

國立交通大學

資訊科學與工程研究所

碩士論文

利用 LMedS 初解計算雜訊干擾之二張校正
影像之間的精準相機外部參數

Accurate Camera Pose Estimation from the Noisy
Calibrated Stereo Images Based on LMedS Initial Results

研究生：鄭喬文

指導教授：陳 稔 教授

中華民國九十七年七月

利用 LMedS 初解計算雜訊干擾之二張校正影像之間的精準相機外部
參數

Accurate Camera Pose Estimation from the Noisy Calibrated Stereo
Images Based on LMedS Initial Results

研究生：鄭喬文

Student : Chiao-Wen Cheng

指導教授：陳 稔

Advisor : Zen Chen



July 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年七月

利用 LMedS 初解計算雜訊干擾之二張校正影像之間的精準相機外部 參數

研究生：鄭喬文

指導教授：陳 稔

國立交通大學
資訊科學與工程研究所

摘要

本論文的目的是在於利用同一物體不同角度的 2 張影像，以其中對應點的資訊來估測精確的相機外部參數，首先以 LMedS 方法隨機計算出多組外部參數解，並取誤差值較小的前幾名解。用 MST(Minimum Spanning Tree)為基礎的分群計算各小區域的橢圓體，對橢圓體細切再分群，直到橢圓體退化，以求得改進解及附近的 error surface 變化(=橢圓體的 eigen values 及 eigenvectors 分布)，然後依橢圓體的 eigen values 及 eigenvectors 來決定各維度執行搜尋的順序，最後執行以黃金切割搜尋法(GSS)為基礎的 5D 空間最佳解搜尋法，以找到 5D 全域空間的最佳解。

關鍵字：相機定位估測、外部參數、多維最佳解搜尋

Accurate Camera Pose Estimation from the Noisy Calibrated Stereo Images Based on LMedS Initial Results

Student : Chiao-Wen Cheng

Advisor : Zen Chen

Institute of Computer Science and Engineering College of Computer
Science
National Chiao Tung University

Abstract

Estimating accurate camera pose with extrinsic parameters from this thesis uses information of correspondent points in two different views from the same object. First, using LMedS method to obtain a lot of solutions of extrinsic parameters, and take the front solutions with smaller median error. Use clustering based on MST(Minimum Spanning Tree)to compute the information of ellipsoids of the local regions. Fine cut the ellipsoids and clustering again until the ellipsoids degenerate. Then we will get the solution with refinement and the variation of errorsurface(= eigen values and eigenvectors of ellipsoid). Decide the executing sequence of each dimesion by eigen values and eigenvectors of ellipsoid. Finally, executing the 5D optimization search method base on Golden section search(GSS) to find the optimized solution in 5D solution space.

Key words : camera estimation 、 extrinsic parameters 、
optimized searching in multi-dimesion

致謝

首先由衷感謝我的指導教授陳稔博士這兩年來對我不辭辛勞的指導與教誨，讓我的邏輯思考能力有了很大的啟發，同時也讓我學習到研究學問必須持有的態度與執著；當在緊要關頭時，老師也會陪著我一起面對眼前的難題、細心地分析問題始末，並指引出一條正確的解決之道。在此，向老師致上最深的敬意！

同時也感謝 PAIS 實驗室的所有成員在研究上給我許多幫助，並時常給予最大的鼓勵與打氣，感謝和我一起渡過 700 多個日子的文昭學長，學長的幫助，讓我在碩士之路上克服許多難關。感謝親愛的父母給予我充足的精神和物質生活，讓我能心無旁騖地將學業完成；也感謝我的女朋友詩雲，在這段時間陪我一同分享內心喜悅、傾聽失意的牢騷，並在旁支援我繼續走下去，謝謝妳。

最後，在感謝這段時間陪伴我的所有人，僅以此篇論文獻給你們！

鄭喬文 2008/8 于 新竹交大 PAIS 實驗室



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vi
第 1 章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目標.....	1
1.2 相關研究	2
1.3 研究方法介紹	3
1.4 論文組織	4
第 2 章 外部參數的求法及其表示法.....	6
2.1 從 Essential matrix 分解出外部參數.....	6
2.2 評估方法的設定.....	8
2.3 外部參數的 5D 角度表示法.....	10
第 3 章 LMedS 方法求解與初解之改進.....	14
3.1 用 LMedS 得到初解及分群.....	14
3.2 初解之改進.....	17
第 4 章 搜尋全域性正解的離散值	21
4.1 全域搜尋法.....	21
4.2 Golden section search(GSS)	24
第 5 章 實驗與結果	29
5.1 半雜訊實驗結果	32
5.2 全雜訊實驗結果	53
5.3 真實影像實驗結果.....	65
第 6 章 結論與未來發展方向	69
6.1 結論	69
6.2 未來發展方向	69
參考文獻	70

表目錄

表 2.1 相機位移矩陣 T 轉換成球座標的正負判別.....	13
表 3.1 LMedS 結果的前 50 名 5D 解及其誤差值.....	16
表 3.2(a) cluster 的 R mean & eigenvalues & eigenvector.....	18
表 3.2(b) cluster 的 T mean & eigenvalues & eigenvector.....	18
表 3.3 細切之後前 50 名解的 weighted code.....	20
表 5.1 實驗所使用的 10 張模擬影像.....	31
表 5.2 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)初始解及最佳解的誤差值紀錄....	47
表 5.3 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)初始解及最佳解重建的 3D 模型 和 ground truth 的比較結果.....	50
表 5.4 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解的誤差值紀錄....	54
表 5.5 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解重建的 3D 模型 和 ground truth 的比較結果.....	56
表 5.6 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解的誤差值紀錄....	60
表 5.7 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解重建的 3D 模型 和 ground truth 的比較結果.....	62



圖目錄

圖 1.1 相機定位估測.....	1
圖 1.2 重建精確的 3D 模型需要精確的外部參數.....	2
圖 1.3 大略流程圖.....	4
圖 2.1 求外部參數的流程圖.....	6
圖 2.2 Essential matrix 分解外部參數的四種情形.....	8
圖 2.3 評估外部參數解好壞的 3 種方法.....	8
圖 2.4 相機座標相對球座標的轉換關係	11
圖 3.1、最小平方中值法示意圖.....	14
圖 3.1 Minimum Spanning Tree 示意圖.....	17
圖 4.1 Golen section search(GSS)示意圖.....	21
圖 4.2(a) GSS 改進步驟(1).....	23
圖 4.2(b) GSS 改進步驟(2).....	23
圖 4.3 error surface(水平軸為 ωR ，垂直軸為 θR).....	25
圖 4.4 error surface(水平軸為 θR ，垂直軸為 ψR).....	25
圖 4.5 三個參數空間的參數設定為 R_{last} 、 (R_{hor}, R_{ver}) 、 (T_{hor}, T_{ver})	26
圖 4.6 全域搜尋法執行順序流程圖.....	27
圖 5.1 在立方塊(cube)可見的 3 個面上的對應點編號.....	29
圖 5.2 立方體(cube)在 2D 上的影像示意圖.....	30
圖 5.3 為表 5.2 的示意圖(x 軸為實驗編號，y 軸為 median error).....	47
圖 5.4 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度 和原 3D 對應邊長相差絕對值的平均(cm).....	50
圖 5.5 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度 和原 3D 對應邊長相差絕對值的標準差.....	51
圖 5.6 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度 和原 3D 對應角度相差絕對值的平均(度).....	51
圖 5.7 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度 和原 3D 對應角度相差絕對值的標準差.....	52
圖 5.8 為表 5.4 的示意圖(x 軸為實驗編號，y 軸為誤差值).....	55
圖 5.9 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度 和原 3D 對應邊長相差絕對值的平均(cm).....	57
圖 5.10 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度 和原 3D 對應邊長相差絕對值的標準差.....	57
圖 5.11 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度 和原 3D 對應角度相差絕對值的平均(度).....	58
圖 5.12 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度 和原 3D 對應角度相差絕對值的標準差.....	58

圖 5.13 為表 5.6 的示意圖(x 軸為實驗編號，y 軸為 median error).....	60
圖 5.14 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度 和原 3D 對應邊長相差絕對值的平均(cm).....	62
圖 5.15 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度 和原 3D 對應邊長相差絕對值的標準差.....	63
圖 5.16 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度 和原 3D 對應角度相差絕對值的平均(度).....	63
圖 5.17 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度 和原 3D 對應角度相差絕對值的標準差.....	64



第 1 章 緒論

1.1 研究動機與目標

相機定位估測(camera pose estimation) 是一個重要研究題目，主要是由影像估測相機拍攝時對於某一座標系的旋轉(rotation)及位移(translation)資訊，如圖 1.1，可用在電腦視覺技術中的空間定位相關應用上，如：人臉辨識、門禁系統、多張影像 3D 重建、機器人視覺(robot vision)，還有視覺式之同時定位與製圖技術(visual simultaneous localization and mapping)等等。

估測準確性是一個很重要的指標，只有當準確度提高到某一個程度，才具有實用價值，但對於原始資料有可能包含雜訊，則容易造成難以估測準確的結果。對於此影像含有雜訊的問題，傳統的演算法僅能得到一個粗估的解，離正確解尚有一段差距。在過去幾年的應用中，此問題尚未被重視，主要的原因在於影像解析度約百萬相素的等級，就算影像對應點有雜訊的干擾，估測的解仍能得到不錯的結果。但是隨著影像感測元件解析度的提昇，現在的相機畫素已達千萬相素的等級，原本可忽略的影像誤差在如此高的解析度下開始會對結果產生影響，進而造成後續資料處理(如影像式三維建模技術)的誤差。因此本論文的研究希望能提昇影像辨認的學理與技術水準，增進其辨認的準確率及可用性。

本論文的目標將探討一個使用 2 張影像及其對應特徵點的資訊來估測精確相機外部參數的方法，即使在雜訊干擾下也能得到相機 5D 參數離散空間(discrete solution space)的最佳解。預期研究成果可逐步應用於電玩娛樂、身份證明、人機介面、安全監控、關卡控制、嫌犯追蹤等用途上。

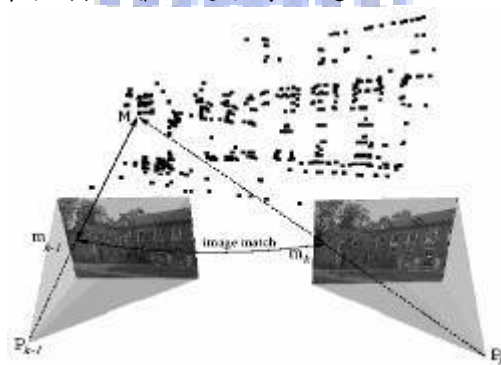


圖 1.1 相機定位估測

1.2 相關研究

本節將討論在相機定位估測的問題裡精準外部參數的必要性，還有目前在此問題中所使用的解決方法。

在今年的 CVPR 的 Y. Furukawa, and J. Ponce, "Accurate Camera Calibration from Multi-View Stereo and Bundle Adjustment", 討論到在建立 3D 模型時，越精確的模型需要越精確的外部參數來達成，如下圖 1.2。目前在使用機械手臂控制下，實際外部參數最多精確到 0.01° ，而因此造成的誤差對於要建立精確模型還是不足，所以有開發估測精準外部參數方法的必要性。

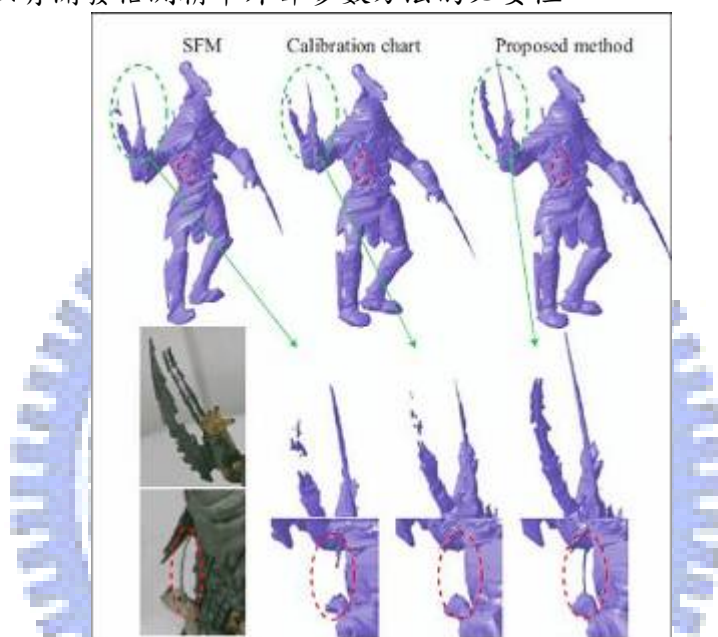


圖 1.2 重建精確的 3D 模型需要精確的外部參數

一般而言，目前在估測精準外部參數的課題上可大致分成 3 種方法：

Linear methods：快速但較無法保證會收斂到正確解(最佳解)，主要應用於 real-time issue。例如：A. Ansar and K. Daniilidis, "Linear pose estimation from points or lines", *PAMI* 2003。

Non-linear methods：包括 Gradient-descent, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, conjugate gradient methods, etc。缺點是只能應用在有唯一解的情況，當有區域極值(local minimum)時，結果有可能會陷入區域極值中。

Stochastic methods：包括 Genetic algorithm, Taguchi method, simulated annealing, etc。解決以上 2 種方法的缺點，但會需要以大量的計算來換取準確的結果。例如：劉嘉哲, "使用直交退火演算法解相機校正問題", 逢甲大學資訊工程學系, 碩士論文, 民 92；
"Global Optimization through Searching Rotation Space and Optimal Estimation of the Essential Matrix", [Richard I. Hartley and Fredrik Kahl, 2007]；Bundle Adjustment

[Yasutaka Furukawa and Jean Ponce , 2008]

此外，由於通常有許多的特徵點，所以會搭配robust estimation，除了可以剔除outlier之外，還能稍微減少noise的影響(有機會挑出較小noise的點)。常用的如M-estimator, Least Median Squares[Peter J. Rousseeuw ,1984], and RANSAC (RANDOM Sample Consensus) [Fishler & Bolles, 1981]。本論文採用搭配LMedS的方法先求出初解。

1.3 研究方法介紹

本論文要執行的工作包括建立模擬及實拍影像，以 LMedS 求初始解，初解的改進，以改進解為中心做 GSS 為基礎的 5D 空間最佳解搜尋等工作，細項包括：

- (1) 用 2.3 節的方法，對 5 個角度的設定來取得模擬的影像，或是直接拍攝實物。
- (2) 以 LMedS 方法隨機計算出多組外部參數解，並取誤差值較小的前幾名解。
- (3) 用 MST(Minimum Spanning Tree)為基礎的分群計算各小區域的橢圓體。
- (4) 對橢圓體細切再分群，直到橢圓體退化，求得改進解及附近的 error surface 變化(=橢圓體的 eigen values 及 eigenvectors 分布)。
- (5) 依橢圓體 eigen values 及 eigenvectors 來決定各維度執行搜尋的順序。
- (6) 執行以黃金切割搜尋法(GSS)為基礎的 5D 空間最佳解搜尋法，以找到 5D 全域空間的最佳解。

執行概略流程如下：



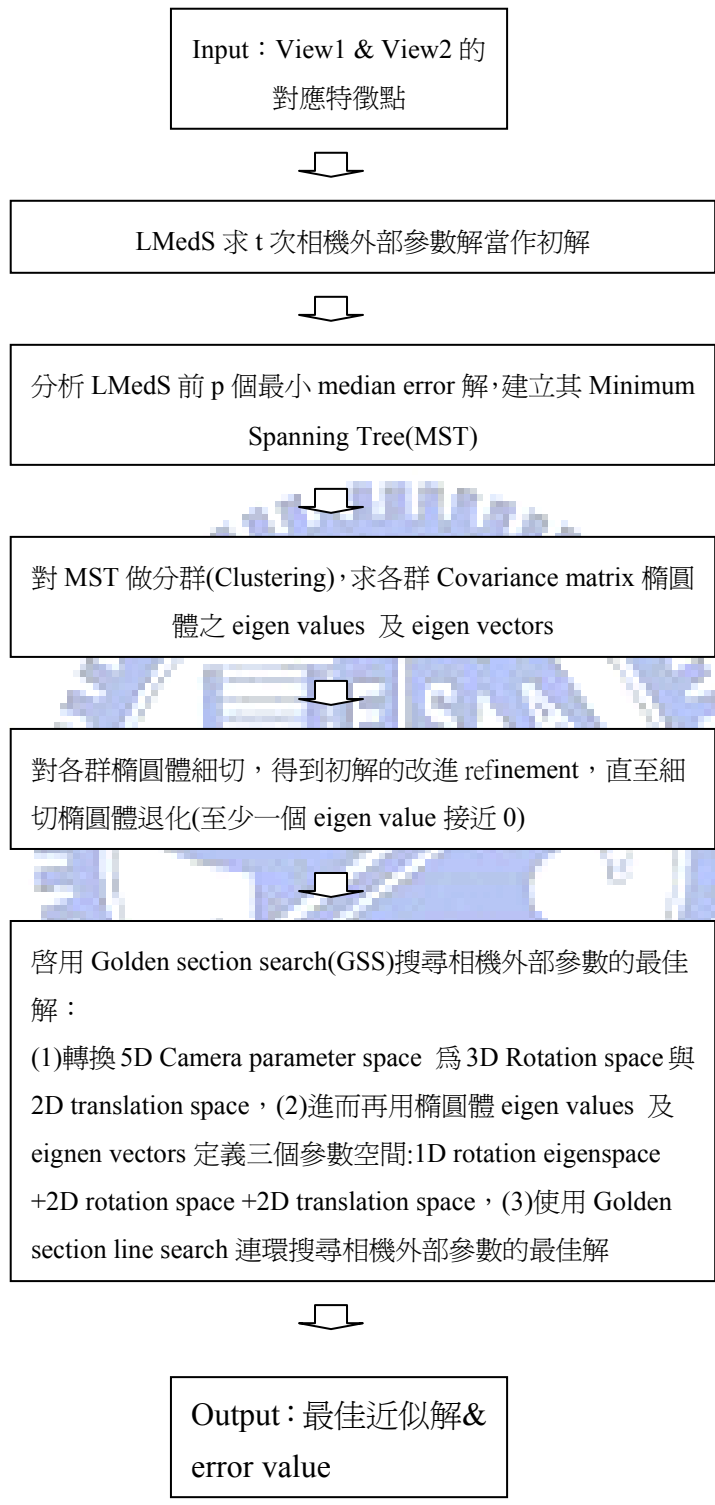


圖 1.3 大略流程

1.4 論文組織

本論文共分為六章，首章為本論文研究方向的概括性介紹，並介紹相關主題中使用的各種方法；第二章介紹如何用 2 張影像對應點的資訊求出外部參數解，

並將外部參數以 5 個角度來表示，同時應用在建立模擬影像的方法中；第三章介紹如何用 LMedS 求出初始解，並以分群及細切的方法找到包含最佳解的小區域橢圓體及初步改進解；第四章將說明如何以第 3 章的改進解為中心，在附近範圍以 Golden Section Search(GSS)演算法來找到更加精確的外部參數解；第五章為本論文實驗相數據及分析；第六章為本論文的結論探討及後續工作的規劃。



第 2 章 外部參數的求法及其表示法

本章將說明如何使用二張影像中的已知對應點(至少八點)求出基礎矩陣 (fundamental matrix) F_{origin} ，經由 F_{origin} 及兩張影像各自的內部參數 K 及 K' 可計算出 essential matrix E_{origin} 。此外亦使用 essential matrix 本身的特性來進行修正，經修正後再分解出二張影像之間的 rotation matrix R 及 translation T 。利用修正後的 $E_{modified}$ 及內部參數可計算出較正確的 fundamental matrix $F_{modified}$ ，最後將外部參數 R, T 以 5 個角度 $\psi_R, \theta_R, \omega_R, \psi_T, \theta_T$ 來表示，使解空間從 6D 降為 5D，求外部參數的完整流程如圖 2.1 所示。

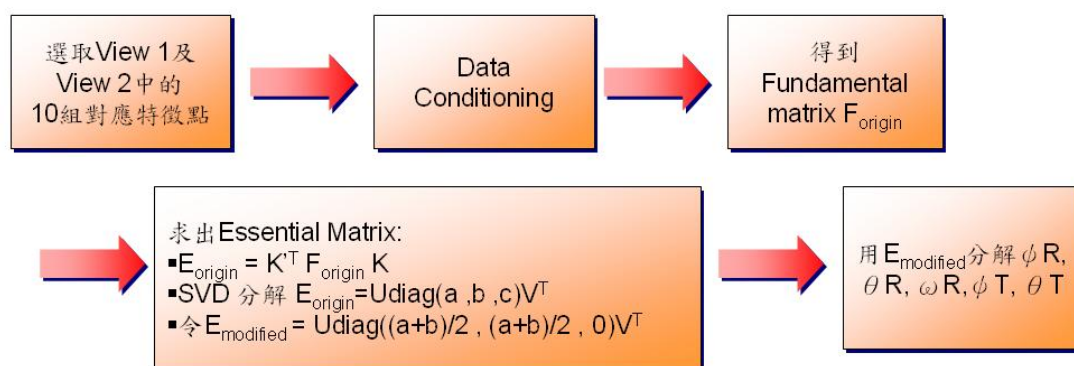


圖 2.1 求外部參數的流程

2.1 外部參數的求法

令二張影像為 $View_1$ 及 $View_2$ ，且有 n 組的對應點，此 n 組的對應點可利用現有的特徵點擷取與對應之相關技術事先計算。令 $P_i = (u_i, v_i)^T$ 為 $View_1$ 上的對應點座標， $P'_i = (u'_i, v'_i)^T$ 為 $View_2$ 上的對應點座標，其中 $View_1$ 及 $View_2$ 中的對應點與兩影像之間的 fundamental matrix F 有以下關係：

$$P'_i F P_i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u'_i & v'_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

由上式可知，若將 F_{33} 令為 1，僅需八組對應點即可利用 least-square method 來計算 F ，計算方法如下：

$$A^* \bar{f} = A^* \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ \vdots \\ F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} u_1 u_1' & u_1 v_1' & u_1 & v_1 u_1' & v_1 v_1' & v_1 & u_1' & v_1' & 1 \\ u_2 u_2' & u_2 v_2' & u_2 & v_2 u_2' & v_2 v_2' & v_2 & u_2' & v_2' & 1 \\ u_3 u_3' & u_3 v_3' & u_3 & v_3 u_3' & v_3 v_3' & v_3 & u_3' & v_3' & 1 \\ u_4 u_4' & u_4 v_4' & u_4 & v_4 u_4' & v_4 v_4' & v_4 & u_4' & v_4' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n u_n' & u_n v_n' & u_n & v_n u_n' & v_n v_n' & v_n & u_n' & v_n' & 1 \end{bmatrix}_{N \times 9} \quad (2.2)$$

接下來對 A 做 SVD 分解，

其中 \bar{f} 的最佳解為對應 A 最小 eigen-value 的 unit eigen-vector。

$$\text{令 } F_{\text{origin}} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}, \text{ 由已知的內部參數 } K \text{ 及 } K' \text{ 及 } F_{\text{origin}}, \text{ 可求出 Essential}$$

matrix $E_{\text{origin}} = K'^T F_{\text{origin}} K$ ，對 E_{origin} 做 SVD 分解得到 $E_{\text{origin}} = U D V^T$ ，在有誤差的情

$$\text{況下 } D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ 對 } D \text{ 做修正，使 } E_{\text{modified}} = U \begin{bmatrix} (a+b)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^T,$$

同時計算出 $F_{\text{modified}} = K'^T E_{\text{modified}} K^{-1}$ 。

相同的 Essential matrix 會有 4 種不同的外部參數(=R、T)分解可能^[1]，計算如下：

$$\text{對 } E_{\text{modified}} \text{ 做 SVD 分解得到 } E_{\text{modified}} = U D V^T = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{u}_3] D V^T, \text{ 令 } W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R$$

有 2 種可能為 $R_1 = U W V^T$ 及 $R_2 = U W^T V^T$ ，T 有 2 種可能為 $T_1 = \bar{u}_3$ 及 $T_2 = -\bar{u}_3$ ，從幾何意義上來看，如下圖 2.2(a)~(d)，其中 A、B 代表 2 台相機，圖 2.2(a)表示 3D 點同時在 2 台相機前方，圖 2.2(b)表示 3D 點在 2 台相機後方，圖 2.2(c)表示 3D 點在 A 相機後方但在 B 相機前方，圖 2.2(d)表示 3D 點在 A 相機前方但在 B 相機後方，而這 4 種情形會產生相同位置的 2D 對應點，但僅有在圖 2.2(a)情形下的外部參數(R、T)為我們所求。

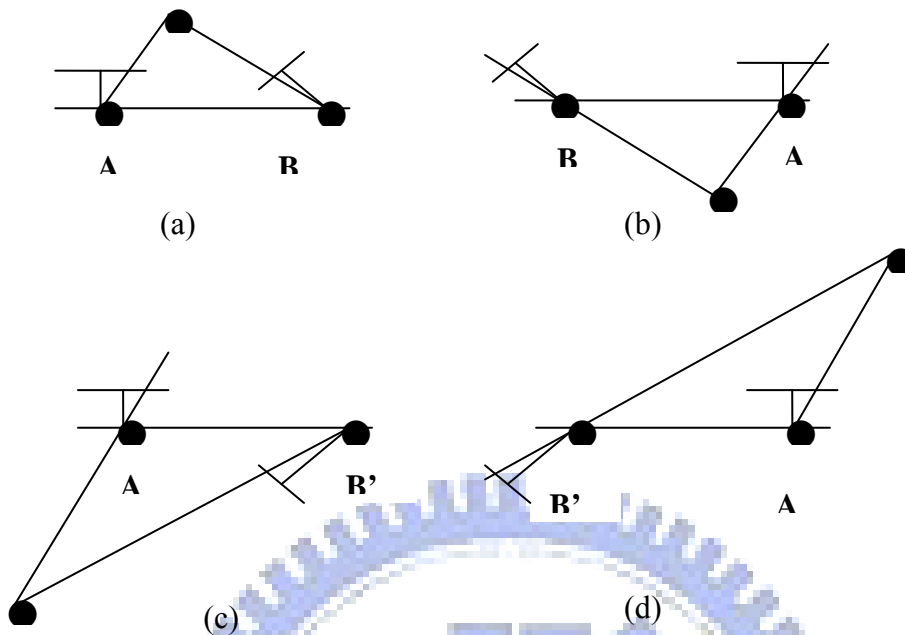


圖 2.2 Essential matrix 分解外部參數的四種情形

2.2 評估方法的設定

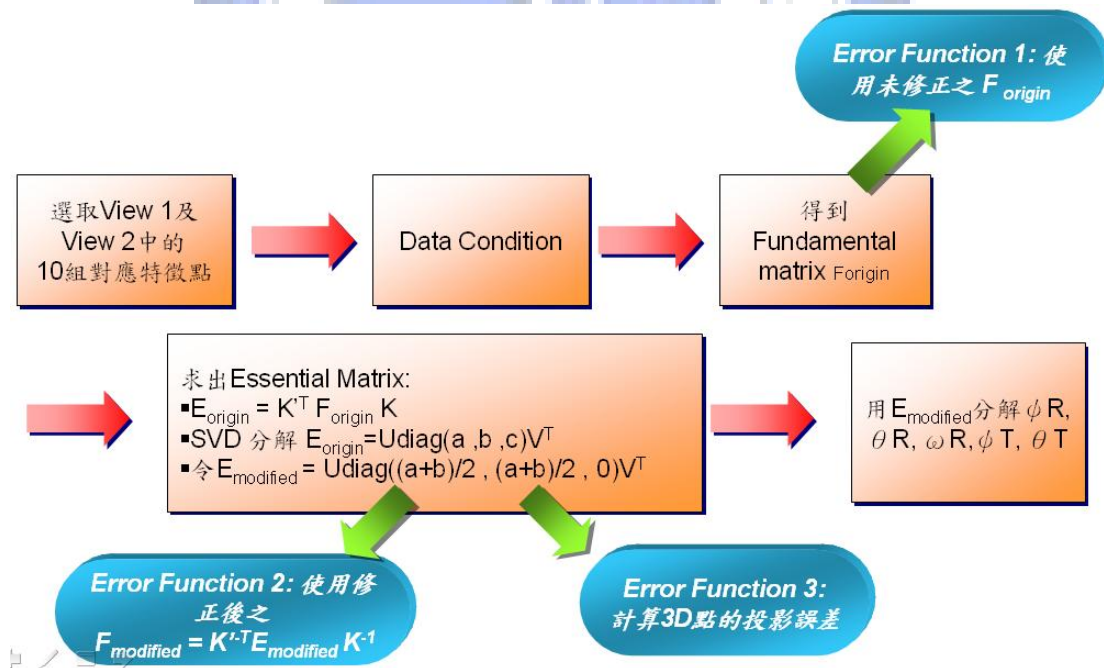


圖 2.3 評估外部參數解好壞的3種方法

如圖 2.3，我們要評估求出的外部參數解好壞有以下3種方法：

方法 1：

以 F_{origin} 計算 $View_1$ 中對應點在 $View_2$ 上的 epipolar line 到 $View_2$ 上相對應點的距離加上 $View_2$ 中對應點在 $View_1$ 上的 epipolar line 到 $View_1$ 上相對應點的距離，計算出

n 個值並取中位數，即為 n 個值排序後的第 $\lceil n/2 \rceil$ 個值，公式如(2.3)~(2.5)；
 令 $P_i = (u_i, v_i)^T$ 為 $View_1$ 上的對應點座標， $P_i' = (u_i', v_i')^T$ 為 $View_2$ 上的對應點座標，其中，

P_i 對應在 $View_2$ 上的 Epipolar Line 的係數為：

$$Line'(i) = F_{origin} * \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1' \\ l_2' \\ l_3' \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

P_i' 對應在 $View_1$ 上的 Epipolar Line 的係數為：

$$Line(i) = (u_i' \ v_i' \ 1) * F_{origin} = (l_1 \ l_2 \ l_3) \quad (2.4)$$

第 i 個 epipolar line 到對應點的距離和的值如下：

$$Error(i) = \left(\frac{\| (u_i' \ v_i' \ 1) * Line'(i) \|}{\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}} + \frac{\| Line(i) * (u_i \ v_i \ 1)^T \|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right) \quad (2.5)$$

最後得到的 Error value = $median\{Error(i), i = 1 \sim n\}$ 。

方法 2：

計算方法同(1)但 F_{origin} 改用 $F_{modified}$ 。

方法 3：

以 $E_{modified}$ 分解出外部參數，並以已知的內部參數 K 及 K' 求出 $View_1$ 及 $View_2$ 的投影矩陣(projection matrix)，如下(2.6)：

$$PM_1 = K[I|0] \ , \ PM_2 = K'[R|T] \quad (2.6)$$

接下來，由 P_i 、 P_i' 、 PM_1 、 PM_2 重建出 3D 點，再將 3D 點投影回 $View_1$ 及 $View_2$ 產生新的 2D 點，計算新的 2D 點和 P_i 、 P_i' 之間的距離，同樣在 n 個值取中位數當做誤差值。

重建 3D 點的方法如下：

$View_1$ 上的點 P_i 和 PM_1 之間有(2.7)式的關係，其中 $X_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ 為原始的 3D 點

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} \times (PM_1 \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}) = 0$$

$$\Rightarrow u_i(pm_1^{3T} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}) - (pm_1^{1T} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}) = 0, \quad v_i(pm_1^{3T} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}) - (pm_1^{2T} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}) = 0 \quad (2.7)$$

where pm_1^{iT} = ith row of PM_1

由(2.7)可以導出

$$A * X_i = A * \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad \text{where } A = \begin{bmatrix} u_i pm_1^{3T} - pm_1^{1T} \\ v_i pm_1^{3T} - pm_1^{2T} \\ u_i' pm_2^{3T} - pm_2^{1T} \\ v_i' pm_2^{3T} - pm_2^{2T} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

接下來對 A 做 SVD 分解，

其中重建 3D 點 X_i 的最佳解為對應 A 最小 eigen-value 的 unit eigen-vector。

重建出 3D 點後，將其投影 $View_1$ 及 $View_2$ 產生新的 2D 點 $P_{i_new} = (u_{i_new}, v_{i_new})^T$ 及 $P_{i_new}' = (u_{i_new}', v_{i_new}')^T$ ，計算新的 2D 點和 P_i 、 P_i' 之間的距離

$$Error(i) = \sqrt{(u_{i_new} - u_i)^2 + (v_{i_new} - v_i)^2} + \sqrt{(u_{i_new}' - u_i')^2 + (v_{i_new}' - v_i')^2} \quad (2.9)$$

最後得到的 Error value = $median\{Error(i), i = 1 \sim n\}$

本論文所使用的評估方法為方法 2，原因如下：經測試，以方法 1 所求出有小誤差值的外部參數解，和正解有很大差距，和我們預期不同(有小誤差值的解要接近正解)，所以不適用，而許多 5D 解以方法 2 和方法 3 所計算出的誤差值的排序相當，但方法 3 所需的步驟較多，故使用方法 2 來當做我們評估解好壞的方法。

2.3 外部參數的 5D 角度表示法

一開始外部參數為 R(rotation matrix)及 T(translation matrix)，一般而言，R 可以用三個角度：對 x 軸旋轉角度 θ_x 、對 y 軸旋轉角度 θ_y 、對 z 軸旋轉角度 θ_z 來表示，如(2.6)式：

$$\text{Rotation Matrix } R = R(\theta_x) \cdot R(\theta_y) \cdot R(\theta_z) \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

而 $T_{\text{real}}=[T_x, T_y, T_z]^T$ 表示 2 台 camera 實際上在世界座標裡的相對位置，但以 2 張平面的影像僅可獲得 T 的方向資訊， T 的真實長度沒辦法求出，所以用 2 張平面影像求出的 T 只需用 2 個維度的值來表示即可。計算方法如 2-1 節，令求出的 $T=[t_x, t_y, t_z]^T$ ，其長度為 1，以球面座標系統的 2 個角度 (ψ_T, θ_T) 表示，轉換方法如後述。

R 若以 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ 表示，很難直觀的看出 camera 旋轉後的方向，而且由以下三個原因，改用 $(\psi_R, \theta_R, \omega_R)$ 表示之，轉換方法如後述。

- 和 T 同樣以球面座標(經緯度)模式表示
- 能簡單明確顯示相機旋轉的方向
- 避免萬向鎖(Gimbal lock)問題

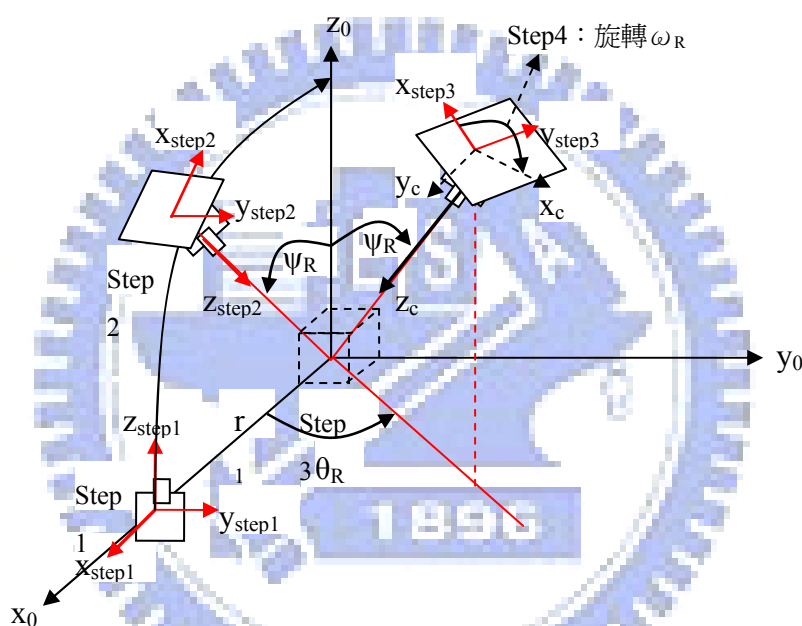


圖 2.4 相機座標相對球座標的關係

初始設定為物體的原點置於球座標的球心，其 \bar{z}_0 軸指向北極， \bar{x}_0 軸定在東經 0° ， \bar{y}_0 軸定在東經 90° ，且物體不動。

相機一開始位置與物體一致，然後移動到球面上，半徑 r_1 ，移動順序如圖 2.4 從 Step1~Step3，使 \bar{x}_c 、 \bar{y}_c 的相機平面切於球面，相機光軸 \bar{z}_c 指向球心。此時相機原點座標 (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) 移到東經 θ_R 角，北緯 $(90-\varphi_R)$ 角，其數學式為

$$\begin{aligned} x_{c0} &= r_1 \sin \varphi_R \cos \theta_R \\ y_{c0} &= r_1 \sin \varphi_R \sin \theta_R \\ z_{c0} &= r_1 \cos \varphi_R \end{aligned} \quad (2.7)$$

則相機對原始球座標的位移矩陣為 $\vec{T} = [t_x \ t_y \ t_z]^T = [x_{c0} \ y_{c0} \ z_{c0}]^T$ 。

再看 Step3 結束後，相機座標系的三個軸方向如下：

$$\bar{z}_c = -\bar{v} = \bar{0} - \begin{bmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \\ z_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{c0} \\ -y_{c0} \\ -z_{c0} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{step3} = R_{z0}(\theta_R)\bar{x}_{step2} = R_{z0}(\theta_R)\underbrace{R_{y0}(180^\circ - \varphi_R)}_{\bar{x}_{step2}}\bar{x}_{step1}, \text{ 其中 } \bar{x}_{step1} = \bar{x}_0 \quad (2.8)$$

$$\bar{y}_{step3} = \bar{z}_c \times \bar{x}_{step3}$$

其次，再將此 \bar{x}_c 、 \bar{y}_c 對球面的切平面對此時的 \bar{z}_c 軸旋轉 ω_R 角，最後的 \bar{x}_c 、 \bar{y}_c 軸方向算法如下：

$$\bar{x}_{c_final} = R_{z_c}(\omega_R)\bar{x}_{step3} \quad (2.9)$$

$$\bar{y}_{c_final} = R_{z_c}(\omega_R)\bar{y}_{step3}$$

其中 $R_{z_c}(\omega_R)$ 為對 \bar{z}_c 方向軸旋轉 ω_R 角度，計算如下：

$$\text{Given } \bar{z}_c = \begin{bmatrix} z_{c1} & z_{c2} & z_{c3} \end{bmatrix}^T$$

$$R_{z_c}(\omega_R) = \hat{A} + (\cos \omega_R)(I - \hat{A}) + (\sin \omega_R)A^* \quad (2.10)$$

where

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} z_{c1}z_{c1} & z_{c1}z_{c2} & z_{c1}z_{c3} \\ z_{c2}z_{c1} & z_{c2}z_{c2} & z_{c2}z_{c3} \\ z_{c3}z_{c1} & z_{c3}z_{c2} & z_{c3}z_{c3} \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 0 & -z_{c3} & z_{c2} \\ z_{c3} & 0 & -z_{c1} \\ -z_{c2} & z_{c1} & 0 \end{bmatrix}$$

最後相機座標系與原始參考球座標系之間的 3D 旋轉矩陣 R 即可求得

$$R = \begin{bmatrix} \bar{x}_{c_final} & \bar{y}_{c_final} & \bar{z}_c \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

以上為相機對球座標旋轉及位移的執行過程，假設相機#1 對球座標旋轉矩陣為 R_1 ，位移矩陣為 T_1 ，相機#2 對球座標旋轉矩陣為 R_2 ，位移矩陣為 T_2 ，則可由 R_1 、 R_2 、 T_1 、 T_2 求出相機#2 對相機#1 的相對旋轉矩陣 R_{12} 及位移矩陣 T_{12} ，即把相機

$$\#1 \text{ 的座標系設為 } R = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{12} \text{ 及 } T_{12} \text{ 算法如下：}$$

$$R_{12} = R_2 R_1^T$$

$$T_{12} = T_2 - R_2 R_1^T T_1 \quad (2.12)$$

如果要以 Essential matrix 分解出來的 T 計算出 (ψ_T, θ_T) ，轉換方法如下：

首先，因 T 為 unit vector，即表示在(2.7)式中的 $r_1=1$ ，令 $T = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T$ ，其中 $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ, -180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，以反三角函數及 t_z 算出 ψ_T 的值，再用 ψ_T 及 t_x 、 t_y 算出 θ_T ，但反三角函數非 1 對 1 函數，所以要同時用 t_x, t_y, t_z 三個值來判定 ψ_T 、 θ_T 正負，計算角度大小及判定正負方法如下表：

用 t_x, t_y, t_z 正負判定 ψ_T, θ_T 範圍				
t_x	t_y	t_z	ψ_T	θ_T
≥ 0	≥ 0	≥ 0	$0 \leq \psi_T \leq 90$	$0 \leq \theta_T \leq 90$
≥ 0	≤ 0	≥ 0	$0 \leq \psi_T \leq 90$	$-90 \leq \theta_T \leq 0$
≤ 0	≥ 0	≥ 0	$0 \leq \psi_T \leq 90$	$90 \leq \theta_T \leq 180$
≤ 0	≤ 0	≥ 0	$0 \leq \psi_T \leq 90$	$-180 \leq \theta_T \leq -90$
≥ 0	≥ 0	≤ 0	$90 \leq \psi_T \leq 180$	$0 \leq \theta_T \leq 90$
≥ 0	≤ 0	≤ 0	$90 \leq \psi_T \leq 180$	$-90 \leq \theta_T \leq 0$
≤ 0	≥ 0	≤ 0	$90 \leq \psi_T \leq 180$	$90 \leq \theta_T \leq 180$
≤ 0	≤ 0	≤ 0	$90 \leq \psi_T \leq 180$	$-180 \leq \theta_T \leq -90$

表 2.1 相機位移矩陣 T 轉換成球座標的正負判別



第 3 章 LMedS 方法求解與初解之改進

本章將說明如何應用 LMedS 方法來求得初解，首先在多組對應點中任意挑選部份的對應點(至少八組)來計算 fundamental matrix，可以得到一組外部參數解(如第 2 章所述)，反覆進行此步驟直至產生出足夠多(如 4000 次)的外部參數解，每一組解皆有相對應的誤差值(如 2.2 所述)，並在這些解當中，取出誤差值較小的前幾個解。

在此假設全域最佳解與這些較佳的解會相當的接近，因此針對這些較佳的解，利用 Minimum Spanning Tree(MST)來進行分群(clustering)，得到若干個可能包含全域最佳解的分群，並利用能包含各分群範圍的橢圓體來描述這些分群。接著對這些橢圓體進行切割(refinement)，來探查橢圓體內是否有更佳的解，並以此獲得改進的解。

3.1 用 LMedS 方法求初解及分群

在求外部參數時，如果沒有雜訊 (noise) 或 outlier 的干擾，最小平方法 (least squares) 便可以找到最好的答案。但在找到對應點，或者是要選取對應點的時候，除了模擬資料 (simulate data) 之外，否則一定會有雜訊或 outlier。最小平方中值法 (LMedS) 是將所有的資料作排序後，取中間的數值，並找出最小的那一組資料，圖 3.1 是任取兩個點來建構一條直線做說明： $\{(a_i, b_i) | i=1, 2, 3, \dots, m\}$ ， r 代表的是殘餘量 (residual)： $r = |ax+by+1|$ ，在此為點到線的距離，共有 n 組資料點，取了 m 組點來畫線。

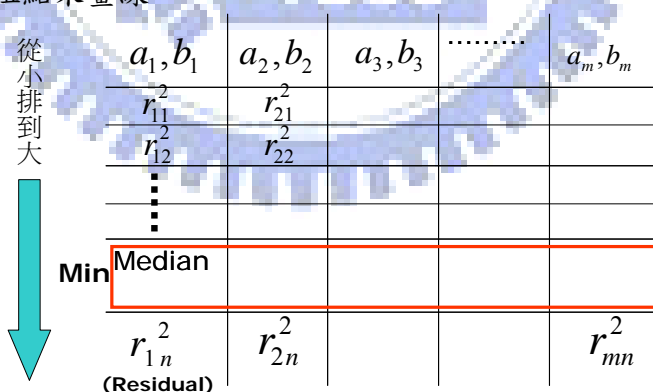


圖 3.1、最小平方中值法示意圖

由於最小平方中值法並不需要設定參數或是門檻值，像 RANSAC 需要設定兩個重要參數，而 M-estimator 需要給定足夠好的初始值，才有可能在幾個 iteration 後得到較好的結果；最小平方中值法主要是利用資料點群體力量，來找出結果，所以在目前強健式估測法中，仍然常被拿來應用或比較。最小平方中值法有一個相當重要的前提假設：outlier 不能佔超過全部資料的點一半，否則取到的中位數會有問題（若超過一半則取到的點可能已經是錯誤資料了），因此又有別的方法

因應而生。

我們先用 LMedS 的方法在 2 張已校正影像的 n 組對應點中，重複 t 次隨機挑選 k 組(至少八組)對應點，經由計算 Fundamental matrix，加上已知的內部參數，可得到 Essential matrix，再求出 t 個外部參數解及其誤差值，如第 2 章所述，並從中挑出有較小誤差的解，以期望可降低 noise 造成的影響。

由於此 t 個外部參數解在 5D 解空間隨機分布，在此假設全域最佳解與這些較佳的解會相當的接近。所以在此 t 個外部參數解中，選出誤差較小的前 p 個解，以期望在包含此 p 個解的橢圓體範圍中能夠得到接近全域最佳解的初始解。

以下表 3.1 為例，此例中 $n=19, t=4000, p=50, k=8$ 。

num	Ψ_R	θ_R	ω_R	Ψ_T	θ_T	median error	與正解的 Euclidean distance
1	29.6682	141.4966	-121.405	74.1991	317.2275	6.6906	9.6442
2	32.7053	142.2839	-123.827	71.7361	317.8237	6.8135	6.0297
3	28.8298	143.0459	-124.37	69.4278	317.8257	7.8483	9.0224
4	27.6632	137.5118	-117.67	72.2759	313.0297	9.4849	12.6352
5	42.9453	141.0924	-123.253	69.5353	317.7244	9.4916	5.8443
6	36.0949	142.4432	-123.678	66.3573	317.6953	10.5248	3.1184
7	36.1698	141.7338	-122.765	70.313	318.3048	10.5706	2.605
8	41.2414	139.2393	-121.476	67.8386	315.594	13.5777	4.7286
9	39.5726	139.5241	-121.497	65.219	315.1695	14.2116	4.7397
10	40.441	139.1832	-121.745	72.2206	316.3319	16.9895	5.3676
11	26.8339	141.8992	-122.442	65.9585	316.4764	17.4494	10.8159
12	35.952	140.8474	-122.268	70.2366	316.5295	18.3644	2.3842
13	36.1866	139.7995	-121.099	68.0759	316.4651	19.4008	2.2254
14	40.1426	138.9176	-121.799	73.4008	315.8542	20.5001	6.2819
15	41.1813	138.0518	-120.737	72.0803	315.7656	21.2277	6.4749
16	38.5412	140.4795	-122.203	72.246	317.9028	23.5363	4.1221
17	42.0116	138.916	-121.46	59.9859	313.762	23.9649	10.4997
18	31.2562	140.4504	-123.067	82.2089	316.9913	26.2528	15.0929
19	27.7324	138.1323	-121.695	84.0006	314.6408	26.7347	18.7062
20	44.0845	138.0402	-121.22	69.1971	314.5459	27.0404	7.9877
21	39.2174	139.7523	-122.002	65.7418	314.9225	28.2056	4.2131
22	34.1051	144.5874	-124.428	79.2075	321.6133	28.7583	12.7789
23	39.7403	138.4553	-121.839	72.982	314.6609	28.9436	6.3335

24	40.3016	137.4462	-120.388	74.8545	315.675	30.5953	8.3298
25	37.5271	140.8688	-122.647	79.4313	318.0791	30.6358	11.0618
26	38.5522	136.7595	-119.898	77.9604	315.1862	30.8471	10.9956
27	36.5342	144.2826	-126.074	62.7031	318.0967	32.9034	7.6481
28	33.0913	137.455	-120.328	82.0094	314.8837	33.2035	14.9936
29	30.3879	143.2053	-124.89	75.1401	317.5832	33.9414	10.2232
30	37.9135	139.0839	-120.574	71.2325	316.901	34.4179	3.9101
31	36.6619	141.0545	-123.984	76.6479	316.8203	35.0664	8.4294
32	36.5823	139.7174	-121.091	68.635	317.0821	35.1031	1.9552
33	32.7626	141.1524	-125.432	57.9692	315.6235	35.1527	11.8952
34	36.1102	141.4645	-123.204	63.0327	315.4508	36.0942	5.8658
35	41.574	140.6714	-122.425	73.6503	318.8567	36.4867	6.9624
36	35.6502	139.8613	-122.237	61.0371	316.0397	36.9253	7.7284
37	41.6971	137.9025	-121.734	73.2427	314.1947	38.0765	7.8595
38	43.509	136.4972	-121.111	75.9487	313.9754	38.1183	11.2981
39	36.6372	137.454	-119.779	65.4183	314.4691	38.6548	6.0128
40	41.8516	135.1086	-119.111	73.3729	311.6951	39.1149	11.0038
41	28.8276	140.0757	-120.71	70.9901	316.8792	40.0534	9.0647
42	33.8341	138.2457	-122.813	86.4725	315.5252	40.202	18.6781
43	38.6968	132.1669	-118.152	79.2233	309.5387	40.6239	16.5381
44	39.2984	137.5257	-122.517	81.5958	314.5076	41.1943	14.0438
45	39.4081	141.5816	-123.476	78.4222	317.7742	42.6323	10.3245
46	39.925	133.0681	-119.809	79.712	310.2415	42.6791	15.894
47	32.8718	141.3361	-128.416	55.1156	315.3274	44.0129	15.3785
48	26.8601	140.9493	-122.368	61.3312	316.2955	44.4691	12.6475
49	38.3801	134.2182	-119.886	81.7184	313.1246	46.231	15.7173
50	21.7216	148.5722	-133.452	57.1188	315.7457	46.3699	23.5099

表 3.1 LMedS 結果的前 50 名 5D 解及其誤差值

因為解空間很複雜，不止包含一個極小值，還可能分成許多的區域(local trap)，各含有一個區域極值，而我們取得的t個外部參數解就分布在這些區域中，為了取得有可能包含全域最佳解的這些區域範圍(local regions)，接下來，以解的5D值計算Euclidean distance，以此為依據來建立Minimum Spanning Tree(MST)，將t個外部參數解之間距離的遠近表達出來，為之後分群做準備。如下圖3.1，x軸為1~50點的編號，距離最近的2點其編號相鄰且有連接線，y軸即為Euclidean

distance，紀錄有連接在一起的點之間距離。

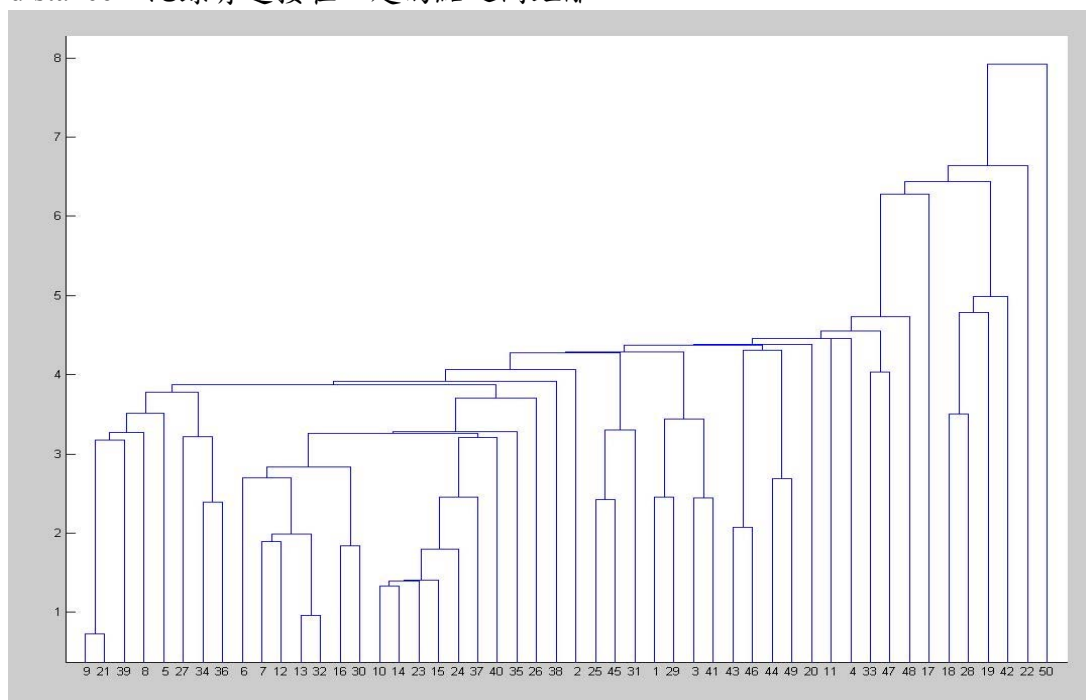


圖 3.1 Minimum Spanning Tree 示意圖

以適當的 gap 將 MST 分成數個群(clusters)，當只有分出 1 個群(cluster)時，則直接對此群(cluster)做細切，細切方法如 3.2 節所述，以求得改進的解，但是當分出數個群(clusters)時，必須同時對這些群(clusters)做細切再判斷較有可能包住正解的 cluster：

- 若 cluster 是離正解較遠的區域最小值(local trap or local minimum)，該 cluster 的橢圓體依 eigen values 及 eigen vectors 做細切，其誤差值改進的空間不大。
- 若 cluster 較有可能包住正解，該 cluster 橢圓體依 eigen values 及 eigen vectors 做細切，可得到有較多改進的新解。

3.2 初解之改進

本節將說明如何分析解分群之 Covariance matrix 求得包住各群(clusters)的橢圓體，及如何對橢圓體細切來求得誤差值較小的解(=改進解)。

由於 5D 的橢圓體結構太過複雜，難以分析，將互相之間較獨立的 R、T 分開計算出 covariance matrix Σ_R 、 Σ_T ，如下(3.1)式

$$\Sigma_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i_R} - \text{mean}_R)(x_{i_R} - \text{mean}_R)^T \quad (3.1a)$$

$$\Sigma_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i_T} - \text{mean}_T)(x_{i_T} - \text{mean}_T)^T \quad (3.1b)$$

其中 n=在群(cluster)中的總點數(=解的個數)， mean_R 及 mean_T 分別為 n 個解的 R、T 平均值， x_{i_R} 及 x_{i_T} 分別為第 i 個 5D 解的 R 部份(3D)及 T 部份(2D)。

並求出 R、T 各自的 eigenvalues、eigenvectors 及 mean 如下表 3.2。

R	Ψ_R	θ_R	ω_R
mean	37.8616	139.3263	-121.8653
$\sqrt{eigenvalue}$	4.2152	2.4175	0.6472
	軸 1	軸 2	軸 3
eigenvector	-0.8384	-0.5411	0.066
	0.4893	-0.6937	0.5286
	-0.2403	0.4754	0.8463

表 3.2(a) cluster 的 R mean & eigenvalues & eigenvector

T	Ψ_T	θ_T
mean	71.9678	315.8556
$\sqrt{eigenvalue}$	5.2282	1.9846
	軸 1	軸 2
eigenvector	-0.9888	0.1491
	0.1491	0.9888

表 3.2(b) cluster 的 T mean & eigenvalues & eigenvector

接下來計算橢圓體各軸的長短，最長軸半長的長度如下：

$$\text{the longest axis of ellipsoid} = \sqrt{eigenvalue_{\max}} \sqrt{c_{\max}} \quad (3.2)$$

其它軸半長的長度依 $\sqrt{eigenvalue}$ 的比例可得。

其中 $\sqrt{c_{\max}} = \max\{\sqrt{c_i} = \sqrt{(x_i - \text{mean})^T \Sigma^{-1} (x_i - \text{mean})}, i=1 \sim n\}$ ，為群中各點的 Mahalanobis distance 的最大值。

在計算出橢圓體各軸長度後，因為我們比較關心誤差值較小的部份，即是橢圓體較中間的部份，所以只對橢圓體中間 2/3 的部份做細切，細切方法如下：

- (a) 對 5 軸各自等分成 4 等份，其中每一等份的長度設為 $(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$
- (b) 在每軸上取得 5 個等分點： $(\text{mean}_i - 2L_i, \text{mean}_i - L_i, \text{mean}_i, \text{mean}_i + L_i, \text{mean}_i + 2L_i)$ ， $i=1 \sim 5$
- (c) 5 軸上每一軸的 5 個值即可搭配得出在橢圓體內部 2/3 的 5^5 組新解，計算出 5^5 組新解的誤差值。

初步細切後，同樣對誤差值較小的前 50 名做分群，不過為盡量防止橢圓體退

化而且延橢圓體形狀來分群，所以之後在建立 MST 時，其依據改以 5D 的 weighted distance = $[(n_{1i}-n_{1j})^2+(n_{2i}-n_{2j})^2+(n_{3i}-n_{3j})^2+(n_{4i}-n_{4j})^2+(n_{5i}-n_{5j})^2]$ ，其中 $n_{ki} = \{\pm 1, \pm 2, 0\}$ ， $n_{kj} = \{\pm 1, \pm 2, 0\}$ ， $k=1\sim 5$ ，如下列表 3.3：

num	軸 1	軸 2	軸 3	軸 4	軸 5
1	2	0	1	-1	1
2	2	-1	1	-1	2
3	-1	-1	1	1	1
4	-1	-2	1	1	2
5	-2	-2	-2	2	1
6	1	0	-2	0	0
7	-2	-1	-1	2	0
8	-2	-1	-2	2	0
9	0	-1	-1	0	1
10	1	0	-1	0	0
11	2	1	2	-1	0
12	-1	0	2	1	0
13	-2	0	0	2	-1
14	0	-2	-2	0	2
15	1	-1	-2	0	1
16	1	1	-1	0	-1
17	-2	1	1	2	-2
18	0	0	0	0	0
19	2	0	2	-1	1
20	0	-2	0	1	2
21	0	0	1	1	0
22	2	-1	0	-1	2
23	0	-1	0	1	1
24	-1	-1	2	1	1
25	-1	-2	0	1	2
26	1	2	0	0	-2
27	-1	1	2	1	-1
28	0	-1	1	1	1
29	1	1	0	0	-1
30	0	-1	-2	0	1

31	0	-2	-1	1	2
32	0	1	-1	0	-1
33	1	-2	-2	0	2
34	-2	1	0	2	-2
35	0	0	-1	0	0
36	-1	-1	2	2	1
37	0	-2	-1	0	2
38	-2	0	-1	2	-1
39	0	1	2	1	-1
40	2	-1	2	-1	2
41	1	-1	2	-1	2
42	1	-2	0	1	2
43	0	0	-2	0	0
44	1	0	2	-1	1
45	2	2	-1	0	-2
46	1	2	1	0	-2
47	-1	-2	-2	2	1
48	1	-1	1	-1	2
49	0	0	2	1	0
50	-1	-1	-2	2	0

表 3.3 細切之後前 50 名解的 weighted code

分群後，計算 Σ_R 、 Σ_T ，如果橢圓體退化(即最小的 eigenvalue 接近 0)，則不再繼續細切，以目前最佳解為中心執行全域搜尋法，如果橢圓體沒退化，則算出橢圓體各軸長度，並再次細切。

第 4 章 搜尋全域性正解的離散值

本章將說明如何以第 3 章的改進解為中心，在附近範圍以 Golden Section Search(GSS)演算法來找到更加精確的外部參數解，前提條件為正解位在以改進解為中心的某特定範圍內。

以改進解為中心，將 5D 的相機參數空間(camera parameter space)分成 3D 旋轉空間(Rotation space)及 2D 位移空間(Translation space)，進而再用橢圓體的各軸長及方向定義三個參數空間:1D rotation eigen-space +2D rotation eigen-space +2D translation eigen-space，並以橢圓體各軸所對應的 eigen values 大小來決定 5 個維度在最佳化搜尋時的搜尋順序。

接著使用以 GSS 為基礎進行 5D 空間的最佳解搜尋，以期找出具全域最小誤差值的最佳解。

4.1 黃金切割搜尋法(Golden Section Search)

Golden Section Search(GSS)是在一維空間中進行最佳解的搜尋，與 Binary Search 不同的是 GSS 每次以黃金比例數值 $\gamma=0.382$ 當做切割比例，可以幾何速率找到最佳解，但 GSS 僅適用於 unimodal function，表示在搜尋範圍中僅有一個極大或極小值的情況，GSS 才能找到準確的值。若尋找的非一維空間或是非 unimodal function，GSS 就無法適用，因此在下一節，解決不能使用在多維空間的方法是將 5D 全域依 eigenvalue 大小依序在各單一維度上進行 GSS 以找到全域最佳解，而且本節也將提出改良後的 GSS 以適用在非 unimodal function 的情況。傳統 GSS 的演算法如下述：

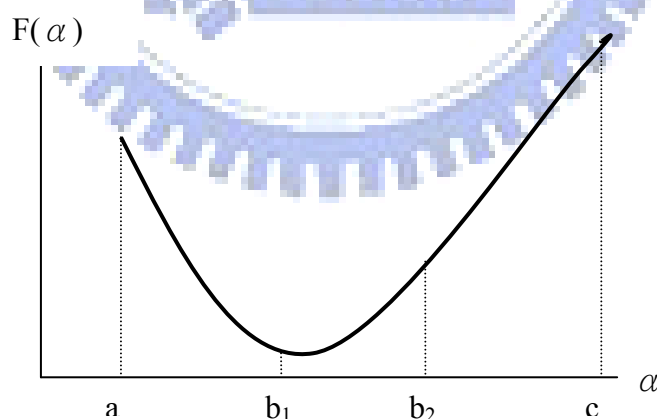


圖 4.1 Golden section search(GSS)示意圖

如圖 4.1，點 a 及點 c 為已知 2 點，其誤差值為 F_a 及 F_c ，我們要用 GSS 在 ac 之間找到一極小值。步驟如下：

Step 1 :

$$b_1 = a + \gamma(c - a)$$

$$b_2 = a + (1 - \gamma)(c - a)$$

$$F_1 = F(b_1)$$

$$F_2 = F(b_2)$$

Step 2 :

While $(c - a) > \varepsilon(a + c)$

Case 1 : If $(F_1 \leq F_2)$ set

$$\left\{ \begin{array}{l} c = b_2 \\ b_2 = b_1 \\ F_2 = F_1 \\ b_1 = a + \gamma(b_2 - a) \\ F_1 = F(b_1) \end{array} \right.$$

Case 2 : else set

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b_1 \\ b_1 = b_2 \\ F_1 = F_2 \\ b_2 = a + (1 - \gamma)(c - b_1) \\ F_2 = F(b_2) \end{array} \right.$$

Step 3 : Set $\alpha = (a + c) / 2$, 為最後求得的解。

以上為傳統 GSS 的做法，然而，目前複雜的值域空間中任何單一維度都是非 unimodal，我們需對 GSS 稍做修改來符合目前的情況，主要想法有二：(1)原本在比較內部 2 點的誤差值大小後，下一階段沒有選到的範圍會被捨棄不再細看，但在非 unimodal 的情況下無法保證沒有選到的範圍絕對不會有更小誤差值的點，如圖 4.2，所以我們在兼顧準確度及效率下從要捨棄的範圍中多選出一點來觀察；(2)如果 2 端點的誤差值比內部選出 2 點的誤差值還小，則端點到選擇點之間的範圍可能有區域極小值，所以這段範圍要紀錄下來，之後執行 GSS。

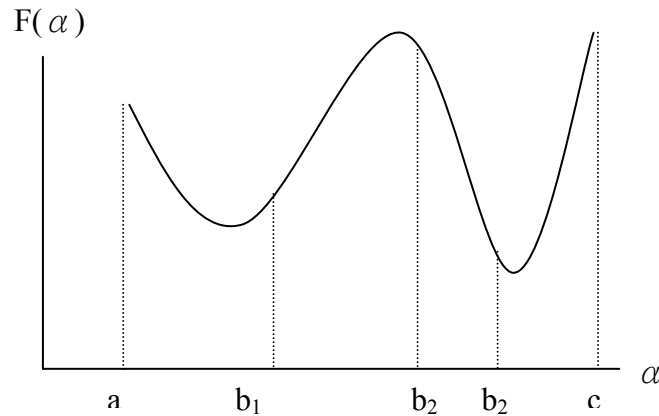


圖 4.2(a) GSS 改進步驟(1)

改進想法(1)的做法如下：

在傳統做法的 Step2 中，把目前搜尋的區域分成 2 個部份： (a, b_2) 及 (b_1, c) ，由 b_1 或 b_2 決定接下來搜尋的區域要選擇 (a, b_2) 或是 (b_1, c) ，若選擇 (a, b_2) 範圍，則 (b_2, c) 就不再細看並捨棄掉。但如圖 4.2， (a, c) 範圍的最佳解就在 (b_2, c) 這一段，所以新的方法中，我們在 (b_2, c) 取一點 $b_2' = b_1 + \gamma(c - b_2)$ ，計算 $F(b_2')$ ，結果分成 2 個 case：

Case 1：如果 $F(b_2') \geq F(b_1)$ ，則認為 (b_2, c) 沒有細看的必要，照原來做法繼續對 (a, b_2) 執行 GSS。

Case 2：如果 $F(b_2') \leq F(b_1)$ ，則認為 (b_2, c) 可能有區域極值，分別對 (a, b_2) ， (b_2, c) 執行 GSS。

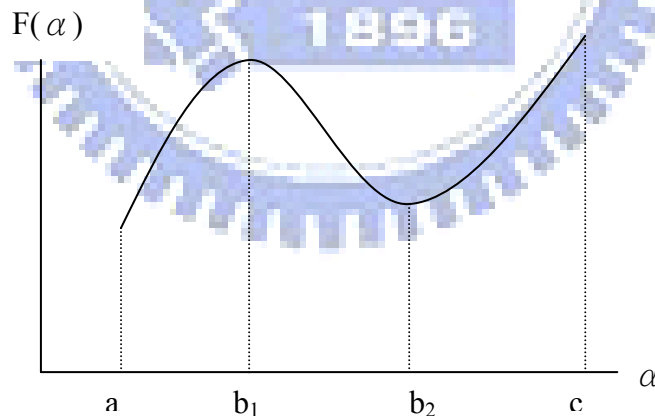


圖 4.2(b) GSS 的改進步驟(2)

改進想法(2)的做法如下：

在傳統做法中，因為已預先假設函數為 unimodal 且極小值 (a, c) 之間，所以一開始 $F(a)$ 及 $F(c)$ 不用考慮，但在非 unimodal 的情況下，一開始 $F(a)$ 及 $F(c)$ 的值也要和 $F(b_1)$ 及 $F(b_2)$ 一起比較。以圖 4.3 為例，在傳統做法中 (b_1, c) 為選擇要細看的範圍，而 (a, b_1) 決定要捨棄掉，但極小值在 a ，所以改進方法中，當 (a, b_1) 決定捨棄掉時，我們比較 $F(a)$ 和目前最小值 $F(b_2)$ ，結果分成 2 個 case：

Case 1：如果 $F(a) \geq F(b_2)$ ，則照原來做法繼續對 (b_1, c) 執行 GSS。

Case 2：如果 $F(a) \leq F(b_2)$ ，則認為 (a, b_1) 可能有區域極值，分別對 (a, b_1) ， (b_1, c) 執行 GSS。

改進前，GSS 的複雜度計算如下：

假設為 ± 4 度的範圍，精確度到 0.01 度，則 $800 * 0.618^n \leq 1$ ，

計算次數 = iteration 數 * 每個 iteration 的計算次數 = $n * 1 = 14$ (每個維度)

改進後，GSS 的複雜度計算如下：

假設為 ± 4 度的範圍，精確度到 0.01 度，則 $800 * 0.618^n \leq 1$ ，

計算次數 = iteration 數 * 每個 iteration 的計算次數 + 後來增加的步驟
= $n * 1 + 3 = 17$ (每個維度)

4.2.5 度空間最佳解搜尋法

由圖 4.3 可稍微了解整個解空間的複雜，其中會有許多的區域極值(local trap)，一般的搜尋法限於各種因素很難找到最佳解，所以我們採用 5 度空間的最佳化搜尋，另外，由於每一維度的 error surface 分佈並不一致，在某些維度上的分佈較單純，甚至近乎 unimodal function，較適合 GSS 的使用；某些維度的分佈則過於複雜，無法順利地使用 GSS。因此接下來將針對五度空間該以如何的方式進行切割做相關的探討。

由於 2D 空間的 T，和 3D 空間的 R 之間關係較獨立，所以可以分開計算。但是在 T 的 2D 空間中就有兩種可能的先後執行順序，先固定 ψ_T 再求 θ_T 的區域最小值，或是先固定 θ_T 再求 ψ_T 的區域最小值。另一方面，在 3D 空間上的 R 則有六種不同的先後執行順序，與 T 結合則有 12 種可能。

經過觀察，在 eigenvalue 較小的維度上，由 error surface 可看到等高線較密而 error 的變化較大，比較可能有唯一的 local minimum，linear search 也較容易找到最低點，所以先搜尋 eigenvalue 較小的維度能得到較正確的 value 值，並可以提供給之後的搜尋的維度，減少因 error surface 過於複雜導致 GSS 誤判，進而無法準確找到最佳解。

舉例說明，當 ψ_R 的 eigenvalue 最小，而 θ_R 及 ω_R 的 eigenvalue 差不多時，在 ω_R 與 θ_R 所構成的 error surface(如圖 4.3 所示)，可以看出其 error surface 較為複雜。而在由 ψ_R 與 θ_R 所構成的 error surface(如圖 4.4 所示)，可以看出 error surface 較為單純，較容易使用 GSS 來計算最佳解。

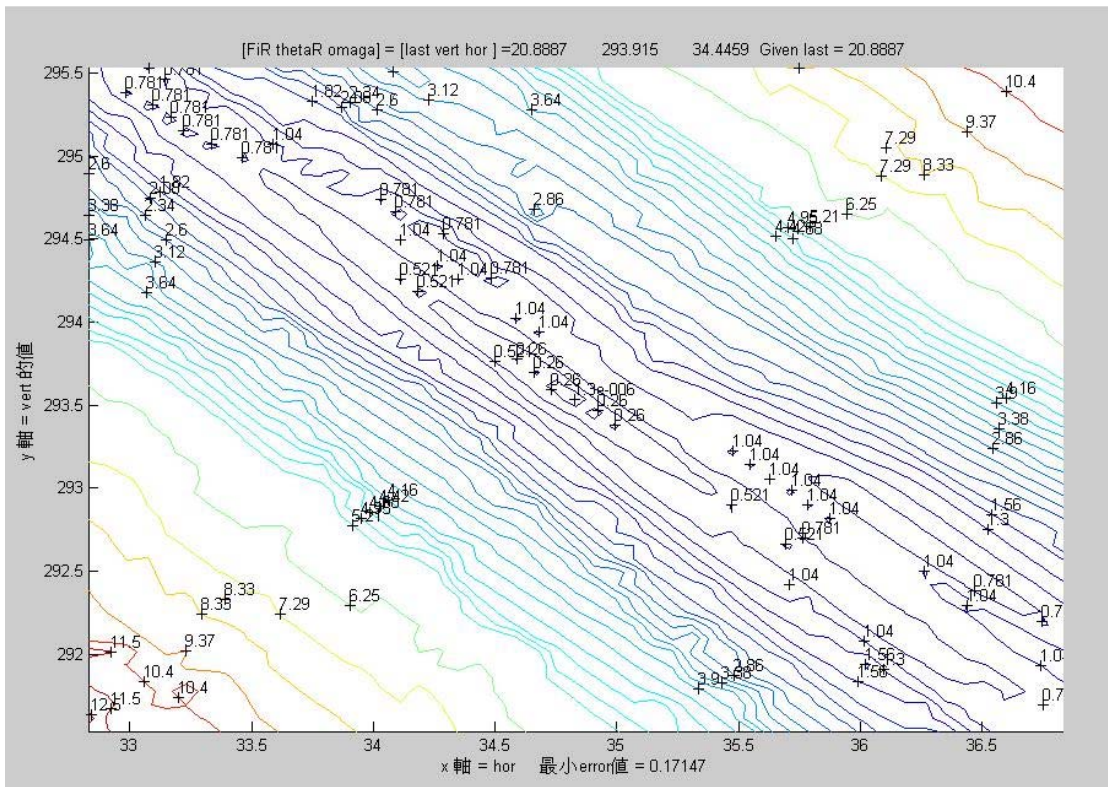


圖 4.3 error surface(水平軸為 ωR ，垂直軸為 θR)

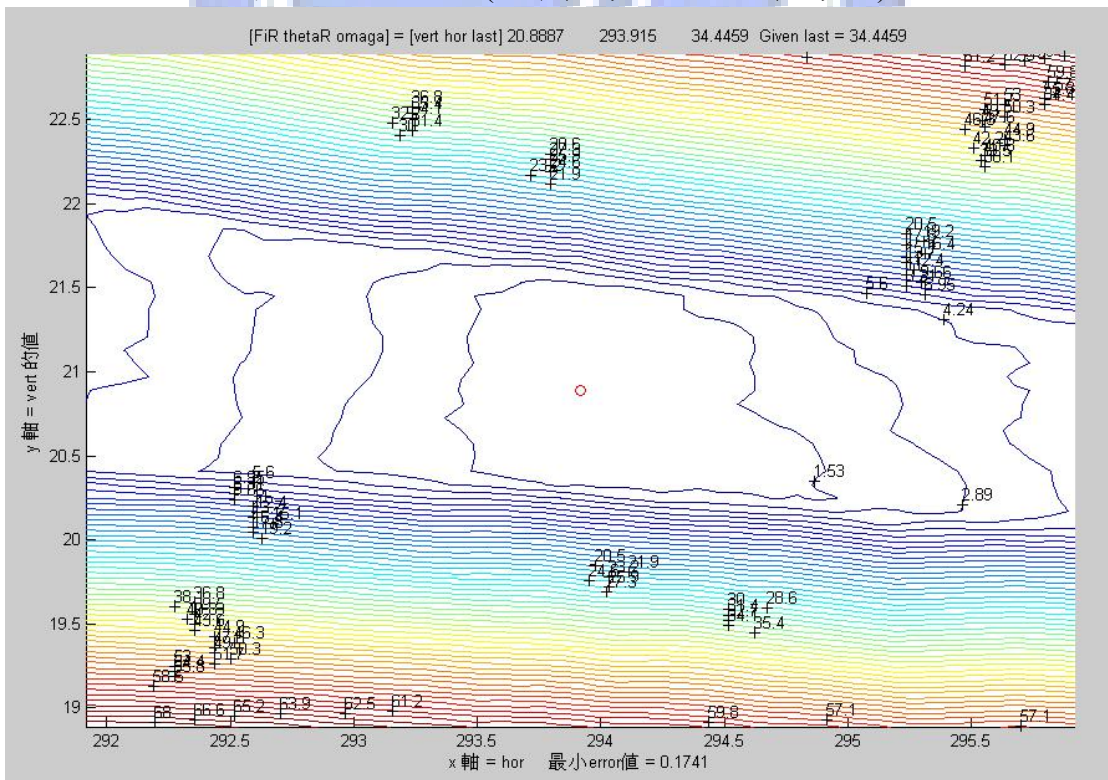


圖 4.4 error surface(水平軸為 θR ，垂直軸為 ψR)

因此我們以 eigen-value 的大小從 12 種可能順序中決定出哪一種執行順序對

求解較有利，三個參數空間的參數設定如圖 4.5，1D rotation eigen-space 設為 R_{last} ，2D rotation eigen-space 設為 (R_{hor}, R_{ver}) ，2D translation eigen-space 設為 (T_{hor}, T_{ver}) 。

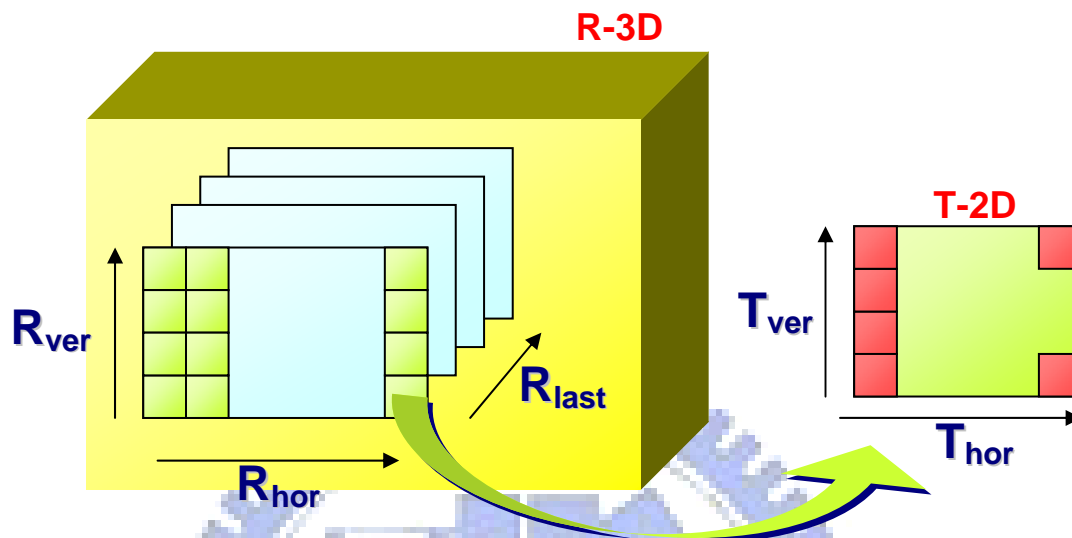


圖 4.5 三個參數空間的參數設定為 R_{last} 、 (R_{hor}, R_{ver}) 、 (T_{hor}, T_{ver})

實際執行時，如圖 4.6， R_{last} 維度最後搜尋，因此在 R_{last} 維度上以 GSS 找出的最佳解即為全域最佳解，而要執行 GSS 則必須能計算出 R_{last} 維度上任一點的誤差值。

R_{last} 維度上任一點的誤差值即是固定 R_{last} 維度為某一值，在 2D rotation eigen space 的 R_{hor} 維度上以 GSS 找出的最小值，舉例說明， $R_{last} = r_3$ 這一點的誤差值為在 $R_{last} = r_3$ 的情形下，用 GSS 尋找 R_{hor} 維度上的最小值，同樣的道理，要執行 GSS 則必須能計算出 R_{hor} 維度上任一點的誤差值，如圖 4.6 上 r_2 這一點的誤差值即為固定 $R_{last} = r_3$ ， $R_{hor} = r_2$ ，並在 R_{ver} 維度上以 GSS 找出最小值。

同理，如圖 4.6 R_{ver} 維度上一點 r_1 的誤差值為固定 R 的 3D 旋轉空間為 (r_1, r_2, r_3) 的情形下，在 2D translation eigen-space 中找出的最小值。依序搜尋，在 T_{hor} 維度上 t_2 點的誤差值為固定 4D 的角度 (r_1, r_2, r_3, t_2) ，並在 T_{ver} 維度上以 GSS 找出的最小值。

從前面定義可知， T_{ver} 的維度 eigen value 較小，其 error surface 上的等高線較密而誤差值變化較大，比較可能有唯一的極小值，找出的值比較準確可信，也因此 T_{hor} 上做 GSS 搜尋時所依據每一點的誤差值是可靠的，以此層遞上去，最後才對 R_{last} 維度執行 GSS 搜尋。

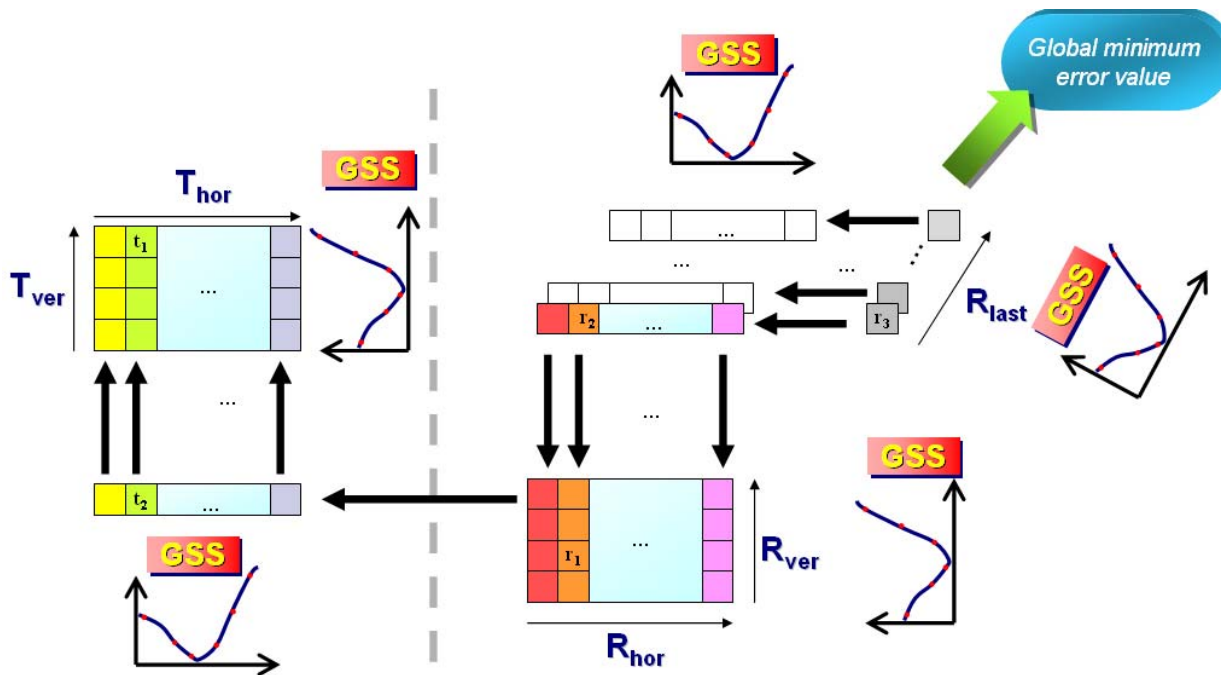


圖 4.6 全域搜尋法執行順序流程

全域搜尋的詳細演算法如下說明：

```

begin initialize
  {
     $R_{last} \leftarrow R_{last} - Range_{R_{last}}, R_{hor} \leftarrow R_{hor} - Range_{R_{hor}},$ 
     $R_{ver} \leftarrow R_{ver} - Range_{R_{ver}},$ 
     $T_{hor} \leftarrow T_{hor} - Range_{T_{hor}}, T_{ver} = [T_{ver} - Range_{T_{ver}}, T_{ver} + Range_{T_{ver}}]$ 
  }
for  $R_{last} \leftarrow R_{last} + 1$ 
  for  $R_{hor} \leftarrow R_{hor} + 1$ 
    for  $R_{ver} \leftarrow R_{ver} + 1$ 
      for  $T_{hor} \leftarrow T_{hor} + 1$ 
        do GSS alone  $T_{ver}$  axis with error function
           $Err(R_{last}, R_{hor}, R_{ver}, T_{hor}, T_{ver})$ 
          find minimum  $T_{ver\_min}$ 

          until GSS stopping criterion
        until  $T_{hor} = T_{hor} + Range_{T_{hor}}$ 
      do GSS alone  $T_{hor}$  axis with error function
         $Err(R_{last}, R_{hor}, R_{ver}, T_{hor}, T_{ver\_min})$ 
        find minimum  $T_{hor\_min}$ 

        until GSS stopping criterion
      until  $R_{ver} = R_{ver} + Range_{R_{ver}}$ 
    do GSS alone  $R_{ver}$  axis with error function
  
```

$Err(R_{last}, R_{hor}, R_{ver}, T_{hor_min}, T_{ver_min})$

find minimum R_{ver_min}

until GSS stopping criterion

until $R_{hor} = R_{hor} + Range_{R_{hor}}$

do GSS alone R_{hor} axis with error function $Err(R_{last}, R_{hor}, R_{ver_min}, T_{hor_min}, T_{ver_min})$

find minimum R_{hor_min}

until GSS stopping criterion

until $R_{last} = R_{last} + Range_{R_{last}}$

do GSS alone R_{last} axis with error function $Err(R_{last}, R_{hor_min}, R_{ver_min}, T_{hor_min}, T_{ver_min})$

find minimum R_{last_min}

until GSS stopping criterion

return R_{last_min}

end



第 5 章實驗結果

在本論文的研究中，對最後求出來的全域解結果影響最大的因素為 error surface 的變化，究其根源即是一開始對應點的雜訊大小，所以實驗分成 3 個方面，前 2 項為模擬實驗，第 3 項為實拍影像的結果，而模擬實驗又分成半雜訊實驗及全雜訊實驗。

半雜訊實驗中，第 2 張影像中至少有一半的對應點完全沒有雜訊，我們可以確實掌握正解的位置(ground truth)，以此來驗證最佳解搜尋法所求出的 5D 解和正解在解空間中是否相近，而全雜訊實驗則是模擬真實的情況，在第 2 張影像中所有的對應點都會加入雜訊，但因為正解的確實位置難以得知，最後以全域最佳解重建 3D 物體，觀察重建物體的邊長及角度來和原物體比較，以得知解的好壞。

實驗以一個立方體(cube)當做 3D 物體，對應點編號定義如下圖 5.1：

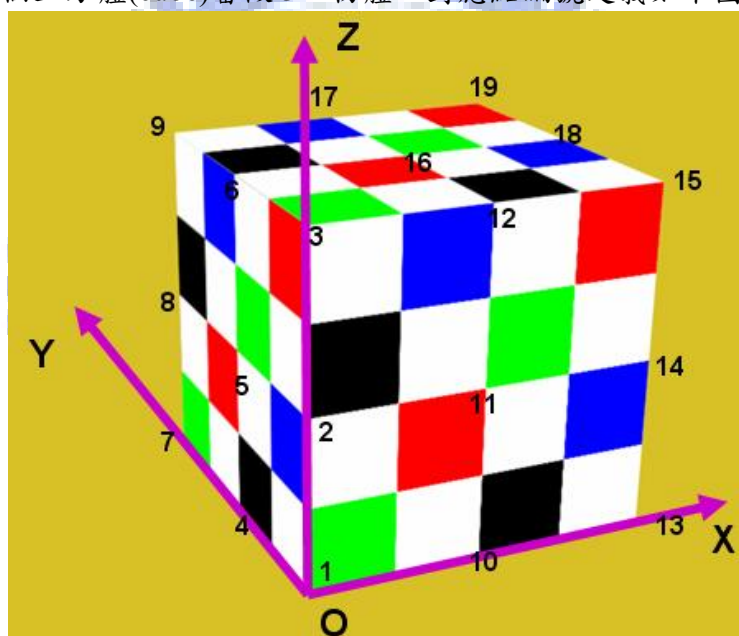


圖 5.1 在立方塊(cube)可見的 3 個面上的對應點編號

模擬實驗的雜訊假設為高斯分布(Gaussian distribution)，雜訊大小參考立方體(cube)在 2D 的投影邊長，將立方體(cube)在 2D 投影的最大邊長的 $n\%$ 設定為 3σ ，以下圖 5.2 為例，cube 在 2D 上最大邊長為 $p_1 p_{13}$ ($= 289$ pixels)，取其 3% ($= 8.659$ pixels) 為雜訊高斯分布的 3σ (mean = 0, 標準差 = σ)。

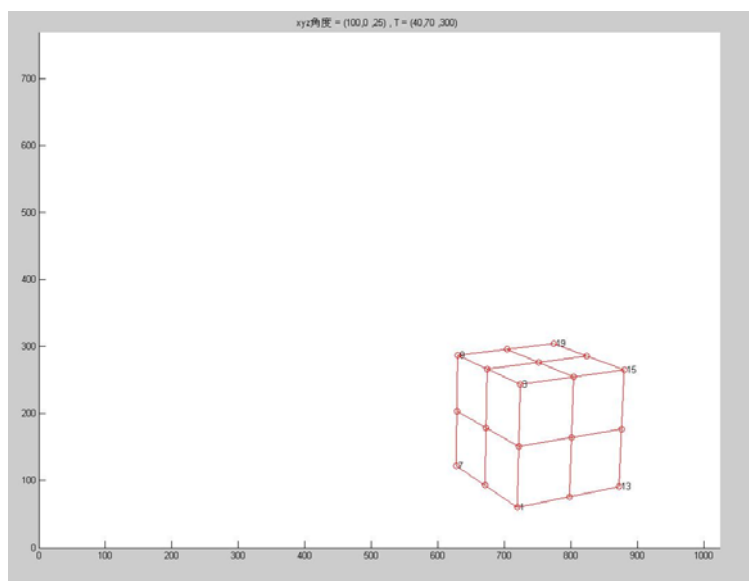


圖 5.2 立方體(cube)在 2D 上的影像

驗證結果是否可靠的步驟如下：

1. 以 19 組對應特徵點及外部參數解重建 3D 點(見 2.2 節)
2. 如圖 5.1，設定立方體可見的 9 個邊長為 $\overline{p_1p_3}$ 、 $\overline{p_1p_{13}}$ 、 $\overline{p_1p_7}$ 、 $\overline{p_3p_9}$ 、 $\overline{p_3p_{15}}$ 、 $\overline{p_7p_9}$ 、 $\overline{p_{13}p_{15}}$ 、 $\overline{p_{15}p_{19}}$ 、 $\overline{p_9p_{19}}$ ，12 個角度為 $\angle(\overline{p_1p_3}, \overline{p_1p_7})$ 、 $\angle(\overline{p_1p_3}, \overline{p_1p_{13}})$ 、 $\angle(\overline{p_7p_9}, \overline{p_7p_{19}})$ 、 $\angle(\overline{p_{15}p_3}, \overline{p_{15}p_{19}})$ 、 $\angle(\overline{p_{19}p_9}, \overline{p_{19}p_{15}})$ 、 $\angle(\overline{p_3p_{15}}, \overline{p_3p_9})$ 、 $\angle(\overline{p_{15}p_3}, \overline{p_{15}p_{13}})$ 、 $\angle(\overline{p_3p_9}, \overline{p_3p_{15}})$ 、 $\angle(\overline{p_9p_3}, \overline{p_9p_{19}})$ 、 $\angle(\overline{p_7p_9}, \overline{p_7p_3})$ 、 $\angle(\overline{p_{13}p_{15}}, \overline{p_{13}p_1})$ 。
3. 將重建 cube 的邊長放大，使 9 個邊長的平均值和 ground truth cube 邊長平均相同(=40cm)
4. 計算重建 3D 後的 9 個邊長長度和 ground truth 對應邊長差的絕對值的平均及標準差。
5. 計算重建 3D 後的 12 個角度和 ground truth 對應角度(=90°)差的絕對值的平均及標準差。

實驗使用 10 張模擬影像如下：

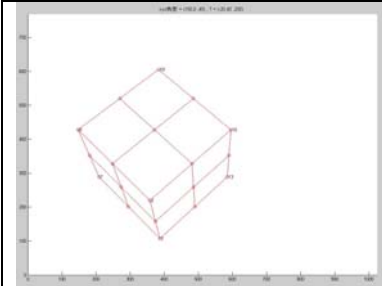
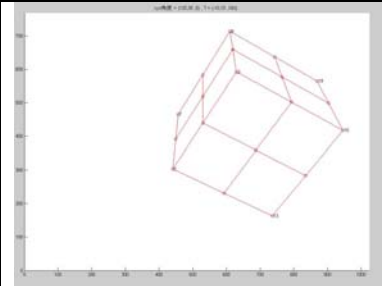
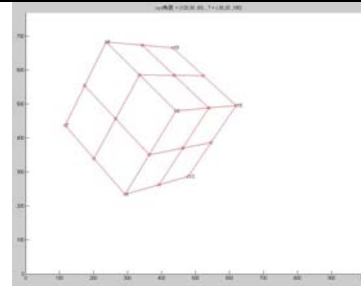
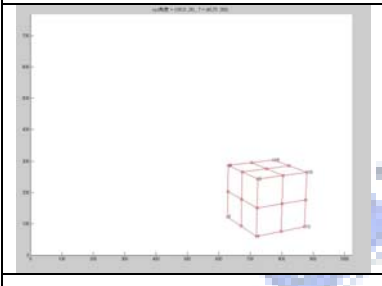
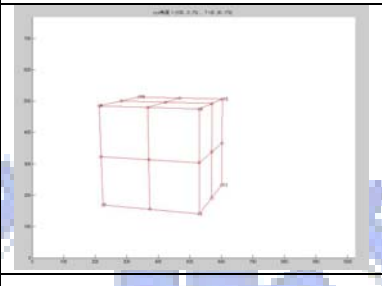
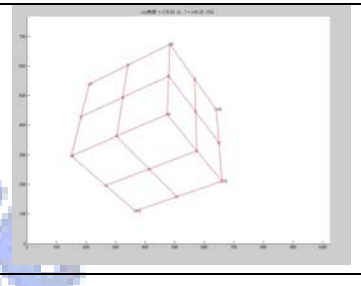
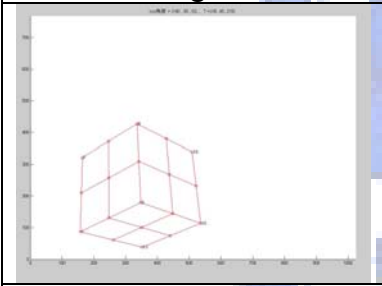
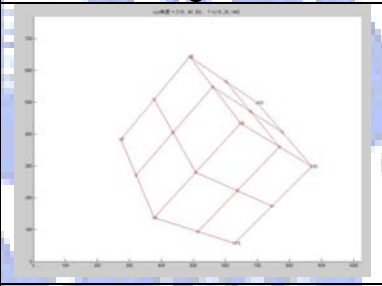
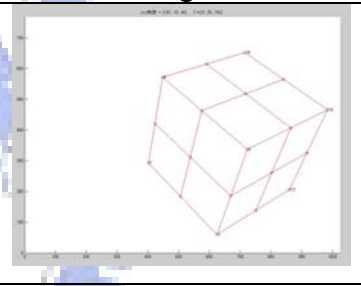
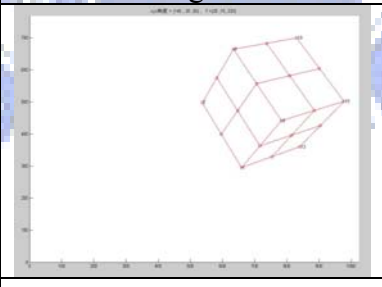
		
image 1 (cube 最大邊長=)	image 2	image3
		
image 4	image 5	image 6
		
image 7	image 8	image 9
		
	image 10	

表 5.1 實驗所使用的 10 張模擬影像

5.1 半雜訊實驗

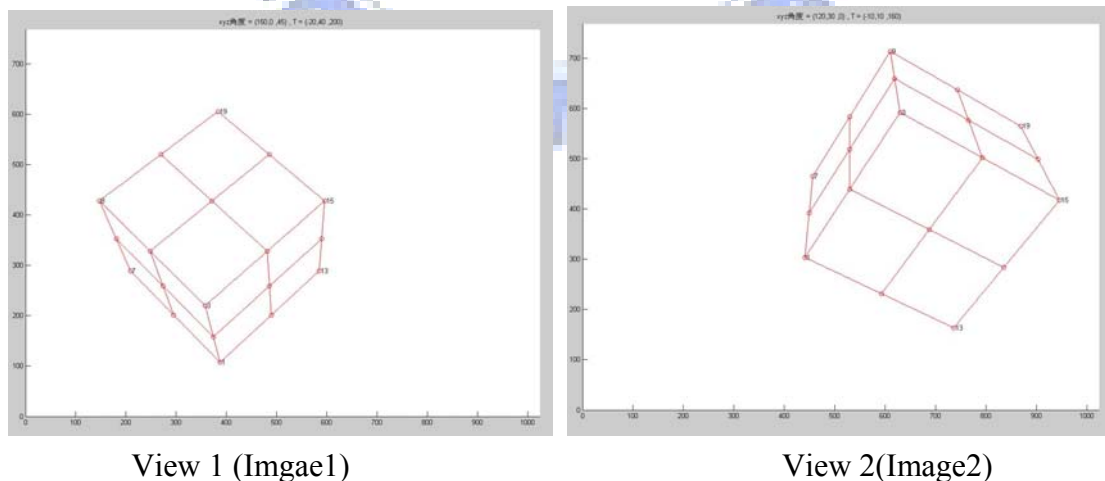
實驗的主要步驟如下：

- (1) 選取要實驗的 2 張影像
- (2) 參考第 2 張影像中 cube 的最大邊長(取 3%為 3σ 的雜訊)，分別產生 9 個 x、y 座標的高斯雜訊(mean = 0, 標準差= σ)，並隨機加入第 2 張影像中的 9 個對應點。
- (3) 在 19 組對應點中隨機選取 10 組對應點來計算出外部參數解，以 LMedS 的方法產生 4000 組相機外部參數解當作初解。
- (4) 分析有前 50 個最小誤差值的解，建立其 Minimum Spanning Tree(MST)
- (5) 對 MST 做分群(Clustering)，求各群 Covariance matrix 橢圓體之 eigen values 及 eigen vectors
- (6) 對各群橢圓體細切，得到初解的改進(refinement)，直至橢圓體退化(至少一個 eigen value 為 0)。
- (7) 啟用 Golden section search(GSS)搜尋相機外部參數的最佳解：(a)轉換 5D Camera parameter space 為 3D Rotation space 與 2D translation space，(b)進而再用橢圓體 eigen values 及 eigen vectors 定義三個參數空間:1D rotation eigenspace +2D rotation space +2D translation space，(c)使用 Golden section line search 連環搜尋相機外部參數的最佳解
- (8) 以找到的最佳外部參數解重新建立 3D 點，計算重建 3D 後 cube 的邊長長度和 ground truth 對應邊長差的絕對值的平均及標準。

以下為實驗詳細過程及結果：

實驗一：使用合成影像資料，並於部份特徵對應點加入雜訊。

輸入兩張解析度為 1024(水平)x768(垂直)的影像 Image1 及 Image2，影像中各有 19 點特徵對應點，如下圖所示。其中對 View2 的特徵點中的 9 點加入雜訊。



View 1 及 View 2 之間正確的外部參數設定如下：

R			T
0.6124	-0.7803	-0.1268	0.4411

0.6597	0.416	0.6258	-0.8894
-0.4356	-0.4669	0.7696	0.1203

將正確的外部參數轉成以 5D 的表示法：

ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T
39.6843	101.4559	-46.9876	83.0882	296.3790

在此實驗中，設定雜訊為 normal distribution (mean = 0, 標準差 = σ)，雜訊的大小是以 cube 在影像中投影的最大邊長(約 300 pixels)的 3% 為三個標準差 (3σ 約等於 9.8324 個 pixels)。View 2 的 19 個特徵點當中加入雜訊後的結果如下表所示。

特徵點編號	在 X 軸方向的雜訊大小	在 X 軸方向的雜訊大小
1	-3.72704	-4.4568
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0.424926	2.168381
6	-0.86687	-4.00717
7	0	0
8	0.037143	-2.13098
9	-3.26928	4.424792
10	3.759026	-2.25978
11	0	0
12	0	0
13	0	0
14	0	0
15	-1.092	-2.78659
16	-1.80507	-2.79693
17	0	0
18	-2.8215	-3.96807
19	0	0

利用 LMEDS 計算後的最佳 50 個的解資料如下：

num	ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T	median error	與正解的 Euclidean
-----	----------	------------	----------	----------	------------	--------------	----------------

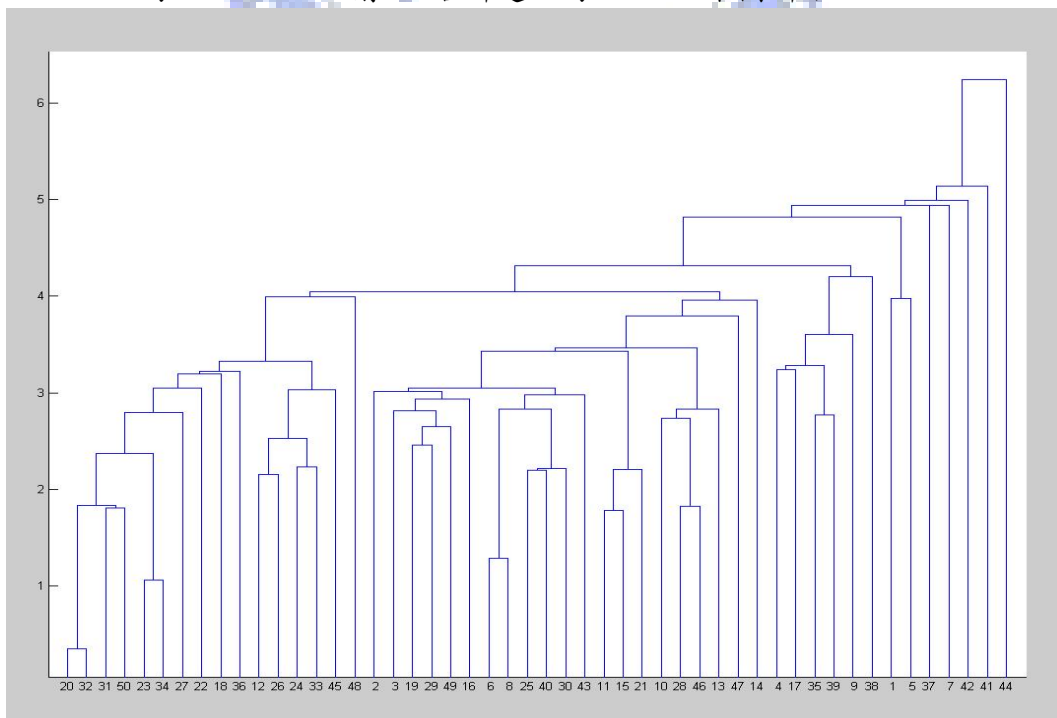
							n distance
1	37.5531	99.8379	-45.9876	84.8507	295.4805	3.7591	3.4748
2	36.0189	98.1725	-44.4523	84.5594	294.7667	3.9509	5.9504
3	34.2524	98.9948	-44.8329	88.6701	295.9604	4.1066	8.4581
4	34.2524	98.9948	-44.8329	88.6701	295.9604	4.1066	8.4581
5	41.2622	101.9975	-46.919	82.9204	296.2237	4.2725	1.6853
6	34.297	99.0591	-44.8852	88.7017	295.9782	4.4058	8.4178
7	38.4302	100.2002	-46.0319	82.9454	295.7285	4.7959	2.1229
8	42.6694	102.7989	-48.2871	81.3871	296.8592	4.9876	3.9405
9	37.9832	100.8055	-46.1263	85.7353	296.3444	5.1658	3.3267
10	37.9856	101.4448	-46.9422	85.262	296.6763	5.2509	2.7752
11	39.0285	102.4825	-47.6271	85.1247	297.2173	6.3983	2.5968
12	37.1346	98.3514	-44.7518	83.4899	294.4052	6.4641	5.0195
13	36.7468	100.8538	-46.1187	87.6357	296.6693	6.8248	5.5237
14	40.9361	101.3863	-46.3703	83.1226	295.6708	6.83	1.5671
15	37.9234	100.0645	-45.4888	86.5125	295.7134	7.3285	4.4105
16	41.836	99.0254	-45.587	81.7029	293.4182	7.704	4.815
17	33.7608	101.5377	-45.7873	84.3183	298.3971	7.7908	6.4901
18	37.7916	100.6108	-46.0085	81.8255	296.3045	7.9153	2.6182
19	40.2755	101.4804	-46.5675	79.43	296.0941	7.9743	3.7403
20	39.034	102.1562	-47.1281	85.59	296.9954	8.0272	2.7517
21	43.0691	105.5251	-49.7908	81.4445	299.102	8.0621	6.7815
22	43.7877	101.4997	-47.5225	79.625	295.1069	8.1503	5.5442
23	35.3524	101.5015	-45.9431	82.5251	297.7128	8.26	4.6856
24	38.7429	98.4797	-45.5841	83.59	294.1984	8.3243	4.0891
25	38.0458	103.2024	-47.4385	84.4089	298.4583	8.4548	3.465
26	40.3055	101.4212	-46.8773	79.5141	296.0962	8.461	3.6405
27	40.4335	102.1987	-47.1764	84.4869	296.8915	8.8006	1.8352
28	39.1469	98.6854	-45.8275	84.2113	294.2206	9.0006	3.9026
29	39.2479	102.6772	-47.6295	85.8929	297.5577	9.1633	3.369
30	38.4597	100.6116	-46.405	82.8523	296.2495	9.2038	1.62
31	41.1537	100.7348	-46.0954	79.4781	295.3784	9.3482	4.1844
32	40.4995	100.0858	-45.2736	79.661	294.933	9.3832	4.395

33	37.8155	99.4717	-45.4176	81.8303	295.3497	9.4327	3.5406
34	40.3305	101.4924	-46.6713	81.1709	296.5068	9.617	2.0521
35	39.7327	99.2624	-46.3051	84.7055	294.5661	9.799	3.344
36	35.7458	101.6899	-46.2794	88.629	297.6977	9.9243	6.9648
37	43.52	103.6721	-48.8987	80.9707	297.532	10.1068	5.3934
38	38.1212	100.6823	-45.5551	87.3407	295.9162	10.2978	4.8365
39	36.1849	100.4142	-46.2364	86.0084	296.2496	10.3609	4.7371
40	41.4011	101.8832	-47.0462	80.0084	296.5861	10.498	3.5582
41	38.611	102.1176	-46.8123	86.9478	297.2641	10.591	4.1594
42	40.6352	101.7184	-46.7316	79.3856	296.346	10.6395	3.8404
43	39.9681	102.0977	-47.3653	85.8105	296.649	10.7301	2.8494
44	42.2912	102.8843	-48.4694	84.4834	297.0423	10.7593	3.6631
45	40.2495	99.0221	-46.7412	84.3908	293.9635	10.804	3.7196
46	39.6722	98.4493	-46.0531	83.5563	293.5848	10.8583	4.2356
47	39.4335	102.2773	-47.2754	83.3435	297.4144	10.9246	1.3991
48	37.9033	103.3648	-47.8614	86.2076	298.3001	11.0188	4.5827
49	39.7422	102.4623	-47.7064	86.5921	296.9656	11.0297	3.7622
50	40.2511	101.8242	-47.812	81.3859	296.2698	11.1722	2.0115

其中的 median error 定義如下：

median error = median of 19 對應特徵點的 error

以 LMEDS 的 median error 前 50 名所建立的 MST 如下圖所示：



LMEDS 初始解的最小值為 3.7591，對這 50 點進行細切割，先分別對 R, T 進行計算橢圓體的長短軸相關資訊。如下所示：

R	ψR	θR	ωR
<i>mean</i>	39.7412	101.3659	-46.6089
$\sqrt{\text{eigenvalue}}$	1.1996	0.9086	0.2333
	軸 1	軸 2	軸 3
<i>eigenvector</i>	-0.6952	-0.6875	0.21
	0.5798	-0.3635	0.7292
	-0.425	0.6287	0.6513

T	ψT	θT
<i>mean</i>	83.7217	296.6401
$\sqrt{\text{eigenvalue}}$	2.951	0.5204
	軸 1	軸 2
<i>eigenvector</i>	-0.9922	-0.1244
	-0.1244	0.9922

R 橢圓體最長軸的半長 = $\sqrt{C_{\max}} \sqrt{\text{eigenvalue}_{\max}} = 2.8900$

取最大切割單位 = $(2/3 * \text{half of 最長軸} * 1/2) = 0.9633$

T 橢圓最長軸的半長 = $\sqrt{C_{\max}} \sqrt{\text{eigenvalue}_{\max}} = 6.2600$

取最大切割單位 = $(2/3 * \text{half of 最長軸} * 1/2) = 2.0867$

其它軸切割單位依 cluster 的 $\sqrt{\text{eigenvalue}}$ 的比例設定

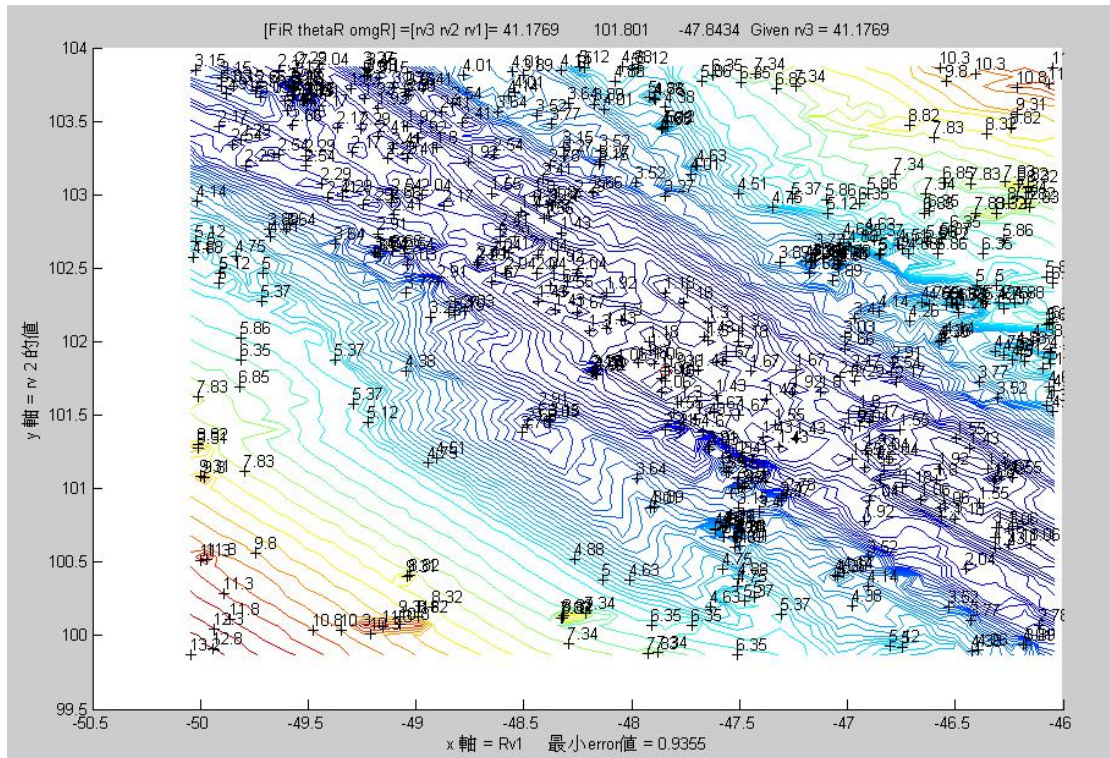
→ 對 Cluster 1 R 細切的切割間隔設為 = (0.9633 0.7296 0.1873)

T 細切的切割間隔設為 = (2.0867 0.3680)

對橢圓體細切後，可得到一個初步的 refinement 結果

ψR	θR	ω	ψT	θT	medi err
38.9598	101.2675	-46.6782	83.5729	296.3703	2.1176

以此解為中心，在每一個 dimension ± 4 度的範圍內用新方法找出一個最佳近似解最佳近似解。搜尋過程中所觀察之 2D error surface contour (水平軸為 ωR ，垂直軸為 θR)如下圖所示：



用 GSS 方法找到的最佳解的離散值如下：

ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	medi err
39.6869	101.4677	-46.9934	83.0828	296.3891	0.0676

對照以下所附正解而言，各相機角度參數誤差約在 0.01 度， media error = 0.0676 pixels.

ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T
39.6843	101.4559	-46.9876	83.0882	296.3790

以找到的最佳解的離散值所重建後的 3D 結果如下：

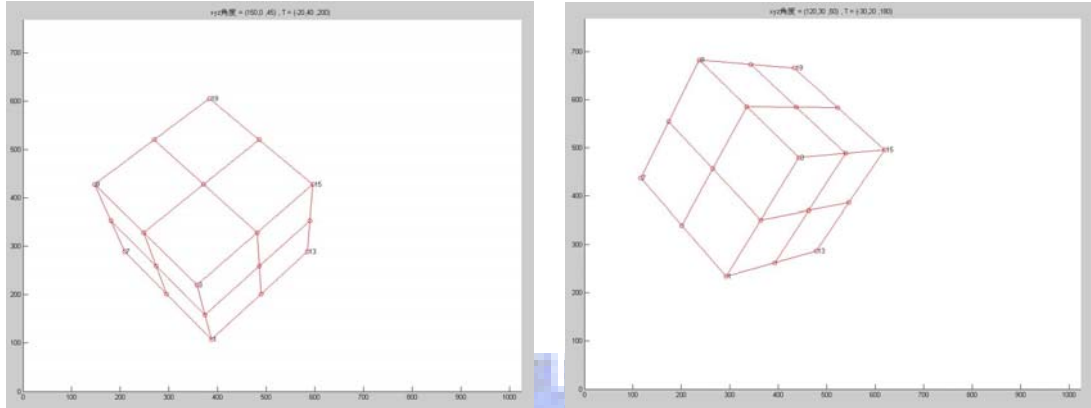
	Error Function 的函數值 (pixels)	重建 3D 後的邊長長度和 ground truth 對應邊長相差絕對值的平均 (cm)	重建 3D 後的邊長長度和 ground truth 對應邊長相差絕對值的標準差	重建 3D 後的角度和 ground truth 對應角度相差絕對值的平均(度)	重建 3D 後的角度和 ground truth 對應角度相差絕對值的標準差
LMedS 初解	3.7591	0.4494	0.3569	1.1359	1.0785

初步改進後 的解	1.9021	0.3281	0.2656	0.6307	0.3877
最佳解	0.0676	0.0012	0.0009	0.0055	0.0036



實驗二：使用合成影像資料，並於部份特徵對應點加入雜訊。

輸入兩張解析度為 1024x768 的影像 Image1 及 Image3，影像中各有 19 點特徵對應點，如下圖所示。其中對 View2 的特徵點中的 9 點加入雜訊。



View 1(Image1)

View 2(Image3)

View 1 及 View 2 之間正確的外部參數設定如下：

R			T
0.8627	-0.1846	-0.4708	0.6826
0.3878	0.839	0.3816	-0.6314
0.3245	-0.5118	0.7955	0.368

將正確的外部參數轉成以 5D 的表示法：

ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T
37.3003	140.9711	-122.3799	68.4080	317.2328

在此實驗中，設定雜訊為 normal distribution(mean = 0, 標準差 = σ)，雜訊的大小是以 cube 在影像中投影的最大邊長的 3% 為三個標準差 (3σ 約等於 9.452 個 pixels)。View 2 的 19 個特徵點當中加入雜訊後的結果如下表所示。

特徵點編號	在 X 軸方向的雜訊大小	在 X 軸方向的雜訊大小
1	0	0
2	-3.72704	-4.4568
3	0	0
4	0.424926	2.168381
5	0	0
6	-0.86687	-4.00717
7	0	0
8	0.037143	-2.13098
9	0	0

10	-3.26928	4.424792
11	0	0
12	3.759026	-2.25978
13	0	0
14	-1.092	-2.78659
15	0	0
16	-1.80507	-2.79693
17	0	0
18	-2.8215	-3.96807
19	0	0

利用 LMEDS 計算後的 median error 最小的前 50 個解資料如下：

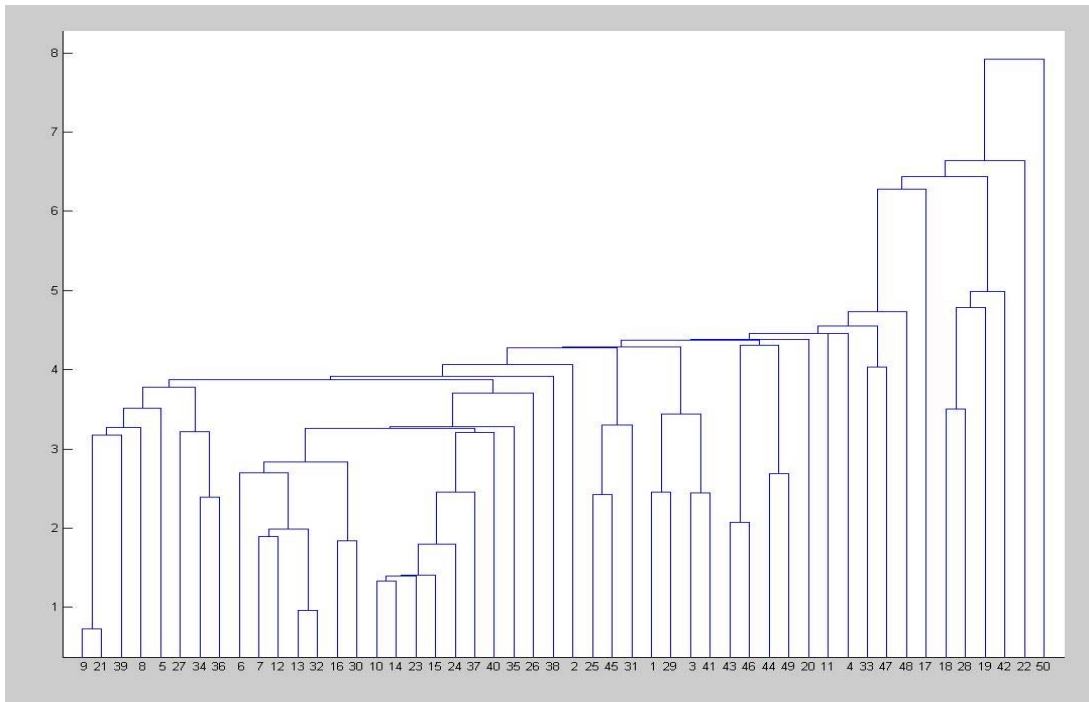
num	ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T	median error	與正解的 Euclidean distance
1	29.6682	141.4966	-121.405	74.1991	317.2275	6.6906	9.6442
2	32.7053	142.2839	-123.827	71.7361	317.8237	6.8135	6.0297
3	28.8298	143.0459	-124.37	69.4278	317.8257	7.8483	9.0224
4	27.6632	137.5118	-117.67	72.2759	313.0297	9.4849	12.6352
5	42.9453	141.0924	-123.253	69.5353	317.7244	9.4916	5.8443
6	36.0949	142.4432	-123.678	66.3573	317.6953	10.5248	3.1184
7	36.1698	141.7338	-122.765	70.313	318.3048	10.5706	2.605
8	41.2414	139.2393	-121.476	67.8386	315.594	13.5777	4.7286
9	39.5726	139.5241	-121.497	65.219	315.1695	14.2116	4.7397
10	40.441	139.1832	-121.745	72.2206	316.3319	16.9895	5.3676
11	26.8339	141.8992	-122.442	65.9585	316.4764	17.4494	10.8159
12	35.952	140.8474	-122.268	70.2366	316.5295	18.3644	2.3842
13	36.1866	139.7995	-121.099	68.0759	316.4651	19.4008	2.2254
14	40.1426	138.9176	-121.799	73.4008	315.8542	20.5001	6.2819
15	41.1813	138.0518	-120.737	72.0803	315.7656	21.2277	6.4749
16	38.5412	140.4795	-122.203	72.246	317.9028	23.5363	4.1221
17	42.0116	138.916	-121.46	59.9859	313.762	23.9649	10.4997
18	31.2562	140.4504	-123.067	82.2089	316.9913	26.2528	15.0929
19	27.7324	138.1323	-121.695	84.0006	314.6408	26.7347	18.7062

20	44.0845	138.0402	-121.22	69.1971	314.5459	27.0404	7.9877
21	39.2174	139.7523	-122.002	65.7418	314.9225	28.2056	4.2131
22	34.1051	144.5874	-124.428	79.2075	321.6133	28.7583	12.7789
23	39.7403	138.4553	-121.839	72.982	314.6609	28.9436	6.3335
24	40.3016	137.4462	-120.388	74.8545	315.675	30.5953	8.3298
25	37.5271	140.8688	-122.647	79.4313	318.0791	30.6358	11.0618
26	38.5522	136.7595	-119.898	77.9604	315.1862	30.8471	10.9956
27	36.5342	144.2826	-126.074	62.7031	318.0967	32.9034	7.6481
28	33.0913	137.455	-120.328	82.0094	314.8837	33.2035	14.9936
29	30.3879	143.2053	-124.89	75.1401	317.5832	33.9414	10.2232
30	37.9135	139.0839	-120.574	71.2325	316.901	34.4179	3.9101
31	36.6619	141.0545	-123.984	76.6479	316.8203	35.0664	8.4294
32	36.5823	139.7174	-121.091	68.635	317.0821	35.1031	1.9552
33	32.7626	141.1524	-125.432	57.9692	315.6235	35.1527	11.8952
34	36.1102	141.4645	-123.204	63.0327	315.4508	36.0942	5.8658
35	41.574	140.6714	-122.425	73.6503	318.8567	36.4867	6.9624
36	35.6502	139.8613	-122.237	61.0371	316.0397	36.9253	7.7284
37	41.6971	137.9025	-121.734	73.2427	314.1947	38.0765	7.8595
38	43.509	136.4972	-121.111	75.9487	313.9754	38.1183	11.2981
39	36.6372	137.454	-119.779	65.4183	314.4691	38.6548	6.0128
40	41.8516	135.1086	-119.111	73.3729	311.6951	39.1149	11.0038
41	28.8276	140.0757	-120.71	70.9901	316.8792	40.0534	9.0647
42	33.8341	138.2457	-122.813	86.4725	315.5252	40.202	18.6781
43	38.6968	132.1669	-118.152	79.2233	309.5387	40.6239	16.5381
44	39.2984	137.5257	-122.517	81.5958	314.5076	41.1943	14.0438
45	39.4081	141.5816	-123.476	78.4222	317.7742	42.6323	10.3245
46	39.925	133.0681	-119.809	79.712	310.2415	42.6791	15.894
47	32.8718	141.3361	-128.416	55.1156	315.3274	44.0129	15.3785
48	26.8601	140.9493	-122.368	61.3312	316.2955	44.4691	12.6475
49	38.3801	134.2182	-119.886	81.7184	313.1246	46.231	15.7173
50	21.7216	148.5722	-133.452	57.1188	315.7457	46.3699	23.5099

其中的 median error 定義如下：

median error = median of 19 對應特徵點的 error

以 LMEDS 的 median error 前 50 名所建立的 MST 如下圖所示：



LMEDS 初始解的最小值為 6.69，對這 50 點進行細切割，先分別對 R, T 進行計算橢圓體的長短軸相關資訊。如下所示：

R	ψR	θR	ωR
<i>mean</i>	37.8616	139.3263	-121.8653
$\sqrt{\text{eigenvalue}}$	4.2152	2.4175	0.6472
	軸 1	軸 2	軸 3
<i>eigenvector</i>	-0.8384	-0.5411	0.066
	0.4893	-0.6937	0.5286
	-0.2403	0.4754	0.8463

T	ψT	θT
mean	71.9678	315.8556
$\sqrt{\text{eigenvalue}}$	5.2282	1.9846
	軸 1	軸 2
eigenvector	-0.9888	0.1491
	0.1491	0.9888

R 橢圓體最長軸的半長 = $\sqrt{C_{\max}} \sqrt{\text{eigenvalue}_{\max}} = 11.5022$

取最大切割單位 = $(2/3 * \text{half of 最長軸} * 1/2) = 3.8341$

T 橢圓最長軸的半長 = $\sqrt{C_{\max}} \sqrt{eigenvalue_{\max}} = 11.1957$

取最大切割單位 = $(2/3 * \text{half of 最長軸} * 1/2) = 3.7319$

其它軸切割單位依 cluster 的 $\sqrt{eigenvalue}$ 的比例設定

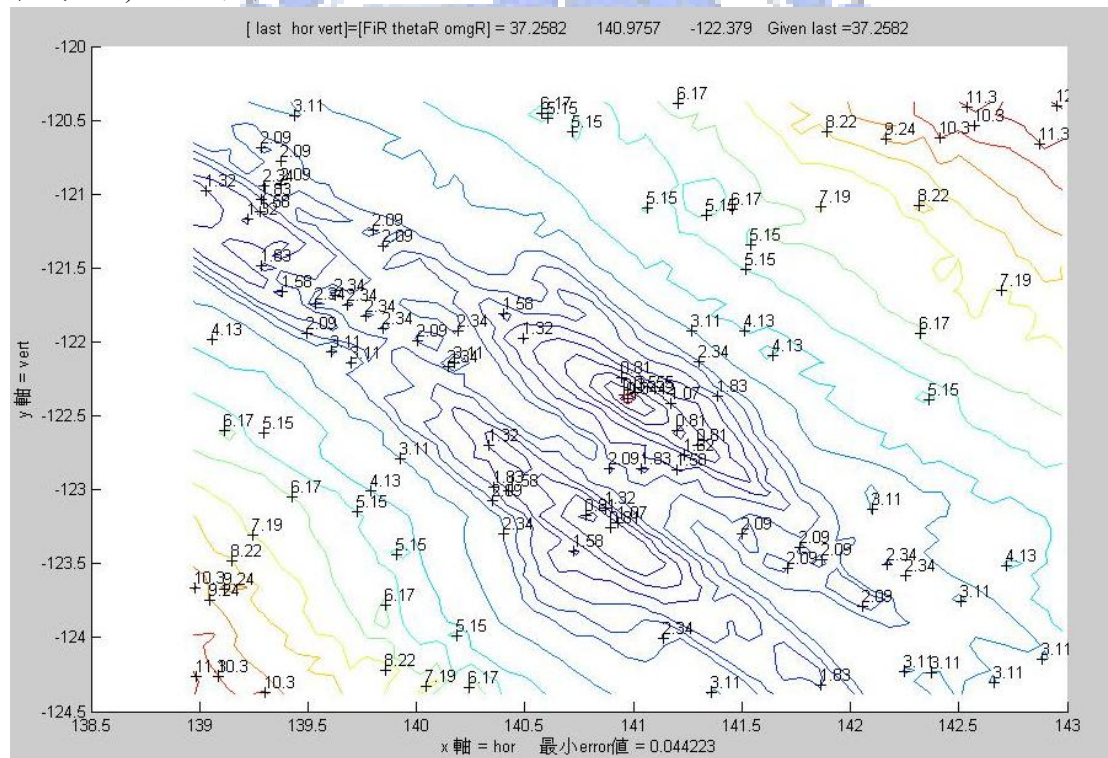
→ 對 Cluster 1 R 細切的切割間隔設為 = (3.8341 2.1989 0.5887)

T 細切的切割間隔設為 = (3.7319 1.4166)

對橢圓體細切後，可得到一個初步的 refinement 結果

ψR	θR	ωR	ψT	θT	error	Euclidean distance
38.1682	140.1457	-122.879	68.4415	316.3348	2.534	1.5783

以此解為中心，在每一個 dimension ± 4 度的範圍內用新方法找出一個最佳近似解最佳近似解。搜尋過程中所觀察之 2D error surface contour (水平軸為 θR ，垂直軸為 ωR) 如下圖所示：



pixels.

ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T
37.3003	140.9711	-122.3799	68.4080	317.2328

以找到的最佳解的離散值所重建後的 3D 結果如下：

	Error Function 的函數值 (pixels)	重建 3D 後的邊長長度和 ground truth 對應邊長相差絕對值的平均值 (cm)	重建 3D 後的邊長長度和 ground truth 對應邊長相差絕對值的標準差	重建 3D 後的角度和 ground truth 對應角度相差絕對值的平均值 (度)	重建 3D 後的角度和 ground truth 對應角度相差絕對值的標準差
LMedS 初解	6.6925	0.6097	0.5595	9.3467	6.5701
初步改進後的解	2.529	0.327	0.2538	1.0996	0.8962
最佳解	0.0442	0.0041	0.0034	0.043	0.0315

以上為詳細實驗過程，經過整理後，實驗 1~19 結果如下：

誤差值紀錄如下(單位為 pixels)：

實驗影像組的編號		外部參數 5D 解					median error
		ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	
images 1&2	LMedS 初 始解	37.5531	99.8379	-45.9876	84.8507	295.4805	3.7591
	GSS 最佳解	39.6869	101.4677	-46.9934	83.0828	296.3891	0.0676
images 1&3	LMedS 初 始解	29.6682	141.4966	-121.405	74.1991	317.2275	6.6925
	GSS 最佳解	37.2582	140.9757	-122.3790	68.4315	317.2348	0.0442
images 1&4	LMedS 初 始解	50.9025	76.9001	-64.2945	29.2644	288.8508	2.5201
	GSS 最佳解	52.2282	77.5192	-64.7788	29.8661	288.5809	0.0418
images 1&5	LMedS 初 始解	47.0098	108.2753	-127.509	66.6885	288.6372	4.8487
	GSS 最佳解	54.7283	107.8104	-127.0540	60.5426	288.1821	0.1693
images 1&6	LMedS 初 始解	35.7604	154.3874	-83.9399	86.3699	347.8431	6.486
	GSS 最佳解	39.3920	154.5617	-83.9459	80.3840	347.2128	0.0717
images 2&3	LMedS 初 始解	50.9605	204.1271	132.0258	53.0413	33.0186	2.1762
	GSS 最佳解	44.7943	202.2840	134.8863	54.7014	31.9388	0.0392
images 2&4	LMedS 初 始解	18.5634	120.9478	-157.271	24.4312	10.7084	1.9314
	GSS 最佳解	17.7845	117.1356	-153.5830	23.3266	11.5420	0.0447
images 2&5	LMedS 初 始解	51.2426	153.598	153.223	56.9278	339.9053	8.1266
	GSS	57.8432	155.8768	150.6311	55.0480	342.1457	0.1281

	最佳解						
images 2&6	LMedS 初 始解	23.021	230.4622	153.4481	85.7817	78.6782	3.5255
	GSS 最佳解	23.3048	230.7912	153.4066	85.7621	78.4690	0.0597
images 3&6	LMedS 初 始解	24.6063	83.9314	-39.6374	108.7896	255.6295	2.4538
	GSS 最佳解	23.6399	84.7011	-40.5268	111.6313	256.2478	0.0261
images 3&7	LMedS 初 始解	14.0856	34.7308	-1.1258	63.6679	160.5272	3.4166
	GSS 最佳解	12.6773	47.2263	-12.8468	58.9076	160.8481	0.0336
images 3&9	LMedS 初 始解	20.7431	334.8354	14.3752	123.6564	122.4046	1.8583
	GSS 最佳解	20.2031	335.9454	13.0152	125.6764	122.7646	0.0461
images 4&5	LMedS 初 始解	49.5414	175.2605	175.3909	105.9571	344.6044	3.1185
	GSS 最佳解	49.0912	175.3749	175.3507	107.1031	344.7095	0.0762
images 4&6	LMedS 初 始解	17.6805	277.2706	145.4917	163.6558	99.6707	2.1124
	GSS 最佳解	18.6922	280.4251	143.1172	161.4150	104.4640	0.055
images 4&7	LMedS 初 始解	31.2001	271.4527	139.7784	122.3644	102.0664	2.5704
	GSS 最佳解	32.1901	273.3327	138.7784	120.0944	103.6064	0.0291
images 5&6	LMedS 初 始解	36.2054	54.8846	22.2981	86.5464	225.3883	1.6083
	GSS 最佳解	34.3254	55.0246	22.0981	88.0664	225.0083	0.0585
images 5&7	LMedS 初 始解	24.4627	26.6426	43.0487	59.3842	178.1706	7.3168

	GSS 最佳解	28.7266	23.6014	45.9030	64.1224	179.6060	0.0286
images 5&8	LMedS 初 始解	26.7789	35.5965	12.7753	102.1559	215.8369	2.1219
	GSS 最佳解	31.4340	36.0747	12.8124	96.0507	216.2270	0.0368
images 5&10	LMedS 初 始解	47.8706	330.1409	71.4509	50.6197	141.9956	8.2137
	GSS 最佳解	43.2313	330.2478	72.3773	48.6049	141.0610	0.037

表 5.2 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)初始解及最佳解的誤差值紀錄

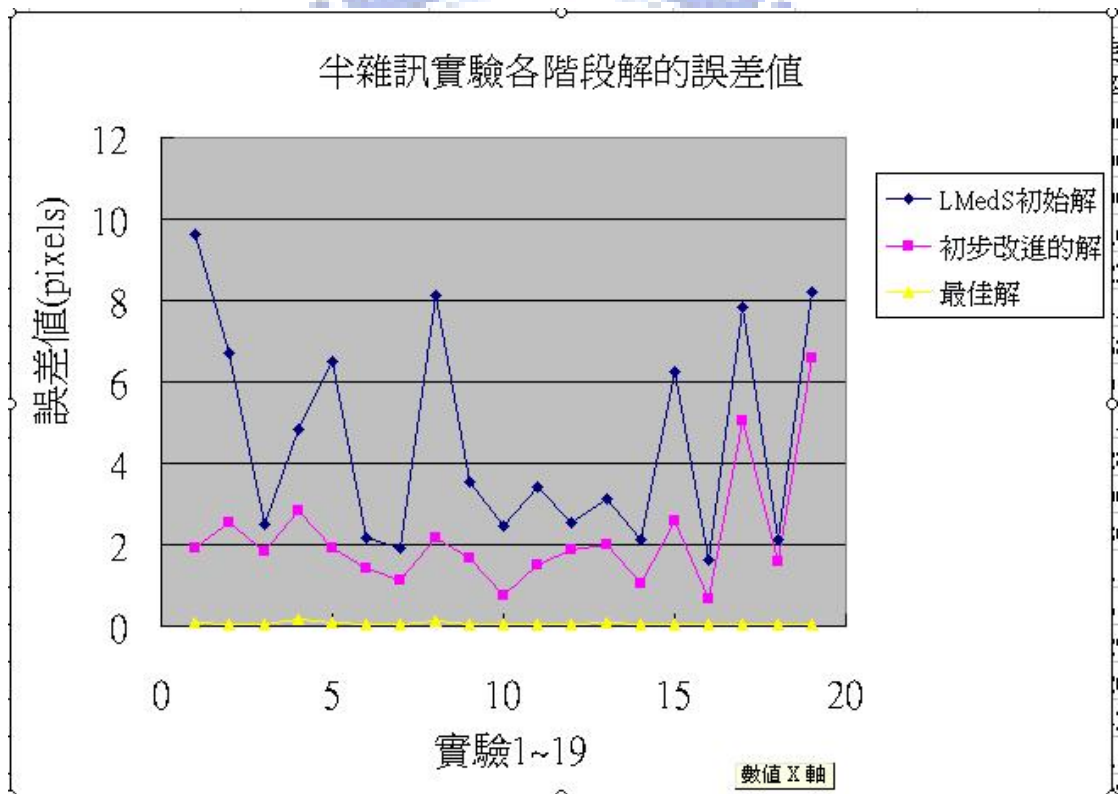


圖 5.3 為表 5.2 的示意圖(x 軸為實驗編號，y 軸為 median error)

重建 3D 的結果如下：

實驗影像組的編號		重建 3D 後的 邊長長度和 ground truth 對應邊長相 差絕對值的 平均 (cm)	重建 3D 後的 邊長長度和 ground truth 對應邊長相 差絕對值的 標準差	重建 3D 後的 角度和 ground truth 對應角度相 差絕對值的 平均(度)	重建 3D 後的角 度和 ground truth 對應角度 相差絕對值的 標準差
images 1&2	LMedS 初 始解	0.4494	0.3569	1.1359	1.0785
	GSS 最佳解	0.0012	0.0009	0.0055	0.0036
images 1&3	LMedS 初 始解	0.6097	0.5595	9.3467	6.5701
	GSS 最佳解	0.0041	0.0034	0.043	0.0315
images 1&4	LMedS 初 始解	0.2004	0.1543	1.2185	0.9732
	GSS 最佳解	0.0027	0.0028	0.0408	0.0293
images 1&5	LMedS 初 始解	1.0182	0.789	5.6328	4.2719
	GSS 最佳解	0.002	0.0017	0.032	0.0238
images 1&6	LMedS 初 始解	0.5153	0.4534	4.8688	3.232
	GSS 最佳解	0.2201	0.2174	0.2863	0.3043
images 2&3	LMedS 初 始解	0.8825	0.7621	5.4809	3.6349
	GSS 最佳解	0.4576	0.4258	0.7854	0.5011
images 2&4	LMedS 初 始解	1.5629	1.218	1.9596	2.0122
	GSS 最佳解	0.5868	0.5057	1.1279	1.219
images 2&5	LMedS 初 始解	0.787	0.619	5.3026	3.1297

	GSS 最佳解	0.0106	0.0084	0.073	0.043
images 2&6	LMedS 初 始解	0.759	0.5908	4.0403	2.7537
	GSS 最佳解	0.1358	0.1031	0.4693	0.4006
images 3&6	LMedS 初 始解	0.4096	0.3609	2.4118	1.7698
	GSS 最佳解	0.2867	0.2253	0.4382	0.5595
images 3&7	LMedS 初 始解	1.4159	1.129	7.3869	5.3575
	GSS 最佳解	0.0021	0.0017	0.0316	0.0208
images 3&9	LMedS 初 始解	1.0267	0.9273	2.7737	2.3559
	GSS 最佳解	0.8065	0.6395	1.7225	1.5296
images 4&5	LMedS 初 始解	0.443	0.3606	1.1022	0.8304
	GSS 最佳解	0.151	0.1468	0.6287	0.4768
images 4&6	LMedS 初 始解	0.9559	0.762	5.5502	4.3285
	GSS 最佳解	0.6181	0.522	0.8437	0.054
images 4&7	LMedS 初 始解	0.4413	0.392	2.1732	1.8554
	GSS 最佳解	0.2923	0.2646	0.7081	0.6278
images 5&6	LMedS 初 始解	0.6144	0.4856	1.7997	1.2015
	GSS 最佳解	0.2642	0.2401	0.4685	0.4567
images	LMedS 初	0.7709	0.7063	3.8838	2.7842

5&7	始解				
	GSS 最佳解	0.4267	0.4529	0.8445	1.0054
images 5&8	LMedS 初 始解	1.1425	0.9055	3.7654	2.2685
	GSS 最佳解	0.177	0.1435	0.313	0.3395
images 5&10	LMedS 初 始解	1.7762	1.3451	3.5386	2.6974
	GSS 最佳解	0.2722	0.2551	0.4747	0.3205

表 5.3 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)初始解及最佳解重建的 3D 和 ground truth 的比較結果

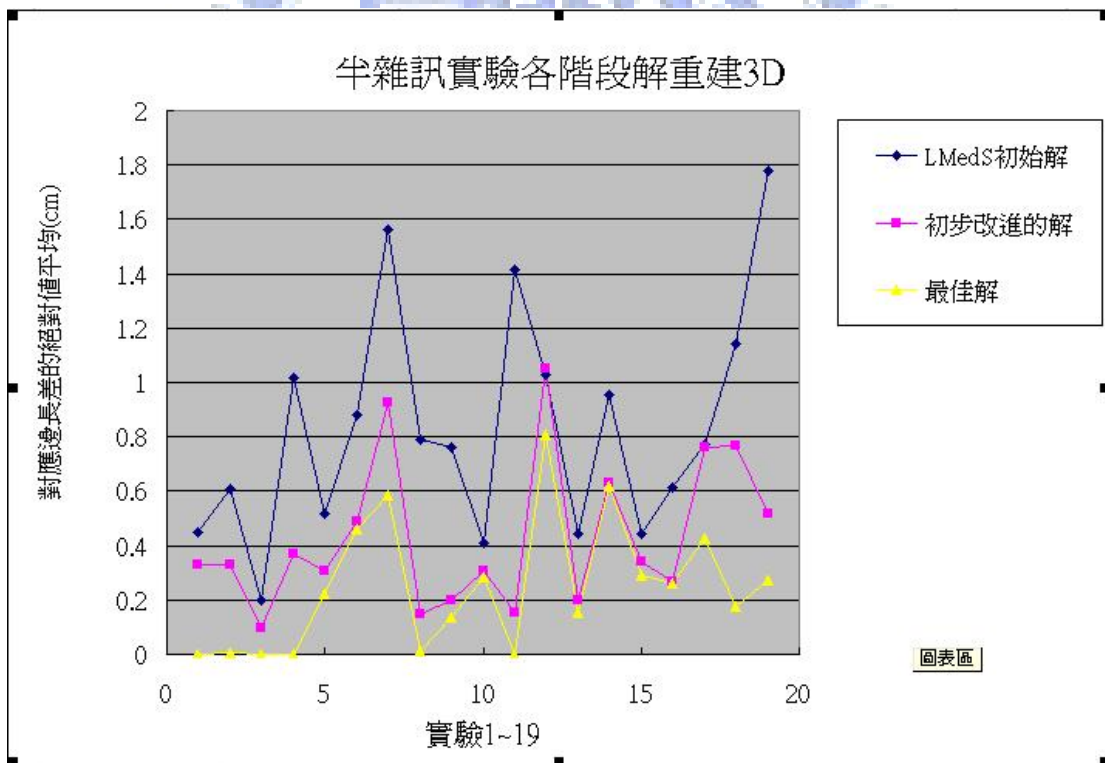


圖 5.4 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長长度和原 3D 對應邊長相差絕對值的平均(cm)

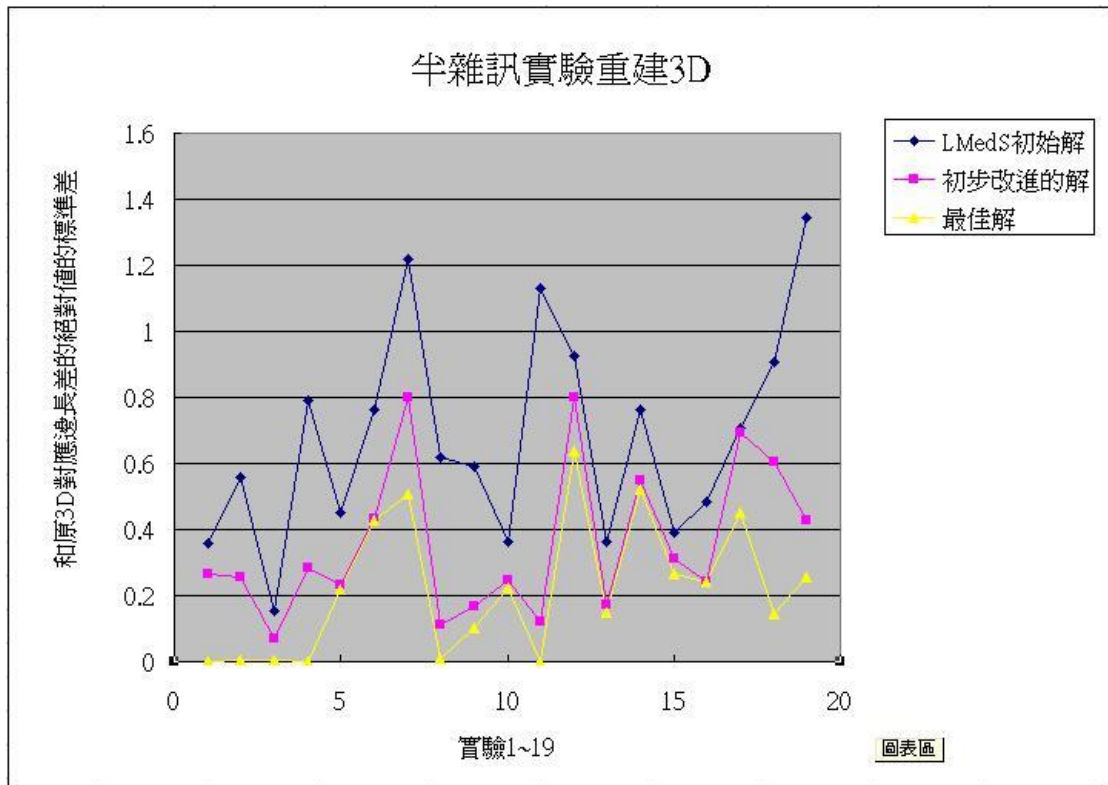


圖 5.5 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度和原 3D 對應邊長相差絕對值的標準差

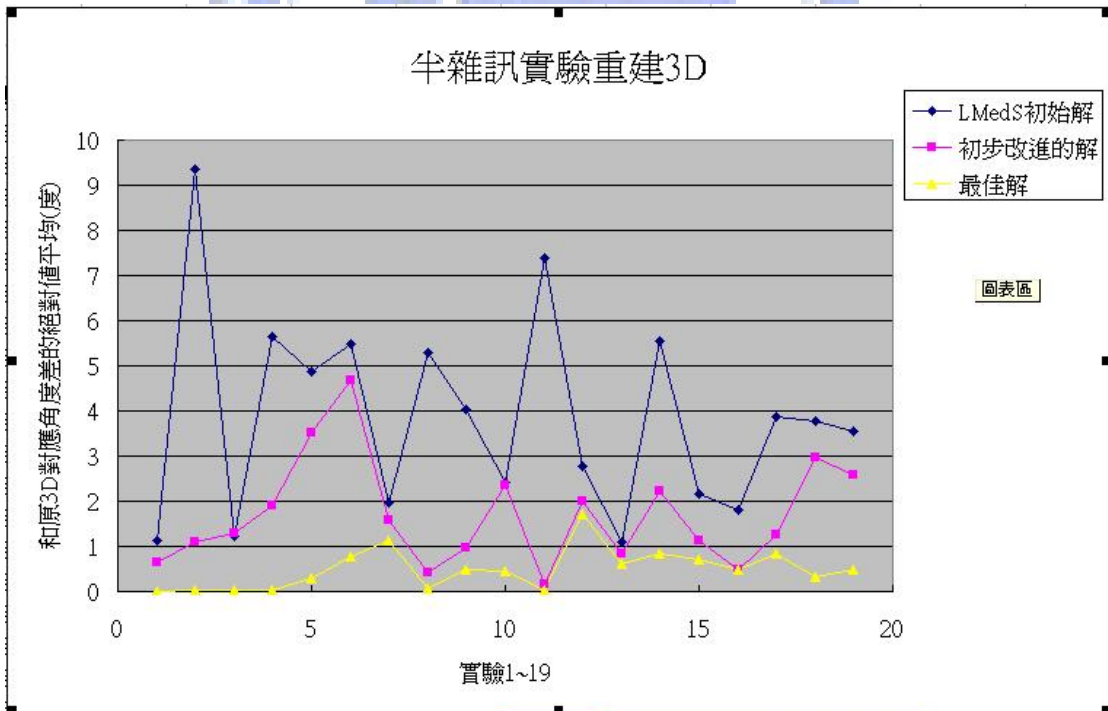


圖 5.6 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度和原 3D 對應角度相差絕對值的平均(度)

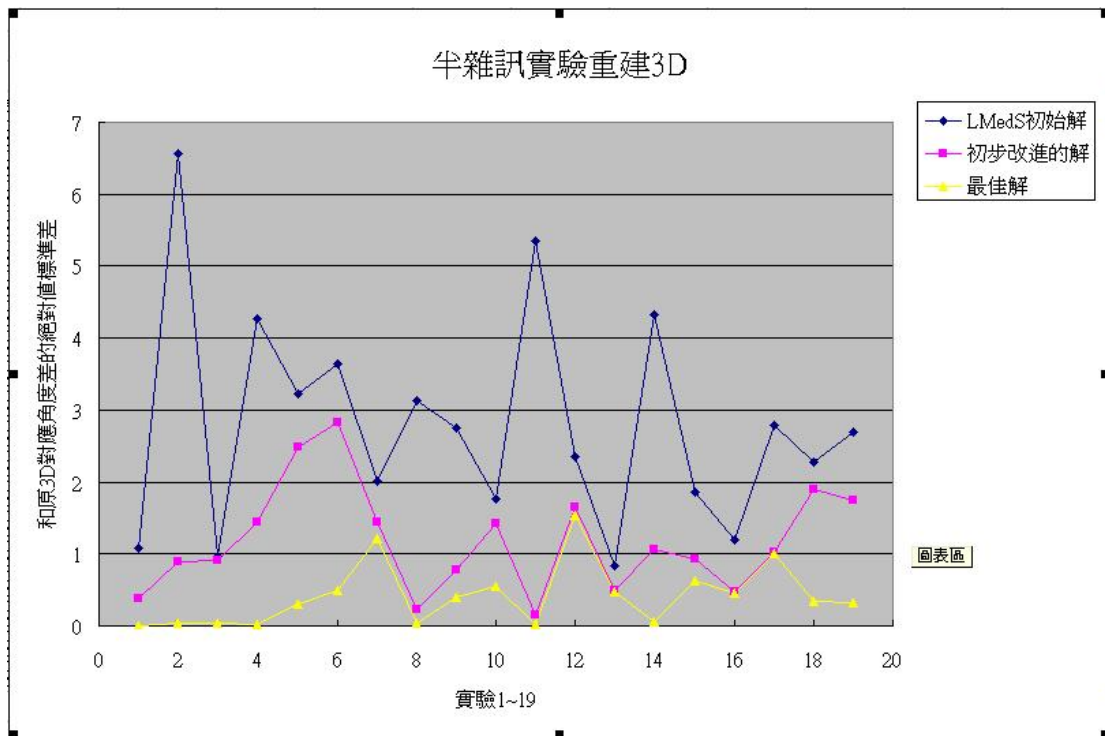


圖 5.7 半雜訊實驗(加入 $3\sigma = 3\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度和原 3D 對應角度相差絕對值的標準差



5.2 全雜訊實驗

實驗的主要步驟和半雜訊實驗相似(差別在步驟 2)：

- (1) 選取要實驗的 2 張影像
- (2) 參考第 2 張影像中 cube 的最大邊長(實驗 1~9 取 0.5% 為 3σ , 實驗 10~18 取 1.5% 為 3σ), 分別產生 **19 個** x、y 座標的高斯雜訊(mean = 0, 標準差 = σ), 並隨機加入第 2 張影像中的 **19 個** 對應點。
- (3) 在 19 組對應點中隨機選取 10 組對應點來計算出外部參數解, 以 LMedS 的方法產生 4000 組相機外部參數解當作初解。
- (4) 分析有前 50 個最小誤差值的解, 建立其 Minimum Spanning Tree(MST)
- (5) 對 MST 做分群(Clustering), 求各群 Covariance matrix 橢圓體之 eigen values 及 eigen vectors
- (6) 對各群橢圓體細切, 得到初解的改進(refinement), 直至橢圓體退化(至少一個 eigen value 為 0)。
- (7) 啟用 Golden section search(GSS)搜尋相機外部參數的最佳解：(a)轉換 5D Camera parameter space 為 3D Rotation space 與 2D translation space, (b)進而再用橢圓體 eigen values 及 eigen vectors 定義三個參數空間: 1D rotation eigenspace + 2D rotation space + 2D translation space, (c)使用 Golden section line search 連環搜尋相機外部參數的最佳解
- (8) 以找到的最佳外部參數解重新建立 3D 點, 計算重建 3D 後 cube 的邊長長度和 ground truth 對應邊長差的絕對值的平均及標準。

經過整理後, 實驗 1~9(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)結果如下：

誤差值紀錄如下(單位為 pixels)：

實驗影像組的編號		外部參數 5D 解					median error
		ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	
images 1&2	LMedS 初 始解	38.2864	100.2244	-46.0169	84.3109	295.692	0.9855
	GSS 最佳解	39.2183	100.9556	-46.4845	83.6060	296.0525	0.1874
images 1&5	LMedS 初 始解	55.0596	107.669	-126.655	60.1518	288.0642	1.2168
	GSS 最佳解	55.1266	107.7122	-127.030	60.2959	288.0786	0.1760
images 2&3	LMedS 初 始解	44.6601	201.9872	134.9887	54.4521	31.6166	1.0863
	GSS 最佳解	45.4144	202.4803	134.6142	54.5562	32.0438	0.1483
images 2&6	LMedS 初	23.8781	231.8089	152.2857	85.3754	78.8174	0.58

	始解						
	GSS 最佳解	23.2190	230.4899	153.5184	85.6849	78.3466	0.1788
images 3&6	LMedS 初 始解	23.4036	84.2441	-40.3432	111.7226	255.424	0.9571
	GSS 最佳解	23.9809	83.8335	-39.7031	110.6983	255.0623	0.1509
images 3&9	LMedS 初 始解	21.2621	334.1008	15.2508	121.711	122.4845	2.1264
	GSS 最佳解	20.6616	335.5764	13.3178	124.0658	123.3376	0.1844
images 4&5	LMedS 初 始解	50.7671	175.404	175.6947	104.7785	345.0398	0.7278
	GSS 最佳解	49.4274	175.3367	175.4890	106.6220	344.7247	0.1408
images 5&7	LMedS 初 始解	26.9264	24.9996	44.651	64.3934	179.5356	0.634
	GSS 最佳解	29.4911	22.8110	46.7993	63.8623	179.4504	0.1219
images 8&9	LMedS 初 始解	24.1242	271.1531	-57.578	81.6355	82.4884	0.7026
	GSS 最佳解	24.3687	270.8690	57.8441	81.0953	82.2922	0.1787

表 5.4 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解的誤差值紀錄

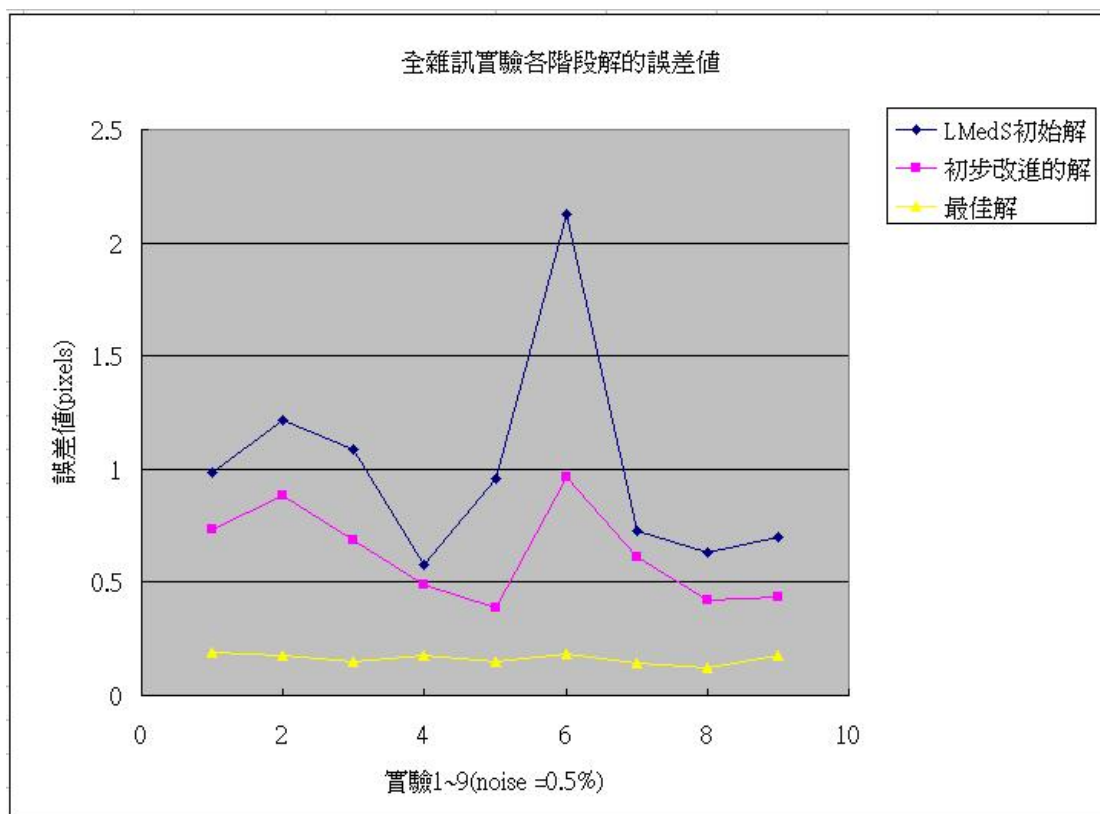


圖 5.8 為表 5.4 的示意圖(x 軸為實驗編號，y 軸為誤差值)

重建 3D 的結果如下：

實驗影像組的編號		重建 3D 後的 邊長長度和 ground truth 對應邊長相 差絕對值的 平均 (cm)	重建 3D 後的 邊長長度和 ground truth 對應邊長相 差絕對值的 標準差	重建 3D 後的 角度和 ground truth 對應角度相 差絕對值的 平均(度)	重建 3D 後的 角度和 ground truth 對應角度相 差絕對值的 標準差
images 1&2	LMedS 初 始解	0.1597	0.1359	1.2961	0.9656
	GSS 最佳解	0.1006	0.0801	0.3257	0.2757
images 1&5	LMedS 初 始解	0.1068	0.0811	0.4105	0.2661
	GSS 最佳解	0.0424	0.0343	0.137	0.1195

images 2&3	LMedS 初 始解	0.1249	0.0927	0.6833	0.4075
	GSS 最佳解	0.1084	0.0892	0.2397	0.2013
images 2&6	LMedS 初 始解	0.2815	0.2217	0.9779	0.633
	GSS 最佳解	0.111	0.0924	0.2843	0.2774
images 3&6	LMedS 初 始解	0.372	0.3029	2.7742	1.858
	GSS 最佳解	0.1073	0.089	0.3839	0.3329
images 3&9	LMedS 初 始解	0.7518	0.6238	4.108	2.628
	GSS 最佳解	0.259	0.2318	1.2355	0.9967
images 4&5	LMedS 初 始解	0.3723	0.285	1.547	0.8539
	GSS 最佳解	0.0968	0.0847	0.3237	0.1696
images 5&7	LMedS 初 始解	0.4298	0.3476	2.2313	1.59
	GSS 最佳解	0.1398	0.1345	0.957	0.7238
images 8&9	LMedS 初 始解	0.1189	0.0975	0.6696	0.4858
	GSS 最佳解	0.0806	0.0707	0.3292	0.2679

表 5.5 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解重建的 3D 和 ground truth 的比較結果

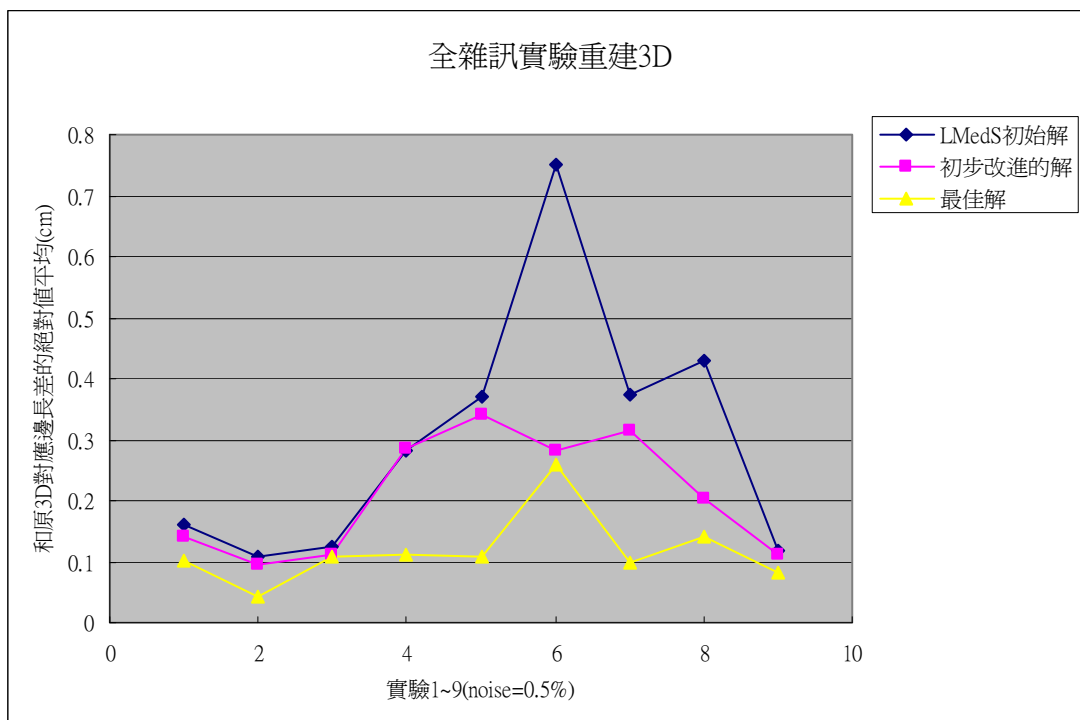


圖 5.9 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度和原 3D 對應邊長相差絕對值的平均(cm)

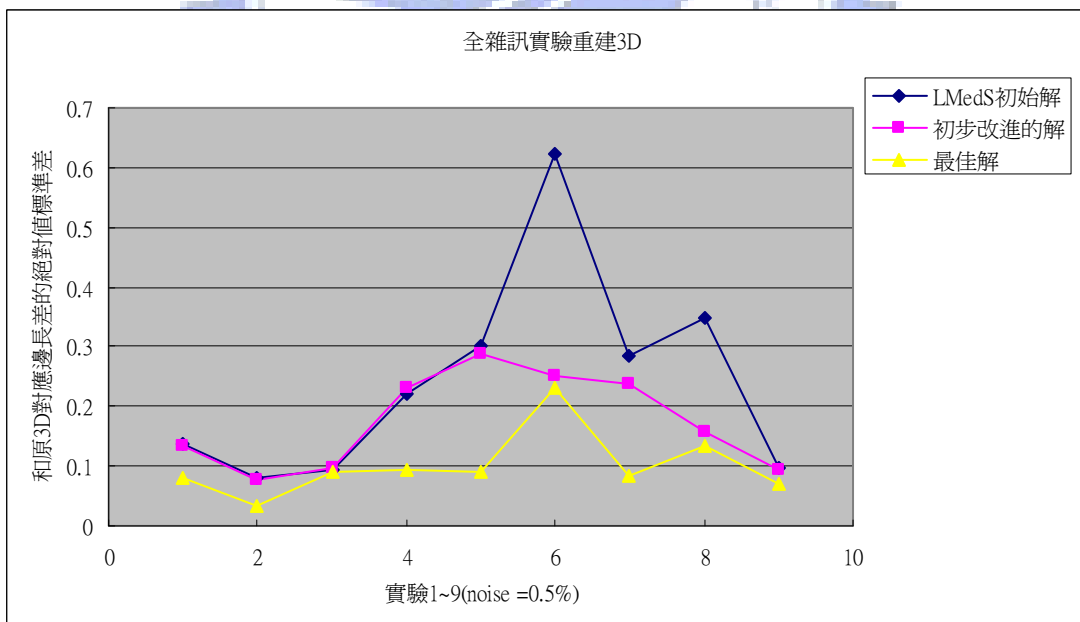


圖 5.10 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度和原 3D 對應邊長相差絕對值的標準差

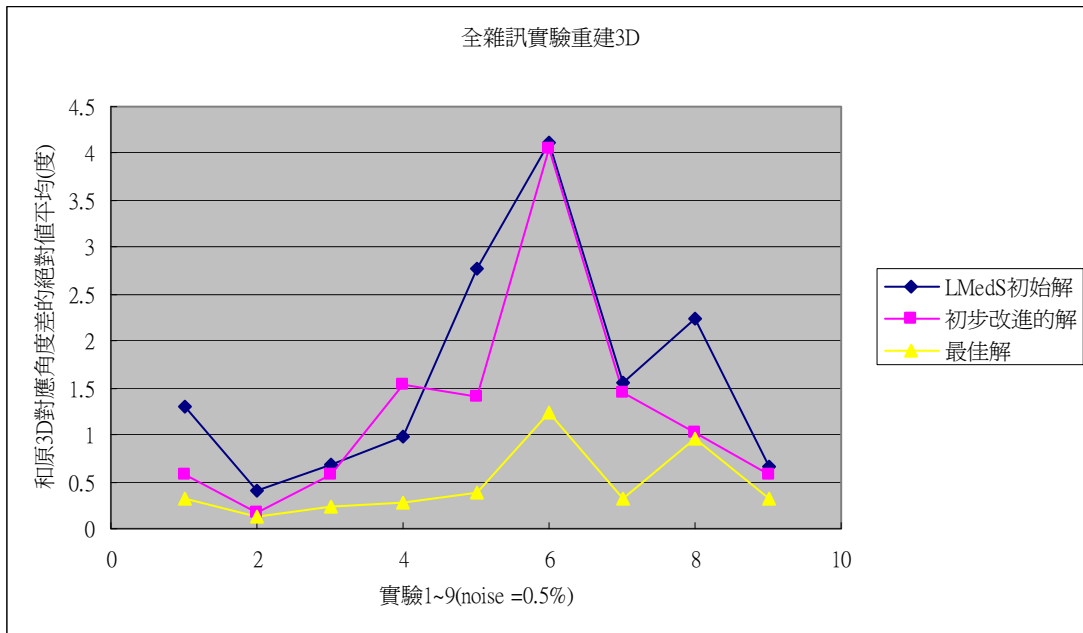


圖 5.11 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度和原 3D 對應角度相差絕對值的平均(度)

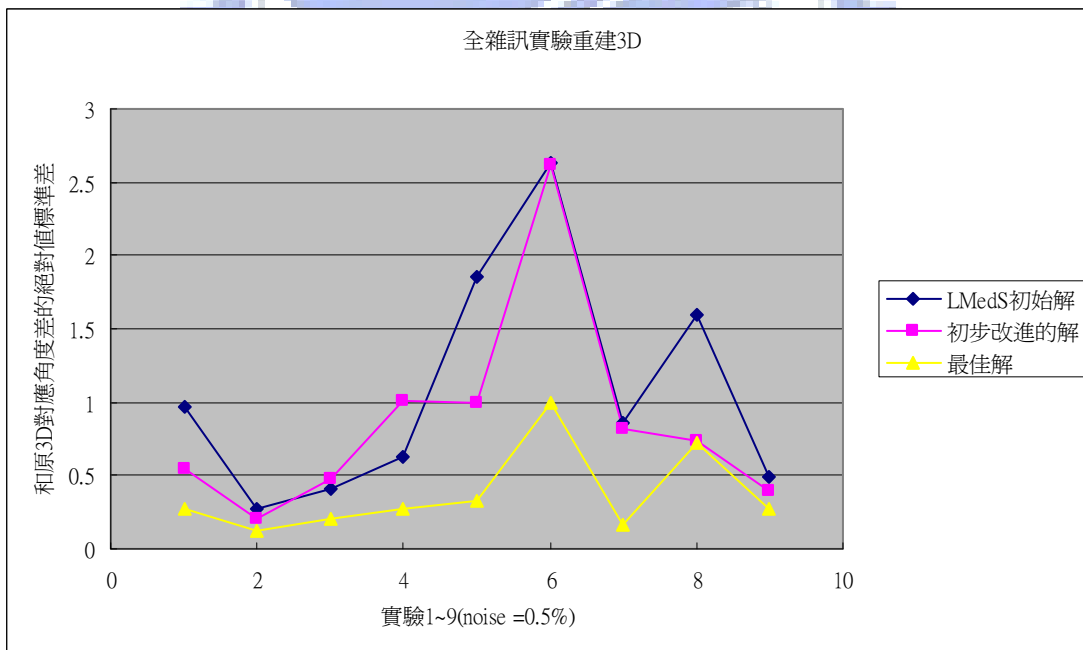


圖 5.12 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 0.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度和原 3D 對應角度相差絕對值的標準差

經過整理後，實驗 10~18(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)結果如下：

誤差值紀錄如下(單位為 pixels)：

實驗影像組的編號		外部參數 5D 解					median error
		ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	
images 1&2	LMedS 初始解	41.0432	101.7433	-47.2284	81.785	296.2667	1.0749
	GSS 最佳解	39.4415	100.9974	-46.4480	83.0086	296.0619	0.1994
images 1&5	LMedS 初始解	51.2554	107.7762	-126.361	62.4283	288.239	1.6363
	GSS 最佳解	54.9703	107.6817	-126.880 0	60.3850	288.0678	0.2104
images 2&3	LMedS 初始解	41.2275	201.5958	135.7413	55.8447	31.9223	1.352
	GSS 最佳解	45.0535	202.4387	134.7242	54.6929	32.0760	0.2156
images 2&6	LMedS 初始解	23.6099	230.5039	153.6107	86.4122	77.854	0.7372
	GSS 最佳解	23.4910	231.2050	153.1529	85.7900	78.6748	0.1701
images 3&6	LMedS 初始解	22.735	84.8957	-40.7925	114.0863	256.1069	1.2496
	GSS 最佳解	23.1840	84.5221	-40.4231	112.8761	255.7375	0.1818
images 3&9	LMedS 初始解	19.8453	336.0125	12.451	127.1133	122.129	1.729
	GSS 最佳解	20.3443	335.3311	13.4176	125.2439	122.1438	0.1864
images 4&5	LMedS 初始解	51.1639	175.2506	176.2544	104.8038	344.8208	2.7045
	GSS 最佳解	48.0320	175.6700	174.7078	108.4851	344.9274	0.2991
images 5&7	LMedS 初始解	23.7798	27.7228	43.2703	64.572	179.0837	3.0662

	GSS 最佳解	25.1409	45.0247	63.7385	179.0033	0.2449	0.2449
images 8&9	LMedS 初始解	23.6418	272.5348	56.269	82.6988	83.6064	1.7475
	GSS 最佳解	24.1071	270.7522	58.0512	81.6361	82.0561	0.1962

表 5.6 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解的誤差值紀錄

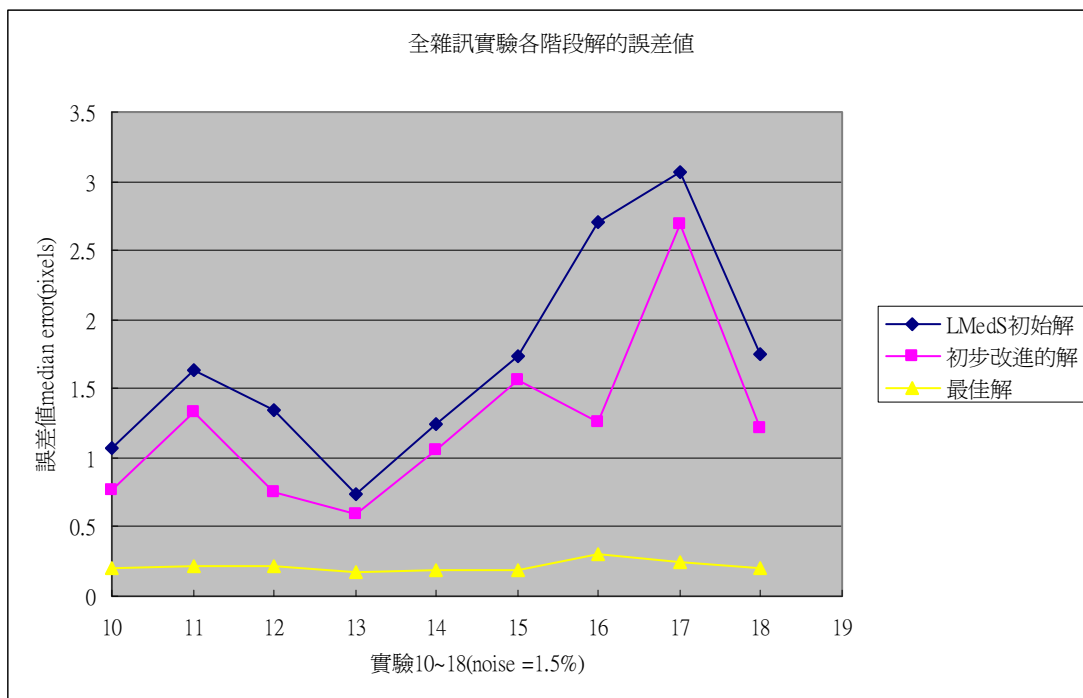


圖 5.13 為表 5.6 的示意圖(x 軸為實驗編號，y 軸為 median error)

重建 3D 的結果如下：

實驗影像組的編號		重建 3D 後的 邊長長度和 ground truth 對應邊長相 差絕對值的 平均 (cm)	重建 3D 後的 邊長長度和 ground truth 對應邊長相 差絕對值的 標準差	重建 3D 後的 角度和 ground truth 對應角度相 差絕對值的 平均(度)	重建 3D 後的 角度和 ground truth 對應角度相 差絕對值的 標準差
images 1&2	LMedS 初始解	0.3213	0.2687	0.9825	0.7888
	GSS 最佳解	0.1925	0.2156	0.4166	0.3349
images 1&5	LMedS 初始解	0.3276	0.2568	2.46	1.7497
	GSS 最佳解	0.161	0.1366	0.4182	0.3855
images 2&3	LMedS 初始解	0.509	0.4248	4.1486	2.7718
	GSS 最佳解	0.1727	0.1319	0.4484	0.3007
images 2&6	LMedS 初始解	0.3572	0.3038	0.7901	0.676
	GSS 最佳解	0.1644	0.1498	0.2768	0.1712
images 3&6	LMedS 初始解	0.3885	0.3144	2.2667	1.4407
	GSS 最佳解	0.1116	0.1183	0.4483	0.343
images 3&9	LMedS 初始解	0.6561	0.5179	1.5584	1.484
	GSS 最佳解	0.3668	0.2723	0.7157	0.5826
images 4&5	LMedS 初始解	0.2873	0.2355	2.1309	1.3586
	GSS 最佳解	0.2728	0.2348	0.4831	0.3382
images	LMedS	1.6473	1.314	6.0735	4.8078

5&7	初始解				
	GSS 最佳解	0.2059	0.1663	1.9915	1.3399
images 8&9	LMedS 初始解	0.1673	0.1639	0.805	0.6204
	GSS 最佳解	0.1116	0.094	0.5699	0.3969

表 5.7 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)初始解及最佳解重建的 3D 和 ground truth 的比較結果

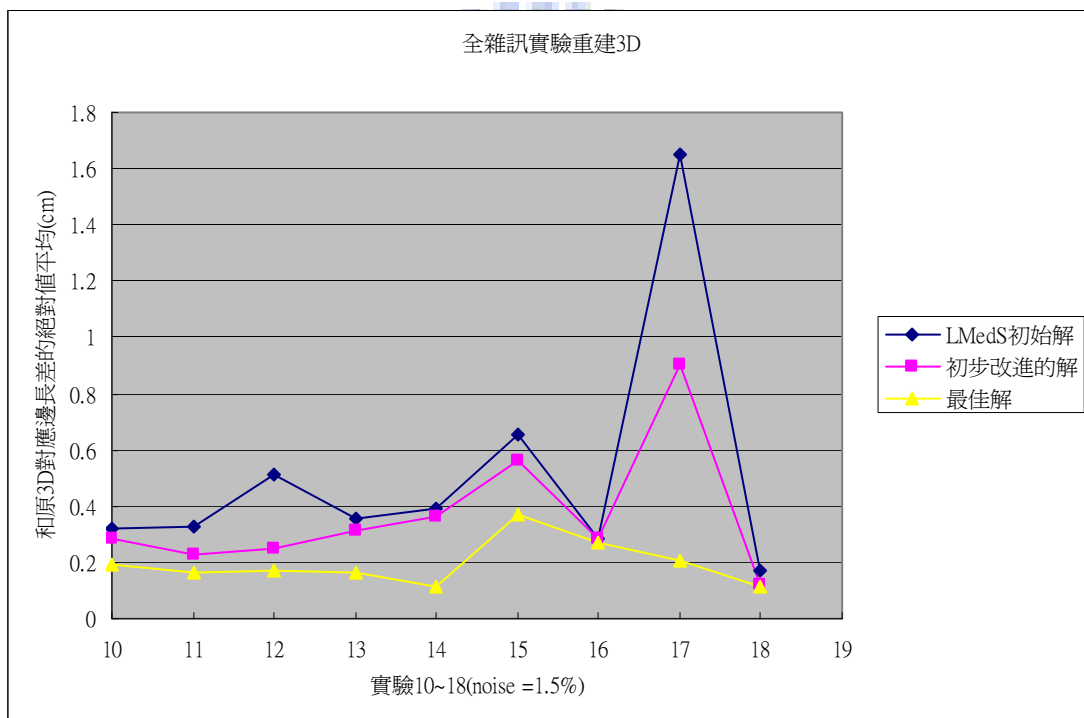


圖 5.14 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度和原 3D 對應邊長相差絕對值的平均(cm)

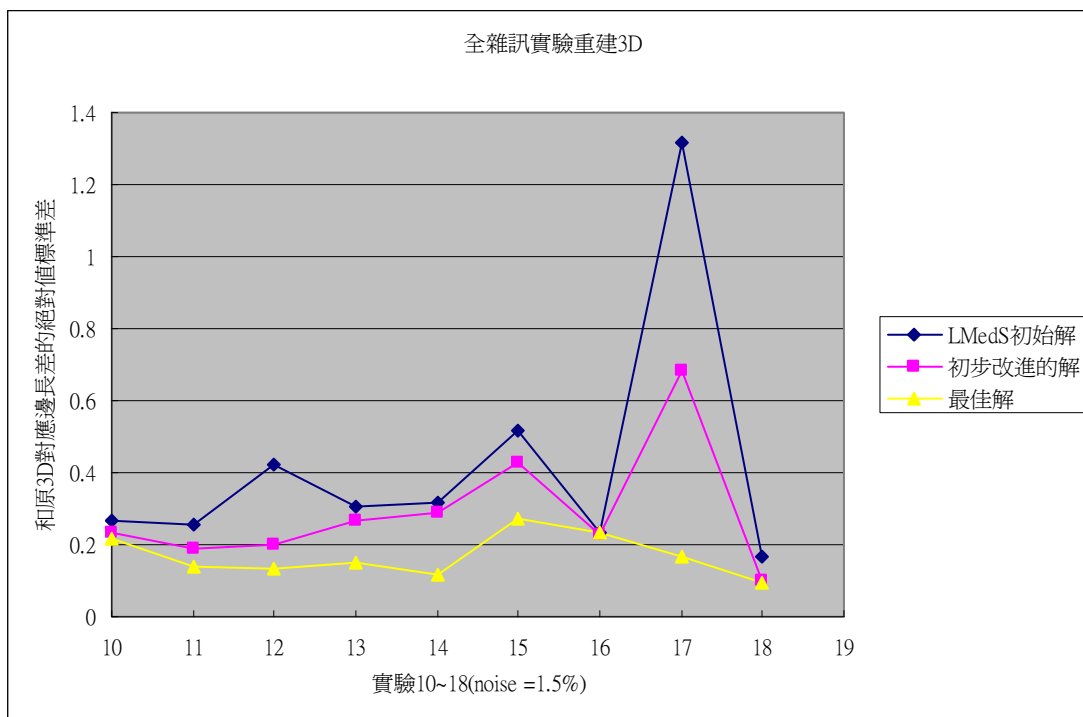


圖 5.15 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 9 個邊長長度和原 3D 對應邊長相差絕對值的標準差

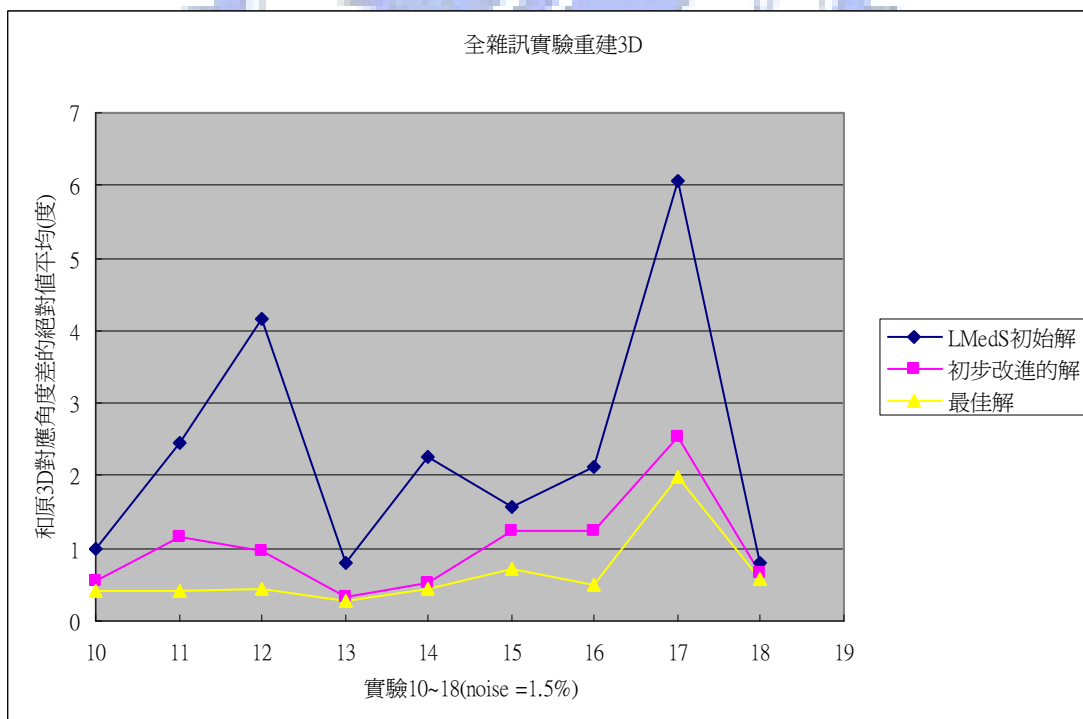


圖 5.16 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度和原 3D 對應角度相差絕對值的平均(度)

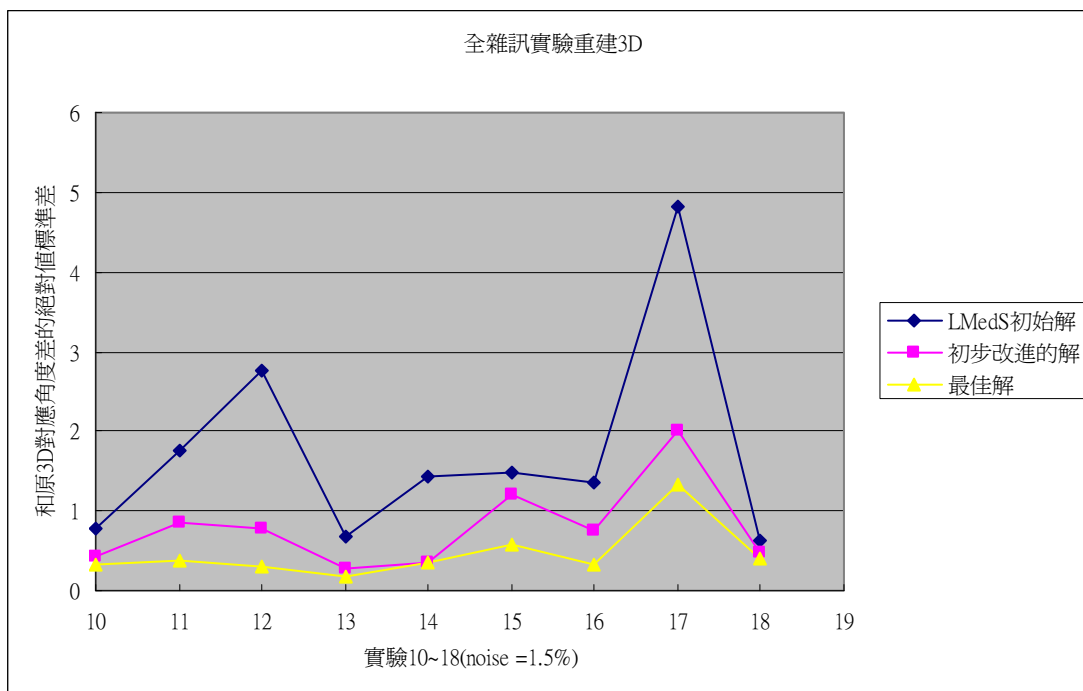


圖 5.17 全雜訊實驗(加入 $3\sigma = 1.5\%$ 的雜訊)重建 3D 後的 12 個角度和原 3D 對應角度相差絕對值的標準差

由以上實驗圖表，可看出解的改進，其中用 GSS 為基礎的 5D 最佳解搜尋法所找出來的最佳解，誤差值已經達到一個很小的結果且比其它解好，同樣，觀察以最佳解重建的 3D 模型和原來 ground truth 的差異(邊長、角度)比其它解小且就絕對數值而言也已改進到夠小的程度，可間接給我們的方法提出有力的支持。

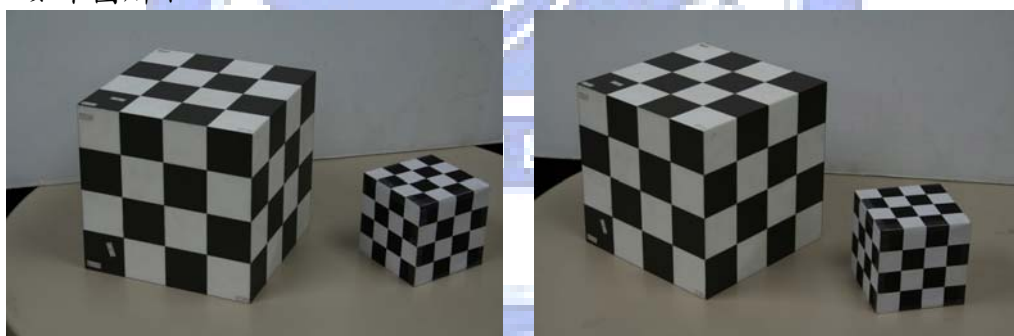
5.3 實際影像實驗

實驗的主要步驟如下：

- (1) 以人工方式取出 19 個對應點(以後可用自動化方法取點)。
- (2) 在 19 組對應點中隨機選取 10 組對應點來計算出外部參數解，以 LMedS 的方法產生 4000 組相機外部參數解當作初解。
- (3) 分析有前 50 個最小誤差值的解，建立其 Minimum Spanning Tree(MST)
- (4) 對 MST 做分群(Clustering)，求各群 Covariance matrix 橢圓體之 eigen values 及 eigen vectors
- (5) 對各群橢圓體細切，得到初解的改進(refinement)，直至橢圓體退化(至少一個 eigen value 為 0)。
- (6) 啟用 Golden section search(GSS)搜尋相機外部參數的最佳解：(a)轉換 5D Camera parameter space 為 3D Rotation space 與 2D translation space，(b)進而再用橢圓體 eigen values 及 eigen vectors 定義三個參數空間:1D rotation eigenspace +2D rotation space +2D translation space，(c)使用 Golden section line search 連環搜尋相機外部參數的最佳解。
- (7) 以找到的最佳外部參數解重新建立 3D 點，計算重建 3D 後 cube 的邊長長度和 ground truth 對應邊長差的絕對值的平均及標準。

詳細過程如下：

輸入兩張解析度為 1024x768 的影像 View1 及 View2，影像中各有 19 點特徵對應點，如下圖所示。



View 1

View 2

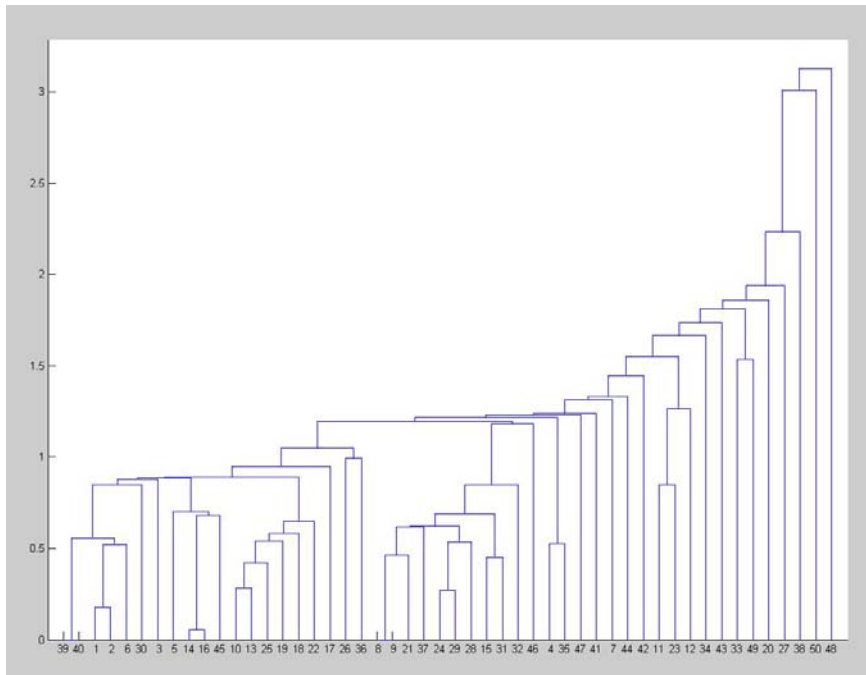
以此 19 點經過 data conditioning 所求出來的 R、T

ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	error
18.8942	7.7283	0.0052	78.5448	185.1759	64.49

利用 LMEDS 計算後的最佳解資料如下：

ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	median err
17.8326	5.5213	2.4986	86.2127	185.6445	1.5533

以 LMEDS 的 median error 前 50 名所建立的 MST 如下圖所示：



LMEDS 初始解的最小值為 1.5533，對這 50 點進行細切割，先分別對 R, T 進行計算橢圓體的長短軸相關資訊。如下所示：

R	ψR	θR	ωR
<i>mean</i>	18.3419	5.1641	2.8716
$\sqrt{\text{eigenvalue}}$	0.6297	0.3344	0.0747
	軸 1	軸 2	軸 3
<i>eigenvector</i>	-0.967	-0.2548	-0.0031
	0.1765	-0.6784	0.7132
	-0.1838	0.6892	0.7009

T	ψT	θT
<i>mean</i>	85.2829	185.3607
$\sqrt{\text{eigenvalue}}$	1.1875	0.2276
	軸 1	軸 2
<i>eigenvector</i>	-1	0.0079
	0.0079	1

$$R \text{ 橢圓體最長軸的半長} = \sqrt{C_{\max}} \sqrt{\text{eigenvalue}_{\max}} = 3.5165$$

$$\text{取最大切割單位} = (2/3 * \text{half of 最長軸} * 1/2) = 1.1722$$

$$T \text{ 橢圓最長軸的半長} = \sqrt{C_{\max}} \sqrt{\text{eigenvalue}_{\max}} = 4.1492$$

取最大切割單位 = $(2/3 * \text{half of 最長軸} * 1/2) = 1.3831$

其它軸切割單位依 cluster 的 $\sqrt{\text{eigenvalue}}$ 的比例設定

→ 對 Cluster 1 R 細切的切割間隔設為 = (1.1722 0.6225 0.1391)

T 細切的切割間隔設為 = (1.3831 0.2651)

對橢圓體細切後，可得到一個初步的 refinement 結果

ψ_R	θ_R	ω	ψ_T	θ_T	medi err
18.7379	5.0305	3.0191	85.4955	185.1769	0.8093

以此結果為中心，在每一個 dimension ± 4 度的範圍內用新方法找出一個最佳近似解，結果如下：

ψ_R	θ_R	ω_R	ψ_T	θ_T	medi err
18.6179	5.1705	2.7991	85.7855	185.3669	0.1942

以實驗結果所重建後的 3D 結果如下：

Error Function 的函數值 (pixels)	重建 3D 後的邊長長度和 ground truth 對應邊長相差絕對值的平均值	重建 3D 後的邊長長度和 ground truth 對應邊長相差絕對值的標準差	重建 3D 後的角度和 ground truth 對應角度相差絕對值的平均(度)	重建 3D 後的角度和 ground truth 對應角度相差絕對值的標準差

		(cm)			
LMedS 初解	11.0891	0.6168	0.4944	2.1394	1.5644
初步改進 後的解	5.1781	0.3075	0.2737	0.7011	0.6774
最佳解	1.4146	0.1331	0.1018	0.6439	0.5021

由實驗結果來看，以 Golden section search(GSS)為基礎的搜尋方法能夠在初步 refinement 結果的基礎上，搜尋到一個有極小 error 的改良解，同時以合成影像為輸入的實驗可事先知道真正的解，拿來和改良解比較後也發現改良解在 5D 空間中和正解距離很接近，由此可知用此方法最後得到的是一個最佳近似解。

通過觀察 error surface 可發現在 5D 空間中有許多的 local trap，想要 100%找到有最小 error 的解必需所有點都去計算比較，這方法明顯不可行，而以 Golden section search(GSS)為基礎的搜尋方法可以極大改善執行時間，由目前實驗結果來看又能在一定程度上保證搜尋到最小值的準確性，找出最佳近似解，對需要極高準確度的多張影像重建 3D 的工作應該會有很大的幫助。

第 6 章 結論與未來發展方向

6.1 結論

本論文中大致可分為兩大課題，第一個是對外部參數 error surface 的研究，其變化非常的不規則，有許多的區域極值，若使用非線性(non-linear)的方法求出來的解很容易陷入區域極值中，所以在論文的第三章我們採用 LMedS 隨機取解，先圈出一個會包含最佳解的大範圍區域，再經分群及細切找出有較小誤差值的小區域；第二個是第四章全域最佳解的搜尋，根據以上找出來的區域最佳解為中心，在某特定範圍裡用 GSS 為基礎的最佳化搜尋法找出全域最佳解來。經由對前者的研究，我們知道尋找最佳解的困難度，而後者是我們提出來的一個解決方法，對於現今利用高解析度影像且需極高精準度的相關應用，本方法能大幅度減少影像中對應點誤差(或雜訊)所帶來的影響。在本論文中還有許多可以改進的地方，分列如下：

1. 目前利用 MST 對 LMedS 較佳解進行分群尚未能自動化，未來若能透過分析得到較佳的自動化分群結果，將能有效提升執行效率。
2. 以 GSS 為基礎的最佳解搜尋法可增加從初步改進解到全域最佳解的搜尋效率，但仍需大量的搜尋時間($\approx 15^5$ 次)，若能對 5D 空間中各軸上搜尋的範圍與最佳解之間的關係更了解，將有助於減少搜尋的範圍，進而加快執行的速度

6.2 未來發展方向

未來將可能以外部參數解最佳化的方法搭配擷取特徵點的演算法(如：MSER)，將 2 張影像之間的校正自動化，得到最佳的外部參數解，當應用在特徵比對時，可以先將待比對影像經由最佳化的外部參數做最好的校正，減少其它因素的影響，以獲得最佳的比對結果。

參考文獻

- [1] Y. Furukawa, and J. Ponce, "Accurate Camera Calibration from Multi-View Stereo and Bundle Adjustment", *CVPR 2008*.
- [2] A. Ansar and K. Daniilidis, "Linear pose estimation from points or lines", *PAMI* 2003.
- [3] 劉嘉哲, "使用直交退火演算法解相機校正問題", 逢甲大學資訊工程學系, 碩士論文, 民 92
- [4] Richard I. Hartley and Fredrik Kahl, "Global Optimization through Searching Rotation Space and Optimal Estimation of the Essential Matrix", *ICCV 2007*.
- [5] Yasutaka Furukawa and Jean Ponce, "Accurate Camera Calibration from Multi-View Stereo and Bundle Adjustment", *CVPR 2008*.
- [6] Martin A. Fischler and Robert C. Bolles, "Random sample consensus_ a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography", *CACM* 1981.
- [7] PETER J. ROUSSEEUW, "Least Median of Squares Regression", *Journal of the American Statistical Association*, December 1984.

