個 copula 函數的線性相關係數都非常的接近，但可以看出在極端狀況的機率分佈是不同的：

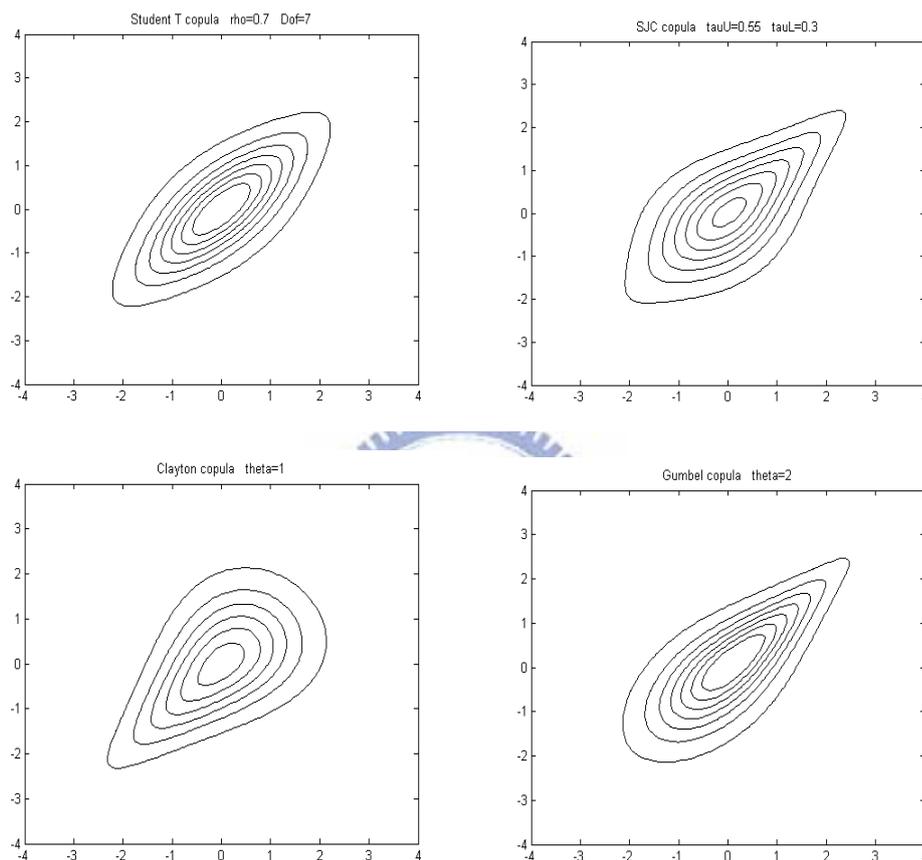


圖 1 常用 copula 函數的 contour plot

2.1 Copula 理論以及動態 Copula 方法

本文在這一節裡要來回顧 Copula 的理論基礎以及如何延伸至動態條件 Copula (Conditional Copula)。一個 copula 函數是用來連結兩個或多個隨機變數的邊際分配函數以及這些隨機變數的聯合分配函數，更明確的說，多個隨機變數組成的聯合分配函數可由邊際分配的隨機變數透過積分機率轉換(Probability Integral Transformation)，然後納入一個適當的 copula 來求得此聯合分配，更明確的細節定義可參考 Nelsen(1999)以及 Cherubini et al.(2004)，雖然本文研究的是二維度的 Copula 函數，但 Copula 理論也可以

運用在更一般的多維度 Copula 來描述多資產間的關聯結構。

根據以下的 Sklar's 定理可把多個變數各自的邊際分配和其聯合分配作連結，以兩個隨機變數為例：

Sklar's 定理 (1959) (二維度)

對於一聯合分配函數 F 且其邊際分配函數為 F_{x_1}, F_{x_2} ，存在一 copula 函數 $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ 使得對於所有的隨機變數 $X_1, X_2 \in R$ 都符合以下等式

$$F(x_1, x_2) = C(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2)) \quad (1)$$

如果所有的邊際分配函數 F_1, F_2 皆為連續，則此 copula 函數 C 唯一存在。

由 Sklar's 定理可知，隨機變數的聯合分配可寫成各自的邊際分配和 copula 函數的組合，反之亦成立，因為 copula 是由標準均勻分配 $U(0,1)$ 隨機變數所組成的聯合分配：

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 < u_1, U_2 < u_2) \quad (2)$$

根據積分機率轉換(Probability Integral Transformation)，對於隨機變數 X_1 以及 X_2 ，

$X_1 \sim F_{X_1}(x_1)$ ， $X_2 \sim F_{X_2}(x_2)$ 服從標準均勻分配 U_i ， $i=1,2$ ，如下：

$$F_{X_1}(x_1) \sim U_1 \quad F_{X_2}(x_2) \sim U_2 \quad (3)$$

由以下證明可得 Equation (1)：

$$\begin{aligned} C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) &= P(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), U_2 \leq F_{X_2}(x_2)) \\ &= P(F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1, F_{X_2}^{-1}(U_2) \leq x_2) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (4)$$

定義：copula 密度函數(copula density)

連結一 copula 函數 $C(u_1, u_2)$ 的密度函數 $c(u_1, u_2)$ 可表示如下：

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (5)$$

對於連續型的隨機變數 X_1 以及 X_2 ，相對於聯合分配 F 的密度函數 f ，copula 密度函數等於聯合密度函數 f 除以兩邊際分配 f_i ， $i=1,2$ 的乘積，如下：

$$c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)} \quad (6)$$

因此由 Sklar's 定理使得以下的等式成立，稱之為 canonical representation：

$$f(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \quad (7)$$

在二維度 copula 函數的研究方面，[14]Patton(2006)擴展了 Copula 標準的定義延伸至動態條件 Copula (Conditional Copula)。Patton 延伸了 Copula 原本的定義，建構出可以用來描述隨著時間改變的關聯結構，有許多情況是需要用條件聯合機率密度函數的，像是多個標的物資產的選擇權定價(Rosemberg, 1998)，或是投資組合風險值(VaR)的計算(Hull & White, 1998)。本文利用單一參數的 copula 函數給定歷史資訊所提供兩個市場的報酬為基準來表示股票市場與債券市場報酬之間的關聯結構，此動態 Copula 的參數就像類似於市場報酬的邊際分配或時間序列也是根據前期的資訊來求得，在 Sohnke et al.(2007)也運用 Patton 所提出的 conditional copula 理論，以下為 Sohnke et al.(2007)對於動態條件 Copula 的簡單定義：設 X_t 和 Y_t 為兩個隨機變數代表時點 t 兩個市場的報酬，又兩者的條件累積分配函數分別為 $F_t(x_t | \Phi_{t-1})$ 以及 $G_t(y_t | \Phi_{t-1})$ ， Φ_{t-1} 表示前期的報酬資訊，進一步定義兩個隨機變數 $U_t = F_t(x_t | \Phi_{t-1})$ 以及 $V_t = G_t(y_t | \Phi_{t-1})$ ，其邊際分配為標準均勻分配，則條件 copula 函數 $c_t(u, v | \Phi_{t-1})$ 定義為一隨著時間改變 U_t 和 V_t 的聯合二元密度函數，所以 X_t 和 Y_t 的條件聯合二元密度函數可以表示成 U_t 和 V_t 的聯合二元密度函數和 X_t 、 Y_t 兩條件邊際密度函數(分別為 f_t 和 g_t)的乘積如下：

$$h_t(x_t, y_t | \Phi_{t-1}) = c_t(F_t(x_t | \Phi_{t-1}), G_t(y_t | \Phi_{t-1}) | \Phi_{t-1}) f_t(x_t | \Phi_{t-1}) g_t(y_t | \Phi_{t-1}) \quad (8)$$

2. 2 Elliptical copula and Archimedean copula

一般來說，主要常用的 copula 函數可以分成兩個類型：Elliptical copula 以及 Archimedean copula，Elliptical copula 以 Gaussian copula 和 Student t copula 為主要常用來描述資產間關聯結構的 copula 函數，而常用的 Archimedean copula 有 Gumbel copula、Clayton copula、Frank copula.....等，而以下主要介紹本文所引用的 Frank copula、Gaussian copula 以及 Student t copula。

Elliptical copula

常用的 Elliptical copula 主要有 Gaussian copula 和 Student t copula，以下為 Gaussian copula 和 Student t copula 的定義：

Gaussian Copula

$$C(u_1, u_2) = \Phi_{\rho} \{ \Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) \} \\ = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy \quad (9)$$

$$u_1 = F_{X_1}(x_1) \quad , \quad u_2 = F_{X_2}(x_2)$$

Gaussian copula 的密度函數為

$$c_{\rho}(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{(\Phi^{-1}(u_1))^2 + (\Phi^{-1}(u_2))^2}{2} + \frac{2\rho(\Phi^{-1}(u_1))(\Phi^{-1}(u_2)) - (\Phi^{-1}(u_1))^2 - (\Phi^{-1}(u_2))^2}{2(1-\rho^2)}\right) \quad (10)$$

Φ ：為單一隨機變數的標準常態累積分配函數。

Φ_{ρ} ：相關係數為 ρ 的二元標準常態分配累積分配函數。

而不同的邊際分配納入 Gaussian copula 會產生不一樣的聯合分配函數：

(1) 假設邊際分配為常態分配，再加上 Gaussian copula，則表示這兩個隨機變數的聯合分配即為二元常態分配。

(2) 假設邊際分配不為常態分配，再加上 Gaussian copula，此時這兩個隨機變數的聯合分

配稱作 meta-Gaussian 分配。

Student t Copula

$$C(u_1, u_2) = t_{\rho, \nu} \{t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2)\} \\ = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{\nu(1-\rho^2)}\right) dx dy \quad (11)$$

$$u_1 = F_{X_1}(x_1) \quad , \quad u_2 = F_{X_2}(x_2)$$

Student t copula 的密度函數為

$$c_{\nu, \rho}(u_1, u_2) = \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^2} \frac{\left(1 + \frac{(t_{\nu}^{-1}(u_1))^2 + (t_{\nu}^{-1}(u_2))^2 - 2\rho t_{\nu}^{-1}(u_1) \cdot t_{\nu}^{-1}(u_2)}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-(\nu+2)/2}}{\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{(t_{\nu}^{-1}(u_j))^2}{\nu}\right)^{-(\nu+2)/2}} \quad (12)$$

t_{ν} ：單一隨機變數自由度為 ν 的 Student t 分配累積分配函數。

$t_{\rho, \nu}$ ：自由度為 ν 、相關係數為 ρ 的二元標準 Student t 分配累積分配函數。



Archimedean copula

Archimedean copulas 是由 Ling(1965)所命名，在還沒引用到處理財務領域的問題以前，Archimedean copulas 常用在保險精算領域上。而 Archimedean copulas 為一個統稱，裡面有很多種不同的 copula 函數，以下為 Archimedean copulas 的組成元素以及基本定義：

定義：Generator and pseudo-inverse

一個連續、遞減、convex 的函數 $\varphi : I \rightarrow \mathfrak{R}^{*+}$ ，且 $\varphi(1) = 0$ 。稱此函數 φ 為一 generator，當 $\varphi(0) = +\infty$ ，則稱函數 φ 為一 strict generator。則函數 φ 的 pseudo-inverse 定義如下：

$$\varphi^{(-1)}(u) = \begin{cases} \varphi^{(-1)}(u) & , 0 \leq u \leq \varphi(0) \\ 0 & , \varphi(0) \leq u \leq +\infty \end{cases} \quad (13)$$

定義：Archimedean copula

設函數 φ 為一 strict generator，而 φ^{-1} 為定義域在 $[0, \infty]$ 的完全單調函數，則一 n 個變數的 Archimedean copula 可寫成下方的函數

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n)) \quad (14)$$

而在 Copula 函數中，有很多種類型的 Archimedean copula，以本文用到的 Frank copula 為例：

Frank Copula

給定一個 generator 為 $\varphi(u) = \ln\left(\frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right) \Rightarrow \varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + e^t(e^{-\theta} - 1))$

因此， φ 為一完全單調函數(如果 $\alpha > 0$)。則 Frank copula 函數可寫成如下函數：

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \quad \theta \neq 0 \quad (15)$$

且 Frank copula 的密度函數為

$$c(u_1, u_2) = -\frac{\theta e^{-\theta(u_1+u_2)}(e^{-\theta} - 1)}{[e^{-\theta(u_1+u_2)} - e^{-\theta u_1} - e^{-\theta u_2} + e^{-\theta}]^2} \quad (16)$$

2.3 關聯性的衡量

在衡量相關性的工具有很多種，例如：Pearson's correlation coefficient，非參數的排序相關係數則有 Kendall's tau、Spearman's rho.....等，不過對於資產間若在極端狀況產生較強烈的關連性時，這些衡量工具都是派不上用場的。而每一種 copula 函數都有一個參數用來衡量兩隨機變數間的關聯結構，以 Gaussian copula 以及 Student t copula 而言，即 Pearson's correlation coefficient，或是稱作線性的相關係數。

定義：Pearson's correlation coefficient ρ

X 和 Y 的線性相關係數為

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad (17)$$

線性相關是用來衡量線性的關聯結構。

而某些能夠描述資產之間具有對稱的 tail dependence 的現象，而 tail dependence 的定義如下：

定義：Coefficient tail dependence λ_U 、 λ_L

令(X,Y)為一二元的連續隨機變數，邊際分配函數分別為 F_x 和 F_y ，則upper tail dependence 的係數 λ_U 如下：

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} P\{Y > F_2^{-1}(u) | X > F_1^{-1}(u)\} = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad \lambda_U \in [0, 1] \quad (18)$$

lower tail dependence 的係數如下：

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} P\{Y \leq F_2^{-1}(u) | X \leq F_1^{-1}(u)\} = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}, \quad \lambda_L \in [0, 1] \quad (19)$$

tail dependence 主要用來衡量關聯性的概念是當一個市場發生極端的報酬情況時，另一個市場也發生同樣情況的機率。而這三種不同的 copula 函數，其中 Gaussian copula 以及 Frank copula 並沒有 tail-dependence 的特性，而 Student t copula 則具有 tail dependence 對

稱的特性，也就是 $\lambda_U = \lambda_L = 2 - 2t_{\nu-1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-\rho_t}}{\sqrt{1+\rho_t}} \right)$ 。

2.4 Copula 參數估計方法

根據 Cherubini(2004)所提出的估計方法有三種，分別是 Exact MLE、Inference for Margins(IFM)以及 Canonical MLE(CML)，本文估計 copula 函數參數所用的方法為

Inference for Margins，以下為 Inference for Margins 的估計過程：

Step1：估計邊際分配函數的參數 δ_j ：

$$\hat{\delta}_j = \arg \max_{\delta} \ell_j(\delta_j) = \arg \max_{\delta} \left\{ \sum_{t=1}^T \log f_j(x_{j,t}; \delta_j) \right\} \quad j=1,2 \quad (20)$$

其中 $f_j(x_{j,t}; \delta_j)$, $j=1,2$ 為股市與債市各別的報酬時間序列在 t 時點的邊際分配函數。

Step2：以極大化概似函數估計 copula 關聯結構參數 θ ：

$$\ell(\theta, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2) = \sum_{t=1}^T \log c(F_{X_1}(x_{1,t}; \hat{\delta}_1), F_{X_2}(x_{2,t}; \hat{\delta}_2); \theta) \quad (21)$$

估計式 $\tilde{\mathcal{G}}_{FML} = (\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\theta})^T$ 可由 $(\partial \ell / \partial \delta_1, \partial \ell / \partial \delta_2, \partial \ell / \partial \theta) = 0$ 解出。

之所以用此法來估計 copula 關聯結構參數的原因是可以避免了一次估計多個參數的計算複雜度，使得 IFM 估計時比 Exact MLE 具有效率性。



三、研究流程架構

為了找到能夠精確的描述股債市關聯結構最適的 copula 函數，必須要先了解股市以及債市這兩個單一市場的特性進而在了解兩個市場報酬所形成的結構，所以本文列出以下幾個步驟來確實的了解並建構資產間的關聯結構：

1. 找出股市以及債市恰當的單一時間序列模型。
 2. Data exploration — 由單一時間序列模型中標準化的報酬來觀察資產間報酬的關聯結構。
 3. Contour plot — 了解各種 copula 函數的結構、特性。
 4. 估計在每段期間 copula 函數的參數。
 5. 挑選參數的時間序列模型，透過 copula 函數來估計出 copula 參數時間序列的模型。
- 由 2.和 3.的過程可以先初步篩選適用股債市關聯結構的 copula 函數。而步驟 4.和 5.可以用來比對最後估計出來的參數時間序列是否具有一致性。

1. 先觀察股市和債市各自報酬的變化情形，對於這兩種市場報酬特性找出合適的時間序列模型，在 Sohnke et al.(2007)的文章中以 GJR-t-GARCH(1,1)來做為股票市場指數的模型，研究指出股市波動度的群聚效應具有不對稱的，當股市處於空頭市場時波動度的群聚效應較多頭市場強烈，但本文在估計發現債券市場波動的不對稱群聚效應是不顯著的。從敘述統計量來看可以發現股票市場與債券市場具有高狹峰的現象，所以採用 Student t 分配來當作時間序列的殘差分配。所以本文以 GJR-t-GARCH 模型來當作股票市場的報酬時間序列，而以一般的 GARCH 來當作十年期公債市場的時間序列模型，這兩種模型的架構如下：

單一股票市場的時間序列模型：

例：ARMA(1,1)-t-GJR -GARCH(1,1)

$$\begin{aligned}
 R_{i,t} &= \mu_i + aR_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} + \Theta_{i1}\varepsilon_{i,t-1} + \Theta_{i2}\varepsilon_{i,t-2} \\
 h_{i,t} &= \omega_i + \beta_i h_{i,t-1} + \alpha_{i,1}\varepsilon_{i,t-1}^2 + \alpha_{i,2}s_{i,t-1}\varepsilon_{i,t-1}^2 \\
 \varepsilon_{i,t} | \Phi_{t-1} &\sim t_{v_i}(0, h_{i,t})
 \end{aligned} \tag{22}$$

當 $\varepsilon_{i,t-1} < 0$ 時， $s_{i,t-1} = 1$ ，否則 $s_{i,t-1} = 0$ 。

單一債券市場的時間序列模型：

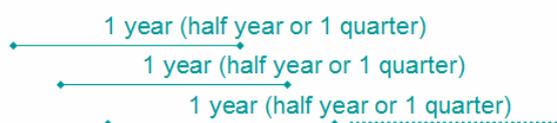
例：MA(1)-t-GARCH(1,1)

$$\begin{aligned}
 R_{j,t} &= \mu_j + \varepsilon_{j,t} + \Theta_j \varepsilon_{j,t-1} \\
 h_{j,t} &= \omega_j + \beta_j h_{j,t-1} + \alpha_{j,1} \varepsilon_{j,t-1}^2 \\
 \varepsilon_{j,t} | \Phi_{t-1} &\sim t_{v_j}(0, h_{j,t})
 \end{aligned} \tag{23}$$

$R_{i,t}$ 、 $R_{j,t}$ 分別代表在時點 t 股票指數 i 和債券指數 j 的日報酬， $h_{i,t}$ 、 $h_{j,t}$ 分別代表在時點 t 股票指數 i 和債券指數 j 的條件變異數， v_i 、 v_j 代表 t 分配的自由度。

2. Data exploration — 完成了兩個市場的邊際時間序列估計後，我們希望研究兩個市場的報酬有什麼樣的關聯結構。在描繪其散佈圖之前，必須要把股票市場和債券市

場的報酬作標準化的動作，因為每個市場本身的波動度大小是不一樣的，所以將標準化報酬畫出的散佈圖才能較準確觀察其中的結構，而根據(3)以及(4)， $\frac{\varepsilon_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$ 為兩市場各自的標準化的報酬。所以圖 2 即為股市和債市標準化報酬的移動視窗(rolling window)散佈圖(以美國為例)，來觀察從 1990 年~2008 年至今，股債市之間的結構為何？是否期間有產生結構的轉變？



左圖即為移動視窗(rolling window)的示意圖，每次往後移動一天來描繪出股債市標準化報酬的散佈圖。

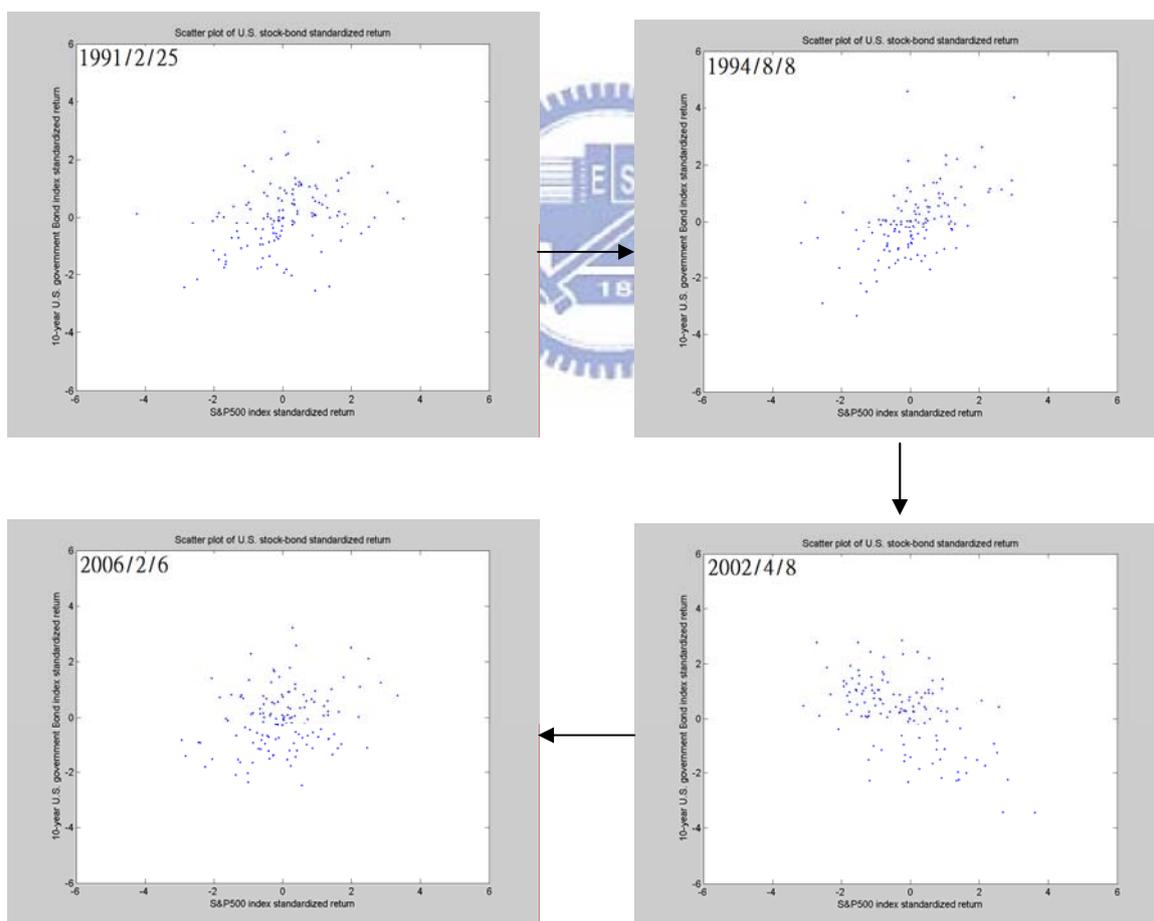
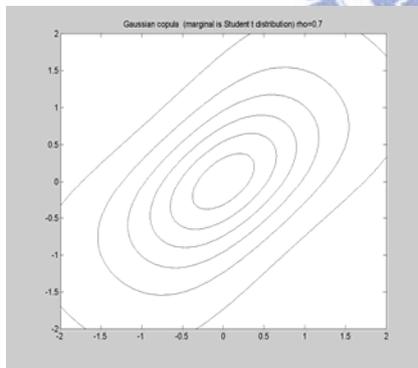


圖 2 美國股市與債市標準化報酬的散佈圖(此圖只簡單列出其中幾個時期)

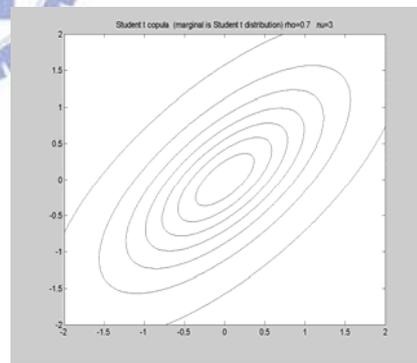
由圖 2 動態的移動視窗散佈圖可以觀察到下列幾點現象：

- (1)在 1990~1999 年間，股債市幾乎呈現正相關的結構。
- (2)但在 1999 年以後到 2003 年之間結構有所轉變，由正相關轉為負相關。
- (3)而 2003~至今(2008)，股債市的結構似乎不太穩定，觀察不出有一致性的結構。

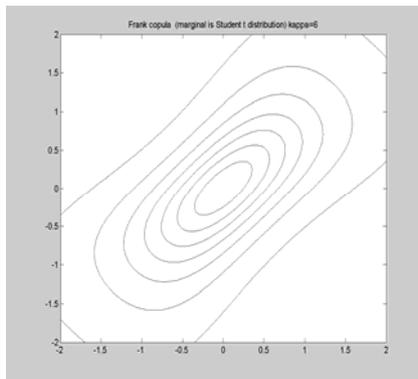
3. Contour plot — 觀察完 rolling scatter plot 之後，此時我們希望由已知的 Copula 函數來建構其關聯結構，為了能初步篩選適合的 copula 函數，可由 copula contour plot 得知，變化 copula 函數的參數來觀察每種 copula 的結構，找出適合的 copula。而 Contour plot 上報酬落在同一條封閉曲線上的機率是一樣的，且機率由內到外慢慢的變小，從圖 3 可看出 Student t copula 在極端(尾巴)情況下發生的機率比 Gaussian 和 Frank 較為集中，也就是具有 tail dependence 的情況。而 Frank copula 在極端狀況的機率相較於 Gaussian 和 Student t 是屬於比較分散的情況，而在觀察 5 個國家的散佈圖，都發現有這三種的情況發生，圖 3 則是邊際分配為 Student t distribution 所描繪出的 Copula contour plot。



Gaussian copula



Student t copula



Frank copula

圖 3 Copula contour plot (Gaussian、Student t、Frank)

根據先前的移動視窗散佈圖和 contour plot，我們找到下列幾個候選的 Copula 函數：

Gaussian、Student t、Frank，主要選擇這三種 copula 函數的原因是因為由圖 2 的移動視窗散佈圖可以發現在尾端報酬有時會比較集中的現象，但有時卻是比較分散的。

4. 估計在每段期間 copula 函數的參數 — 找出適當的 Copula 函數之後，根據 2.4 節的 IFM 估計方法配合移動視窗的方式估計參數，之所以先用移動視窗來估計參數是因為假設兩個市場之間的結構在一段期間內是改變不大的。並藉由此步驟估計出來的參數序列可以初步觀察到兩個市場間關連結構的變化。下面圖 4~7 是以美國 S&P500 以及十年期公債價格指數為例，來計算出分別以一季、半年以及一年為一個期間所估計出的關聯結構參數，而由圖 4~6 可看出期間較長所估計出的關聯性(以一年為例)會低估一些短期間呈現和平常相反的關聯性，例如在 1997 年中期，以短期間來估計其實相關係數約-0.6，如果以一年來估計則會低估股債市短期間的關聯性：

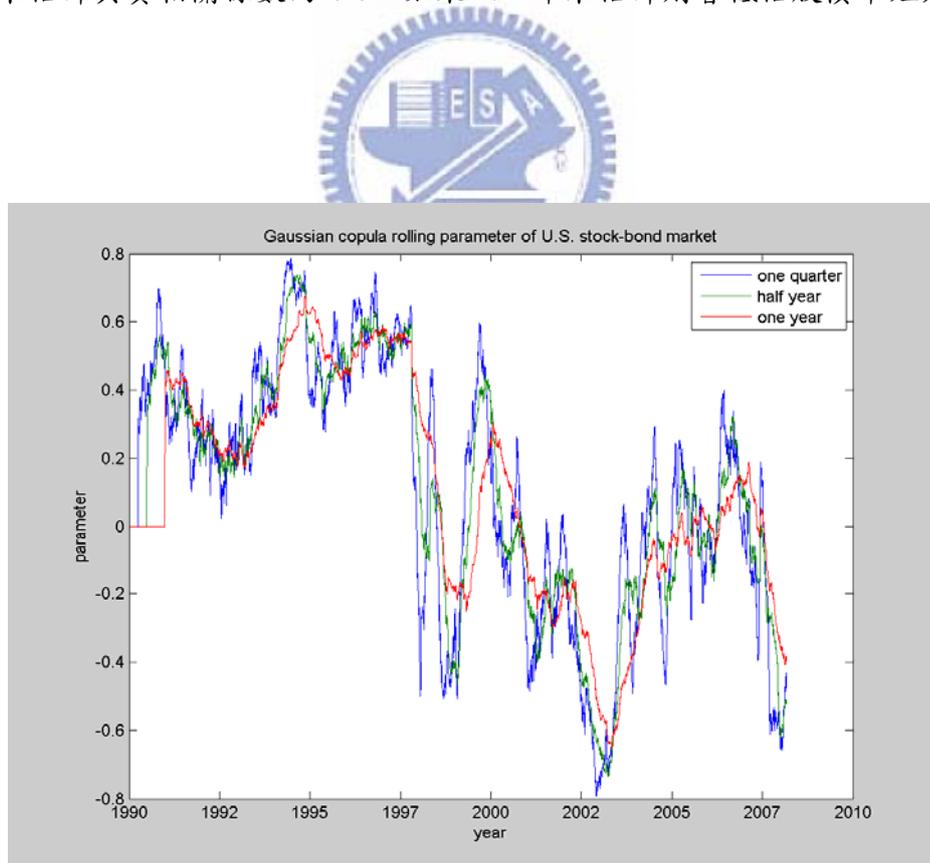


圖 4 估計 rolling 的 Gaussian copula 關聯結構參數

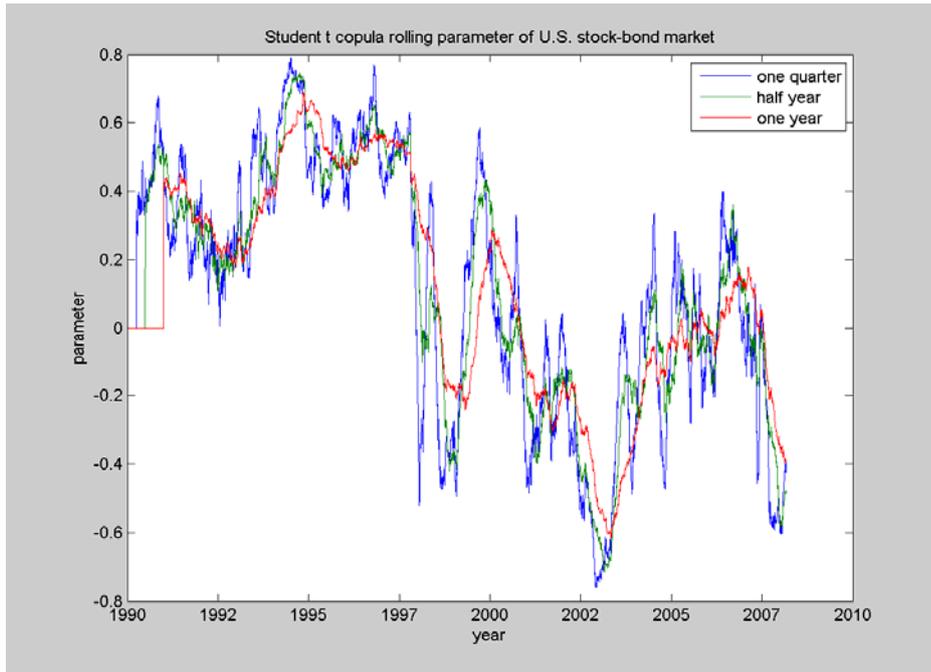


圖 5 估計 rolling 的 Student t copula 關聯結構參數

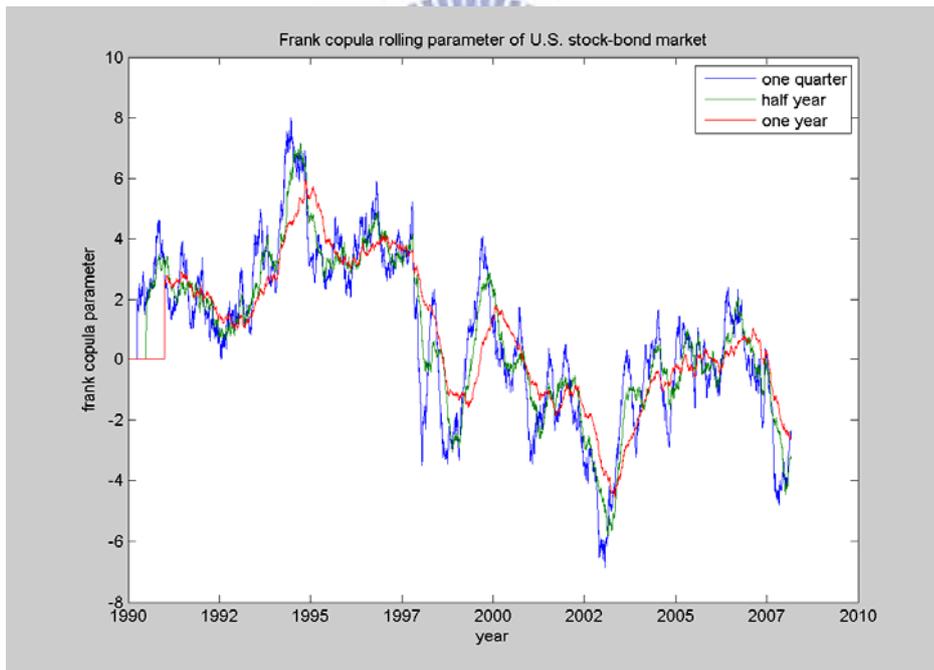


圖 6 估計 rolling 的 Frank copula 關聯結構參數

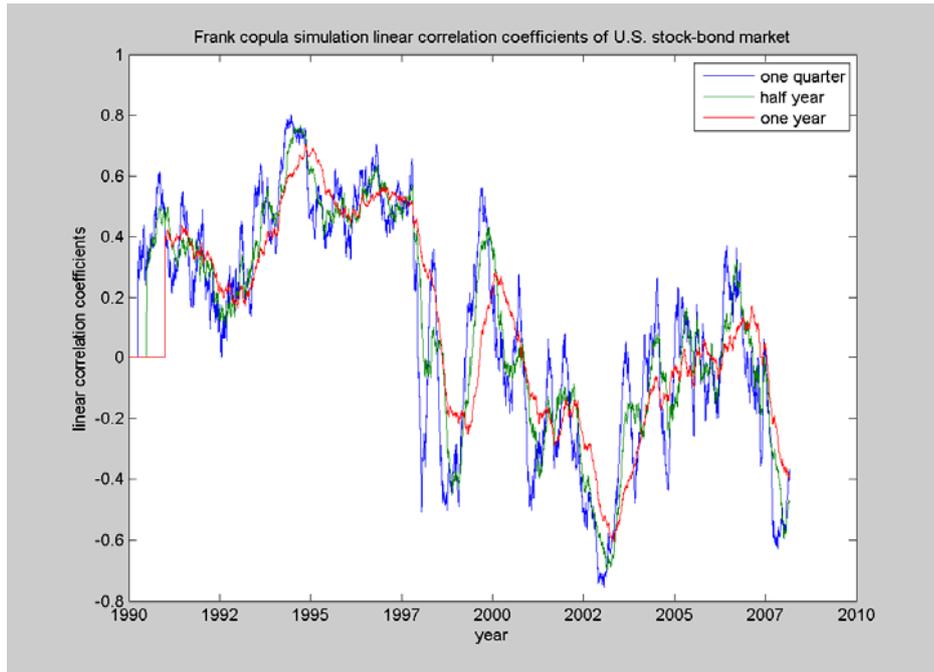


圖 7 rolling 的 Frank copula 線性相關係數

圖 7 為 Frank copula 所計算出的線性相關係數，本文利用 [1] Cherubini 中 Frank copula 參數和 Kendall's τ 的轉換如下¹：

$$\tau = 1 + 4[D_1(\theta) - 1] / \theta \quad (24)$$

其中

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{\exp(t) - 1} dt \quad (25)$$

且

$$D_1(-\theta) = D_1(\theta) + \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

再利用 Kendall's τ 和 Pearson's 相關係數 ρ 的轉換如下²：

$$\tau = \left(\frac{2}{\pi} \right) \cdot \sin^{-1}(\rho_t) \quad (27)$$

¹ 詳細細節請參照 [1] Cherubini et al. 2004。

² 推導過程可參考 [9] Lindskog, F., A. McNeil and U. Schmock, 2001. Kendall's Tau for Elliptical Distributions. Working paper。

5. 挑選參數的時間序列模型，透過 copula 函數來估計出 copula 參數時間序列的模型—因為可能隨著時間受到某些金融風暴而使得資產間的關聯結構產生了轉變，所以用來描述關聯結構的 copula 參數也就會隨著時間改變，在以 copula 為結構的參數時間序列模型的部分，本文引用[14]Patton(2006)類似於 AR(1)的時間序列模型，也就是描述一個結構的行為和前一期的結構有相關，而在 Sohnke et al.(2007) 的文章中，以類似 AR(2)的時間序列來當作 copula 參數的模型，本文也有利用此模型來估計，不過估計出來的 copula 參數值和 AR(1)類似，第 2 期的落後期數並不是很顯著。所以本文還是以[14]Patton(2006)的時間序列模型來估計， ρ_t^G 、 ρ_t^T 、 θ_t^F 分別為 Gaussian、Student t、Frank 的參數：

Gaussian copula

$$\rho_t^G = \Lambda\left(\omega_\rho + \beta_\rho \cdot \rho_{t-1}^G + \alpha \cdot \Phi^{-1}(u_{t-1}) \cdot \Phi^{-1}(v_{t-1})\right), \quad -1 < \rho_t < 1 \quad (26)$$

Φ^{-1} 為標準常態分配累積密度函數的反函數。

Student t copula

$$\rho_t^T = \Lambda\left(\omega_\rho + \beta_\rho \cdot \rho_{t-1}^T + \alpha \cdot T_v^{-1}(u_{t-1}) \cdot T_v^{-1}(v_{t-1})\right), \quad -1 < \rho_t < 1 \quad (27)$$

T_v^{-1} 為平均數等於 0 自由度等於 v 的 t 分配累積密度函數的反函數。

Frank copula

$$\theta_t^F = \omega_\theta + \beta_\theta \cdot \theta_{t-1}^F + \alpha \cdot |u_{t-1} - v_{t-1}|, \quad \theta_t \in [-\infty, \infty] / \{0\} \quad (28)$$

其中 $\Lambda(x) = \frac{(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})}$ 表示為一 logistic 轉換，使得相關係數 $\rho \in (-1, 1)$ ，而 $\Phi^{-1}(u_{t-1}) \cdot \Phi^{-1}(v_{t-1})$ 、

$T_v^{-1}(u_{t-1}) \cdot T_v^{-1}(v_{t-1})$ 、 $|u_{t-1} - v_{t-1}|$ 這三項都是用來描述兩個資產間在過去藉由累積機率轉換成報酬來衡量相關性的大小，或是以累積機率之差的絕對值來衡量，當 $|u_{t-1} - v_{t-1}|$ 越大時，代表兩個報酬落於負相關的區域，所以預期 Frank copula 所估計出來的 α 值會是小於 0，而 $\Phi^{-1}(u_{t-1}) \cdot \Phi^{-1}(v_{t-1})$ 或 $T_v^{-1}(u_{t-1}) \cdot T_v^{-1}(v_{t-1})$ 越大時，代表兩者報酬皆落於正相關的區

域，所以預期估計出來的 α 值會是大於 0 的。

因為 Gaussian 和 Student t copula 的參數即為 Pearson's correlation coefficient ρ ，所以估計完後便可直接觀察，而欲觀察估計後 Frank copula 的線性相關係數，本文利用 Simulation 的方法，稱為 Conditional sampling，來求得估計後每一個帶入參數的 Frank 所代表的線性相關係數。

四、實證資料

本文的資料來源自 DataStream 這個資料庫，在股市方面，分別以 S&P500、TSX Composite、DAX30、CAC40 以及 FTSE100 代表 US、Canada、Germany、France、UK 的股票市場指數，在債券市場方面，本文以 DataStream 所建置這五個國家的 benchmark 10-year government bond index 來當作各國的債券指數，資料期間從 1990 年 1 月開始到 2008 年 3 月的日資料，總共 4740 筆。

表 1 歐美 5 國股票市場指數以及十年期公債價格指數的敘述統計量

Stock index	S&P500	TSX Composite	DAX30	CAC40	FTSE100
Mean	0.000328	0.000340	0.000434	0.000325	0.000286
Std. Dev.	0.009829	0.009727	0.014030	0.012944	0.010717
Skewness	-0.51388	-0.617410	-0.154703	-0.071414	-0.052354
Kurtosis	6.826184	8.277650	7.365907	6.458172	5.640745
Jarque-Bera statistic	2893.423 (0.000000)	5802.288 (0.000000)	3783.484 (0.000000)	2365.923 (0.000000)	1379.438 (0.000000)
Bond index	US	Canada	Germany	France	UK
Mean	0.0000476	0.0000902	0.0000518	0.0000867	0.0000822
Std. Dev.	0.004217	0.004169	0.003161	0.003541	0.003957
Skewness	-0.324625	-0.275432	-0.583362	-0.144988	0.074179
Kurtosis	5.128715	6.043341	6.505406	5.768774	7.945691
Jarque-Bera statistic	978.2082 (0.000000)	1889.162 (0.000000)	2695.700 (0.000000)	1530.663 (0.000000)	4835.169 (0.000000)

五、實證結果

5.1 Copula 參數估計結果

在利用動態 copula 函數來建構兩個市場的關聯結構之前，首先需要適當的單一時間序列來建構各自市場的條件邊際分配模型，本文利用一般的 GARCH 模型以及 GJR-GARCH 來估計股票市場和債券市場的時間序列模型，估計結果發現以 GJR-GARCH 模型較能符合股票市場的報酬序列，而用 GJR-GARCH 來描述債市具有波動度不對稱現象不是很顯著，所以債券市場報酬則以一般的 GARCH 模型來估計，而表 2 為股票市場以及債券市場個別所使用的時間序列模型。

表 2 歐美 5 國股票市場與債券市場分別的報酬時間序列模型

Stock market	
S&P500	ARMA(1,1)-t-GJR-GARCH(1,1)
TSX	AR(1) -t-GJR-GARCH(1,1)
FTSE100	ARMA(1,2)-t- GJR -GARCH(1,1)
DAX30	ARMA(1,1)-t-GJR-GARCH(1,1)
CAC40	ARMA(1,2)-t-GJR-GARCH(1,1)
Bond market	
U.S.	MA(1)-t-GARCH(1,1)
Canada	ARMA(1,2)-t-GARCH(1,1)
U.K.	ARMA(2,1)-t-GARCH(1,1)
Germany	ARMA(1,2)-t-GARCH(1,1)
France	ARMA(1,2)-t-GARCH(1,1)

表 3 為本文主要的估計結果，以 Inference for Margins(IFM)兩階段的估計法來估計，先估計出兩個市場個別的時間序列模型，在把估計出的分配函數計算每個時點報酬所對應的累積機率分配值 $u_{1,t} = F(R_{1,t} | \Phi_{t-1})$ 以及 $u_{2,t} = G(R_{2,t} | \Phi_{t-1})$ 後，再把 $u_{1,t}$ 、 $u_{2,t}$ 帶入適當的 copula 函數以最大概似估計法估計 copula 函數的參數值。表 3 顯示出 Gaussian、Student t、Frank 這三種 copula 對於描述這 5 個歐美國家國內股債市關聯結構的參數估計結果，以及每個參數的顯著水準，在選擇最適 copula 函數時，本文以文獻常用的 AIC 值來當作選擇的基準，也在 5.2 節的部分作了區域落點檢定(Region hit tests)，來比較模型是否能確實捕捉到報酬落於每個區域的機率。根據表 3 的配適度 AIC 結果指出以

Student t copula 為 3 種 copula 中較適合當作股債市關聯結構的模型。而從圖 9 Student t copula 的 tail dependence 係數可以看出在股債市在極端報酬同時發生的機率的情況。

表 3 Copula 關聯結構參數的時間序列模型係數估計值

Country	copula	ω_ρ	β_ρ	α	LLF(c)	AIC
US	Gaussian	0.0030 (0.2278)	1.9816 (0.0000)	0.1261(0.0000)	319.00	-631.94
	Student t	0.0029 (0.1923)	1.9999 (0.0000)	0.0835(0.0000) 7.7862(DoF)	358.18	-708.30
	Frank	0.2733 (0.0023)	0.9707 (0.0000)	-0.8287(0.0000)	294.30	-582.60
Canada	Gaussian	0.0003 (0.7997)	1.9910 (0.0000)	0.0597(0.0000)	149.69	-293.38
	Student t	-0.0004 (0.8351)	1.9884 (0.0000)	0.0455(0.0000) 9.0142(DoF)	176.23	-344.46
	Frank	0.1904 (0.0000)	0.9784 (0.0000)	-0.5805(0.0000)	127.78	-249.56
UK	Gaussian	0.0008 (0.4199)	2.0434 (0.0000)	0.0766(0.0000)	354.95	-703.90
	Student t	-0.0004 (0.7252)	2.0379 (0.0000)	0.0557(0.0000) 8.1021(DoF)	392.58	-777.16
	Frank	0.1538 (0.0000)	0.9853 (0.0000)	-0.4766(0.0000)	325.43	-644.86
Germany	Gaussian	0.0018 (0.1664)	2.0375 (0.0000)	0.0917(0.0000)	405.36	-804.72
	Student t	-0.0008 (0.8264)	2.0557 (0.0000)	0.0545(0.0000) 6.7567(DoF)	462.15	-916.30
	Frank	0.1985 (0.0000)	0.9810 (0.0000)	-0.6122(0.0000)	440.74	-875.48
France	Gaussian	0.0002 (0.0514)	2.0381 (0.0000)	0.0793(0.0000)	404.14	-802.28
	Student t	-0.0037 (0.9628)	2.0588 (0.0000)	0.0570(0.0000) 10.702(DoF)	439.75	-871.50
	Frank	0.1655 (0.0000)	0.9846 (0.0000)	-0.5178(0.0000)	417.84	-829.68

表 3 為估計 5 個歐美國家(美國、加拿大、英國、德國、法國)國內股債市如下的參數時間序列的係數，

$$\rho_t = \Lambda(\omega_\rho + \beta_\rho \cdot \rho_{t-1} + \alpha \cdot \Phi^{-1}(u_{t-1}) \cdot \Phi^{-1}(v_{t-1}))$$

$$\rho_t = \Lambda(\omega_\rho + \beta_\rho \cdot \rho_{t-1} + \alpha \cdot T^{-1}(u_{t-1}) \cdot T^{-1}(v_{t-1}))$$

$$\theta_t = \omega_\theta + \beta_\theta \cdot \theta_{t-1} + \alpha \cdot |u_{t-1} - v_{t-1}|$$

估計值右方的括弧()為p-value³，0.0000 是指p-value小於 0.00005。

LLF(c)為經由最大概似估計法估計後，copula 函數取 log 的最大概似函數值。

³為了檢定 β_ρ 是否顯著異於 0，因此本文假設 $\beta_\rho = 0$ 再重新估計參數，利用 LR test 來檢定 β_ρ 是否顯著異於 0，此方法可參考 [14] Patton(2006) Estimation of Multivariate models for time series of possibly different lengths。

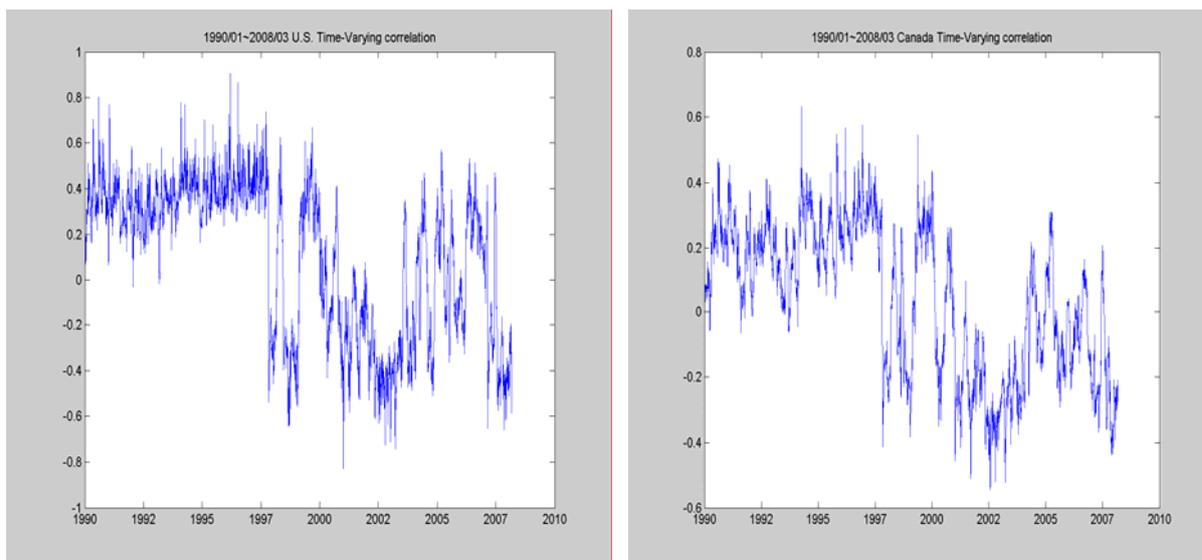


圖 8.1 Student t copula 所估計關聯結構的參數 ρ_t (US & Canada)

圖 8.1 代表過去 1990~2008/3 期間北美兩大工業國(美國以及加拿大)，本國的股債市相關係數走勢圖，顯然整體的股債平衡策略在過去大多數的期間(1990~2000 年)幾乎不太適用。顯示過去的金融市場中，股債市有同步上漲以及同步下跌的現象。

圖 8.1 代表了美國、加拿大國內股債市相關性走勢可發現，從 1990~2000 年兩個市場呈現正相關的趨勢，而美國比加拿大的正相關還要強烈，隱含了在美國國內股債市之間的交互影響較為強烈，這也跟金融市場上的交易熱絡程度息息相關。但再這段期間可看出有一段相關係數突然由正轉負的現象(約 1998~1999 年)，主要的原因是當時正處於俄羅斯金融風暴，俄羅斯債券大跌，加上 LTCM 的倒閉連帶歐美各國股市重創，資金則往當時風險較低的美國或是歐洲國家的政府債券，使得歐美國家政府債券價格攀升，造成了短期間的債券市場和股票市場呈現反向的走勢，但之後又回到正相關的結構，而後隨即而來的即是 2000 年 Nasdaq 網際網路泡沫化，泡沫剛開始使得投資人心理恐慌，股債市同步下跌，但之後伴隨著美國的經濟衰退，股市走入空頭，也使得聯準會逐步的降息，使得債市走向多頭，所以造成了股債市的結構在此時之後產生了轉變，加拿大雖然相關程度不如美國明顯，但趨勢是相近的，但隨著美國聯準會降息的腳步將盡，從 2002~2005 年美國轉變成一個低利率的國家，資金的借貸相較以前變得寬鬆，也就在這段低利率的時代造就的美國的房市，但就在美國處於房市的熱絡以及股市的復甦，發現了美國股債市的結構在 2003 年後產生了快速的劇烈波動，而加拿大也跟隨著美國股債市結構產生較些微的波動，將在本文 5.3 節討論為何會產生此一現象。

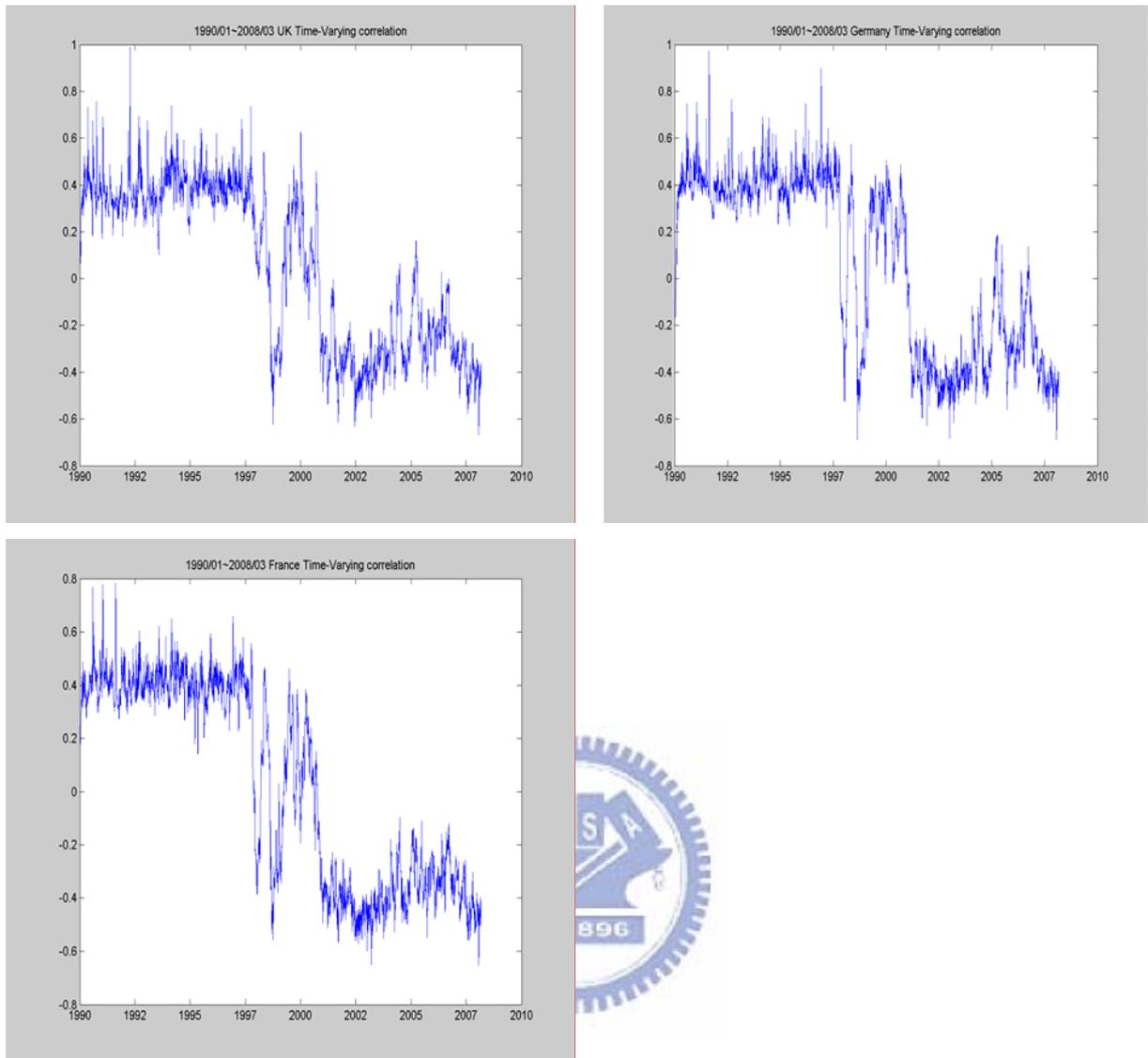


圖 8.2 Student t copula 所估計關聯結構的參數 ρ_t (UK. & Germany & France)

圖 8.2 代表歐洲區三個主要的工業國家(英、德、法)國內股債市線性相關程度，明顯看出和美國以及加拿大的股債關聯結構非常相近，除了從 2003 年之後，美、加國內股債市的關聯性產生劇烈變化，而歐洲顯然沒有受到太大的影響。

由圖 8.2 可看出，歐洲的 3 個主要工業國家(英、德、法)從 1990 年到 2003 年也跟美國國內股債市的結構相近，從平均約 0.4 左右的正相關至 2000 年網際網路泡沫後轉為負相關，但在 2003 年後並不像美國股債市結構一樣產生劇烈快速的改變。由此可見，美國的金融市場在此階段和其他歐洲國家的金融市場的結構可能已經有所不同。而下方的圖 9 顯示出 5 個國家股債市之間以 Student t copula 所產生對稱 tail dependence 的程度，也顯示股債市在極端事件發生時，也具有同時下跌或是同時上漲的現象。

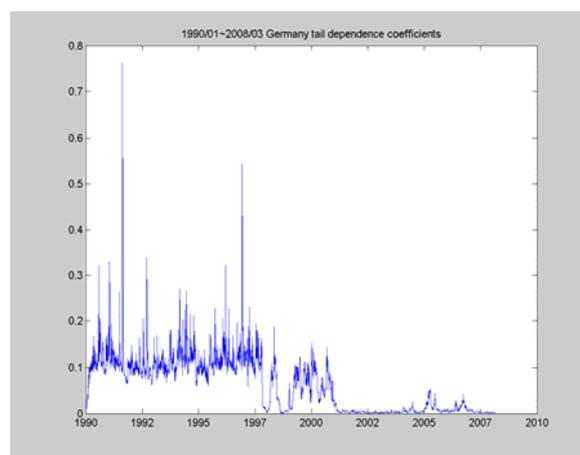
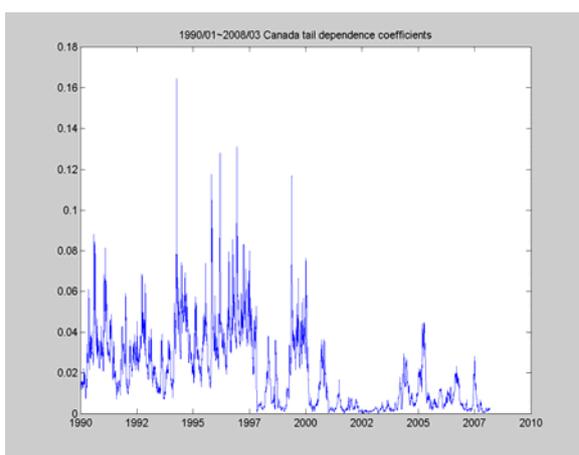
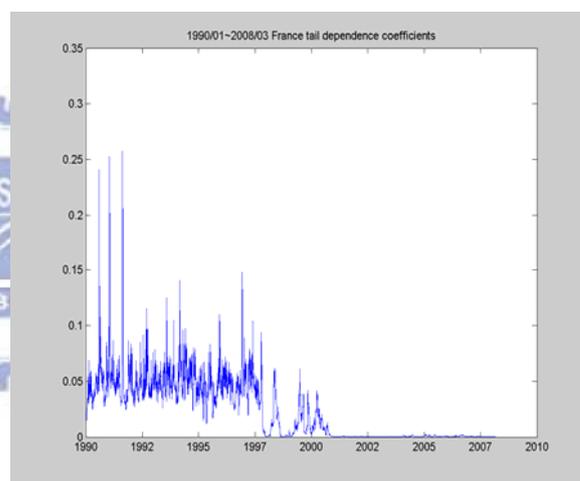
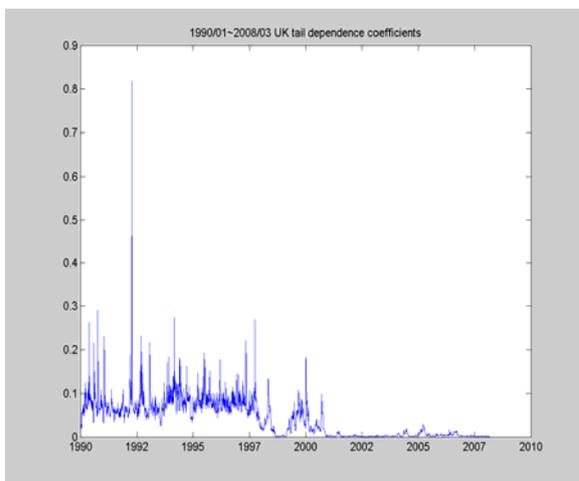
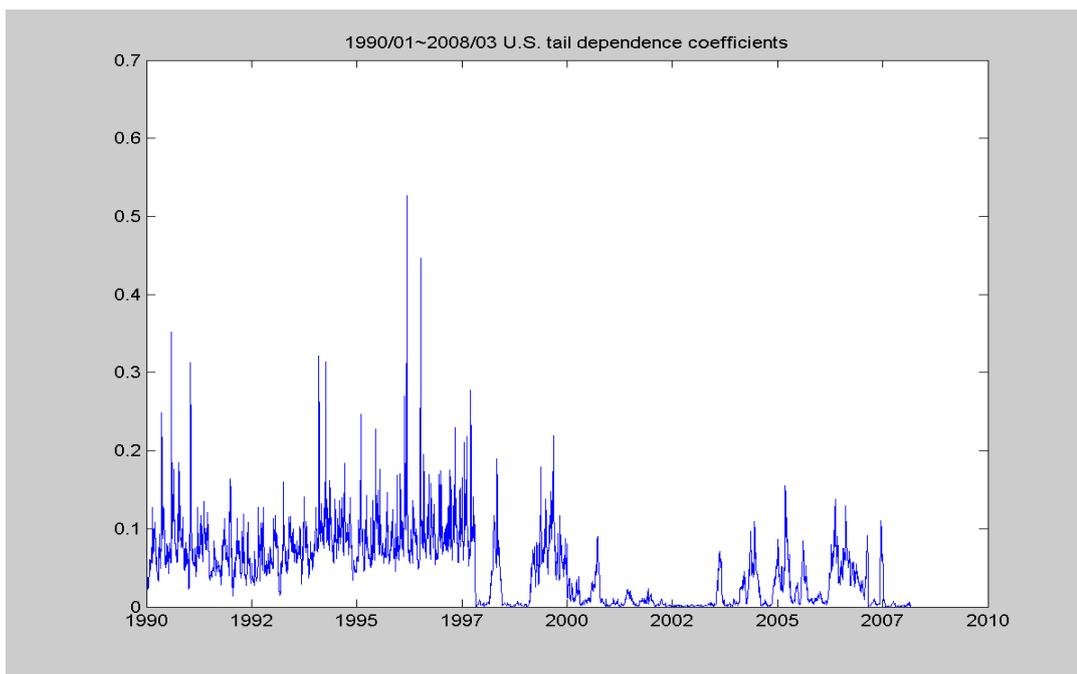


圖 9 Student t copula 的對稱 tail dependence 係數

圖 9 為歐美 5 國經由 Student t copula 所計算出來股債市對稱的 tail dependence 係數。

5.2 區域落點檢定(Region hit test)

為了了解估計出來的 copula 函數是否能捕捉到報酬落於極端情況的機率，本文也利用了 Patton(2006)的 Region hit test 來檢定這三種 copula 函數是否能精確的描述在每個極端的區域所發生的機率，在圖 10 中分成 6 個區域，而每一個區域代表著解釋不同的市場狀況，這個地方特別要注意的是當在極端狀況下，模型是否能確實估計其發生的機率，由下圖可知，區域 1 以及區域 4 表示兩個市場的報酬皆落於後 10%或是落於前 10%，對於一個投資組合，檢定模型是否能捕捉極端事件發生的機率是相當重要的，若沒有確實捕捉到極端事件的機率則可能會使投資組合造成更多的非預期損失，而區域 2 以及區域 3 則是兩市場的報酬皆落於 10% ~ 25%或是落於 75% ~ 90%，區域 5 和區域 6 則是一個市場的報酬落於前 25%，以及另一個市場的報酬落於後 25%的區域，由下圖可知：

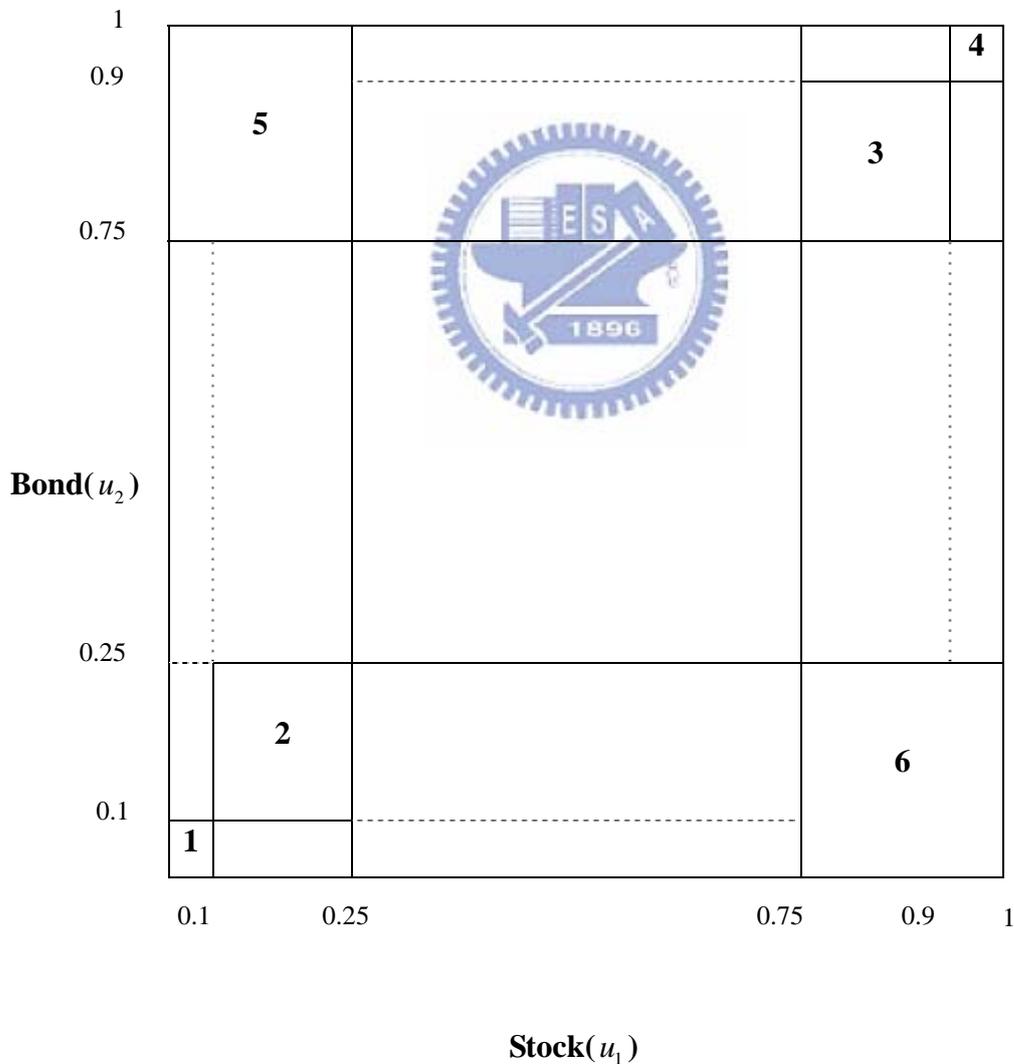


圖 10 六個極端的區域

模型的檢定根據 Patton(2006)的方法，假設 W_t 是要分析的報酬，為隨機變數，而且 W_t 屬於 S ， $\{R_j\}_{j=0}^K$ 為 S 的區域，使得 $R_i \cap R_j = \phi (i \neq j)$ 且 $\bigcup_{j=0}^K R_j = S$ ，而 π_{jt} 為 $W_t \in R_j$ 的真實機率， p_{jt} 為模型的機率，令 $\Pi_t \equiv [\pi_{0t}, \pi_{1t}, \dots, \pi_{Kt}]'$ 以及 $P_t \equiv [p_{0t}, p_{1t}, \dots, p_{Kt}]'$ ，所以虛無假設為模型是能正確描述報酬落於區域的機率，即 $\Pi_t = P_t (t=1, 2, \dots, T)$ ，所以本文要來檢定個別的 6 個區域，則虛無假設 $H_0: Hit_t^j \sim inid Bernoulli(p_{jt})$ versus 對立假設 $H_1: Hit_t^j \sim inid Bernoulli(\pi_{jt})$ ， π_{jt} 為 p_{jt} 的函數且包含前一期可能會對於報酬落於此區域具有高的解釋能力的資訊，Patton 利用 logit 模型來估計並且作參數的檢定，模型設定如下：

$$\pi_{jt} = \pi_j(Z_{jt}, \beta_j, p_{jt}) = \Lambda \left(\lambda_j(Z_{jt}, \beta_j) - \ln \left[\frac{1 - p_{jt}}{p_{jt}} \right] \right)$$

其中 $\Lambda(x) \equiv (1 + e^{-x})^{-1}$ 為一 logistic 轉換， Z_{jt} 為一矩陣包含前一期的資訊， β_j 為一 $(k_j \times 1)$ 估計的參數向量， λ_j 是任何的函數以及對於所有的 Z 使得 $\lambda_j(Z, 0) = 0$ ，當 $\beta_j = 0$ 則使得 $\pi_{jt} = \pi_j(Z_{jt}, 0, p_{jt}) = p_{jt}$ ，本文假設 λ_j 為一線性函數，也就是 $\lambda_j(Z_{jt}, \beta_j) = Z_{jt} \cdot \beta_j$ ， Z_{jt} 包含了一常數項也就是報酬落於區域 j 的非條件機率，用來捕捉非條件機率高估或低估的情況以及三個變數分別是過去 1 天、5 天、10 天落於區域 j 的個數用來捕捉任何違反每個區域落點都是各自獨立的假設，因此檢定的虛無以及對立假設可以表示為 $H_0: \beta_j = 0$ versus $H_1: \beta_j \neq 0$ ，而參數 β_j 以最大概似估計法求出，概似函數為

$$L(\pi_j(Z_j, \beta_j, p_j) | Hit^j) = \sum_{t=1}^T Hit_t^j \cdot \ln \pi_j(Z_{jt}, \beta_j, p_{jt}) + (1 - Hit_t^j) \cdot \ln(1 - \pi_j(Z_{jt}, \beta_j, p_{jt}))$$

，所以藉由最大概似比檢定

$$LR_j \equiv -2 \cdot (L(p_j | Hit^j) - L(\pi_j(Z_{jt}, \hat{\beta}_j, p_{jt}) | Hit^j)) \sim \chi_{k_j}^2$$

在虛無假設下此模型正確描述報酬落於區域 R_j 的機率，也就是 $\pi_{jt} = p_{jt} (\beta_j = 0)$ ，而拒絕虛無假設則表示模型無法正確描述報酬落於區域 R_j 的機率。

表 4.1 Region hit test 結果(US & Canada)

		Gaussian Copula	Student t Copula	Frank Copula
U.S.	1	10.1556 0.0379	7.5579 0.1092*	11.0638 0.0259
	2	14.3750 0.0062	16.2857 0.0050	18.3978 0.0010
	3	1.9290 0.7469*	1.4861 0.8291*	1.5370 0.8201*
	4	9.9037 0.0421	6.4983 0.1649*	10.2343 0.0367
	5	20.0773 0.0004	17.4756 0.0016	23.0475 0.0001
	6	5.7789 0.2163*	4.9939 0.2879*	5.2112 0.2663*
Canada	1	8.2423 0.0831*	4.2875 0.3685*	13.8442 0.0078
	2	5.3500 0.2532*	5.5267 0.2374*	5.8978 0.2069*
	3	0.8661 0.9294*	0.8890 0.9261*	0.8587 0.9304*
	4	5.3680 0.2516*	1.7066 0.7895*	8.5963 0.0720*
	5	9.9096 0.0420	10.3409 0.0351	9.9547 0.0412
	6	4.4090 0.3535*	1.8410 0.7650*	4.3171 0.3648*

每一格中，上面的數字代表概似比檢定統計量，下面的數字代表 p-value，「*」為 p-value > 0.05，1~6 為圖 10 所代表的區域，每個區域為服從 χ_4^2 的隨機變數，p-value 小於 0.05 指出拒絕虛無假設即模型不能正確的描述機率。

表 4.1~4.3 為 Region hit test 各個區域檢定的結果，可發現這 5 個國家在區域 1 以及區域 4 以 Student t copula 的 p-value 較高，而 Gaussian 和 Frank 的模型較無法正確捕捉到極端事件的機率，代表 Student t copula 較能精準描述股債報酬同時落於極端狀況的機率，而特別注意的是在區域 5 的檢定結果卻是不太顯著的，區域 5 說明了當股市處於空頭市場而債市則是處於多頭市場的情況下，回顧過去的報酬可發現有一部分是發生在網際網路泡沫化時，使得各國股票市場受到衝擊而在這段期間一直下跌，此時各國處於降

息的狀況，債市則處於不斷上漲的情況，對照歷史的資料也發現落在區域 5 期間內的美國股債市報酬，約有三分之一的比率是在網際網路泡沫化的時候發生，所以在這階段會有機率低估的情況，此為造成如美國、加拿大、英國、德國在區域 5 的估計都是不太顯著的主要原因。

表 4.2 Region hit test 結果(UK & France)

		Gaussian Copula	Student t Copula	Frank Copula
UK	1	14.6803 0.0054	6.6840 0.1536*	21.4683 0.0002
	2	6.7667 0.1487*	7.3076 0.1205*	8.9410 0.0626*
	3	5.4900 0.2406*	5.0757 0.2796*	4.5687 0.3345*
	4	3.1696 0.5299*	0.9174 0.9221*	5.9717 0.2013*
	5	16.0813 0.0029	8.8370 0.0653*	21.1338 2.9790e-004
	6	3.7507 0.4408*	5.9808 0.2006*	2.8439 0.5843*
France	1	11.6285 0.0203	6.6392 0.1562*	16.0301 0.0030
	2	5.5983 0.2312*	5.6466 0.2271*	6.0818 0.1931*
	3	2.2401 0.6917*	2.3271 0.6758*	3.3810 0.4962*
	4	13.4626 0.0092	6.2567 0.1808*	16.4784 0.0024
	5	3.5930 0.4639*	3.6840 0.4505*	4.6845 0.3212*
	6	9.2029 0.0562*	9.9947 0.0405	10.9166 0.0275

每一格中，上面的數字代表概似比檢定統計量，下面的數字代表 p-value，「*」為 p-value > 0.05，1~6 為圖 10 所代表的區域，每個區域為服從 χ_4^2 的隨機變數，p-value 小於 0.05 指出拒絕虛無假設即模型不能正確的描述機率。

表 4.3 Region hit test 結果(Germany)

		Gaussian Copula	Student t Copula	Frank Copula
Germany	1	6.8594 0.1435*	5.0511 0.2821*	8.0598 0.0894*
	2	1.5771 0.8129*	1.7975 0.7729*	3.6404 0.4569*
	3	9.8041 0.0439	9.0414 0.0601*	5.7743 0.2166*
	4	20.2150 0.0004	16.7445 0.0022	17.3224 0.0017
	5	8.8797 0.0642*	7.6040 0.1072*	10.5285 0.0324
	6	5.7119 0.2217*	4.9504 0.2924*	7.8137 0.0986*

每一格中，上面的數字代表概似比檢定統計量，下面的數字代表 p-value，「*」為 p-value > 0.05，1~6 為圖 10 所代表的區域，每個區域為服從 χ_4^2 的隨機變數，p-value 小於 0.05 指出拒絕虛無假設即模型不能正確的描述機率。



5.3 股債市相關結構變異劇烈的探討

近幾年來很多文章討論到在探討股債市之間為什麼會有關聯性的存在，也就是說什麼因子造成了股債市的有同向或反向的趨勢，很多研究以量化的觀點來分析經濟因子對於股債相關性的影響，但回顧以前文獻都沒有提到從 2003 年至今美國股債市相關性波動劇烈產生的原因(如圖 8.1)，本文最後一部分希望以質化的觀點並配合一些數據來論證為何美國從 2003 年之後股債市的關聯結構發生了劇烈的轉變？並加以討論股債市關聯性劇烈波動的因素與影響，從以上量化的結果發現 1990~1999 年這些國家的股債市皆呈現平均約 0.4~0.5 的正相關，但是 1998 年受到了俄羅斯金融風暴的影響，俄羅斯的政府公債違約率大增，加上 LTCM 的倒閉影響了整個美國以及歐洲的股票市場的崩跌，資金都流向風險較低的歐美政府公債，由圖 11 和 12 也可看出，歐美 5 國十年期公債價格指數在 1998 年到 1999 年上漲了將近 15%，歐美 5 個國家的股市指數則下跌將近 20%，而造成短期的股債反向走勢，風暴結束後即刻回復了正相關的結構，而隨即而來的是 2000 年 4 月網路科技泡沫破滅，Nasdaq 崩盤初期市場投資人心理恐慌，股票與債券是同時下跌的情況，股債相關係數還是維持著正相關。隨後美國經濟步入衰退，聯準會逐步

降息，聯邦目標利率(Federal Fund Rate)從 2000 年的 6.5% 一路調降，直到 2003 年 6 月 25 日利率水準到達 1% 的最低水準，在這段期間，股市走入空頭，而隨著利率的調降以及股市的崩盤，資金轉而流向債市，債券價格也因此上漲，使得股債市呈現負相關。也呼應了[8]Magnus et al. (2007)的結果，也就是在預期通膨降低或是股市的波動度變得較為劇烈時，股債的相關性也在此時轉為線性負相關的結構。

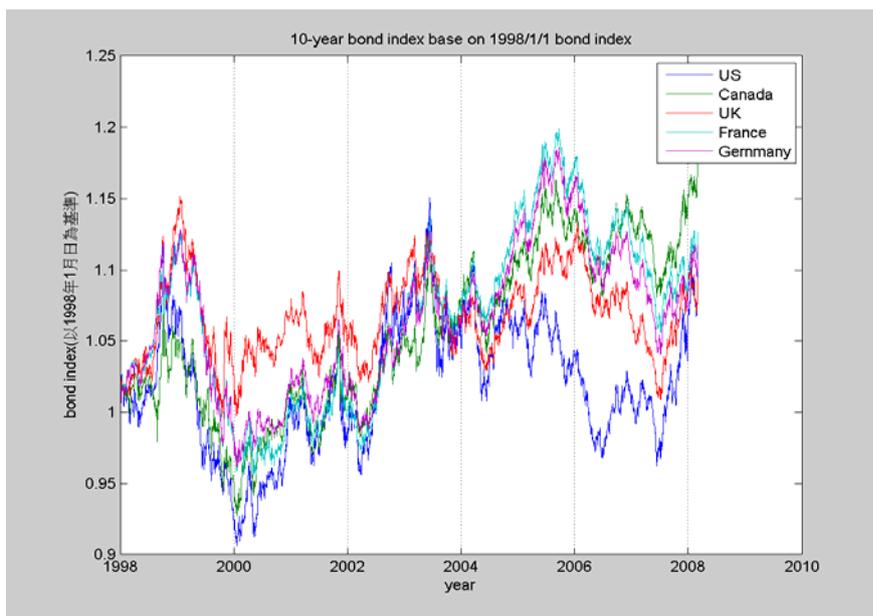


圖 11 歐美 5 國十年期政府公債走勢圖

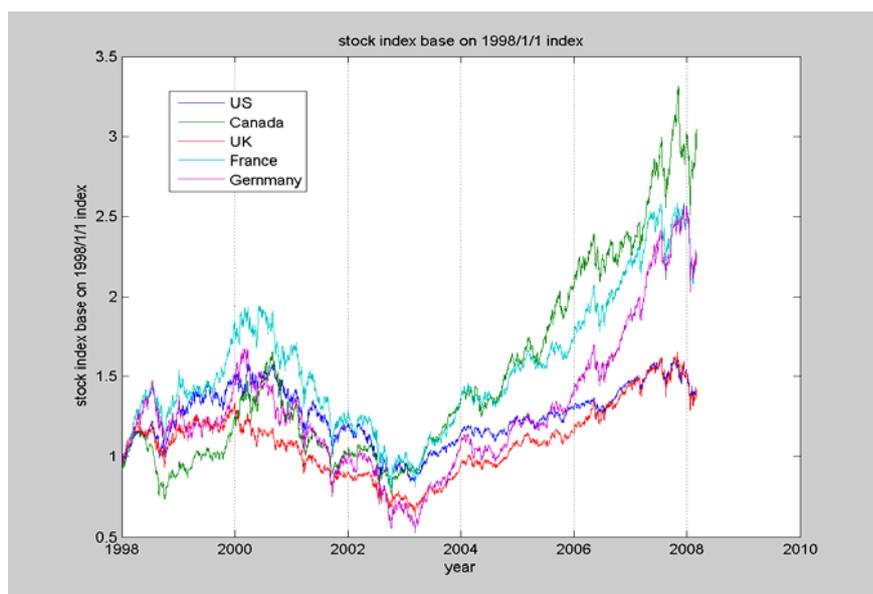


圖 12 歐美 5 國股票指數走勢圖

從動態 Copula 的量化模型可看出，2003 年 6 月之後，美國國內股債市的結構相對於歐洲幾個重要國家產生了不同的變化，呈現了正負相關之間震盪，也就是說美國國內股債市相關性的波動度變得比以往來的高，和其他歐美國家工業國家的股債市相關性失去了一致性。本文最後要來提出造成此一現象的成因。

首先，截至目前為止美國為全球金融市場的主軸，也是法人、避險基金以及投資大眾的投資天堂，也因為美國金融市場的開放以及資金的流動性相較於其他國家較為快速熱絡，以致於美國國內的股債市價格的較容易受到外國投資者所牽連，政府干預的情況相對於其他國家算是較少見的。近幾年來，因中國大陸的興起，其外匯存底已從 2001 年的 165.57 billion 上升至 2007 年底的 1528.25 billion，以成為全球外匯存底最高的國家，下表為 2001~2007 年底中國外匯存底成長趨勢：

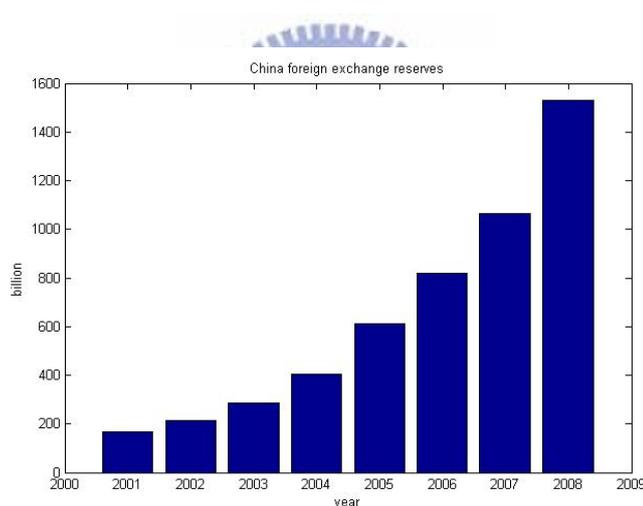


圖 13 中國外匯存底數據

在 2002~2004 年的期間美國正處於低利率的時代，整個金融環境使得美國擁有大量且低廉的資金，也刺激了房市在此時的興起，股市也因而上漲，但在 2004 年 6 月後美國連續升息 14 次從 1% 升息至 2006 年 6 月的 5.25%，原本債券的殖利率也應在此升息的階段逐步的上升，但中國的外匯存底讓美國在這個升息的階段又有了低廉的資金，也繼續促使美國房市的熱絡股市也在此階段持續的上漲，中國本身以出口為主的國家，中國之所以有如此龐大的外匯存底主要是因為每年巨額的對外貿易順差，美國讓中國賺取如此龐大的外匯存底，當然也需要回饋給美國，因此也使得中國把這些外匯存底有一大部分放在美元的資產，尤其以美國的中長期政府公債居多，主要也是考量到政府公債相

較於其他資產具有較低的風險，使得在 2004 年到 2006 年處於持續升息的美國，十年期政府公債價格上下來回震盪，由圖 14 可發現此一現象：

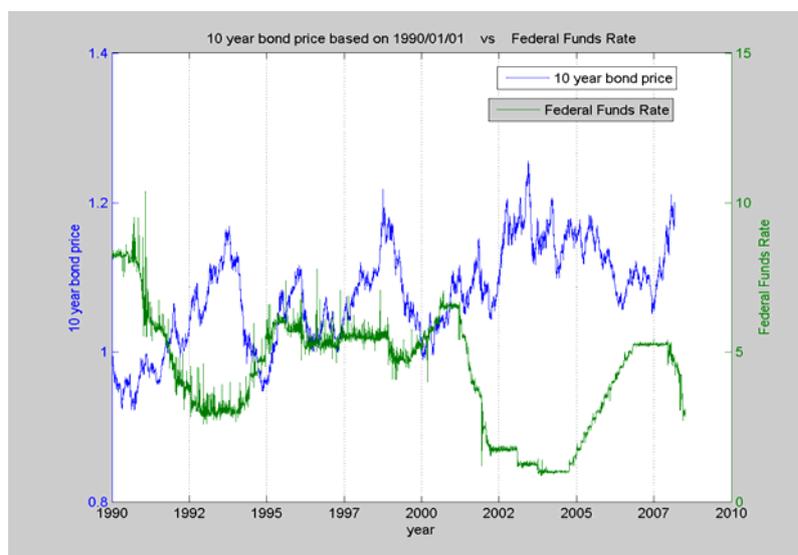


圖 14 美國十年公債價格指數 vs. 美國聯邦利率

由上圖可發現在以往聯準會利率有大幅調升或調降時，債券價格都會隨著利率而作反向的變動，主要是因為投資人要求的報酬率改變，但從 2004~2006 年的連續大幅度升息，債券價格卻是沒有下跌的像以往來得明顯。所以在外國對於的美債需求和聯準會調升利率這兩個因素的影響下使得債券價格在 2003~2007 年這段期間呈現了上下劇烈波動的情況，而股市在這一階段也因整個景氣的復甦和房市的熱絡持續上漲，導致了美國國內股債市的關聯性波動劇烈。由圖 15 可以表達出美國政府公債價格之所以會持續來回震盪的原因：

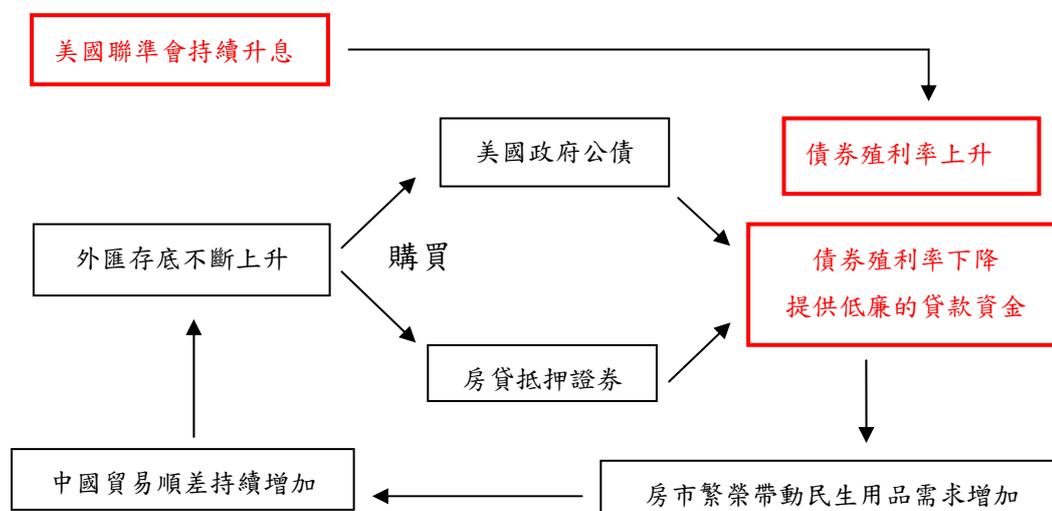


圖 15 中美貿易循環圖

六、結論

本文以各種可能符合股債市關聯結構的 copula 函數，來找出最適當的模型，結果發現以 Student t copula 較能描述股債市之間的關聯結構，且在股債市呈現正相關的同時，也伴隨了對稱 tail dependence 的現象，並藉由此模型的關聯結構參數回顧從 1990~2008 年歐美 5 個國家(美、加、英、德、法)的股債市關聯結構的走勢，可看出從 1990 年到 2003 年中期呈現一致的情況，在 1990~1999 年這段期間都呈現中度的正相關結構，雖然在 1998 年爆發俄羅斯金融風暴，加上 LTCM 倒閉造成歐美股市重創，使得當時資金流向風險較低的歐美政府公債，導致股債結構頓時轉為負相關，但不久也立刻回復到正相關的結構，也指出股債市以前並非長期處於反向的走勢，而隨著網際網路的泡沫化後，美國經濟走入衰退期，原本由這些網路科技類股所帶領的股市走入了空頭，而聯準會連續降息，從 2000 年的 6.5% 降到 2003 年的 1%，債市在此階段走入多頭的局勢，使得股債市在 2000~2003 年呈現負相關的結構，但在 2003 年中期以後，發現美國與加拿大國內股債市的相關性呈現劇烈的波動，而英、法、德依舊維持負相關的結構，本文提出的論點主要是因為當時正處於低利率的時代，美國的經濟開始復甦，資金的借貸變得寬鬆也造就了房市和股市的復甦，一些併購也紛紛出現，而在 2003~2006 年 6 月美國逐漸升息的階段，債券價格也因此受到升息的因素而下跌，造成股債市成現反向的變動，但又受到中國龐大的外匯存底大量購買美債，使得債券價格上漲，造成股債市同向的變動，在升息和國外對美債需求兩個條件的交互作用下才導致債市在此階段上下震盪，也促使美國股債市相關性的劇烈波動。而在 Region hit test copula 模型檢定的部分，可看得出來 Student t copula 較能捕捉極端事件發生的情形，而 Gaussian 和 Frank 較無法捕捉報酬極端值可能發生的機率，但在金融市場發生重大事件如網際網路泡沫化的時期，股市持續下跌，債市持續上漲，此時這三種模型都會低估此情況發生的機率。

References

- [1] Cherubini, U., E. Luciano, E., Vecchiato, W, 2004. Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons.
- [2] Clemente, A., Romano, C, 2004. Measuring and optimizing portfolio credit risk: A copula-based approach. *Economic Notes* 33, 325 – 357.
- [3] Eric Jondeau, Michael Rockinger, 2006. The Copula-GARCH model of conditional dependencies : An international stock market application. *Journal of International Money and Finance* 25, 827 – 853.
- [4] Erik Kole, Kees Koedijk, Marno Verbeek, 2007. Selecting copulas for risk management. *Journal of Banking & Finance* 31, 2405 – 2423.
- [5] Hull, J. and A. White, 1998. Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed. *Journal of Derivatives*, 5, 9-19.
- [6] Juan Carlos Rodriguez, 2007. Measuring financial contagion : A Copula approach. *Journal of Empirical Finance* 14, 401 – 423.
- [7] Ling Hu, 2006. Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach. *Applied Financial Economics* 16, 717 – 729.
- [8] Lingfeng Li, 2002. The Correlation of Stock and Bond Returns : Theory and Empirical Evidence. Working paper.
- [9] Ling, C.H, 1965. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen.* 12, 189 – 212.
- [10] Lindskog, F., A. McNeil and U. Schmock, 2001. Kendall's Tau for Elliptical Distributions. Working paper. Centre of Financial and Actuarial Mathematics, Vienna University of Technology.

- [11] Magnus Andersson, Elizaveta Krylova, Sami Vähämaa, 2007. Why does the correlation between stock and bond returns vary over time ? *Applied Financial Economics* 18, 139 – 151.
- [12] Meneguzzo, D., Vecchiato, W, 2004. Copula sensitivity in collateralized debt obligations and basket default swaps. *The Journal of Futures Markets* 24, 37 – 70.
- [13] Nelsen, R. B., 1999. *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag.
- [14] Patton, A.J., 2006. Modeling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review*, Vol. 47, No. 2.
- [15] Patton, A.J., 2006. Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths. *Journal of Applied Econometrics* 21, 147 – 173.
- [16] Robert A. Connolly, Chris Stivers, Licheng Sun, 2006. Commonality in the time-variation of stock-stock and stock-bond return comovements. *Journal of Financial Markets* 10, 192 – 218.
- [17] Rosenberg, J. 1998. Pricing Multivariate Contingent Claims using Estimated Risk-Neutral Density Functions. *Journal of International Money and Finance* 17, 229-247.
- [18] Stefano d’Addona, Axel H. Kind, 2006. International stock–bond correlations in a simple affine asset pricing model. *Journal of Banking & Finance* 30, 2747–2765.
- [19] Sohnke M. Bartram, Stephen J. Taylor, Yaw-Huei Wang, 2007. The Euro and European financial market dependence. *Journal of Banking & Finance* 31, 1461 – 1481.
- [20] Suk-Joong Kim, Fariborz Moshirian, Eliza Wu, 2006. Evolution of international stock and bond market integration: Influence of the European Monetary Union. *Journal of Banking & Finance* 30, 1507–1534.
- [21] Thierry Ane, Loredana Ureche-Rangau and Chiraz Labidi-Makni, 2007. Time-varying

conditional dependence in Chinese stock markets. *Applied Financial Economics*, 1 – 22.

[22] Timo Terasvirta, Clive W.J. Granger, Andrew J. Patton, 2006. Common factors in conditional distributions for bivariate time series. *Journal of Econometrics* 132, 43–57.

[23] Xiaohong Chen and Yanqin Fan, 2004. Evaluating density forecasts via the copula approach. *Finance Research Letters* 1, 74 – 84.

[24] Xiaohong Chen and Yanqin Fan, 2004. Estimation and model selection of semiparametric copula-based multivariate dynamic models under copula misspecification. *Journal of Econometrics* 135, 125 – 154.

