

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

應用數位工具探討三角形三心概念
的教學成效

**A Study of the Effect on Applying Digital Tools into
the Teaching of the Circumcenter, Incentre, and
Centroid of a Triangle**

研究生：方淑美

指導教授：袁 媛教授

中華民國九十七年七月

應用數位工具探討三角形三心概念的教學成效

學生：方淑美

指導教授：袁媛博士

國立交通大學理學院在職專班網路學習組

摘 要

本研究主要是應用數位工具，針對九年一貫課程九年級數學「幾何」主題中「三角形的外心、內心、重心」單元進行教學設計，並以準實驗研究設計探討其教學成效。「軟體」採用謝銘祥(2007)利用 Flash 軟體開發輔助國中數學教師教學，並提供學生觀察與探索「三角形三心」的電腦輔助教學軟體；「硬體」採用教育部於民國 96 年「建構 E 化教學環境」補助方案配置的「互動白板」，提供教與學的互動平台。實驗研究主要發現如下：

- 一、不同學業成就及接受不同教學模式的學生，在數學學習成就的後測與延後測表現未具有交互作用。從主要效果來看，學生的數學學習成就表現，高成就組優於低成就組；高成就的實驗組不如控制組，低成就的實驗組比控制組好但未達顯著水準；高成就實驗組和控制組與低成就實驗組延後測皆高於後測，但是低成就控制組延後測卻比後測退步。
- 二、實驗組之高成就和低成就分組的學生對數位工具融入的教學模式均抱持正向的態度。在「解題方法與分享」、「電腦軟體與數學學科內容」、「數位工具操作方式」分項上，高成就組比低成就組具有顯著正向的認同，兩組學生在「分組問題討論態度」、「互動白板學習數學特色」則看法一致。高成就組在數學學習態度表現上優於低成就組，而且學生喜歡使用互動白板學習數學。
- 三、數位工具融入的教學模式，提供精確、可變異、動態連續變化及高互動的特性，會改變教材呈現的順序以及教師的角色扮演，特別是使用互動白板，學習活動的設計可以更多元化。

最後，根據研究結果提出建議以供教師教學及未來研究之參考。

關鍵詞：三角形三心、互動白板、幾何、國中學生

A Study of the Effect on Applying Digital Tools into the Teaching of the Circumcenter, Incentre, and Centroid of a Triangle

Student : Shu-Mei Fang

Advisor : Dr. Yuan Yuan

Degree Program of E-Learning College of Science National Chiao Tung University

Abstract

The study integrated digital tools into the design of instructional materials for 9th grader students' learning of an algebra unit, the circumcenter, incentre, and centroid of a triangle, and applied a quasi-experimental design to investigate the impact of this application on students' academic achievement. Students in the experimental group were given an attitude questionnaire to investigate their attitude toward this instruction. The digital tools included the geometry exploration software designed by Hsieh (2007) and the interactive white board (IWB). Research results were as following:

1. There was no interaction between experimental treatment and achievement level. No matter students from what achievement level (the higher achievement level or the lower achievement level), no significant difference was found between the digital tools integration group and the traditional group both on the posttest and the retention test.
2. Students from the higher achievement group and the lower achievement group all expressed their positive attitude toward the digital tools integration instruction. They all liked the use of IWB in learning mathematics. It seemed that students in the higher achievement group expressed more positive attitudes toward problem solving strategies and idea sharing, computer software and mathematics content, and the use of digital tools than students in the lower achievement group.
3. The digital tools integration instruction can support exact representations, dynamic and interactive learning environment. Teachers can focus more on their instructional role in teaching. The use of IWB help teachers design multiple learning activities.

Based on research results, suggestions for future study were proposed.

Keywords: Circumcenter, Incentre, and Centroid of a Triangle, Interactive Whiteboard (IWB), Geometry, Junior High School

誌 謝

在高職、國中任教十餘載，有機會重溫學生之生涯，實屬不易，感謝交大理學院在職專班提供教師在職進修的機會，讓我能藉由進修，向教授和教職的同學學習，開闊視野與視聽，再度激發教學的活力與動力，回饋於職場。

本論文能完成，全賴袁媛教授的耐心指導，從教授處學到的不只是做學問的嚴謹，還有待人處事之風範，以及悉心指導學生之涵養，讓駑鈍的我從摸不著頭緒，逐步踏循教授的指點迷津，終於完成不可能的任務。此外感謝李榮耀教授及單維彰教授在百忙之中，批閱與指正並提供寶貴意見。

研究期間，非常感謝E化團隊與楊光許多好同事的鼓勵與協助，讓我感受到生命中充滿貴人。更感謝家人的支持與關懷，兩個孩子懂事分攤家務，外子工作之餘幫忙照料孩子作全力的後盾，才得以順利完成學業。

研究所生涯中，要致謝的人很多，無法在此詳述，謹向所有關心我、協助我的人，表達最誠摯的謝意，並將感恩回報之心注入我未來的教學中，把這份情傳承給我的學生。



淑美 謹識

2008年7月

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌 謝.....	iii
目 錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的.....	5
第三節 名詞釋義.....	5
第四節 研究範圍與限制.....	6
第二章 文獻探討.....	7
第一節 Van Hiele 認知理論.....	7
第二節 幾何學習內容.....	11
第三節 資訊融入教學設計.....	16
第四節 互動白板.....	22
第三章 研究方法.....	31
第一節 研究流程.....	31
第二節 研究設計.....	32
第三節 研究對象.....	36
第四節 研究工具.....	37
第五節 資料分析.....	41
第四章 結果與討論.....	45
第一節 實驗教學對數學學習成就影響分析.....	45
第二節 實驗組學生學習態度的影響.....	49
第三節 應用「數位工具」融入教學及「一般講述教學」教學模式的 探討.....	57
第五章 結論與建議.....	67
第一節 結論.....	67
第二節 建議.....	70

參考文獻.....	73
附錄一 三角形三心教學活動設計表.....	79
附錄二 三角形三心學習單.....	87
附錄三 數學學習成就測驗試題(後測、延後測).....	96
附錄四 數學學習成就測驗試題(專家檢核).....	99
附錄五 課程意見調查表.....	104
附錄六 數學學習狀況問卷結果.....	106



表目錄

表 2.1 「三角形三心」教材的教學活動設計	13
表 3.1 實驗設計模式	33
表 3.2 實驗設計分組細格	34
表 3.3 實驗變項表	34
表 3.4 教學實驗流程	36
表 3.5 研究對象定期評量數學成績表現	37
表 3.6 「三角形三心」單元之「數學學習成就測驗」試題雙向細目分析表	38
表 3.7 學習成就測驗試題難度與鑑別度	39
表 3.8 課程意見調查表問題敘述改編前後對照表	40
表 3.9 課程意見調查表題目分項與信度分析	41
表 4.1 學業成就下實驗組與控制組前測、後測及延後測得分之描述統計表	45
表 4.2 各組學生在數學學習成就後測與延後測表現分析表	46
表 4.3 二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析摘要表	46
表 4.4 實驗組高成就與低成就組對課程意見調查各問題之獨立樣本 t 檢 定分析	49
表 4.5 高成就與低成就組對課程意見調查表各分項之獨立樣本 t 檢定分析	51
表 4.6 學生對「分組問題討論態度」的觀點	52
表 4.7 學生對「解題方法與分享」的觀點	53
表 4.8 學生對「電腦軟體與數學學科內容」的觀點	54
表 4.9 學生對「數位工具操作方式」的觀點	55
表 4.10 學生對「互動白板學習數學特色」的觀點	56

圖目錄

圖 2.1 教材地位分析.....	14
圖 2.2 角形三心軟體操作畫面.....	19
圖 2.3 學生做特殊三角形三心位置的探索.....	20
圖 2.4 互動白板架構圖.....	23
圖 2.5 教室互動情境中的分析.....	26
圖 3.1 研究流程圖.....	31
圖 4.1 教學模式與學業成就對數學學習成就後測影響之交互效果圖示 （以學業成就為個別線）.....	47
圖 4.2 教學模式與學業成就對數學學習成就後測影響之交互效果圖示 （以教學模式為個別線）.....	47
圖 4.3 教學模式與學業成就對數學學習成就延後測影響之交互效果圖示 （以學業成就為個別線）.....	48
圖 4.4 教學模式與學業成就對數學學習成就延後測影響之交互效果圖示 （以教學模式為個別線）.....	48
圖 4.5 學生旋轉學習單操作鈍角三角形外心的尺規作圖.....	58
圖 4.6 高成就控制組：學生上課情形.....	59
圖 4.7 高成就控制組：老師徒手用粉筆畫圖講解並用不同顏色粉筆補述... ..	59
圖 4.8 低成就控制組：上課情形(一).....	59
圖 4.9 低成就控制組：上課情形(二).....	59
圖 4.10 實驗組學生之間會互動討論.....	60
圖 4.11 實驗組學生專心注視著同學上台發表.....	60
圖 4.12 學生作圖：三中線不交於一點.....	61
圖 4.13 學生作圖：三中線保證交於一點.....	61
圖 4.14 學生操弄數位工具找外心.....	61
圖 4.15 學生操弄數位工具：不同種類三角形與外心的位置關係.....	62
圖 4.16 學生操弄數位工具：三角形與圓的關係.....	62
圖 4.17 學生操弄數位工具：三角形與圓的關係.....	63
圖 4.18 學生操弄數位工具：三角形三頂點與內心連線分成三個小三角形 與原三角形面積關係.....	64
圖 4.19 學生的證明過程.....	64
圖 4.20 學生操弄數位工具：重心在任一中線上的比例關係.....	65

第一章 緒論

本章旨在針對研究動機及背景，說明從事本研究的目的。全章共分四節：第一節為研究背景與動機，第二節為研究目的，第三節為名詞釋義，第四節為研究範圍與限制。

第一節 研究背景與動機

隨著時代變遷與資訊科技的日新月異，影響整個國家和社會、經濟、企業、生活品質等各方面之發展，更衝擊著教育環境的現場，無論教學者與學習者的角色、學校的軟體與硬體設備等皆有所轉變。世界先進國家為了保持資訊科技的競爭優勢，紛紛將提升教師與學生的資訊素養納入教育政策。而我國資訊教育推廣也行之有年：在民國86年起推動為期10年之「資訊教育基礎建設計劃」；民國88年開始執行「資訊教育基礎建設計畫」擴大內需方案，完成國中小電腦教學環境之建置，讓各校均有電腦教室且可連上網際網路(Internet)，並加強國中小全體教師的資訊素養(教育部，1999)；以及民國90年提出的「中小學資訊教育總藍圖」，勾勒「資訊隨手得，主動學習樂；合作創新意，知識伴終生」的整體願景，以因應時代的潮流(教育部，2001)。教育部於民國92年公佈的「國民中小學九年一貫課程綱要」，也將電腦資訊素養列入十大基本技能之一，試圖將「學電腦」轉至「資訊科技融入教學」，即將電腦視為學習工具，從「學術面向」轉移到「應用面向」(江蕙茹，2002)，資訊不再單獨設科，而列為六大議題，將資訊科技應用於各學習領域之中，課程設計以學生為主體，以生活經驗為重心，以培養現代國民所需的十大基本能力，其中「欣賞表現與創新」、「生涯規劃與終身學習」、「運用科技與資訊」、「表達、溝通與分享」、「主動探索與研究」、「尊重、關懷與團隊合作」及「獨立思考與解決問題」等能力的培養，皆與資訊融入教學有關(教育部，2003)。

根據 Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004)針對國二學生所實施TIMSS 2003 (Trends in International Mathematics and Science Study) 的調查報告中顯示，臺灣的國中二年級學生在數(Number)、代數(Algebra)、測量(Measurement)、幾何(Geometry)、統計(Data)這五大主題的表現都相當不錯，遠超過國際平均得分，但臺灣學生顯示有高

數學自信的人數百分比(26%)，遠低於國際平均水準(40%)，排名倒數第二。有低數學自信的人數百分比(44%)，遠高於國際平均水準(22%)，排名高居第二。換句話說，臺灣國中二年級學生相當缺乏學習數學的自信心。而臺灣學生在2003年對於「我喜歡學數學」這個問題的看法，相較於1999年的分析結果，「非常同意」的人數百分比顯著下降(從1999年的16%到2003年的13%)，而且均未達國際的平均水準(1999年25%，2003年29%)。至於「有點同意」的人數百分比也顯著下降(從1999年的42%到2003年的29%)，也均未達國際的平均水準(1999年44%，2003年36%)。臺灣學生對數學有高評價的人數百分比只有25%，中等評價人數百分比則有50%，低評價的人數百分比則是24%。這些看法與國際的平均差異甚大(高評價55%，中等評價35%，低評價10%)。總之，臺灣國中二年級學生在TIMSS 2003的整體表現還算不錯，與TIMSS 1999的結果相較也毫不遜色，但是從另一個角度來看，臺灣國中二年級學生的成就分布全距比其他國家大，在四十五個參與國家中與成績表現墊底的南非差不多，亦即好得很好，幾乎是所有全部參加者的最高分，差的學生得分表現在領先的前五個國家當中，卻是最後一名。這其中亦包含為數不少的一群是拒絕數學或學習遲緩的學生，再加上學生自信心不足，以及對數學的喜好程度低落來看，國內數學教育還是有相當大的改善空間(張秋男主編，2005)。譚寧君(1992)指出學生普遍知道數學的重要性，卻對數學存著恐懼感。邱俊仁(2003)發現數學焦慮對學生的學習成就與學習態度確實有負面的影響，對焦慮程度較高的學生進行訪談時，發現學生普遍認為數學老師上課的方式太過枯燥乏味，引起不了他們的學習動機和興趣，顯見傳統的數學教學方式往往不能引起學生學習數學的動機和興趣，因此教師適時改變其教學方式是必要的。

九年一貫數學領域課程綱要中，幾何為數學內容五大主題之一，幾何學具有悠久的發展歷史，Clements和Battista (1992)曾提出：幾何提供我們如何去闡釋與反映外在物理環境的一種方法，並且可作為學習其他數學和科學題材的工具，尤其更重要的是能加強幾何的空間思考，有助於高層次數學的創造思考(張英傑，2001)。然而相較於其他數學分支而言，幾何的學習成效並不理想，此現象各國皆然，美國尤甚之(Clements & Battista, 1992)。學習幾何除了可使學生獲得數、量、形的相關知識與處理幾何問題的一些基本技能之外，還可以培養學生思考、分析與推理等等的能力，以促進其解決日常生活之相關問題的能力，因此今日世界各國在數學教育中均極為重視幾何學(左台益、王惠中，2000)。國編版時代的幾何教學偏重形式上的證明和推導性質，而研究者亦常用文字、符號或靜態的圖片來表徵幾何圖形的概念，並用尺規作圖在教室進行講述教學，近年來各家數學版本教材設計了不少摺紙

的學習探索活動，讓學生能透過移動、旋轉、翻轉、切割、拼合等操作過程來發現幾何性質，也開發模型教具供操弄以增強學生空間能力；這些變革，企圖將單一靜態圖形轉為動態的方式呈現多元數學表徵。但是傳統國中幾何教學教師常面臨的困境是：教材教具準備不易、無多樣性及隨機性且無法重複使用，在幾何概念的建構以及從觀察、歸納而發現幾何性質的過程，常因多所限制而被忽略(謝銘祥，2007)。

尺規作圖很耗時，研究者在以往教國三學生「三角形三心」單元時，為了呈現不同三角形外心的位置，通常限於時間僅能用單一特例圖形代表呈現之，即銳角、直角、鈍角三角形各畫一個並作圖找出外心位置，實無法做到「任意」鈍角(直角、銳角)三角形外心位於三角形外部(斜邊中點上、內部)，若為了多畫幾個不同鈍角三角形，以印證並歸納「任意」鈍角(直角、銳角)三角形皆具相同性質，學生早就不耐煩於冗長耗時又乏味的尺規作圖，再加上後續的演繹推證，遑論提升學習的興趣。作圖應該要快速、精確，而且一定要能展現容易與清楚的特性，以呈現幾何性質間的關係，程序性的構圖交給電腦，教師可將重點著眼於概念的發展上，利用電腦構圖輔助教學，可有助於學生的幾何學習 (Clements & Battista, 1992)。

對於幾何的學習，依Van Hiele 幾何思考的五個層次，國中階段學生大部分未達到層次三，葉福進(2005)提出他在實際教學經驗中，發現國三學生可以達到形式證明的約為三成。呂益昇(2005)提出國三學生的幾何思考層次處於非形式演繹過渡至形式演繹期，學生的論證能力不足必會造成學習上的困難。就研究者教學經驗而言，國三學生學習幾何到了「三角形三心」單元需承接前面所學的三角形和圓的性質，若前面沒有建立起學習自信心或學習成就表現低落，易造成失去學習興趣與畫地自限的排斥心態。因此，以學生為主體的教學設計是本研究的出發點。

評估研究者教學現狀，所教的國三學生數學課從國二起就採分組教學，同一群教師需同步上課，因此調課很吃力，再加上研究者學校九個年級中，從三至七年級有安排固定使用電腦教室的時間，即全校的兩間電腦教室除了30班固定使用時間、學生社團時間、教師研習時間與維護時間外，幾無多少剩餘時間可供使用，若要搭配課程進度去上機實屬不易。就目前的動態幾何輔助教學軟體中，以動態幾何繪圖軟體GSP(Geometer's Sketchpad)最受教師與學生的歡迎，透過軟體的操作，不但能節省繪圖時間，更可簡易地構造動態幾何圖形。根據胡凱華(2001)、林星秀(2001)、戴錦秀(2002)、吳鳳萍(2002)、林佳慧(2003)、陳裕亮(2003)、鄭志明(2003)、余麗惠(2003)、郭昭慧(2004)等多位研究者，利用GSP輔助幾何教學學習表示實驗組學生對於使用電腦輔助學習持正向肯定態度。但是本研究考量到實驗組學生之前並未使用過動態

幾何輔助教學軟體，要學生產生操作熟悉度是需要時間的，學習探索活動的時間必須足夠，才能讓學生有充份操作與探索的機會(尤冠龍，2006)。況且實驗組為國三學生面對升學壓力，一旦電腦輔助教學的時數過多，唯恐影響到正常的教學進度。而且評估電腦教室授課需克服老師與學生互動不足的現象(尤冠龍，2006)，以及在電腦教室中需要瞭解學生的學習情形，適時協助學生處理問題，常會分身乏術，造成學生有失序現象；學生會利用研究者不注意的時候，連結網路遊戲或去上無關於數學的網站(曾尹姿，2005)，謝銘祥(2007)提出以GSP來讓學生操作會讓教學過程很混亂，最常遇到的問題就是學生胡亂操作後存檔才發現無法回覆原始狀態(即使提醒再三仍會如此)，無法有效掌握教學進度，且每台學生用電腦還需備有GSP主程式，不是很方便。根據尤冠龍(2006)的建議，能有系統地開發以GSP幾何繪圖軟體為主的主題探究教學模組，將更有利於未來利用GSP軟體進行數學的教學。因此本研究數位工具中軟體部分採用謝銘祥(2007)利用Flash所開發的「三角形三心」工具，其特點為可利用電腦與投影機設備在班級教室上課，軟體的設計根據學習理論以及九年一貫課程綱要數學學習領域與「三角形三心」相關之能力指標和分年細目，操作簡單、方便、易上手，為可觀察、探索之模擬式電腦輔助教學軟體，既擷取電腦輔助教學的優勢更契合學生學習「三角形三心」幾何單元的目標。數位工具硬體部分採用具有互動性之電子白板設備，此乃96學年度起，教育部計畫在「建構E化教學環境」方案之下，補助部分縣市試辦互動白板導入教室教學，並鼓勵逐步發展學科領域學習中心(Learning Center)(陳惠邦，2006)。研究者任教之學校於2007年亦獲補助建置「E化教室」安裝互動白板(Interactive WhiteBoard)。藉由此設備，讓師生能在互動白板前操作「三角形三心」軟體並作主題式探索，全班學生可清楚地看到詳細的操作過程並互相見習，呈現老師與學生、學生與學生、學生與教材高互動學習之對話情境。

根據研究文獻顯示，技術支援、教師專業發展、教學資源與數位內容是互動白板導入教室教學成功的三項關鍵因素(陳惠邦，2006)。因此在進行本實驗之前，研究者在任教學校跟著E化團隊進修，重新檢視教學活動設計與實際教學的進行，以提升專業成長。基於上述的研究動機，研究者將資訊科技應用在教學與學習的活動中，最主要是達成「三角形三心」幾何單元的數學能力指標。選擇主題式的軟體教材，提供互動教室討論空間，規畫以學生為主體的學習情境，透過軟體與硬體的操弄與探索，提升學生學習數學的興趣。

第二節 研究目的

根據上述研究背景及動機說明，本研究希望結合軟體與硬體之數位工具融入國中九年級數學「幾何」主題中，「三角形的外心、內心、重心」進行教學設計，並以準實驗研究設計探討其教學成效。因此，主要的研究目的有三：

1. 探討應用數位工具融入三角形三心單元的教學，對學生數學學習成就的影響。
2. 探討應用數位工具融入三角形三心單元的教學，對學生數學學習態度的影響。
3. 比較數位工具融入三角形三心單元的教學模式與一般講述教學模式的異同。

依據上述研究目的本研究欲探討下列問題：

1. 學業成就不同的學生在不同的教學模式下，對數學學習成就之後測與延後測是否產生的影響為何？
2. 實驗組高低成就分組的學生，在實施數位工具融入三角形三心單元之後的數學學習態度調查結果有何異同？
3. 數位工具融入三角形三心單元的教學模式與一般講述教學模式有何異同？

第三節 名詞釋義

一、三角形三心

本研究之教學內容，採用九十六學年度國民中學三年級上學期康軒版本第三章第二節「三角形的外心、內心、重心」單元。主要教學目標為：

1. 能知道三角形三邊中垂線的交點就是外心，並了解外心的性質及外心與外接圓的關係。
2. 能知道三角形三內角平分線的交點就是內心，並了解內心的性質及內心與內切圓的關係。
3. 能知道三角形三中線的交點就是重心，並了解重心的性質。
4. 能知道特殊三角形三心的關係。

二、一般講述教學

本研究中的控制組有兩個班進行一般講述教學，一般講述教學所指的是教師在一般班級教室內利用講述式的單向教學模式，教學的過程中，教師僅使用粉筆與尺規作圖教具，並無多媒體教學或是資訊融入的情形。

三、數位工具

本研究中的數位工具分為軟體與硬體兩部分：

「軟體」採用謝銘祥(2007)利用Flash軟體開發輔助國中數學教師教學，並提供學生觀察、探索的「三角形三心」電腦輔助教學軟體；「硬體」採用E化教室配置的「互動白板」，互動白板是一個觸控式的顯示板，連接電腦和投影機，可作為電腦的輸出與輸入器，因而提供教與學的互動介面。

四、數學高成就與低成就

依據教育部於民國 94 年發佈的「國民小學及國民中學常態編班及分組學習準則」，國中八年級學生得就數學學習領域，以二班為一群，依學生學習特性，實施年級內之分組學習。本研究對象為四個班級，依其國中八年級六次學期評量數學學業成績在同一群較高者為高成就，較低者為低成就。

第四節 研究範圍與限制

本研究屬於準實驗研究，以桃園縣某國中九年級的四個班級共 136 位學生為主要的研究對象，由於研究者受限於時間、經費、人力等因素，而且在 E 化教室僅能使用單機投影至互動白板上，對於研究者採用數位工具融入數學教學模式可謂初次嘗試，所以在研究結果僅能推論至與此研究範圍相類似者。

第二章 文獻探討

本章針對研究主題之相關文獻詳加闡述。全章共分四節：第一節為 Van Hiele 認知理論，第二節為幾何學習內容，第三節為資訊融入教學設計，第四節為互動白板(Interactive Whiteboard, IWB)。

第一節 Van Hiele 認知理論

近年來世界先進國家大都以荷蘭數學教育家 Dina Van Hiele-Geldof 和她的丈夫 Pierre Marie Van Hiele 在 1957 年提出的幾何學習發展理論為根據，設計幾何方面的教材。Van Hiele 夫婦認為一個人幾何概念思考模式可以分成五個發展層次，每個層次有其發展特徵。

(一) 第一層次：視覺期(visualization)

此階段學童可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形。透過視覺觀察具體實物，以實物的整體輪廓來辨認圖形，在視覺下差異不大的圖形，他們可以透過移動旋轉等方式辨識，可以使用非標準語言或標準數學術語描述物件的形狀，如像門的形狀為長方形，像盤子的形狀為圓形。處於此發展階段的兒童雖然知道物件的形狀何者稱為「正方形」、「三角形」、「圓形」、「長方形」，卻不能瞭解其真正定義。因此，這階段的學童宜多安排感官操作的活動，讓兒童透過視覺進行分類、造型、堆疊、描繪、著色等活動獲得形體的概念。運思對象：個別幾何圖形。

(二) 第二層次：分析期(analysis)

此階段的學童可以從圖形的構成要素以及構成要素之間的關係分析圖形，並且可以利用實際操作（如折疊、尺量，以格子觀察或設計特別的圖樣）的方式，發現某一類圖形的共有性質或規則。他們已具有豐富的視覺辨識經驗，能察覺到長方形有四個邊、四個角，且有兩個長邊、兩個短邊及對邊相等的特性，但不能解釋性質間的關係，如知道菱形的四邊均相等，正方形有等長的對角線，但卻不能理解兩類圖形之間的包含關係。此階段的學童，宜安排一些製作及檢驗的活動，使其能從製作與檢驗中獲得圖形的性質概念。運思對象：各類幾何圖形概念。

(三) 第三層次：關係期(relation)或非形式演繹期(informal deduction)

此階段兒童可以透過非正式地論證將先前發現的性質和規則邏輯地互

相聯結起來，但對證明沒有整體了解，無法組織系列的敘述來檢驗觀察的結果，能進一步探索圖形內在屬性關係及各圖形間的包含關係，如四邊形兩雙對邊相等即是平行四邊形，而不必將所有屬性均描述出來才能確認其圖形。在瞭解圖形內在關係後，可以建立長方形是平行四邊形的一種；平行四邊形中，有一個角為直角時，此四邊形即為長方形；可以知道 n 邊多邊形的內角總和為 $(n-2) \times 180$ 度等概念。運思對象：各類幾何圖形的性質。

(四) 第四層次：形式演繹期(formal deduction)

達此階段者，能用演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理的網路結構。他們可以在一個公設系統中建立幾何理論，他們不只是記憶圖形的性質，而且能夠證明，並瞭解一個證明的可能性常不只一種方法。可以理解一個定理的充分或必要條件之內在關係，發現正逆命題間的差異性。例如：能瞭解正五邊形邊長均相等，內角亦均相等，但邊長均相等的五邊形不一定是正五邊形。運思對象：幾何圖形性質的邏輯關係。

(五) 第五層次：嚴密性(rigor)或公理性(axiomatic)

達此階段的人，可以在不同的公理系統中建立定理，並且分析比較或欣賞這些系統的特性，了解公設系統中的性質，如一致性、獨立性及完全性等。例如能區別歐氏幾何與非歐幾何的差異，也可瞭解抽象推理幾何，甚至可自創一種幾何公設系統。此層次一般人很難達到，即使是以數學為專業者亦不易達成。然而 Usiskin(1982)發現此層次不是不存在就是不可測驗的。運思對象：幾何圖形性質的邏輯關係之根基。

Van Hiele 層次的幾何思考模式有其特性。Usiskin(1982)將思考層次的特性分為固定順序(fixed sequence)、毗鄰(adjacency)、特質(distinction)、分離(separation)、達成(attainment)；Crowley(1987)則分為連續性(sequential)、進展性(advancement)、內在與外在(intrinsic and extrinsic)、語言(linguistics)、不協調(mismatch)。根據兩位學者的說法將其綜合敘述如下：

1. 序列(fixed sequence/sequential)

學生幾何層次的發展有其順序性，學生要到達層次 n 前，必須先經歷過層次 $n-1$ 。亦即要在某個特定層次成功地發展，必須要掌握先前層次的概念和思維策略。

2. 進展(advancement)

從層次到層次的進展依賴教學方法與內容的程度比依賴年紀的增長更多；沒有教學方法可使學生跳過一個層次；「一個層次到另外一個層次的轉變並非是自然的過程，它是在教與學的課程計畫的影響所產生的」(Van Hiele, 1986, p.50)；某些教學方法可以促進進展，某些則可能延緩甚至阻礙層次的轉移。

3. 語言(linguistics)

每個層次都有其獨特的語言符號，以及連結這些符號的關係系統，學生進入下一層次時需重新調整或修正。例如層次三時教師接受學生利用口語或操作的方式進行說明，到了層次四即不能接受這樣的論述方式，需轉化成形式證明的模式。

4. 內在與外在(intrinsic and extrinsic/adjacency)

前一層次設定的能力與知識，在下一層次將隱藏而成內在物件，學生不需刻意思索便能自然的操弄或提取。例如層次一時知道正方形的外貌與名稱，到了層次二分析其性質時，外貌與名稱就成了內在的理解。

5. 不協調(mismatch)

如果學生是在某個層次而教學是在不同的層次，則預期的學習和發展可能不會發生。特別當教師、教學的材料、內容和字彙…等是在比學習者更高的層次時，學生將不能跟隨所使用的思考過程一同進行著。例如：教師以形式證明的方式進行教學，當學生只停留在實驗說明的階層，教師與學生是無法溝通的，學生在無法理解的情形下學習當然沒有效果。

為了促使學生從一個思考層次提昇到另一個較高思考層次，Van Hiele提出「五階段學習模式」(five-phase learning model)，提供教師適當的教學方法以協助學生進行學習。分別為：

第一階段：學前諮詢(information)

教師在教學之前，先與學生雙向溝通，教師經由觀察與發問，來了解學生已具備那些知識，藉以作為教學準備之參考。

第二階段：引導學習方向(guided orientation)

教師引導學生探索、操作（例如：排列、組合、積木、摺紙等活動），在學生探索活動過程中，教師宜有計畫的依序引導學生，使其了解幾何的概念。

第三階段：解說(explicitation)

這個階段的學生，已逐漸了解幾何圖形的關係，教師引導學生討論學習的主要內容，學生們藉由課堂上討論及觀察，建立其學習經驗，並利用正確和合適的字彙和語言符號來表達，使其幾何概念提升到理解的層次。

第四階段：自由探索(free orientation)

進入這個階段的學生，大多數是知道學習的範圍，但仍需迅速地找到學習方向，教師可以選擇適當的教材以及幾何問題，鼓勵學生思考與解答這些幾何問題。學生在不同的方式上遭遇更多複雜且有許多步驟的課題，若是靠自己解決這個課題時，將獲取經驗，並在概念的研究主題中，作出了許多明確的關連性。

第五階段：統整(integration)

最後的階段是統整，學生試著糾正自己並濃縮學習過的概念與知識，整合探索與討論的經驗以形成完整的新概念。教師此時不再呈現任何新的事物給學生，只需摘要地擷取一些學生已經知道的東西，供給「整體的概念」來幫助學生印證與調整，以免妨礙學生對此概念形成共識。

國內外很多的研究者對於教師教導與學生學習幾何概念時，多以Van Hiele 層次的理論和特性，考驗其研究之適當性或提出批判。Burger 和 Shaughnessy (1986) 指出，發現學生的行為和 Van Hiele 夫婦原先對於層次行為的描述大致是符合的，但是對於將學生指派到單一的層次，亦即層次是離散的看法，則有一些質疑。在對幼稚園學生到大學生的訪談過程中，有學生在不同的問題中，顯現出不同的思考層次，甚至有的學生在相同的問題也有從一個層次變動的另一個層次的行為發生，特別是在層次二(分析)和層次三(抽象)。Usiskin(1982)發現在層次間轉換的學生難以有效的分類。而 Mayberry(1983)指出學生在不同的概念會有不同的層次。利用Van Hiele的教學理論，吳德邦(1995)發現對於我國師範學生，在非歐幾何學教學上採用Van Hiele五階段學習模式教學法比採用傳統的講授式教學法，更能產生較高的幾何思考層次，而其數學學習成就也比採用傳統教學法顯著來得高。劉湘川、劉好、許天維、易正明(1993)以國小學生中年級學生為研究對象，來進行個別的訪談，發現學生在六項基本幾何概念的思考模式與Van Hiele 的理論是一致的。林永發(1998)認為Van Hiele理論和學生的幾何臆測理論型態基本上是相容的，足以刻畫學生的幾何臆測思維型態；其中層次一的學生能做視覺式的臆測，層次二的學生能做分析式的臆測，層次三的學生能作命題式的臆測。

綜觀上述理論與研究，Van Hiele 五個思考層次的發展是有其次序性，學習者需擁有前一層次的各項概念與策略，才能有效進行下一層次的教學活動；而層次的發展與年齡無關，但是年齡卻與我們所擁有的幾何經驗型態有關；幾何經驗是進入下一個思考層次的重大影響因素，同時由於教材內容屬性的差異，會影響學習者落入不同層次中，因此層次分析可以發現學生的學習障礙，當學生處於較低層次時，遇到較高層次的字彙、概念、性質及思考方式的問題，可預期到學生因學習層次無法提升，而易產生焦慮降低學習動機。因此根據 Van Hiele(1986)的理論，教師需透過對學生的觀察與本身的教學經驗，釐清學生所屬的層次，並依此層次對應的認知能力設計適當的教學內容與教學方式，才能產生良好的教學成效。國中時期學生對幾何的學習階段正處於分析期、或達到非形式演繹期之間，在這一階段中，學生的學習由具體的操作到能作非形式化推論的過渡時期，因此，

如何協助學生提升數學的推理證明能力就顯得很重要。陳創義(2003)指出，國中生對圖形的認知與分類並不成熟，容易受到腦中概念心像的影響，偏重於概念心像，而概念心像與概念定義間的溝通，還不通暢。尤其是在 Van Hiele 幾何思考層次尚未完全達到形式演繹期的學生來說，概念心像比概念定義扮演了更重要的角色，因此教材內容視覺化仍有其必要性(曾尹姿，2005)。因此本研究嘗試將此理論與跟幾何學習有相關的三角形三心單元結合在一起，在教學課程規畫時，適度融入數位工具輔以瞭解學生的幾何思考層次，期望有助於學生的學習。

第二節 幾何學習內容

根據教育部於民國92年公布九年一貫課程綱要能力指標，在數學領域將九年國民教育區分為四階段：階段一為一至三年級，階段二為四、五年級，階段三為六、七年級，階段四為八、九年級。另將數學內容分為數與量、幾何、代數、統計與機率、連結等五大主題。

(一)幾何課程可概分為四階段：

1. 階段一(一年級到三年級)：較強調幾何形體的認識、探索與操作，學生對幾何形體中的幾何要素，也許能指認，但尚不清楚其結構意義。
2. 階段二(四年級到五年級)：由於數與量的發展逐漸成熟，學生開始結合「數」與「形」兩大主題，學習運用幾何形體的構成要素(如角、邊、面)及其數量性質(如角度、邊長、面積)。
3. 階段三(六年級到七年級)：透過形體的分割、拼合、截補、變形及變換等操作，來了解形體的性質與幾何量的計算及非形式化推理。透過方位描述及立體模型的展開與組合以培養空間能力及視覺推理。
4. 階段四(八年級到九年級)：開始由具體操作情境進入推理幾何情境中，最終目標是學會推理幾何證明，學習內容採漸進式安排，由基本幾何概念進入較深入的幾何推理領域中，學習方式最開始可由填充式推理幾何，慢慢養成完整能力，讓學生有能力及信心，快樂地學習幾何學領域的知識。教材內含有認識生活中的平面圖形，如三角形、四邊形、多邊形、圓形；認識點、線、角、符號及幾何相關名詞；使用基本性質描述某一類形體；能以最少性質對幾何圖形下定義、並熟練定義的相關操作；體會邏輯概念：包含關係、敘述及逆敘述、推理幾何；求角度問題、長度問題、面積(表面積)問題、體積問題；推理證明、尺規作圖、全等性質、相似性質、平行性質的應用、圓的相關性質。

國中八至九年級幾何課程的學習仍以學生已有的幾何直覺經驗為前導，但強調主體或觀念的明確定義，及幾何量的代數運算。因此學習的內容是由非形式化的推理逐漸提昇至形式化的推理。研究者以教育部(2003)所訂定「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」和本研究三角形三心單元相關的能力指標及分年細目與詮釋作陳述。

(二)「三角形三心」單元相關的能力指標(括號內)及分年細目與詮釋

9-s-08 能理解三角形外心的定義和相關性質。(S-4-13、S-4-14、S-4-15)

說明：過三角形三頂點的外接圓圓心稱為三角形的外心。

理解三角形的外心至三頂點等距離。

理解直角三角形斜邊中點到三頂點等距離。

9-s-09 能理解三角形內心的定義和相關性質。(S-4-13、S-4-14、S-4-15)

說明：三角形內切圓的圓心稱為內心。

理解三角形的內心至三邊等距離。

設 $\triangle ABC$ 周長 s ，內切圓半徑 r ，則 $\triangle ABC$ 的面積 = $sr/2$ 。

直角三角形中，內切圓半徑 = (兩股和 - 斜邊) $\div 2$ 。

9-s-10 能理解三角形重心的定義和相關性質。(S-4-15)

說明：三角形三條中線必相交於同一點，這個點稱為三角形的重心。

理解三角形的重心到一頂點距離等於它到對邊中點的兩倍。

理解三角形三條中線將三角形面積六等分。

9-s-11 能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。(S-4-15)

說明：幾何推理：是以『已知條件』及『已知為正確的幾何性質』，推導出結論，這個過程稱為『證明』。

教學時可利用填充證明題開始，進而慢慢可獨立完成推理幾何證明的寫作，但推理步驟不宜過多。

教學時可以垂直平分線性質、角平分線性質等來學習推理。

學習推導三個內角分別為 30 度、60 度、90 度及 45 度、45 度、90 度的直角三角形邊角關係，可為高中職課程中三角函數的學習基礎。

學習推導正三角形面積及高的計算公式。

檢視指標的範疇與參考康軒版數學教科書，為了教學之流暢將課程活動結合數位教材之進行如下表 2.1，並依此編製學生學習單。

(三) 表 2.1 「三角形三心」教材的教學活動設計表

主題	教學活動	節數
1. 三角形的外心	<p>(1)三角形外心的存在及外心到三頂點等距離，此距離為外接圓半徑，外心為外接圓圓心。</p> <p>(2)三邊中垂線會交於同一點就是三角形的外心。</p> <p>(3)銳角三角形的外心在三角形內部，鈍角三角形的外心在三角形外部，直角三角形外心在斜邊的中點上。</p> <p>(4)圓內接三角形任兩邊中垂線的交點(外心)即為圓心所在。</p> <p>(5)任意一個三角形可畫出一個外接圓，任意一個圓可畫出無限多個內接三角形。</p> <p>(6)圓內接三角形的一邊為直徑時，此三角形必為直角三角形，反之，圓內接三角形為直角三角形時，其斜邊必為直徑。</p> <p>(7)圓內接直角三角形中，外接圓半徑 $R = \text{斜邊} \div 2$。</p> <p>(8)銳角$\triangle ABC$中，外心 O 與任兩頂點 B、C 連線的夾角 $\angle BOC$ 與第三個頂點 A 內角度數關係為 $\angle BAC = 2 \angle BOC$。</p> <p>(9)鈍角$\triangle ABC$中，外心 O 與任兩頂點 B、C 連線的夾角 $\angle BOC$ 與第三個頂點 A 內角度數關係為 $\angle BAC = 360^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC$。</p>	3 節
2. 三角形的內心	<p>(1)三角形內心的存在及內心到三邊等距離，此距離為內切圓半徑，內心為內切圓圓心。</p> <p>(2)三角形三內角平分線會交於同一點就是內心。</p> <p>(3)任意三角形的內心在三角形內部。</p> <p>(4)能了解三角形內心與內切圓的關係。</p> <p>(5)圓外切三角形任兩角平分線的交點(內心)即為圓心所在。</p> <p>(6)任意一個三角形可畫出一個內切圓，任意一個圓可畫出無限多個外切三角形。</p> <p>(7)設$\triangle ABC$周長 s，內切圓半徑 r，則$\triangle ABC$的面積為 $sr/2$。</p> <p>(8)直角三角形中，內切圓半徑 $= (\text{兩股和} - \text{斜邊}) \div 2$。</p> <p>(9)$\triangle ABC$的內心$I$與任兩頂點$B$、$C$連線的夾角$\angle BIC$與第三個頂點$A$內角的度數關係為 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$。</p>	3 節

(續後頁)

表 2.1 「三角形三心」教材的教學活動設計表

(接前頁)

3. 三角形的重心	(1)能發現三角形重心的存在，重心必在三角形內部。 (2)能知道三角形三中線的交點就是重心。 (3)能了解重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍。 (4)三角形重心到一頂點的距離等於過該頂點之中線長的三分之二。 (5)三角形的重心與三頂點連線將三角形的面積三等分 (6)三角形的三中線將此三角形的面積六等分。	3 節
4. 特殊三角形的三心關係	(1)等腰三角形的三心位置必在底邊中垂線(中線)上或頂角平分線上。 (2)正三角形的外心、內心、重心是一點。 (3)直角三角形的外心到重心的距離是斜邊長的 $\frac{1}{6}$	1 節

本單元教材已是國中幾何學習階段的壓軸，在 Van Hiele 五階段學習模式的第一階段「學前諮詢」中表示：了解學生已具備那些知識，藉以作為教學準備之參考。因此教師需掌握前面學生所學之先備知識，分析本單元所處的教材地位，方能在教學準備時，留意學生的學習狀況，並協助學生解決困難。

(四)本研究單元的教材地位如圖 2.1：

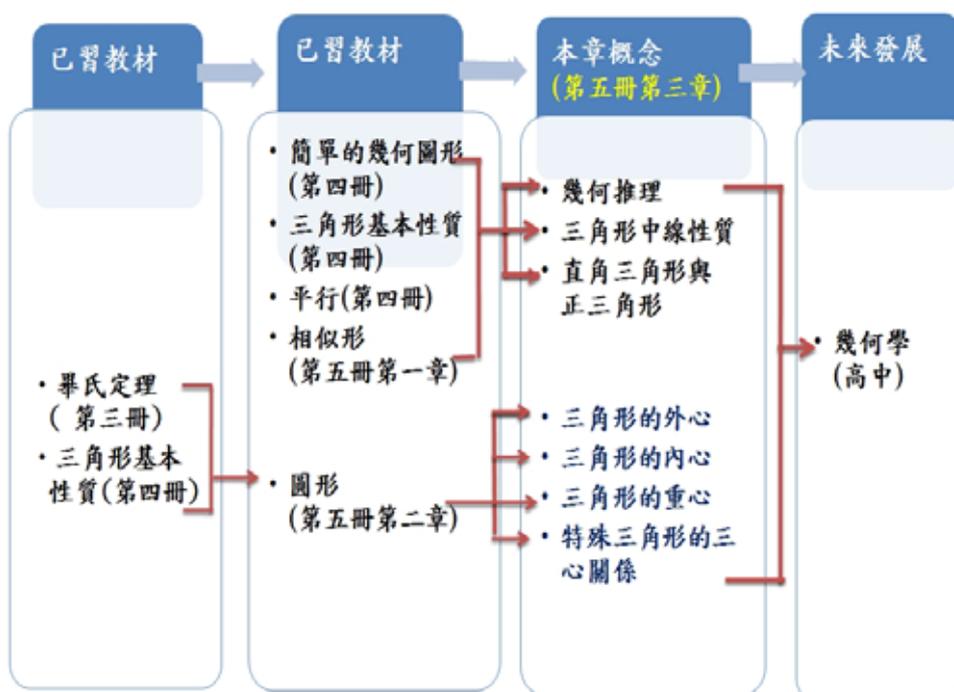


圖 2.1 教材地位分析

本實驗教學「三角形三心」教材是國中階段幾何學習的最後一個單元，從八年級開始學習幾何圖形的基本性質，到九年級逐步引入推理證明，最後在「三角形三心」單元，三角形和圓的圖形結合，將學習的內容由非形式化的推理逐漸提昇至形式化的推理，以奠定日後到高中幾何學學習的基礎。

(五)三角形三心的相關研究

查詢國家圖書館之全國博碩士論文資訊網及交通大學理學院網路專班紙本論文，相關於研究「三角形三心」主題的論文共有四篇(粘憲昌，2004；郭昭慧，2004；呂益昇，2005；謝銘祥，2007)，研究者從上述相關的研究依教學對象設計教材和呈現的教學效果進行分析。

1.依教學對象設計教材：

基於Van Hiele層次的幾何思考模式特性中，學生和教學是在不同的幾何認知層次，則預期的學習和發展可能不會發生，教材的設計需考量研究對象和背景，才能適度規劃符合學生的學習需求。郭昭慧(2004)針對國一學生設計電腦的GSP 幾何輔助課程，當時學生僅具備基本三角形的性質，所以教材由中垂線性質介紹到外心的形成，角平分線性質介紹到內心的形成，利用動態模擬的特性，呈現物件真實的旋轉或變換過程，加深學生對幾何圖形的印象。謝銘祥(2007)利用Flash軟體開發可輔助國中數學教師教學並提供學生觀察、探索的「三角形三心」幾何課程的電腦輔助教學軟體，對國三數學學習低成就學生7人進行補救教學。呂益昇(2005)亦認為先提供圖形讓學生察覺現象，引入學生熟悉的性質，解釋構圖的原理與存在性，然後提示不熟悉的性質，證明所發現的現象，或以圖形的操作解釋(非形式論證)，最後完成證明。是故在國三屬於高成就表現之特殊班級學生進行補救教學，先診斷學生學習困難點，設計以「類比遷移」、「局部推理與模仿」教學策略逐步引導學生跨越論證能力不足造成學習的困難。粘憲昌(2004) 針對國三學生分別探討學生在詮釋導向與探索導向的學習任務中所呈現的學習特徵與學習成效，參與實驗的學生經能力分組為全校27個班的前段7個班當中的2個班級。

此亦即說明上述研究者在幫助學生跨越幾何思考層次時，會從建立圖形的心像著手，提供實際操弄圖形的經驗，培養觀察與非形式論證的能力、以建立數學思考模式。

2.呈現教學效果：

四位研究者教學目標皆希望利用所設計的教材，激發學生主動學習數學和培養解決問題的能力，經實驗之後各有不同之效果。郭昭慧(2004)所得結果中實驗組的學生在圖形表徵的試題答對率優於控制組；但代數表徵的試題答對率並未因GSP輔助教學而提升。實驗組中分群學生在數學學習成效上，

明顯優於控制組中分群學生，而高低分群學生則不顯著。謝銘祥(2007)得知參與電腦輔助補救教學的學生在數學學習成就測驗上後測成績顯著優於前測成績。參與電腦輔助補救教學的學生比未參與電腦輔助補救教學而自行複習學生進步。實施電腦輔助補救教學可以提高學生的學習興趣，增加學生的學習信心。粘憲昌(2004)之詮釋和探索導向學習任務的連結方面兩者表現相若；解題方面兩者亦都提升了。學習品質方面兩者的學習焦慮皆顯著下降，但在動機、信念、互動等向度兩者提升情形有顯著差異。呂益昇(2005)對高成就學生之補救教學給予正面的肯定且有效的使學生由形式證明的渾沌狀態趨向明朗化，並有效的協助學生解決學習困難。而呂益昇(2005)亦提出國三學生「外心與內心概念」學習困難的主要原因有：

- a. 未能以正確、完整的數學語言或符號描述圖形或數學專有名詞。
- b. 未能將所學的知識整理成有系統的概念幫助學習。
- c. 論證觀念不完整，文字表徵與形式論證的能力不足。
- d. 缺少相關的解題經驗，沒有主動繪製參照圖的習慣。
- e. 未熟悉預備知識，缺乏利用已知性質推理的能力。

因此電腦動態圖形輔助教學對於幾何初學者或無法理解平面教材內容者，提供直觀視覺化的環境以提昇學生的學習動機，讓學生具有探索、歸納與分析的經驗更奠定幾何推理論證之基礎。此亦印證Van Hiele所說，一個層次到另外一個層次的轉變並非是自然的過程，它是在教與學的課程計畫的影響所產生的。從以上研究者對於三角形三心的教學，皆致力於教學方法、導向及工具的應用，以解決學生學習的困難度。但由於課程內容的過於抽象化，使許多學生無法建立正確的幾何概念，而產生許多錯誤的概念(何森豪，1999)。近幾年來，仍有不少的研究指出幾何教材教學上需要改進的一些缺失，譚寧君(1993)指出「形的教材」表面上已成功，然而事實上學生只是強記了許多抽象的公式，而無法透過實際的操作與推理來建立正確的幾何學概念，也因此而阻礙了未來在推理幾何上的學習。因此本研究參考上述論文的未來研究建議，利用數位工具融入教學，藉由活動讓學生探索、觀察、歸納以獲知數學性質；並由學生合作學習討論，以非形式或形式論證的方式說明或證明；練習用數學語言明確表達自己的想法與同學互動溝通；進行數學的批判分析與解讀；藉由圖形觀察或察覺規律進而發現與欣賞數學的美。以配合數學「圖形與空間」的課程目標和培養相關的數學能力。

第三節 資訊融入教學設計

幾何圖形在幾何學習與解題活動中扮演著重要的地位然而幾何圖形亦

有可能產生一些負面的影響 Harada、Gallon-Dumeil 與 Nohda (2000)等人便指出這些負面的影響至少有三個：

1. 圖形使人產生錯誤的視覺判斷。
2. 圖形缺乏動態的觀點(dynamic viewpoints)。
3. 賴典型例。

Schattscheider (引自黃哲男, 2002) 亦指出不精確的圖形會造成解題的錯誤，而單一的圖形有時候對解題較不具啟發性。研究者發現有些學生在尺規作圖時，由於基本概念尚未建立清楚，會因為操作不正確或作圖的誤差而產生質疑，在畫過特定圖形時卻無法推論至任意三角形的通論，但是卻已見課本所下的結論，或全盤接受或半信半疑或否定自己的作圖事實，將結論強迫儲存於記憶中。這亦即造成用死記法學數學，缺乏主動發現的樂趣，又怎能提升學習數學的動機呢？幾何不僅處理“數”的問題還處理“形”的問題，包含圖形的辨識與操弄傳統的幾何教學常忽略這些環節，而特別注重演繹推理，結果適得其反。致使學生因學習的挫折感而失去信心，轉而訴諸記憶式的學習。當龐大的記憶超過學生所能負荷的極限時，學生怎麼不會因而視學習為畏途？因此本研究利用電腦輔助教學的優勢以融入教學，並將考量的因素與課程規劃進行探究。

一、電腦輔助教學之軟體考量因素

電腦輔助教學是利用電腦一些相關科技來設計一套教學或學習的材料，協助教學者從事教學，或提供學習者自行操作學習的環境，使學生能依照自己的能力調整進度，並利用電腦多媒體以及立即回饋等特性，提高學生的學習動機及學習成效的一種教學方式(王全世, 2000)。資訊科技的應用，幫助引導學生作進一步的學習，視電腦為認知學習的工具。融入此類工具的主要目的是在於促使學習者主動建構知識，以反應其對知識概念的理解程度(Jonassen, 1996)。有了電腦作為動態學習的輔助教學工具，加上優良的互動式軟體，不僅能夠簡單地呈現數學的動態圖形，或以編序教學為理論基礎之傳統電腦輔助教學，它也提供動態模擬、圖形變換的功能，同時誘發學生主動學習、操作、嘗試及實驗的興趣，如此我們才能兼顧數學「認知的發展」(李政豐, 2003)。因此電腦輔助教學，並利用資訊科技的特性，使傳統的教學型態改變，提昇教學品質。

教學輔助軟體是資訊融入教學的重要工具之一，輔助教學軟體可分單機操作或連線操作方式，因此選擇適當的軟體來輔助學習是極為重要的，張國恩(1999)提供下列參考因素：

1. 認知理論的學習環境：CAI 軟體和遊戲軟體的差別是否具有認知理論，選擇適當的CAI 軟體首要條件是學習的內涵與學習目標的達成程度，避

- 免學習者迷失在多媒體技術的賣弄和趣味性的強調，而忽略學習的本質。
2. 視覺化或情境化的教學工具：教師在教導抽象概念或描述真實情境應與學生實際生活經驗結合，以達到學生有意義的學習；將軟體視為視覺化或情境化的教學工具，有助提升概念化的歷程。
 3. 模擬軟體的應用：有些教材描述了與學生生活經驗脫離的知識，例如身體內的血流變化、天文星座、飛翔感覺、電腦運作、自然現象等，這類內容可應用軟體來模擬這些知識，有助於概念的澄清。部份課程需要反覆練習以精熟或自動技能者，例如實驗操作、電器之故障排除練習、飛行訓練、技職教育之技能訓練等，此等實驗平台有助於學生的學習。
 4. 診斷式評量工具：傳統的評量都是採用紙筆測驗，此量化的結果如透過電腦診斷分析，如運用項目反應理論等，質化測驗如運用概念構圖的理念來紀錄認知歷程，藉以澄清迷思概念，了解學習的真實狀態，據以因材施教，將可激發學生潛能。
 5. 互動式(Interactive)而非反應式(Reactive)的選用：所謂互動是指軟體操作環境中的某些動作反應，會因使用者的狀況不同而不同。就教學軟體而言，其所呈現的教材教法會因學生認知狀態不同而不同。
 6. 問題解決導向的應用設計：建構論強調知識是由學生自行建立而得，注重學生問題解決能力的培養，問題解決導向的軟體有助於融入教學的實施。

基於上述考量因素，本研究採用謝銘祥(2007)所開發的「三角形三心」動態幾何軟體融入教學中，此軟體是有認知理論的根據，可動態模擬任意三角形三心的位置變化，將抽象的教材視覺化，提供簡便、易操弄、可探索及可互動的教學輔助工具，能協助教師進行幾何教學活動，讓學生觀察、歸納及推理，進而發現圖形的規律，建構幾何概念與性質，以提升學生學習成效，增加學習數學的信心。本研究並且設計學習單，學習單所拋出的開放性問題乃搭配本單元的學習活動，除了尺規作圖外，在探索過工具後將其發現作紀錄，與同儕討論，並結合填充式證明，讓學生練習推論證明，藉由學習單逐步的引導，以免學生漫無目的的學習。

二、「三角形三心」動態幾何軟體

此軟體由謝銘祥(2007)利用 Flash 提供 ActionScript 程式語言所設計，包含兩個程式：「三角形三心」和「圓與三角形」。整體畫面與按鈕功能如圖 2.2。

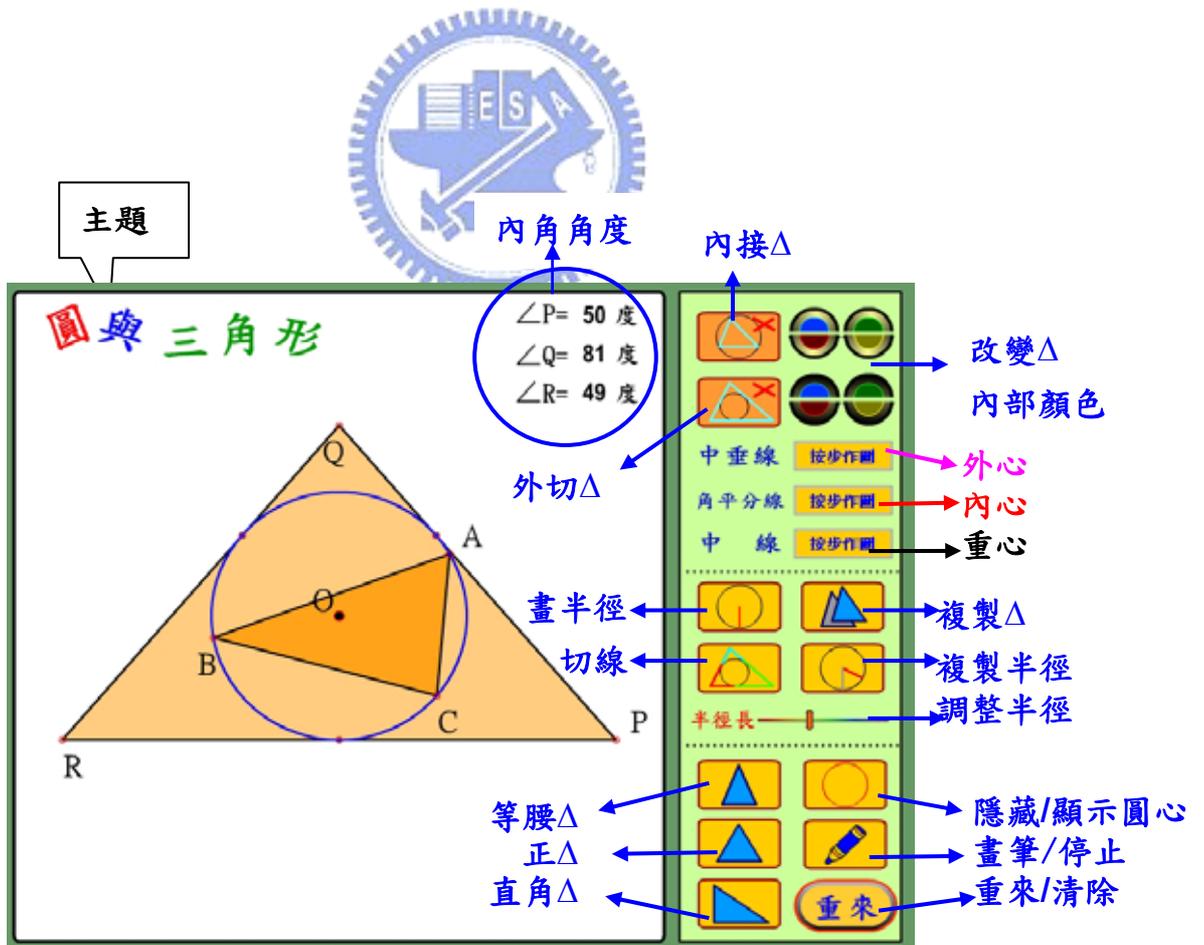
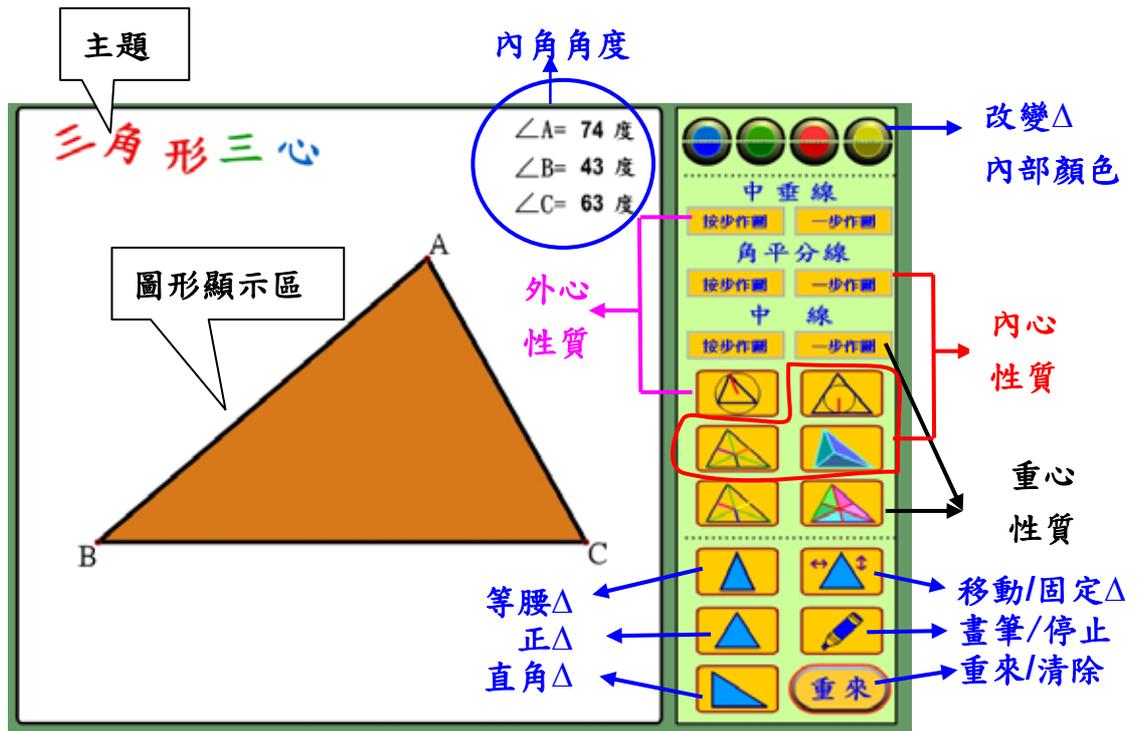


圖 2.2 三角形三心軟體操作畫面

「三角形三心」軟體特色：

1. 提供簡便、易操弄、可探索的功能。
2. 可實際操弄，符合尺規作圖，圖形可變異性且快速精確的呈現。
3. 檔案容量不大傳輸快速，可在電腦教室安裝，提供每一位學生操作，亦可使用單機在一般教室實施教學。
4. 圖形的動態連續變化，檢視三角形三心單元的各種定理及性質，尤其可隨時變換任意三角形，不受限於特例的情形。
5. 按鈕可以交互運用，可觀察任意三角形三心位置的關係。

根據研究者以往教三角形三心單元的經驗，由於尺規作圖較費時，通常是用特例去闡述一般性。處於資訊蓬勃發展的時代，累積許多前人的研究貢獻，在硬體設備的改善，軟體教材的開發及教育實驗的分享，提供教學者更多的參考資源。因此研究者在選擇能與 E 化教室設備搭配並與本單元結合之相關資源時發現，一些建置在網路的資源雖然有三心內容，可以做到任意三角形之一個心的變換，但是無法利用任意三角形變換成特殊三角形與交互按出三心位置的觀察，舉例如圖 2.3：



圖 2.3 學生做特殊三角形三心位置的探索

若是要利用軟體將三心的性質帶入，用動態軟體引導教學是不錯的，不過若需要有電腦教室搭配讓學生參與操作的話，礙於電腦教室不夠用、教師資訊能力不足與升學壓力的殘酷(教得好沒用，學生考得好才有用)，實在不敢貿然進行。若只是利用動態軟體先設計好教學所必需的教材或用廠商提供的 GSP 軟體素材，用於 E 化教室中，則浪費了互動白板提供高互動性的資源，因此當研究者發現「三角形三心」軟體的特色，能讓師生輕鬆操弄軟體，在教學中結合互動白板，適時融入三角形三心單元課程，提供學生主動探索、學習數學的環境，亦能提升學生學習興趣。

三、課程規劃

研究者基於教學環境的改變，應用數位工具融入數學教學中進行本研究，課程規劃根據張國恩（1999）認為在進行資訊融入教學時應考量之五個

項度作檢視：

- (一)需求性：利用數位工具融入國中數學學習單元「三角形三心」，突破沒有電腦教室和一般傳統教室教學的限制。
- (二)可行性：軟體採用模擬式(Simulation)之教學策略(Stephen & Stanley, 2000)，已考慮到用「電腦學」(Learning with computer)的重要Jonassen(2000)，提供學生在學習活動能操弄與觀察的環境。硬體採用「E化教室」建置的互動白板取代傳統教室黑板，並事先安排學生在異質小組中同步合作學習。
- (三)符合學習理論：從Van Hiele夫婦提出幾何思維發展的理論觀點來看，幾何思維發展是從視覺化層次開始，因此很多幾何概念的建構可以藉由操控圖形來加以說明，而這種動態的過程，藉由電腦媒體表現出來是適合的方式(王永賢，2004)。皮亞傑理論和我國九年一貫教育對學生學習型態和認知型態的詮釋，正是編輯教材的參考準則(康軒文教，2007)，而九年一貫強調學習的方式在不同階段的特徵為具體操作、具體表徵、類化具體表徵到符號表徵，可以看出課程改革的三大時代都運用表徵來幫助學生發展概念。因此表徵可使數學學習變得更加有趣及更吸引人，為使學生建構數學概念的多重表徵及表徵間連結轉換的概念心像，經過適當設計的電腦環境是理想的工具之一(謝哲仁，2001)。
- (四)與原始學科教材結合之程度：軟體教材的開發是依據民國92年「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」能力指標與分年細目，分析「三角形三心」所需的教材內容針對課程需要製作成按鈕元件(謝銘祥，2007)。
- (五)資源性：為尊重智慧財產權，融入教學所運用的軟體已取得開發者的同意。

在上述檢視項度(二)中，考量到數位工具融入教學是要提供學生在學習活動能操弄與觀察的環境，而實驗組學生對於數位工具尚未熟練，再從教學現場檢視：本研究進行之前，實驗組均未曾採用此教學法進行數學教學，高成就學習學生來自原來常態的兩個班級，在平時上課中一個班級學生與教師的互動較頻繁，另一個班級學生則較安靜，學習有問題時傾向課後個別提問，兩班學生平時上數學課的互動情形亦良好。因此在異質性分組時，會顧慮到學生積極度，肯主動發表之安排，小組競賽中並將攜帶尺規工具列入評分項目，因此實驗中發現，有一組小組長甚至還多帶一套尺規工具以預防組員未帶齊，充分發揮團隊精神。低成就學習學生來自原來常態的兩個班級，但在平時上課時因數學學習低落，課堂討論參與度低，甚至在實驗進行前練習操作互動白板的過程中，不願上台操作，因此分組時先考慮自由分組，結

果同一班要好的學生會湊在一起，這樣的組別成員間互動良好，但剩下的一組就有不同班且學習狀況不理想的成員最多，雖然在第一、二節課時，各組皆會有自願上台操作的學生，但是在剩下的一組卻形成無法進行學習單之探討，無力作建設性的相互學習，造成聊天干擾上課秩序的現象，因此，第三節課研究者將該班學生重新分組，並增強組別競賽獎勵辦法，強化同組互賴之功能。教學過程中不斷以紀豐裕(2003)在非導師班實施合作學習策略可能遇到的問題隨時檢視：1.場面秩序難以控制，嚴重影響教學活動之進行，2.組員聊天玩耍干擾小組討論之進行，3.小組缺乏積極互賴之功能，4.時間不夠用，教師頗感力不從心，5.時間掌控不佳，佔用到下課時間，6.學生缺乏發表數學想法的經驗，上台發表不諳表達，7.小組成員缺乏積極參與討論，8.學生缺乏數學學習動機，9.學生不預習；作業不配合，10.學生排斥隨堂測驗，有考試恐懼症。

基於上述考量及許多學者們(王千倬，1997；黃政傑、林佩璇，1996；Johnson & Johnson，1987；Slavin，1985；West & Watson，1996)，皆認同「合作學習」是一個可以實施「以學生為主體」的教學技術。因此本研究採用合作學習的教學法，讓學生藉由同儕的相互學習來克服數學學習的焦慮，以及避免對軟體和互動白板操作之不熟悉產生學習障礙。

第四節 互動白板(Interactive Whiteboard, IWB)

資訊與通訊科技(Information Communication Technology, ICT)的快速發展影響學校教育目標、教育內容(課程)、教學方法、教師專業成長及教育行政工作至鉅，ICT教育已成為當前教育革新的重點方向。IWB為資訊科技融入教育的先端科技，英國、美國、加拿大、澳洲、日本等國已將IWB應用於教學上。我國自民國96年起，教育計畫在「建構E化教學環境」方案之下，正式引進互動白板並補助部分縣市試辦互動白板導入教室教學，並鼓勵逐步發展學科領域學習中心(Learning Center)(陳惠邦，2006)。

一、 互動白板的基本認識

互動白板核心硬體包括一塊電子感應板(electronic whiteboard)及其感應器。電子感應板相當於觸控式螢幕，是PC的監視器，也是具有正常書寫功能的傳統白板。感應器是一支相當於滑鼠功能的感應筆(electronic stylus)，連續書寫時就具有數位墨水(digital ink)功能。互動白板必須結合電腦(PC)、投影機才能發揮功能。根據硬體規格與感應技術的不同可將互動白板分成三類：電磁感應(Electromagnetic)、類比電阻壓感(Analog resistive)及超音波、雷射和

紅外線感應(Ultrasonic, laser and infrared)。表面上看來，互動白板外觀及功能均與傳統白板（黑板）相同，接上PC、投影機後，互動白板可以透過其驅動軟體並連上網際網路或衛星傳輸，形成人機、人際多重且高度互動的教學體系(陳惠邦，2006)。本研究使用互動白板架構圖如圖2.4所示：



圖2.4 互動白板架構圖

目前各種品牌的互動白板在硬體、軟體應用及價錢方面有所差異，也各具特色，但其教學應用的基本功能差不多。互動白板的共同缺點則有：缺乏中文辨識系統、價錢昂貴、尚無結合中小學實際教材與教學資源的設計、未普及應用等。互動白板是眾多資訊與通訊科技(ICT)產品中的一種，互動白板導入教室教學其實也是資訊融入教學的一種形式，只不過所用的媒介是互動白板。不可否認的，所有的ICT 都可以改善教學環境、方法與豐富教學，但應用ICT 本身並不保證會提高教學效率與達成教育目標(陳惠邦，2006)。

互動白板提供教學創新的可能性，但互動白板本身並不代表教學創新。表面上來看，教學創新可能涉及教學內容、方法、媒介、學習方式的創新改變，實質上教學創新包含教學目標的達成、教學效能或學習品質的提升。更深入視之，教學創新應蘊含教師教學信念、教學方法或習慣以及學生學習的改變。

根據Beauchamp (2004)導入IWB教師及學生的轉變過程有五階段架構如下：

(一) 黑板/白板交替期(Black/Whiteboard Substitute)

- 1.系統操作及檔案管理：大部份被使用做為書寫和畫圖或是啟動應用程式。
- 2.操作技巧：教師開始學習操作：書寫和畫圖。IWB電子筆被用來瀏覽作業系統(點選或拖曳)，即取代滑鼠的功能。
- 3.程式因素：大部分使用IWB 原有軟體或文書處理軟體。
- 4.教室管理及教學法：在教學上的改變，有課程的進度加快、學生的注意力更集中及資訊的展示更為豐富等特點。

(二) 學徒期(Apprentice User)

- 1.系統操作及檔案管理：教師大量的使用自編的教材，並儲存檔案做為參考或證明。
- 2.操作技巧：學生在教師的計畫下開始用IWB，師生間使用特定的ICT操作指令來操作IWB。
- 3.程式因素：用 PowerPoint 軟體、照片、美工圖案等圖庫。
- 4.教室管理及教學法：在教學資源上利用「外部」的教材整合，如 Internet 或校內網路的教學資源，在教學上的應用，大部份在主要學科如語文、數學、科學的教學上。

(三) 創始期(Initiate User)

- 1.系統操作及檔案管理：教師在教材內容上整合更多樣的特效與多媒體，包括更廣泛的圖片、聲音檔與其他外在的資源。
- 2.操作技巧：教師逐漸熟悉IWB的操作，有能力開啟與切換數個程式，並使用已儲存之一系列的頁面，如IWB軟體所提供的活動掛圖。
- 3.程式因素：應用程式或 Internet 網站。
- 4.教室管理及教學法：在學科上廣泛運用在藝術、音樂、歷史、地理等。

(四) 進階期(Advanced User)

- 1.系統操作及檔案管理：教師從掃瞄影像資源加入教材的使用，例如教學活動、教科書內容、學習單等，讓全班都能使用。
- 2.操作技巧：學生對IWB 操作熟練；教師常不經意的讓學生示範並表達其意見。
- 3.程式因素：使用超連結及超文件來展示教材或網站。
- 4.教室管理及教學法：師生使用 IWB，藉由示範與互動進行教學活動，且重視學生的學習，而不是科技設備。

(五) 協進期(Synergistic User)

- 1.系統操作及檔案管理、操作技巧與程式因素：師生皆具備高層次的能力。
- 2.教室管理及教學法：教師展現出一個直覺與科技互動的教學方式，並能促進一個流暢的教學活動架構。教師與學生皆能建構學習活動之含義，

並能陳述下一階段學習活動的導向、要素及規模。

本研究進行之前，師生均需時間去適應與學習使用互動白板，一來學習白板廠商提供的操作軟體，常用的功能及策略有拉幕、探照燈、拍照、擦除、遮蔽、隱藏、板書、超連結、捷徑等。一來在實驗進行之前自然地接觸此工具，可降低數位工具帶來的新奇效應（novice effect）影響。

二、「E化教室」中的互動概念

互動白板所要發揮的特點不在白板，而是在互動。在數位學習和遠距教學中，較常被提及的概念為即時或延遲互動、同步或非同步互動等，而互動的途徑有電子郵件、即時通、視訊會議、部落格等。

但從相關文獻中卻沒有針對互動的教育概念作定義，過去 Moore(1989)曾歸納三種教學互動的模式包括：教師與學生、學生與學生及學生與內容，但這只是粗略的區分，後來 Wagner(1994)認為互動的功能定義需考慮學習理論、教學理論、教學設計、教學傳遞媒介等四個背景因素，並且以溝通、參與及回饋作為分析互動功能的向度。Szczyputa, Tschang 和 Vikas 在 2001 年指出，網路促進學習社群之互動，此互動包括學生與教師、學生與同儕、學生與學習資源互動(吳美娟，2002)。1999 年 Gilbert 和 Moore 提出一個新的學習互動面向，將互動分為社會互動和教學互動兩個類型。老師和學生、學生與同儕互動的關係兼具教學和社會化的重要影響因素，互動關係對學習氣氛、學習成效、教與學感受，乃至人際間的交往等影響明顯(陳嘉彌，1997)。

蔡崇元(2001)在網路教學者教學互動策略之研究中，綜合文獻上論述不同層面的互動面向，將互動的類型分為五類：

1. 師生之間的教學互動：師生之間進行有關學習任務的互動，如彼此的問答、教師解釋說明，以及作業繳交與評量等。
2. 師生之間的社會互動：師生之間認識彼此、閒話家常，以及與教學無關的問答。
3. 學生之間的教學互動：學生彼此合作、或與教學內容或學習任務上的請求與幫助。
4. 學生之間的社會互動：學生之間認識彼此、閒話家常，以及與教學無關的問答。
5. 學生與教材的教學互動：學生利用各式教材進行學習，而無人際互動的行為。

本研究根據陳惠邦(2006)論述從教室教學情境中的系統分析出發，將互動的形式與方向圖示如下：

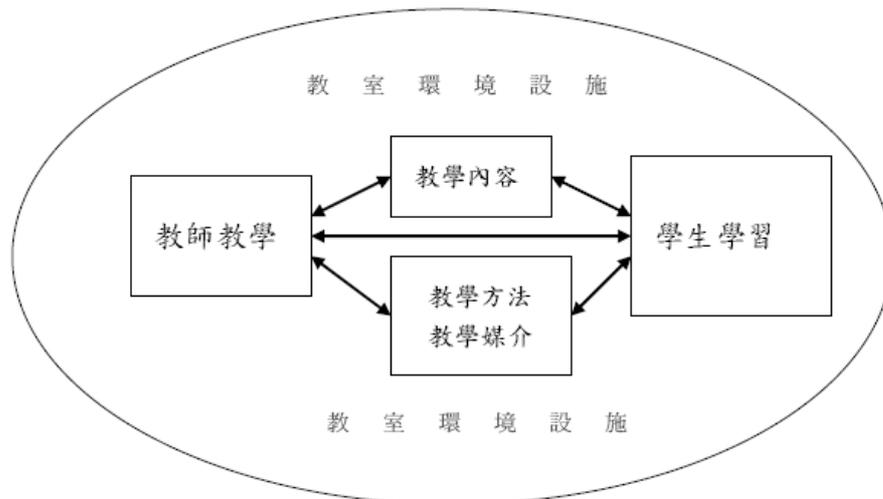


圖 2.5 教室互動情境中的分析，陳惠邦(2007，p5)

上圖的概念係以學生學習為主體，教師、教學內容、教學方法與教學媒介等任一和學生之間，以及學生與學生之間的交互作用都稱為互動。

因此本研究教學活動設計(見附錄一)以學生學習為主體，採用合作學習之教學法，並設計開放性探索問題之學習單(見附錄二)，學生與教師或其他學生同儕間的互動方式包括討論、合作蒐集資料、至白板操弄「三角形三心」軟體工具、彙整與綜合、學習單書寫、尺規作圖實作、小組上台發表、評論或修改、練習等。師生間的互動模式通常相當固定且不易改變，但卻是應用白板教學以實現互動教室理想的關鍵。「互動白板」的特色在「互動」功能而非「白板」功能。教師把焦點放在教學法與學科目標的達成，而不執著於互動白板甚至其他高新科技產品的使用，這才是所謂的回歸教學本質(陳惠邦，2006)。

三、互動白板的優缺點

任何一種工具，在使用前須先了解其特性，才能在教學中充分掌握，用於適當時機，發揮功效，其優缺點如下：

(一) Bell(2002)提出互動白板教學的12大好處：

1. 互動白板是極佳的展示工具，可以在白板上執行應用軟體。
2. 互動白板是豐富多彩的工具。
3. 互動白板可以提供多元的學習型態：觸覺型學習者可以直接接觸白板或在白板上標記；聽覺型學習者透過白板討論；視覺型學習者可以看到白板操作的變化。
4. 所有年齡層的學生都喜愛使用互動白板。
5. 互動白板可以做為遠距教學的重要裝置，獲得更好的同步學習的成效。

- 6.在僅有一台電腦的傳統教室，互動白板可以發揮電腦最大的教學功效。
- 7.互動白板實行建構式教學最佳的工具。互動白板的易用特性，可以讓老師和學生充分發揮想像力和創造力。
- 8.互動白板是乾淨、健康、環保、又具有吸引力的教學工具。老師和學生都不必再吸粉筆灰，教室可以隨時保持最乾淨、衛生的狀態。
- 9.學生只要使用簡易的操作技巧，就可以參與互動白板的學習，比滑鼠操作更為容易。
- 10.它是互動的。在教學互動中，更能讓學生提出想法和進行教學活動。
- 11.互動白板是其他週邊設備的最佳介面。可以隨時在上面標記，或點出重點。
- 12.互動白板是絕佳的記錄工具。無論會議或是課堂，參與者可以獲得最完整的紀錄內容檔案。

(二)互動白板亦有不利的條件(莊護林、李肖蘭，2007)

- 1.售價昂貴:現時一般香港採用的互動白板受動即萬多元，再輔以投影機及電腦設備才能使用，為此整個電子白板系統的成本亦較昂貴，有礙互動白板的普及性。
- 2.固定式互動白板：若將互動白板固定於牆壁上，則會因其位置及角度，而影響班內學生觀看互動白板的效果。
- 3.移動式互動白板：若將電子白板固定於流動架上，其靈活性相對較高，但要經常進行校正問題。
- 4.投影時，互動白板的影像可能可受前方的障礙物遮蔽，產生陰影，以致對操作造成影響。
- 5.因互動白板的影像來自投影機，為此投影反光可能導致學生視覺疲憊。
- 6.大部分的互動白板產歐美，為此其配對教學軟件亦以英文板為主，故此教學專用白板的中文軟體不多。

(三) 林儀惠、張正杰、郭伯臣、楊智為(2008)，對於國小五年級學童而言，教師使用IWB融入教學方式進行國小數學五年級面積單元教學之學童，其數學成就測驗結果優於教師以傳統模式進行教學之學童。訪談結果顯示，大部分的學生皆能肯定使用IWB 融入教學，並能提昇學生對學習數學之興趣。再從教學實驗比較傳統教學與IWB 融入教學，教師在課堂上可能會遇到以下之困境：

1. 需要花時間當場繪製出所需的圖形。
2. 受限於黑板大小，繪製新圖形時，舊有之圖形及講解內容皆無法保存。
3. 繪製在黑板上的圖形，不可移動或操作，需使用實體教具方能操作。

使用IWB 於此單元教學上，則有以下之優點：

1. 可事先編製教學所需之圖形或教材，節省教學時繪製圖形之時間。
2. 可輕易保有教學後之教學內容，可作為課後學生自行複習之教材。
3. 繪製在IWB 上的圖形，均可移動或操作，亦可輕易複製該圖形。

在研究者E化教室裡，互動白板是固定鑲於黑板內層的中間，而黑板是拉門式鑲在軌道上的外層，不用白板時拉上黑板，就恢復像傳統式教室般，可在黑板講述教學進行尺規作圖，當需要數位工具融入教學，可便捷啟動設備，拉開黑板於兩側，將軟體畫面投影在中間，用電子筆操作，亦可在兩側之黑板上書寫補充講解，靈活應用設備以配合教學。目前國內以互動白板為主的「E化教室」系統概念均由廠商設計提供，而且互動白板引入教學正值啟蒙階段尚缺乏教學實驗基礎，相關研究在結合不同教學法（如方案教學法、合作學習、問題本位學習、探究式教學、討論教學法）的應用可能方面明顯缺乏(陳惠邦, 2006)。因此研究者有此機會接觸到如此新穎的資訊設備，更需學習掌握工具的優勢以利融入教學活動中，提升學生的學習成效，以精進運用資訊科技融入教學活動之課程設計能力。

在本實驗應用數位工具融入教學的教學設計中，並非完全取代一般講述教學，由於大班教學，學生的幾何學習層次並不一致，除了軟體使用時機，硬體設備的搭配等均需規劃，而何榮桂(2002)提出資訊科技融入教學時需考慮5W，才不會在實驗過程中遭遇問題，所以用5W作為本教學實驗的檢視敘述如下：

1. 為何融入 (why)：在Van Hiele 幾何思考層次尚未完全達到形式演繹期的學生來說，透過數位工具呈現視覺化教材內容，建立概念心像，由具體的操作到能作非形式化推論的過渡時期，將發現的性質作邏輯地聯結，再學習以較高層次的字彙、概念、性質及思考方式的問題，以過渡至形式演繹期，對於學習層次無法提升的學生，亦能從欣賞數學的角度，和同儕互動學習，建立自信心，表達能力，降低對數學的恐懼感，提昇學習的動機與樂趣。
2. 誰在學習 (who)：以學生為主體，將學生做異質性分組在合作學習情境中，教師需教導學生社會技巧，使學生能成功的與他人互動，並提高學習效果。此採用此教學法希望藉由學生同儕的學習來克服數學學習的焦慮，以及對軟體和電子白板操作之不熟悉產生學習障礙。教師在教學中是為引導者，在資訊技能方面有機會成為學習者。
3. 何時融入 (when)：對實驗組進行的教學設計在尺規作圖內容與課本例題、隨堂練習、自我評量及習作的檢討部分和控制組是一致的，而數位工具融入於三角形三心的概念建立與性質的探索。
4. 融入地點 (where)：E化教室，利用電腦單機將軟體投影至互動白板，師

生可以操弄、互動並進行討論。

5. 融入內容 (what)：軟體選用謝銘祥(2007)所開發的「三角形三心」動態幾何軟體，符合幾何認知理論與本單元的學習目標，硬體則為互動白板，兩者相結合，發揮教師、教學內容、教學方法與教學媒介等任一和學生之間，以及學生與學生之間的高度互動效果。





第三章 研究方法

本章主要在說明本研究的方法與步驟，共分成五節：第一節為研究流程，第二節為研究設計，第三節為研究對象，第四節為研究工具，第五節為資料分析。

第一節 研究流程

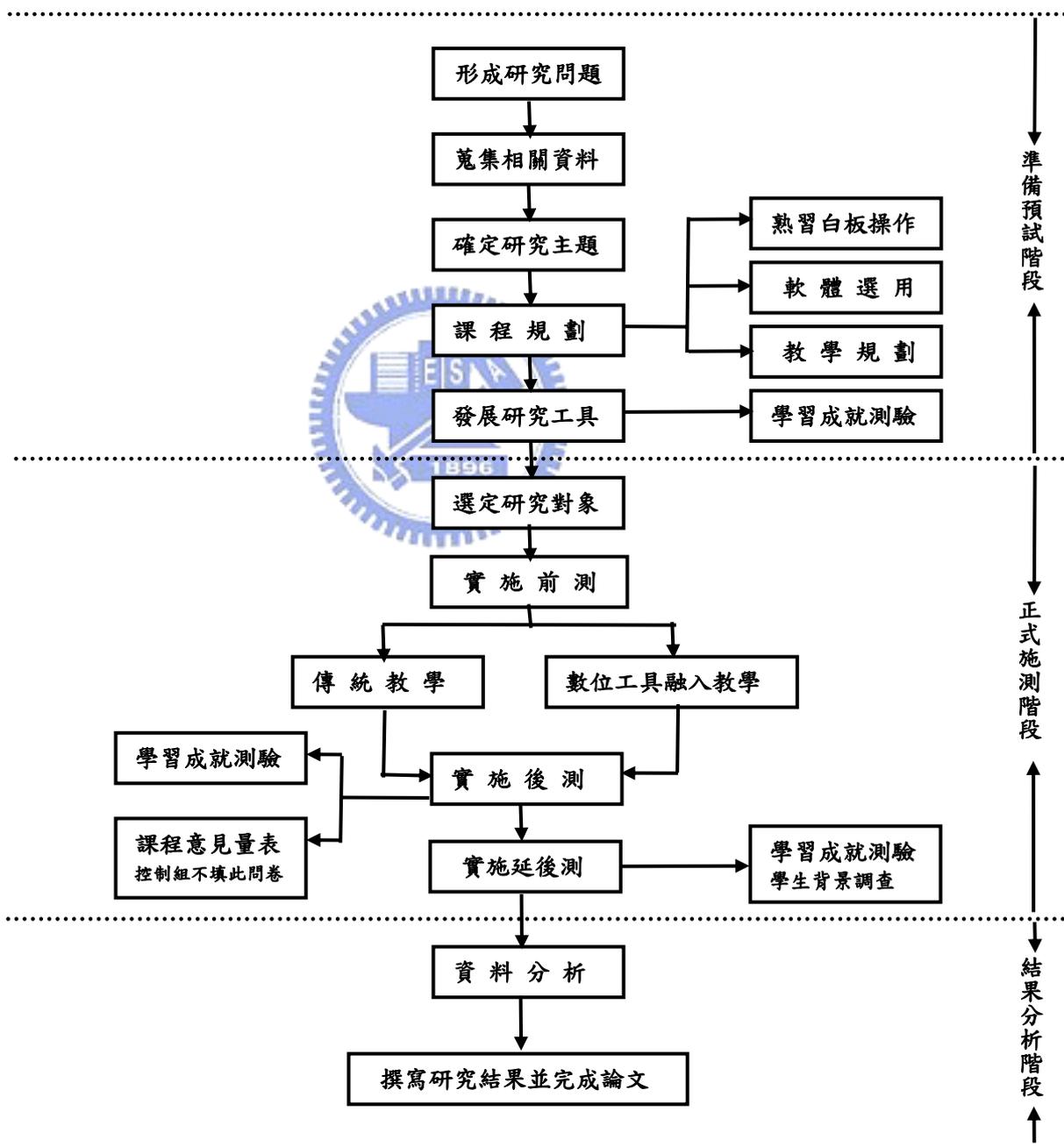


圖3.1 研究流程圖

茲將研究流程階段之工作說明如下：

一、準備預試階段：

本階段先形成研究問題、蒐集相關文獻和資料進行探討、確定研究主題、課程規劃和發展研究工具。本實驗硬體採用 E 化教室配置的「互動白板」新工具，在 96 學年第一學期 9 月份師生開始接觸並實際練習操作，確定選用的軟體後由研究者先了解開發者設計理念並熟習之，並和同學年數學教師協調授課進度與測驗時程，做好前置作業以利研究之進行。

二、正式施測階段：

本階段選定研究對象後，配合學校舉行第二次數學科定期評量作為前測，再依本學年數學教學行事曆進行本實驗單元之教學，控制組進行一般講述教學，由非研究者之教師授課，並無其它教學情境之安排，不致造成任課教師的負擔。而平時教學群教師互動良好，會規畫每一個學習單元結束之後進行全學年之平時評量，剛好可安排後測與延後測實施的時間，並將施測結果列入平時成績紀錄。

三、結果分析階段：

最後階段進行質與量的資料分析，撰寫研究結果並完成論文。



第二節 研究設計

一、實驗設計

本研究採取實驗研究法中不等組前後測之準實驗設計。基於學校排課的考量，無法隨機分派受試者到實驗組與對照組，且受限於時間、教學進度的因素，就研究方便，以研究者授課的九年級兩個班級為實驗組，其中包含一個數學高成就班級34人和一個數學低成就班級34人；另選擇由同一非研究者教師所任課的兩個班為控制組，其中亦包含一個數學高成就班級35人和一個數學低成就班級33人。為了探討應用數位工具融入數學三心單元的教學，對學生數學學習成就是否有影響，在實驗設計中，為了不影響學生在原班級授教，採用研究者所任教學校的數學能力分班，作為研究的對象，以避免徒增其他的干擾因素。茲將實驗設計模式，實驗設計步驟，實驗設計分組細格表敘述如下：

(一) 實驗設計模式如表3.1:

表3.1 實驗設計模式

自變項	前測	實驗處理	後測	延後測
實驗組	O1	X(數位工具融入教學)	O2	O3, O4, O5
控制組	O6		O7	O8, O9

註：O1、O6 分別為實驗處理前，實驗組、控制組進行九年級第二次定期評量
 O2、O7 分別為實驗處理後，實驗組、控制組進行「數學學習成就測驗」之後測
 O3、O8 分別為後測兩週後，實驗組、控制組進行「數學學習成就測驗」之延後測
 O4、O9 延後測結束進行實驗組、控制組學生數學科的學習狀況問卷。
 O5 實驗組填寫「課程意見調查表」。

(二)實驗設計步驟如下：

1. 實驗處理前，實驗組和控制組學生皆參加九年級第二次定期評量前測 (O1、O6)，評量內容為「圓」、「幾何推理」，與實驗教學的「三角形三心」學習單元相關。
2. 實驗組進行實驗處理(X) 接受數位工具融入數學之教學，控制組接受一般講述教學，沒有使用任何數位工具。
3. 實驗處理後，實驗組和控制組均同時進行「數學學習成就測驗」之後測 (O2、O7)。
4. 後測結束相隔兩週後，實驗組和控制組均同時進行「數學學習成就測驗」之延後測(O3、O8)，並填寫學生數學科的學習狀況問卷(O4、O9)。
5. 實驗組在數位工具融入教學後，進行該組的「課程意見調查表」(O5)，控制組由於沒有接受實驗處理，故未施以「課程意見調查表」。

(三)實驗設計分組細格表

本實驗採用二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析，其中二個獨立因子為教學模式(A)和學業成就(B)，一個相依因子為數學學習成就(C)，並以前測為共變數，檢視學業成就不同的學生在不同的教學模式下，對數學學習成就是否產生交互作用(A×B, A×C, B×C, A×B×C)。教學模式有實驗組和控制組兩個水準，學業成就有高成就和低成就兩個水準，數學學習成就有後測和延後測兩個水準，設計實驗設計分組細格表如表3.2：

表3.2 實驗設計分組細格

因子		學業成就(B)				合計人數
		高成就		低成就		
數學學習成就(C)		後測	延後測	後測	延後測	
教學模式 (A)	實驗組	實高(34人)	實高(34人)	實低(34人)	實低(34人)	68人
	控制組	控高(35人)	控高(35人)	控低(33人)	控低(33人)	68人
合計人數		69人		67人		136人

表中三個因子皆各有2個水準，故可產生8種可能組合細格。

二、實驗變項說明：

(一) 在量的實驗研究之各變項說明如下：

表3.3 實驗變項表

自變項	控制變項	依變項
(1)教學模式 實驗組：數位工具融入教學 控制組：一般講述教學法	(1)學習時數 (2)教材內容 (3)學生起點行為	數學學習成就
(2)學業成就 高成就：數學能力分班成績較高者 低成就：數學能力分班成績較低者		

1.自變項

(1)教學模式

- ①實驗組：除了粉筆與尺規作圖之外，將數位工具融入教學，在E化專科教室中，將個人電腦螢幕畫面透過單槍投影機投射在互動白板上，並以電子筆在互動白板上操弄「三角形三心」的電腦輔助教學軟體，將學生作異質性分組，合作學習討論開放式學習單，再由各組派代表上台在互動白板上書寫或操弄軟體發表討論所得的結果。
- ②控制組：採用一般講述教學法，由教師講、學生聽的方式進行教學，使用粉筆、尺規作圖教具。

(2)學業成就

本實驗教學設計參與之學生是依據八年級六次數學定期評量平均成績，進行數學能力分班學習，兩個班為一群，成績較高者安排在高成就班級，成績較低者安排在低成就班級。

2.控制變項

- (1)學習時數：兩組均為10節課(一節課45分鐘)。
- (2)教材內容：以康軒文教(2007)國中數學第五冊第三章第二節「三角形的外心、內心、重心」為教材。
- (3)起點行為：前測為九年級第二次定期評量，以學生在定期評量之數學成績進行獨立樣本 t 檢定，所得結果兩組並無顯著差異，故起點行為相同(實驗組與控制組高成就 t 值 -1.181，P 值 0.242；實驗組與控制組低成就 t 值 0.381，P 值 0.704)。

3.依變項

為檢驗實驗教學成效，本研究以實驗學生在研究者自編的三角形三心單元之數學學習成就測驗之成績作為依變項。

(二)在質的研究方面，研究方向為：

- 1.為了探討應用數位工具融入三角形三心單元的教學後，對學生數學學習成就的影響，除了量的分析以外，研究者會佐以學習單紀錄，選取代表性學生做法、及教學活動紀錄加以質性分析。
- 2.為了探討應用數位工具融入三角形三心單元的教學，對學生數學學習態度的影響，研究者會依據課程意見調查表結果，與教學活動錄影紀錄與教學觀察、與學生晤談和教學省思之相互參照。
- 3.研究者根據教學活動錄影、訪談控制組教師上課情形，與研究者實地觀察控制組高成就與低成就班級各一節課之教學紀錄，比較數位工具融入三角形三心單元的教學模式與一般講述教學模式的異同。

三、教學實驗流程

整個教學實驗流程如表3.4：

表3.4 教學實驗流程

日期	時間	研究進度	參與對象
96.11.30	45分鐘	九年級第二次定期評量 前測	實驗組、控制組
96.12.05~ 96.12.18	10節課 (每節45分鐘)	數位工具融入教學 一般講述教學法	實驗組 控制組
96.12.06		數學學習成就測驗檢核	校內三位數學教師
96.12.17	高、低成就班級 各45分鐘	實地觀察錄影	控制組
96.12.18	45分鐘	數學學習成就測驗預試	預試組
96.12.20	45分鐘	數學學習成就測驗後測	實驗組、控制組
97.01.02	45分鐘	數學學習成就測驗 延後測	實驗組、控制組
97.01.02	2分鐘	數學科學習狀況問卷	實驗組、控制組
97.01.04	30分鐘	訪談	控制組授課教師
97.01.05	10分鐘	課程意見量表問卷	實驗組

實驗組進行教學實驗的同時，商請同事協助教學活動過程錄影。

第三節 研究對象

本研究的範圍以國中九年級數學幾何教材三角形三心單元為主，因此以研究者所任教的桃園縣某國中九年級學生，其中四個班作為研究對象。

一、數學學習成就測驗預試樣本

預試目的在了解後測與延後測工具的品質，需找起始能力與學習後能力相當之學生進行預試，因此就教學進度掌握之方便，以同年級未參與實驗的兩個班68人，接受數學學習成就測驗進行預試。

二、正式樣本

本研究對象為桃園縣某國中九年級，該屆學生入學時採常態編班，從八年級開始進行數學分組學習，至九年級則以八年級六次數學定期評量平均成績為數學分班上課的依據，兩個班為一群，成績較高者安排在高成就班，成績較低者安排在低成就班，平時學生在原班級上課，數學課則需至所分組班級上課。本研究實驗組兩個班由研究者任課，其中包含一個數學高成就班級 34 人和一個數學低成就班級 34 人，學生需到 E 化專科教室上課；控制組兩個班由非研究者任課，其中亦包含一個數學高成就班級 35

人和一個數學低成就班級 33 人，上課地點則為一般班級的教室。茲就研究對象的定期評量數學成績表現整理於表 3.5。

表 3.5 研究對象定期評量數學成績表現

組別	實驗組		控制組	
	高成就/34	低成就/34	高成就/35	低成就/33
班級/人數				
任課教師	研究者		非研究者	
95 學年六次定期評量 數學平均成績	57.5	26.1	62.3	22.1
96 學年第一次定期評量 數學平均成績	70.1	32.6	75.9	26.8
96 學年第二次定期評量 數學平均成績(前測)	49.0	21.1	53.9	19.8

從上表得知，分組時依據的六次定期評量數學平均成績和第一次、第二次定期評量數學平均成績，皆是實驗組高成就成績低於控制組高成就成績，實驗組低成就成績高於控制組低成就成績。為配合學生學習進度與研究之便，以 96 學年第二次數學定期評量作為前測。

第四節 研究工具

本研究的研究工具有三：前測、「數學學習成就測驗」(後測、延後測)及「課程意見調查表」，以下分別說明。

一、前測

前測為九年級第二次定期評量，評量內容為「圓」、「幾何推理」，是實驗教學的「三角形三心」單元在課本前一章的幾何內容，且與本學習單元相關。命題的方式由教學群其中一位教師，依課本出版商提供之命題光碟篩選考題，並參考課本與習作內容加以編修，再給同年級教學群教師審題。考試時間45分鐘。

二、「數學學習成就測驗」(後測、延後測)(見附錄三)

測卷編製為研究者參考教科書命題題庫做編修，題目依教材內容設計，做部分內容與數據的修改。並參考 Bloom 認知領域教育目標分類系統做本測驗之分類，由於不同的學科或主題或有不同的心理歷程及建構(林清山，2000)，且過程中發現要將數學試題適切的套入分類相當困難，因此將每個題目所涉及的數學概念進行分析，牽涉一個數學概念者分類為「知識」、牽涉二個數學概念者分類為「理解」、牽涉三個或三個以上之數學概念者分類為「應用」，再依此分類製作課程內容與教學目標之雙項細目分析表(見表3.6)。

表3.6 「三角形三心」單元之「數學學習成就測驗」試題雙向細目分析表

課程內容	教學目標	知識		理解		應用		合計	
	試題型式	題數	佔分	題數	佔分	題數	佔分	題數	佔分
外心	選擇	1	5	2	10	1	5	4	20
	非選擇	0	0	1	6	0	0	1	6
內心	選擇	1	5	2	10	1	5	4	20
	非選擇	0	0	1	6	0	0	1	6
重心	選擇	1	5	3	15	0	0	4	20
	非選擇	0	0	0	0	1	6	1	6
特殊三角形 的三心關係	選擇	1	5	1	5	1	6	3	16
	非選擇	0	0	0	0	1	6	1	6
小計		4	20	10	52	5	28	19	100

試題中知識部分佔20%，理解部分佔52%，應用部分佔28%；選擇題佔76%，非選擇題佔24%；各課程內容佔分比例大致平均。

接著請三位數學專家檢核(見附錄四)，檢視數學概念依據是否得當，題目語意是否清楚，符合學習單元否，再依專家建議修改之，故具有基本的專家內容效度。然後找學生四人進行試作，沒有任何疑慮，在同年級學生中另找未參與實驗的兩個班級共68人作預試。

根據預試結果分析試題的難度與鑑別度，難度數值需介於0~1之間，數值越高表示題目難度越低，本試題難度值適當(介於0.2~0.8之間)(郭生玉，2001)，沒有極困難或極容易的題目；而鑑別度為受試者高分組的難度減去低分組的難度所得的值，所得數值為負數者則不具鑑別度，數值在0.2以上則有參考價值，達0.4以上則為非常優良，越接近1表示個別試題反應與試驗總分之間的一致性越高(郭生玉，2001)，本試題鑑別度皆達非常優良之水準(見表3.7)。

表3.7 數學學習成就測驗試題難度與鑑別度

題號	題型	難易度	鑑別度	題號	題型	難易度	鑑別度
1	選擇題	0.60	0.65	11	選擇題	0.72	0.56
2	選擇題	0.60	0.65	12	選擇題	0.52	0.82
3	選擇題	0.56	0.45	13	選擇題	0.64	0.72
4	選擇題	0.61	0.78	14	選擇題	0.69	0.61
5	選擇題	0.54	0.63	15	選擇題	0.50	0.56
6	選擇題	0.53	0.94	16	計算題	0.46	0.93
7	選擇題	0.60	0.65	17	計算題	0.25	0.50
8	選擇題	0.69	0.61	18	計算題	0.29	0.57
9	選擇題	0.61	0.78	19	計算題	0.49	0.87
10	選擇題	0.58	0.71				

本試題難度值介於0.25~0.72之間(介於0.2~0.8之間為適當)；鑑別度介於0.45~0.94之間(0.4以上為非常優良)。

進而分析預試試卷的內部一致性信度Cronbach's Alpha 值為0.876，顯示試題具有良好的信度，而在正式對136人施予後測所得的信度Cronbach's Alpha 值達0.912，更加確認試題具有高度信度值。

三、課程意見調查表(詳見附錄五)

本測量工具改編自李俊儀(2004)的課程意見調查表，並採用李克式五點量表(Likert-type 5-point scale) 之計分方式。

(一)調查目的

了解學生在國中幾何「三角形三心」課程實施後對於數位工具融入課程的意見與態度，評量時間10分鐘。

(二)題目內容

原課程意見調查表依本研究教學情形作部分題目改編，原來問卷第三分項的問題因教學內容不同而改編，第四分項為「電腦操作方式」改編為「數位工具操作方式」，第五分項為「電腦學習數學特色」，改編內容為「互動白板學習數學特色」。改編題目之前後對照如表3.8：

表3.8 課程意見調查表問題敘述改編前後對照表

分項	題號	原問卷	改編後
三	3	透過電腦軟體的操作，使我更了解三角形的外角和定理。	透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解三角形外心性質。
	8	透過電腦軟體的操作，使我更了解三角形的內角和定理。	透過三角形三心軟體的操作，使我更了解三角形的內心性質。
	13	透過電腦軟體的操作，使我更了解三角形的外角定理。	透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解三角形的重心性質。
	18	透過電腦軟體的操作，使我更了解平行線的性質。	透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解特殊三角形三心的性質。
四	4	在數學課中，電腦軟體操作方式不熟悉時，我會請教同學或老師。	在數學課中，對『三角形三心』軟體操作方式不熟悉，所以不敢上台操弄。
	9	我不懂電腦軟體的操作，所以透過電腦學習時，讓我感覺壓力很大。	雖然以前我不曾操弄過『三角形三心』軟體，但是我不覺得有什麼困難。
	14	我覺得電腦軟體的操作方式很簡單，通常老師講解完，我就會了。	我覺得『三角形三心』軟體的操作方式很簡單，老師講解過，試一試就會了。
	19	在電腦軟體的操作上，我可以達到老師所要求的進度，不會落後。	『三角形三心』軟體的操弄很容易，我敢上台操作不會害怕。
五	5	我覺得透過電腦，可以將課本中無法呈現的教材，具體的播放出來，讓我更深入了解課本的內容。	我覺得透過互動白板，可以將課本中無法呈現的教材，具體的播放出來，讓我更深入了解課本的內容。
	10	我覺得老師將電腦融入數學課程中，可以幫助我更容易學習數學。	我覺得老師將互動白板融入數學課程中，可以幫助我更容易學習『三角形三心』單元。
	15	透過電腦學習數學，使得我因此獲得鼓勵，讓我更有信心繼續學習下去。	透過互動白板教學，使得我覺得學數學，較不會枯燥乏味。
	20	我覺得上數學課時，有電腦輔助學習，學習的效果會更好。	我覺得上數學課時，有互動白板輔助教學，學習的效果會更好。

註：改編三個分項共12題

(三)問卷計分及信度分析

本問卷的題目可分為下列五個分項：「分組問題討論態度」、「解題方法與分享」、「電腦軟體與數學學科內容」、「軟體學習數學特色」與「電子白板操作方式」(見表3.9)。並依同意程度評定五點計分法，例如：「電子白板操作方式」分項中的一題：「透過互動白板教學，使得我覺得學數學，較不會枯燥乏味。」，勾選「非常同意」得5分，勾選「同意」得4分，勾選「沒有意見」得3分，勾選「不同意」得2分，勾選「非常不同意」得1分；若為反向題，例如：「在數學課中，對『三角形三心』軟體操作方式不熟悉，所以不敢上台操弄。」則計分方式恰好相反。測驗的總得分越高，代表越認同這樣的課程。將實驗組高低成就分組每一個問題得分統計逐題平均數，並將各分項得分與20題總得分統計出逐題平均數，所得逐題平均數以3分為沒有意見，大於3分表示具有正向的認同，小於3分表示持非正向的意見，再進行實驗組高成就與低成就之平均數獨立樣本 t 檢定考驗，以比較兩組學生對數位工具融入課程的意見與態度之差異。

表3.9 課程意見調查表題目分項與信度分析

題目分項	題號	信度	總信度
(一)分組問題討論態度	1、6、11(反)、16	0.724	
(二)解題方法與分享	2、7、12、17	0.834	
(三)電腦軟體與數學學科內容	3、8、13、18	0.916	0.903
(四)數位工具操作方式	4(反)、9、14、19	0.854	
(五)電子白板學習數學特色	5、10、15、20	0.812	

註:(反)表示為反向題

經過實驗組136人於實驗結束後填寫課程意見調查表的結果，對各分項與總題數得分做統計上信度分析所得Cronbach's Alpha 值(如表3.8)，顯示各分項內部一致性皆有超過0.7的信度值，總題數的信度值為0.903。

第五節 資料分析

本研究採量與質的方式進行分析。在量的資料蒐集有定期評量成績之前測、學習成就測驗後測與延後測、實驗組課程意見調查表。在質的方面蒐集的資料有學生學習活動過程的錄影、數學學習成就測驗作答思考紀錄、學生學習單、延後測附學生數學科學習狀況問卷、專家訪談與學生晤談記錄及教學者教學省思等。

一、量的分析

量的資料部分以Microsoft Excel 2003 及SPSS 12.0 版統計軟體進行資料分析，分析方法敘述如下：

- (一)將實驗結果進行二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析，其中二個獨立因子為學業成就(有高成就與低成就兩個水準)和教學模式(有實驗組與控制組兩個水準)，一個相依因子為數學學習成就(有後測與延後測兩個水準)，並以前測為共變數，檢視學業成就不同的學生在不同的教學模式下，對數學學習成就是否產生交互作用。當交互效果顯著時，則需要進行單純主要效果的檢驗；若交互效果不顯著時，則只要進行主要效果之檢驗，因為本實驗自變項中的水準都只有兩個(實驗組與控制組，高成就與低成就)，所以在三因子混合設計之變異數分析的資料中可直接判讀。
- (二)課程意見調查表乃經由實驗處理後之實驗組填寫，由於高成就與低成就的學業成就差異大，學習的心理因素亦大不相同，就兩組每一題與各分項和總分同意程度得分統計出逐題平均數，大於3分表示有正向的認同，小於3分表示持有非正向的看法，再將各分項進行獨立樣本 t 檢定考驗，比較兩組的看法是否有顯著差異。

二、質的分析

所蒐集的資料包含：學生學習活動的錄影、學生學習單、延後測附學生數學科學習狀況問卷、訪談記錄及教學者教學省思等，擷取成圖片資料或是轉成文字書面紀錄。

(一)學生學習活動的錄影

實驗組由研究者所授課，課程進行中需做學生學習活動之指引，掌握學生學習進度，適時給與學生釋疑等，無法全面兼顧到整個班的學生，所以安排同事全程錄影，幫忙捕捉研究者未觀察到的一面，以取得教學活動真實的情況，更可作為教學後的省思，檢視教學內容、進度及教室情境等，助於改善缺失，讓下一節課更順利的進行。控制組非研究者授課，故安排一節課進行由研究者實地錄影觀察，以便了解不同教學模式下學生的上課情形。

(二)學生學習單

本研究依課程內容設計開放式題目的學習單，引導實驗組學生各小組的討論、尺規作圖、數位工具操弄、和結果歸納分析等，藉此從中觀察學生在不同教學模式下學習態度的改變。

(三)延後測附學生數學科學習狀況問卷

問卷於延後測結束時請四個班學生填寫，旨在了解學生學習「三角形三心」過程中，覺得最難理解的內容或學習的困難點。並將問卷結果紀錄於附錄六。

(四)訪談

找出具有代表性的學生，利用下課時間進行訪談，了解學生對於數位工具融入數學教學的學習模式之看法與感受，將訪談紀錄輔以實驗組學生課程意見調查表答題情形量化分析。並且訪談控制組任課教師上課時，學生的學習態度與教學情形，作為比較不同教學模式情境的參考。

研究者會根據代表學生的質化資料進行編碼，代號「EHS01」、「CLA01」中第一碼英文字母E 代表實驗組，若為C 則代表控制組；第二碼H代表高成就組、L代表低成就組；第三碼S代表訪談學生，若為A代表學習狀況問卷之回答；第四、五數字碼代表學生流水號。

(五)教學者教學省思

研究者省思以往教本單元採用一般講述教學法和本研究在教學中融入數位工具後，不同的教學模式對學生學習產生的影響及學習態度之改變，作為教學改進的省思。





第四章 結果與討論

本研究的目的是在探討應用數位工具教學模式，對於國中九年級數學「三角形三心」幾何單元教學成效的影響。據此目的本章分成三節：第一節為實驗教學對數學學習成就影響分析，第二節為實驗組學生學習態度的影響，第三節為應用「數位工具」融入教學及「一般講述教學」教學模式的探討，呈現實驗教學前後所蒐集到的量化資料與質性資料的分析結果。

第一節 實驗教學對數學學習成就影響分析

本節將學生數學學業表現及教學實驗後所蒐集到的數學學習成就測驗之前測、後測和延後測的資料，分別進行描述統計分析、二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析及教學模式與學業成就對數學學習成就影響之交互效果的剖面圖，結果分述如下：

一、實驗組與控制組描述統計分析

首先將實驗處理前後，學業成就下實驗組與控制組在前測、後測及延後測的表現，整理如表 4.1：

表 4.1 實驗組與控制組前測、後測及延後測得分之描述統計表

組別	個數	前測	後測	延後測	
		<i>M(SD)</i>	<i>M(SD)</i>	<i>M(SD)</i>	
高成就	實驗組	34	49.00 (17.060)	72.44 (19.089)	75.35 (23.065)
	控制組	35	53.89 (17.298)	79.11 (16.011)	82.34 (15.696)
低成就	實驗組	34	21.06 (13.902)	32.56 (20.459)	36.35 (20.021)
	控制組	33	19.85 (11.974)	30.45 (13.902)	28.36 (15.407)

本實驗設計採用二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析，依實驗設計分組細格表，將四組學生在數學學習成就後測與延後測表現分析整理如表 4.2。

表4.2 各組學生在數學學習成就後測與延後測表現分析表

因子		學業成就(B)				合計	人數
		高成就		低成就			M(SD)
學習成就(C)		後測	延後測	後測	延後測	後測	延後測
教學模式(A)	實驗組	實高(34人)	實高(34人)	實低(34人)	實低(34人)	68人	68人
	M	72.44	75.35	32.56	36.35	52.50	55.85
	(SD)	(19.089)	(23.065)	(20.459)	(20.021)	(28.093)	(29.075)
	控制組	控高(35人)	控高(35人)	控低(33人)	控低(33人)	68人	68人
M	79.11	82.34	30.45	28.36	55.50	56.15	
(SD)	(16.011)	(15.696)	(13.902)	(15.407)	(28.682)	(31.258)	
合計人數		69人	69人	67人	67人	136人	136人
M	75.83	78.90	31.52	32.42	54.00	56.00	
(SD)	(17.785)	(19.843)	(17.439)	(18.213)	(28.324)	(30.075)	

由上兩表可知學生在前測、後測及延後測的表現，高成就的實驗組皆低於控制組；低成就的實驗組高於控制組，這和當初在分組時所依據國中八年級數學定期評量平均成績的情形一致。而數學學習成就後測與延後測的試卷是相同的，若從兩次的平均數比較，高成就實驗組和控制組以及低成就實驗組都有進步，但在低成就控制組卻是呈現退步的現象。

二、二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析摘要表

本實驗採用二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析，其中二個獨立因子為教學模式和學業成就，一個相依因子為數學學習成就，並以前測為共變數，檢視學業成就不同的學生在不同的教學模式下，對數學學習成就是否產生交互作用。依據實驗所得的三因子混合設計之變異數分析結果如表 4-3：

表4-3 二因子獨立一因子相依的三因子混合設計之變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	P
教學模式(A)	5.402	1	5.402	0.013	0.909
學業成就(B)	21555.452	1	21555.452	52.817	0.000
學習成就(C)	1.278	1	1.278	0.019	0.891
AxB	1071.413	1	1071.413	2.625	0.108
AxC	142.624	1	142.624	2.115	0.148
BxC	0.406	1	0.406	0.006	0.938
AxBxC	141.897	1	141.897	2.104	0.149
誤差項	53462.763	131	408.113		
誤差項	8835.781	131	67.449		

註：前測為共變數

由上表三因子混合設計之變異數分析摘要表中，排除前測的影響因素之後，顯示三因子交互作用($F=2.104, P=0.149$)未達顯著水準，教學模式與學業成就交互作用($F=2.625, P=0.108$)、教學模式與學習成就交互作用($F=2.115, P=0.148$)及學業成就與學習成就項的交互作用($F=0.006, P=0.938$)均未達顯著水準，再分別以三個因子的主要效果來看，教學模式($F=0.013, P=0.909$)和學習成就($F=0.019, P=0.891$)皆未達顯著水準，僅學業成就($F=52.817, P=0.000$)達顯著水準，這在分組時的數學學業成就表現上本來就差距顯著，故可解釋為這兩組學生本質差異的必然結果，無需再討論。

三、教學模式與學業成就對數學學習成就影響之交互效果的剖面圖

剖面圖(Profile Plots, 又稱輪廓圖)，圖中每一個點皆代表依變數(會針對共變數做調整)，在某因子某個水準上的邊際平均數，對於所產生的圖形平行線代表因子間沒有交互作用，非平行線代表有交互作用(林震岩, 2007)。茲將教學模式與學業成就對數學學習成就影響之交互效果剖面圖，依不同的個別線呈現如圖4-1、圖4-2、圖4-3和圖4-4。

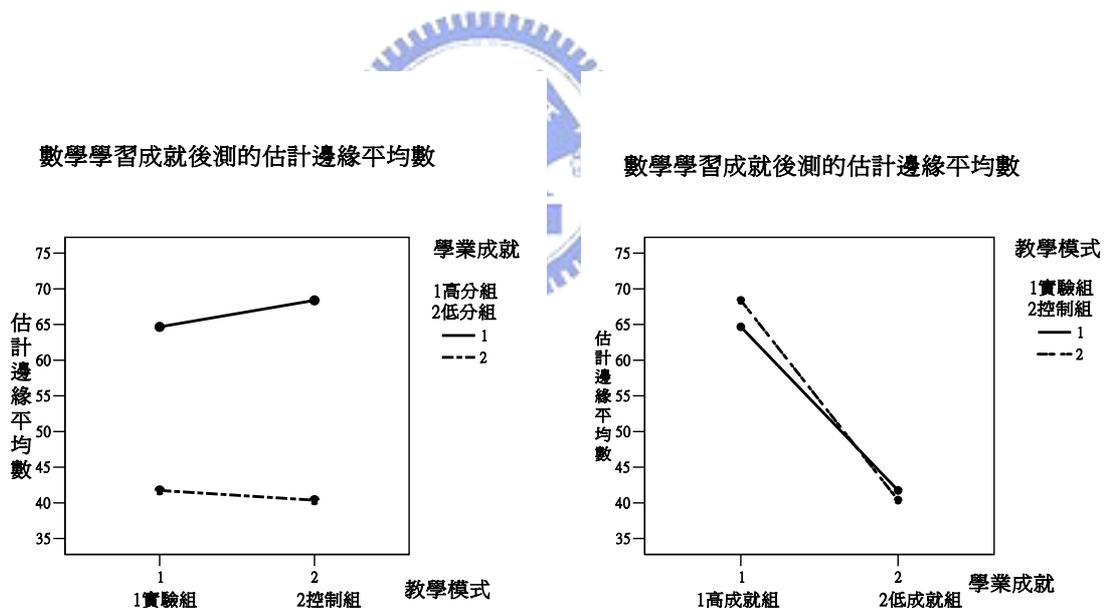


圖4.1 教學模式與學業成就對數學學習成就後測影響之交互效果圖示 (以學業成就為個別線)

圖4.2 教學模式與學業成就對數學學習成就後測影響之交互效果圖示 (以教學模式為個別線)

數學學習成就延後測的估計邊緣平均數

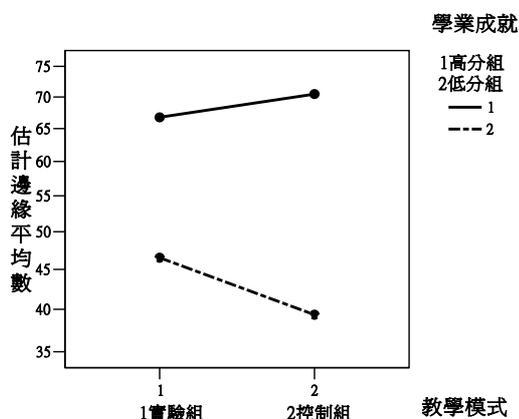


圖4.3 教學模式與學業成就對數學學習成就延後測影響之交互效果圖示
(以學業成就為個別線)

數學學習成就延後測的估計邊緣平均數

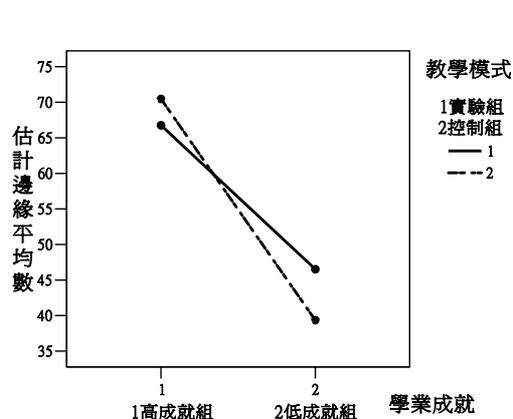


圖4.4 教學模式與學業成就對數學學習成就延後測影響之交互效果圖示
(以教學模式為個別線)

從上面四個圖形之判斷，教學模式與學業成就對於數學學習成就後測所產生的圖形斜率相近，交互效果不顯著；對於數學學習成就延後測所產生的兩直線不平行，交互效果顯著。

在排除前測之共變數的影響因素，觀察後測圖4-1發現實驗組中不同學業成就分組的學習成就差異比實驗組中不同學業成就分組的學習成就差異還小，顯示實驗組的教學模式，使得低學業成就組的學生有比較多的進步，拉近了與高學業成就組的學習成就的差距；而在後測圖4-2中，低學業成就組中，實驗組的學習成就高於控制組，但在高學業成就組，實驗組的學習成就低於控制組，此顯示實驗組的教學模式對低學業成就組的學生有較好的學習成就之影響，但是在高學業成就組則無此現象。再上下比較圖4.1和圖4.3，4.2和圖4.4後測與延後測的對照，高成就實驗組和控制組以及低成就實驗組延後測都比後測進步，但在低成就控制組卻是呈現退步的現象，而且實驗組的低成就學生延後測對後測的進步幅度比其他三組還要大，顯示實驗組的教學模式帶給低成就學生的影響比高成就學生較大。進而再比較相同個別線後測和延後測之交互效果圖，顯示延後測的交互效果更加明顯。由上述分析所得結果，研究者推論大多數低成就組的學生雖然不會推理證明幾何性質，但是教學實驗幫助這些學生對於實驗單元的幾何性質產生較深刻的印象與了解，亦能增強解答問題的能力，因此低成就的實驗組比控制組更能拉近和高成就組的差距，而且進步的幅度較大。

第二節 實驗組學生學習態度的影響

本節將探討數位工具融入數學教學課程中，對實驗組學生學習態度有何影響，在實驗教學後所填寫的課程意見調查表，進行量化資料與學生訪談紀錄和教學觀察省思之質性資料分析。

實驗組學生對課程意見調查表共20題的答題情形，分成「分組問題討論態度」、「解題方法與分享」、「電腦軟體與數學學科內容」、「數位工具操作方式」及「電子白板學習數學特色」等五個分項來討論，統計高成就與低成就學生各題、各分項和總得分之平均數，以了解學習態度之傾向，並比較兩組對課程意見之差異。將各題得分之平均數與標準差及獨立樣本 t 檢定，整理如表4.4。

表4.4 實驗組高成就與低成就組對課程意見調查各問題之獨立樣本 t 檢定分析

分項	題號	問題	高成就 <i>M(SD)</i>	低成就 <i>M(SD)</i>	t
(一) 分組問題 討論 態度	1	經過分組討論的方式, 會讓我對數學的問題更加了解。	3.62(0.922)	2.85(1.132)	3.055*
	6	我覺得上數學課時, 分組討論讓同學上台講解, 比由老師一人講授內容效果更好。	2.82(0.968)	2.91(1.111)	-0.349
	11	在數學課程中, 分組討論解題的方式會困擾我對數學的學習。	3.26(0.618)	3.32(0.843)	-0.328
	16	分組討論的解題方式可增加我與同學討論數學的機會。	3.82(0.716)	3.35(1.041)	2.171*
(二) 解題 方法 與 分享	2	遇到數學難題, 我會設法去嘗試各種不同的解決方法。	3.44(1.021)	2.97(1.167)	1.770
	7	當一個數學問題有好幾種解法的時候, 我也會想知道別人的解題方法為何。	3.50(0.896)	3.18(1.242)	1.231
	12	上數學課時, 如果能發表自己的解題方法, 我會更喜歡上數學課。	2.82(0.758)	2.32(0.945)	2.408*
	17	遇到數學問題, 我會儘量提出自己的解題方法與同學共享。	3.21(0.845)	2.76(0.923)	2.056*

(續後頁)

(接前頁)

表4.4 實驗組高成就與低成就組對課程意見調查各問題之獨立樣本 t 檢定分析

(三) 電腦軟體與數學學科內容	3	透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解三角形外心性質。	3.56(0.786)	3.38(0.888)	0.868
	8	透過三角形三心軟體的操作，使我更了解三角形的內心性質。	3.62(0.779)	3.26(0.994)	1.629
	13	透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解三角形的重心性質。	3.53(0.788)	3.00(1.015)	2.403*
	18	透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解特殊三角形三心的性質。	3.53(0.788)	3.03(0.904)	2.432*
(四) 數位工具操作方式	4	在數學課中，對『三角形三心』軟體操作方式不熟悉，所以不敢上台操弄。	3.26(1.238)	2.50(1.161)	2.626*
	9	雖然以前我不曾操弄過『三角形三心』軟體，但是我不覺得有什麼困難。	3.50(0.826)	3.00(1.015)	2.228*
	14	我覺得『三角形三心』軟體的操作方式很簡單，老師講解過試一試就會了。	3.79(0.946)	3.26(0.994)	2.249*
	19	『三角形三心』軟體的操弄很容易，我敢上台操作不會害怕。	3.35(1.152)	2.68(1.296)	2.275*
(五) 電子白板學習數學特色	5	我覺得透過互動白板，可以將課本中無法呈現的教材，具體的播放出來，讓我更深入了解課本的內容。	3.68(0.768)	3.79(0.880)	-0.587
	10	我覺得老師將互動白板融入數學課程中，可以幫助我更容易學習『三角形三心』單元。	3.38(0.779)	3.65(0.774)	-1.406
	15	透過互動白板教學，使得我覺得學數學，較不會枯燥乏味。	3.74(0.963)	3.56(0.860)	0.797
	20	我覺得上數學課時，有互動白板輔助教學，學習的效果會更好。	3.50(0.788)	3.38(0.922)	0.566
總計 M (SD)			68.94 (11.249)	62.18 (10.828)	2.526*

註：各問題平均數滿分為 5 分表非常同意，4 分表同意，3 分表沒意見，2 分表不同意，1 分表非常不同意，* $P < 0.05$ 。

再從五個分項統計兩組的平均數、標準差及獨立樣本 t 檢定，比較高成就與低成就學生對教學實驗的看法，如表4.5。

表4.5 高成就與低成就組對課程意見調查表各分項之獨立樣本t檢定分析

分項	分組	個數	平均數(逐題平均數)	標準差	t	P
(一)	高成就	34	13.53 (3.38)	2.415	1.606	0.113
	低成就	34	12.44 (3.11)	3.126		
(二)	高成就	34	12.97 (3.24)	2.908	2.247*	0.028
	低成就	34	11.24 (2.81)	3.438		
(三)	高成就	34	14.24 (3.56)	2.861	2.068*	0.043
	低成就	34	12.68 (3.17)	3.337		
(四)	高成就	34	13.91 (3.48)	3.579	2.853**	0.006
	低成就	34	11.44 (2.86)	3.561		
(五)	高成就	34	14.29 (3.57)	2.692	-0.134	0.894
	低成就	34	14.38 (3.60)	2.742		
總計	高成就	34	68.94 (3.45)	11.249	2.526*	0.014
	低成就	34	62.18 (3.11)	10.828		

註：各分項逐題平均數大於3分表示正向的肯定，小於3分表示持非正向的態度看法。

由上面兩個表各題與分項逐題的平均數大於3分表示正向的肯定，小於3分表示持非正向的態度與看法，所得的結果如下：

1. 從20題總計來看高成就組和低成就組 t 值為2.526，P值為0.014，達顯著水準，顯示高成就學生比較喜歡數位工具融入的教學模式，然而高成就學生本來學習態度就比較好，這可能是原本就存在的差異，再看兩組逐題平均數皆大於3，表示兩組對數位工具融入教學整體的態度皆持正向的肯定。
2. 由表4.4得知，高成就學生持正向認同的問題有18題，僅2題不認同，此兩題顯示若要學生上台發表數學的討論，學生較不樂意，顯然高成就學生仍有不少人對於數學學習的信心不足，不敢發表。
3. 由表4.4得知，低成就學生持正向認同的問題有11題(逐題平均數大於3)，只有在第(五)分項「互動白板學習數學特色」四題的平均數皆大於3，有較高度的認同。從問題內容與學生認同意答題來看，顯示低成就學生對於數位工具的操弄較有興趣，但是涉及數學問題的解決能力不足，以致影響使用工具的認同度而且較不會表達。
4. 由表4.5得知，高成就與低成就學生在「解題方法與分享」、「電腦軟體與數學學科內容」、「數位工具操作方式」分項的看法達顯著差異，在「分組問題討論態度」與「互動白板學習數學特色」的看法一致，

均持正向的肯定。

5. 由表4.5得知，高成就學生，在五個分項的看法均認同，低成就學生對於「解題方法與分享」、「數位工具操作方式」較不認同，即涉及到要呈現較難的數學性質與解題時，低成就學生就有較多的困難。

依據上述量化結果佐以學生訪談紀錄，分別列舉學生對於各分項持正向與非正向的觀點加以探究，並陳述教學觀察省思。

(一)分組問題討論態度

本分項中兩組學生對分組討論有助於學習數學的看法差異不大，在「分組討論讓同學上台講解比老師講授效果較好」問題；高成就與低成就學生均不認同，學生覺得由老師講解比較清楚；而對低成就學生分組討論，不見得能解決數學問題。列舉學生觀點如表4.6：

表4.6 學生對「分組問題討論態度」的觀點

	正向看法	非正向看法
高成就	EHS01：學習單的問題不是很懂，和同學討論，我也會在課本裡找到答案。 EHS02：咦？為什麼我畫的外心不會交於一點，問同學看看。 EHS03：課堂上我不敢發問，不會的問同學就好了。 EHS04：我會的教同學，同學也會教我。 EHS05：我覺得數學比較需要和同學討論。	EHS06：真麻煩，還要我們自己找答案，寫一堆東西。 EHS07：叫同學上台講，很浪費時間，老師講一講比較快。 EHS08：我在補習班就學過了，還不上快一點。
低成就	ELS01：本來以為我畫的圖是對的，看同學的圖不太一樣。 ELS02：題目不知道在問什麼？問同學看看。 ELS03：分組學習比較有趣，不用一直聽老師講一大串。	ELS04：數學我都不會，同學也不會。 ELS05：老師還沒教，怎麼寫？ ELS06：為什麼要分組？我不要跟XX同一組。 ELS07：最好沒有數學課，管它怎麼上。 ELS08：隔壁組很吵，又不討論功課，煩死了。 ELS09：最好不要叫到我上去講。

教學觀察省思：高成就班級在平時上課中就有較多同儕互相研究解題與師生討論功課的情形，多數學生認同分組討論的方式，有助於對數學問題更加了解；低成就班級中有較多學生對數學學習興趣偏低，研究者觀察到該班討論數學互動的情形顯然較少，甚至有些學生根本就不曾和同學討論數學功課，即使分組討論亦無助於提昇數學學習興致。兩組學生大部分均對於分組學習

數學呈現無意見看法，產生學習困擾的僅是少數。研究者平時大都採用講述教學，老師非常權威的講解與論述數學性質，有條理且有效率的展現數學知識，學生很習慣聆聽，當有機會分組討論時可能學生面對開放性的問題，在上台呈現該組的結論時沒有十足的把握，或者學生較害羞，平時鮮有上台機會以致表達上較不流暢，或是較不會用數學語言表達，有時還需同組支援補述，造成時間的拖延，讓學生感覺到效果較差。因此，低成就學生可能無法從分組學習討論中獲取數學知識與解題方法。

(二)解題方法與分享

本分項中兩組學生對解題方法與分享看法有顯著差異，高成就學生不認為喜歡上數學課是透過能發表自己的解法；低成就學生有學習動機但無法分享自己的解題方法。列舉學生觀點如表4.7：

表4.7 學生對「解題方法與分享」的觀點

	正向看法	非正向看法
高成就	EHS09：一題有時會有多種解決方法，盡可能試試看。 EHS10：越難越有挑戰性。 EHS11：別人也許有較簡單的方法，參考看看。 EHS12：看別人的算法學習不同的想法。 EHS13：和同學多多討論很有幫助 EHS14：講給別人聽懂了，自己也開心	EHS15：用最快容易算的方法就行了。 EHS16：我會算就行了，不要叫我上台。 EHS17：我會的，別人也會。 EHS18：有公式背起來，套一套比較快。 EHS19：會解就行了，學很多方法反而會搞混。 EHS20：我會先和同學對答案，確定正確了才敢上台寫。
低成就	ELS10：很難算的會去翻書找看看有沒有答案。 ELS11：雖然我不太會，仍然想聽別人怎麼算出來。 ELS12：從別人的做法，學一個自己比較會的。	ELS13：數學都很難，實在搞不懂怎麼算。 ELS14：我算不出來，等老師教。 ELS15：不會就猜猜看。 ELS16：我很怕老師叫我回答問題。 ELS17：反正我都不會，沒差別。

教學觀察省思：當學生學習到九年級的數學，累積的先備知識漸漸豐富，有些問題可以一題多解，當問題拋出時，先不給學生任何提示，依其所學思考解題的方法，可訓練學生獨立思考的能力。根據 Van Hiele 提出學習模式之第三階段「解說」，教師引導學生討論學習的主要內容，學生們藉由課堂上討論及觀察，建立其學習經驗，並利用正確和合適的字彙和語言符號來表達，使其幾何概念提升到理解的層次。實驗組兩班的學生仍願意努力學習，當自己解題完，也想看看別人的解題方法，順便檢視不同解題方法的優缺點以及學習如何從題目已知條件去推論驗證所得的結果。學生會依過去解題和學習經驗，會努力嘗試各種解決策略，但是會受到難題限制，若未跨越學習障礙時會造成無力解決，當累積學習瓶頸愈來愈大，學習數學的動機就愈來愈

愈低。通常敢主動上台發表自己解題方法者，多傾向數學學習有信心者，或是平時有較多機會上台發表者，有些學生願意和同儕互相討論功課但不願意上台發表，有些學生較內向，平時在團體中就是較沉默，由於研究者平時的數學課多採用講述教學法，沒有提供許多機會讓學生發表，所以學生不習慣上台講解數學，遑論因而改變喜歡數學課的程度。對於本實驗學習單元首次使用數位工具教學，上課學習模式突然的改變或許影響學生學習的習慣，打亂學習的步調與模式。Van Hiele 層次的幾何思考模式的進展特性指出，某些教學方法可以促進進展，某些則可能延緩甚至阻礙層次的轉移。一般講述教學中學生習慣於教師將教材內容有系統有效率的傳達，而本實驗教學的設計以學生為主體，讓學生有較高自主空間掌控學習，讓學生從具體操弄情境中去探索、發現、歸納與分析，進而解讀、批判與驗證，主動建構學習進而提升至幾何推理情境。但是短短10節課，對於還未適應與調整步調的學生來說，是需要給予足夠的時間消化吸收，而造成數學學習成就表現不如預期亦是有可能的。

(三)電腦軟體與數學學科內容

本分項中兩組學生對電腦軟體與數學學科內容結合的看法有顯著差異，高成就組每題皆持正向的認同；低成就組認為重心與特殊三角形性質較難懂。列舉學生觀點如表4.8：

表4.8 學生對「電腦軟體與數學學科內容」的觀點

	正向看法	非正向看法
高成就	<p>EHS21：尺規作圖只能畫代表性的三心位置，利用軟體可呈現任意三角形的三心位置。而且可以移動角度(移動頂點改變角度)真方便。</p> <p>EHS22：電腦畫的圖就不會有三條線(三中垂線)交不到同一點的情形。</p> <p>EHS23：(軟體操作三角形面積為周長乘以內切圓半徑的一半)，比用書寫證明的方式更容易懂。</p> <p>EHS24：有圖形的印象再學證明就更能了解。</p>	<p>EHS25：性質背很多，看到題目不知用哪一個？</p> <p>EHS26：外心和內心，中垂線和中線都會混在一起</p> <p>EHS27：正三角形三心同一點，看圖(軟體呈現)很容易懂，可是題目又不會問這麼簡單的問題。</p>
低成就	<p>ELS18：用手畫(尺規作圖)真麻煩，有軟體玩一玩就好了，不用自己畫。</p> <p>ELS19：(軟體)把圖畫出來就分得清是外心還是內心了。</p> <p>ELS20：(重心位置到中點的距離為該中線頂點到中點距離的三分之一)利用軟體操作一看就了解很好記。</p>	<p>ELS21：重心那個圖，六個小三角形真的會重疊在一起嗎？</p> <p>ELS22：操作軟體很方便，但是不知道題目在問什麼。</p> <p>ELS23：(三心單元)這在日常生活中又沒用。</p>

教學觀察省思:根據九年一貫課程綱要,國中八至九年級幾何課程的學習,開始由具體操作情境進入推理幾何情境中,由基本幾何概念,進入較深入的幾何推理領域中,最終目標是學會推理幾何證明,但學習內容需採漸進式安排非一蹴可幾,慢慢養成完整能力,讓學生有能力及信心,快樂地學習幾何學領域的知識,因此學習的內容是由非形式化的推理逐漸提昇至形式化的推理。然而從 Van Hiele 五個思考層次的發展是有其次序性,學習者需擁有前一層次的各項概念與策略,才能有效進行下一層次的教學活動。提供符合教學目標所設計的軟體,協助學生累積幾何經驗以便順利進入下一個思考層次。但是在大班教學中,學生在不同的概念會有不同的層次,教材內容的設計可能僅符合某些學生的需求,無法兼顧到每一位學生的因材施教,僅能以經驗判斷配合大部分學生之學習層次。而軟體教材的融入,並非完全取代一般講述教學法,適時融入呈現書本平面教材無法說清楚的部分,即使學生不會推理證明,利用軟體操弄幫助學生基本幾何性質的建立,亦能提升學生學習效果。

(四)數位工具操作方式

本分項中兩組學生對數位工具操作方式的看法有顯著差異,高成就學生4題皆持正向的認同;低成就組只有1題平均數大於3。列舉學生觀點如表4.9:

表4.9 學生對「數位工具操作方式」的觀點

	正向看法	非正向看法
高成就	EHS28:數學課用電腦(數位工具)上課真新奇。 EHS29:這個軟體沒見過,老師講解基本按鈕,試一試沒什麼難的。 EHS30:畫線段不用尺,我有新發現,用(電子)筆點兩點會自動連線而且很直	EHS31:真想試試看,不過還沒弄清楚前別叫我上台。 EHS32:下課再來玩。 EHS33:為何我一用(操作不當)就當機?
低成就	ELS24:操作很容易。 ELS25:數學我不在行,軟體操作還不簡單。 ELS26:雖然操作還不熟練,不過不要緊同學(同一組)會幫忙。	ELS27:到底要動哪裡? ELS28:我還是需要老師一邊教我一邊操作才行。 ELS29:玩電動比較有趣,(用軟體)學數學?算了吧! ELS30:不要叫我上台,我沒興趣。

教學觀察省思:在實驗之前,研究者事前也沒有時間安排學生先練習此軟體工具,為了讓學生接觸與熟悉互動白板,在課堂上曾用動態幾何繪圖軟體GSP和書商提供的簡報(在題目題供的圖形上用畫筆講解)在互動白板上教幾何

內容，而採用GSP是英文版的，發現介面不具親和力，更造成學生學習的負荷。原本擔心低成就班級在數學課程中與老師的互動性較低，恐怕實驗進行時學生不願上台操作，借用合作學習分組的力量鼓勵學生上台嘗試操作，經過互動白板在全班的展示，大部分學生很輕易的按照自己的意思操弄，而且會互相見習，有操作過的還會技術指導並提供經驗。資訊科技對學生而言並不具壓力，反而是學生看了學習單的題目，但是不知道如何去利用軟體呈現與表達，有些學生是在嘗試錯誤中，經同學七嘴八舌提供意見再修正的。誠如張國恩(2002)所說，數學領域的教材常使學生無法理解，必須將抽象化的教材視覺化。因此教師教學時必須配合學生程度而採用合適的教學媒體來進行教學設計，以提昇學生學習動機與增進學習效果。然而視覺化的圖形操弄需要給學生足夠的時間探索，在E化教室只有單機的設備下，無法提供每一位學生都能操弄到每一題，熟練每一個性質，這恐怕是美中不足的地方。

(五)互動白板學習數學特色

本分項中兩組學生對互動白板學習數學特色看法沒有顯著差異，高成就和低成就學生都喜歡使用互動白板學習數學。列舉學生觀點如表4.10：

表4.10 學生對「互動白板學習數學特色」的觀點

	正向看法	非正向看法
高成就	EHS34：課本較死板(抽象)，在白板秀過(展示)的性質，我記得很清楚。 EHS35：用白板上課較生動。 EHS36：在補習班已學過一遍再用白板操作過，對學習很有幫助。 EHS37：叫我的好朋友(非實驗組學生)下課來參觀白板教學。	EHS38：白板呈現後，大致明瞭學習的內容，但是不會證明。 EHS39：很浪費時間倒不如多講一些考題較實用。 EHS40：沒差。
低成就	ELS31：數學我不是很會，但是我可以教別人電腦。(有時扮演學習者，有時扮演指導者，增加自信心) ELS32：比平時老師一直講課有趣多了。 ELS33：時間過得很快，一下子就下課，我都還沒打瞌睡。 ELS34：考試考白板操作我一定100分。	ELS35：會操作，也背公式，但是就是考不好。 ELS36：無所謂。

教學觀察省思: 動態的教材展現有助於了解課本平面圖形與文字的敘述，經過數位工具展示後，大致明瞭學習的內容，但是未必能進到推理幾何證明的層次，有的學生覺得上課時好像都懂了，但是題目一出來卻不知如何解題，這是因為本學習單元會結合前面所學的幾何先備知識，若學生仍有前面內容的學習障礙，就會導致解題困難。由於問題中”學習的效果”較籠統，兩個班

無意見者均達半數，問學生的感想大多認為，會操作也了解性質，但是就是考不好，或是即使沒有用數位工具上課還是考得不錯，換句話說，有互動白板輔助學生學習數學，在情意和技能方面有較多正面的肯定，但是在認知方面卻不易提升。因此互動白板提供互動的介面，學生可藉由此介面，互相學習數學內容與資訊技能、欣賞表現與創新、表達溝通與分享等能力，但是需藉助軟體的支援及教學整體的規劃設計，適用於輔助學習。

從以上探討得知，高成就學生對數學學習態度整體而言，優於低成就學生；高成就學生較喜歡數位工具；高低成就學生都喜歡使用互動白板。

第三節 應用「數位工具」融入教學及「一般講述教學」教學模式的探討

對實驗組進行的教學設計，在尺規作圖內容與課本例題、隨堂練習、自我評量及習作的檢討部分和控制組是一致的，而數位工具則融入於三角形三心的概念建立與性質的探索。以下分析一般講述教學上課的情形與數位工具融入教學之觀察。

一、一般講述教學上課的情形

一般講述教學中，研究者將教學生尺規作圖的狀況與控制組上課時對學生參與度的觀察，分述如下。

(一)尺規作圖

傳統教室由老師掌握教學進度，利用粉筆在黑板上書寫教學內容進行講述教學，課本是很重要的教材依據，在本單元「三角形三心」的幾何教學課程中，研究者認為幾何圖形的尺規作圖學習經驗對學生很重要，在不了解作圖的過程之前，不可貿然用資訊科技取代，因此老師要求學生上課時必需要帶尺和圓規來作圖。

在低成就班級，教師較需要逐步操作尺規作圖程序，讓學生一步一步看清楚跟著畫，例如畫三角形外心時教師就依學生學習之需要，按課本之學生活動先畫銳角，再畫直角，再畫出鈍角的外心讓學生跟著做，而在高成就班級，老師只帶畫一個三角形的外心，其餘的就讓學生自己畫，有些學生甚至不需要老師先做示範，就利用已學過中垂線的畫法，畫出各種類型三角形的外心，有些學生會參考同學的做法自己畫。

學生作圖的過程中，銳角三角形的作圖比較會，直角三角形次之，以鈍角三角形的作圖較不易掌握，經研究者在課堂上發現此情形，建議學生可將學習單的紙面旋轉(圖 4.5)，讓三角形的邊呈現水平再作圖，如此學生困難情形便改善不少。也就是說，一般講述教學時在作圖線段的中垂線時，

大多是先畫水平線段，再以線段兩端點畫弧作出中垂線，教學時較少用傾斜線段作中垂線。這也是一般講述教學中需注意到，教學範例常是只用一兩個特例，在黑板上無法靈活的旋轉圖形，或作較多例子的探索，最後終將淪為記憶一堆數學性質，強迫接受再套用於解題技巧中。



圖 4.5 學生旋轉學習單操作鈍角三角形外心的尺規作圖

(二)學生上課參與度

從控制組高成就班級一節課的教學現場，實地觀察學生上課的學習狀況，這是本單元預定教學 10 節課的第七節，任課老師教學進度已在檢討課本的本章自我評量。高成就班級有些學生非常認真聽老師講述，少數學生會適時回應老師的提問，大部分的學生知道老師的教學流程(按照課本的例題，演練隨堂練習，作本章自我評量，再作習作)，有些學生埋頭苦幹先自己作答，等老師教到該題再對答；有些學生則等老師講解完畢再抄寫過程；有些學生則埋首於課後練習講義或補習班教材中，似乎有自己的進度，並與老師的講解不同步，對於研究者在教室中觀察注視，也不覺得有什麼妨礙，自己做自己的題目；僅少數的學生容易分心，東張西望，也不跟進度。教師則扮演整節課講述教學的角色，一題一題講解，對於題目所需的圖形，則徒手用粉筆畫圖(沒有使用尺規工具)，講解時會用不同顏色粉筆補述從題目的已知條件求出所需的數據或畫輔助線，而且一邊講解一邊寫作法(如圖 4.6 及圖 4.7)。

同樣本單元預定教學 10 節課的第七節去觀察控制組低成就班級學生的上課情形，有些學生很認真的聽講，並作記錄，但是較依賴老師的講解，整個課堂沒有回應，老師只得唱獨腳戲，有些學生則不帶課本，坐在教室後面有五、六個學生會干擾學習甚至不理會教師上課。經訪談控制組低成就班級上課教師，老師表示對他們的行徑也常不斷要求修正，但因會妨礙教學進行，有時只好睜一眼閉一眼，只要學生不過度干擾上課；還有學生

頻頻回頭看教室後面的時鐘或做自己的事(如圖 4.8)；課程進行到一半，已有幾個學生趴著睡覺(圖 4.9)。有些學生表示很想學，但是仍聽不懂，所以數學課很難熬。作自我評量之前，老師先複習本章節三角形三心的性質，再一題一題講解，深怕學生聽不懂就再重述一次。



圖 4.6 高成就控制組：學生上課情形

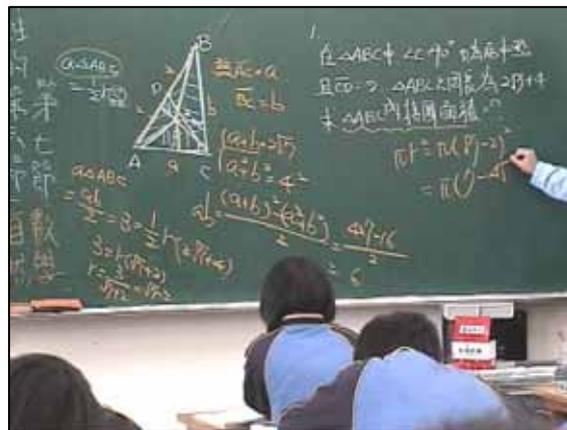


圖 4.7 高成就控制組：老師徒手用粉筆畫圖講解，並用不同顏色粉筆補述



圖 4.8 低成就控制組：上課情形(一)



圖 4.9 低成就控制組：上課情形(二)

從上述一般講述教學的觀察，高成就學生較能積極主動學習，當學生跨越了非形式演繹的幾何學習層次邁入形式演繹層次，就有能力推理邏輯證明定理，此時對於性質應用於解題的技巧或發展自由探索與統整的能力增強，就不再依賴老師的逐題講解，但未跨越學習層次者，就需要引導。低成就學生由於對數學學習沒有興趣，累積太多學習障礙，雖然老師很賣力的一遍又一遍的講解，仍很難引起學生的共鳴，研究者認為若是從頭到尾都是講述教學，學生參與情況就是如此，如同 TIMSS 2003 的調查報告一樣，臺灣學生在數學的表現是好得很好，差的也很多，呈現缺乏自信心的現象，一般的講述教學方式太過枯燥乏味，往往不能引起學生學習數學的動機和興趣。因此教師在教學現場許可的條件下，依學生需要適度作教學的改變是有必要的。

二、應用「數位工具」融入教學情形

研究者將數位工具融入在三角形三心概念的 formed 與性質的探索。但是學生從未操作過「三角形三心」軟體，大部分學生對於觸控白板的電子筆也不熟練，所以第一節課花比較多的時間教導學生操作，剛開始學生上台演練時會給予提示，而學生對於新的數位工具亦勇於嘗試，再加上學生在互動白板操弄的同時，其他同學亦在互相見習。不過學生需要時間探索三角形三心性質，還要小組討論與上台發表，因此比預定進度延後一節課，所以在講解課本與習作的題目就很趕，雖如預定進度在第 10 節課教完此單元，但控制組早已教完此單元，甚至做過一次試卷的評量了。一般講述教學似乎較能掌握進度，有效率地完成知識的傳達。

從教學活動的錄影觀察，實驗組課程進行中，教師有較多的時間在各組間巡視，發覺學生學習的問題而適時指導，而學生之間的互動亦增加，小組討論時會彼此交流，學生上台發表時，台下亦專心注視著上台同學，並隨時提供意見(如圖 4.10 及圖 4.11)。



圖 4.10 實驗組學生之間會互動討論



圖 4.11 實驗組學生專心注視著同學上台發表

應用數位工具引導學生學習三角形三心的過程中，由於軟體的優點可提供準確作圖與靈活移動三角形內角的角度，加上互動白板的特性可提供多元學習型態，讓學生不拘泥於平面教材的敘述，在互動白板上靈活操弄展示軟體教材，並激發不同思考方向。因此研究者觀察到實驗組學生對於三角形三心性質的操弄，在教與學中有下列影響：

(一) 數位工具的精準性

用數位工具和尺規作圖有何不同？以「三角形三邊的三中線交於一點嗎？」為例：

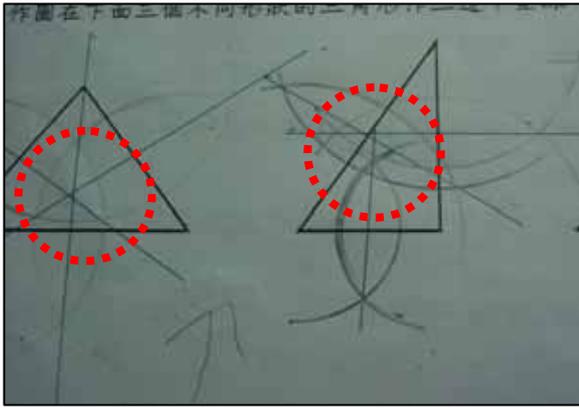


圖 4.12 學生作圖:三中線不交於一點

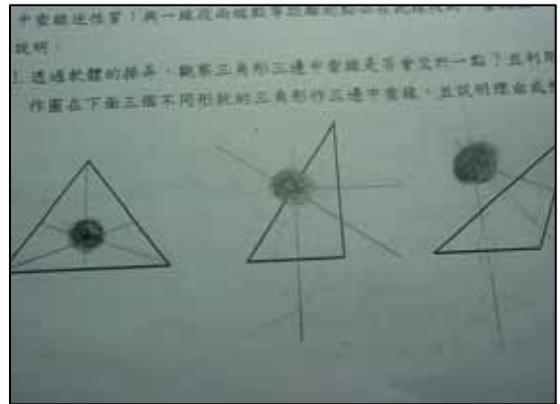


圖 4.13 學生作圖: 三中線保證交於一點

圖 4.12 甲學生在外心的尺規作圖時，因畫出三中垂線不交於一點而產生質疑。

圖 4.13 乙學生翻閱課本，已知三中線會交於一點，塗很大點掩飾作圖的誤差。

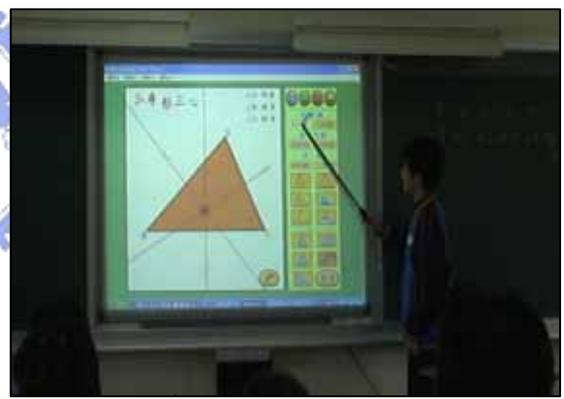
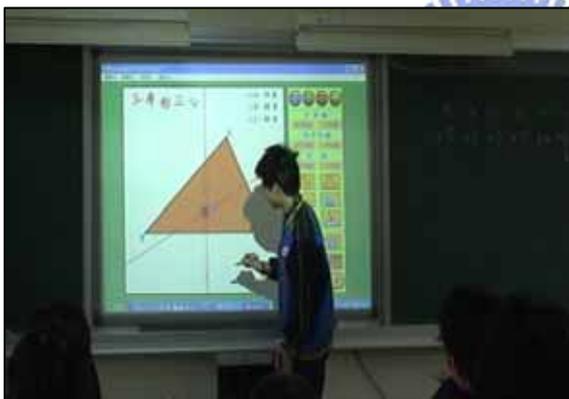


圖 4.14 學生操弄數位工具找外心

圖 4.14 學生應用數位工具先按出兩條中垂線，用畫筆點出交點，再按出第三條中垂線，也會通過此交點，所以學生知道作圖時只需畫出兩條中垂線，就可以找到外心了，也提供學習經驗舉一反三應用到內心和重心的尺規作圖。這歸功於數位工具作圖很精準，提供便於觀察的最佳介面。

(二)可變動性、改變教學流程

「三角形三心」軟體的按鈕設計可以交互運用，當學生在探索工具時操作的流程並非唯一性，以「何謂外心？外心的位置？」的探索為例：

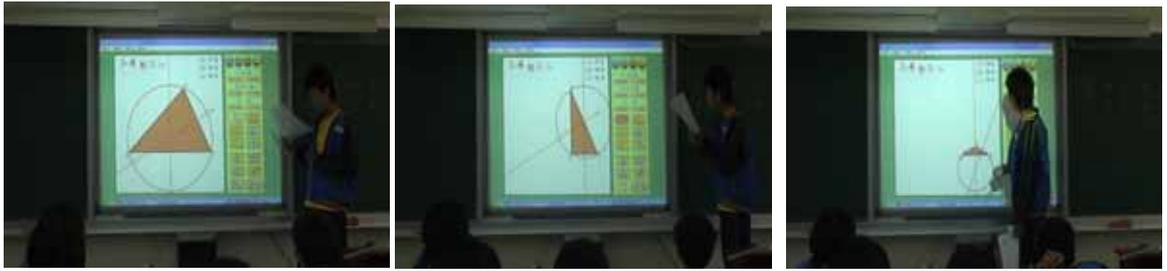


圖 4.15 學生操弄數位工具:不同種類三角形與外心的位置關係

圖 4.15 將外接圓顯示出來，學生較容易接受外心名稱(外接圓圓心)，當慢慢移動三角形頂點改變內角角度時，不同種類三角形的外心位置就一目瞭然。同樣效果推演至內心(內切圓圓心)的位置探索，此時亦呈現軟體的可變動性。

學生在數學科學習狀況問卷中提到三心學習的困難度在於很容易搞混定義和性質，例如探討外心的位置時，講述教學時一定先講定義，再作中垂線的尺規作圖得交點叫外心，然後分別畫銳角、直角、鈍角三角形再作中垂線尺規作圖得外心位置分別在三角形的內部、斜邊上、外部。然後用中垂線性質再推演外心和頂點等距離，此時再畫出外接圓。繞了一大圈才將外心與外接圓連接起來。

數位工具的應用會顛覆上述的教學流程，學生點出外接圓含圓心與半徑的功能按鈕，而半徑的線段可以固定一端點於圓心，繞者圓心轉動產生外接圓，當移動頂角改變內角度數，即變換不同種類的三角形，一來可觀察圓心位置又可連接外接圓圓心叫外心的名稱，而半徑轉動軸又帶來外心到頂點等距離的性質，再用中垂線性質，說明外心一定會落在中垂線上。

誠如呂益昇(2005)針對三角形外心與內心概念學習困難提出的建議中，加強繪製參照圖與轉化能力，學生一方面由圖形思考相關問題，一方面由圖形歸納幾何性質，將有助於提升學生的數學層次與論證能力。

(三)新科技改變教師的角色扮演

在一般講述教學，老師通常扮演權威者的角色，主導教學中的一切，但資訊的普及加上學生在適應新科技的能力比老師強，可就改觀了，以「三角形與圓的關係？(圓在三角形外面)」為例：



圖 4.16 學生操弄數位工具：三角形與圓的關係

性質：「任意一個三角形可畫出一個外接圓，任意一個圓可畫出無限多個內接三角形。」

圖 4.16 第一位學生徒手用畫筆畫出多個三角形，第二位學生利用長尺想畫三角形畫得標準些，第三位學生原本隨手畫三角形，無意中發現連研究者都不知道的功能，電子筆觸控白板畫線段時在起點處按電子筆按鍵一下，再到終點處按電子筆按鍵一下，就可以畫出很直的線段。

再看學生操作「角形與圓的關係?(三角形在圓外面)」

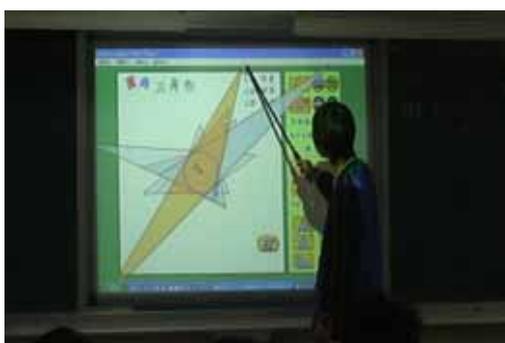


圖 4.17 學生操弄數位工具：三角形與圓的關係

性質：「任意一個三角形可畫出一個內切圓，任意一個圓可畫出無限多個外切三角形。」

圖 4.17 學生利用軟體工具呈現圓與外切三角形，不必徒手或用長尺畫。此乃新科技帶進教室產生的衝擊，老師由指導者變成學習者，當新科技引入後，教師需加強應用資訊科技的使用技能，才能掌握工具的特性，充分發揮功效於教學設計中。

(四)數位工具無法推論幾何性質之證明

數位工具並非萬能，以「三角形三頂點與內心的連線將 $\triangle ABC$ 分成三個小三角形，其面積關係為何？」為例：(如圖 4.18)

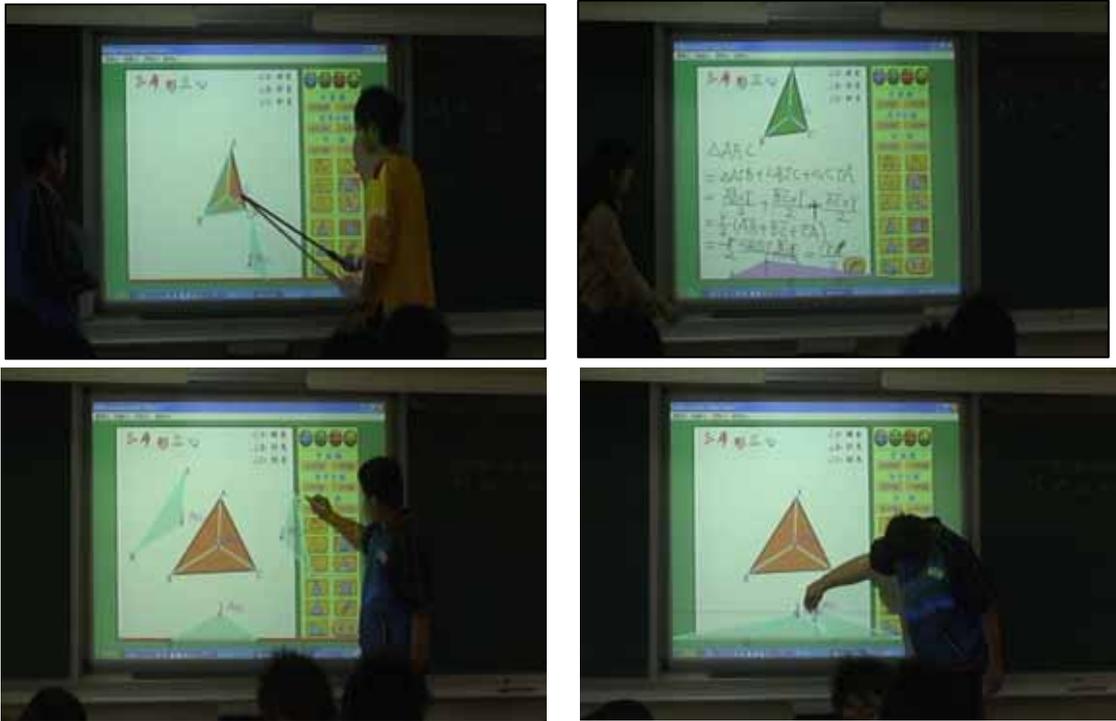


圖 4.18 學生操弄數位工具：三角形三頂點與內心連線分成三個小三角形與原三角形面積關係

性質：「若 $\triangle ABC$ 周長為 s ，內切圓半徑為 r ，則 $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2}rs$ 」

圖 4.18 為實驗組與控制組兩位學生分別對本題問題的操作，前者選用電子筆長筆操作(上排)，不需要老師提示，將該組的結論很順暢的呈現出來，會說出結果但是不會證明，同組學生用畫筆補充說明；後者選用電子筆短筆操作，該生平時就對數學學習有很大的障礙，很想上台操弄但是又怕不會，因此在下課時要求老師先教他，等到下節課討論到此題時，便主動到互動白板操弄，雖然學生會操作圖形在直觀上了解此性質，但是對本題的證明推理上就顯得述手無策了。

再從學生的學習單檢視學生的證明過程，如圖 4.19。

已知：如圖 $\triangle ABC$ 中， L 、 M 、 N 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的中垂線
 求證： L 、 M 、 N 三線交於一點，且該點到 $\triangle ABC$ 的三頂點等距離
 證

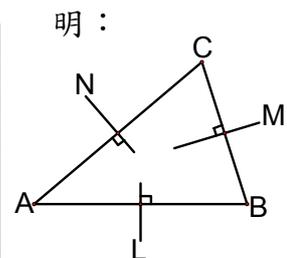
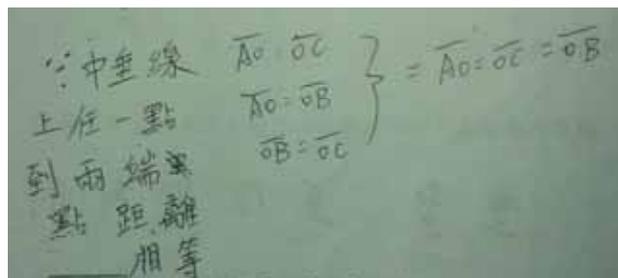


圖 4.19 學生的證明過程

上圖是一位實驗組高成就學生的證明過程，該學生數學學習成就後測 99 分(只錯一題的單位沒寫)，延後測 100 分。在證明此題時，並未推證 O 點是如何產生的，該性質圖形的心像很明確，但是仍需引導推論證明的學習。因此數位工具提供最佳視覺化的操作環境，但是無法推論幾何性質之證明。

(五)互動白板提供多元的學習型態

學習型態也可以多元，以「重心在任一中線上的比例關係為何？」

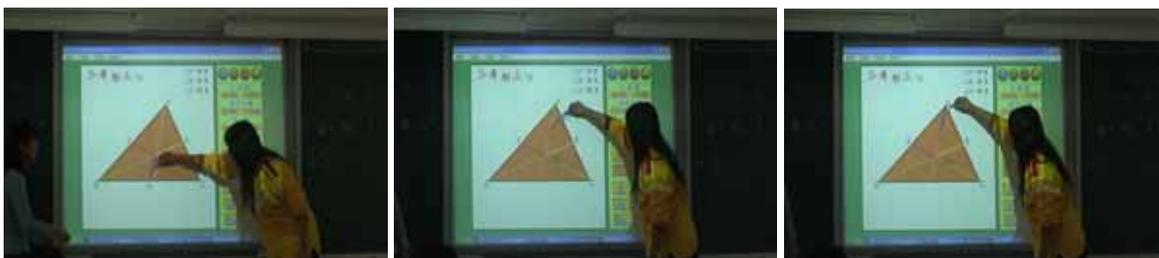


圖 4.20 學生操弄數位工具：重心在任一中線上的比例關係

「三角形重心與頂點連線距離為重心與對邊中點距離的兩倍。」

學生操弄過本題的討論之後，更加深其印象，即使不會證明，但會記住性質應用於解題技巧上，當問到倍數關係時，也會作答。相較於在傳統黑板上作圖教學，互動白板提供多元的學習型態，互動白板的易用特性，可以讓老師和學生在教學互動中，充分發揮想像力和創造力。





第五章 結論與建議

本研究主要結合資訊科技與教育，應用數位工具：「軟體」採用謝銘祥(2007)利用 Flash 軟體開發輔助國中數學教師教學並提供學生觀察、探索的「三角形三心」幾何課程的電腦輔助教學軟體；「硬體」採用 E 化教室配置的「互動白板」，融入國中九年級數學「幾何」主題中「三角形的外心、內心、重心」進行教學設計，並探討應用數位工具融入三角形三心單元的教學，對學生數學學習成就與學習態度的影響，並比較數位工具融入教學模式與一般講述教學模式的異同。以下依據研究結果與發現，歸納結論，並提出建議，作為未來相關研究之參考。

第一節 結論

根據研究結果，本研究提出研究結論如下：

- 一、不同學業成就及接受不同教學模式的學生，在數學學習成就的後測與延後測表現未具有交互作用。從主要效果來看，學生的數學學習成就表現，高成就組優於低成就組；高成就的實驗組不如控制組，低成就的實驗組比控制組好但未達顯著水準；高成就實驗組和控制組與低成就實驗組延後測皆高於後測，但是低成就控制組延後測卻比後測退步。
- 二、數位工具融入的教學模式對低學業成就組的學生有較多的學習成就之影響，但是在高學業成就組則無此現象。
- 三、數位工具融入的教學模式對低成就組的學生有較佳的學習保留效果。
- 四、實驗組高成就與低成就組的學生對數位工具融入教學皆有正向的認同，而且高成就比低成就學生有更高度的肯定。
- 五、實驗組兩組學生對「解題方法與分享」、「電腦軟體與數學學科內容」、「數位工具操作方式」分項的看法有差異，對「分組問題討論態度」、「電子白板學習數學特色」則看法一致，而且在教學上使用電子白板，學生均反應十分喜歡。
- 六、數位工具融入的教學模式，提供精確、可變異、動態連續變化及高互動的特性，會改變教材呈現的順序以及教師的角色扮演，特別是使用互動白板，學習活動的設計可以更多元化。

再針對整個實驗研究過程做以下的省思：

1. 對學生數學學習成效省思：

- (1) 在高成就實驗組學生前測、數學學習成就後測及延後測皆低於控制組，而且兩組在數學學習成就後測及延後測皆未達顯著差異，從上課的觀察與教師訪談中得知，當學生能了解三角形三心的概念與性質後，就有能力作題目的練習，控制組在預定10節課的第七節課已開始作習作及講義練習，反觀實驗組第七節課還沒完成所有的性質操弄，即實驗組在解題練習的時間較少，呂益昇(2004)提到缺少相關的解題經驗，論證觀念不完整，文字表徵不足可能造成學習困難，若實驗組在數位工具幫助下能了解構圖原理與存在性，但是練習不夠，要考的比控制組好是有困難的。大部分實驗組學生對尺規作圖學習單皆能正確的完成，上台操弄工具時主動性較高，對各性質的學習應不會太困難，因此數位工具融入的教學模式可能對高成就學生學習效果的提升不大，郭昭慧(2004)也指出用電腦輔助教學對高分群學生學習成效的提升有限。然而要跨越幾何學習層次光靠資訊融入是不夠的，粘憲昌(2004)設計詮釋和探索導向學習任務對高學習成就學生進行教學，學生解題能力獲得提升；呂益昇(2004)也曾設計「類比遷移」、「局步推理與模仿」活動，對高成就學生進行教學，發現能有效協助學生由形式證明的混沌狀態趨向明朗化。因此研究者在數位工具操弄之後，雖然有進行講述教學逐步引導學生做解題與推證之學習，但操弄時間佔用較多，講解練習時間很趕，因此練習不足也可能造成進步不多的因素。
- (2) 對低成就學生而言，雖然實驗組學生學習成就之後測與延後測結果均高於低成就組，但未達顯著水準。根據郭昭慧(2004)的研究顯示，在班級教室用電腦輔助教學對低分群學生的學習成就沒有效果，但是對中分群學生有良好成效。再看謝銘祥(2007)在電腦教室進行電腦輔助補救教學的研究，學生後測成績顯著優於前測。所以對低成就學生而言，若能有機會在電腦教室中，給每位學生充分操弄軟體的機會，加深學生對幾何圖形與性質的印象，再加上解題與論證的引導，應可以再提高學習成效。再者呂益昇(2004)提到，未熟悉預備知識，缺乏利用已知性質推理的能力，會造成學生學習的困難。教學實驗中，低成就學生對前面所學先備知識的性質不了解，無法進一步推證，在尺規作圖時仍需一步一步示範給學生看，而收回來的學習單有四分之一是空白，且錯誤率不低，但是礙於時間又無法先做補救教學。可能學生在先前概念的學習不佳，影響新概念的學習，因而造成實驗成效不佳。
- (3) 現階段學生受限於升學壓力，研究者亦陷於考試引導教學之趨勢，在設

計測驗工具時難免用以往常用的紙筆測驗模式命題，如此一來就無法檢測學生學習的進步是源自數位工具所帶來的效果，反而實驗組學生花較多時間在自由探索與發表上，解題訓練的時間減少了，自然不利於在紙筆測驗的表現，所以高成就實驗組數學學業成就表現本來就低於高成就控制組，更難以在學習成就有所突破。陳惠邦(2006)指出，受到長時間考試導向的束縛測驗工具仍不易突破，多元評量量化不足以說明的需加上質化加以分析，方能了解學生學習的障礙。而研究者雖然獲知高成就實驗組學生在數學學習成就上表現低於高成就控制組，低成就實驗組學生在數學學習成就上表現高於低成就控制組但未達顯著水準，但是從學生學習的觀察與訪談，學生學習的不只是數學更加提升技能與情意的培養。

2. 對學生學習態度的省思：

實驗組學生從國小三年級開始培養資訊能力，而且大多數學生家裡也有電腦，因此應用數位工具對學生而言不成困擾，而且用學生喜歡的電腦教學能提振學生的學習興趣，減低學習焦慮。這在升學壓力及學習枯燥的低迷數學教學士氣中，蹦現一線曙光。只是一旦要學生上台發表，就有許多學生却步，這也是長期使用一般講述教學造成學生較依賴被動的學習態度。因此也激發站在教學第一線的教師研究思索教學方式的改變：粘憲昌(2004)設計詮釋和探索導向學習任務對高學習成就學生進行教學，降低學生的學習焦慮，提升動機、信念及互動的學習品質。呂益昇(2004)提到唯有教師與學生產生互動，活動設計才能發揮教學的功能。郭昭慧(2004)認為資訊融入教學對學生的數學學習態度產生正向的影響。謝銘祥(2007)實施電腦補救教學可以提高學生的學習興趣，增加學生學習的信心。因此基於應用數位工具於數學教學中，實驗組學生持正向的認同，研究者省思平時教學上應常常提供學生討論與分享的情境，藉用數位工具達到互動積極的學習態度應是不錯的方式。

3. 使用數位工具融入教學模式與一般講述教學模式不同特性的省思：

- (1) 研究者在一一般講述教學模式進行時，發現高成就學生理解能力較佳者，可以在老師講解前或擦黑板的空檔，主動先解題再和老師對答案，解不出來時，才等老師講解，所以很會利用時間做解題思考的訓練，而低成就學生則需要老師一步一步的引導。在大班教學學生程度不一，老師放慢速度教不會的學生時，會的學生就能自我學習，不會延宕學習。當在黑板教完一題要教第二題，不懂的學生可將黑板內容，先做紀錄再慢慢消化。所以教師能有效掌握教學進度，將整理好的教材內容有系統的呈現。

(2) 數位工具融入教學模式中，發現有如郭昭慧(2004)提到軟體的特質可以改變圖形形狀和移動圖形位置，使抽象符號表徵透過圖形表徵而具體化，並將課本靜態的教材內容中無法呈現的教材，具體的展示出來，加深學生對三角幾何內容的印象。研究者還發現數位工具提供精確的作圖，在變動任意三角形的三心位置操作上有很好的視覺效果，由於軟體提供學生自由探索，可能會改變教材呈現的順序，不再依照課本流程作教學的呈現，新科技之下教師也可以是學習者，對於學生展現的創造力使得學習活動可以更多元化。林儀惠、張正杰、郭伯臣、楊智為(2008)在教師使用互動白板融入教學進行國小數學五年級面積單元教學之學童，其數學成就測驗結果優於教師以傳統模式進行教學之學童，而且大部分的學生皆能肯定使用互動白板融入教學，並能提昇學生對學習數學之興趣。陳惠邦(2006)提出技術支援、教師專業發展及教學資源數位內容是互動白板導入教室教學成功的三個因素，本實驗教學與傳統教學模式比較，並未達到學習成效的顯著差異，可能是研究者初次使用數位工具，未能掌握軟硬體特性，資訊能力不足所致。

整體而言，學生在數位工具融入教學的學習態度持正向的看法，但是學習成就卻未收如預期之效果，反思原因可能是(1)老師不熟悉硬體特性(2)學生只重視升學解題技巧(3)低成就學生早已放棄，難以挽救(4)無法讓學生有機會實際操作數位工具(5)紙筆測驗工具仍待突破。

第二節 建議

本節依據研究者在整個研究的過程與感受，在軟體工具設計、互動白板工具及未來研究方面提出下列幾點建議。

一、軟體工具設計的建議：

1. 「三角形三心」軟體的操作使用簡便，對於軟體的畫筆功能有時會與頂點移動產生干擾，而在圖形上方書寫邊長數字或代號時，需從三角形外部空白底圖起始，才能在圖形上留下筆跡。研究者因為教室的電子白板所附軟體具有定格圖形與書寫功能，可以克服此操作問題，若無此設備，就得借助其他書寫軟體的協助。
2. 本實驗採用「三角形三心」軟體符合本單元學習指標，對於「重心與中點和頂點的連線切割成六個小三角形的面積相等」是學生操作最不順手的性質，因為前面探索任意三角形重心位置之性質時，大多移動

三角形頂點，到操弄此性質時，學生很理所當然地去試著移動重心、中點和頂點，但是操作過程中，只要一移動任一頂點，就會回復原來的圖形卻無法體會六個小三角形可以經過移動變形但不改變面積，最後可操弄到全部重疊在一起。研究者也是花最多時間在研究此性質之操弄，方才發現小三角形的邊是可以移動的。建議軟體的設計若能加小註解，操作者能省去摸索時間，也會使此軟體更臻完美。

3. 研究者接觸資訊融入教學以來發現，軟體的設計由教學者開發的，較符合教學的需求，但是教學者需有程式設計能力和研發時間實屬不易，像本實驗採用謝銘祥(2007)開發「三角形三心」軟體融入數學幾何的教學，對於提升學生學習興趣與探索察覺能力很有幫助，應予以推廣給教此單元的教師使用。

二、互動白板工具的建議：

1. 用互動白板進行教學過程中，學生需以外心為圓心，旋轉半徑軸線繞圓心一圈形成圓時，常會造成當機，後來尋求廠商技術支援才發現是定位有問題。因此互動白板建置時，需注意單槍投影機流明度與位置固定的問題，因會影響白板呈現內容的效果與定位不準造成操作不順而當機。
2. 因為無法利用電腦教室教學，本教學實驗在E化教室中進行，僅有電腦單機設備，當需要小組討論如何操作工具時，只能一個一個來操作，較浪費時間，若能增加設備讓各小組能同步操作討論，學生操作練習的機會才能提高。

三、教學建議：

1. 數位工具融入教學應與一般講述教學模式搭配，因此兩者時間分配之多寡需配合學生學業成就表現作適度的調整，高成就組較有能力主動學習，尺規作圖和數位工具的操弄時間比低成就花得少，宜將多一些時間加強推理論證與解題練習上，而低成就學生在尺規作圖與數位工具操弄較需要老師一步一步引導，若有機會應該利用一節課到電腦教室，提供每一位學生實際操弄的機會。
2. 利用數位工具雖然可將抽象化教材設計成提供操作、探索及高互動的動態教材，但是對於推理論證部分就沒有幫助了，通常還是得借助一般講述教學。
3. 考試導向的測驗工具仍未突破，無法檢測數位工具帶來的學習成效，多元評量量化不足以說明的部分需加上質化加以分析，方能了解學生學習的障礙，而提供數位工具融入數學以檢測教學成效的工具設計仍需進一步再深入研究。

4.三角形三心是國中幾何學習的最後一個單元，涉及到前面學習單元之先備知識不足就會造成大的數學學習障礙，因此研究者認為數位工具的融入教學應仍有其效果，若能針對適當主題單元進行教學設計，對學習提不起興趣及學習成效不佳的學生來說，仍是一個福音。

資訊科技帶進教室的潮流正方興未艾，身為教師除了在自己的學習領域貢獻之外，還需學習資訊技能與學生教學相長，真正達到「資訊隨手得，主動學習樂；合作創心意，知識伴終生」之境界。



參考文獻

中文部分

- 王千偉(1997)。合作學習。師友，民86(10)，34-39頁。
- 王全世(2000)。資訊科技融入教學之實施與評鑑研究。國立高雄師範大學資訊教育研究所碩士論文。
- 王永賢(2004)。結合資訊融入教學與合作學習策略於國中數學課之行動研究。國立彰化師範大學科學教育研究所數理教學碩士班碩士論文。
- 尤冠龍(2006)。幾何繪圖軟體 GSP 融入國中數學教學對學生學習成就與態度影響之研究—以「函數圖形與二元一次方程式圖形」為例—。國立彰化師範大學科學教育研究所數理教學碩士班碩士論文。
- 左台益、王惠中(2000)。動態幾何實驗設計。中華民國第十六屆科學教育學術研討會短篇論文集編 (pp. 337-345)。台北市：國立台灣師範大學科學教育研究所。
- 江蕙茹(2002)。新的教育代理人：資訊科技融入教學。教育趨勢導報，2。2008年3月27日，取自<http://eserver.nhlue.edu.tw/EduClasses/auth/1063851141/note/教育代理人.pdf>
- 吳德邦(1995)。范希理模式對我國師範學生在非歐幾何學的學習成就與幾何思考層次的研究。臺中師院學報，7，443-474頁。
- 何森豪(1999)。Van Hiele幾何發展水準之量化模式--以國小中高年級學生在四邊形概念之表現為例。臺中師範學院國民教育研究所碩士。
- 何榮桂(2002)。台灣資訊教育的現況與發展—兼論資訊科技融入教學。資訊與教育，87，23-31頁。
- 吳鳳萍(2002)。探討動態幾何軟體活動設計對國小五年級學童在面積學習成效方面之影響。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 吳美娟(2002)。歐美成人教育應用網路學習之趨勢，社教雙月刊，110，31-40頁。
- 余麗惠(2003)。高雄市高職學生運用電腦軟體學習三角函數成效之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- 李政豐(2003)。資訊科技融入數學教學模組實務的研究，國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文。
- 李俊儀(2004)。資訊科技融入數學教學模組之開發與研究-以國中平面幾何基礎課程教學為例。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文。

- 呂益昇(2005)。國三學生三角形外心與內心概念學習之困難因素及類比教學實驗的探討。國立臺灣師範大學數學系在職進修碩士班碩士論文。
- 林永發(1998)。在動態幾何環境中培養命題式擬題能力的研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 林清山(2000)。學習理論與教學心理學的互動。教育研究集刊，45，1-13頁。
- 林星秀(2001)。高雄市國二函數課程 GSP 輔助教學成效之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- 林佳慧(2003)。探討動態幾何環境中函數課程教學成效之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- 林震岩(2007)。多變量分析:spss的操作與應用。台北市：智勝文化。
- 邱俊仁(2003)。高雄地區國一學生數學焦慮與數學成就之相關研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- 林儀惠、張正杰、郭伯臣、楊智為(2008)。互動白板在國小數學教學之探討-以五年級面積單元為例。第四屆台灣數位學習發展研討會，國立台中教育大學。
- 胡凱華(2001)。動態幾何環境中圓形概念教學成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。
- 紀豐裕(2003)。在非導師班實施合作學習策略於國中數學教學之行動研究，國立彰化師範大學科學教育研究所數理教學碩士班碩士論文。
- 陳嘉彌(1997)。網路互動式遠距教學策略之構念與其可行性(上)，教學科技與媒體，34，42-46頁。
- 張國恩(1999)。資訊融入各科教學之內涵與實施。資訊與教育，72，2-9頁。
- 教育部(1999)。國民中小學教師資訊基本素養指標。「資訊教育基礎建設計畫」擴大內需方案。2008年3月22日，取自
<http://www.networklab.csie.ncu.edu.tw/moeplan/>
- 教育部(2001)。「中小學資訊教育總藍圖」。2008年3月22日，取自
[http://www.edu.tw/files/site_content/b0089/guideline\(9006\).pdf](http://www.edu.tw/files/site_content/b0089/guideline(9006).pdf)
- 張英傑(2001)。兒童幾何形體概念之初步探究。國立台北師範學院學報，14，491-528頁。
- 郭生玉(2001)。心理與教育測驗。臺北縣中和市：精華總經銷。
- 張國恩(2002)。從學習科技的發展看資訊融入教學的內涵。北縣教育，41，16-25頁。
- 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。2008年3月22日，取自國教專業社群網 <http://teach.eje.edu.tw/9CC/index.php>

- 陳創義(2003)。青少年的數學概念學習研究---子計畫六：青少年幾何形狀概念發展研究(2/2)。國科會專題研究計畫(NSC 91-2522-S-003-007-)成果報告。
- 陳裕亮(2003)。高職廣義角三角函數單元 GSP 電腦輔助教材之設計與教學成效研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。
- 粘憲昌(2004)。詮釋與探索兩種任務導向的學習特徵及成效之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。
- 郭昭慧(2004)。國中三角幾何GSP輔助教學之學習成效研究。義守大學資訊管理研究所碩士論文。
- 張秋男(主編)(2005)。2003 國際數學與科學教育成就趨勢調查(TIMSS)。行政院國家科學委員會計畫，編號：NSC 93-2511-S-003 -001-，國立臺灣師範大學科學教育中心。2008年3月25日，取自 <http://140.122.147.172/sec-dg03/NSC/TIMSS/Timss2003/TIMSS2003.htm>
- 陳惠邦(2006)。互動白板導入教室教學的現況與思考。2006 年臺北市全球華人資訊教育創新論壇，淡江大學蘭陽校區，2006年12月18-20日。
- 陳惠邦(2007)。以互動白板實踐互動教學理想的可能性：教師社群與專業發展觀點。「Interactive Classroom」研討會。北京師範大學主辦，2007年5月19日發表。2008年3月12日取自 <http://tw.classf0001.urlifelinks.com/css000000011129/cm7kfile-1178758083-9008-7368.doc>
- 莊護林、李肖蘭(2007)。在小學中文科及常識科應用互動白板的策略。GCCCE2007第十一屆全球華人計算機教育應用大會，2007年5月27日中國廣州。
- 康軒文教(2007)。國民中學第五冊數學教師手冊。康軒文教事業股份有限公司。
- 黃政傑、林佩璇(1996)。合作學習。台北市：五南出版社。
- 黃哲男(2002)。於動態幾何環境下國中生動態心像建構與幾何推理之研究。國立臺灣師範大學數學研究所碩士學位論文
- 曾尹姿(2005)。電腦媒體運用於國中幾何學習成效之研究_以三角形基本性質為例。慈濟大學教育研究所教學碩士論文。
- 葉福進(2005)。國三學生利用三種不同構圖工具進行構圖活動的表現之探討。國立臺灣師範大學數學系在職進修碩士論文。
- 劉湘川、劉好、許天維、易正明(1993)。我國國小中年級學童幾何概念的發展研究。中華民國科學教育學會，八十二學年度年會暨中華民國第九屆科學教育學術研討會發表。

- 蔡崇元(2001)。網路教學者教學互動策略之研究—以大學推廣教育教師為例。國立臺灣師範大學社會教育研究所碩士論文。
- 鄭志明(2003)。高中廣義角三角函數課程使用 GSP 電腦輔助教學成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。
- 謝哲仁(2001)。動態電腦幾何教學建構之研究。美和技術學院學報，19，199-211 頁。
- 戴錦秀(2002)。國小五年級學生使用電腦軟體 GSP 學習三角形面積成效之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。
- 謝銘祥(2007)。幾何探索軟體的開發與補救教學研究-以三角形三心探索為例，國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文。
- 譚寧君(1992)。兒童數學態度與解題能力之分析探討。台北師院學報，5，619-687 頁。
- 譚寧君(1993)。兒童的幾何觀—由 Van Hiele 幾何思考的發展模式談起。國民教育，33(5)，12-17 頁。



英文部分

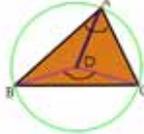
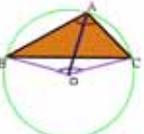
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.
- Bell, M. A. (2002). Why Use an Interactive Whiteboard? A Baker's Dozen Reasons! Teachers. Net Gazette, 3 (1), Retrieved 15 Jan. 2008, from <http://teachers.net/gazette/JAN02/mabell.htm>.
- Beauchamp, G. (2004). Teacher use of the interactive whiteboard in primary schools:towards an effective transition framework. *Technology, Pedagogy and Education*. 13, no. 3 (2004): 327-348.
- BECTA (2003). What the research says about interactive whiteboards. Retrieved 10.5. 2008, from <http://www.becta.org.uk/research>.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought.. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching Learning and teaching geometry K-12*. VA: *National council of teacher of mathematics*, 1-16.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of reasoning on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New York, NY: Macmillan.
- Harada, K., Gallou-Dumiel, E., & Nohda, N. (2000). The role of figures in geometrical, proof-problem solving — students' cognitions of geometrical figures in France and Japan. *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25-32), Hiroshima, Japan.
- Johnson, D. W. & Johnson, R. T. (1987). *Learning Together and lone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Jonassen, D. H. (1996). *Computers in the classroom: Mindtools for critical thinking*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools*. Prentice Hall, Inc. New Jersey.
- Mayberry, J. (1983). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 58-69.

- Moore, M. G. (1989). Three Types of Interaction. In M.G. Moore & G.C. Clark (Eds.), *Readings in Principles of Distance Learning* (pp.100 -105). University Park, PA: Pennsylvania State University.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Science Report: Findings from IEA's Trends in International mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Chestnut Hill, MA.
- Slavin, R. E. (1985). *Learning to cooperate, cooperating to learn*. New York : Plenum.
- Stephen, M. A. & Stanley, R. T. (2000). *Multimedia for learning: methods and development*. Allyn & Bacon, Massachusetts. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project) . Chicago ,IL: University of Chicago, Department of Education(ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288).
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- West, D. J. ,& Watson, D. E. (1996).Using problem-based learningand educational reengineering to improve outcomes. (ERIC Document Reproduction Service No.ED 400 242)
- Wagner, E. D. (1994). In Support of a Functional Definition of Interaction. *The American Journal of Distance Education*, 8(2), 6-9.

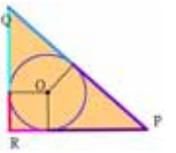
附錄一 三角形三心教學活動設計表

單元 名稱	國中第五冊第三章第二節 三角形三心	適用年級	9 年級
		教學節數	10 節
能力指標與分年細目			
S-4-13 能運用相似三角形的性質進行測量。			
S-4-14 能理解圓的幾何性質。			
S-4-15 能利用三角形及圓的性質作推理。			
9-s-08 能理解三角形外心的定義和相關性質。(S-4-13、S-4-14、S-4-15)			
9-s-09 能理解三角形內心的定義和相關性質。(S-4-13、S-4-14、S-4-15)			
9-s-10 能理解三角形重心的定義和相關性質。(S-4-15)			
9-s-11 能以三角形和圓的性質為題材來學習推理。(S-4-15)			
C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。			
C-R-02 能察覺數學與其他領域之間有所連結。			
C-C-04 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。			
C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。			
教學目標			
一、能知道三角形三邊中垂線的交點就是外心，並了解外心的性質及外心與外接圓的關係。			
二、能知道三角形三內角平分線的交點就是內心，並了解內心的性質及內心與內切圓的關係。			
三、能知道三角形三中線的交點就是重心，並了解重心的性質。			
四、能知道特殊三角形三心的關係。			
教學研究			
一、教材分析：將三角形三心結合圓的性質作幾何推理的證明，為國中幾何教材最後的單元，奠定幾何學習之基礎，以便銜接高中幾何教材。			
二、學生已學幾何分析：			
1. 簡單的幾何圖形		5. 圓形	
2. 三角形基本性質		6. 幾何推理	
3. 平行		7. 特殊三角形的性質	
4. 相似形			
教學資源			
1. E化教室：電子白板、單槍、互動白板(Interactive Whiteboard以下用IWB代稱)			
2. 康軒 九上教材(含簡報檔以PPT代稱)			
3. 「三角形三心」軟體(用Flash代稱)			
4. 尺規教具			

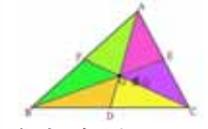
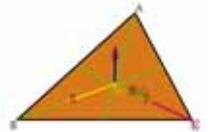
教學重點			
第一~三節課 主題1 三角形的外心			
1-1 能發現三角形外心的存在及外心到三頂點等距離。			
1-2 能知道三角形三邊中垂線的交點就是外心。			
1-3 能發現銳角三角形的外心在三角形內部，鈍角三角形的外心在三角形的外部，直角三角形的外心在斜邊的中點上。			
第四~六節課 主題2 三角形的內心			
2-1 能發現三角形內心的存在及內心到三邊等距離。			
2-2 能知道三角形三內角平分線的交點就是內心。			
2-3 能了解三角形內心與內切圓的關係。			
第七~九節課 主題3 三角形的重心			
3-1 能發現三角形重心的存在。			
3-2 能知道三角形三中線的交點就是重心。			
3-3 能了解重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍。			
3-4 能知道三角形的重心與三頂點連線將三角形的面積三等分。			
第十節課 主題4 特殊三角形的三心關係			
4-1 能知道正三角形的外心、內心、重心是同一點。			
4-2 能知道直角三角形外心到重心的距離為斜邊長的六分之一。			
教師指導	學生活動	Van Hiele 五階段學習模式	評量與備註
【三角形外心】 一、準備活動： 1. 硬體測試：電腦、單槍、IWB。 安裝 Flash 軟體。 2. 說明：學生分組、上課方式、教材內容、與小組評分方式說明。 3. 教師簡單說明『三角形三心』Flash 軟體之操作與電子筆之使用。相關外心的按鈕介紹。 二、發展活動： 1. 引起動機(PPT) 某地區有 A.B.C 三所學校，今欲蓋一間圖書館，使三校到圖書館的距離相等，圖書館的位置應蓋在哪裡？	預習課本P129~136 攜帶直尺、圓規 分成六組按討論組別入座，選定組長 聆聽 觀看、聆聽 觀看、聆聽 學生思考 課本P129先備知識：中垂線性質『一線段上任一點到此線段兩端點等距離』。先想想若只有A.B兩校時圖書館要蓋在什麼位置才會到兩校等距離。	學前諮詢	

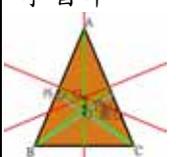
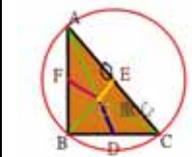
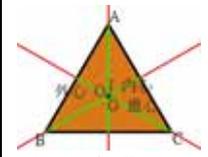
2.鼓勵學生上台操作 IWB，並畫畫看如何找出圖書館位置。	觀看、聆聽、操作IWB、發表	引導學習方向	
3.發外心學習單、檢查工具、計分、課間巡視。	小組討論，操作IWB尺規作圖	自由探索	學習單
4.電子骰子決定發表組別。	探討指定題目 推派代表		
5.引導學生上台、串場 發問：觀察外接圓如何形成，半徑的轉動發現什麼？	發表、操作IWB 問題一 ：如何畫外接圓？	自由探索與解說	學習單
6.發問：觀察三角形三邊中垂線是否會交於同一點？ 發問：各種三角形和外心的位置有何關係？	發表、操作IWB 問題二 ：外心（外接圓圓心）如何找？	自由探索與解說	學習單
7.發問：從哪兒觀察到等距離？	發表、操作IWB 問題三 ：外心到三角形____等距離，此距離為外接圓的_____。	自由探索與解說	學習單
8.發問：圓要怎麼畫？三角形要怎麼畫？ 名詞釋疑：圓內接三角形	發表、操作IWB 問題四 ：三角形與圓的關係？任意一個三角形可畫____個外接圓，任意一個圓可畫出____個內接三角形。	自由探索與解說	學習單
9.發問：還記得直徑所對圓周角度數的關係嗎？在這裡和直角三角形能扯出什麼關係？	發表、操作IWB 問題五 ：圓內接三角形為直角三角形時，其斜邊必為_____，即外接圓半徑為直角三角形斜邊的_____。	自由探索與解說	學習單
10.發問：這個夾角和弧度有關係嗎？若三角形變動呢？可利用畫筆幫助說明。	發表、操作IWB 問題六 ：觀察外心與任兩頂點連線的夾角與第三個頂點內角度數有何規律性？	自由探索與解說	學習單
11. IWB 操作 repeat 學生所得結論	檢視學習單、書寫結論	統整	 
12.老師講解： 例題 1 (P130) 利用中垂線性質來證明三角形的三邊中垂線會相交於一點。	觀看、聆聽	解說	隨堂練習 (課本 P131)
13.老師講解： 例題 2 (P132) 利用勾股定理求直角三角形的外接圓半徑。	觀看、聆聽	解說	隨堂練習 (課本 P132)

<p>14.老師講解：例題 3 (P133) 利用勾股定理求等腰三角形的外接圓半徑。</p> <p>15.老師講解：例題 4 (P133) 利用三角形外角性質求三角形以外心為頂點的角度。另解是利用圓心角與所對弧的度數相等性質，進而求出三角形以外心為頂點的角度。</p> <p>16.老師講解：例題 5 (P135) 求證鈍角三角形以外心為頂點的度數。另解是利用圓心角與所對弧的度數相等性質，進而求出三角形以外心為頂點的角度。</p> <p>三、綜合活動： 1.指導學生針對學習單問題進行討論並歸納結論。檢討隨堂練習 2.指派作業：習作(外心部分)</p>	<p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽 複習</p>	<p>解說</p> <p>解說</p> <p>解說</p> <p>解說與統整</p>	<p>隨堂練習 (課本 P133)</p> <p>隨堂練習 (課本 P136)</p>
<p>【三角形內心】 一、準備活動： 1.硬體測試：電腦、單槍、IWB、Flash 軟體。 2.學生各組得分情形 3.教師簡單說明『三角形內心』所用到 Flash 軟體之操作按鈕。</p> <p>二、發展活動： 1.引起動機(PPT) 如何找出與三條公路距離相等的倉庫？</p> <p>2.鼓勵學生上台操作 IWB、『三角形三心』軟體，並畫畫看如何找出倉庫位置。</p> <p>3.發內心學習單、檢查工具、計分、課間巡視</p> <p>4.電子骰子決定發表組別</p> <p>5.發問：內切圓如何形成？</p>	<p>預習課本P137~142 攜帶直尺、圓規 觀看、聆聽</p> <p>學生思考 課本P137先備知識：角平分線性質『一角平分線上的任一點到此角的兩邊等距離』。先想想上題若只有L.M兩條公路時倉庫要蓋在什麼位置才會到兩條公路等距離</p> <p>觀看、聆聽、操作IWB、發表</p> <p>小組討論，操作IWB尺規作圖 探討指定題目、推派代表</p> <p>發表、操作IWB 問題一：如何畫內切圓？</p>	<p>學前諮詢</p> <p>引導學習方向</p> <p>自由探索</p> <p>自由探索與解說</p>	<p>學習單</p> <p>學習單</p>

<p>6.發問：觀察三角形三內角的角平分線是否會交於同一點？各種三角形和內心的位置有何關係？</p>	<p>發表、操作IWB 問題二：內心（內切圓圓心）如何找？</p>	<p>自由探索與解說</p>	<p>學習單</p>
<p>7.發問：從哪兒觀察到等距離？</p>	<p>發表、操作IWB 問題三：內心到三角形等距離，此距離為內切圓的_____。</p>	<p>自由探索與解說 自由探索</p>	<p>學習單</p>
<p>8.發問：圓要怎麼畫？三角形要怎麼畫？ 名詞釋疑：圓外切三角形</p>	<p>發表、操作IWB 問題四：三角形與圓的關係？任意一個三角形可畫個內切圓，任意一個圓可畫出_____個外切三角形。</p>	<p>自由探索與解說</p>	<p>學習單</p>
<p>9.發問：小三角形可以移動嗎？移到底下紅色線條上看。發現什麼現象？和大三角形有何關係？</p>	<p>發表、操作IWB 問題五：如圖三角形三頂點與內心的連線將$\triangle ABC$分成三個小三角形$\triangle AIB$、$\triangle BIC$、$\triangle CIA$，其面積關係為何？</p>	<p>自由探索與解說</p>	<p>學習單   </p>
<p>10.發問：直角三角形邊上的線段，可以動動看嗎？觀察到什麼？</p>	<p>發表、操作IWB 問題六：觀察內切圓半徑與直角三角形邊長有何關連性？</p>	<p>自由探索與解說</p>	<p>學習單 </p>
<p>11. IWB 操作 repeat 學生所得結論</p>	<p>檢視學習單、書寫結論</p>	<p>統整</p>	
<p>12.老師講解：例題 6 (P137、138)利用角平分線性質來證明三角形的三內角平分線會相交於一點。</p>	<p>觀看、聆聽</p>	<p>解說</p>	<p>動動腦 (課本 P138)</p>
<p>13.老師講解：例題 7(P139)推導出三角形面積$=\frac{1}{2}\times$三角形周長\times三角形內切圓半徑。</p>	<p>觀看、聆聽</p>	<p>解說</p>	<p>隨堂練習 (課本 P139)</p>
<p>14.老師講解：例題 8(P140)探討等腰三角形的內切圓半徑。</p>	<p>觀看、聆聽</p>	<p>解說</p>	<p>隨堂練習 (課本 P140)</p>
<p>15.老師講解：例題 9(P141)求直角三角形內切圓的半徑</p>	<p>觀看、聆聽</p>	<p>解說</p>	<p>隨堂練習 (課本 P141)</p>

<p>16.老師講解：例題 10(142) 由例題證明從三角形內心到其兩內角頂點的連線所成的角與第三內角的關係。</p> <p>三、綜合活動： 1.指導學生針對學習單問題進行討論並歸納結論。 檢討隨堂練習。 2.指派作業：習作 (內心部分)</p>	<p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽 複習</p>	<p>解說</p> <p>解說與統整</p>	<p>隨堂練習 (課本 P142)</p>
<p>【三角形重心】 一、準備活動： 1.硬體測試：電腦、單槍、IWB、Flash 軟體。 2.學生各組得分情形 3.教師簡單說明『三角形重心』所用到 Flash 軟體之操作按鈕 4.各種形狀厚紙板</p> <p>二、發展活動： 1.引起動機，活動一(P143) 找厚紙板的物體重量分布的中心點。 2.發重心學習單、檢查工具、計分、課間巡視 3.電子骰子決定發表組別 4.發問：找重心和找外心有何不同？ 5.發問：線段GD，GE、GF可以動動看嗎？ 發問：發現什麼？ 6.發問：六個三角形可以動動看嗎？ 發問：發現什麼？ 7.老師講解：例題 11(P144) 透過相似三角形對應邊成比例，理解三角形的重心與頂點連線距離為重心與對邊中點距離的兩倍。 重心到一頂點的距離等於過該頂點之中線長的$\frac{2}{3}$。</p>	<p>預習課本P143~148 攜帶直尺、圓規 觀看、聆聽</p> <p>動動手：用一根手指撐住課本並旋轉，體會重心的位置。再試試厚紙板。</p> <p>小組討論，操作IWB 尺規作圖 探討指定題目、推派代表發表、操作IWB 問題一：重心如何找？ 發表、操作IWB 問題二：重心在任一中線上的比例關係為何？</p> <p>發表、操作IWB 問題三：如圖，三角形三邊中線將三角形分成六個小三角形，其面積關係為何？ 觀看、聆聽</p>	<p>學前諮詢與引導學習方向</p> <p>自由探索</p> <p>自由探索與解說</p> <p>自由探索與解說</p> <p>自由探索與解說</p> <p>解說</p>	<p>學習單</p> <p>學習單</p> <p>學習單</p> <p>學習單</p> <p>隨堂練習 (課本 P144)</p>



<p>8.老師講解：例題 12(P145) 理解三角形的重心與三頂點連線將三角形的面積三等分。 三角形重心的面積性質-三角形的重心與三頂點的連線段將此三角形的面積三等分；三角形的三中線將此三角形的面積六等分。</p> <p>9.老師講解：例題 13(P146) 利用重心將三角形面積三等分的性質求解。</p> <p>三、綜合活動： 1.指導學生針對學習單問題進行討論並歸納結論。檢討隨堂練習 2.指派作業：習作 (重心部分)</p>	<p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽 檢視學習單、書寫結論 複習</p>	<p>解說</p> <p>解說</p>	<p>隨堂練習 (課本 P145)</p> <p>隨堂練習 (課本 P146)</p>
<p>【特殊三角形的三心關係】 一、準備活動： 1.硬體測試：電腦、單槍、IWB、Flash 軟體。 2.學生各組得分情形</p> <p>二、發展活動： 1.發問：任意三角形的三心有關係嗎?可以動動頂點嗎?或是用按鈕找出等腰三角形位置嗎?觀察到什麼? 2.發問：正三角形的三心位置為何?</p> <p>3.發問：直角三角形的外心重心位置關係為何?</p> <p>4.老師講解：(P147) 讓學生發現正三角形的三心為同一點。</p> <p>5.老師講解：例題 14(P148) 利用直角三角形的外心到重心的距離是斜邊長的$\frac{1}{6}$作計算。</p>	 <p>發表、操作IWB 問題一：等腰三角形的三心有何關係?</p> <p>發表、操作IWB 問題二：正三角形的三心有何關係?</p> <p>發表、操作IWB 問題三：觀察直角三角形中外心與重心的距離和斜邊長有何關係?</p> <p>觀看、聆聽</p> <p>觀看、聆聽</p>	<p>自由探索 與解說</p> <p>自由探索 與解說</p> <p>自由探索 與解說</p> <p>解說</p> <p>解說</p>	<p>學習單 </p> <p>學習單 </p> <p>學習單 </p> <p>隨堂練習 (課本 P147)</p> <p>隨堂練習 (課本 P148)</p>

<p>6.重點整理：(P149) 教師利用這裡的重點整理幫學生複習本節所學的概念。</p>	<p>觀看、聆聽 複習</p>	<p>解說與 統整</p>	<p>自我評量 (課本 P150、 151)</p>
<p>7.檢討習作</p>	<p>觀看、聆聽 複習</p>	<p>解說與 統整</p>	



附錄二 三角形三心學習單

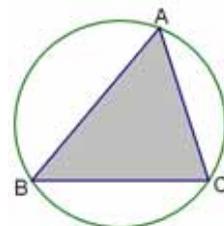
『三角形的外心』教學活動學習單

第 _____ 組班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

外心定義：如圖，若有一個圓通過 $\triangle ABC$ 三頂點，則這個圓稱為 $\triangle ABC$ 的外接圓，三角形稱為圓內接三角形，外接圓的圓心稱為外心。

問題一：如何畫外接圓？找_____與_____

問題二：外心（外接圓圓心）如何找？_____



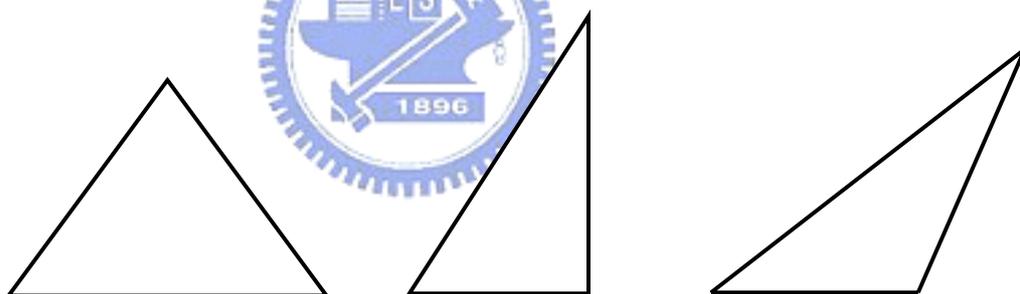
***先備知識：**

中垂線性質：一線段的中垂線上任一點到此線段兩端點等距離。

中垂線逆性質：與一線段兩端點等距離的點必在此線段的中垂線上。

***說明：**

1. 透過軟體的操弄，觀察三角形三邊中垂線是否會交於一點？並利用尺規作圖在下面三個不同形狀的三角形作三邊中垂線，並說明理由或想法。



2. 透過軟體的操弄，觀察三角形三邊中垂線的交點可否當作外心來畫外接圓？此外心的位置如何？並利用尺規作圖在上面三個三角形作圖看看，請說明理由或想法。

***結論：**(1) _____

(2) _____

問題三：外心到三角形_____等距離，此距離為外接圓的_____。

***說明：**

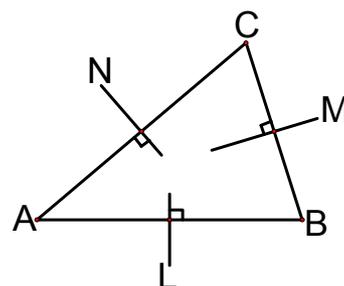
1. 透過軟體的操弄，觀察外心到三角形三頂點是否等距離？請說明理由或想法。

2. 運用外心到三角形三頂點等距離的特性，想想看可以應用在生活上嗎？
請舉例說明。

* 結論：_____

* 證明題：(參見課本 P130)

已知：如圖 $\triangle ABC$ 中， L 、 M 、 N 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的中垂線
求證： L 、 M 、 N 三線交於一點，且該點到 $\triangle ABC$ 的三頂點等距離
證明：



問題四：三角形與圓的關係？任意一個三角形可畫_____個外接圓，
任意一個圓可畫出_____個內接三角形。

* 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察任意一個三角形可以做出幾個不同的外心並進而畫出外接圓？請說明理由或想法。
2. 透過軟體的操弄，觀察任意一個圓可以做出幾個不同的內接三角形？請說明理由或想法。
3. 透過軟體的操弄，觀察圓內接三角形任兩邊中垂線的交點是否即為圓心所在？說明理由或想法。

* 結論：(1) _____
(2) _____

問題五：圓內接三角形為直角三角形時，其斜邊必為_____，即外接圓半徑為直角三角形斜邊的_____

* 先備知識：

圓周角度數等於所對弧度的一半。

* 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察內接直角三角形斜邊與外接圓直徑有何關係？請說

明理由或想法。

2. 透過軟體的操弄，觀察圓內接三角形的一邊為直徑時，此三角形是否為直角三角形？請說明理由或想法。

* 結論：(1) _____

(2) _____

問題六：觀察外心與任兩頂點連線的夾角與第三個頂點內角度數有何規律性？

* 先備知識：

圓上一弧的度數是它所對圓心角的度數。

一弧所對圓周角的度數等於它所對圓心角度數的一半，也等於該弧度數的一半。

* 說明：

1. 如圖一，銳角三角形 ABC 中

$\angle BOC = \underline{\quad\quad} \widehat{BDC}$ (填倍數) 【 $\angle BOC$ 是 \widehat{BDC} 所對的 _____ 角】

$\angle BAC = \underline{\quad\quad} \widehat{BDC}$ (填倍數) 【 $\angle BAC$ 是 \widehat{BDC} 所對的 _____ 角】

所以 $\angle BOC = \underline{\quad\quad} \angle BAC$ (填倍數)

2. 如圖二，鈍角三角形 ABC 中

$\angle BOC = \underline{\quad\quad} \widehat{BAC}$ (填倍數) 【 $\angle BOC$ 是 \widehat{BAC} 所對的 _____ 角】

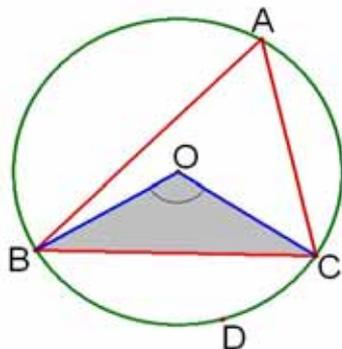
又 $\widehat{BAC} = 360^\circ - \widehat{BDC}$

$\widehat{BDC} = \underline{\quad\quad} \angle BAC$ (填倍數) 【 $\angle BAC$ 是 \widehat{BDC} 所對的 _____ 角】

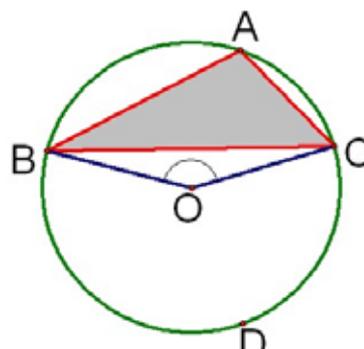
所以 $\angle BOC = 360^\circ - \underline{\quad\quad} \angle BAC$ (填倍數)

* 結論：在銳角三角形 ABC 中， $\angle BOC = \underline{\quad\quad} \angle BAC$

在鈍角三角形 ABC 中， $\angle BOC = 360^\circ - \underline{\quad\quad} \angle BAC$



圖一



圖二

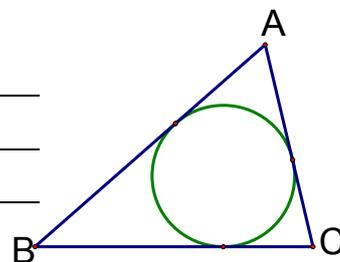
『三角形的內心』學習單

第 _____ 組班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

內心定義：如圖，若有一個圓通過 $\triangle ABC$ 三邊相切，則這個圓稱為 $\triangle ABC$ 的內切圓，三角形稱為圓外切三角形，內切圓的圓心稱為內心。

問題一：如何畫內切圓？找_____與_____

問題二：內心（內切圓圓心）如何找？_____



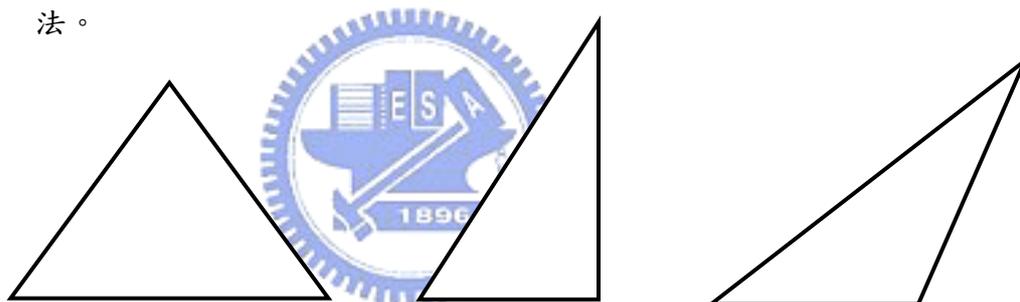
***先備知識：**

角平分線性質：角平分線上任一點到此角的兩邊等距離。

角平分線逆性質：到一角兩邊等距離的點必在此角的角平分線上。

***說明：**

1. 透過軟體的操弄，觀察三角形三角平分線是否會交於一點？並利用尺規作圖在下面三個不同形狀的三角形作三內角角平分線，並說明理由或想法。



2. 透過軟體的操弄，觀察三角形三角平分線的交點可否當作內心來畫內切圓？並利用尺規作圖在上面三個三角形作圖看看，請說明理由或想法。

***結論：**(1) _____

(2) _____

問題三：內心到三角形_____等距離，此距離為內切圓的_____。

***說明：**

1. 透過軟體的操弄，觀察內心到三角形三邊長是否會等距離？請說明理由或想法。
2. 運用內心到三角形三邊等距離的特性，想想看可以應用在生活上嗎？請舉例說明。

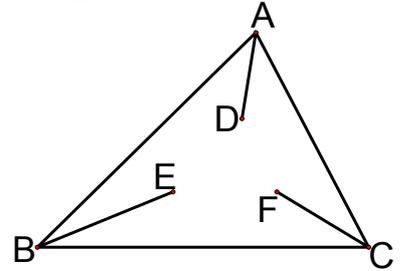
* 結論：_____

* 證明題：(參見課本 P138)

已知：如圖 $\triangle ABC$ 中，直線 AD 、 BE 、 CF 分別為三內角的角平分線

求證：直線 AD 、 BE 、 CF 交於一點，且該點到 $\triangle ABC$ 的三邊等距離

證明：



問題四：三角形與圓的關係？任意一個三角形可畫_____個內切圓，任意一個圓可畫出_____個內切三角形。

* 說明：

1. 透過軟體的操弄，觀察任意一個三角形可以做出幾個不同的內心並進而畫出內切圓？請說明理由或想法。

2. 透過軟體的操弄，觀察任意一個圓可以做出幾個不同的外切三角形？請說明理由或想法。

3. 透過軟體的操弄，觀察圓外切三角形任兩角平分線的交點是否即為圓心所在？說明理由或想法。

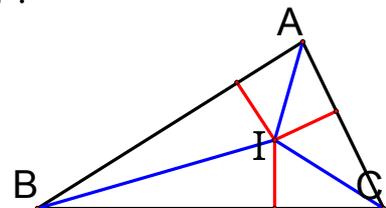
* 結論：(1) _____

(2) _____

問題五：如圖，三角形三頂點與內心的連線將 $\triangle ABC$ 分成三個小三角形 $\triangle AIB$ 、 $\triangle BIC$ 、 $\triangle CIA$ ，其面積關係為何？

* 說明：

1. 由問題三的結論推演， $\triangle AIB$ 、 $\triangle BIC$ 、 $\triangle CIA$ 分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 為底，它們的高為何？三者的高有何關係？



2. 透過軟體的操弄，將 $\triangle AIB$ 、 $\triangle BIC$ 、 $\triangle CIA$ 的底 \overline{AB} 、 \overline{BC} 與 \overline{CA} 移至同一水平線上；將三個三角形的頂點 I 合在一起，形成另一個新三角形，請說明此三角形與原 $\triangle ABC$ 的面積有何關係？

3. 推導 $\triangle ABC$ 的面積為何？

* 結論：_____

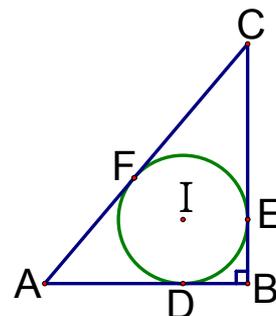
問題六：觀察內切圓半徑與直角三角形邊長有何關連性？

* 先備知識：

圓的切線性質：過圓外一點對此圓所作的兩切線段相等。

* 說明：

透過軟體的操弄，觀察圓外切直角三角形兩股和與斜邊有何關係？



* 結論：_____

問題七：觀察內心與任兩頂點連線的夾角與第三個頂點內角度數有何規律性？

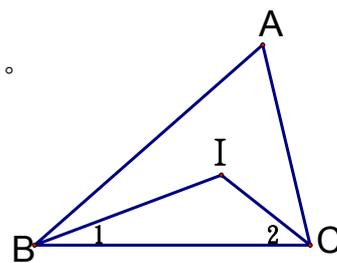
* 先備知識：

一角的角平分線將角等分。三角形三內角和為 180 度。

* 說明：

如圖，I 為 $\triangle ABC$ 的內心

$$\begin{aligned} \angle 1 &= \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ACB \text{ (填倍數)} \\ \angle BIC &= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC - \frac{1}{2} \angle ACB = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB \right) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) \\ &= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \end{aligned}$$

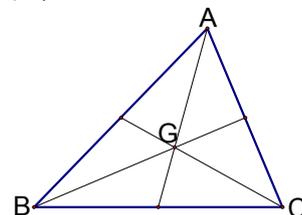


* 結論：_____

『三角形的重心』學習單

第 _____ 組班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

重心定義：如圖，任意 $\triangle ABC$ 的三條中線交於一點 G ，則此點 G 稱為 $\triangle ABC$ 的重心。



問題一：重心如何找？_____

***補充知識：**

在生活中常聽到「重心不穩」，什麼是「重心」？重心是物體重量分布的中心點，也就是重力所作用的點，它跟「平衡」是相關的。通常平衡又分為三種：

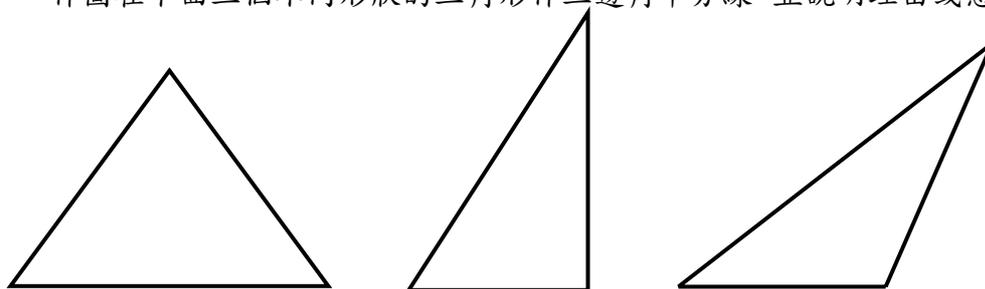
- (1)不穩定平衡：其特徵是任何位移或轉動，都會使物體重心點的位置下降，而加強平衡。例如：陀螺的轉動。
- (2)穩定平衡：其特徵是任何位移或轉動，都會使物體的重心點上升。例如：直立桌面的筆在倒下時的動作。
- (3)隨遇平衡：其特徵是任何位移或轉動，都不會使物體的重心點的位置上升或降低。

例如：一顆滾動的球。

重心的高低與基底面積(底盤)的大小都與穩定度有關，所以只要重心愈低就會愈穩定了。

***說明：**

- 1.透過軟體的操弄，觀察三角形三邊中線是否會交於一點？並利用尺規作圖在下面三個不同形狀的三角形作三邊角平分線，並說明理由或想法。



***結論：**_____

問題二：重心在任一中線上的比例關係為何？_____

***說明：**

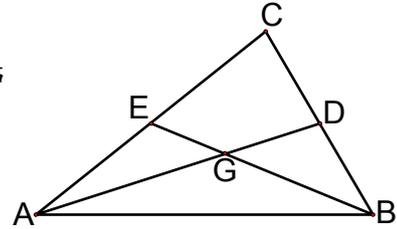
1. 透過軟體的操弄，觀察在銳角、直角與鈍角三角形中重心在中線上的比例位置是否固定？比例為何？請說明理由或想法。

2. 生活當中何時會談到重心或用到重心性質，請舉例子說明

*證明：(參見課本 P144)

已知： $\triangle ABC$ 的兩中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 相交於 G 點

求證： $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD}$



*結論：_____

問題三：如圖，三角形三邊中線將三角形分成六個小三角形，其面積關係為何？_____

*先備知識：

三角形面積為底乘以高除以 2，若底相等、高相等，則面積相等。

*說明：

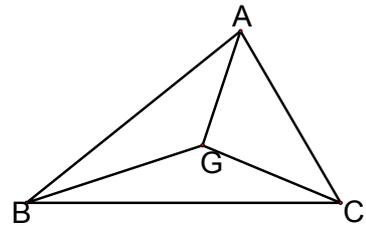
1. 透過軟體的操弄，移動任一小三角形的頂點或邊，觀察六塊小三角形的面積有何關係？請說明理由或想法。

*證明題：(參見課本 P145)

已知： G 為 $\triangle ABC$ 的重心

求證： $\triangle ABG$ 面積 = $\triangle BCG$ 面積 = $\triangle CAG$ 面積

證明：

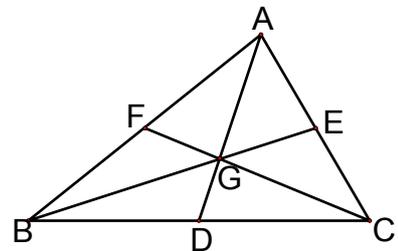


*證明題：(參見課本 P145)

已知： G 為 $\triangle ABC$ 的重心

求證： $\triangle GBD$ 面積 = $\frac{1}{6} \triangle ABC$ 面積

證明：



*結論：(1) _____

(2) _____

『特殊三角形的三心關係』學習單

第 _____ 組班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

問題一：等腰三角形的三心有何關係？_____

*說明：

透過軟體的操弄，觀察等腰三角形中外心、內心與重心的位置有何關係？
說明理由或想法。

*結論：_____

問題二：正三角形的三心有何關係？_____

*說明：

透過軟體的操弄，觀察正三角形中外心、內心與重心的位置有何關係？
說明理由或想法。

*結論：_____

問題三：觀察直角三角形中外心與重心的距離和斜邊長有何關係？請回答下列問題：

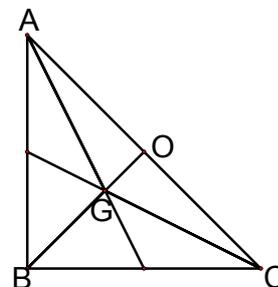
(1)如右圖，直角ABC中， $B=90^\circ$ ，因為O點為外心，

所以 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \underline{\hspace{2cm}} \overline{AC}$ (填倍數)

(2)因為G點為重心，所以 $\overline{OG} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{OB} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{AC}$ (填倍數)

所以外心與重心的距離 = $\underline{\hspace{2cm}}$ × 斜邊長 (填倍數)

*結論：_____



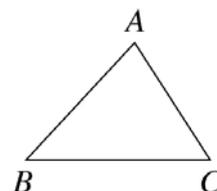
附錄三 數學學習成就測驗試題(後測、延後測)

「三角形三心」試卷 分組班級 座號 姓名

一、選擇：76% (1~14題，每題5分；15題6分)

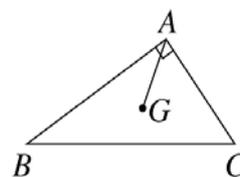
※請將作答過程留在該題空白處

- 1 () 如右圖，若想在三邊不等長的三角形公園ABC內蓋一座涼亭，且要使此涼亭到公園三邊的道路等距離，則應將涼亭蓋在何處？(A) $\triangle ABC$ 的內心 (B) $\triangle ABC$ 的外心

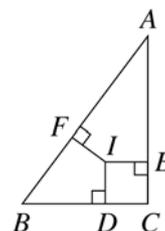


- 2 () 若 $\triangle ABC$ 的面積為21平方公分，且三邊長分別為9公分、7公分、5公分，則內心到 \overline{AB} 的距離為多少公分？(A) $\frac{1}{2}$ 公分 (B)4公分 (C)2公分 (D)1公分

- 3 () 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，G為重心，若 $\overline{AG} = 4$ 公分，則 \overline{BC} 為多少公分？(A)4 (B)6 (C)8 (D)12



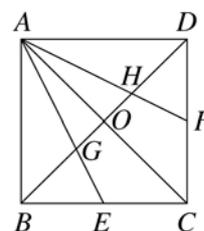
- 4 () 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 8$ ，I為 $\triangle ABC$ 的內心，且 $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{IE} \perp \overline{AC}$ 、 $\overline{IF} \perp \overline{AB}$ ，則 $\overline{ID} + \overline{IE} + \overline{IF} =$ (A)4 (B)6 (C)9 (D)10



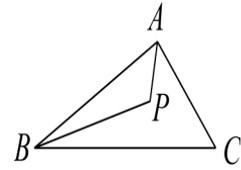
- 5 () 老爺爺打算將一塊三角形的土地平分給三個孫子，他可先找出此一三角形土地的哪一個點？
 (A)三角形三邊中垂線之交點
 (B)三角形三內角平分線之交點
 (C)三角形三中線之交點
 (D)三角形三邊上的高之交點

- 6 () 已知G為 $\triangle ABC$ 三中線之交點，若三中線長之和是21，則G到 $\triangle ABC$ 三頂點的距離之和是多少？(A)14 (B)21 (C)42 (D)7

- 7 () 如右圖，四邊形ABCD為一正方形，E、F分別 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點，對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於O點，且 \overline{AE} 與 \overline{OB} 相交於G點， \overline{AF} 與 \overline{OD} 相交於H點，若 $\overline{AB} = 6$ 公分，則 $\triangle AOG$ 的面積是多少平方公分？(A)2 (B)3 (C)6 (D)12



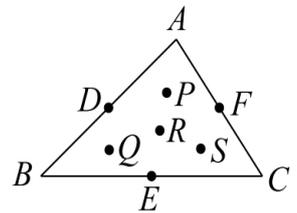
- 8 () 如右圖，P為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\angle C=50^\circ$ ，則 $\angle APB=?$
 (A) 105° (B) 110° (C) 115° (D) 120°



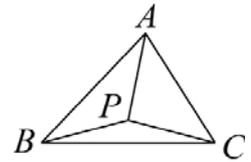
- 9 () 有一個三角形，它的外心恰位於其中一邊上，則此三角形的形狀必為下列哪一種？(A)銳角三角形 (B)等腰三角形 (C)鈍角三角形 (D)直角三角形

- 10 () 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=30^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $\overline{AC}=8$ 公分，則 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為多少平方公分？(A) 18π (B) 24π (C) 36π (D) 64π

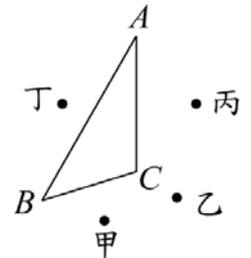
- 11 () 美美在一個質地均勻的三角形厚紙板上打了四個洞P、Q、R、S，而D、E、F分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的中點，如圖所示。若將一枝竹筷子分別頂入各點的洞內，然後旋轉此紙板，則竹筷子頂入哪一點時，此塊三角形厚紙板可以穩定平衡的旋轉？
 (A)P點 (B)Q點 (C)R點 (D)S點



- 12 () 如右圖， $\triangle ABC$ 是由三個等腰三角形所拼成的，其三個頂點的會合處為P點，則P必為 $\triangle ABC$ 的哪一種心？
 (A)內心 (B)垂心 (C)重心 (D)外心



- 13 () 如右圖，甲、乙、丙、丁四點中，有一個點是 $\triangle ABC$ 的外心，請問是哪一個點？(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁



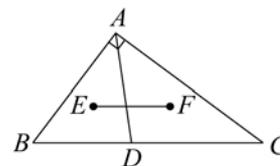
- 14 () 下列哪一個三角形中，其內心、重心、外心的位置會在同一點？
 (A)直角三角形 (B)正三角形 (C)等腰三角形 (D)鈍角三角形

- 15 () 已知一正三角形ABC的面積為 $12\sqrt{3}$ 平方公分，則此 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為多少平方公分？(A) 4π (B) 16π (C) 36π (D) 48π

二、計算：24% (每題6分，請書寫過程，否則不予給分)

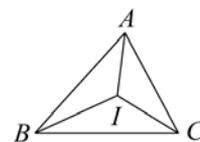
1. 已知有一個三角形的邊長分別為12、16、20，則此三角形的外接圓與內切圓面積比值為何？

2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 8$ 。若D為 \overline{BC} 上的一點，E、F分別為 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的重心，則 $\overline{EF} = ?$



3. 若O點為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle AOC = 130^\circ$ ，則 $\angle ABC = ?$

4. 如圖，I為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\overline{AB} = 12$ 公分、 $\overline{AC} = 9$ 公分，而且 $\triangle ABI$ 的面積為9平方公分，則 $\triangle ACI$ 的面積為多少平方公分？



附錄四 數學學習成就測驗試題(專家檢測)

「三角形三心」國中幾何課程學習成就測驗試題 (教師檢測)
致國中數學老師：

本卷將作為教學研究之後測卷，勞煩您撥空協助預試，並將每題作答時採用的概念做確認，若有缺漏的或是需修正的概念，煩請填寫至底線上，感謝您！

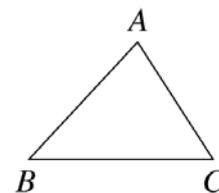
研究者 方淑美敬上

一、選擇：76% (1~14題，每題5分；15題6分)

- 1 () 如右圖，若想在三邊不等長的三角形公園ABC內蓋一座涼亭，且要使此涼亭到公園三邊的道路等距離，則應將涼亭蓋在何處？

內心
知識

- (A) $\triangle ABC$ 的內心 (B) $\triangle ABC$ 的外心
(C) $\triangle ABC$ 的重心 (D) $\triangle ABC$ 三高的交點



概念1: 內心到三角形三邊等距離 是 否
概念2: _____

- 2 () 若 $\triangle ABC$ 的面積為21平方公分，且三邊長分別為9公分、7公分、5公分，則

內心
理解

內心到 \overline{AB} 的距離為多少公分？(A) $\frac{1}{2}$ 公分 (B)4公分 (C)2公分

(D) 1公分

概念1: 三角形面積=(底 \times 高)/2

是 否

概念2: 內心到三角形三邊等距離

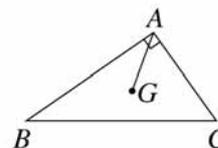
是 否

概念3: _____

- 3 () 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，G為重心，若 $\overline{AG} = 4$ 公分，則 \overline{BC} 為多少公分？

三心
理解

(A)4 (B)6 (C)8 (D)12



概念1: 直角三角形中,外接圓半徑等於斜邊的一半

是 否

概念2: 直角三角形外心到重心的距離為斜邊長的六分之一

是 否

概念3: _____

- 4 () 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 、 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{AC} = 8$ ，I為 $\triangle ABC$ 的內心，且 $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{IE} \perp \overline{AC}$ 、 $\overline{IF} \perp \overline{AB}$ ，則

內心
應用

$\overline{ID} + \overline{IE} + \overline{IF} =$ (A)4 (B)6 (C)9 (D)10

<解法一>

概念1: 內心到三角形三邊(即內切圓半徑)等距離

是 否

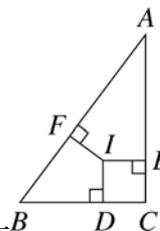
概念2: 商高定理

是 否

概念3: 內切圓半徑=(兩股和-斜邊)/2

是 否

概念4: _____



<解法二>

概念1: 內心到三角形三邊(即內切圓半徑)等距離 是 否

概念2: 商高定理 是 否

概念3: 三角形面積等於(內切圓半徑乘以三角形周長的和)的一半
是 否

概念4: _____

5 () 老爺爺打算將一塊三角形的土地平分給三個孫子，他可先找出此一三角形土地的哪一個點？

重心
知識

- (A) 三角形三邊中垂線之交點
- (B) 三角形三內角平分線之交點
- (C) 三角形三中線之交點
- (D) 三角形三邊上的高之交點

概念1: 三角形三中線的交點與三頂點的連線段將三角形的面積三等分
是 否

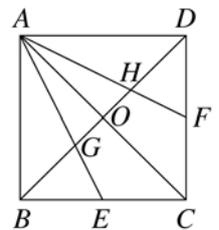
概念2: _____

6 () 已知G為 $\triangle ABC$ 三中線的交點，若三中線長之和是21，則G到 $\triangle ABC$ 三頂點的距離之和是多少？(A)14 (B)21 (C)42 (D)7

重心
理解

- 概念1: 重心是三角形三中線的交點 是 否
- 概念2: 重心到一頂點的距離等於過該頂點之中線長的 $\frac{2}{3}$ 是 否
- 概念3: _____

7 () 如右圖，四邊形ABCD為一正方形，E、F分別 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點，對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於O點，且 \overline{AE} 與 \overline{OB} 相交於G點， \overline{AF} 與 \overline{OD} 相交於H點，若 $\overline{AB} = 6$ 公分，則 $\triangle AOG$ 的面積是多少平方公分？(A)2 (B)3 (C)6 (D)12



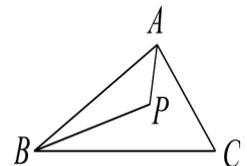
重心
理解

- 概念1: 正方形的一條對角線將正方形等分 是 否
- 概念2: 三角形三中線將此三角形的面積六等分 是 否
- 概念3: _____

8 () 如右圖，P為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\angle C = 50^\circ$ ，則 $\angle APB = ?$
(A) 105° (B) 110° (C) 115° (D) 120°

內心
理解

- 概念1: 內心為三內角角平分線的交點 是 否
- 概念2: 三角形內角和為 180° 是 否
- 概念3: _____



9 () 有一個三角形，它的外心恰位於其中一邊上，則此三角形的形狀必為下列哪一種？

(A)銳角三角形 (B)等腰三角形 (C)鈍角三角形 (D)直角三角形

外心
知識

概念1: 各種形狀的三角形外心的位置(銳角三角形:內部;
直角三角形:其斜邊中點;鈍角三角形:外部 是 否
概念2: _____

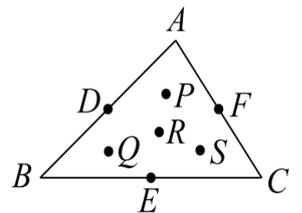
10 () 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=30^\circ$, $\angle C=90^\circ$, $\overline{AC}=8$ 公分, 則 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為多少平方公分? (A) 18π (B) 24π (C) 36π (D) 64π

外心
應用

概念1: 直徑所對的圓周角是直角 是 否
概念2: 直角三角形的外心在其斜邊中點 是 否
概念3: $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 三角形邊角比例關係 是 否
概念4: 圓面積= πr^2 是 否
概念5: _____

重心
理解

11 () 美美在一個質地均勻的三角形厚紙板上打了四個洞P、Q、R、S, 而D、E、F分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的中點, 如圖所示。若將一枝竹筷子分別頂入各點的洞內, 然後旋轉此紙板, 則竹筷子頂入哪一點時, 此塊三角形厚紙板可以穩定平衡的旋轉?

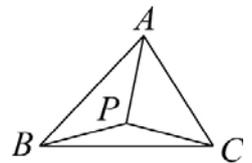


(A)P點 (B)Q點 (C)R點 (D)S點

概念1: 三角形的平衡點位於重心 是 否
概念2: 重心在三中線長的交點上 是 否
概念3: _____

外心
理解

12 () 如右圖, $\triangle ABC$ 是由三個等腰三角形所拼成的, 其三個頂點的會合處為P點, 則P必為 $\triangle ABC$ 的哪一種心?

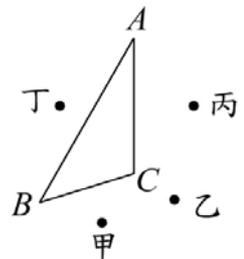


(A)內心 (B)垂心 (C)重心 (D)外心

概念1: 等腰三角形兩腰相等 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ 是 否
概念2: 外心到三角形的三頂點等距離 是 否
概念3: _____

外心
理解

13 () 如右圖, 甲、乙、丙、丁四點中, 有一個點是 $\triangle ABC$ 的外心, 請問是哪一個點? (A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁



概念1: 外心為三角形三邊的中垂線交點 是 否
概念2: 鈍角三角形的外心在其外部 是 否
概念3: _____

- 14 () 下列哪一個三角形中，其內心、重心、外心的位置會在同一點?
(B) 直角三角形 (B) 正三角形 (C) 等腰三角形 (D) 鈍角三角形

三心
知識

概念1: 正三角形的內心、重心、外心在同一點 是 否
概念2: _____

- 15 () 已知一正三角形ABC的面積為 $12\sqrt{3}$ 平方公分，則此 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為多少平方公分?
(A) 4π (B) 16π (C) 36π (D) 48π

三心
應用

概念1: 正三角形邊長與面積的關係 是 否
概念2: 正三角形的重心、外心在同一點 是 否
概念3: 重心到一頂點的距離等於過該頂點之中線長的 $\frac{2}{3}$ 是 否
概念4: _____

二、計算：24% (每題6分，請書寫過程，否則不予給分)

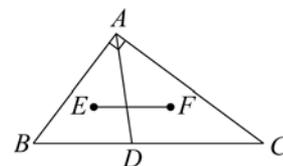
1. 已知有一個三角形的邊長分別為12、16、20，則此三角形的外接圓與內切圓面積比值為何？概念1: 已知邊長判斷直角三角形 是 否

三心
應用

概念2: 直角三角形外接圓半徑等於斜邊的一半 是 否
概念3: 三角形面積等於(內切圓半徑乘以三角形周長的和)的一半 是

概念4: 兩圓面積比等於兩圓半徑的平方比 是 否
概念5: _____

2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 8$ 。若D為 \overline{BC} 上的一點，E、F分別為 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的重心，則 $\overline{EF} = ?$



重心
應用

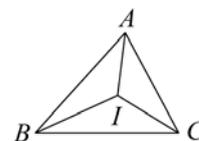
概念1: 重心是三角形三中線的交點 否
概念2: 商高定理 是 否
概念3: 重心到一頂點的距離等於過該頂點之中線長的 $\frac{2}{3}$ 是 否
概念4: 相似三角形對應邊成比例 是 否
概念5: _____

3. 若O點為 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\angle AOC = 130^\circ$ ，則 $\angle ABC = ?$

外心
理解

概念1: 各種形狀的三角形外心的位置(銳角三角形:內部；
直角三角形:其斜邊中點；鈍角三角形:外部) 是 否
概念2: 圓上的一弧其弧度即為圓心角角度等於圓周角的2倍 是 否
概念3: _____

4. 如圖，I為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\overline{AB} = 12$ 公分、 $\overline{AC} = 9$ 公分，而且 $\triangle ABI$ 的面積為9平方公分，則 $\triangle ACI$ 的面積為多少平方公分？



<解法一>

內心
理解

概念1: 內心到三角形三邊(即內切圓半徑)等距離 是 否
概念2: 兩等高之三角形其面積比等於底邊的比 是 否

概念3:_____

<解法二>

概念1: 內心到三角形三邊(即內切圓半徑)等距離即為小三角形的高

是 否

概念2: 三角形面積

是 否

概念3:_____

最後再度拜託您填問卷如下：(若不夠寫，請敘述於背面)

1.從事國中數學教學幾年？ _____年

2.教師性別：_____

3.本試卷的題目需修正如下：(例如選擇第X題：題目語意不清楚應修改為…)

4.當您教此單元時，您有用哪些教具？(摺紙、尺規、用粉筆在黑板講述、電腦、簡報檔、或哪些網路資源…)

5.依您教學經驗，教此單元時，學生學習上最有困難的部分為何？



附錄五 課程意見調查表

親愛的同學：

老師希望由下列問題，了解你對三角形三心軟體，在電子白板上教學的看法。請於閱讀完每一個問題後，依照自己的感覺，在適當位置打「V」，謝謝！

問題	姓名				
	非常不同意	不同意	沒意見	同意	非常同意
1. 經過分組討論的方式, 會讓我對數學的問題更加了解					
2. 遇到數學難題, 我會設法去嘗試各種不同的解決方法。					
3. 透過『三角形三心』軟體的操作, 使我更了解三角形外心性質。					
4. 在數學課中, 對『三角形三心』軟體操作方式不熟悉, 所以不敢上台操弄。					
5. 我覺得透過互動白板, 可以將課本中無法呈現的教材, 具體的播放出來, 讓我更深入了解課本的內容。					
6. 我覺得上數學課時, 分組討論讓同學上台講解, 比由老師一人講授內容效果更好。					
7. 當一個數學問題有好幾種解法的時候, 我也會想知道別人的解題方法為何。					
8. 透過三角形三心軟體的操作, 使我更了解三角形的內心性質。					
9. 雖然以前我不曾操弄過『三角形三心』軟體, 但是我不覺得有什麼困難。					
10. 我覺得老師將互動白板融入數學課程中, 可以幫助我更容易學習『三角形三心』單元。					
11. 在數學課程中, 分組討論解題的方式會困擾我對數學的學習。					
12. 上數學課時, 如果能發表自己的解題方法, 我會更喜歡上數學課。					

13. 透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解三角形的重心性質。					
14. 我覺得『三角形三心』軟體的操作方式很簡單，老師講解過，試一試就會了。					
15. 透過互動白板教學，使得我覺得學數學，較不會枯燥乏味。					
16. 分組討論的解題方式可增加我與同學討論數學的機會。					
17. 遇到數學問題，我會儘量提出自己的解題方法與同學共享。					
18. 透過『三角形三心』軟體的操作，使我更了解特殊三角形三心的性質。					
19. 『三角形三心』軟體的操弄很容易，我敢上台操作不會害怕。					
20. 我覺得上數學課時，有互動白板輔助教學，學習的效果會更好。					



附錄六 數學學習狀況問卷結果

在『三角形三心』學習過程中，你(妳)覺得最難理解的內容或學習的困難點為何？

實驗組高成就	學生回答內容
EHA01	三心混在一起不知用哪個性質
EHA02	還在深入研究
EHA03	本卷計算第二題
EHA04	1. 求面積 2. 線長 3. 證明
EHA05	實際出題計算
EHA06	目前不知道
EHA07	本卷計算第二題
EHA08	三個都很相似，很容易搞混
EHA09	會分不清楚，忘記有什麼性質
EHA10	進階題
EHA11	重心，因為他的變化最多
EHA12	邊長關係
EHA13	全部混在一起的時候，會搞混
EHA14	會搞混，看不懂
EHA15	重心
EHA16	學會了重心還是不會轉書
EHA17	自己不用心
EHA18	三心常常會搞混，而且算法也不會
EHA19	題目練習太少
EHA20	題型多樣化，要思考很久
EHA21	解不出來
EHA22	一不小心就會將三角形三心的性質搞混
EHA23	還好
EHA24	無
EHA25	搞混，但多背應該會好點
EHA26	沒有，都可以理解
EHA27	需應用許多三心性質的計算題
實驗組低成就	
ELA01	不知道公式

ELA02	三心的判別與活用
ELA03	不知道三角形三心如何算也背不起來
ELA04	三心會搞混
ELA05	不知道
ELA06	都很困難
ELA07	應用問題
ELA08	重心
ELA09	都很難
ELA10	要算面積比較難
ELA11	三心性質了解，但不會算角度面積...等
ELA12	分不清楚三心，也不太會算
ELA13	計算
ELA14	都聽不懂
ELA15	很難懂
ELA16	還好，有聽過學過就有印象
ELA17	不知公式，也弄不懂
ELA18	三心很難分，都聽不懂
ELA19	三心很複雜
ELA20	觀念很容易搞錯，觀念一錯就全錯了
ELA21	本單元算是我學的最好的，內心外心有時分不清楚
ELA22	某些特定類型的題目都不能理解
ELA23	要背吧，三心用法不同容易搞混
控制組高成就	
CHA01	應用題
CHA02	在解題時畫輔助線最難
CHA03	沒有，太簡單
CHA04	有時簡單的題目，卻想得太難. 定理背不熟，沒有靈活運用
CHA05	三心混合的題目
CHA06	都難
CHA07	內心重心不是很懂
CHA08	重心
CHA09	要記三心的位置很煩，因會有不同的三角形對應，有時候會忘記

CHA10	大致上還好，多為粗心
CHA11	三心的運用，有時會搞會它們的公式
CHA12	記住每個心的性質以及觀察出邊心角的關係
CHA13	無
CHA14	其實沒有特別難，只是公式要熟記，還要多算
CHA15	沒
CHA16	三心的定義時常會搞混
CHA17	有時會把三心的性質搞混
CHA18	都很難
CHA19	三心在同一題，要畫輔助線
CHA20	一些細節的概念，要懂那些才能繼續下去
CHA21	畫圓
CHA22	題型很多
CHA23	題目變化很多，常常反應不過來
CHA24	難~~~
CHA25	不好背，易忘
CHA26	重心
CHA27	重心
CHA28	湊在一起亂出題的時候
CHA29	圖看不懂
CHA30	不知道
CHA31	要去記它的公式和性質
控制組低成就	
CLA01	計算過程有點複雜
CLA02	不知道
CLA03	背那些有的沒的方法公式
CLA04	不知道
CLA05	最難理解我覺得是內心，角度長度不好算
CLA06	三心的性質容易搞混
CLA07	碰在一起就不會了
CLA08	算數學，不懂得怎麼算
CLA09	公式要背，很多
CLA10	全部都很難

CLA11	很難理解
CLA12	什麼是「三角形三心」
CLA13	不知道
CLA14	內心外心會搞不清楚，公式無法完全與題目融合

