

# 國立交通大學

理學院碩士在職專班應用科技組  
碩士論文

從利沙球圖形到擺線間的幾何轉換

Geometric Transformation from  
Lissajous to Trochoid Curves and  
Surfaces



研究生：周鴻案

指導教授：陳永富教授

中華民國九十八年六月

# 摘要

本論文是研究利沙球圖形與擺線的幾何轉換。利沙球圖形與擺線皆在幾何曲線中扮演非常重要角色。然而過去的研究中並沒有對於這兩群重要的幾何曲線有任何相關性的連結。我的研究首先利用在物理系統中常見的簡諧運動為基礎，進而解得其古典軌跡落在利沙球圖形上。進一步透過群論中  $SU(2)$  矩陣的巧妙轉換，發展出一系列介於利沙球圖形與擺線之間有趣的幾何曲線。透過  $SU(2)$  轉換的概念不僅引導出有趣的幾何圖像，其中所對應的物理意義也值得我們深入探討。



# Abstract

This paper is the research of the geometric transformation between Lissajous and trochoidal curves. Lissajous and trochoidal curves are important in geometric curves. However there is not any connection between Lissajous and trochoidal curves in early researches. Firstly, we start from the simple harmonic motions, and the solution is found as Lissajous parametric curves. Furthermore, by means of the transformation, the matrix  $SU(2)$  in group theory, a series of curves between Lissajous and trochoids are demonstrated. They have not been discussed until now. Through the concept of  $SU(2)$ , we obtained the intriguing geometric curves. Importantly, the physics of the transformation is worthy to be discussed further in the future.



## 誌謝

在六十二歲時能在交大完成第二個碩士學業心中充滿感激之情。看見實驗室內教授與研究生及研究生之間的互動，研究生畢業後的出路，台灣真的向上提升了。

要感謝的人實在太多了，首先，要感謝指導教授陳永富老師，帶領我進入雷射領域做創新的研究，親身體驗發現新現象的樂趣，老師對學生的引導、愛護無論在學業上或生活上都充滿了熱忱，而實驗室的研究成果更是令人刮目相看，能進入老師的實驗室真是福氣。尤其要感謝陸亭樺老師一年半來細心溫和不厭其煩地教我MathCad軟體的使用及研究過程中的一切細節。在專班上課中，簡文續老師的奈米與表面科技導論及趙天生老師的半導體導論使我對以前的表面物理研究與晶圓製作及其中的關連更加了解；前瞻科技導論的課程使我了解最新的科技發展，對任教高中自然科的老師是非常需要的，它會影響高中生的選填志願及前程；蔡文賢老師的知識經濟及創新與創業使我了解將科學研究轉變為商品再推銷出去並且要滿足顧客的需求，才會創造價值，發揮影響力；陳老師的光電科技導論使人興趣盎然，老師的專題研究課程真正發揮了專班學生必修的目的地；黃大原老師、黃凱風老師及王惠中老師提供學生許多寶貴的意見讓論文的内容能夠更為充實完整。

在實驗室的日子裏常常請教蘇冠緯老師、建誠博士、仕璋博士、哲彥博士，及興弛、依萍、雅婷及彥廷學長，你們耐心的協助使我感覺實驗室的溫情，非常謝謝；榮輝、金航及班上同學們的共同學習使我獲益不少。

還要謝謝小女惠之在電腦及照相上的協助，及太太的支持。育達高中陳永盛校長及科主

任的推薦，老師們的加油打氣。

這一切的成果都是大家的，祝福實驗室中的每一位明天會更好。

感謝天父！感謝耶穌！感謝聖靈！

周鴻案 2009/7/2



# 目錄

中文摘要	I	
英文摘要	II	
誌謝	III	
目錄	V	
圖表目錄	VI	
第一章	序言	1
第二章	利沙球(Lissajous)圖形與次擺線(Trochoid)	4
2-1.	利沙球圖形	4
2-2.	一維與二維簡諧運動	11
2-3.	擺線與擺線的歷史	18
2-4.	二維簡諧運動加上旋轉就是擺線	27
第三章	$SO(3)$ 與 $SU(2)$ 的對應	40
3-1.	$SO(3)$ 簡介	40
3-2.	$SU(2)$ 簡介	42
3-3.	$SO(3)$ 與 $SU(2)$ 的關聯	43
第四章	二維曲線間的轉換	46
4-1.	利沙球圖形與擺線	46
4-2.	用鐵絲與魔帶所繞出的利沙球圖形與擺線	51
第五章	三維參數曲面間的轉換	54
5-1.	在雷射共振腔中的利沙球參數面	54
5-2.	在雷射共振腔中的擺線參數面	60
第六章	結論與未來展望	64
參考文獻	66	

## 圖表目錄

圖 1 太陽系各行星間的運動軌跡-----	3
圖 2 以光槓桿觀察聲音 1-----	5
圖 3 以光槓桿觀察聲音 2-----	6
圖 4(a)利沙球圖形在各種不同的 $(\omega_x, \omega_y)$ ，當 $\Phi$ 角變化時所顯示的變化-----	8
圖 4(b) 用儀器(Pattern Generater)所拍攝的利沙球圖形-----	9
圖 4(c) 胚騰產生器架構全圖-----	10
圖 4(d) 胚騰產生器-----	10
圖 4(e) 綠光雷射-----	10
圖 5 彈簧的振動-----	13
圖 6 不同相差時彈簧的振動-----	16
圖 7 選出來的幾個相差值時的路線-----	17
圖 8 擺線, 短擺線與長擺線-----	19
圖 9 內擺線與內次擺線-----	21
圖 10 外擺線與外次擺線-----	23
圖 11 擺線擺-----	26
圖 12 最速降曲線-----	26
圖 13 由地球上看太陽系的行星運動-----	30
圖 14 橢圓形的軌道繞中心旋轉時的軌跡-----	33
圖 15 傅科擺的運動軌跡-----	35
圖 16 由利沙球圖形變為內次擺及外次擺-----	37
圖 17(a)帶電粒子在互相垂直的電場與磁場中運動的軌跡-----	39
圖 18 尤拉角-----	41
圖 19(a) 複數形式的利沙球圖形經SU(2)旋轉後呈現擺線-----	47
圖 19(b) $\beta$ 值變化對圖形所產生的影響-----	48



圖 19(c) $\alpha$ 值變化對圖形所產生的影響-----	49
圖 19(d) $A_x$ 與 $A_y$ 的比值變化對圖形所產生的影響-----	50
圖 20(a) 用鐵絲繞出的由利沙球圖形變換到擺線-----	52
圖 20(b) 用魔帶繞出的由利沙球圖形變換到擺線-----	52
圖 21 在實驗室的雷射共振腔中所拍攝的利沙球參數面圖形-----	55
圖 22 當 $\omega_x=1, \omega_y=2, \omega_0=0.15, z_0=2, P=1/2, \Phi_0=-\pi/2$ 時的利沙球參數面圖形-----	57
圖 23 當 $\omega_x=3, \omega_y=1, \omega_0=0.15, z_0=2, P=1/2, \Phi_0=\pi/2$ 時的利沙球參數面圖形-----	58
圖 24 當 $\omega_x=1, \omega_y=4, \omega_0=0.15, z_0=2, P=1/2, \Phi_0=-\pi/2$ 時的利沙球參數面圖-----	59
圖 25 當 $\omega_x=1, \omega_y=2, \omega_0=0.15, z_0=2, P=1/2, \Phi_0=-\pi/2$ 時的擺線參數面圖形-----	61
圖 26 當 $\omega_x=3, \omega_y=1, \omega_0=0.15, z_0=2, P=1/2, \Phi_0=-\pi/2$ 時的擺線參數面圖形-----	62
圖 27 當 $\omega_x=1, \omega_y=4, \omega_0=0.15, z_0=2, P=1/2, \Phi_0=-\pi/2$ 時的擺線參數面圖形-----	63





# 第一章 序言

在這個大千世界，我們很容易發現，自然界的現象都一再反覆出現，背後似乎存在著某種規律。日升日落的循環、流行服飾的樣式、植物葉脈的紋理、以及運作宇宙的自然律，都是隨處可見的規律。這些無所不在的規律或模式，科學家便稱之為胚騰(pattern)。

胚騰也可以賞心悅目，充滿律動。像天空的雲彩、石材上的紋路、動物身上的斑紋、河川的水系型態皆反映了自然界的秩序和模式。

凡物皆有其形稱為外形，例如山川、草木、動物、植物等都有它們特殊的外貌，中國人有句話說：「誠於中，形於外」，我們是否可由物體所呈現的圖像來探索它們的一些特性？

例如行星繞太陽運行的軌道為橢圓形，是由於行星與太陽間萬有引力的結果，地面上的拋體運動的軌跡為拋物線，乃由於定力作用的結果。



在太陽系的華爾滋[10]這本書中提到各星球間的運動軌跡呈現出許多美麗的圖形，如圖1，其中是否內藏玄機？是否可由科學家對它說出個道理來；等待有心人士的發掘……。

置身於這個以電腦進行微處理的年代，我們漸漸有辦法濃縮、儲存各種資訊。也就是因為這個原因才使我們有辦法處理各種圖形。

在我們的實驗室(固態雷射實驗室)裡，也發現了一些特殊曲線與曲面，我則對利沙球(Lissajous)圖形與次擺線(Trochoid curves)與其間的變換做了一些探討。

論文的第一章為序言，第二章介紹利沙球圖形與簡諧運動，擺線與次擺線，利沙球圖形與擺線間的關聯，第三章介紹三度空間的旋轉矩陣  $SO(3)$  與虛數空間的旋轉矩陣  $SU(2)$  並提出它的奇妙特性，第四章介紹我們固態雷射實驗室所發現的一些曲面及其截面，最後第五章

提出我們對  $SU(2)$  及自己所繞空間曲線的一些想法。



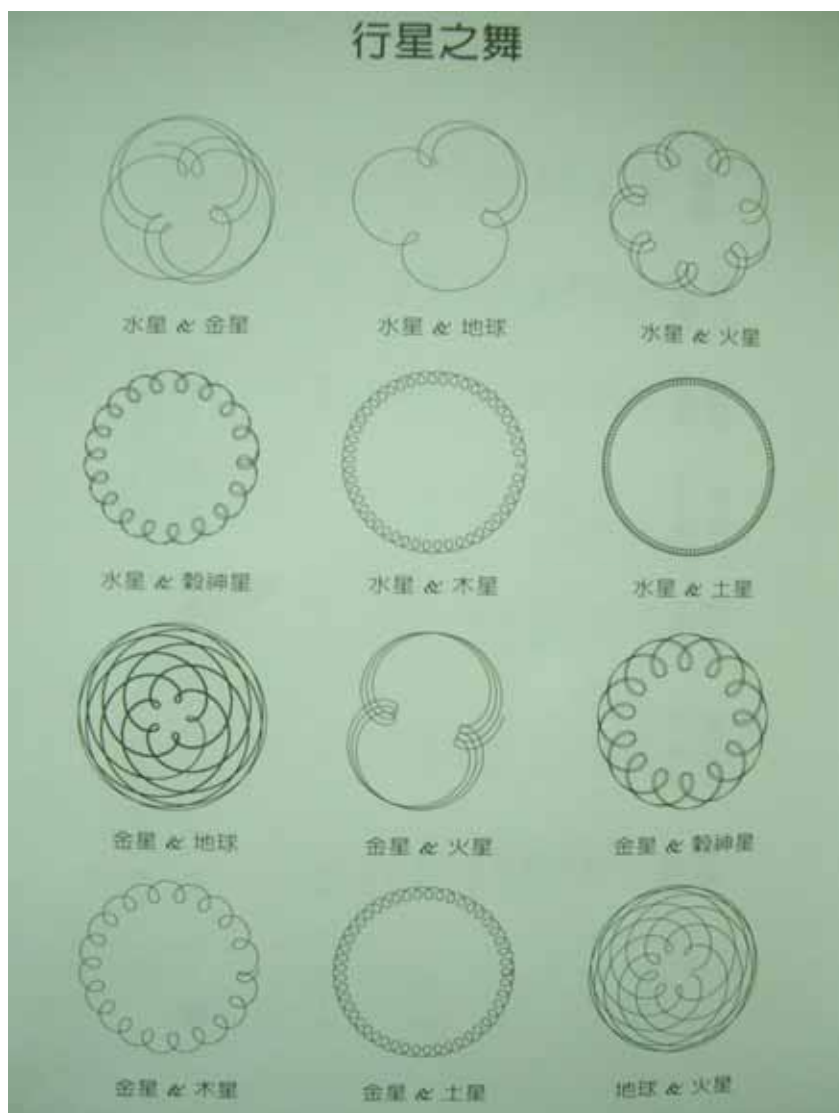


圖 1

太陽系各行星間的運動軌跡。

## 第二章 利沙球 (Lissajous) 圖形與次擺線(Trochoid)

### 2-1. 利沙球 (Lissajous) 圖形

十九世紀中期的法國數學家利沙球 (Jules Lissajous, 1822-1880) 設計出一種實驗；他發現若是把一面小鏡子擺在音叉末端，並以光線對準鏡子照射，就可以把音叉的振動投影到暗色螢幕上。敲擊音叉又會產生垂直的短線，這時馬上再用另一面鏡子側向投射，結果就會產生正弦波，如圖 2。[9]倘若不從側向投射，而是拿另一支音叉擺成與第一支音叉垂直的角度，來產生橫向運動，若兩支音叉的頻率為簡單的整數比，就會投射出漂亮的造型，如圖 3。今日稱為利沙球圖形 (Lissajous Figure)。



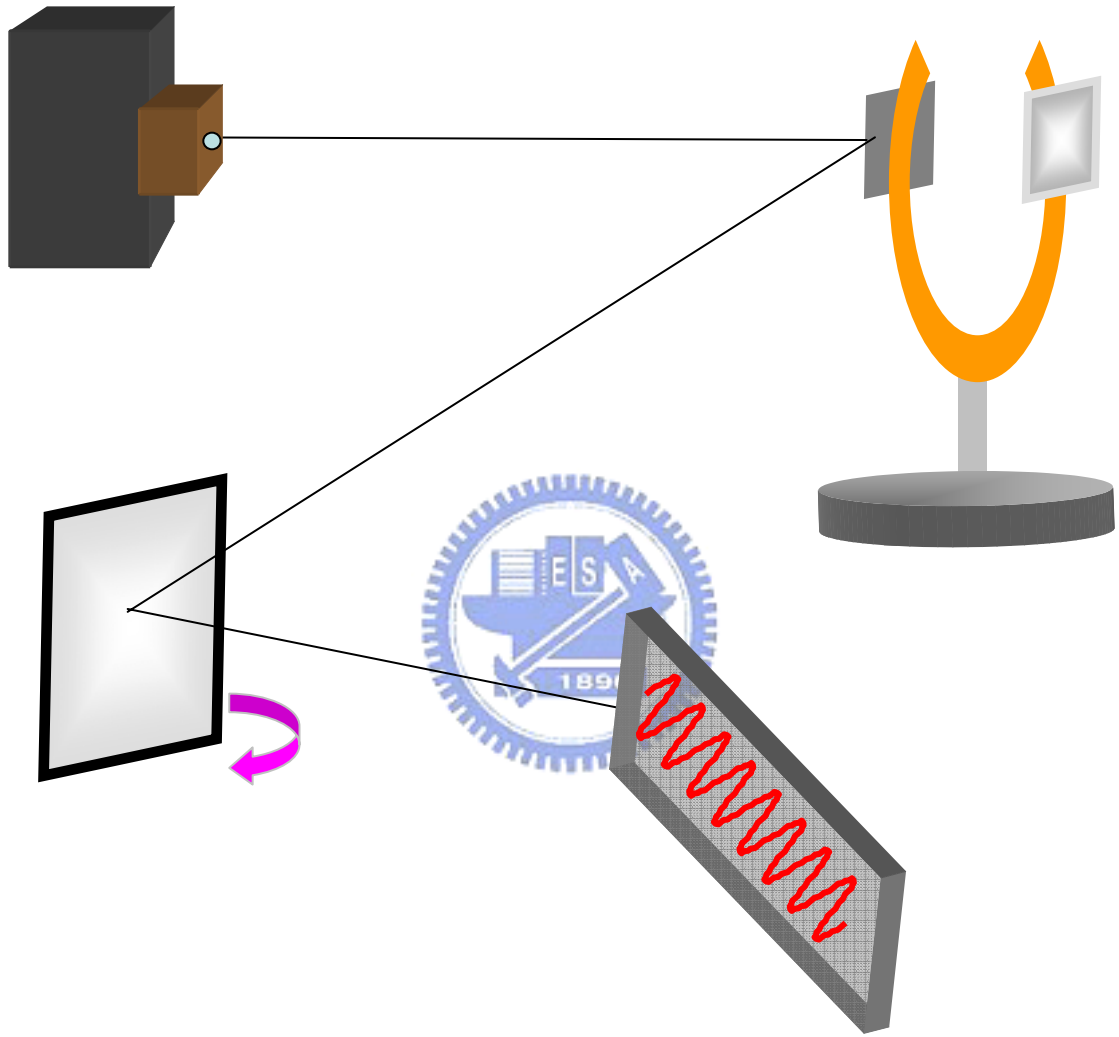


圖 2

以光槓桿觀察聲音 1

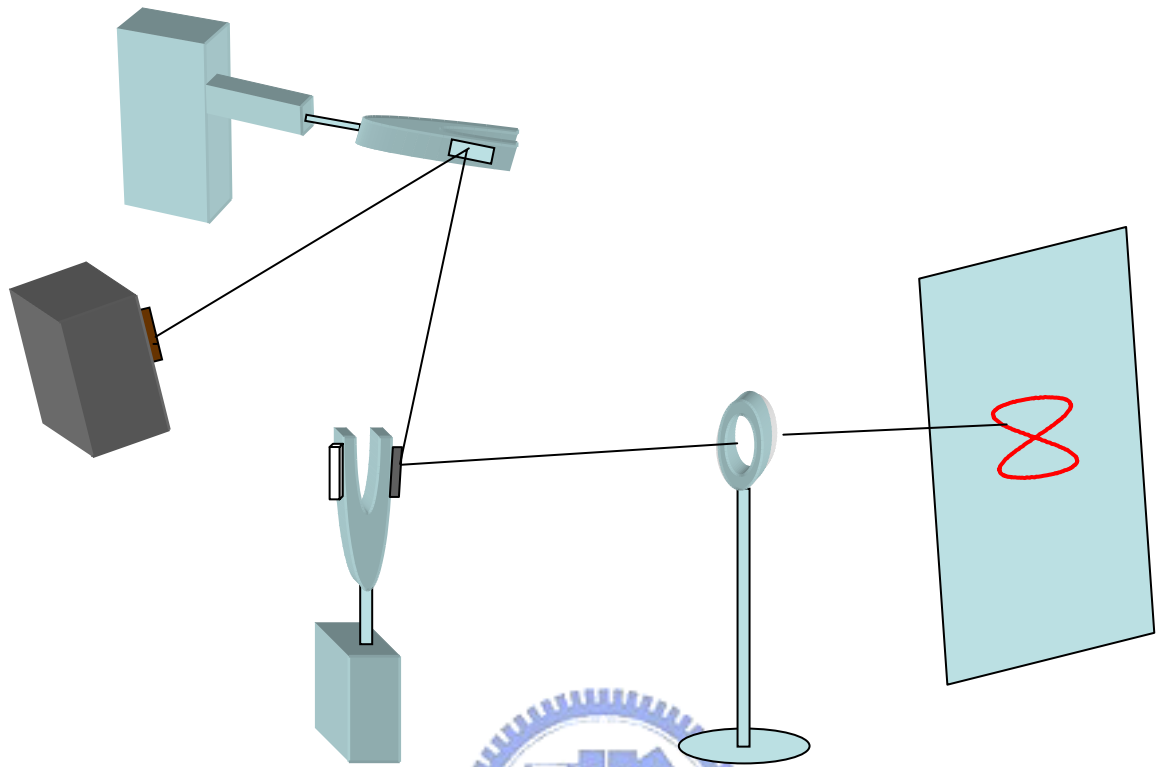


圖 3

以光槓桿觀察聲音 2

利沙球圖形的方程式是

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t - \phi_1)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t)$$

圖 4(a)是用 MathCad 軟體所畫出的利沙球圖形。圖 4(b)則是用儀器(Pattern Generator)所

拍攝的利沙球圖形。圖 4(c)，4(d)與 4(e)則是所使用的儀器。



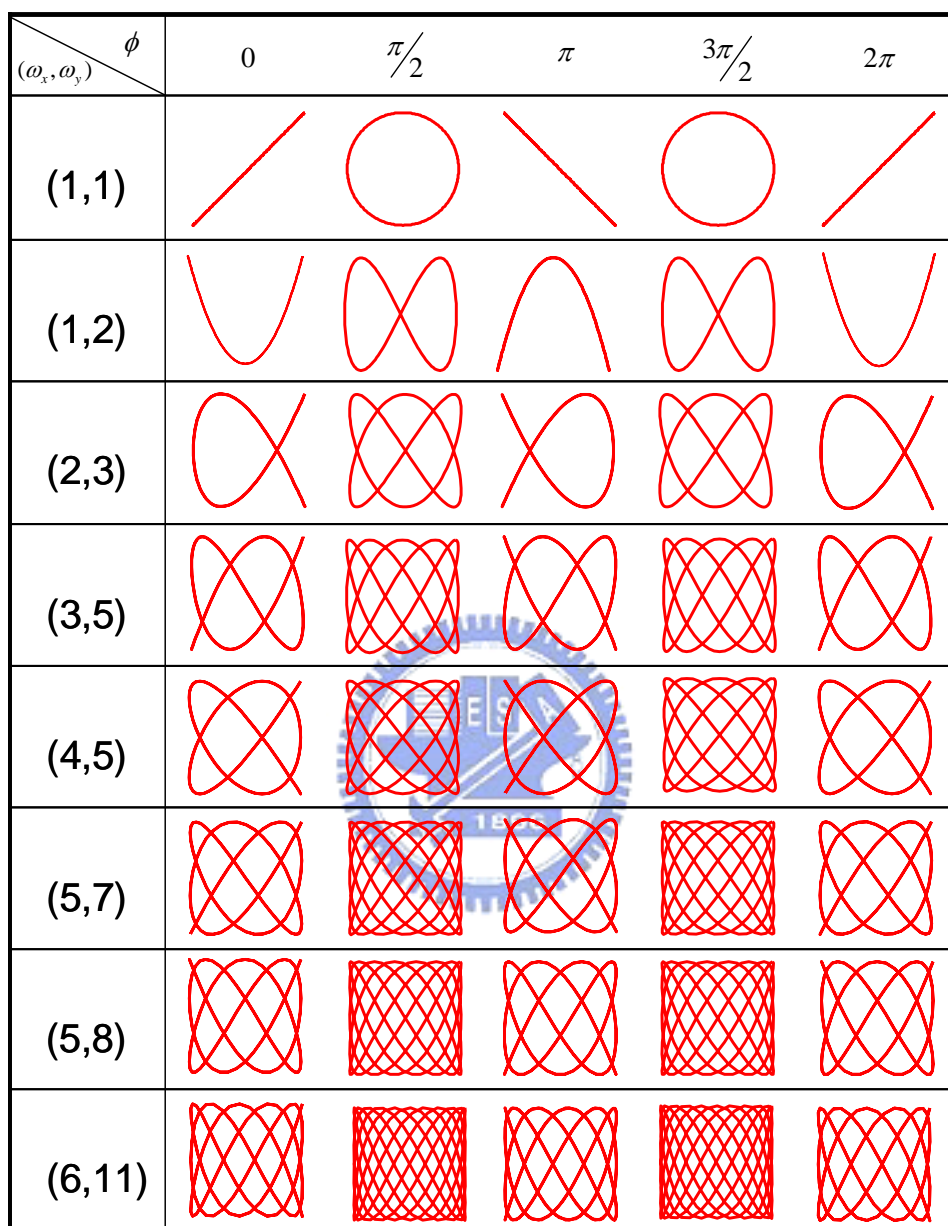


圖 4(a)

為利沙球圖形在各種不同的 $(\omega_x, \omega_y)$ ，當 $\Phi$ 角變化時所顯示的變化









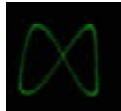









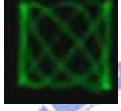








$(\omega_x, \omega_y) \backslash \phi$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
(1,1)					
(1,2)					
(2,3)					
(3,5)					
(4,5)					

圖 4(b)

用儀器(Pattern Generator)所拍攝的利沙球圖形。



圖 4(c)

左下角透明塑膠盒就是胚騰產生器，由右上角的綠光雷射(532nm)射出的綠雷射光通過胚騰產生器前方的小孔，經振動中的雙鏡面反射後，由右側大圓孔射出，產生圖形。



圖 4(d)



圖 4(e)

圖 4(d)是胚騰產生器，圖 4(e)是綠光雷射

## 2-2. 一維與二維簡諧運動

### 一維簡諧運動

物體的運動可以分為移動、轉動與振動，所以振動是自然界中所遇到的最重要的運動之一；當一個質點在一個平衡位置周圍做週期式的運動時，它就在振動。擺的運動就是一種振動；重物掛在一拉長了的彈簧上，它被放鬆後就開始振動。固體中的原子也在振動。同樣地，分子中的各原子在相對地振動；發射或接收天線中的電子也在飛快地振動。對於振動運動的瞭解在討論波的現象時是非常重要的，振動運動中最重要的是簡諧運動(simple harmonic motion, SHM)因為它除了在數字上是最簡單的以外，並且他也是自然界所發現的許多振動運動的一個相當準確的描述。[13]

當彈簧在振動時，如圖 5；其動能  $E_k$  為

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m} \quad P = mv \text{ 為振動物體的動量}$$

彈簧的位能  $V$  為

$V = \frac{1}{2}kx^2$   $k$  為彈簧的彈力常數， $x$  為彈簧的伸長量，則彈簧系統的力學能  $H$  為

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{根據漢米頓方程式}$$

$$\dot{P} = m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{令 } \frac{k}{m} = \omega^2 \quad \text{則得}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

$$\therefore x = A \cos(\omega t + \phi)$$

這就是簡諧運動。 $A$  是簡諧運動的振幅， $\omega t + \phi$  稱為相角(phase)， $\phi$  就是最初的相角， $\omega$

被稱為振動質點的角頻率。



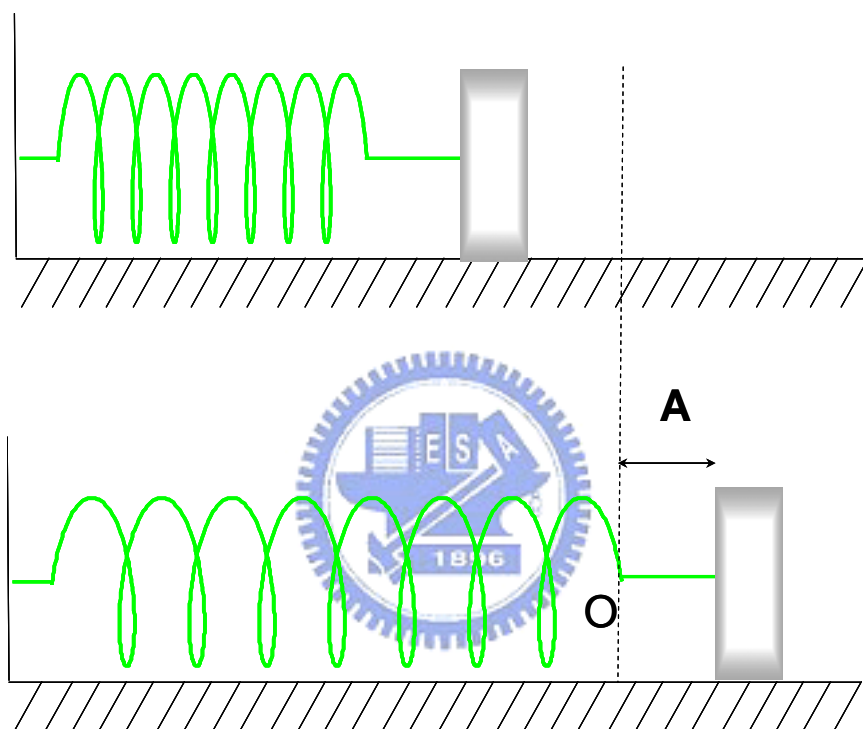


圖 5

彈簧的振動， $O$  為平衡點， $A$  為振幅。

## 二維簡諧運動

一個質點在平面內運動的時候，它的兩個座標  $x$  和  $y$  分別以簡諧運動的方式振動。

當兩運動頻率相同時，沿  $x$  軸的運動以  $x = A \cos \omega t$  來代表，沿  $y$  軸的運動則以  $y = B \cos(\omega t + \delta)$

來代表，其中  $\delta$  代表兩振動間的相差。且  $A \neq B$ ，所以質點的運動路線很明顯地是被限在  $x = \pm A$  和  $y = \pm B$  之間。

當兩運動同相時， $\delta = 0$  而  $y = B \cos \omega t$ ，與  $x = A \cos \omega t$  合併就得  $y = \frac{B}{A} x$  所產生的運動是

簡諧的

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega t$$

振幅是  $\sqrt{A^2 + B^2}$

當兩運動反相時， $\delta = \pi$ ， $y = -B \cos \omega t$ ，與  $x = A \cos \omega t$  合併就得  $y = -\frac{B}{A} x$  所產生的運

動仍是簡諧的

振幅仍是  $\sqrt{A^2 + B^2}$

所以將兩個同一頻率而互相垂直的簡諧運動相重疊所得到的的是直線諧和運動(rectilinear harmonic motion)。

當  $\delta = \frac{\pi}{2}$  時，質點沿  $x$  軸和沿  $y$  軸的運動是成正交的(quadrature)，於是

$y = B \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -B \sin \omega t$  與  $x = A \cos \omega t$  合併就得到  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$  這是橢圓的方程式。質

點在橢圓上是依順時針方向進行的。這可以從質點在  $x=+A$  處的速度上得到證明，在這點的速度是平行於  $y$  軸的，因為  $x = A \cos \omega t = A$  所以  $\cos \omega t = 1$ 。而且

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\omega B \cos \omega t = -\omega B$$

因為它是負的，質點經過 A 時是向下運動，這就相當於順時針方向的轉動。

當  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  或  $-\frac{\pi}{2}$  時，會得到一個橢圓，但是這時候的運動是反時針方向的，如圖 6；所

以我們可以說當相差  $\delta$  是  $\pm\pi/2$  的時候，將兩個同樣頻率的簡諧運動相重疊所得到的的是橢圓

運動，橢圓的兩軸分別平行於二運動的方向，當  $A=B$  的時候，橢圓就變成一個圓，於是就

得到圓周運動。當相差  $\delta$  是任意值時，路線仍是一橢圓，但是他的軸對座標軸就轉了。圖 7

所示是一些選出來的幾個相差值時的路線圖。



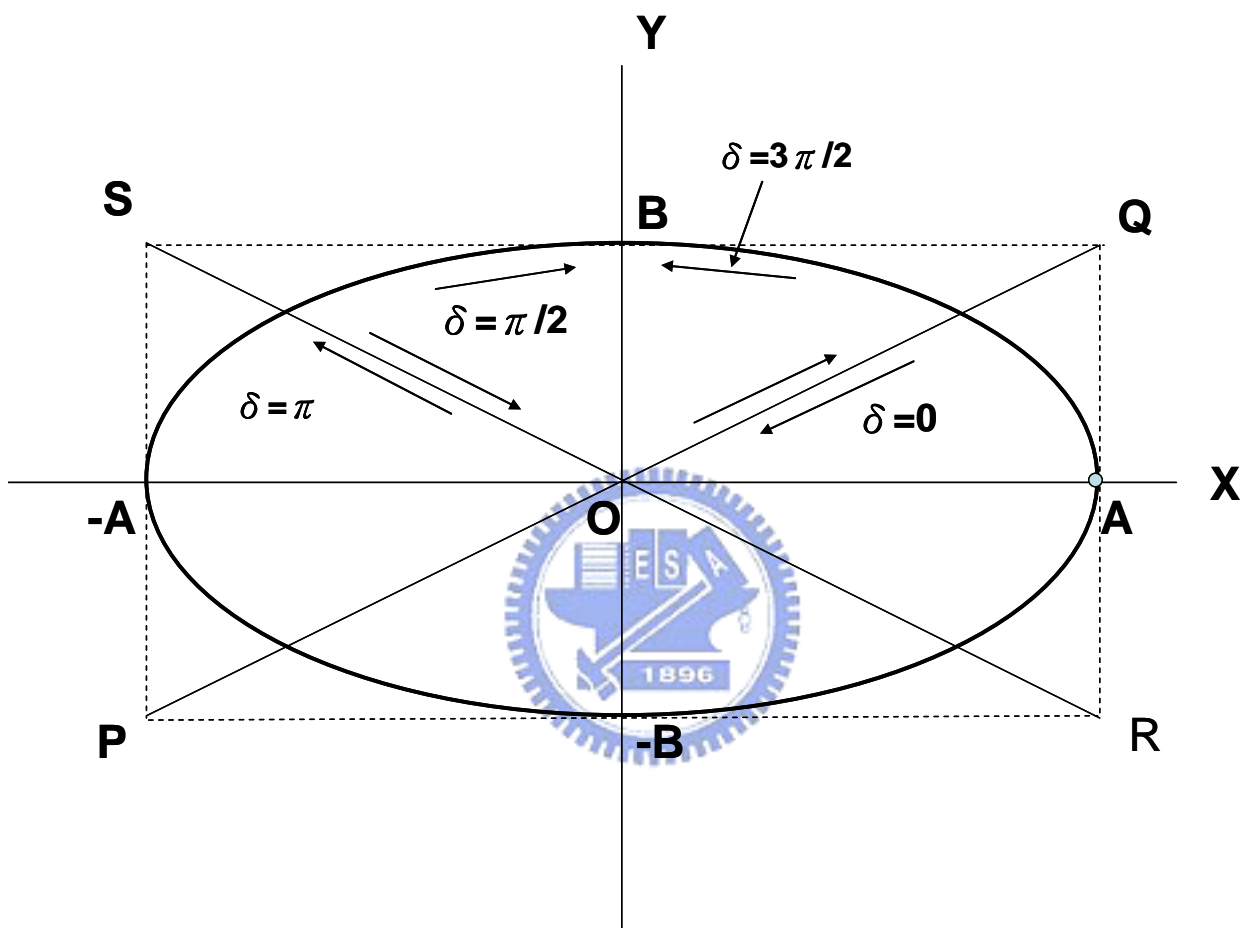


圖 6

當兩運動相位差  $\delta = 0$  時，其運動的軌跡為 PQ 直線；當兩運動相位差  $\delta = \pi$  時，其運動的軌跡為 RS 直線；當兩運動相位差  $\delta = \pi/2$  時，其運動的軌跡為橢圓，順時針方向；



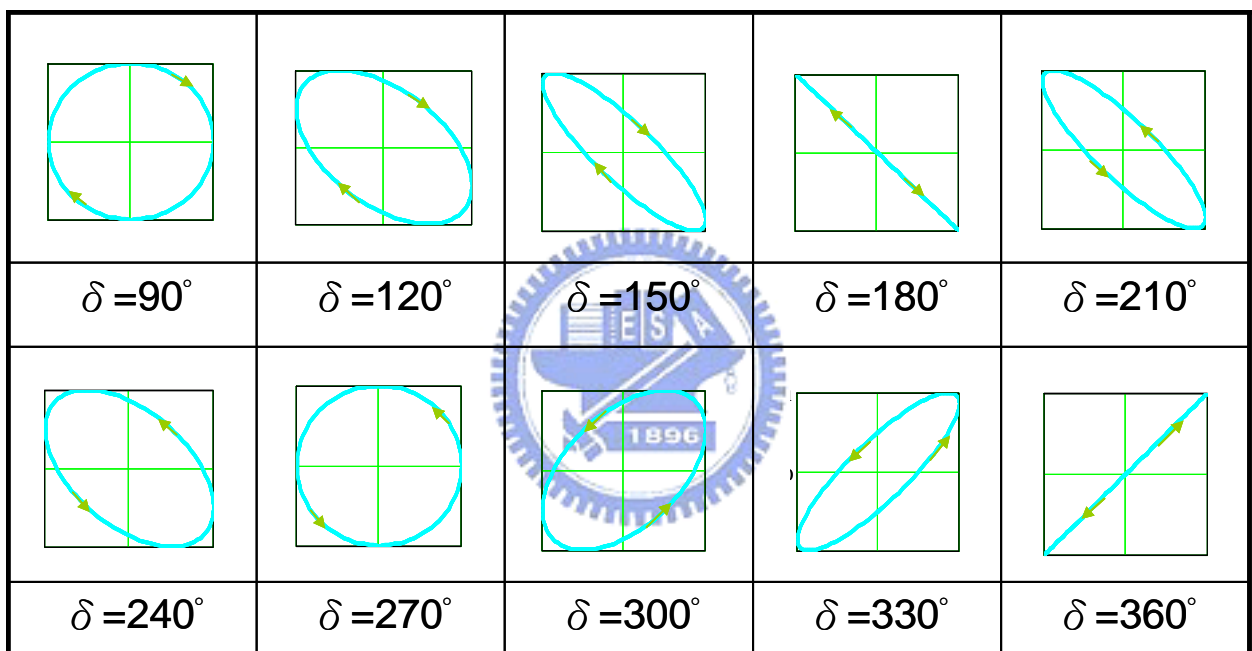


圖 7

選出來的幾個相差值時的路線

## 2-3. 擺線與擺線的歷史

當一個圓在一直線上作不滑的滾動時，圓周上的點所描繪的旋輪線稱為「擺線」(cycloid)；圓內部的點所描繪的旋輪線稱為短擺線 (curtate cycloid)；圓外部的點所描繪的旋輪線稱為長擺線 (prolate cycloid)。短擺線與長擺線合稱為次擺線 (trochoid) 如圖 8。



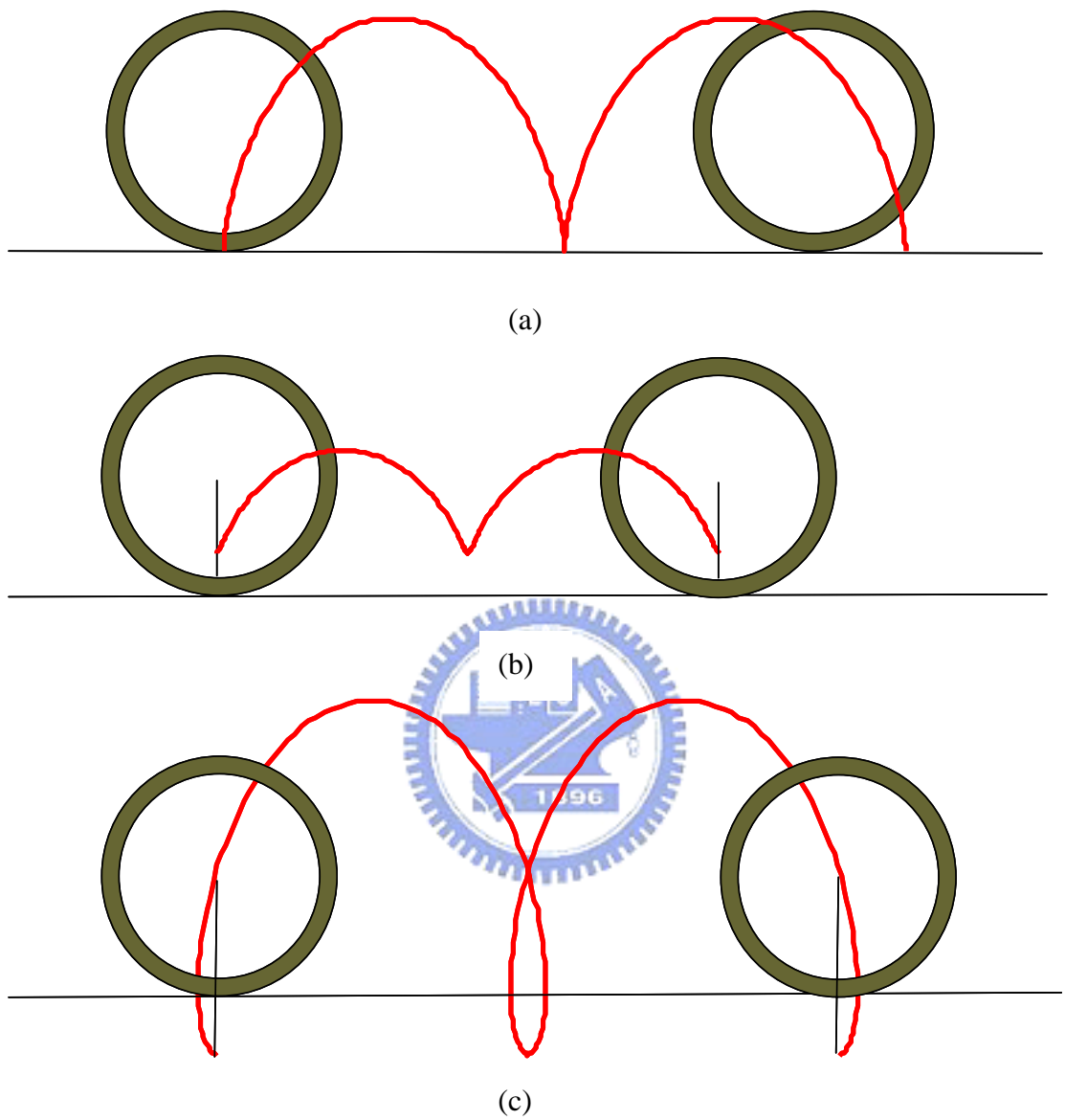


圖 8

(a)當一個圓在一直線上作不滑的滾動時，圓周上的點所描繪的旋輪線稱為「擺線」；(b)圓內部的點所描繪的旋輪線稱為短擺線；(c)圓外部的點所描繪的旋輪線稱為長擺線。短擺線與長擺線合稱為次擺線

當一個小圓在一個大圓的內部沿著大圓作不滑的滾動時，小圓圓周上的點所描繪的旋輪

線稱為內擺線 (hypocycloid) 其方程式為

$$x(t) = A \cos t + \cos(\omega t)$$

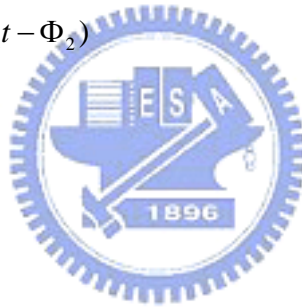
$$y(t) = A \sin t - \sin(\omega t)$$

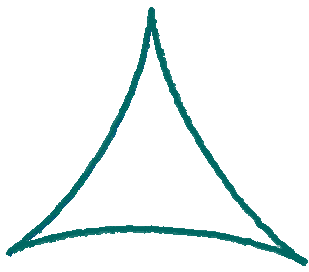
小圓內部與外部的點所描繪的旋輪線稱為內次擺線 (hypotrochoid) 其方程式為

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \Phi_2)$$

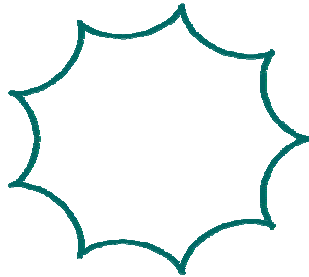
$$y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \Phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \Phi_2)$$

當  $\Phi_1 = -0.5\pi$ ， $\Phi_2 = 0$  時，如圖 9。

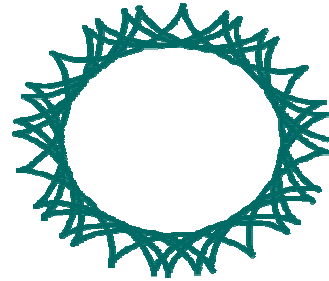




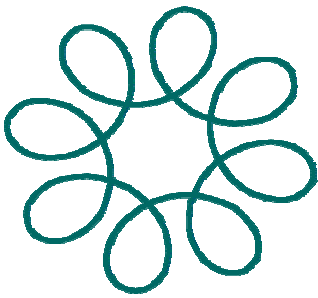
(a)



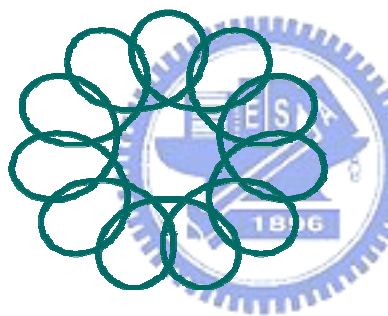
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

圖 9

(a) $A=\omega=2$ , (b) $A=\omega=9$ , (c)  $A=\omega=5.7$ , 為內擺線。

(d) $A_1=1, A_2=2, \omega_1=7, \omega_2=-1$ (e) $A_1=1, A_2=2, \omega_1=10,$

$\omega_2=-1$ (f) $A_1=1, A_2=1.2, \omega_1=9, \omega_2=-8$  為內次擺線。

當一個小圓在一個大圓的外部沿著大圓作不滑的滾動時，小圓圓周上的點所描繪的旋輪線稱為外擺線(epicycloid)如圖 10(a)。

其方程式為

$$x(t) = A \cos t + \cos(\omega t)$$

$$y(t) = A \sin t - \sin(\omega t)$$

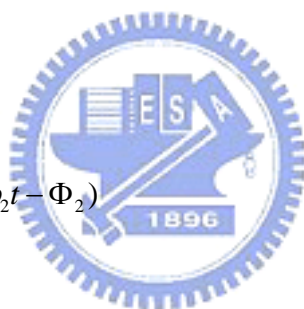
(b)當  $\omega=-2, A=1.9$ ，(c)  $\omega=-3, A=5$ ，(d)  $\omega=-4, A=5$ ，(e)  $\omega=-5, A=5$ ，時的圖形。

小圓內部與外部的點所描繪的旋輪線稱為外次擺線 (epitrochoid)。

其方程式為

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \Phi_2)$$

$$y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \Phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \Phi_2)$$



如圖 10(f)當  $\Phi_1=-0.5\pi$ ， $\Phi_2=0$ ， $A_1=1$ ， $A_2=2$ ， $\omega_1=6$ ， $\omega_2=1$ (g)  $\omega_1=10$ ， $\omega_2=1$

(h)  $\omega_1=20$ ， $\omega_2=1$  時的圖形。(i)小圓外部 P 點在半圓外、內滾動時(j)圖為其軌跡，上半週

為外次擺( $A_1=1$ ， $A_2=2$ ， $\omega_1=9$ ， $\omega_2=1$ )，下半週為內次擺( $\omega_1=7$ ， $\omega_2=-1$ )。

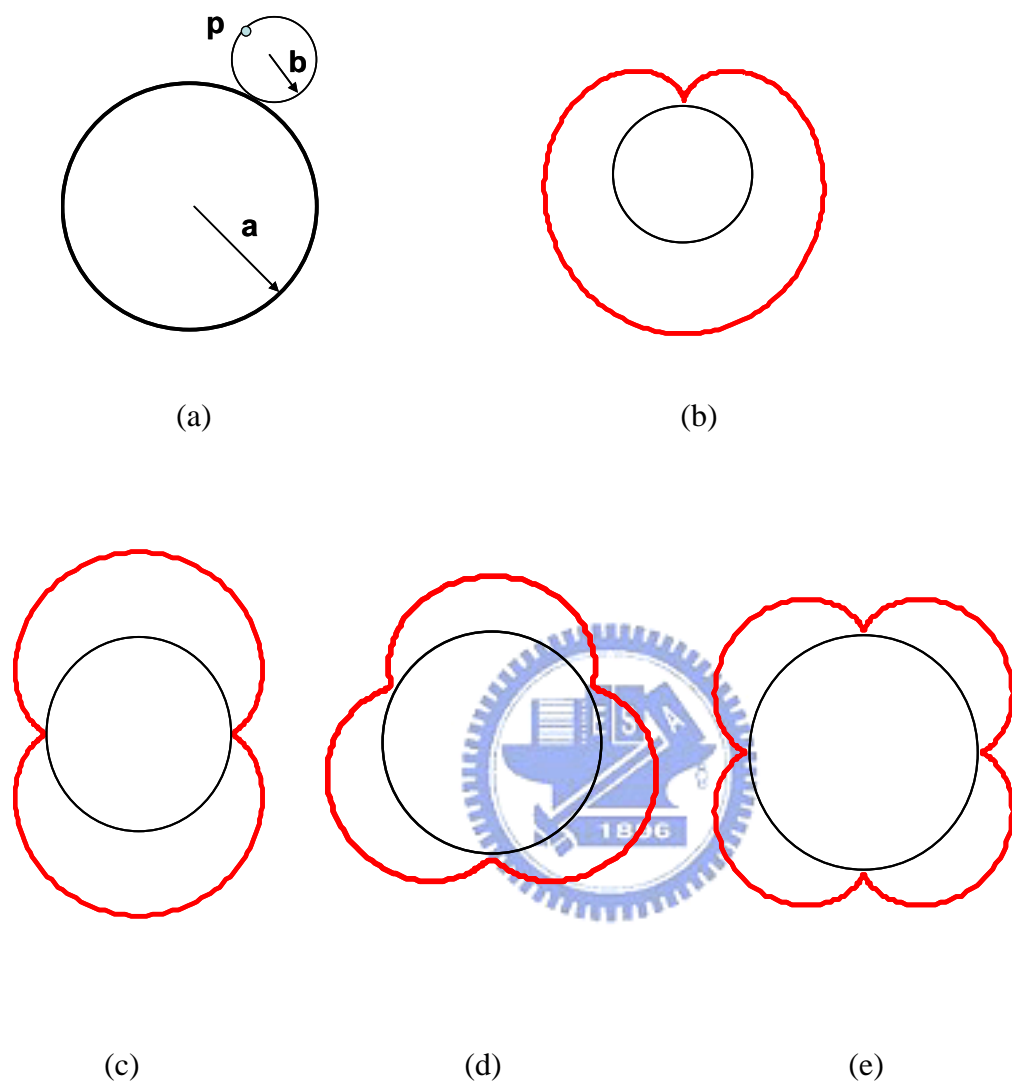
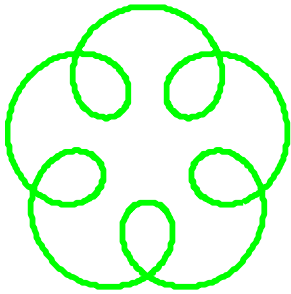
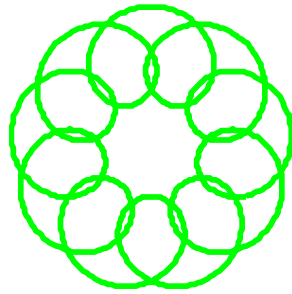


圖 10

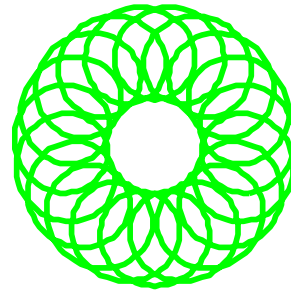
(a) 當一個小圓在一個大圓的外部沿著大圓作不滑的滾動時，小圓圓周上的點所描繪的旋輪線稱為外擺線(b)當  $\omega = -2, A = 1.9$ ，(c)  $\omega = -3, A = 5$ ，(d)  $\omega = -4, A = 5$ ，(e)  $\omega = -5, A = 5$ ，時的圖形。



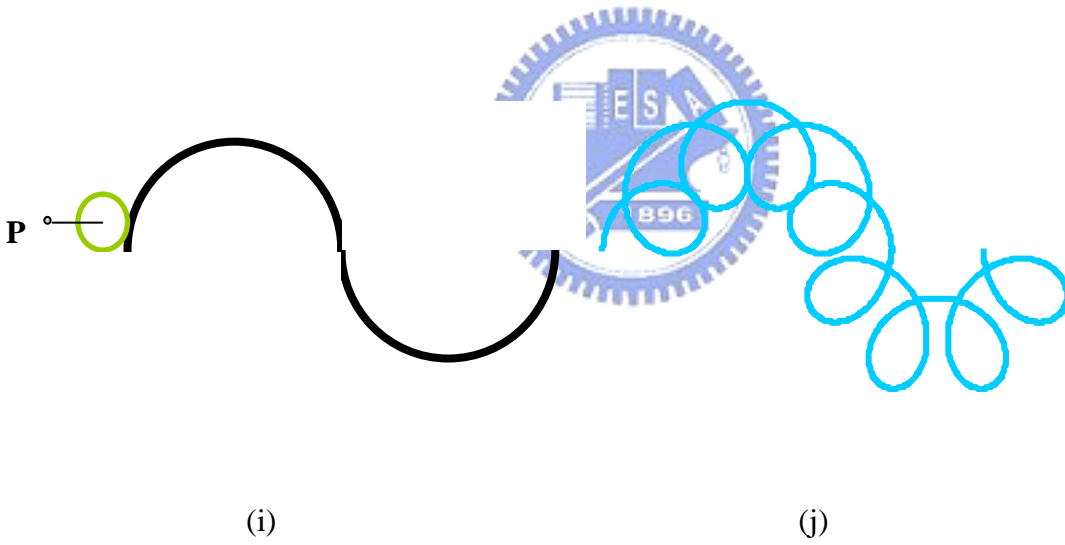
(f)



(g)



(h)



(i)

(j)

圖 10

小圓內部與外部的點所描繪的旋輪線稱為外次擺線(f)當 $\Phi_1 = -0.5\pi$ ， $\Phi_2 = 0$ ， $A_1 = 1$ ， $A_2 = 2$ ， $\omega_1 = 6$ ， $\omega_2 = 1$ (g)  $\omega_1 = 10$ ， $\omega_2 = 1$ (h)  $\omega_1 = 20$ ， $\omega_2 = 1$  時的圖形。  
 (i)小圓外部P點在半圓外、內滾動時(j)圖為其軌跡，上半週為外次擺，下半週為內次擺。



擺線的研究歷史久遠，其名稱是由物理學家伽利略（1564 - 1642，義大利人）命名的，並於 1599 年計算出擺線一拱下的面積近似  $\pi a^2$ ；1634 年法國數學家羅伯瓦（Roberval，1602 - 1675）首先計算出擺線一拱下的面積，1638 年找到擺線切線的作法，並討論過擺線的一拱，繞其底線旋轉所得旋轉體的體積；1658 年法國人巴斯卡（B. Pascal, 1623~1662）寫了擺線的歷史談到擺線的面積、體積與重心；名建築師雷恩（C. Wren 1632~1723，英國人）求出擺線的弧長；1673 年荷蘭物理學家海更士（C.C. Huygens，1629-1695）發明擺線鐘（擺）並證明擺的等時性，如圖 11；1690 年伯努力（J. Bernoulli, 1654~1705 年，瑞士人）發現擺線的最速降性質，如圖 12。[15]



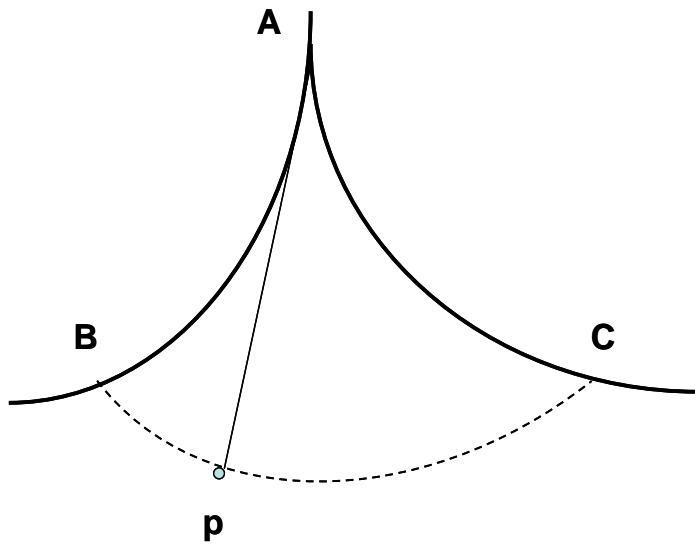


圖 11

擺線擺 AP 的擺錘 P 的擺動週期與擺幅的大小無關。

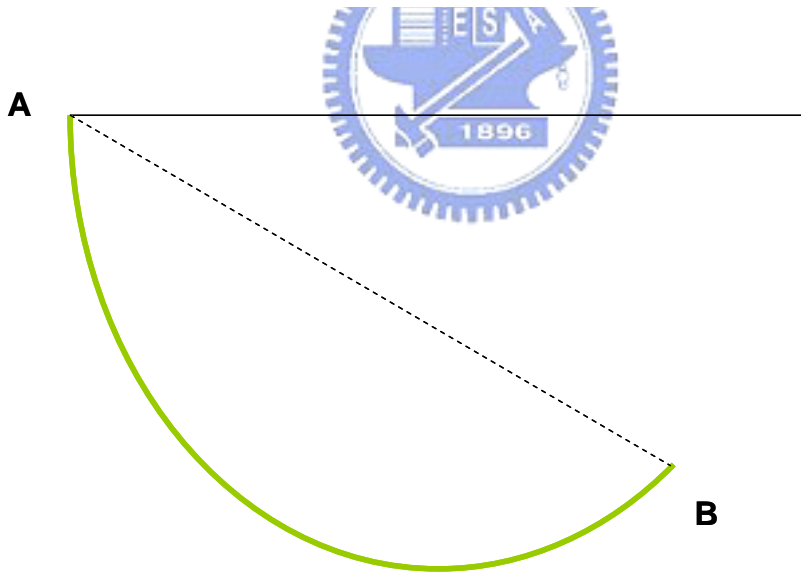


圖 12

物體由 A 下降到 B 時，沿擺線下降所需的時間最短。

## 2-4. 二維簡諧運動加上旋轉就是擺線

當

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_0^2 + \omega_L^2)(x^2 + y^2) + \omega_L L_z$$

$$= \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_0^2 + \omega_L^2)(x^2 + y^2) + \omega_L(xP_y - yP_x)$$

$$\dot{P}_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -[m(\omega_0^2 + \omega_L^2)x] - \omega_L P_y$$

$$m\ddot{x} + m(\omega_0^2 + \omega_L^2)x + \omega_L P_y = 0$$

$$m\ddot{y} + m(\omega_0^2 + \omega_L^2)y - \omega_L P_x = 0$$

又

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m} - \omega_L y \quad \therefore P_x = m\dot{x} + m\omega_L y$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m} + \omega_L x \quad \therefore P_y = m\dot{y} - m\omega_L x$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \omega_L \dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \omega_L \dot{x} = 0$$

令  $\xi = x + iy$  則得

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\omega_L \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0$$



$$\text{令 } \xi = e^{-i\omega t}, \quad \omega > 0$$

$$\omega^2 + \omega\omega_L - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega = \frac{-\omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2} \quad \text{負號不合}$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{-\omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\text{令 } \xi = e^{i\omega t}, \quad \omega > 0$$

$$\omega^2 - \omega\omega_L - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega = \frac{\omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2} \quad \text{負號不合}$$

$$\therefore \omega_1 = \frac{\omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\therefore \xi = A_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\phi_2} e^{-i\omega_2 t}$$

$$= A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\phi_2 - \omega_2 t)}$$

$$\rightarrow x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t - \phi_2)$$



所以二維簡諧運動加上旋轉時的軌跡就是擺線。

## 二維簡諧運動加上旋轉的幾個例子

### 太陽系行星運動的軌跡

太陽系有九大行星-水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星與冥王星，

假設它們繞太陽旋轉的運動軌跡均為圓形，那麼在地球自轉軸上看水星的運動軌跡為

$$x=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

$$y=A_1\sin(\omega_1t+\varphi_1)-A_2\sin(\omega_2t+\varphi_2)$$

其中  $A_1=1.2$     $A_2=3$     $\omega_1=4.125$     $\omega_2=1$     $\varphi_1=-0.15\pi$     $\varphi_2=0$

如圖 13(a)；若  $A_1=2.2$     $A_2=3$     $\omega_1=1.625$     $\omega_2=1$  時，則為在地球自轉軸上看金星的運動

軌跡，如圖 13(b)；若  $A_1=3$     $A_2=2$     $\omega_1=1$     $\omega_2=1.881$  時，則為在火星自轉軸上看地球的

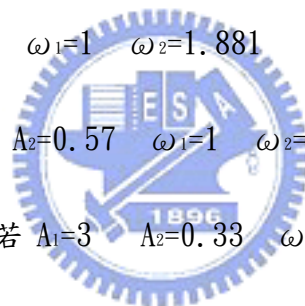
運動軌跡，如圖 13(c)；若  $A_1=3$     $A_2=0.57$     $\omega_1=1$     $\omega_2=11.86$  時，則為在木星自轉軸上

看地球的運動軌跡，如圖 13(d)；若  $A_1=3$     $A_2=0.33$     $\omega_1=1$     $\omega_2=29.48$  時，則為在土星

自轉軸上看地球的運動軌跡，如圖 13(e)；與太陽系的華爾滋(John Martineau & Robin

Heath，葉偉文譯，p. 188)中的圖形非常吻合，所以書中的美妙圖形只是同心、同平面、同

方向、不同頻率的圓周運動間的相對運動。



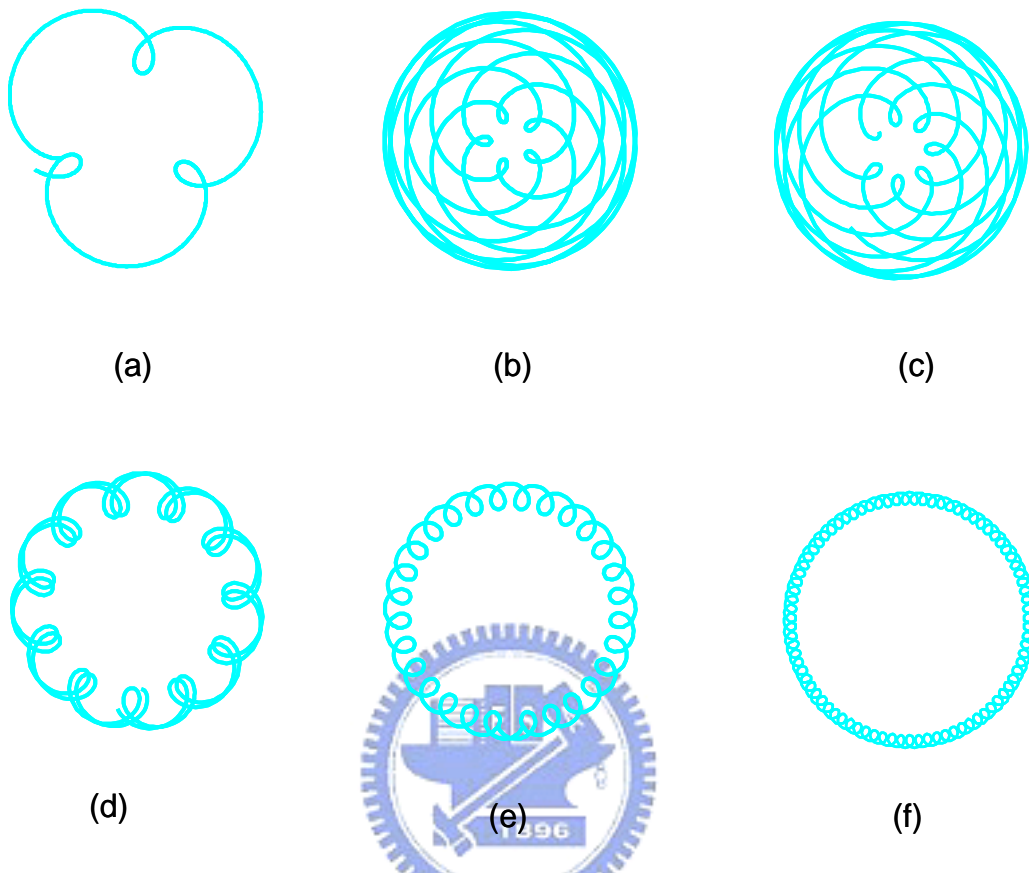


圖 13

$$x=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)$$

$$y=A_1\sin(\omega_1t+\varphi_1)-A_2\sin(\omega_2t+\varphi_2)$$

其中  $A_1=1.2$   $A_2=3$   $\omega_1=4.125$   $\omega_2=1$   $\varphi_1=-0.15\pi$   $\varphi_2=0$

如圖 13(a)；若  $A_1=2.2$   $A_2=3$   $\omega_1=1.625$   $\omega_2=1$  時，則為在地球自轉軸上看金星的運動軌跡，如圖 13(b)；若  $A_1=3$   $A_2=2$   $\omega_1=1$   $\omega_2=1.881$  時，則為在火星自轉軸上看地球的運動軌跡，如圖 13(c)；若  $A_1=3$   $A_2=0.57$   $\omega_1=1$   $\omega_2=11.86$  時，則為在木星自轉軸上看地球的運動軌跡，如圖 13(d)；若  $A_1=3$   $A_2=0.33$   $\omega_1=1$   $\omega_2=29.48$  時，則為在土星自轉軸上看地球的運動軌跡，如圖 13(e)；若  $A_1=20$   $A_2=1$   $\omega_1=1$   $\omega_2=84$  時，則為在天王星自轉軸上看地球的運動軌跡，如圖 13(f)。

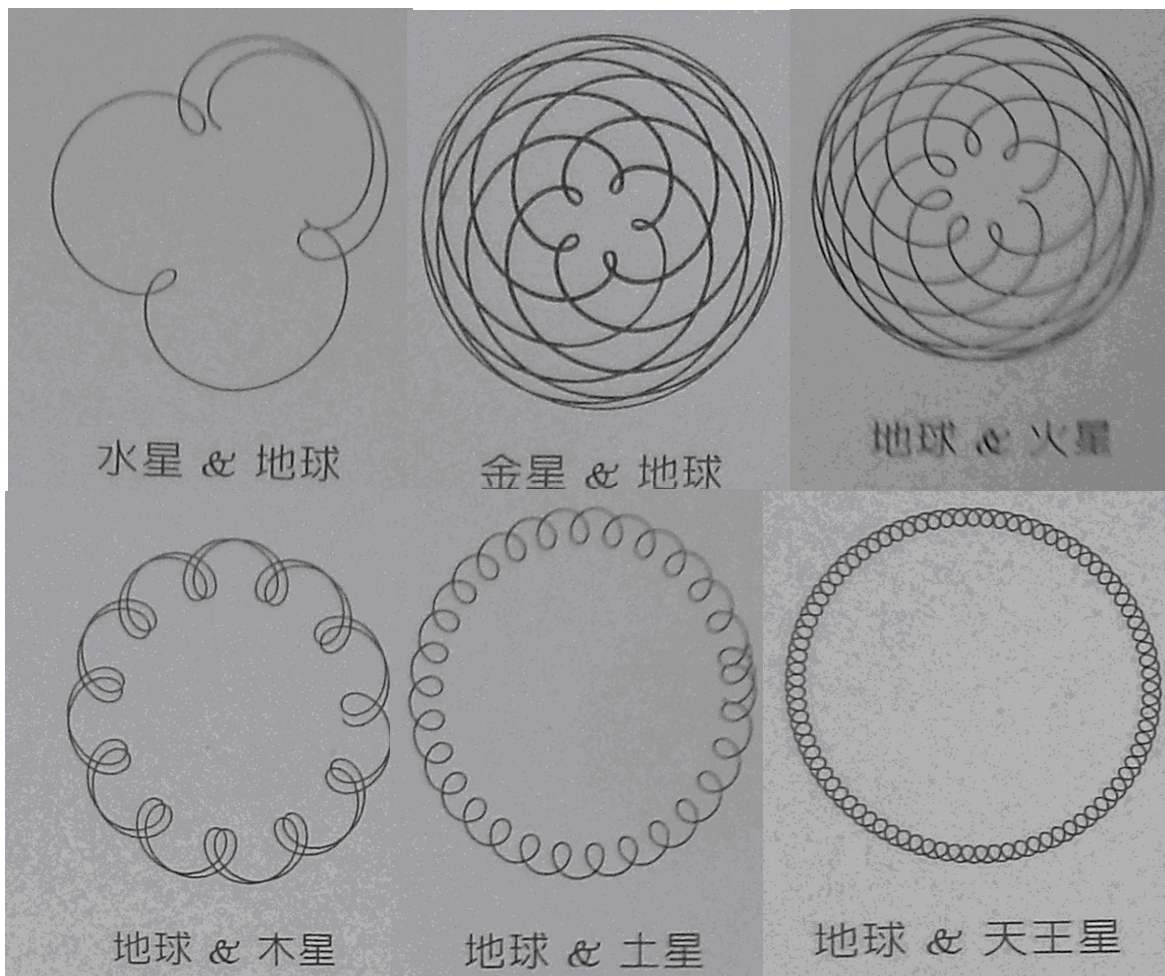


圖 13(f)

太陽系的華爾滋[10]中的圖形，顯示的行星對地球或地球對行星的運動的軌跡。

## 當橢圓形的軌道繞中心旋轉時的軌跡

當橢圓軌道  $\begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = b \sin(\omega t) \end{cases}$  經旋轉矩陣  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}$  變換成

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \cos(\alpha t) - b \sin(\omega t) \sin(\alpha t) \\ a \cos(\omega t) \sin(\alpha t) + b \sin(\omega t) \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b) \cos[(\alpha+\omega)t] + (a-b) \cos[(\alpha-\omega)t] \\ (a+b) \sin[(\alpha+\omega)t] + (a-b) \sin[(\alpha-\omega)t] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \cos[\omega_1 t] + A_2 \cos[\omega_2 t] \\ A_1 \sin[\omega_1 t] + A_2 \sin[\omega_2 t] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

此處  $A_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ ,  $A_2 = \frac{1}{2}(a-b)$ ,  $\omega_1 = \alpha + \omega$ ,  $\omega_2 = \alpha - \omega$

當  $\alpha < \omega$  時, 圖形為內擺線。如圖 14。





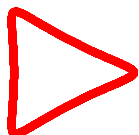

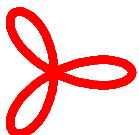
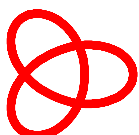

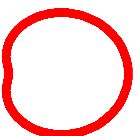




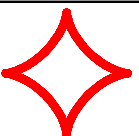
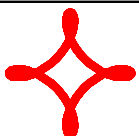
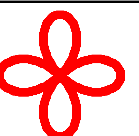
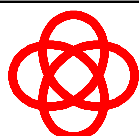

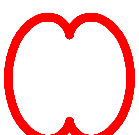




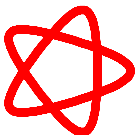


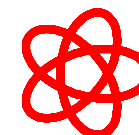


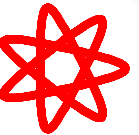

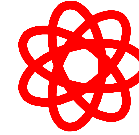
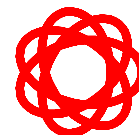
$A_x/A_y$ $(\omega_x, \omega_y)$	1/3	1/2	1	2	3
(2, -1)					
(2, 1)					
(3, -1)					
(3, 1)					
(3, 2)					
(4, 3)					

圖 14

當橢圓軌道在旋轉， $(\omega_x, \omega_y)$ 及  $A_x/A_y$  之值變化時，其方程式所顯示的圖形。

## 傅科擺

西元 1851 年法國物理學家傅科(Jean Leon Foucault)在巴黎傷殘救濟院(dome of Les Invalides)頂上掛一長 67 米的擺。在每一擺動中，擺錘將沙落在一個圓圈上，於是由實驗證實擺動平面以每小時  $11^{\circ}15'$  的時速在轉動。傅科實驗是地球轉動的一個有效證明。即使地球一直是被雲遮住，這個實驗也能告訴科學家們地球在轉動，且可由此求出他的轉動週期。若將傅科擺掛在北極，則由於地球的自轉，站在地面上的觀察者將看到擺動面以順時針的方向(即與地球的轉動方向相反)每天旋轉一次。若傅科擺掛在緯度為  $\lambda$  的北半球上，振動面轉動的方向雖仍為順時針，但其周期將變為  $1/\sin \lambda$  天。[13] 當單擺在北極擺動時，由於地球的自轉其軌跡會呈現內擺線的形狀。

當單擺  $\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \phi) \\ y = 0 \end{cases}$  經座標旋轉矩陣  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}$  變換成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \phi) \cos(\alpha t) \\ -a \cos(\omega t + \phi) \sin(\alpha t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} a \begin{pmatrix} \cos[(\omega + \alpha)t + \phi] + \cos[(\omega - \alpha)t + \phi] \\ -\sin[(\omega + \alpha)t + \phi] - \sin[(\omega - \alpha)t + \phi] \end{pmatrix}$$

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t + \phi) + A \cos(\omega_2 t + \phi)$$

$$y_1 = -A \sin(\omega_1 t + \phi) + A \sin(\omega_2 t + \phi)$$

此處  $A = \frac{1}{2} a, \omega_1 = \alpha + \omega, \omega_2 = \omega - \alpha$

當  $\alpha < \omega$  時，圖形為內擺線。如圖 15。

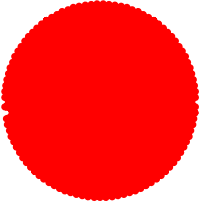
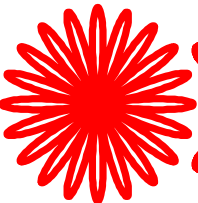
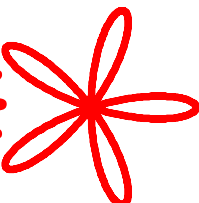
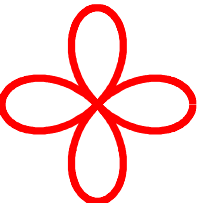
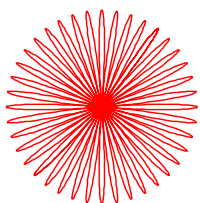
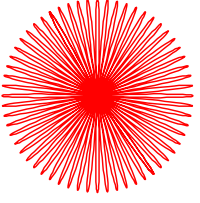

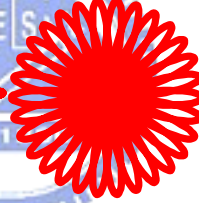

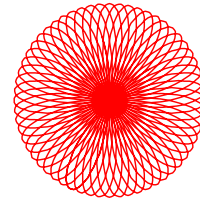
$(\omega_1, \omega_2)$	(1.01,0.99)	(1.1, 0.9)	(1.2,0.8)	(1.5,0.5)	(2.1,1.9)
					
$(\omega_1, \omega_2)$	(3.1,2.9)	(3.2,2.8)	(3.4,2.6)	(3.5,2.5)	(3.7,2.3)
					

圖 15

當單擺在北極擺動時，由於地球的自轉其軌跡會呈現內擺線的形狀。 $\omega_1 = \alpha + \omega$ ， $\omega_2 = \omega - \alpha$ ， $\omega$  為單擺振動的角頻率， $\alpha$  為座標旋轉的角頻率。

當兩個圓周運動互相垂直時，其方程式為

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$z = -A_2 \sin(\omega_2 t - \phi_2)$$

設  $\omega_1=3$ ,  $\omega_2=1$ ,  $A_1=1$ ,  $A_2=2$ ,  $\phi_1= \phi_2=0$  則經旋轉可得到由利沙球變為內次擺及外次擺的

圖形。



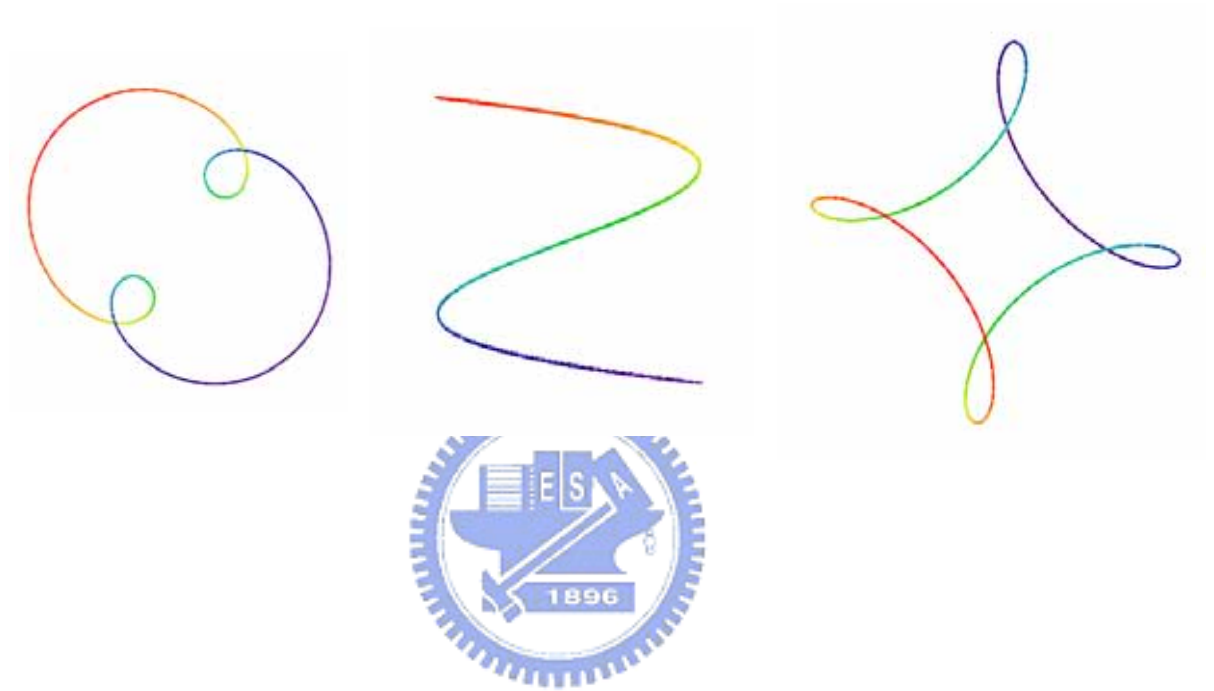


圖 16

設  $\omega_1=3$ ,  $\omega_2=1$ ,  $A_1=1$ ,  $A_2=2$ ,  $\phi_1= \phi_2=0$  則經旋轉可得到由利沙球變為內次擺及外次擺的圖形。

當帶電粒子在互相垂直的電場  $E$  與磁場  $B$  中運動時，它們的軌跡是擺線，如圖 17。[6]

這種特性在晶圓的電漿蝕刻中非常有用，因為它們使離子在腔體中所走的路徑長度大為增加，因而游離了更多氣體分子，產生了更多的電漿。

擺線也出現在介觀量子點、混沌及雷射參數面中[1, 2, 3, 4]。



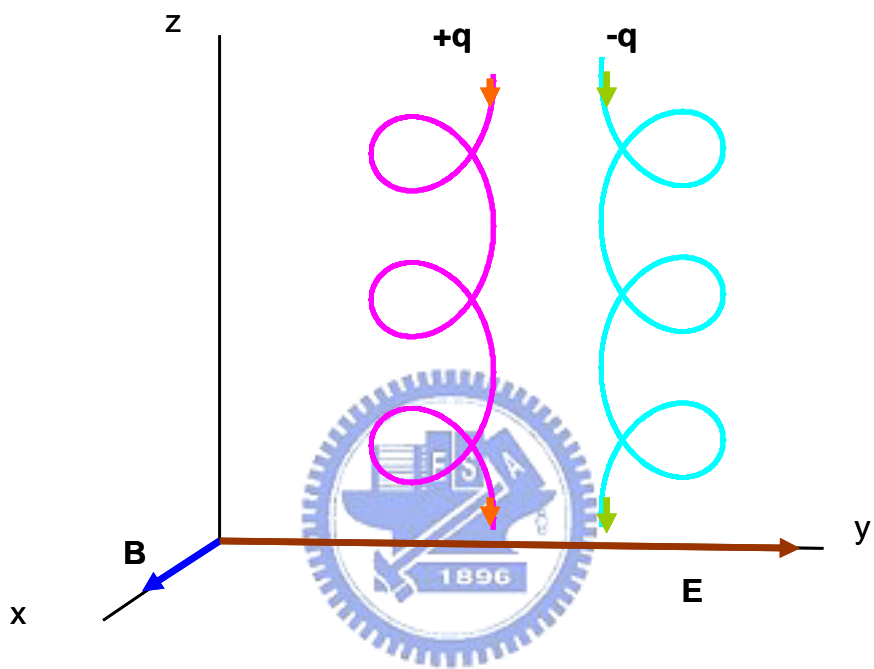


圖 17

帶電粒子在互相垂直的電場與磁場中運動的軌跡。

# 第三章 $SO(3)$ 與 $SU(2)$ 的對應

## 3-1. $SO(3)$ 簡介

為了描述剛體的轉動，只需確定固定在剛體上的座標系  $OXYZ$  相對於慣性座標系  $O' X' Y' Z'$  的方向變化就夠了。我們將慣性系的座標原點  $O'$  與剛體上的座標原點  $O$  相重合，而原點  $O$  在剛體轉動時是固定不動的。

假設開始時兩座標系座標軸互相重合，則剛體任意一個轉動，均可由圖 16 所示順次三個轉動疊加而成，這三個轉動是：

(1) 繞軸  $Z$  轉過的旋進角  $\alpha$  (圖 18a)。剛體轉動後沿  $y$  軸的直線稱為節線。

(2) 繞節線轉過章動角  $\beta$  (圖 18b)。

(3) 繞軸  $Z$  轉過自轉角  $\gamma$  (圖 18c)。



旋進角  $\alpha$ 、章動角  $\beta$ 、自轉角  $\gamma$ ，總稱為尤拉角。當  $O$  中一向量  $A$  通過尤拉角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  旋轉時，它的分量在此轉動中的變換矩陣  $R$  稱為空間旋轉矩陣  $SO(3)$ 。

所以空間旋轉矩陣

$$SO(3) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \gamma \sin \alpha & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$



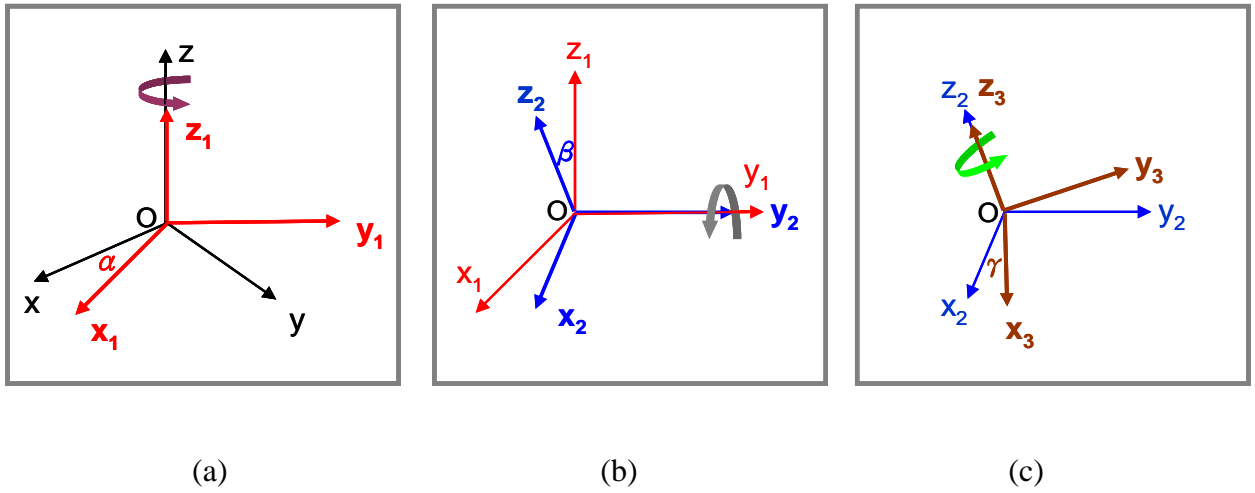


圖 18

圖(a)為繞  $Z$  軸旋轉  $\alpha$  角；圖(b)為繞  $Y_1$  軸旋轉  $\beta$  角；圖(c)為繞  $Z_2$  軸旋轉  $\gamma$  角。



## 3-2. SU(2)簡介

行列式為+1 的 2X2 么正矩陣所組成的特殊么正群 SU(2)，3 個包立矩陣  $\sigma_i$  是它的生成元。SU(2) 為 3 階而且有 3 個實連續參數  $\xi$ ， $\eta$ ， $\zeta$ ，稱為 Caley-Klein 參數。其一般形式為

$$U_2(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \sin \eta \\ -e^{-i\xi} \sin \eta & e^{-i\zeta} \cos \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

將它微分可以得到

$$-i \frac{\partial U_2}{\partial \xi}(\xi=0, \eta=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

$$-i(\sin \eta)^{-1} \left[ \frac{\partial U_2}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1$$

$$-i \frac{\partial U_2}{\partial \eta}(\eta=0, \zeta=0) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$$



### 3-3. SO(3)與 SU(2)的關係

因為 SU(2) 矩陣 =

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\xi} \sin \eta \\ -e^{-i\xi} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{let } \xi = \frac{\gamma + \alpha}{2}, \eta = \frac{\beta}{2}, \zeta = \frac{\gamma - \alpha}{2}. \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma + \alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma - \alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -e^{-i(\gamma - \alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma + \alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad a = e^{i(\gamma + \alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2}, b = e^{i(\gamma - \alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = U(\alpha, \beta, \gamma) = U_z \left( \frac{\gamma}{2} \right) U_y \left( \frac{\beta}{2} \right) U_z \left( \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

設  $M$  為一個  $2 \times 2$  的矩陣，而任何  $2 \times 2$  的矩陣可以用單位矩陣與泡立矩陣的線性組合來表示。



設

$$M = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

$$M' = U M U^\dagger$$

將 SU(2) 作用在  $M$  上，得

在么正相似轉換中，矩陣的跡與行列式的值是不變的

所以

$$M' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$
$$-(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

令

$$a = e^{i\xi} \quad \& \quad b = 0, \text{ or}$$

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix}$$

$$U_z \sigma_1 U_z^+ = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\xi} \\ e^{-2i\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore U_z x \sigma_1 U_z^+ = x \sigma_1 \cos 2\xi - x \sigma_2 \sin 2\xi$$

同理可得

$$U_z y \sigma_2 U_z^+ = y \sigma_1 \sin 2\xi + y \sigma_2 \cos 2\xi$$

$$U_z z \sigma_3 U_z^+ = z \sigma_3$$

令

$$\xi = \alpha / 2$$

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z$$

$$\Rightarrow U_z(\alpha/2)$$

與旋轉矩陣

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相同

所以

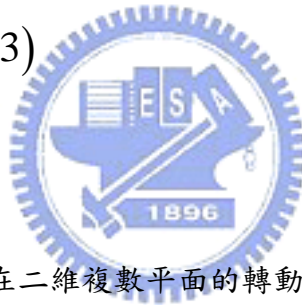
$$U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha)$$

$$R_z(\alpha + 2\pi) = R_z(\alpha)$$

$$U_z\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) = \begin{pmatrix} -e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = -U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

它們之間是二對一的對應

$\therefore SU(2)$  and  $SO(3)$



是同胚的。

由此可知  $SU(2)$  可看成是一個在二維複數平面的轉動，保持  $|z_1|^2 + |z_2|^2$  為不變量，它

的行列式的值為+1，並且有三個獨立參數；而  $SO(3)$  則是描述一般三維實空間的轉動，保持

$x^2 + y^2 + z^2$  為不變量，它的行列式的值也為+1，也有三個獨立參數。

## 第四章 2D 曲線間的轉換

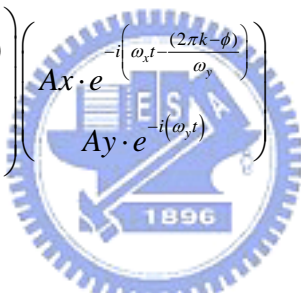
### 4-1. 利沙球圖形與擺線

將複數型式的利沙球圖形

$$x(t) = A_x \cdot e^{-i(\omega_x t - \phi)}$$

$$y(t) = A_y \cdot e^{-i(\omega_y t)}$$

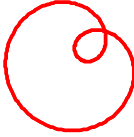
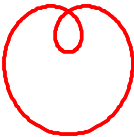
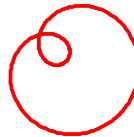
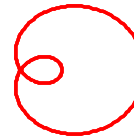
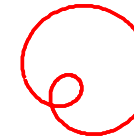

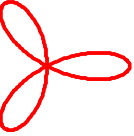

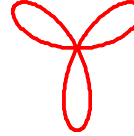

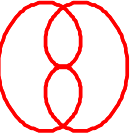
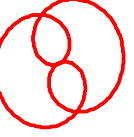
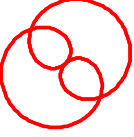
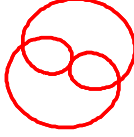
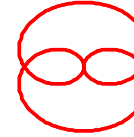
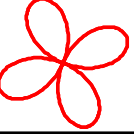
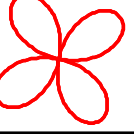
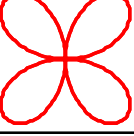
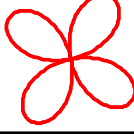
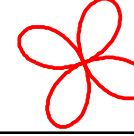
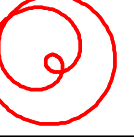


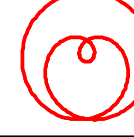
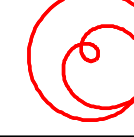
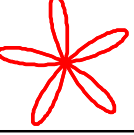


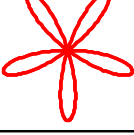
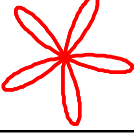
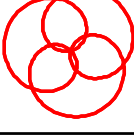
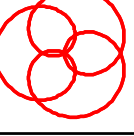
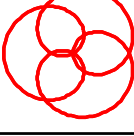
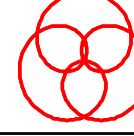
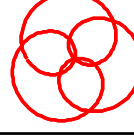
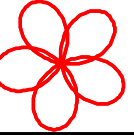
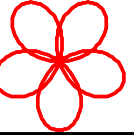
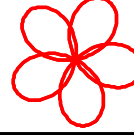
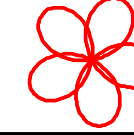
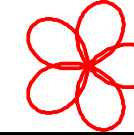
經 SU(2) 矩陣  $\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2} \cos(\frac{\beta}{2})} & -e^{-i\frac{\alpha}{2} \sin(\frac{\beta}{2})} \\ e^{i\frac{\alpha}{2} \sin(\frac{\beta}{2})} & e^{i\frac{\alpha}{2} \cos(\frac{\beta}{2})} \end{pmatrix}$  轉換再取實部得到

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2} \cos(\frac{\beta}{2})} & -e^{-i\frac{\alpha}{2} \sin(\frac{\beta}{2})} \\ e^{i\frac{\alpha}{2} \sin(\frac{\beta}{2})} & e^{i\frac{\alpha}{2} \cos(\frac{\beta}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \cdot e^{-i\left(\omega_x t - \frac{2\pi k - \phi}{\omega_y}\right)} \\ A_y \cdot e^{-i(\omega_y t)} \end{pmatrix}$$


$$x_1(t) = \left[ A_x \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \left[\omega_x t - \frac{(2\pi k - \phi)}{\omega_y}\right]\right) \right] - A_y \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \omega_y t\right)$$

$$y_1(t) = \left[ A_x \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \left[\omega_x t - \frac{(2\pi k - \phi)}{\omega_y}\right]\right) \right] + A_y \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \omega_y t\right)$$

用 MathCad 軟體所畫出的擺線，如圖 19。

$(\omega x, \omega y) \backslash \phi$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
(2,-1)					
(2,1)					
(3,-1)					
(3,1)					
(3,-2)					
(3,2)					
(4,-1)					
(4,1)					

(a)本圖是表示當  $\alpha = \pi/2$  ,  $\beta = \pi/2$  時,  $\Phi$  值變化對圖形所產生的影響

$(\omega x, \omega y) \backslash \beta$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
(2,-1)					
(2,1)					
(3,-1)					
(3,1)					
(3,-2)					
(3,2)					
(4,-1)					
(4,1)					

(b)本圖是表示當 $\alpha = \pi/2$ ， $\Phi = \pi/2$ 時， $\beta$ 值變化對圖形所產生的影響



$(\omega x, \omega y) \backslash \alpha$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
(2,-1)					
(2,1)					
(3,-1)					
(3,1)					
(3,-2)					
(3,2)					
(4,-1)					
(4,1)					

(c)本圖是表示當 $\beta = \pi/2$ ， $\Phi = \pi/2$ 時， $\alpha$ 值變化對圖形所產生的影響

$A_x/A_y$ $(\omega_x, \omega_y)$	1/3	1/2	1	2	3
(2, -1)					
(2, 1)					
(3, -1)					
(3, 1)					
(3, 2)					
(4, 3)					

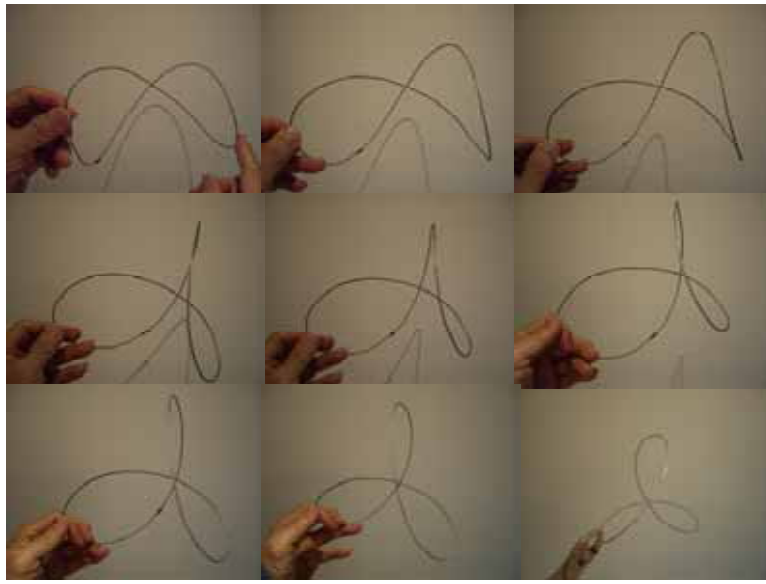
(d)本圖是表示當 $\Phi = \pi/2$ ， $\alpha = \pi/2$ ， $\beta = \pi/2$ 時， $A_x$ 與 $A_y$ 的比值變化對圖形所產生的影響。

圖 19

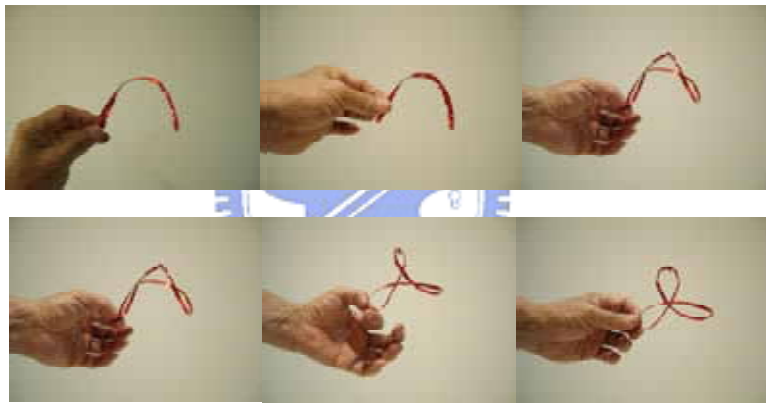
## 4-2. 用鐵絲與魔帶所繞出的利沙球圖形與擺線

在前一節中我們將複數型式的利沙球圖形經  $SU(2)$  作用後變成擺線圖形，在現實空間中是否可以看見？我們發現用鐵絲或魔帶可以繞出立體曲線，當它們在空間旋轉時立體曲線在平面上的投影會由利沙球圖形變成擺線。圖 20(a) 與圖 19(b) 中  $(2, 1)$  對應；圖 20(b), (c) 與圖 19(c) 中  $(2, 1)$  對應。

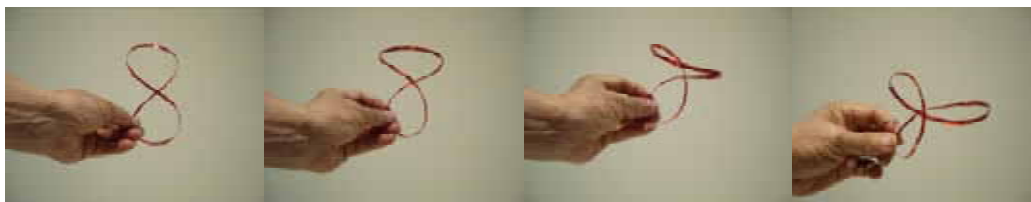




(a)



(b)



(c)

## 圖 20

用鐵絲或魔帶可以繞出立體曲線當它們在空間旋轉時立體曲線在平面上的投影會由利沙球圖形變成擺線。圖 20(a)與圖 19(b)中(2, 1)對應；圖 20(b), (c)與圖 19(c)中(2, 1)對應。

## 發現新曲線

在圖 19(b)與(c)中，當  $\beta = \pi/4$  與  $3\pi/4$ , 或  $\alpha = \pi/4$  與  $3\pi/4$  時，我們發現了一系列的新曲線—它們是利沙球圖形旋轉成擺線的中間圖形，我們稱它們為 Lissachoid 曲線，它們對  $SU(2)$  的內涵可能會有所啟發。



## 第五章 3D 參數曲面間的轉換

### 5-1. 在雷射共振腔中的利沙球參數面

在我們的實驗室(固態雷射實驗室)裡，發現了一些特殊雷射曲面如圖 21。



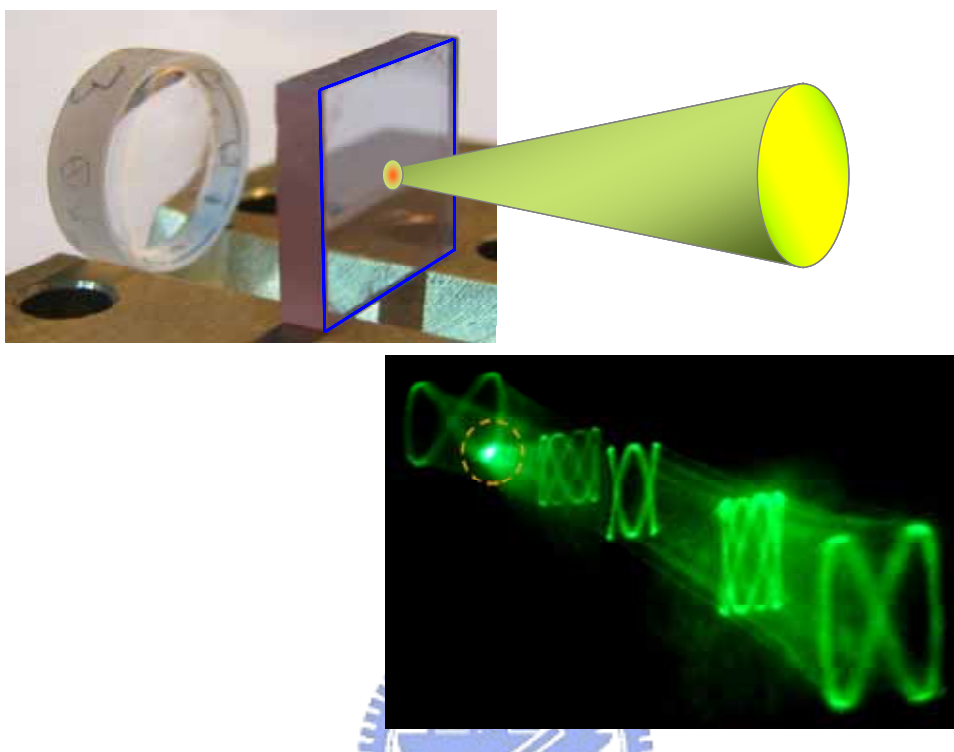


圖 21

左圖為在實驗室中的雷射共振腔所拍攝的雷射圖形，右圖為所拍攝的雷射利沙球參數面圖形。

我們稱它為利沙球參數面，它的方程式為

$$x = \omega z \cos \left[ \omega_x t - \frac{(\omega_x + \omega_y) P \cdot a \tan\left(\frac{z}{z_0}\right) + \phi_0}{\omega_y} \right]$$

$$y = \omega z \cos[\omega_y t]$$

$$z = -z_0 h \sim z_0 h$$

$$h = \tan \left[ \frac{\pi}{\omega_x + \omega_y} \right]$$

$$\omega z = \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2}$$

如圖 22、圖 23 與圖 24。





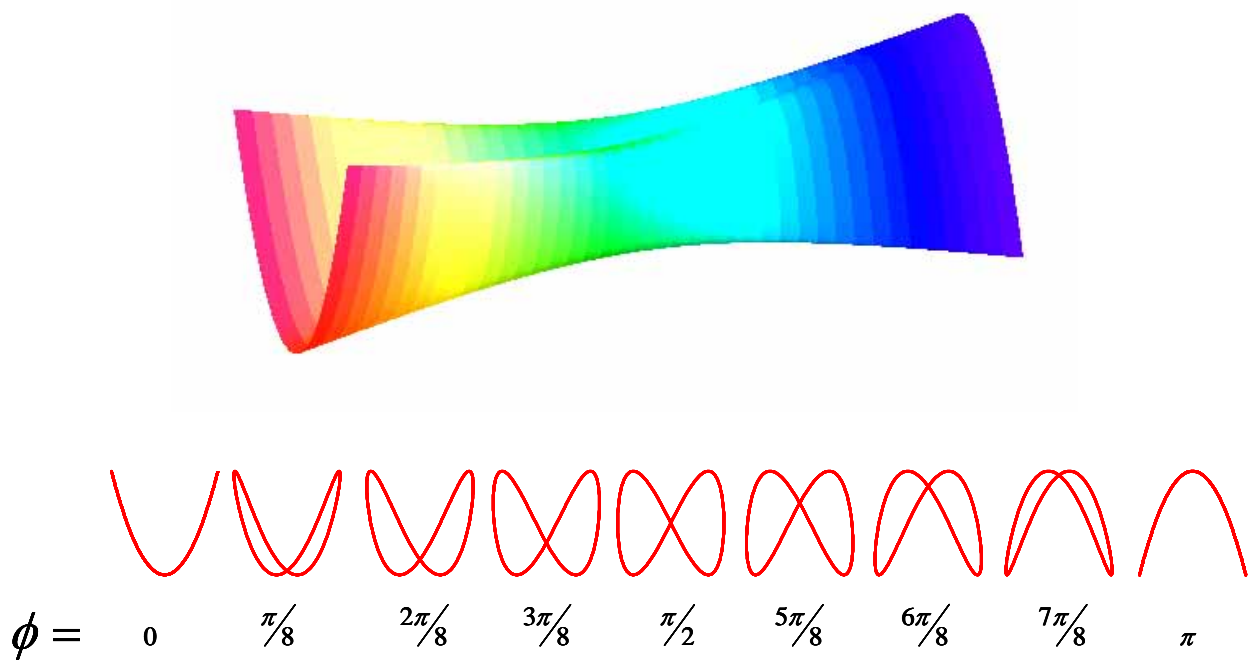
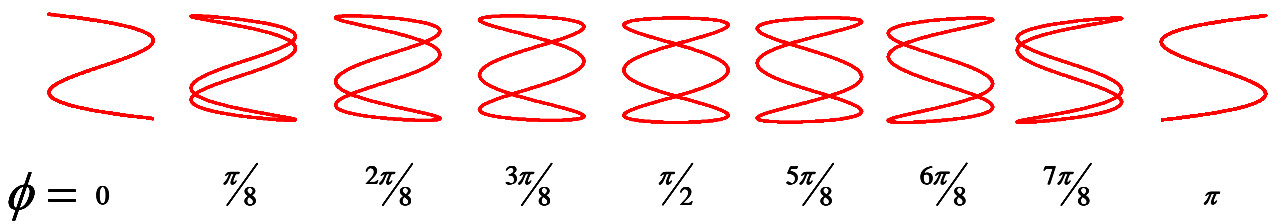
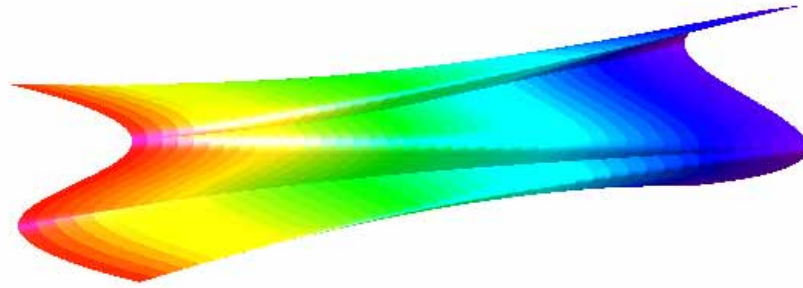
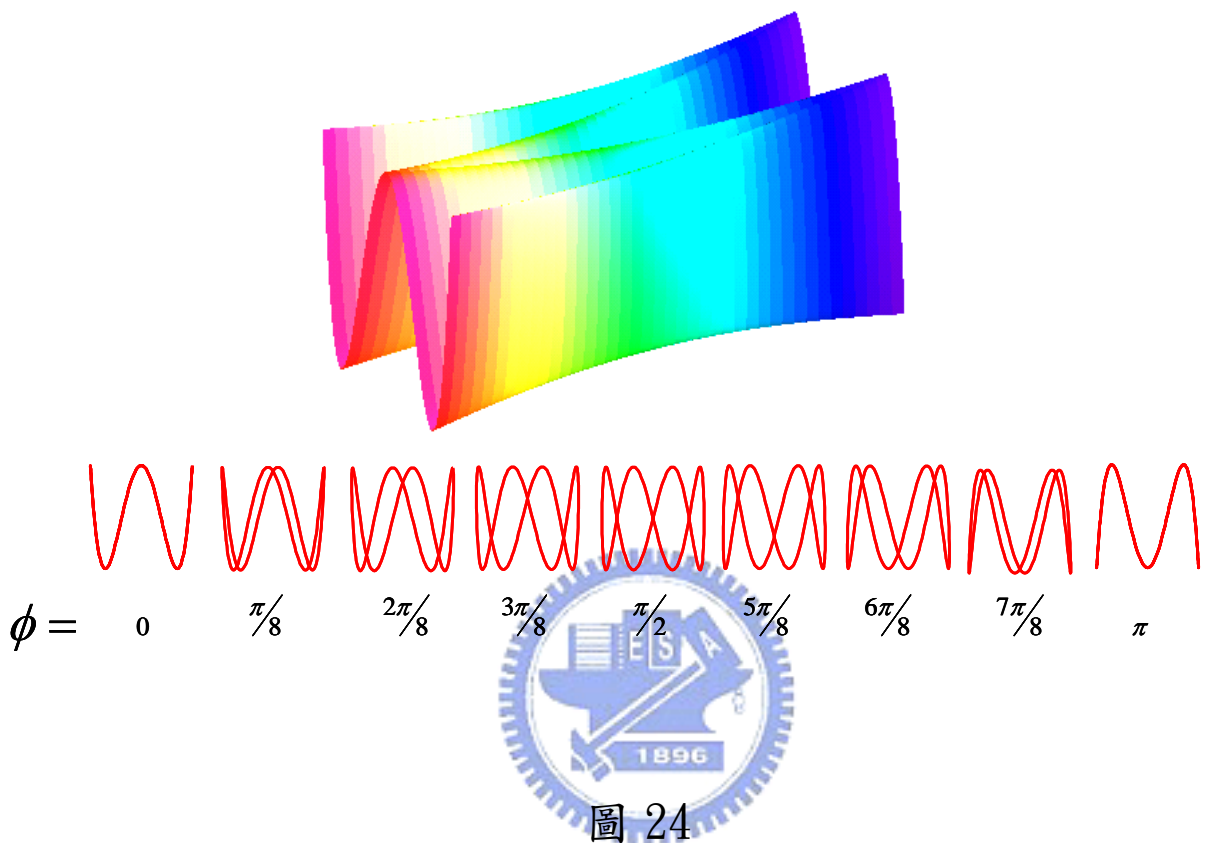


圖 22

當  $\omega_x=1$ ， $\omega_y=2$ ， $\omega_0=0.15$ ， $z_0=2$ ， $P=1/2$ ， $\Phi_0=-\pi/2$  時的利沙球參數面圖形。圖下面的曲線為上圖在對應位置的截面。



當  $\omega_x=3$ ， $\omega_y=1$ ， $\omega_0=0.15$ ， $z_0=2$ ， $P=1/2$ ， $\Phi_0=\pi/2$  時的利沙球參數面圖形。圖下面的曲線為上圖在對應位置的截面。



當  $\omega_x=1$ ， $\omega_y=4$ ， $\omega_0=0.15$ ， $z_0=2$ ， $P=1/2$ ， $\Phi_0=-\pi/2$  時的利沙球參數面圖形。圖下面的曲線為上圖在對應位置的截面。

## 5-2. 在雷射共振腔中的擺線參數面

在我們的實驗室(固態雷射實驗室)裡，也發現了一些特殊的擺線曲面，它們的方程式為

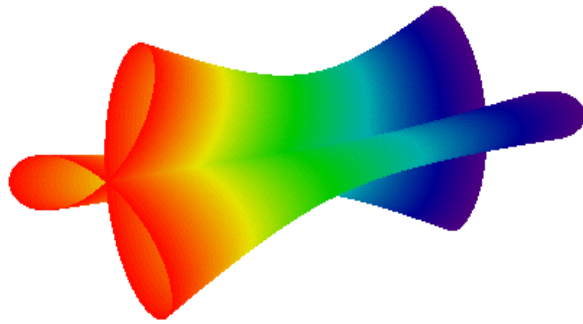
$$\begin{aligned}
 x &= \omega z \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\omega_x t - \frac{\left(\omega_x + \omega_y\right)P \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{z}{z_0}\right) + \phi_0}{\omega_y}\right)\right) \\
 &\quad - \omega z \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (\omega_y t)\right) \\
 y &= \omega z \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\omega_x t - \frac{\left(\omega_x + \omega_y\right)P \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{z}{z_0}\right) + \phi_0}{\omega_y}\right)\right) \\
 &\quad + \omega z \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right) - (\omega_y t)\right) \\
 z &= -z_0 h \sim z_0 h
 \end{aligned}$$



$$h = \tan\left[\frac{\pi}{\omega_x + \omega_y}\right]$$

$$\omega z = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

如圖 25、圖 26 與圖 27。



$\phi = 0 \quad \pi/8 \quad 2\pi/8 \quad 3\pi/8 \quad \pi/2 \quad 5\pi/8 \quad 6\pi/8 \quad 7\pi/8 \quad \pi$

圖 25

當  $\omega_x=1$ ， $\omega_y=2$ ， $\omega_0=0.15$ ， $z_0=2$ ， $P=1/2$ ， $\Phi_0=-\pi/2$  時的擺線參數面圖形。圖下面的曲線為上圖在對應位置的截面。



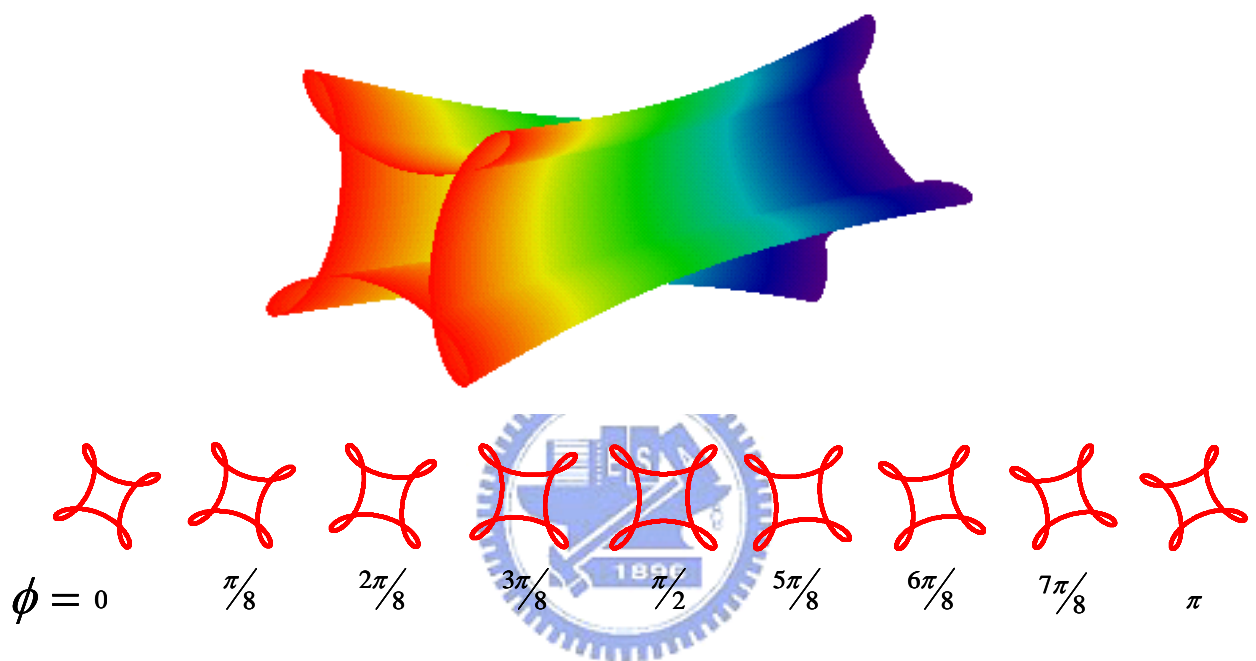


圖 26

當  $\omega_x=3$ ， $\omega_y=1$ ， $\omega_0=0.15$ ， $z_0=2$ ， $P=1/2$ ， $\Phi_0=-\pi/2$  時的擺線參數面圖形。圖下面的曲線為上圖在對應位置的截面。

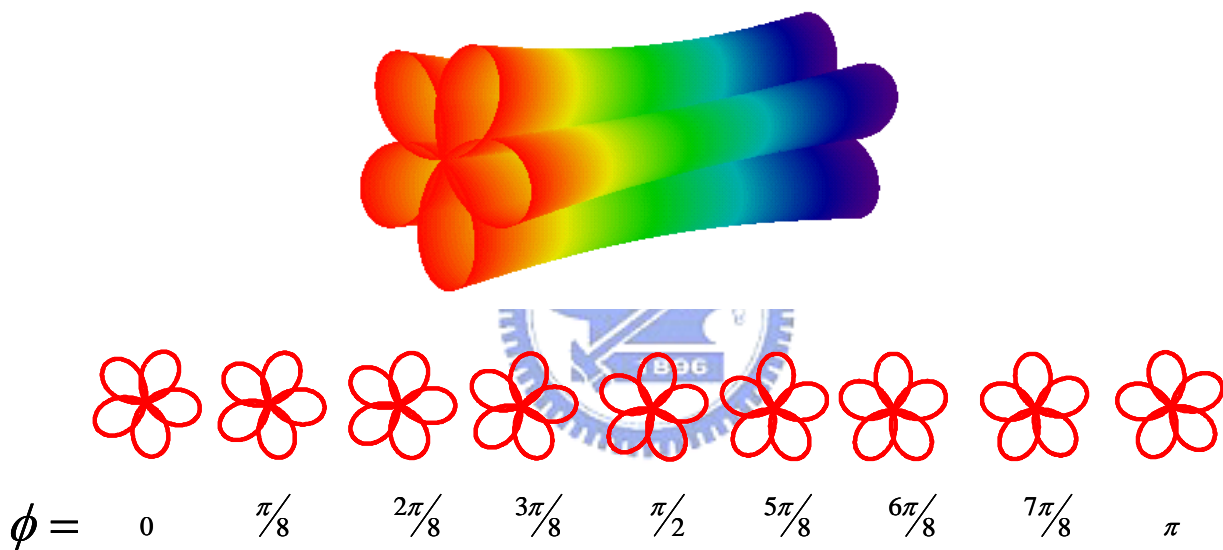


圖 27

當  $\omega_x=1$ ， $\omega_y=4$ ， $\omega_0=0.15$ ， $z_0=2$ ， $P=1/2$ ， $\Phi_0=-\pi/2$  時的擺線參數面圖形。圖下面的曲線為上圖在對應位置的截面。

圖 25、圖 26 與圖 27 是將圖 22、圖 23 與圖 24 用  $SU(2)$  作用後的結果。

## 第六章 結論與未來展望

在我們的研究中所畫出的圖形(圖 13)發現與太陽系的華爾滋[10]中的圖形非常吻合,所以書中的美妙圖形只是同心、同平面、同方向、不同頻率的圓周運動間的相對運動。

SU(2)是一個很神奇的轉換,它能將兩個看起來完全不相干的美麗圖形——利沙球圖形與擺線結合起來;這讓我想到狹義相對論中的洛仁茲轉換,洛仁茲當年發現電磁學中的四個馬克斯威方程式在洛仁茲轉換中是不變的,可是它的物理意義只有在愛因斯坦的狹義相對論中才充分展現出來。

利沙球圖形是物理學中的二維簡諧運動,簡諧運動是研究振動的基礎;而擺線的研究歷經數百年,其中有重要的力學性質,兩者之間居然有關,這是否隱含著自然界的某種規律?

在圖 19(b)與(c)中,當  $\beta = \pi/4$  與  $3\pi/4$ , 或  $\alpha = \pi/4$  與  $3\pi/4$  時,我們發現了一系列的新曲線——它們是利沙球圖形旋轉成擺線的中間圖形,我們稱它們為 Lissachoid 曲線,它們對 SU(2)的內涵可能會有所啟發。

最近看到野崎光昭所寫「為闡明『質量起源』開闢道路的南部(南部陽一郎,2008年諾貝爾獎得主)理論」[7],提到「手徵對稱性」的破缺意味著「質量的產生」;相對於粒子的進行方向,自旋可區分為向右旋轉(+1)和向左旋轉(-1),稱為「手徵性」,不管從哪個立場的觀測者看去,手徵性都不會改變,稱為「手徵對稱性」。從靜止的觀測者而言,若手徵性=+1,而從趕過粒子的觀測者來看則手徵性=-1,稱為「手徵對稱性」的破缺。若粒子運動的速度等於光速,則因觀測者的速度無法超越光速,所以它的手徵性不會改變,所以該粒子就沒有質量。

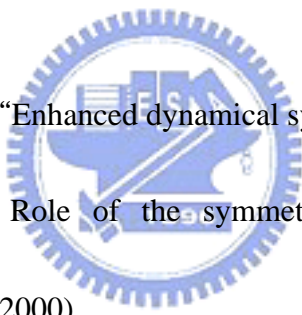


當我們將一個空間曲線由不同方向觀察，它們的影像呈現完全不同的有趣風貌時，它意味著什麼？

當一個粒子在作圓周運動 A 時，觀測者也在作圓周運動 B，且  $A \perp B$  時，由 B 上，向左或向右觀測 A 的軌跡會由外次擺線變成內次擺線，這又意味著什麼？有待進一步的探討。



## 參考文獻

1. T. H. Lu, Y. C. Lin, Y. F. Chen, and K. F. Huang, “Three-dimensional coherent optical waves localized on trochoidal parametric surfaces”, *Phys. Rev. Lett* 101, 233901 (2008)
2. Y. F. Chen, T. H. Lu, K. W. Su, and K. F. Huang, “Devil’s staircase in three-dimensional coherent waves localized on Lissajous parametric surfaces”, *Phys. Rev. Lett.* 96, 213902 (2006)
3. B.L.Johnson and G.Kirczenow, “Enhanced dynamical symmetries and quantum degeneracies in mesoscopic quantum dots: Role of the symmetries of closed classical orbits ” *Europhys.Lett.*51(4),pp.367-373(2000)
4. R.Brunner,R.Meisels,F.Kuchar,R.Akis,D.K.Ferry and J.P.Bird, “Draining of the Sea of Chaos:Role of Resonant Transmission and Reflection in an Array of Billiards” *Phys. Rev. Lett.* 98, 204101 (2007)
5. Arfken & Weber, mathematical methods for physicists, 6<sup>th</sup> ed, 2005, page 241–256

6. T. C. Bradbury, Theoretical Mechanics, 淡江書局, 1968, page 276

7. 野崎光昭, “為闡明『質量起源』開闢道路的南部理論”, 量子科學雜誌 18  
號, page18-19(2009. 4)

8. 蕭欣忠, “可解李氏代數與旋轉群之 Spinor 表示”, 民 55. 5 台灣大學數學研究所碩士論  
文

9. 胚騰 (D. Wade & A. Ashton; 譯 蔡承志 / 天下遠見出版股份有限公司) 民 93 . 6 page182

-187



10. 太陽系的華爾滋 (J. Martineau & R. Heath; 譯 葉偉文 / 天下遠見出版股份有限公司)  
民 91 . 6 page184-195

11. 群論初步(倪澤恩著/五南圖書出版公司)民 97. 1 page 225-230

12. 微分幾何(鄧靜華 & 林輝龍著/正中書局) 民 73.

13. 物理學 (M. Alonso & E. J. Finn; 譯 謝芳生博士 / 東華書局) 民 70. 2 page 236-256

14. 微積分(楊維哲著/三民書局)民 79.9 page 189-213

15. 幾何學中的海倫 (趙文敏)

[http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm\\_\\_20\\_\\_11\\_\\_1/index.html](http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm__20__11__1/index.html)

16. 物理通史(郭奕玲 & 沈慧君著/凡異出版社) 民 85.10 page 267-285

17. 經典力學(徐家鸞著/正中書局)民 75.6 page 446-450

