國 立 交 通 大 學 教 育 研 究 所

碩士論文

不同數學文字問題之解題與合作解題研究

指導教授：蔡今中　博士

研 究 生：葉家綺

中 華 民 國 九十四 年 七 月

致　謝

研究所生活的這幾年裡，除了學業，也完成了一些重要的人生大事，諸如結婚、生子、擁有自己的小窩等。過程中雖然有太多無法成眠的夜晚，但也有太多人給我滿滿的溫暖與鼓勵，值得我好好地感謝。

這本論文能夠順利完成，首先要感謝我的指導教授-蔡今中博士。蔡老師的學術成就令人欽佩，但他待人寬厚、行事有效率的個人風格，一點也不亞於他的成就。老師給我很大的研究自由，讓我的想法能胡亂編織，然後他再幫我把這些思緒的盲點釐清，變得稍有條理。也感謝蔡老師對所有學生的教學，因為他有結構的內容安排，即使遲頓如我，也能對科學教育研究的內容與方向有一點點認識。當然還要感謝袁媛老師、張俊彥老師、楊芳瑩老師、蔡孟蓉老師給我的建議，使我的論文能更趨完整。

感謝研究所的同學，穎洄、佩宜給了我相當多的協助與鼓勵，友誼長存。而教育所的所有老師的研究態度與行事，亦令我感佩甚深。我的好友小紅帽在論文完成的最後一階段，亦給我許多協助。還有感謝我的同事，麗鈴、文聖，常在我論文、工作、家庭忙不過來時，給予我工作上的協助，減輕我的負擔。

當然，家人的支持是最令我感動與不捨的。我常無法陪伴他們或整理家務，幸有我先生永昇無怨無悔的付出、我母親秋菊女士對我兒子柏堯無微不至的照顧，使我們的家庭美滿幸福，也更促使我有必要完成此論文的決心。

完成了個人夢想的一部份，我將帶著上述這些好人的祝福，展開另一個人生階段、把更多的時間留給家人。也希望這份論文內容對從事數學教育的研究者或教師有一些幫助。

94 年 7 月

中 文 摘 要

問題解決一直是數學教育研究中的重要議題。在學校中，我們常以解決文字問題作為培養問題解決能力的重要方式。本研究據以建構主義的觀點，探討數學計算能力與不同語文理解的學習者，面對不同述敘方式的文字問題時，其解題表現、錯誤類型，及解題歷程。接以，加入合作協商之解題方式，初探合作解題之成效。

本研究探究問題解決的內涵，而發展出兩種文字問題－傳統文字問題、故事文字問題；五個解題歷程－理解題意、尋求模式、擬定解法、執行方法、判斷；以及解題評量方法。接以，本研究探討數學文字問題的相關研究，彙整影響解文字問題的因素，與錯誤類型。

本研究採用測驗、觀察方法，研究樣本為六班國二學生，共 203 人。首先將所有學生分為四組，依序分別為「數學計算與語文理解皆未發生困難的學生」(第一組)、「語文理解困難學生」(第二組)、「數學計算困難學生」(第三組)，與「數學計算與語文理解同時發生困難的學生」(第四組)。接著對其施以兩種數學文字問題，探究其個人與合作解題之得分、解題特徵與解題歷程。

研究結果分為四個部份。首先，在得分方面，傳統文字題與數學算術測驗結果相同，表示此類常見的學校數學文字問題，其簡短的敘述已去情境化，強調的是計算能力。而各組學生在故事文字題的得分皆變差，其中第二、三組學生已無顯著差異，各有不同的解題困難產生。

第二，在解題歷程方面，除第四組學生之外，餘三組學生在傳統文字題中大部份能達到高階段，但在故事文字題中，除了第一組學生之外，其餘學生大部份都停滯在低階段。而大部份學生沒有進行「判斷」的習慣，其憑直覺或歷程順利與否來決定是否驗證答案。另外，本研究亦嘗試建立一個解題歷程的模型。成功的解題必須先經歷「探索帶」，才能進入「解題核心」。

第三，在錯誤類型方面，本研究認為有故事背景的文字題對大部份學生而

言，使其感到極為困擾，也表現得較差。尤其我們可以看到第二、三、四組學生，他們在「一片空白」的題數遠遠地超過傳統題。而本研究也指出，第二、四組學生有明顯的「語言知識錯誤」，需要接受閱讀理解的再訓練；第三、四組學生則需要加強自動化技能的加速技巧。

第四，各組學生合作解題後，皆能提昇兩種文字問題之得分與解題歷程階段。在合作的過程中，因和諧幽默的對話而產生情意上的支持，使得故事題之階段0(即沒有任何解題行為)的次數的大幅減少，顯示故事文字題可能較適合以合作的方式進行。第一組學生在各種組合中，通常擔任教導者的角色，其與其他三組學生的合作型式類似於專家－生手型態；而第二、三組學生的組合是由能力較為互補的兩方所形成，產生的口語互動較多，為在「相同平面」(equivalent planes)的合作關係。

最後，本研究認為在未來的數學問題解決研究上，合作解題可能是後續研究的重要方向之一。因此建議未來研究可以增加合作解題的配對模式及各組人數，以及讓合作的學生回頭再進行個別解題，以更深入地探究合作解題的功效。

Abstract

Problem solving has long been a crucial issue in mathematic education. In schools, providing students with word problems is an important way to help them become competent mathematics problem solvers. Based on the view of constructivism, this study mainly investigated the learners with different capabilities of math arithmetic and reading comprehension on their performance, error types, and the procedures for problem solving in dealing with different mathematical word problems. Moreover, the study explored the effectiveness on cooperative problem solving.

By reviewing the theoretical foundations of problem solving, there were two different mathematical word problems: traditional and narrative ones. Five steps were also proposed for problem solving: understanding the problem, matching the pattern, making a plan, carrying out the plan, and judgement. Afterward the study integrated the factors and error types in problem solving through surveying the researches on mathematical word problems.

Tests and observations were adopted in this study. The participants were 203 eighth-grade students, who were classified into four groups: having no difficulties in math arithmetic and reading comprehension (Group 1), having reading comprehension difficulties only (Group 2), having math arithmetic difficulties (Group 3), and having difficulties both in math arithmetic and reading comprehension (Group 4). All of the students were given traditional and narrative word problems individually and collaboratively. Their performance, features of solving behaviors, and procedures of problem solving were investigated.

Research findings were summarized as follows. First, students' performance in traditional word problems was highly related to math arithmetic examination. It indicated that the traditional word problems were decontextualized and were highly

coherent with their arithmetic abilities. However, students' performance in narrative word problems was not as good as that in traditional word problems. Besides, though the students in Group 2 and Group 3 belonged to different difficulties, the performance of narrative word problems turned out no significant differences.

Second, most of the students attained high-level stages in solving traditional word problems except those in Group 4. However, except Group 1, most of the others stayed in low-level stages in solving narrative ones. Furthermore, depending on intuition or smooth working on the procedures of problem solving, most of the students did not judge their final answers. Based on the research findings, a model of problem solving was developed. Successful problem solving resulted from going through a 'exploring belt' and 'the core of problem solving.'

Third, the findings also revealed that most of the students did not perform well in story-based narrative word problems. In particular, the unanswered situation of Group 2, Group3, and Group 4 students was much more frequent than that in traditional word problems. On the other hand, the students of Group 2 and Group 4 with obvious errors of linguistic knowledge may require interventions aimed at reading comprehension. The students of Group 3 and Group 4, on the other hand, may need instruction in automatic skills in mathematics.

Finally, solving problems cooperatively promoted both the scores and problem solving stages in traditional and narrative word problems. In the procedures of cooperation, the unanswered situations were greatly reduced in narrative word problems because of the affective supports from interactive conversations. Furthermore, the Group 1 students usually played a tutor role in cooperative activities with those in other groups, which were likely similar to an expert-novice relationship, while the complementary cooperative combination of Group 2 and Group 3 students was likely in a 'equivalent plane,' which revealed more verbal interaction.

The study indicated that cooperative problem solving may be an important research issue for mathematical problem solving. Further research was suggested to deeply investigate the effect on cooperative problem solving.

目　　錄

頁數
中文摘要‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ i
英文摘要‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ iii
目錄‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ I
表目錄‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ IV
圖目錄‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ VI

第一章　緒論‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 1

第一節　研究動機與目的‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 1
第二節　研究問題‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 3
第三節　名詞界定‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 5

第二章　文獻探討‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 7

第一節　問題解決‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 7
壹、問題的定義‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 7
貳、問題與數學問題的類型‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 9
參、問題解決的歷程‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 14
肆、解題的評量模式‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 20
伍、建構學習觀對數學問題解決研究的影響‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 24

第二節　數學文字問題的相關研究‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 31
壹、影響解文字問題的因素‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 31
貳、文字問題錯誤類型的探討‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 38

第三章　研究方法‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 45

第一節　研究對象‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 45
第二節　研究架構與設計‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 48
第三節　研究流程‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 50
第四節　研究工具‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 53
壹、「語文測驗」與「數學算術計算測驗」‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 53
貳、「傳統文字問題」、「故事文字問題」‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 55
參、解題歷程自評表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 57
第五節 資料處理與分析‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 59

壹、資料處理方式‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 59
貳、資料分析方式-‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 62

第四章　研究結果與討論‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 64

第一節　學生在背景能力測驗與兩種文字問題上的差異情形‧‧‧‧‧ 65
壹、學生在兩種文字問題得分的基本描述統計‧‧‧‧‧‧‧‧ 65
貳、學生在背景能力測驗與兩種文字問題上的差異分析‧‧‧‧ 66

第二節 學生之背景能力與兩種文字問題得分之相關情形‧‧‧‧‧‧ 69
第三節 學生之背景能力對兩種文字問題得分的迴歸分析‧‧‧‧‧‧ 70
壹、「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「傳統文字問題」的迴歸分析‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 70
貳、「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「故事文字問題」的迴歸分析‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 71

第四節 各組學生在兩種文字問題的解題歷程‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 73
壹、學生解題歷程階段自評分數的基本描述‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 73
貳、學生解題歷程階段的質化描述‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 77

第五節 各組學生在兩種文字問題的錯誤類型‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 84
壹、各組學生在傳統文字問題上錯誤類型分析‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 84
貳、各組學生在故事文字問題上錯誤類型分析‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 90
參、各組學生在兩種文字問題中的錯誤類型比較‧‧‧‧‧‧‧‧ 95

第六節 學生合作解題得分之差異‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 100
壹、各種組合在兩種文字問題得分上的差異‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 102
貳、各組學生個人解題與合作解題得分的差異‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 103

第七節 學生合作解題的解題歷程‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 106
壹、各組學生在各種組合中合作解題之歷程的基本描述‧‧‧‧‧ 106
貳、各組學生「個人解題」與「合作解題」的解題歷程改變差異 109
參、各種組合學生解題情況的質化描述‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 113

第八節 歸納與討論‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 125
壹、各組學生在兩種文字問題的表現‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 125
貳、各組學生的解題歷程‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 127
參、各組學生的錯誤類型‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 130

肆、合作解題的成效 · 132

第五章　結論與建議 · 136

第一節 結論 · 136
壹、各組學生解兩種文字問題的情況 · · · · · · · · · · · · 136
貳、各組學生合作解題的成效 · · · · · · · · · · · · · · · · · 138

第二節 在數學教育上的應用 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 140
第三節 研究限制與建議 · 142

參考文獻 · 144

附錄 · 150
附錄一、傳統文字問題測驗及解答 · · · · · · · · · · · · · · · · 150
附錄二、故事文字問題測驗及解答 · · · · · · · · · · · · · · · · 154
附錄三、文字問題的評量指標 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 160
附錄四、解題歷程自評表 · 161
附錄五、解題歷程評鑑的指標 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 162
附錄六、錯誤類型類目表 · 163
附錄七、傳統文字問題的錯誤類型範例 · · · · · · · · · · · · · · 164
附錄八、故事文字問題的錯誤類型範例 · · · · · · · · · · · · · · 172
附錄九、各組學生之個人解題與合作解題的各階段次數百分比(傳統文字題） · 183
附錄十、各組學生之個人解題與合作解題的各階段次數百分比(故事文字題） · 184
附錄十一、各組學生個人與合作解題之解題歷程列聯表(傳統文字題） 185
附錄十二、各組學生個人與合作解題之解題歷程列聯表(故事文字題） 187
附錄十三、使用學生資料同意書 · · · · · · · · · · · · · · · · · 189
附錄十四、各組學生「解題歷程階段」與「得分」之獨立性考驗 190

表 目 錄

頁數

表 2－1－1 問題的分類‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 11
表 2－1－2 文字問題的分類舉例‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 13
表 2－1－3 各學者對解題歷園的看法之整理，與本研究的解題歷程分類 20
表 2－1－4 Charles & Lester (1982)的解題評量表‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 21
表 2－1－5 Schoenfeld (1985)的多重記分‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 22
表 2－1－6 Mcaloon & robinson (1988)的解題評量表‧‧‧‧‧‧‧‧ 22
表 2－1－7 本研究文字問題的評量表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 23
表 2－2－1 文字問題本身的因素‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 33
表 2－2－2 影響解文字問題的因素‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 37
表 2－2－3 學生在比較型問題的錯誤類型‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 40
表 2－2－4 解題的錯誤類型之分類‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 44
表 3－1－1 203 位學生在兩項測驗上的原始得分與 T 分數分佈摘要‧‧‧ 45
表 3－1－2 四組學生的分類結構‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 46
表 3－1－3 各組學生在兩項測驗的 T 分數摘要‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 47
表 3－4－1 重測信度結果‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 54
表 3－4－2 國民中學智力測驗與普通分類測驗之相關‧‧‧‧‧‧‧‧ 55
表 3－4－3 國民中學智力測驗與比西量表測驗之相關‧‧‧‧‧‧‧‧ 55
表 3－4－4 三位教師之基本資料‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 56
表 3－4－5 兩種正式測驗之內容、題號、難易程度與適合程度‧‧‧‧ 57
表 3－4－6 解題歷程自評表之題號與配合的解題階段‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 58
表 4－1－1 所有學生在兩種文字問題上的得分之摘要表‧‧‧‧‧‧‧ 65
表 4－1－2 學生在兩種文字問題上的得分之相依 t 考驗結果‧‧‧‧‧‧ 66
表 4－1－3 各組學生在各測驗之差異摘要表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 67
表 4－2－1 203 位學生在兩種背景能力測驗與兩種文字問題之相關係數矩陣‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 69
表 4－3－1 「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「傳統文字問題」之多元迴歸分析摘要表(N＝203) ‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 70
表 4－3－2 「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「故事文字問題」之多元迴歸分析摘要表(N＝203) ‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 72
表 4－4－1 「傳統文字問題」的解題歷程階段自評分數之卡方考驗‧‧‧ 74
表 4－4－2 「故事文字問題」的解題歷程階段自評分數之卡方考驗‧‧‧ 75
表 4－4－3 對 42 位學生之解題歷程觀察統整‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 77

表 4－5－1　各組學生在傳統文字問題的錯誤類型次數統計‧‧‧‧‧‧ 85
表 4－5－2　各組學生在「無法順利轉譯成代數式子」的次數統計(傳統文字題)‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 86
表 4－5－3　各組學生在故事文字問題的錯誤類型次數統計‧‧‧‧‧‧ 91
表 4－5－4　各組學生在「無法順利轉譯成代數式子」的次數統計(故事文字題)‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 92
表 4－5－5　各組的各項錯誤類型之題數比較‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 96
表 4－5－6　各組「操作錯誤」之題數比較‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 97
表 4－5－7　各組學生在「無法順利轉譯成代數式子」之題數比較‧‧‧ 98
表 4－5－8　各組「不適當的解題習慣」之題數比較‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 99
表 4－6－1　40 位學生個人與合作解題得分之摘要表‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 101
表 4－6－2　各種組合學生在兩種文字問題得分之差異摘要表‧‧‧‧‧ 102
表 4－6－3　各組學生在傳統文字問題上個人得分與合作得分之相依 t 考驗結果‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 104
表 4－6－4　各組學生在故事文字問題上個人得分與合作得分之相依 t 考驗結果‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 105
表 4－7－1　各組學生合作解題之解題歷程的結果摘要(傳統文字問題)‧ 107
表 4－7－2　各組學生合作解題之解題歷程的結果摘要(故事文字問題)‧ 108
表 4－7－3　各組學生個人與合作解題的平均階段(傳統文字問題)‧‧‧‧ 110
表 4－7－4　各組學生個人與合作解題的平均階段(故事文字問題)‧‧‧‧ 111
表 4－7－5　各組「個人解題」與「合作解題」的平均階段差異之 χ^2 值整理表‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 112
表 4－7－6　對 40 位學生合作解題歷程之觀察摘要‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 114
表 4－7－7　兩類組合模式的解題行為差異摘要‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 123
表 4－8－1　背景能力對兩種文字問題的影響彙整表‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 125
表 4－8－2　各組的解題歷程與五種解題行為的比較‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 130
表 4－8－3　各組的錯誤類型與四種錯誤類型的比較‧‧‧‧‧‧‧‧‧ 131
表 4－8－4　「個人解題」與「合作解題」之比較結果彙整表‧‧‧‧‧‧ 134

圖 目 錄

頁數

圖 2－1－1　個體解決問題的內在歷程(Newell & Simon, 1972, p.89)· 16
圖 2－1－2　問題解決流程圖(Glass & Holyoak, 1986, p.67)····· 17
圖 3－2－1　研究架構圖························ 48
圖 3－2－2　研究設計圖························ 49
圖 3－3－1　研究流程圖························ 50
圖 3－3－2　正式施測流程圖······················ 52
圖 4－1－1　第四章內容之架構圖···················· 64
圖 4－6－1　各組合在故事文字題得分之差異解晰圖·········· 103
圖 4－8－1　解題模型示意圖······················ 129

第一章 緒論

第一節 研究動機與目的

當我們思考著數學的本質與數學理解的內涵的同時，意味著數學課程的內容與數學教學的方法正在改變。傳統的數學教學，大多採用傳輸式的直接教學，學習者藉由機械操式地演練數學計算，直接反映教師的數學心智模式，因而缺乏獨立的推理能力(Cuoco & Goldenberg, 1996)。然而，數學教育在建構主義興起後，傳統的數學教學觀受到許多數學哲學家挑戰(例如 Davies & Hersch, 1981；Kitcher , 1984，以及 Hersch , 1986)。建構主義的學者認為，學生建構原有概念與新概念之間的關係，創造自己的理解(Hiebert & Wearne, 1988；Driver *et al.*, 1994)，而非被動地接受一個外在的龐大的數學知識體。

雖然傳統的數學的本質與數學教學受到了質疑與挑戰—從60年代培養優秀的數學家，到80年代重視數學與真實生活關聯的重要性—但問題解決能力一直是數學教育上的重要議題。即使是建構主義盛行的年代，美國國家科學學會(National Academy of Science) 在2001年指出，「數學能力」(mathematical proficiency)是全部學生的數學學習目標(引自 Kilpatrick, 2002)。而「數學能力」的五個組成成份為：一、概念理解(conceptual understanding)，指學生對數學概念、運算和關係的理解；二、程序流暢(procedural fluency)，指學生實行程序的彈性、正確性、效能和適當性；三、策略能力(strategic competence)，指學生公式化、表徵和解決問題的能力；四、適當的推理(adaptive reasoning)，指學生對數學變項具有邏輯思考、反省、解釋和判斷的能力；五、多成效的傾向 (productive disposition)，指學生具有將數學科目視為可察覺、有用的及值得學習的意向，並且有努力用功以成為數學實行家的信念。該學會並指出問題解決(problem solving)能為數學能力的五個向度，提供一個非常適當的情境脈絡，也因此間接說明了問題解決在數學教育上的重要性，不論是過去或現在。

研究者目前正在中等學校服務，對國內中等學校數學教育來說，我們常以解決文字問題作為培養問題解決能力的重要方式。而在文字問題的解題歷程中，涉及語文理解、數學概念與計算能力等知識(張景媛，1994)。隨著學習派典的不同，對於數學中問題解決的研究也應有所不同。Vygotsky(1978,引自 Tappan, 1998)的社會學習理論，認為較高的心理功能(例如概念性思考、邏輯性記憶、自我調節能力等)的起源係來自社會-溝通的交互作用(social-communicative interactions);亦即人與人心理間的互動(社會關係)可以內化形成個人內的心理功能。他認為和成人或較有能力的同儕合作能夠促進較高心理功能的發展。也因而促使本研究除了個人問題解決之外，朝向合作解題的探究。

另外，為了解決知識脫離情境和過度抽象的問題，Cooper & Harries (2002) 建議文字問題應留下一些希望學生有真實觀點的線索。加以近年來，有許多報導大力提倡閱讀能力的培養以提昇數學能力(何淑真，2003；陳致麟，2004；陳雅鈴，2004)，所以本研究在數學的文字問題中，增加了語文理解變項與與敘述較長的故事文字問題。

綜上所論，本研究據以建構主義的觀點，探討數學問題解決這個歷久而迷人的主題。本研究的動機在於瞭解，不同語文理解與數學計算能力的學習者，面對不同述敘方式的文字問題時的解題情形、錯誤類型，及其解題的歷程。接以，加入合作協商之解題方式，初探合作解題之成效。

第二節 研究問題

本研究依學生在國民中學智力測驗之分測驗：語文測驗與數學算術計算測驗上的表現，將學生分為四組：

第一組為 數學計算及語文理解皆未發生困難的學生；

第二組為 語文理解困難學生；

第三組為 數學計算困難學生；

第四組為 數學計算及語文理解同時發生困難的學生。

本研究探討：

一、各組學生在傳統文字問題中的得分，是否有所差異。

二、各組學生在故事文字問題中的得分，是否有所差異。

三、學生的計算能力、語文理解能力、傳統文字題問題得分、與故事文字問題得分，是否具有相關？

四、學生的計算能力、語文理解能力對傳統文字問題得分的預測力如何？

五、學生的計算能力、語文理解能力對故事文字問題得分的預測力如何？

六、經由抽樣，以學生自評的方式，探討各組學生在兩種文字問題中的解題歷程。

七、經由抽樣，探討各組學生在兩種文字問題上的錯誤類型。

八、經由抽樣配對的方式，觀察合作解題[1]的效果。亦即探討各種組合學生：

(一)在兩種文字問題中的得分是否有所差異

(二)在兩種文字問題中的得分是否較未組合之前高

(三)在兩種文字問題中的解題歷程

(四)在兩種文字問題中的解題歷程階段，是否較未組合之前高

---

[1]本研究限於時間與人力，並假設能得到合作解題的最大效益，故捨去兩種組合方式：「第二組及第四組」、「第三組及第四組」，僅取四種組合方式：

一、第一組1位＋第二組1位；5隊共計10人。二、第一組1位＋第三組1位；5隊共計10人。三、第一組1位＋第四組1位；5隊共計10人。四、第二組1位＋第三組1位；5隊共計10人。故合計在第一組組取15位學生、第二組和第三組二組各取10位學生、第四組取5位學生，共計40位學生參與配對解題。

第三節 名詞界定

壹、數學問題

本研究中的數學問題為以文字敘述之問題，在學校數學中，常稱為應用問題，包括傳統文字問題、故事文字問題兩種。傳統文字問題指的是學生常可在數學課本、習作及坊間參考書籍看得到的題目，其內容常是刻意刪去與解題無關訊息，不一定符合真實生活情境。故事文字問題不常出現在課本、參考書中，不是學生熟悉的題目，內容則務使其儘可能符合真實生活情境與學生過去生活經驗，所以也包括與解題無關的訊息，因而題目的敘述較為綿長。

貳、解題歷程

本研究綜合各學者對解題歷程的看法，將解題的歷程分為五個階段(level)：

第一階段為「理解題意」：包括使用閱讀的方式，對問題的要求形成表徵，界定已知的條件及所要達到的目標。

第二個階段為「尋求模式」：即活化長期記憶庫的知識，辨識問題的種類、尋求是否有符合該問題或與該問題相類似之基模知識。

第三階段為「擬定解法」：結合先備知識與合理的推測，找出獲取解答的可能方法。

第四階段為「執行方法」：即執行第三階段的方法。這個階段之前，個體可能會先在心智上評估、測試此方法，方法若成功，則在實際上實行；若不成功則回到前面任何一個階段，直到重新擬定可能的解決方法。

第五階段為「判斷」：針對執行方法後的結果，加以判斷是否解決此問題，是否有遺漏一些限制，若完全成功，則儲存此經驗，並結束此歷程；若不完全成功，則可能回到前面一至三個階段，重新開始，也可能放棄解決此問題。

本研究中，為了評估學生之解題歷程，採用學生自評的方式，其結果以 0 ~ 5 個階層(Level)表示，其中，1 表示學生達到第一階段「理解題意」，其它以此類推。詳細內容在第三章研究方法敘述。

參、錯誤類型

本研究綜合各學者對學生在算術上、代數上可能發生的錯誤類型之看法，將之粗略分為兩大類型：一為操作上的錯誤；一為不適當的解題習慣。

操作上的錯誤，可再分為三個細項：計算錯誤、概念錯誤、非關答案的操作。計算錯誤只是在做運算時，不小心算錯了。而運算子選擇錯誤、對變項間關係無法順利轉譯成代數式子、解方程式過程中的程序性錯誤等，皆是因為對某個數學概念之性質或限制不夠了解所致，都可歸類為概念錯誤。最後，非關答案的操作，指的是所做的運算完全無法回答問題、或與問題無關、內部充滿著不一致性。

不適當的解題習慣，包括認為所有的數字都要運算、沒有數字的句子是沒有用的句子、直覺性的反應等不恰當的解題習慣或信念。

本研究以抽樣觀察之方式，探究各組學生在兩種文字問題上的錯誤類型，並以描述性統計百分比方法做為說明。相關內容於第三章研究方法中詳述。

肆、語文理解能力

本研究以樣本之智力測驗中的語文測驗得分，表示其語文理解能力。

伍、數學計算能力

本研究以樣本之智力測驗中的數學算術計算測驗得分，表示其數學計算能力。

第二章　文獻探討

第一節 問題解決

數學本身就是一種解決問題的活動。八十年代美國數學教育界為了挽救學生數學成就普遍低落現象，積極地致力於數學教育研究與改革，當時學界共識是以培養優秀解題者為目標，美國數學教師委員會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)於 1980 在「行動綱領」(Agenda for Action)中宣示，「解題必須是學校數學的重心」。大約十年後，學界的學習理論派典轉移，美國國家研究委員會(National Research Council)體會到問題解決能力與真實生活關聯的重要性，在「重塑學校數學」(Reshaping School Mathematics)一書中指出「…雖然數學語言以規則為基礎，這些規則也必須學習。但學生要有超越規則而以數學語言來表達事物的動機」(Schoenfeld, 1992)，亦即數學教學的目標在於培養能夠數學地思考的學生，對於生活中大量的資料，能夠分辨其有用性，以先前所學的數學知識，加以邏輯運用，成功地解決問題。我國九年一貫數學領域的課程暫行綱要(教育部，2000)也顯示，培養解決數學問題的能力為數學課程發展的目標之一。從以上歷史的脈絡來看，稱「問題解決」為近年來數學教育上的重要議題，實不為過。

以下先談問題的定義與內涵，再分析問題與數學問題的類型，接著討論解題的歷程與評量模式，最後探討近代建構主義思想對數學問題解決研究的影響。

壹、問題的定義

當一個人有一個目標，卻尚未找出可以用來達成目標的方法時，那麼便會產生問題了。各個學者對於問題的定義不一，有的學者認為所謂「問題」即是個人想達到某種目標，而必須找出方法來達成目標的情境；有的學者認為是「所處狀態」(presented statement)和「目標狀態」(goal statement)間的差異或距離；而有的學者認為「問題」必定有四個組成，分別是目標、可用資源、操作程序及

限制等(Glass & Holyoka, 1986)。以下探討不同學者所提出的「問題」的定義。

Polya(1962)認為「問題」能使人有意識地去尋求達成目標之方法，而這個方法不是立即可得的，「解決問題」即是去「尋求方法」的行動。一個問題的存在與否，要視這個問題對個人的困難度。

張春興(1994)認為，所謂「問題」(problem)是指個人在有目的待追求而尚未找到適當手段時所感到的心理困境。基於此義，問題的存在與否，是主觀的認知與感受；對生手而言是問題，對專家而言卻不是問題；對有所追求的人是問題，對一無所求者未必是問題。

Newell & Simon (1972)將個人產生解決問題行動的場域，稱為「問題空間」(problem space)，問題空間是由幾個狀態(statement)所構成的：(1)一個目標或目的狀態；(2)一個初始的或是開始的狀態，也就是對問題所做的描述；(3)一些中間狀態，用來描述為達成該目標之所有可能的解決路徑。每一個解決路徑又是由一些個別的步驟所組成，這些步驟會將個體由開始的狀態運作到其目標狀態。

Kilpatrick (1985)先從心理學的層面來定義「問題」，再由其它層面來看待「數學問題」。以心理學層面來看，問題通常被定義為一個情境，在此情境中我們想要達到某一個目標，但直接通往此一目標的路徑已被阻礙，而個體為了達到目的所做的一些活動即為解決問題。數學問題則是指在尋求答案的過程中，一定要用到的數學概念、原理或方法的問題。從社會學及人類學的層面來看，數學問題被當作是老師給學生的一項任務。從數學及數學教學的層面來看，數學問題被當作是數學建構的來源、數學教學進行的思考工具，藉由讓學生解決數學問題而搭起數學的鷹架。

Mayer(1992)綜合許多心理學家所同意的定義，提出「問題」必須包含三項特徵：

1、已知(Givens)：問題起始階段包含的條件、對象等訊息。

2、目標(Goals)：問題想要或最後要達成的階段。解題就是將問題從起始階段轉移至目標階段的歷程。

3、障礙(Obstacles)：由問題的起始階段至目標階段，解題者無法立即知道問題的答案。也就是說解題者目前沒有明確與直接的方法，可將問題從起始階段轉移至目標階段。

綜上所述，「問題」即是指個體所處的一種未達成目標的情境，其中的目前呈現狀態和所要達到的目標狀態間存有障礙，且目前尚沒有一個明顯的方法或途徑可以去除中間的障礙。本研究中的問題指是數學問題，亦即是那些必須利用數學概念、原理、原則及數學方法以消弭目前呈現狀態和欲達到之目標狀態間所存有的距離或障礙的問題。

貳、問題與數學問題的類型

問題沒有統一的分類方式，學者依其研究需要而將問題作分類。例如，張春興(1994)依問題的答案類型，將問題分為兩類：有固定答案的問題(fixed-solution problems)和未定答案的問題(open-ended problems)。固定答案的問題，其答案未必為解題者所了解，因為問題對個人而言是相對的，例如數學難題對學生是問題，但對老師可能就不是問題。固定答案的問題通常需要遵循一定的步驟和方法才能獲得答案，例如電子技術工人修理電視機，須遵循該機件之結構模式逐步檢查，找到故障所在，始能進行修理。而非固定答案的問題，在學校課程中不常見，但在生活上卻處處皆是，且對人類之創造思考而言，更屬重要。非固定答案的問題可能沒有答案、可能有許多答案，也可能到現在尚未肯定是否有答案。例如如果沒有發生二次世界大戰，世界會是什麼樣子？這個問題沒

有答案，因為不可能有這個問題。又例如，一般公認兒童的食物營養與其身心發展有密切的關係，但什麼食物最有利於其身心發展？這個問題便可能有許多個答案。最後一個例子，如果世界人口比現在多了 50 倍，人類的住宅會變成什麼樣子？這個問題可能會發生，且尚未有肯定的答案。

黃敏晃 (1998)則依問題與解題者的關係，將問題分為二類：例行性問題(routine problems)和非例行性問題(non-routine problems)。例行性問題指解題者熟悉待解決的問題，面對這種題目時，解題者從記憶中提取合適的解法即可。一些需加以熟練計算技能的問題屬於傳統文字問題，數學課本的習題或作業中的大部分題目也屬於此類問題，做此類題目的目的比較重視熟練一些固定技巧或模仿。而解題者面對非例行性問題時，無法利用已學的知識尋求技能，直接解決問題，亦即解題者處於無法立即知道解決路徑的情境之中；解題者必須搜尋、檢核及統合先前所學的知識和技能，以擬定可能的解決方法。一些教育學者認為只有當解題者面對的是非例行性問題，解題行為才會發生。學校教育的目的，除使學生熟練基礎技能，更應製造機會，使學生有應用知識，以解決非例行性問題的經驗和能力，此即解題的意義。值得注意的是，一個問題是否為例行性問題或非例行性問題，會因解題者而有所不同，因此非例行性問題不一定是很難的題目。

問題雖然沒有固定的分類方式，但有一個重要向度是它們是否有完整的定義，亦即分為定義完整問題(well-defined problem)與定義不完全問題(ill-defined problem)兩種 Simon(1973；引自黃明螢，2000)。定義完整問題有明確的敘述及目標，也包括所有解決方法所需要的訊息；而定義不完全問題中，則有一些不確定性(uncertainty)的條件，例如沒有固定的解法、答案或目標，因此使得解決方法不能立即得到、也困難許多。

本研究將問題的分類方式彙整如表 2－1－1 所示。

表 2－1－1：問題的分類

分類的依據	分類名稱	內　　涵	問題舉例
問題的描述(Simon, 1973)	定義完整的問題	描述完整、提供解題所需條件的問題。	Ex：百貨公司大拍賣，媽媽以 6 折買了一件衣服 600 元，請問這件衣服原價多少錢？
	定義不完整的問題	包含一些不確定性條件的問題。	(幾何三大難題之一)用尺規作圖做一個正立方體為原給定正立方體體積的 2 倍。
答案類型(張春興，1994)	有固定答案的問題	依循固定方法可得到答案的問題。	Ex：解一元二次方程式 $2X^2-X-6=0$
	未定答案的問題	可能沒有答案、多個答案、或尚未肯定答案的問題。能增進創造思考。	Ex：(哥德巴赫猜想)任何一個大於 3 的合數都可以寫成兩個質數的和嗎?
問題與解題者關係(黃敏晃，1998)	例行性問題	解題者熟悉解法的問題。目的通常是為了精熟固定技巧。	Ex：3 還要加多少才會變成 8？(對已學過加減法的小學生來說)
	非例行性問題	解題者無法直接解決的問題，需統合先前經驗，擬定可能的解法。	Ex：3 還要加多少才會變成 8？(對學會數數，但未學過加減法的學齡前兒童來說)

在數學問題方面，Polya (1962)從教學的層面將其分為四種：

1、例行的問題：把正在學的運算規則，拿來作機械式的應用就能解決的問題。

2、有選擇的應用題：要應用以前學過的規則或步驟才能解決，但以前學過的不只一種，所以解題者需要作一些判斷以選擇適用的規則或步驟。

3、選擇一種組合：要求解題者把二個以上的學過的規則或例子組合起來才能解出來的題目。

4、接近研究級的題目：這種題目要求解題者把二個以上的規則或例子作有創意

的組合才能解題，但此種組合會有許多分支，且要求相當高層次的獨立思考，以及使用到擬真推理。

在數學文字問題的分類方面，亦有許多不同的分類方法。在加減法的文字題方面，學者將之分為改變型(change)、比較型(compare)和合併型(combine)三類(Riley, Greeno & Heller, 1983；Kintsch & Greeno, 1985；De Corte & Verschaffel, 1989)。在乘除法的文字題方面，則可分為量數同構型(isomorphism of measures)、量數叉積型(product of measures)和多重比例型(multiple proportions) (Vergnaud, 1983)。另外 Marshall, Pribe & Smith (1987)則依文字題的運算步驟分為單步驟(one-step)和雙步驟(two-step)二類，若只須要一個運算步驟(如＋、－、×、÷)是屬於單步驟文字問題，若要經過二個運算步驟是屬於雙步驟文字問題。以上各分類各舉例說明如下頁表 2－1－2 所示。

Marshall (1995)認為造成各個文字問題有所不同的因素有三個向度，亦可作為文字問題分類的參考依據：

1、問題情境的表面特徵(surface feature)：例如故事脈絡的不同。雖然這是每個文字問題最明顯差異，但過去的研究顯示出，只使用表面特徵去了解問題情境很難成功地解決問題。

2、問題情境的語法特徵(syntactic feature)：例如文章長度、用語的複雜度、運算操作的型式與個數等。語法特徵常被用來預測問題的難度，但學生擁有較好的語法特徵辨識能力就能做出較適當的決定。過去的研究認為，語法特徵的簡化有助於學生對問題的了解。

3、問題情境中的關係(relationships)：學生是否能了解問題中情境之間的關係，是其是否能成功地解決問題之關鍵。情境中的關係是問題的本質，能消除表面與語法特徵所帶來的誤導。有關情境中的關係之描述能使解題者辨識是否與先前經驗有相似性。而算術方面的文字問題，主要有五種關係(可以單獨存在或組合)：改變(change)、聚集(group)、比較(compare)、再敘述

(restate)、成比例變化(vary)。

表 2－1－2：文字問題的分類舉例

文字題類型	分 類	舉例說明
加減法的文字題	改變型	哥哥有 5 枝鉛筆，弟弟再給他 3 枝，哥哥現在有幾枝筆？
	比較型	哥哥有 5 枝鉛筆，弟弟有 3 枝鉛筆，哥哥比弟弟多幾枝鉛筆？
	合併型	哥哥有 5 枝鉛筆，弟弟有 3 枝鉛筆，兩人共有幾枝鉛筆？
乘除法的文字題	量數同構型	哥哥把 20 枝鉛筆平均分給 5 個人，則每個人可得到幾枝鉛筆？
	量數叉積型	妹妹有三件不同顏色的上衣，二件不同款式的裙子，則她最多有幾種搭配的方式？
	多重比例型	平均來說，三隻豬在 2 天內需要消耗 120 公斤的飼料，請問四隻豬 3 天需要多少公斤的飼料？
運算步驟不同的文字題	單步驟	飲料每瓶 25 元，買 6 瓶共需多少元？
	雙步驟	飲料每瓶 25 元，餅乾每包 15 元，買 6 瓶飲料和 1 包餅乾共需多少元？

學校中的數學問題，一般可分為算術問題(arithmetic problem)與文字問題(word problem)。算術問題只需要熟練數學的基本運算規則即可解題，而文字問題尚須有「從文本中學習」(learning from text)的能力(Kintsch, 1989)，能夠對文字脈絡作解碼(decoding)、接觸(accessing)，進而理解題意，依照問題的脈絡，將自然語言(ordinary or natural language)轉譯成算術語言(arithmetic language)之後，才能依照數學的運算程序獲得答案(Mayer, 1992)。這種數學文字題在我國的中小學裡，也稱為「應用問題」，因為應用問題

與計算題(也就是算術問題)不同，並非只是單純的計算而已，而是需要把數學概念與運算規則統合後，運用至問題情境中。文字問題在我國中小學的數學課程中佔有重要的地位，但常因為刻意簡化問題情境，或讓學生過度重複演練相同的問題，而失去其原本的意義與功能。

本研究探究學生在數學「文字問題」上的表現情況，此「文字問題」不同於「算術問題」，若依 Marshall 提出之「語法特徵」來分類，「算術問題」使用數學運算符號描述問題，而文字問題則以文字敘述日常生活中可能發生的故事來描述題目。在內容方面，國內在國中學生方面的研究大部份使用的數學問題是定義完整的、刻意刪去無用訊息的、不一定符合真實生活經驗、常在課本及坊間參考書籍上可見、有固定答案的例行性問題(例如袁媛，1993；林清山 & 張景媛，1993；張景媛，1994)。依據本研究之研究旨趣，自編的文字問題，除配合現行國內國中二年級學生之數學能力指標之外，亦參考國內外相關教材，擬編製兩種文字問題施測。一為傳統文字問題，二為故事文字問題。傳統文字問題指的是學生可在數學課本、習作及坊間參考書籍看得到的題目，題目內容大致上與國內過去的研究相似；而故事文字問題，則務使其儘可能符合真實生活情境與學生過去生活經驗，且不會出現在課本、參考書中，不是學生熟悉的題目。在解法上，兩種問題都是多步驟的題目，且其問題的內容具有同構性質，也都符合現行國中二年數學能力指標。本研究探討學生在數學上的表現，並以文字問題為主，是因為文字問題的解決歷程涵括語文理解、數學概念、計算能力，是促進高層次思考的途徑，再者，文字問題是學校數學欲實現情境學習理論於實務的最佳方法之一，相關的討論將在下文(伍 、建構學習觀對數學問題解決研究的影響)中呈現。

參、問題解決的歷程

能夠解決問題是人類心智上的天賦，而人類的心智又是上天所賜與的禮物(Polya, 1962)。從認知科學的角度看來，問題解決為一個多步驟的過程(Mayer , 1982)，在這個過程中，解題者必須找出過去經驗(基模)和正在處理問題兩者之

間的關係。以下分別討論各學者對問題解決歷程的看法。

Polya (1957)將問題解決分為下列四個步驟：

1、了解問題(understand the problem)：了解問題的文字敘述，並指出問題的主要部份，包括題目中的已知、未知和條件等。

2、擬定計劃(making a plan)：依據現有的資料，找出獲取解答的可能途徑，即提出解題計劃。

3、執行計劃(carrying out the plan)：實現所擬定的解題計劃，並檢驗所執行的每一步驟。

4、回顧(looking back)：回顧所完成的解答，對它進行檢查和討論。回顧整個解題過程，想想看是不是有更好的方法，或不同的解題方法，解題的方法或結果是否可以運用至其它的問題等。

Newell & Simon (1972)以訊息處理系統觀點描述個體解決問題的內在歷程(如下圖 2－1－1 所示)。首先是「輸入轉譯」(input translation)階段，個體將外在問題形成內在表徵，經由對此內在表徵的架構，個體判斷這個問題的解答是明顯容易的、難解的，或是達不到的。第二個階段是「選擇方法」(selecting method)，個體結合先前經驗與合理的推測，選擇一個似乎可行的方法。第三個階段是「應用」(applying)，將先前所選擇的方法應用在這個問題上，此時個體的內在與外在行為，皆受此方法控制。最後一個階段為「影響環境」階段，亦即為「結束或再循環」的階段，當應用此法結束，個體會視結果而有四個選擇(options)：(1)完成此問題，並將此方法儲存；(2)選擇其他方法，再回到第三階段；(3)產生一個不同的問題表徵，亦即原問題再界定(reformulated)、再精緻化，而回到第一個階段；(4)放棄解決這個問題。

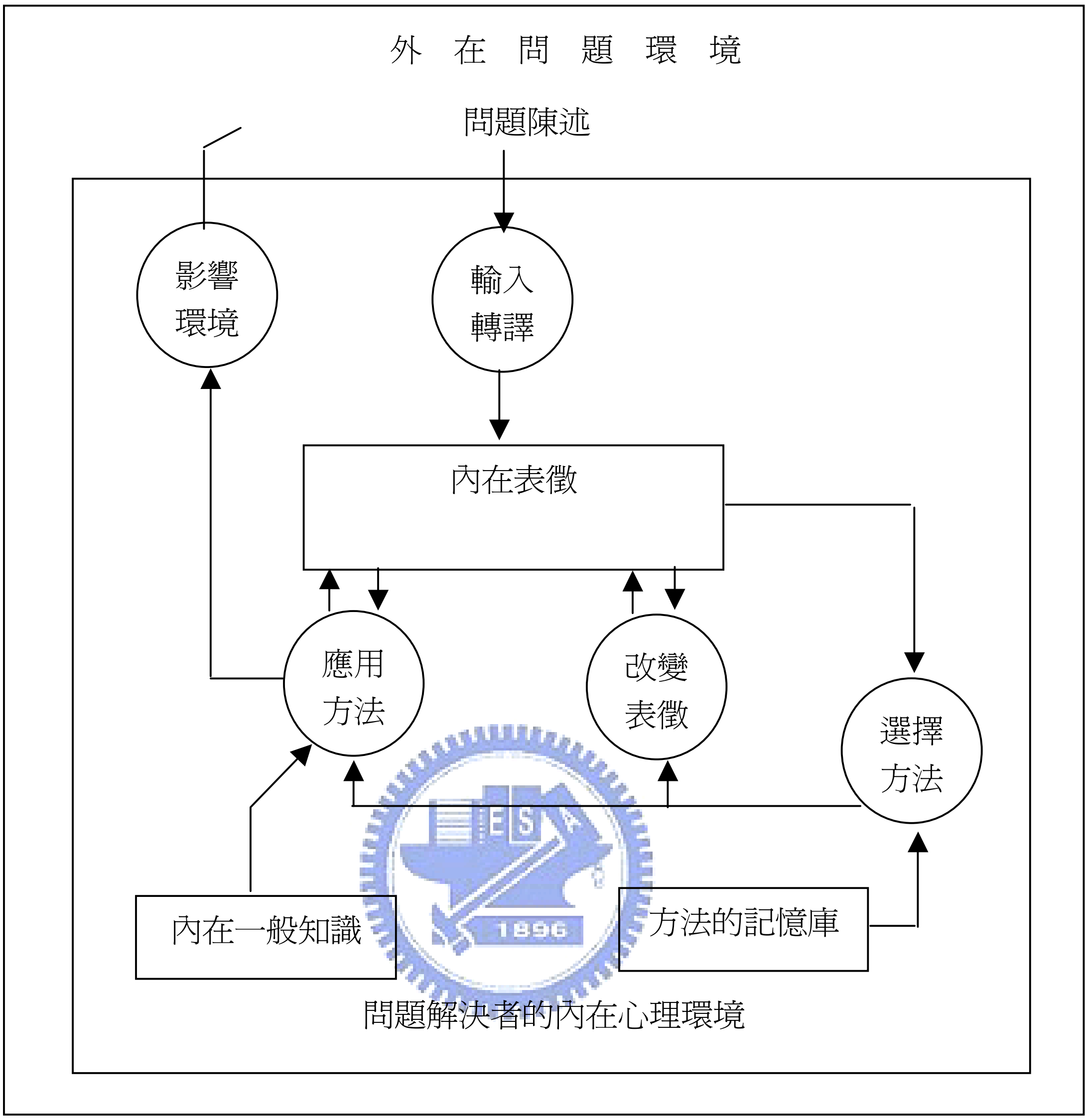


圖 2－1－1：個體解決問題的內在歷程（引自 Newell & Simon, 1972, p.89）

Glass & Holyoak (1986)認為雖然不同問題的解決基模有所不同，但仍有一般解決模式，這個模式分成四個步驟(如下圖 2－1－2 所示)，並且，這四個步驟是可以循環的：

1、形成初步的問題表徵：以自己的理解方式，形成不同的問題表徵方式，例如依題意畫出簡要的圖形。

2、計劃可能的解決方式：應用一些操作(有關的定理、原則或公式)以建構能產生解答的一系列步驟。值得注意的是，個體常在實際行動之前，心智上測試

解決計畫，尤其是在若犯錯會有嚴重後果的問題上。

3、重新界定問題：如果初期的問題表徵無法滿足解題需求，則須以另一種方法重新陳述或表徵問題，若不能成功地重新界定問題，解題者可能陷入膠著狀態，此時最好稍作休息，再回到問題情境。

4、實行計劃及檢討結果：執行所形成的解題計畫，如果失敗，則加以檢討原因，是否放棄、修正或重擬新的解題計劃。

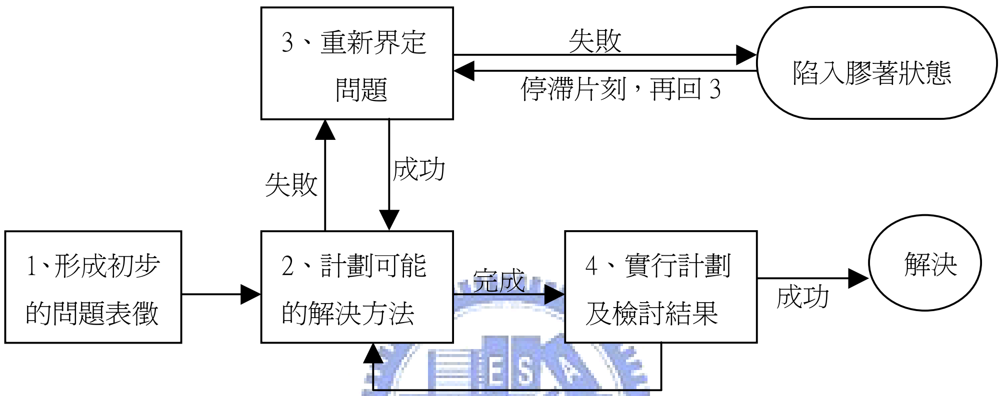


圖 2－1－2：問題解決流程圖 (Glass & Holyoak, 1986, p67)

Mayer(1992)提出數學解題共有四項成份：

1、問題轉譯：應用語言知識和事實知識，將問題的每一個句子轉譯成內在表徵(internal representation)。在這個過程中，必須了解語句的意義。

2、問題整合：應用基模知識，將問題的每個陳述句整合而成連貫一致問題表徵。在這個歷程中，必須認識問題的類型、辨認有關及無關的資料，以及決定哪些訊息是解題所必須的。

3、解題計劃及監控：運用策略知識，想出並監控解題計劃。例如畫圖、考慮較少的類似問題、設立次目標、使用矛盾法、逆向工作等。

4、解題執行：運用程序性知識，正確及自動化地操作數學規則以求得解答。

Gagné, Yekovich & Yekovich (1993)認為一個問題解決的歷程在初始階段，解題者會對該問題形成一個表徵，其表徵的組成可能包含在工作記憶中活化的訊息，以及其它外在的表徵。接著這些表徵會活化存在長期記憶中關於文字問題的知識，例如辨識出該文字題的類型，並且從而形成可用於找出該問題解決方法的線索。這個活化解決方法的歷程會被應用在當前的情境中。最後人們還會對所使用的解決辦法是否成功做評估。

Marshall (1995)認為問題解決的歷程包括五個步驟：

1、 情境描述(situation description)：將問題情境的基本架構作歸類、區別出其特徵，以尋找合適的基模。
2、 現狀評估(status quo appraisal)：學生考慮自己已存在的知識結構及先備知識。
3、 資源評估(source evaluation)：選擇適合的解決方法或理論架構。學生是否經歷過類似問題，會影響到此評估過程所需要的時間。
4、 理論確認(theoretical verification)：精緻化(elaborate)所選擇的基模假設，及確認(corroborate)其能符合該問題情境。
5、 實際檢核(practicality check)：實際執行策略，並檢核結果。

Thom & Pirie (2002)綜合近年來多位學者的研究，用學生自我闡述(talk)的方法，將解題的歷程中的行為分作七類。值得注意的是，這七類解題行為並沒有固定的順序，因此也不稱為解題策略。它們分別是閱讀(reading)、理解(understanding)、計劃(planning)、實行(implementing)、分析(analyzing)、探究(exploring)、證明與推論(justifying and generalizing)。

Pape (2004)則整理 98 位六、七年級學生的解題行為，並將之分類為二大類。第一類為 DTA(Direct Translation Approach)，表示學生明顯地專注於數

字，而非題目中的上下文本(context)。且其直接將問題中的元素轉譯為算式。此類解題行為又可再區分為三類：(一) DTA-proficient：其解題特徵是學生幾乎只看幾個關鍵字，沒有重讀，便自動地和高效率地轉譯問題元數至數學算式與計算。其最後答案可能會正確。(二)DTA-not proficient：學生對閱讀可能有困難。其最主要的特徵是，對形成解決方法的猶豫。一再地重讀可能是唯一的解題行為。而計算過程與最後的答案可能與題意不完全一致。(三)DTA-limited context：亦是直接轉譯問題元素為算式，可能有使用題目中的某些訊息，但僅限某些單獨而非全部的(關鍵)字詞。第二大類為 MBA(Meaning-Based Approach)，表示解題者專注於變項及變項間的關係，重視文本結構多於數據。他們不斷地重讀每一句話、組織訊息，以支持整個解題過程，並且能解釋每一個算式的意義，最後的答案顯示他了解問題情境。此大類可再細分為兩類：(一)MBA-full context：此類解題過程涵蓋上述 MBA 解題行為，但沒有驗證計算過程及答案。(二)MBA-justificaion：此類解題過程涵蓋上述 MBA 解題行為，且有驗證計算過程。

綜上所述，綜合各學者對解題歷程的看法，本研究將解題的歷程分為五個階段(整理如下表 2—1—3)：第一階段為「理解題意」，包括使用閱讀的方式，對問題的要求形成表徵，界定已知的條件及所要達到的目標。一些研究顯示，很多學生在數學解題中的困難，都源自對問題的不了解(黃敏晃，1998)，也就是說，問題轉譯歷程對學生來講是十分困難的(Loftus & Suppes, 1972；引自 Mayer, 1987)。第二個階段為「尋求模式」，即活化長期記憶庫的知識，辨識問題的種類、尋求是否有符合該問題或與該問題相類似之基模知識。第三階段為「擬定解法」，結合先備知識與合理的推測，找出獲取解答的可能方法。第四階段為「執行方法」，即執行第三階段的方法。這個階段之前，個體可能會先在心智上評估、測試此方法，方法若成功，則在實際上實行；若不成功則回到前面任何一個階段，直到重新擬定可能的解決方法。第五階段為「判斷」，針對執行方法後的結果，

加以判斷是否解決此問題，是否有遺漏一些限制，若完全成功，則儲存此經驗，並結束此歷程；若不完全成功，則可能回到前面一至三個階段，重新開始，也可能放棄解決此問題。

因此有關學生在數學文字問題表現的研究，應該詳細分析學生解題行為之過程，以區分出學生是在解題的那一個階段產生困難。亦即，學生是在第一階段有理解題意方面的困難、或在第二階段時無法辨識問題類型、尋求類似模式、或是第三階段時無法選擇適當的方法，或是在第四階段無法有效地執行運用數學規則，還是在最後一階段方面，疏忽了題目的細節等。

本研究經由抽樣，以學生自評方式，探究其解題歷程，以了解各組學生在進行文字問題解決時之困難所在，並試探合作解題方式是否能改善此困境，提昇有困難學生之解題階段。

表 2－1－3：各學者對解題歷程的看法之整理，與本研究的解題歷程分類

學者	解 題 歷 程						
Polya (1945)	了解問題		擬定計劃		應用執行		回顧
Newell & Simon (1972)	輸入轉譯		選擇方法		應用		結束或再循環
Glass & Holyoak (1986)	形成初步的問題表徵		計劃可能的解法方式 重新界定問題		實行計劃及檢討結果		
Mayer (1996)	問題轉譯	問題整合	解題計劃及監控		解題執行		
Gagné, Yekovich & Yekovich(1993)	形成表徵	活化知識	找出解決方法		評估		
Marshall (1995)	情境描述	現狀評估	資源評估	理論確認	實際檢核		
Thom & Pirie (2002)	閱讀	理解	分析	計劃	實行	探究	判斷和推論
本研究之分類	理解題意	尋求模式	擬定解法		執行方法		判斷

肆、解題的評量模式

傳統上是非題式的評量方式，非對即錯，難以評量學生解題的過程是否正確，也無法找出學生的迷思概念，因此大部份學者認為這並不是客觀的評量方

式。如何才是客觀的評量方式？有的學者認為應依結果來分析學生的解題表現，有的學者則認為應對整個解題過程予以評分。然根據本研究之旨趣，認為若要評量學生在解題歷程中所遭遇的困難，應以學生整個解題過程加以評估。故以下僅探討以學生整個解題過程為評量方式的模式。

Charles & Lester(1982)的評分方式是將學生的解題過程分為三個階段來給分，每個階段的總分為 2 分。其整個評分方式如下表 2－1－4 所示。

表 2－1－4：Charles & Lester (1982)的解題評量表

解題過程的評分標準	
了解問題	0-完全無法解釋問題 1-對於問題的一部分無法解釋 2-完全了解題意
擬定計劃	0- 完全無法安排適當的計畫 1- 問題中只有一部分能正確的規劃 2- 計畫能執行，據此並獲得正確的答案
求得答案	0- 由於不適當的計劃而無法求得正確的答案 1- 計算錯誤或抄錯 2- 求得正確的答案

Schoenfeld (1985)提出的多重記分方式(如下表 2－1－5)，除了評量學生的解題過程，尚考量其所使用的解題方法之個數及解法所達到的程度，因此 Schoenfeld 將解題過程分為三方面來評分，每一個層面依據學生是否使用而給予 1 或 0 分。例如某一位學生以一個方法解出答案，以第二種方法做對一些，且有提到第三種方法的證據，但沒有去實踐第三種方法，則該生在此三個層面所獲得的分數分別為：一、顯示證據：3 分(顯示出有三種解決方法)；二、實踐方法：2 分(執行其中二種方法)；三、進展： 0 分(第三種方法沒解出)、1 分(第二種方法有一些做出)、 0 分(並沒有任一個解法達到「幾乎解出」)、1 分(以第一種方法完全解出)。該生合計得到 7 分。

表 2－1－5：Schoenfeld (1985)的多重記分

解題層次		學生解題特徵
一、顯示證據		學生是否有任何證據顯示其對問題已意識到有一特殊解法。
二、實踐方法		學生是否有實踐這個方法？或者只意識到，但並沒有去尋求。
三、進展	沒解出	沒有進一步求答。
	有一些解出	學生的處理方式很合理，但無法求出答案。
	幾乎解出	很接近答案了，但計算上有一些錯誤。
	解出答案	完整的解答。

Mcaloon & Robinson (1988)依學生整體的表現來評分，其評分標準如下表 2－1－6 所示。

表 2－1－6：Mcaloon & Robinson (1988)的解題評量表

得分	學生的解題表現
0	♦ 完全空白；或是 ♦ 所寫的一點都不正確或不相關
1	♦ 一開始就用較差的策略，顯出其對問題不了解；或是 ♦ 沒有嘗試再用別的方法
2	♦ 雖是較差的策略，但顯出其對問題有一些了解；或是 ♦ 雖然使用適當的策略，但不能繼續做下去
3	♦ 用適當策略，但忽略問題的某已知條件或思考的過程不清楚
4	♦ 有適當策略，但有計算上的錯誤
5	♦ 有適當策略，且 ♦ 對問題完全了解，且 ♦ 答案完全正確

近年來，雖然較盛行質的評量方式，例如 Kane (1993)提出六種有關國小學生數學成就之評量策略：訪談(interview)、觀察(observation)、檔案歷程(portfolios)、學生自我評量(student self-assessment)、作業表現(performance tasks)、學生寫作(student writing)等。但這些評量方式，較難有具體或客觀計分方法，或者是較耗費時間，於實際教學上不易實施，因此大部份正式的評量模式，仍以紙筆、實作為主，以訪談、平時的作業表現為輔。

本研究欲了解學生在解題的歷程中，在那一個階段產生困難，故需分析學生

整體的解題歷程。首先 Charles & Lester 的評量方式，其三個層面互相關連，很難分開評量了解問題和實際解決問題的分數，因為學生所擬定的解題計劃是直接受到其是否了解問題的影響，故本研究不採用此評量方法。而 Schoenfeld 的評量方式對研究者在量化的研究方面並不是很恰當，因為很難去解釋全部學生平均分數的意義、對以學生個人分數來排定等級或解釋也有困難，但在質化方面，若用於抽樣訪談，可以看出不同語文理解能力與算術能力的四組學生，是否在解決問題的策略個數上有所差異。綜言之，本研究並不正式使用 Schoenfeld 的評量方法。

Mcaloon & Robinson 所提的評分方法，對於本研究而言較為適用。因此本研究擬參考其評量模式，依照學生解題的層次分別計分，如以下表 2－1－7 所示。亦即將解題表現分為五個層次，最低分為 0 分，最高分為五分。

表 2－1－7：本研究文字問題的評量表

得分	學生的解題表現
0	♦ 完全空白；或是 ♦ 所寫的一點都不正確或不相關（例如列出不相關的數學算式）
1	♦ 一開始就用較差的策略，顯出其對問題有初步了解，但無法繼續做下去。(例如僅列出數學算式、或畫出圖形)。
2	♦ 雖是較差的策略，但顯出其對問題有一些了解；或是 ♦ 雖然使用適當的策略，但不能繼續做下去。(例如列出算式，也嘗試接下去計算，但無法做完)
3	♦ 用適當策略，但忽略問題的某已知條件或思考的過程不情楚，導致答案錯誤。(例如已做完計算，但忽略一些運算規則或條件，而使答案錯誤)
4	♦ 有適當策略，也考慮問題中的相關條件，但有計算上的錯誤，導致答案錯誤。
5	♦ 有適當策略，且 ♦ 考慮所有條件，過程中沒有錯誤，且 ♦ 答案完全正確

伍、建構學習觀對數學問題解決研究的影響

問題解決一直是數學教育中相當重要的議題。然學習理論派典的不同，對數學問題解決的觀點亦略有不同。早期行為主義的學習理論，強調要確立情境與刺激間的聯結，因此在數學問題解決的學習上，學生重複演練一些問題、使用相同的解決方法，以達到精熟的程度。在題目本身，為了減去無關的聯想，題目通常也只出現與解答有關的訊息。這樣的學習觀點，顯然是強調增進學生的反應速度與正確性。亦即學生是否能在時限內執行正確的解題步驟才是其所關心的重點。六十年代以後，受到認知心理學萌芽、建構學習觀逐漸風行的影響，科學與數學教育已從傳統直接教學轉變為建構式探究教學，強調學習者先備概念、心智建構模式以及重視語言、社會、文化的學習脈絡情境。

建構主義雖然有許多的派典，但其基本主張大致可分為幾點：(1)知識是由有認知能力的個體主動建構的，並且無法被動的接受(Bonder，1986)；(2)認知是個體以「適應」(accommodation)的方式去組織其經驗中的世界，而非去發現客觀存在的現實世界(Appleton, 1993)；(3)在社群中，個體們經由批判、確認等社會協商的過程，以產生該社群所協定的概念、系統，以及通用的方法(Driver, Asoko, Leach, Mortimer & Scott, 1994；Tsai, 1998)。

建構主義的學習觀點，主要強調「理解化」與「意義化」的過程。其認為知識是一種動態的內在表徵，知識是個體主動建置的，而非逐漸累積或可直接拷貝的;學生建構原有概念與新概念之間的關係,創造自己的理解(Hiebert & Wearne, 1988；Driver *et al.*, 1994)。因此若採取機械式的學習方式，學生可能會形成抽象命題式的知識基模，這種與情境分離的作用會導致「呆板的知識」(inert knowledge)，亦即學生可以在面對語文式的定義性測驗時去提取該知識，然而他們卻無法應用該知識於真實的問題解決情境中(Gagné, Yekovich & Yekovich, 1993)。另外，在學習遷移方面，統整的學習能提昇概念理解的品質，有助於學習者將之應用在創造性問題解決以及相關材料的新學習上，亦即能提高成功遷移

的機會(Mayer, 1975；Mayer, 1987；Case & McKeough, 1990)。應用在數學問題解決上，若學生機械式地解決相似的數學問題，而且每一個問題都被教導一種固定性的解法，則學生的內在數學表徵，可能是一些獨立的、雜亂無章的命題概念。教師不應只是教導學生數學計算方法與技巧，更要教導學生統整數學概念。學生不能只學習固定的數學問題解決方法，更要學習「數學的結構」(the structures of mathematics)，了解數學程序背後所隱涵的概念與關係。也就是說，數學問題解決的教與學，應摒棄傳統的計算性(computational)，朝向概念性(conceptual)發展，使學生具有解決問題所應具備的分析能力與批判能力。基於知識的產生具發明性(inventiveness)(Tsai, 1998)，應該讓學生解決不同的問題，也就是問題的來源要具多元性，且這些問題需與現實生活情境相符；在解題的過程中，學生主動地發明解決問題的策略，或以小組討論而綜合/審核出解決方法，則學生最後會建構出一個具有統整性的數學概念網路，且這樣網路是具備生產性的(productive)(Hiebert & Carpenter, 1992)，能在現在的與將來的問題解決歷程中具有方向與監控能力。

綜上所述，建構學習觀點的主要意涵，及其對數學問題解決研究的可能影響，整理如下：

一、重視先備知識

先備知識是概念發展的橋樑。學生以先備知識來理解學校裡的正式概念，以學校的正式概念來增加、修正先備知識的內容與架構，兩者是交互作用的歷程(Howe, 1996；引自 Mintzes, Wandersee & Novak, 1998)。若學生具有另有概念(alternative conception)，則因先備知識根深蒂固的性質，將會非常不易改變(Wandersee, Mintzes & Novak, 1994；Eylon & Linn, 1998)，因此在教學時應該注意學生概念的發展，加強新舊知識的關連性。

應用在數學問題解決教育上，根據問題解決的首要歷程為問題轉譯與問題整合(Mayer, 1992)，因此教師在預備(選擇)教材前宜先注意，數學文字問題的敘

述需配合學生的發展、語文理解能力、數學技巧等可能影響解題學習與表現的先備知識。在未來的研究啟示上，可將影響數學問題解決能力的先備知識因素中，將其再詳細區分為領域一般(例如語文理解能力)與領域特殊(例如數學計算能力)，使教師得以分類進行更有效的補救教學。有關影響解文字問題的因素，將在下節討論。

二、重視合作協商的過程

1980 年代早期，強調「精熟學習」(mastery learning)的說法式微，代之而起的是分組策略、合作學習。教育者發現個別化精熟學習策略的缺失，是忽略同儕之間的激發動機與協商過程。Linn & Burbules (1993)、Mayfield (1976)、Towns & Grant (1997)以及 von Glaserfeld (1993)等人的研究指出合作學習有許多優點（引自 Tsai, 1998)。第一，學生必須以語言表達自己的看法，他們必須學會如何反映出他們的思考。經由向同儕說明的同時，學生能更清楚地了解概念，並且發現這個概念與自己先前概念的不一致處。在這個溝通過程中，學生必須積極參與整個學習活動，以使得在小組內、小組間，學生能明辨彼此間想法的不同，而加以辨證，以達到一致的看法，此亦為社會建構的過程(Mintzes, Wandersee, & Novak, 1998)。第二，小組討論較能有效率地處理工作，並且較能引發創造力。第三，過去的研究發現（例如 Johnson & Johnson, 1985；Slavin, 1984，引自 Tsai, 1998)，合作學生能提昇學生的學習成就、學習動機與學習態度；並且學生會由機械式的學習方式，轉向有意義的學習方式。第四，由於同儕間的發展階段較為一致，因此同儕或許較老師能有效地解釋訊息，以讓另一位學生明白。當學生向同儕解釋某個觀點時，可能比向老師解釋來得輕鬆，他們或許覺得和老師說話是一件有壓力的事；況且被老師糾正，比被同儕糾正來得痛苦、難堪多了。第五，整個合作學習過程，學生分享或協商概念會幫助他們發展人際溝通技巧。

而 Vygotsky(1978, 引自 Tappan, 1998)的社會學習理論，認為較高的心理功

能(例如概念性思考、邏輯性記憶、自我調節能力等)的起源係來自社會-溝通的交互作用(social-communicative interactions);亦即人與人心理間的互動(社會關係)可以內化形成個人內的心理功能。他認為和成人或較有能力的同儕合作能夠促進較高心理功能的發展。「鷹架支持」(scaffolding)的隱喻最初是由 Bruner, Ross, & Wood(1976,引自杜佳真,1997)所提出,強調教師的理想角色仍是提供學生支持。應用鷹架理論中責任轉移的概念,Palincsar & Brown(1984,引自杜佳真,1997)發展出「交互教學法」(reciprocal teaching method),此教學法是透過漸進的方式,由老師和學生輪流扮演教學者的角色。在此過程中,教師藉由學習責任的轉移,促進學生「近側發展區」(zone of proximal development, ZPD)的擴展,此法已顯示出對促進師生間更高層次互動對話和教學責任轉移方面是成功的。而交互同儕指導(reciprocal peer tutoring)則為學生倆倆互相教學。在過程中,學生們彼此都要提供對方教學、評量與增強,因此能使雙方互相協助,並提供彼此社會的支持(Griffin & Griffin, 1998)。Fantuzzo, Riggio, Connelly, & Dimeff (1989)更以 100 個大學生為研究對象,探究「交互同儕教導」(reciprocal peer tutoring, RPT)的學習成效。結果顯示學生的認知方面獲得進步(cognitive gains),且降低了與課業表現有關的精神壓力(psychological stress associated with academic performance)。

綜上所述,在數學問題解決的學習方面,教師安排小組團隊式的合作解決問題,應能提昇學習動機、促進學生協商能力、增進解題之效能。教師並且應注意師生間是否有良好互動與回饋模式,以促使學生自我調適,使其具備反省與批判能力,使學生能如同數學家一樣思考,在數學社群中提出假設、證明、澄清數學概念。據此,本研究除了探究問題解決之外,也朝向合作解題的研究方向。再者,因為 Mintzes 等人(1998)認為在合作學習方面,學生兩人一組的合作方式可能較為有利,因為每位學生有較多的機會說出自己的想法,然而潛在的缺點可能是萌生的想法較少,且大部份的國內外有關合作學習的研究都是以 3~4 位學生為一組,所以本研究試著以 2 人為一組合作解題。

三、重視真實情境下的學習

情境學習理論可能是建構學習觀點中，影響數學問題解決研究最鉅者。一般學者對學校正式教學的批評，大部分在於「知」與「行」分離上(Schank & Edelson 1989; Lave & Wenger, 1991)，亦即認為目前學校所教給學生的知識，大多脫離了實際情境，而且大多是學生用不著的過度抽象的知識；為了解決知識脫離情境和過度抽象的問題，有必要使知識學習和實用的情境結合。情境學習理論認為，學習者欲得到知識，便應融入情境的脈絡(context)中。如果所學的知識不能應用到實際情境中，則所學知識的益處不多。在情境中經由主動探索所得到的知識，不僅實用，而且較可能類推到其他的情境，亦即發生學習遷移。由以上可推論出，情境學習理論者十分強調學習活動的真實性(authentic activities)，因此晚近多使用多媒體電腦來虛擬出各種情境，這種模擬或虛擬的學習方式，有時也被稱為「沉浸式學習」(immersion learning)(邱貴發，1996)。在學校數學的評量模式中，可能限於時間(例如不能回到過去)、空間(例如無法深入人的器官)、與金錢(例如無法購得某儀器)等條件限制，並不容易造就出各種不同的情境，因此大部分仍使用文字問題來描述真實情境中可能發生的問題。許多學生面對文字問題時，仍無法以真實情境加以考量，基於此現象，Cooper & Harries(2002)建議文字問題應留下一些希望學生有真實觀點的線索。值得注意的是，第一，現實生活中所發生的問題，大部份是定義不完全的問題，但因為其不確定性太多，因此其通常沒有一個所謂的成功解法或目標，而解題者需花更多時間去形成表徵與再界定問題，也就是解題者需要有更高層次的創造性及批判性思考。Glass & Holyoka(1986)認為對定義不完全的問題而言，也許「找出問題」(finding a problem)才是解決問題的第一步，許多博士論文的工作就是在找出問題。因此學校中所使用的文字問題，除了儘可能地與真實生活相聯結之外，也應考慮到學生的先備知識與心智發展，最好仍採用定義較為完全、但解法多元之問題。第二，合乎真實生活情境的問題通常同時包含有用與無用訊息。Muth (1991)的研究指出學生在文字問題上的解題能力會因題目中無關訊息的干擾而無法解決問題。因

為學生的觀念中都認為文字問題中的所有訊息都應被使用，因而造成學生問題整合上的困難。然而學校中的數學問題並不能因此而將題目刻意地去情境化，仍應使用故事性的文字問題，使學生學習分辨那些是有用的訊息，那些是無用的訊息。綜上所述，應用在數學問題解決方面，問題所描述的情境需與實際生活情境相符，以使學生習得的知識是脈絡相連的一致性知識。

本節總結

綜合本節探討有關「問題解決」的各相關議題，本研究中的「問題」指的是必須利用到數學概念、原理、原則及數學方法以達到目標的數學文字問題，此「文字問題」是以文字敘述日常生活中可能發生的故事來描述題目，而不同於「算術問題」。而根據本研究之研究旨趣，將文字問題分為「傳統文字問題」與「故事文字問題」，傳統文字題是學生可在數學課本、習作及坊間參考書籍看得到的題目，其內容的定義完整、已刪去無用訊息、且有固定答案，屬於例行性問題，大致上與國內過去的研究相似；而故事文字問題，其內容儘可能符合真實生活情境與學生過去生活經驗，同時包含著有用與無用訊息，且不會出現在課本、參考書中，不是學生熟悉的題目，因此屬於非例行性問題。

在解題歷程方面，本研究綜合各學者的看法，將解題歷程分為五個階段，分別為：「理解題意」、「尋求模式」、「擬定解法」、「執行方法」與「判斷」。本研究以學生自評方式，探究其解題歷程，以了解各組學生在進行文字問題解決時之困難所在，並試探合作解題方式是否能改善此困境，提昇有困難學生之解題階段。

在評量模式方面，雖然近來來較盛行質的評量方法，但其較難有具體或客觀計分方式，或較耗費時間，在實際教學場域中不易實施，因此本研究綜觀各學者所提出的評量方式後，採用 Mcaloon & Robinson (1988)所提的五階段評分方法，依學生整體的解題表現所達到的層次予以計分，為 0~5 分。

最後，本研究分析建構主義的主要意涵，認為建構主義重視先備知識、合作協商過程、以及強調真實情境脈絡，是對數學問題解決研究的可能影響，因此

為呼應此觀點,而續將學生依領域一般能力(語文理解能力),與領域特殊能力(數學算術能力),探究這些學生在兩種文字問題中的解題行為與困難,並以合作解題方式,了解是否能改善學生在解題時所遇到的障礙。

第二節　數學文字問題的相關研究

有關問題解決的研究，在科學教育的領域中，非常之多且涵蓋各個科目，包括物理、化學、地球科學、數學等。過去在數學教育上，文字問題解決的研究大致上可分為三類，第一類探討有關影響解文字問題的因素(例如， Leblanc, Proudfit, & Putt, 1980；Whimbey & Lockhead , 1981；Thom & Pirie, 2002等)。第二類分析學生在解文字問題時，可能產生的錯誤類型(例如，Herscovics & Kieran, 1980；Von Haneghan, 1990；Dirk De, Wim Van, Dirk, & Lieven, 2002等)。第三類則是國內常做的研究，即嘗試一些教學方法對學生學習問題解決是否有所助益(例如羅汝惠，1993；吳吉昌，1995；顧玉池 ，2000 等)。

本研究認為應先區分學生在問題解決的歷程中所產生的困難，教師才能針對其困難，給予補救教學或是在課堂上修正教學法，以預防這類的解題困難。另外，目前新的學習理論和傳統上的學習理論不盡相同，在問題的闡述上，應作區隔，因此將題目分為兩種類型，分別為傳統敘述式的文字問題及故事敘述式的文字問題。因此，以下將只探討有關影響解文字問題的因素，及分析學生在解文字問題時，可能產生的錯誤類型，而不探討各教學方法的成效。

壹、影響解文字問題的因素

影響解文字問題的因素有許多，因學者的研究方向不同，大致上可分為內在因素與外在因素。內在因素指的是與學習者本身有關的因素，而外在因素指的是除了題目本身之外，及學習者所處的環境與他人所產生的因素。根據本研究之旨趣，以下先說明文字問題本身的因素，再探討與學習者本身有關的因素。

一、文字問題本身

蔡培村(1994)指出文字問題中三個客觀因素會影響解題：(1)複雜性：若問題是單純變項間的關係，或單一的對應關係，會比較容易解出，反之亦然。(2)

潛隱性：問題較為具體、或條件較易掌握時，較易被解出，反之亦然。(3)熟悉程度：問題較為個人所熟悉，或解題者過去有遇過類似的問題，較易解出題目，反之亦然。

Leblanc 等人(1980)認為影響數學問題之難度的因素有九項:(1)問題中所使用的字彙之難易性；(2)問題中句子的結構與長度；(3)問題中數字的大小。(4)問題的表達方式；(5)問題中所含數學原理之難易及運算法則之複雜與否；(6)解決問題所須使用步驟的多寡；(7)問題中已知條件之多寡及複雜與否；(8)解決問題所須使用之策略的難易；(9)問題之答案的多寡。

Yancy(1981,引自古明峰，1998)認為學生對解決文字題感到困難，主要是因為文字題包含十項特徵所造成的：

(1) 題目中並未將需要計算的資料依次列出。

(2) 有許多無關資料夾雜在題目中。

(3) 題目呈現時，並未伴隨輔助圖表出現。

(4) 必要的資料，需從題目中推論出來。

(5) 需借用許多計算步驟，才能得到答案。

(6) 有許多線索字，需要特別注意。

(7) 使用的字彙通常不適合於或高於學生的閱讀理解程度。

(8) 問題情境通常不為學生所熟悉。

(9) 計算過程較複雜與沉悶。

(10) 題目中，通常不用「數字」表示觀念(例如用「一半」，或「二倍」等名詞，而不用數字「$\frac{1}{2}$」及「2 倍」)。

Barnett (1984)(引自 Hiebert & Carpenter, 1992)整理先前研究，發現語法(syntax)是影響文字問題難度的一個重要向度。文字問題的語法向度指的是問題中出現的文字與符號的安排，以及這些文字、符號間的關係，例如句子的長度、問句的位置、句子和數據的排列順序等。Barnett 的研究並發現語法的改變和解題者的工作記憶負荷量有關，例如句子愈長、文法結構愈難，則工作記憶的負荷量也愈重，對解題者而言，問題的難度也愈高。

本研究綜上所述，將影響問題解決的因素中，文字問題本身的因素，大致區分為三個子向度(如下表 2－2－1 所示)：(1)有關文字陳述方面；(2)有關其難易程度方面； (3)解題者的熟悉程度方面。

本研究所使用的兩種問題—傳統文字問題與故事文字問題，在敘述上，兩者皆以文字敘述，但前者不一定符合生活經驗、大致上較為簡短，且只包含解題所需之訊息；後者為故事性的敘述、較符合真實生活情境中的現象，大致上較為冗長，且可能同時包含有用與無用之訊息。在難易程度方面，兩種題目雖會先行預試，但由於故事文字題目是學生較不熟悉的，所以對學生而言，其難度可能較高，但在變數的個數上及所使用的運算規則上，儘量使兩種題目沒有差異。在熟悉程度方面，傳統文字問題是課本、習作、參考書中改編而來的題目，故學生較為熟悉；故事文字問題則參考國內外教材、研究者自編而來，學生較不熟悉。

表 2－2－1 文字問題本身的因素

因素向度	內容說明
文字陳述	例如題目敘述的長短、字彙的難易、是否具體描述、是否伴隨輔助圖等。
難易程度	例如變數的多寡、須使用的運算法則及步驟的多寡等。
解題者的熟悉程度	例如是否為解題者所常見。

二、學習者本身的因素

Whimbey & Lockhead (1981)認為好的問題解決者的一個很重要的特質是對精確性的重視，亦即他們會一再地檢核自己對問題中的目標及關係是否已完全及正確的了解。有時他們會一再地重複讀問題的敘述，直到確定已完全了解問題為止。而這種重讀與檢核過程，會使他們激發更多相關的訊息、精煉對問題的表徵，因此不但能正確的解決問題，對領域特定知識的增進與組織也有很大幫助。

張景媛 (1994)引用 Mayer (1987)的理論，研究結果認為影響學生解決文字問題的因素乃是學生是否具備了四種知識：

1、 語言及語義知識 (Linguistic and Semantic knowledge)：能辯識出字的不同、相同與相異的名詞，及能了解字或名詞的意義。例如能辯識出矩形中的「長」與「寬」、能了解 1 公尺等於 100 公分的事實。
2、 基模知識 (Schematic knowledge)：有關問題型式的知識，例如能知道面積問題是植基於面積公式 (例：正方形面積等於邊長之平方)而來的。
3、 策略知識 (strategic knowledge)：有關解決方法的知識。例如能用圖形來表徵題意、能夠列出適當的方程式。
4、 程序知識 (procedural knowledge)：有關執行策略的知識。例如能正確無誤的解一元方程式。

Marshall (1995)基於對基模理論(schema theory)的研究，發現許多成人及兒童都不喜歡文字(或故事性的)問題，是因為他們：(1)無法辨識(recognize)及理解(understand)題目中的情境(situation)和關係(relation)。(2)無法應用適當的操作或運算。雖然這樣的二分法太過簡化，但這樣的二分法能提供我們了解學生在文字問題上表現不佳的原因。也值得我們針對二個主原因，再深入地各別探討其內涵。

Thom & Pirie (2002)以質性研究的方式，探討三位學生合作解題的行為及策略。其結果發現自我提問(self-questioning)、自我控制(self-regulatory)、及後設認知技巧(metacognitive skill)是成功解題的關鍵。他參考其他學者的研究，再將上述三條件合併，重新分為二大條件：努力不懈(persevere)和題目的控制(exercise control)。前者是指學生對於知(know)的觀念與直覺，不要太早放棄嘗試。後者指的是學生選擇目標、監控、修正和評估過程的方法，同時學生也會使題目中的訊息變得有用和有意義(make use and sense)。值得注意的是，這份報告的研究方法中，在三位學生開始解題之前，研究者首先讓教師介入，督促學生閱讀題目，並且詢問他們是否了解自己唸的題目意思。這是因為該研究者認為個人必須能詮釋自己所讀的，才能稱為理解(comprehesion)，也就是說能將文本的意義，語言化為自己的文字。

Hart (1993)以質性研究的方法，觀察12位(分為3組)學生合作解題的歷程，並歸納出妨礙及增進解題表現的因素。

四個妨礙解題表現的因素是：

(1) 缺乏經驗架構(lack of an experiential framework)：當先前的經驗與題目沒有相關聯時，學生可能會創造一些定義或演算法則以解決目前的窘境，而這些自創的法則，可能是受到題目中某些字詞的提示，加以先前經驗而來。

(2) 受到題目未要求的限制(imposition of unrequired restrictions)：學生根據自己假想的限制，改變問題的目標。這些限制在題目中並沒有出現，但學生卻直覺的認為有這樣的限制。例如題目中並未說明答案不可為負數，但學生基於國小的經驗，直覺認為答案必為正數。

(3) 缺乏對認知活動的監控或辨識(lack of individual monitoring or regulation of cognitive activity)：學生缺乏後設認知能力。例如在解題歷程中很少自我提問。

(4) 非生產性的信念(unproductive beliefs)：學生有一些錯誤的觀念，這些觀

念會間接地影響上述三個因素。例如學生認為題目中的每一個數字都必須被用上。

在合作模式下，三個有益解題表現的因素是：

(1) 經驗收集(collective experience)：小組中集合每位成員的經驗，以彌補個人先備知識之不足。

(2) 小組監控(group monitoring)：有些學生很少自我提問，卻偶爾能挑戰別人的論點。同儕間的挑戰與不信任形成一種外在的監控力量，以彌補個人自我監控能力之不足。

(3) 社會規範(social norms)：對於最後產生的答案，基於對別人的挑戰與不信任，小組會形成一個社會規範，亦即須大部份的成員同意，此答案才能成立。因此當一個解答產生之後，小組會花一些時間反省、檢核、討論這個答案的正確性。

Cardelle-Elawar (1992)認為提升數學低成就學生的數學解題能力必須改善這些學生的語文能力，使學生能了解問題。Lawrence & Ronald(2001)以縱貫性研究的方式，控制年紀與性別的因素，發現兒童在幼稚園時期的閱讀能力(不論是言辭技巧或視覺轉換技巧)，能夠有效預測四年級數學成就的表現。

Jordan & Montani(1997)探討兩類型數學學習困難(mathematics difficulties, MD)的三年級學生，在問題解決與算術技巧方面的表現差異，這兩類型數學學習困難的學生分別為「數學學習困難—特殊領域」(MD-specific)與「數學學習困難—一般領域」(MD-general)。MD-spceific 指學生在學習數學上有困難，但在閱讀理解上沒有困難；MD-specific 指學生在學習數學上和閱讀理解上都有困難。其研究結果發現，不論試題難易，只要時間充裕，MD-specific 組可以表現得和兩方面都沒問題的控制組一樣好；而對 MD- general 學生而言，無論試題難易、時間充足與否，他們都是表現最差的。該研究最後建議，對於數學學習有困難的學生，教師須先區分他們是只在數學方面有困難(MD-specific)，還是在閱讀理解與數學上都有困難(MD-general)。這兩種學生

雖然在數學學習上都表現得較一般學生差(尤其是在時間有限的工作任務之下)，但他們的困難來源不同，所需要的補救教學方式也不同。MD-specific 的學生需要一些加速技巧，例如增加他們限時工作的經驗、教導他們使用計算機以省去他們執行計算的時間，以使他們良好的問題解決能力得以發揮。而 MD-general 的學生，需要有系統的教學介入，以使他們對問題首先能概念化(了解問題)，接著才須使他們發展出有效的計算技巧。

綜上所述，影響解文字問題的個人因素可大致區分為三個部份。首先是學習者的知識部分，這個部份可再分為有關數學方面的先備知識、及語文理解能力。第二是學習者的信念部份，例如是否具有不屈不撓的精神等。最後是後設能力部份，例如是否具有自我監控能力、及檢核最後答案等。本研究先將學生區分為四組學生，目的即在於了解不同數學先備能力及語文理解能力的學生，在問題解決歷程及錯誤類型上的差異。而有關學生學習數學問題解決之信念及後設認知能力的探究上，本研究採取抽樣觀察的方式，初探其差異。最後本研究以兩人一組的模式，探討合作解題是否能增進解題效果。下表 2－2－2 是本研究綜合影響解文字問題的因素，所做的分類。

表 2－2－2：影響解文字問題的因素

因素分類	因素向度	內容說明
一、文字問題本身	1、文字陳述	例如題目敘述的長短、字彙的難易、是否具體描述、是否伴隨輔助圖等。
	2、難易程度	例如變數的多寡、須使用的運算法則及步驟的多寡等。
	3、解題者的熟悉程度	例如是否為解題者所常見。
二、學習者本身	1、知識	領域一般知識(例如閱讀能力、語文理解能力)，與領域特殊知識(例如數學解題策略、算術能力)。
	2、信念	例如我自控制、努力不懈的解題精神。
	3、後設能力	例如是否具有自我監控能力、評估、修正及檢核最後答案等。

貳、文字問題錯誤類型的探討

數學文字問題涉及的不只是數學計算能力，還涉及到學生的概念理解能力。在處理文字問題的過程中，學生會產生一些具系統性的錯誤，這種錯誤除了不小心造成之外，也有可能是錯誤概念或運用技能所造成的。Larkin(1989)認為學生對代數運算感到複雜無法理解的原因是因為無法看到式子的內在架構及意義，所以容易忘記或誤用規則而犯下錯誤。並且，錯誤概念較錯誤的計算不容易發現，因為有時仍會得到正確的答案，有時才導致結果錯誤(Brown & Burton, 1978)。教師應透過錯誤類型的分析，以了解學生的錯誤概念，進而給予學生實施補救教學。以下探討一些有關學生在文字問題中，可能發生的錯誤類型之研究，而這些研究的結果是較適用於目前國中二年級學生的。

Herscovics & Kieran (1980)研究學生學習代數時所產生的錯誤，發現學生是經由算術(arithmetic)來學習方程式(equation)，並且在最後產生許多的迷思概念。例如學生能了解 $3+(1\times4)=10\div2+2$，但基於解方程式課程中，首先要「以符號代表數」的想法，學生認為每一個數都可以使用符號來代替，所以他們將式子中的 2，用 c 來表示，變成：$3+(1\times4)=10\div c+c$。又，在多項式的課程中，「符號所代表的數有各種可能」，所以他們將 c 值以 5 代入，變成：$3+(1\times4)=10\div5+5$。又例如學生能理解 $4+5=9$，但在「等量公理」的「等號的左邊與右邊必須同時進行相同的運算」的觀念下，學生寫出 $4+5\times3=9\times3$，而非正確答案 $(4+5)\times3=9\times3$。另外，Herscovics & Kieran 認為對一些學生而言，將文字問題轉譯成方程式，就如同要他們將之翻譯成另一種他們不懂的語言一樣地困難。而許多老師雖然知道學生在方程式意義的建構上有困難，但是他們卻認為只要經由大量的操作與練習代數運算法則，學生就能克服對方程式理解之障礙。但這只對一部分的學生有效，但對大部分的學生無效。

Rosnick (1981)探討學生對變項間關係的誤解。他給學生的問題是「在某間大學裡，學生人數是教授的 6 倍。請用 S 代表學生人數，P 代表教授人數，寫出他們的關係式子」，結果大部份的學生，包括大學生，都列出「6S＝P」 的方程式(正確的式子是「S＝6P」)。深入地探究學生的想法，發現他們認為 S 代表的是「學生」，不是「學生人數」；P 代表的是「教授」，而不是「教授人數」。他們對「6S＝P」的解讀為：每 6 個學生會分配到 1 個教授。Rosnick 認為學生堅決地相信這些代號般的「字母」是代表固定的人或物，而非一個「變數」，這可能是源自於教師在教學時，過於簡化對問題的假設，例如只寫：S＝學生，P＝教授，就開始列出方程式並解決問題。因此，他建議老師在教學時要多注意對假設的書寫，不可省略而造成學生的誤解。

Von Haneghan (1990)將數學文字問題解決情境中所可能發生的錯誤種類(error type)分為三種，第一種是文字題的運算結果發生錯誤(calculation errors)，亦即是計算錯誤(solved with calculational errors)，例如只是減錯了。第二種是文字題算術運算子選擇的錯誤(choice of arithmetic operator)，亦即是運算程序錯誤(solved with the wrong operation)，例如想用減法解決問題，卻用成加法。第三種是文字題語意敏感的錯誤(semantic sensitivity)，亦即是根本無法回答的問題(solved but actually unanswerable)，也就是解題的過程中充滿著內部不一致性。下表 2－2－3 舉兩例說明之。

表 2－2－3:學生在比較型問題的錯誤類型（修改自 Von Haneghan, 1990, p. 354）

錯誤類型	較簡易的問題	較困難的問題
正確解答 (correctly solved)	小華有 66 片口香糖，小明有 34 片口香糖。請問小華比小明多幾片口香糖？ 66 －34 32	小華有 32 片餅乾，他比小明多 11 片餅乾。請問小明有幾片餅乾？ 32 －11 21
計算錯誤 (solved with calculational errors)	小華有 36 顆球，小明有 12 顆球。請問小華比小明多幾顆球？ 36 －12 23	小華有 52 張卡片，他比小明多 21 張卡片。請問小明有幾張卡片？ 52 －21 33
運算程序錯誤 (solved with the wrong operation)	小華有 44 顆鈕扣，小明有 22 顆鈕扣。請問小華比小明多幾顆鈕扣？ 44 ＋22 66	小華有 32 個玩具，他比小明多 12 個玩具。請問小明有幾個玩具？ 32 ＋12 44
根本無法回答的問題(solved but actually unanswerable)	小華有 22 元，小明有 69 元。請問小華比小明多幾元？ 69 －22 47	小華有 25 張貼紙，他比小明多 37 張貼紙。請問小明有幾張貼紙？ 37 －25 12

劉天民 (1993)研究國一學生在整數與分數四則運算之錯誤情形，結果發現學生的錯誤類型，共 13 項。

(1)學生在進行加減法運算時，誤用乘法運算性質。

(2)學生在進行分數的四則運算時，各自對分子、分母及整數分開進行計算。

(3)學生在處理帶分數化成假分數的問題時，常將分子計算錯誤。

(4)學生在處理通分的問題時，常將分子計算錯誤。

(5)學生將乘方問題當作乘法問題來計算。

(6)學生處理乘方問題時，分不清何數為底數。

(7)學生對四則運算的規則，運用不太恰當，忽略了先乘除後加減的規則。

(8)學生在含括號的運算式中，並未考慮括號前後的運算情形。

(9)學生在含零運算式中，誤用任何數乘以零等於任何數或使用任何數乘以零等於任何數的錯誤運算原則。

(10)學生在處理負數運算時，沒有負數乘以負數等於正數的概念。

(11)學生在處理負數運算時，有主動去掉負號的情形。

(12)學生在處理負數乘以負數的問題時，會誤用提公因數的作法。

(13)學生在處理某數除以自己本身的運算時，常將值計算成零。

張景媛 (1994)研究國中學生在代數文字問題上的錯誤概念，並參照 Mayer (1987)對解題所需的四種知識(如前文所述)，將學生的錯誤概念分為四類，共 39 項。以下只選擇 12 項作為說明。

(1)學生常忽略題目中關於「時間」的描述。

(2)學生認為題目中有數字才是要運算的，沒有數字的句子就是沒有用的句子。

(3)學生在看題目時，常看了後一句就已忘了前一句，他們無法同時記住許多條件，因為他們每看一句就得思考這句話的意思，以致工作記憶運作得十分忙錄，而無餘力思考彼此間的關係。

(4)學生缺乏時間與數量間關係的基模知識。

(5)學生常憑直覺或是關鍵字做反應，例如看到「相差」，就開始用減法計算。

(6)有些學生在除法上的基模知識有錯識，如兩個數要相除，他們以為一定是大的數除以小的數。

(7)有些學生誤將乘法上的交換律類推到除法上。例如 3×5 可寫成 5×3，因此 3÷5 也可以寫成 5÷3。

(8)學生的策略知識不足，無法針對不同的問題，採用適當的策略來解題。

(9)學生以為題目中所有的已知條件都會用到，因此想盡辦法要將所有的已知條

件都列在式子中。

(10)學生沒有等號兩邊相等的概念，所以列出來的式子並未兩邊相等。

(11)學生在解代數方程式時，最常出現的問題是移項時產生錯誤。

(12)學生在消去括號時，會產生錯誤。例如 52＋3Y＝4(X＋Y)，變成 52＋3Y＝4X＋Y（正確解法是 52＋3Y＝4X＋4Y）。

Dirk De, Win Van, Dirk, & Lieven (2002)以半結構訪談的方式，研究學生面對非線性問題時，仍使用線性思考的現象。研究中的給定題目是：「若一張 56 公分高的照片，需使用 6 毫升的油漆，若將此照片放大，變成 168 公分高，則需要多少毫升的油漆？」大部分的學生回答為 18 毫升(168÷56＝3，所以 6×3＝18)，而非正確答案 54 毫升(168÷56＝3，3^2＝9，所以 6×9＝54)。Dirk De 等人認為有四個原因使得學生使用線性思考於非線性題目，且每個原因並非是獨立的，也就是說學生可能同時受了好幾個原因的影響。這四個原因分別敘述如下。

第一個是「線性關係的直覺性」(intuitiveness of linear relationships)。直覺性的認知具有明顯的、自我證明的、和強制的特徵。有時就算學生看到正確解法的說明，他仍然認為那是不正確的(illogical)和反直覺的(counterintuitive)，而拒絕改變。Dirk De 引用 Tiros & Stavy (1999)的研究，闡述學生在數學問題解決的過程中，有一些一般的、直覺性的規則，稱為「直覺法則」(intuitive rules)，例如當學生看到數學中的正比關係（如：若 A 愈多，則 B 也愈多(more A-more B))，學生會以為是同比例成長的關係（如：A 乘以 k 倍，則 B 必隨之乘以 k 倍(kA-kB))。

第二個是「線性的誤用」(illusion of linearity)，也就是學生真的認為此給定的題目應使用線性規則以解決之。第二個原因與上述的原因的不同處在於，學生不是在潛意識或自動化的使用線性規則，而是他經由思考後，明確肯定要用此規則。

第三個是缺乏幾何知識，尤其是在相似性質(similarity)的觀念上。針對這

個研究的題目，在於幾何圖形的放大，研究者認為學生在這方面的知識是缺乏的。

第四個是有關問題解決不適當的習慣與信念（inadequate habits and beliefs about solving word problems)。學生通常只從問題表面著手、只看到數字，卻不對問題形成一個明確的心智表徵。Dirk De 引用 Brousseau (1984) 的研究，分析學生有此不適當的習慣，是因為學生與教師之間有一種「教導的默契」(didactical contract)存在，亦即老師對學生有一種隱涵的觀念與期望，因此在教導問題解決的歷程中，學生很少自主性的解題，也未對那些系統性的解法感到懷疑。

雖然 Dirk De 等人的研究是針對學生在比例問題上的題目，分析他們的錯誤現象及原因，但仍提供本研究相當有用的概念與方法。本研究進行學生在兩種文字問題上的表現情況，並分析他們的錯誤型態，觀察其是否受直覺性、概念誤用、領域知識缺乏、或不適當信念或習慣所影響。

綜合以上探討學生在解題歷程中，在算術上、代數上可能發生的錯誤類型，可將之分為兩大類型(如表 2－2－4 所示)：一為操作上的錯誤；一為不適當的解題習慣。其中操作上的錯誤，可再分為三個細項：計算錯誤、概念錯誤、非關答案的操作。計算錯誤只是在做運算時，不小心算錯了，亦即四則運算上的錯誤。而運算子選擇錯誤、對變項間關係無法順利轉譯成代數式子、解方程式過程中的程序性錯誤…等，皆是因為對問題之性質或限制不夠了解所致，都可歸類為概念錯誤。最後，非關答案的操作，指的是所做的運算完全無法回答問題、或與問題無關、內部充滿著不一致性。第二類不恰當的解題習慣，包括認為所有的數字都要運算、沒有數字的句子是沒有用的句子、直覺性的反應等。下表 2－2－4 即將這些錯誤類型彙集整理。

另外上述先前研究中提到，學生常常看一句忘一句，意謂他們的工作記憶(working memory)的工作狀態十分忙碌。本研究中的傳統文字問題，題目較為簡短，敘述中幾乎只包含著解題所需之資訊；而故事文字問題，題目敘述較長，以

故事描述的方式，探究真實生活中可能發生的問題，因此學生必須分辨有用與無用的訊息，理論上學生在這種題目中的工作記憶狀態較前者忙碌。本研究讓不同語文理解能力與數學計算能力的學生合作解題，初探此模式是否能改善文字敘述過長的困擾，進而使學生更順利解決問題。

表 2－2－4：解題的錯誤類型之分類

錯誤類型	項目	內容
一、操作錯誤 (operation error)	1、計算錯誤 (calculation error)	四則運算錯誤
	2、概念錯誤 (conception error)	(1)、運算子選擇錯誤 (2)、無法將變項順利轉譯成代數式子（例如，寫出與正確式子相似的算式） (3)、解方程式過程中的程序錯誤（例如，移項錯誤） (4)、最後的答案接近正確答案。
	3、非關答案的操作 (unanswerable operation)	所寫的運算完全無法回答問題、或與問題無關。
二、不適當的習慣 (inadequate habits)	1、認為所有的數字都要運算 2、沒有數字的句子是沒有用的句子（例如，忽略有關時間的文字敘述） 3、直覺性的反應（例如，以個人生活經驗來回答問題）	

第三章　研究方法

本研究的主要目的在於了解不同語文理解能力與數學計算能力的國二學生，在兩種文字問題中的解題歷程、錯誤類型，以及合作解題的成效。研究中以文字問題作為施測、接以使用觀察法獲得資料。本章將就本研究的研究對象、研究架構與設計、研究流程、研究工具、資料處理與分析等，共分成五節分別加以說明。

第一節 研究對象

本研究中所有的研究對象來自於新竹市一公立國中之二年級學生。該校二年級共有 12 個班級，且這些班級是常態分班的。在施測之前，學生已經學過分數的四則運算、正負數的加減法、使用文字符號代表數、及解一元一次方程式等可能與文字問題解決的相關概念。

本研究的預試對象為三個二年級學生共計 98 人，其中男生 48 人、女生為 50 人。預試結果用於兩種文字問題的修正，以及考驗評分者信度(內容於本章第五節詳述)。而本研究的正式施測對象為六個二年級班級的學生，共有 203 人，其中男生為 103 人，女生為 100 人。首先，徵求該校輔導處同意使用學生資料(如附錄十三所示)，接著將他們在語文測驗與數學算術計算測驗上的原始得分，轉換為 T 分數(原因在第四節 p. 53 中說明)，以利下一步的分組取樣。下表 3－1－1 為這些學生在兩項測驗上的原始得分與 T 分數分布之摘要。

表 3－1－1：203 位學生在兩項測驗上的原始得分與 T 分數分布摘要

測驗種類	人數	原始分數 分數範圍	原始分數 平均數	原始分數 標準差	T 分數 分數範圍
數學算術計算測驗	203	4 ~ 31	16.92	5.61	26.99 ~ 75.08
語文測驗	203	11 ~ 62	38.57	10.45	23.63 ~ 72.42

註：數學算術計算測驗滿分為36分，語文測驗滿分為76分。

本研究將數學算術計算測驗之T分數與語文測驗T分數皆大於50分的學生，設為第一組，為「數學計算及語文理解皆未發生困難的學生」，亦即在數學算術計算與語文理解上，皆未產生困難，共計74人；接著將數學算術計算測驗之T分數大於50分，且語文測驗T分數小於等於50分的學生，設為第二組，為「語文理解困難學生」，亦即語文理解為此類學生主要困難之處，共計35人；而數學算術計算測驗之T分數小於等於50分，且語文測驗T分數大於50分的學生為本研究中的第三組，為「數學計算困難學生」，亦即此類學生的主要困難為數學算術計算，但在語文理解上卻相對地較無困難，共計26人；最後，將數學算術計算測驗與語文測驗之T分數皆小於等於50分的學生，設為第四組，為「數學計算及語文理解同時發生困難的學生」，亦即在兩方面皆產生了困難，此組學生共計68人。

下表3－1－2為四組學生的分類結構，而表3－1－3則說明四組學生在兩種測驗上的得分情況。

表3－1－2：四組學生的分類結構

計算能力 / 語文理解能力		數學算術計算	
		無困難	困難
語文理解	無困難	第一組 (M>50，R>50)	第三組 (M≤50，R>50)
	困難	第二組 (M>50，R≤50)	第四組 (M≤50，R≤50)

註：M-在數學算術計算測驗的T分數；R-在語文測驗的T分數

表 3－1－3：各組學生在兩項測驗的 T 分數摘要

組別	男 女	人數	數學算術計算測驗(T 分數)		語文測驗(T 分數)	
			分數範圍	平均數	分數範圍	平均數
一	39 35	74	50.15～75.08	59.32	50.41～72.42	58.73
二	21 14	35	50.15～64.40	54.32	31.28～49.46	42.90
三	12 14	26	32.34～48.37	43.71	50.41～69.55	56.89
四	31 37	68	26.99～48.37	40.40	23.63～49.46	41.52

以上四組學生，再施以兩種文字問題，施測結果將在第四章中呈現。

第二節 研究架構與設計

本研究依據相關文獻與研究目的，發展出研究架構如下圖3－2－1所示。其中，背景變項為學生的語文理解能力與數學算術能力；依變項為傳統文字問題與故事文字問題中的得分、解題歷程與錯誤類型；自變項為四個組別的各種組合所形成的合作解題。本研究探討(四)個部分，第(一)部分，探討背景變項在依變項上的差異情形；第(二)部分，探討背景變項與兩個依變項之間的相關情形(如虛線部分)；第(三)部分，探討自變項在依變項上的差異情形。第(四)部分則探討背景變項分別對二個依變項的預測力。

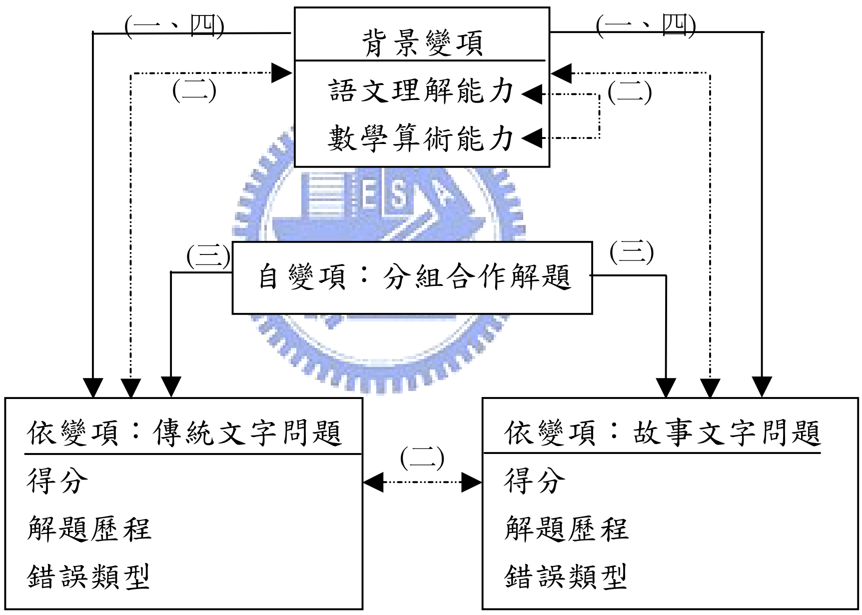


圖3－2－1：研究架構圖

依據本研究之架構，本研究採用測驗、學生自評與觀察等研究方法。首先，在測驗的部份，包括「語文測驗」、「數學算術計算測驗」、「傳統文字問題」、「故事文字問題」等四種，前兩者屬於常模參照測驗，後兩者為研究者自編測驗。接以抽樣學生自評其解題歷程，並探討其錯誤類型；最後，觀察學生合作解題，並

評鑑成果。其中，在觀察時研究者不參與解題的情境，也不給予提示或協助，屬於「非參與觀察」(nonparticipant observation)，但觀察者在觀察的開始與過程中，會給予學生不具引導性的問題(non-directional question)，讓學生能以放聲思考的方式，表達出自己的解題過程。

在抽樣方面，考慮到研究者的時間與能力，無法隨機選取，因此採用立意抽樣的方式，選取新竹市一所國民中學二年級學生。下圖 3－2－2 為本研究之研究設計圖，詳細的研究流程於下節中說明。

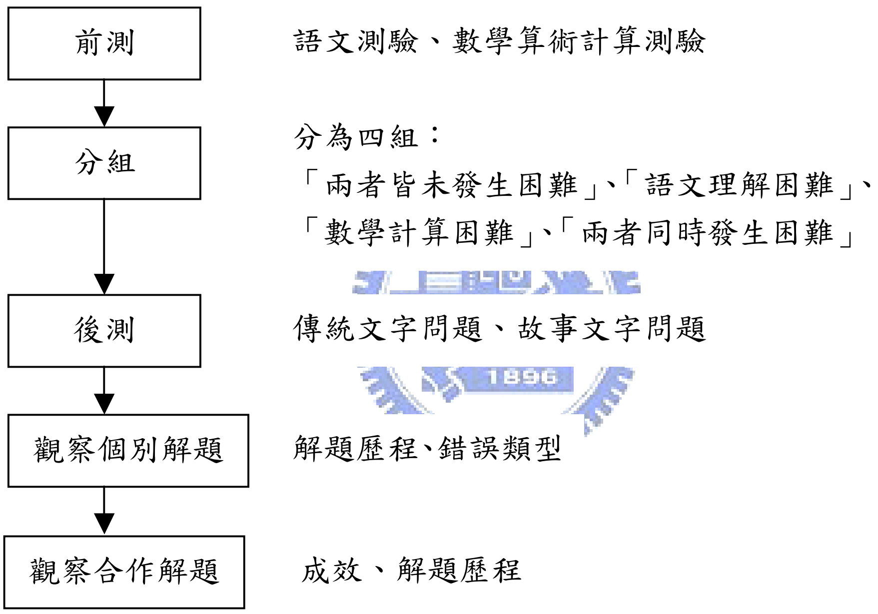


圖 3－2－2：研究設計圖

第三節 研究流程

本研究之流程如圖 3－3－1 所示。

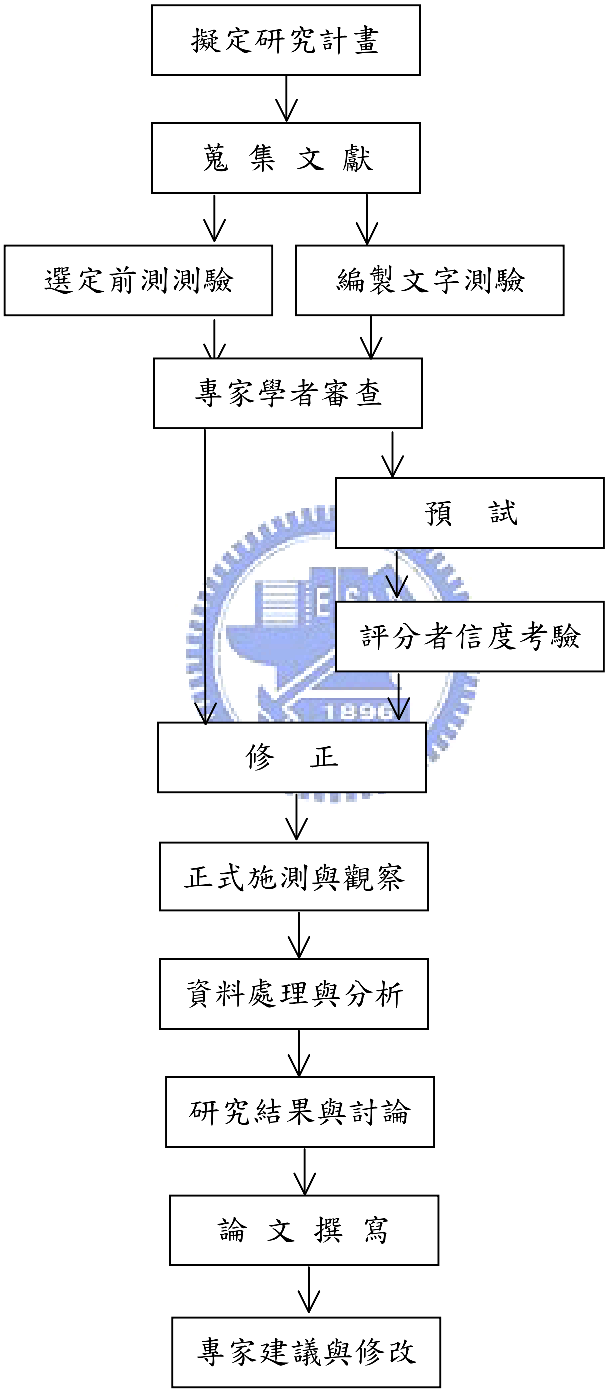


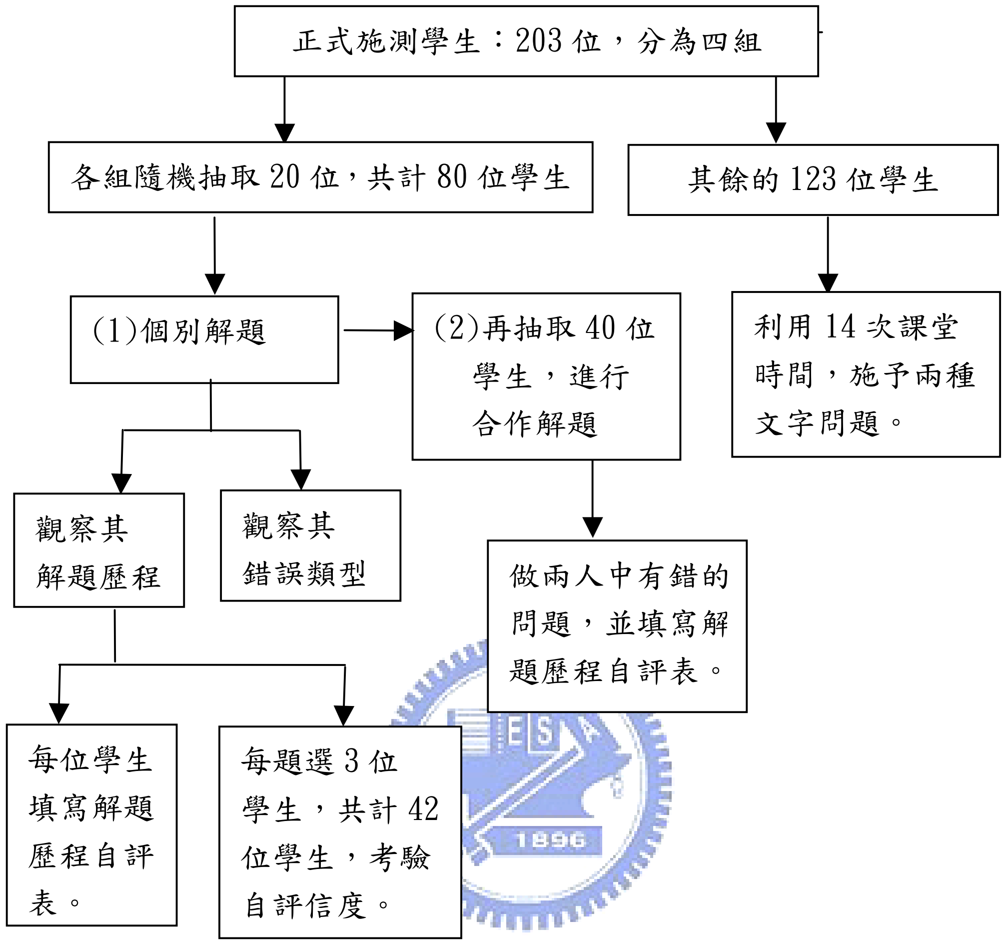
圖 3－3－1：研究流程圖

在正式施測與觀察部份，本研究首先對抽樣的學生(為 6 個班級，共 203 位國二學生)，施予「語文測驗」、與「數學算術計算測驗」，並將所得到的原始分數轉換成 T 分數，以了解學生在此團體中的相對地位，俾利於如前文第一節中所提的分組方式。

將 203 位學生分成四種類型學生之後，再由各組中隨機選取 20 人，合計 80 人，作為個別及合作之觀察對象。對其餘分散在 6 個班級中的 123 位(203－80＝123)學生，則施以「傳統文字問題」與「故事文字問題」，合計 14 個測驗問題，每班各 14 次課堂時間施測，每題的作答時間約莫為 20 分鐘，學生可以提早繳卷。

對選取的 80 位學生，則利用升旗時間、聯課活動時間、班級自習課時間、及課後時間，徵得學生本人及其導師同意，同樣施予兩種文字問題，作答時間大約為 20 分鐘，觀察其個別解題過程、記錄其過程中的錯誤類型，且在每題每次施測後，給予填寫「解題歷程自評表」。在此 80 位學生中，隨機選取 42 位學生，由研究者判斷其當次的解題歷程所達到的階段，以作為解題歷程自評之信度考驗(有關內容可再參閱本章第五節中，四、解題歷程評鑑方式)。全部施測完畢之後，在此 80 位學生中，隨機刪去第一組 5 人、第二組 10 人、第三組 10 人、第四組 15 人，使得第一組剩 15 人、第二、三組剩 10 人、第四組剩 5 人，共剩下 40 人，形成四種配對組合，共 20 小組。接著利用上述可利用時間，同樣徵得學生本人及其導師同意，再以兩人一組方式，合作解決兩人中有做錯的文字問題。每一組在進行合作解題時，研究者僅簡單介紹進行的方式，不說明問題內容、不回答與解題可能有關的問題，並且不限制時間，直到兩人皆同意結束為止，接著立刻發下解題歷程自評表，請兩人各自填寫。過程中使用錄音的方式，研究者則在一旁文本記錄兩人的肢體動作或其他可能重要的解題訊息。下圖 3－3－2 即為此正式施測的流程圖。

上述所得到的資料，其處理與分析方式，可見下文第五節中說明。


正式施測學生：203位，分為四組
各組隨機抽取20位，共計80位學生
其餘的123位學生
(1)個別解題
(2)再抽取40位學生，進行合作解題
利用14次課堂時間，施予兩種文字問題。
觀察其解題歷程
觀察其錯誤類型
做兩人中有錯的問題，並填寫解題歷程自評表。
每位學生填寫解題歷程自評表。
每題選3位學生，共計42位學生，考驗自評信度。

3－3－2：正式施測流程圖

第四節 研究工具

本研究中所使用的研究工具包括「語文測驗」、「數學算術計算測驗」、「傳統文字問題」、「故事文字問題」及「解題歷程自評表」等五種。前兩者為「國民中學智力測驗」之分測驗，第三、四者為自編測驗，最後者為學生自評用表格。

壹、「語文測驗」與「數學算術計算測驗」

本研究使用「語文測驗」與「數學算術計算測驗」做為分組依據，其源自「國民中學智力測驗」之分測驗。此智力測驗為常模參照測驗，故在項目分析及信效度的考驗方面，有別於一般心理測驗及標準參照測驗。另外，因常模參照測驗的主要目的在於指出受試者在某一群體的相對地位，因此常將原始分數轉為相對地位量數，以利比較。故本研究依公式：T=10z＋50(z 為標準分數；引自林清山，1992，p. 114)將原始分數較換為 T 分數。以下分別就測驗內容、項目分析、信度、效度等過程加以說明。

一、測驗內容

上述兩種測驗為「國民中學智力測驗」(路君約、盧欽銘，民 80)之分測驗，該編者認為智力理論雖然有許多不同的論點，但與「在學校學各種工作」最有關係的因素，乃語文與數學兩項，所以用在學校的智力測驗，其內容總以這兩個因素為主(Anastasi, A., 1976，引自路君約、盧欽銘，民 80)。基於此觀點，本測驗包括兩部分，一為語文部分，包括兩個分測驗為語文類推及語文歸納；二為數學部分，也包括兩個分測驗為算術計算及算術推理。在語文類推測驗範例部份，例如：疲勞和休息的關係，好像饑餓和什麼的關係？(1)困苦(2)食物(3)荒年(4)口渴；在語文歸納測驗範例部份，例如：長江、黃河、珠江、遼河，(1)河流(2)海洋(3)水源(4)溝渠；在數學計算測驗範例部份，例如：847×7＝？

(1)5685(2)5945(3)6115(4)7245(5)以上答案都不對。

本研究在語文的部分，採用兩項分測驗，分別為38題、38題，共計76題；在數學部分，因算術推理題目即為文字問題，故僅採用計算分測驗，為36題。

二、項目分析

本測驗之項目分析考驗，包括難度分析及鑑別度分析兩種。難度方面，以通過百分比P表示，其中P＝$\frac{R}{N}$，N為全體受試者人數，R為答對該題的人數。在語文類推測驗、語文歸納測驗、算術計算測驗，分別得到P＝.57、.71、.85，顯示類推測驗的區別力較另兩者為高、計算測驗中的各個試題的功能較為一致。鑑別度方面，以題目總分相關r檢驗之，採用點二系列相關求得，在類推測驗、歸納測驗、計算測驗，分別得到r＝.25、.26、.32。顯示語文測驗的題目總分相關較低。對於以上結果，本測驗認為這是因為試題之間的交互相關作用較低，亦即試題間的同質性不高的原因所致，並不能因此刪除那些鑑別度低的題目，使題目更為同質，損害到題目的效度。

三、信度分析

本測驗之編製者以整份測驗(含四種分測驗)之重測信度(前後相距二週)考驗信度(如下表3－4－1所示)，得到重測信度介於.83至.94之間，顯示其有優良測驗之特性。

表3－4－1：重測信度結果

樣本年級	人數	穩定系數
一	76	.89**
二	92	.83**
三	85	.94**

**p＜.01

四、效度分析

本測驗之編製者以整份測驗(含四種分測驗)與其他智力測驗之相關考驗作為效度分析，亦即為效標關效度分析。本測驗與普通分類測驗、比西量表第四次修訂本均達顯著相關，其結果如下表3－4－2、3－4－3所示。

表3－4－2：國民中學智力測驗與普通分類測驗之相關

		國民中學智力測驗		普通分類測驗		
樣本年級	人數	平均數	標準差	平均數	標準差	相關係數
一	80	79.00	11.97	88.15	12.66	.71**
二	100	95.00	13.60	100.04	14.07	.80**
三	96	98.88	17.84	102.27	15.23	.78**

**p＜.01

表3－4－3：國民中學智力測驗與比西量表測驗之相關

	國民中學智力測驗	比西量表	相關係數
人數	59	59	
平均數	84.44	113.31	.85**
標準差	28.81	25.13	

**p＜.01

貳、「傳統文字問題」、「故事文字問題」

本研究自編兩種文字問題，探討學生在解題的過程中所遇到的困難。其中「傳統文字問題」即為學校數學中的文字題，常稱為應用問題，其問題的情境不一定符合真實生活，且敘述較為簡短，僅包含解題所需的訊息。「故事文字問題」在一般學校數學中較不常見，問題的情境可能較符合真實生活，且敘述較為綿長，包含的訊息也不一定與解題相關。以下就文字測驗之內容架構、專家內容效度加以說明。

一、內容架構

本研究參考九年一貫數學學習領域暫行綱要與八年級數學能力指標，編製有關算術、代數、與邏輯的文字問題，共計 45 題。各層面所包括的內容及題數如下所示。

1、算術：包括最大公因數與最小公倍數、分數與整數的四則運算、近似值與實際值等內容；其中傳統文字題有 14 題、故事文字題有 9 題。

2、代數：一元一次方程式，包括速度問題、折扣問題、年齡問題、求整數解等內容；其中傳統文字題有 11 題、故事文字題有 5 題。

3、邏輯：數形問題；其中傳統文字題有 4 題、故事文字題有 2 題。

二、專家內容效度

為確定兩種文字測驗之適當性，將初稿編製內容延請三位國中數學老師，就每一試題，勾選難易程度與適合程度，給予指正並提供修正意見。其中難易程度分為 5 等，分別為：1-很簡單；2-簡單；3-普通；4-困難；5-很困難。適合程度分為 3 等，分別為：1-不適合；2-普通；3-適合。表 3－4－4 是三位國中數學老師的基本資料。

表 3－4－4：三位教師之基本資料

專家	性別	年資	學歷
1	男	15	國立台灣師範大學數學系
2	女	7	國立清華大學數學研究所
3	女	5	國立台灣師範大學數學系

依專家給予的意見，認為適用於樣本的邏輯文字問題，皆為數形問題，可能與學生之空間幾何概念有關，將使本研究中的變數增加，不符合研究之旨趣，因此本研究將邏輯方面的數形問題全部刪除。在難易程度方面，只要有一位專家勾選「很簡單」或「很困難」的題目，即予以刪除。而適合程度上，只要有一位專家勾選「不適合」的題目，便加以刪除。接以，剩下的題目中，將重複的主題刪除。

最後剩下的兩種文字題，各有 10 題，其平均的難易程度各為 3.05 與 3.23，平均的適合度各為 2.60 與 2.70，顯示三位專家教師認為這些問題頗為「適合」學生練習，且因難度對於學生而言，大致上是「普通」的。兩種文字測驗的內容、題號、難易程度、適合程度，如下表 3—4—5 所示，試題內容如附錄一、二所示。

表 3—4—5：兩種正式測驗之內容、題號、難易程度與適合程度

層面	內容	傳統題 題號	故事題 題號
算術	數的四則運算	1，2，4，5	1，2，3，6
	近似值與實際值	6，7	5，7
代數	速度	3	4
	一元一次方程式	8	10
	折扣問題	9	8
	求整數解	10	9
	合計題數	10	10
	難易程度 Mean	3.05	3.23
	適合程度 Mean	2.60	2.70

參、解題歷程自評表

一、內容架構

本研究在前文第二章第一節中，綜合各學者對解題歷程的看法(如表 2—1—3 所示)後，認為解題歷程應可分為五個階段，因此訂定出自評表，共包含九個問題：第一個階段為第 1、2、3 題，第二個階段為第 4、5 題，第三個階段第 6 題，第四個階段為第 7、8 題，第 5 個階段為第 9 題。

二、專家內容效度

為確認此自評表之適切性，將初稿編製內容延請二位國中數學教師 ，就每一個問題，給予指正並提供修正意見，藉以了解此自評表是否符合本研究問題，及各個問題是否適合在該階段之下。

依二位教師之意見，其中第6題的內容，可能會因為學生自認為所列最出的式子不一定正確而勾選否定答案，所以將內容修正為:「我有試著列出式子(不一定正確也沒關係)，想解決這個題目。」另外，二位教師認為應增加一個問題，以了解學生在第五個階段所做的判斷結果，故增加第10個問題，尋問學生判斷之結果。本自評表共計10個問題，其題號、所配合的解題歷程階段，如下表3－4－6所示，詳細內容如附錄4所示。

表3－4－6：解題歷程自評表之題號與配合的解題階段

階段	題號
一、「理解題意」	1、2、3
二、「尋求模式」	4、5
三、「擬定辦法」	6
四、「執行方法」	7、8
五、「判斷」，	9、10

第五節 資料處理與分析

本研究將資料蒐集後，分別予以不同的處理，再進行統計之分析。以下先說明本研究中，有關各個資料的評分處理方式，接以說明統計分析方式。

壹、資料處理方式

一、語文測驗分數

將每位學生的語文測驗分數轉換為T分數,以瞭解學生在團體中的相對地位。

二、數學算術計算分數

將每位學生的數學算術計算分數，轉換為T分數，以瞭解學生在團體中的相對地位。

三、文字題評分模式

本研究參考前文第二章第一節所定的評量表(表2－1－7)，訂定出較詳細的評量指標與範例，如附錄三所示。但為求評分結果的一致性與穩定性，因此在預試後，需考驗評分者信度，以確定不同的評分者對於相同的作答內容能給予一致性的評分。所採取的步驟如下：

1、研究者先隨機抽取預試學生98位中，10位學生的兩種文字問題作答卷，與另一名評分者(以下第二位評分者簡稱)同時評分，作為練習之用，以訂定出較為詳細的評量表。

2、研究者隨機選取98位學生中，10位學生的兩種文字問題作答卷，做為評分者信度考驗的樣本。

3、研究者與第二位評分者背景介紹：兩位皆為國立大學數學系畢業。研究者(第

一位評分者)與第二位評分者現皆為國中數學教師，對於國中學生在數學上的錯誤，均有一定的認識，故可為本研究可靠的評分者。

4、 評分者信度的計算方式：$\dfrac{2Y}{X_1+X_2}$

X_1＝100：每位學生有 10 個分數，故第一位評分者給予 10 個學生共 100 個分數。

X_2＝100：每位學生有 10 個分數，故第二位評分者給予 10 個學生共 100 個分數。

Y：兩位評分者在 10 位學生共 100 題中，給予相同分數的總題數。

5、 結果：兩位評分者在 100 個傳統文字問題上，給予相同分數的有 88 個；在 100 個故事文字問題上，給予相同分數的有 83 個。由評分者信度公式計算後得知在文字題的評分上，評分者信度為.88、.83。因而可知本研究具有不錯的可信賴度，故在正式施測時僅採用第一位評分者(即為研究者)的評分。

四、解題歷程評鑑方式

本研究欲探究學生之解題歷程，其評鑑方式以自評為主，學生每做完一個問題，即發給一自評表(內容如附錄四所示)，勾選符合自已的解題歷程情況。

本研究由正式施測之 203 位學生中，抽取 80 位學生(各組均為 20 位)，以學生自評及抽樣觀察方式，先探討各組學生個人解題歷程，再從這 80 位學生中，抽取 40 位學生，二人一組配對合作解題。在合作解題之後，再次以自評方式，以探討對其解題歷程是否有所增益。

本研究計算學生每一題的解題歷程階段，每個學生會有 14 個以 0 ~ 5 的數字表示其解題階段，其中傳統文字問題有 10 個，故事文字問題有 4 個，各取其平均數。本研究不以過於量化分析的方式，考驗各組之得分是否有所差異，因為達到平均 5 的解題者，未必順利將問題解決，有可能只是得到了中介的答案，而

順利解決問題者，則可能是循環多次才得到最後答案。本研究著重於分析合作解題後，個人的解題歷程得分是否較未合作解題之前高。本研究在施測後須考驗自評者之信度，以確定學生的自評與研究者的觀察具一致性。所採取的步驟如下：

1、研究者將自評表的選項編碼，即以學生勾選了某些選項來區分學生所達到的解題階段，接著再針對五個階段，擬定出鑑評指標。(如附錄五所示)

2、每位學生共做 14 個問題(傳統文字題 10 題，故事文字題 4 大題)，因此共有 1120 次(80╳14=1120)自評結果。

3、研究者由 80 位學生中，每題每次隨機選取 3 位學生，做為信度考驗的樣本。觀察這 42 位(3╳14=42)學生的解題過程，並配合其作答內容，給予評鑑。(抽樣學生之編號及其解題歷程之質化描述，於第四章第四節中詳述。)

4、評分者信度的計算方式：$\dfrac{2Y}{X_1 + X_2}$

X_1＝42：每位學生有 1 個自評結果對應等級，故合計有 42 個分數。

X_2＝42：研究者給每位學生 1 個等級，故共給予 42 個分數。

Y：42 個分數中，相同分數的總題數。

５、結果：在４2 個解題歷程階段的評鑑分數上，給予相同分數的有 33 個。由評分者信度公式計算後得知評分者信度為.79，因而可知本研究具有不錯的可信賴度，故本研究以學生自評方式評估其解題歷程階段。

五、錯誤類型分類方式

本研究欲探究各組學生之解題錯誤類型，由上述之 80 位學生，抽樣 42 位，除觀察其解題歷程，並合併觀察其解題過程中所犯的錯誤類型，而其餘的 38 位學生，則由其紙本中所呈現的內容，判斷其錯誤類型，若無法由其紙本內容判斷，則於試後，請該生解釋他所寫的內容(非同步放聲思考)，以利區別。分類原則及步驟如下：

1、參考前文(第二章第二節，表 2－2－4)將錯誤之類型分為兩類並編碼，其內

容見附錄六。

2、在觀察的過程中，研究者以不具引導性的問題(範例如下)，探究學生的錯誤類型。

「請問你的班級、姓名與座號」

「這裡有一些數學應用問題，請試著做做看。別擔心，你不會受到任何壓力，請你一邊做題，一邊盡量說出你的想法」

「你能試著說明你剛才所寫的內容嗎？」(如果學生停止了解題行為)

「你似乎暫停下來了，你正在想什麼嗎？能不能說說看」

「你要不要再試試看？」

3、編碼的單位以每位學生在該題的解題過程中，所顯露出的錯誤類型為主，只要出現一種錯誤類型即登錄一次，所以每一題可能不止發生一種錯誤；沒有任何操作(即一片空白)的題目另外登錄。

4、若研究者無法判斷該錯誤為何種類型，則尋求專家學者意見，將之歸類，並增設於附錄六之內容。

貳、資料分析方式

在資料的分析上，本研究採取量化統計分析與質化的描述。

一、量化統計分析，包括：

1、基本統計(Frequency distribution)

以次數、百分比、平均數、標準差、分數範圍等基本統計，來描述學生在各測驗的情況，包括錯誤類型等，作為進一步資料分析的基礎。

2、 相依 t 考驗 (t-test)

(1)分析各組學生在兩種文字題得分的差異。

(2)分析各組學生在兩種文字題上，個人解題與合作解題得分之差異。

3、單因子變異數分析 (one-way ANOVA)

(1)分析不同背景能力學生在兩種文字問題上的得分是否具有差異。

(2)分析不同組合方式的學生，合作解兩種文字問題的得分是否具有差異。

4、相關分析 (Correlation analysis)

以皮爾森積差相關係數(Pearson product-moment correlation)來檢驗學生之語文理解能力、數學算術能力、以及在兩種文字問題上的得分之相關情形。

5、多元迴歸分析 (Multiple regression)

利用逐步分析法檢視學生的語文理解能力、數學算術能力對兩種文字問題的得分之影響。

6、卡方考驗 (Chi-square test)

(1)以適合度、同質性考驗各組學生、所有學生在兩種文字問題的解題歷程階段的分佈是否有所差異。

(2)以獨立性考驗各組學生之「解題歷程階段」與「得分」是否互相獨立。

(3)以改變的顯著性考驗各組學生在兩種文字題上，個人解題與合作解題之解題歷程階段改變的顯著性。

二、在質化的描述上，包括：

1、描述受觀察的學生與合作解題的學生，其在兩種文字問題上的解題歷程。

2、描述抽樣觀察的學生之錯誤類型內容。

第四章 研究結果與討論

本章根據研究問題而呈現測驗結果與內容分析，並就統計分析和質性描述資料而進行討論。本章內容分為八節，架構如下圖 4－1－1 所示。以下所述之學生是指本研究之樣本。

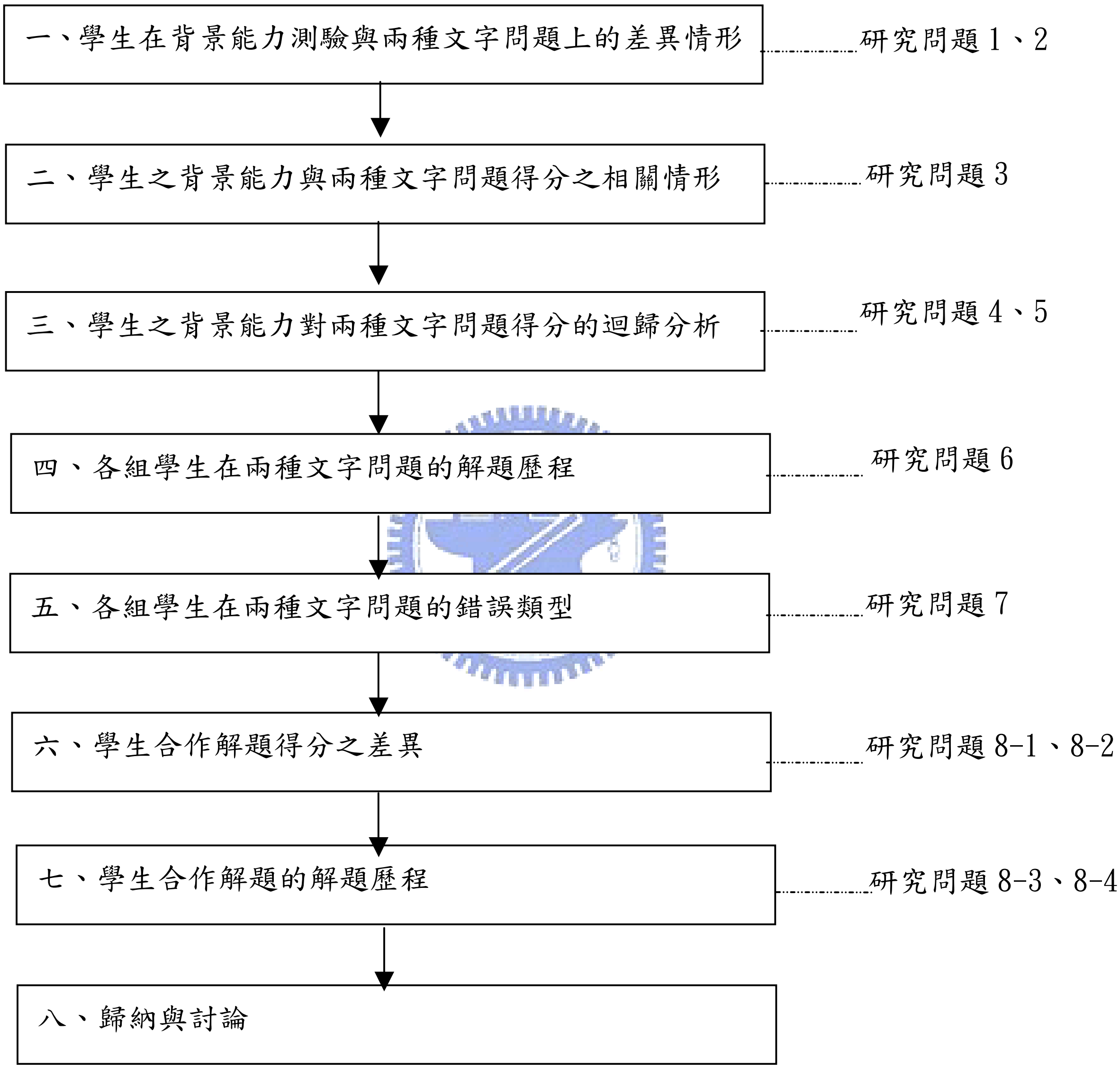


圖 4－1－1：第四章內容之架構圖

第一節 學生在背景能力測驗與兩種文字問題上的差異情形

本節探討本研究的研究問題一:「學生在傳統文字問題中的得分，是否有所差異？」及研究問題二:「學生在故事文字問題中的得分，是否有所差異？」本節包括二個部份，第一個部分是學生在兩種文字問題得分的基本描述統計；第二個部份是學生在背景能力測驗與兩種文字問題上的差異分析。

壹、學生在兩種文字問題得分的基本描述統計

下表 4－1－1 為 203 位學生及其分組之後，在「傳統文字題」與「故事文字題」得分之摘要。由表中可看出，在傳統文字問題方面，除了第一組有滿分的情況、第二組有接近滿分的學生，其餘兩組的分數範圍及平均數都較第一組來得低。在故事文字問題方面，除了第三組，另外三組均有出現 0 分的情況。而第一組學生在故事題之標準差較大，是因為有非常少數完全不願意寫，導致得分的差距變大。另外，由下表 4－1－2 可看出，各組學生在故事文字問題的表現，較在傳統文字問題上的表現來得差，均達顯著差異，其中以第二組學生的差異最大，平均差異達到 21.8 分。

表 4－1－1：所有學生在兩種文字問題上的得分之摘要表

組別	人數	傳統文字問題			故事文字問題		
		分數範圍	平均數	標準差	分數範圍	平均數	標準差
一	74	20 ~ 50	39.82	6.48	0 ~ 49	30.65	11.04
二	35	20 ~ 46	34.31	7.05	0 ~ 24	12.51	6.57
三	26	9 ~ 36	23.31	5.43	1 ~ 34	14.04	9.56
四	68	1 ~ 30	12.85	6.76	0 ~13	3.31	3.69
合計	203	1 ~ 50	27.72	13.43	0 ~ 49	16.24	14.23

註：兩種文字問題的滿分都是 50 分

表 4－1－2：學生在兩種文字問題上的得分之相依 t 考驗結果

傳統題－故事題	平均數	成對變數差異 標準差	平均數的標準誤	t 值
第一組（N=74）	9.18	9.18	1.14	8.049***
第二組（N=35）	21.80	6.33	1.07	20.365***
第三組（N=26）	9.27	10.30	2.02	4.590***
第四組（N=68）	9.54	6.09	.74	12.918***
合計（N=203）	11.49	9.45	.66	17.327***

***p＜.001

貳、學生在背景能力測驗與兩種文字問題上的差異分析

以下採用單因子變異數分析，探討各組學生分別在兩項背景能力測驗與兩種文字問題得分的差異情形。其中，兩項背景能力測驗包括語文測驗與數學算術計算測驗；因為其屬於常模參照測驗，目的在於指出受試者間的相對地位，故將原始得分轉換為 T 分數；而兩種文字問題則為傳統文字問題與故事文字問題，得分為原始分數，滿分為 50 分。

在進行各測驗之單因子變異數分析之前，先分別進行變異數同質性檢定，結果兩種背景能力測驗及傳統文字問題皆符合同質性假設，但故事文字問題不符合合，因此在故事文字問題的差異性考驗上，採用校正公式來計算 F 值。以下為各組學生在四項測驗上的差異分析，如下表 4－1－3 所示。

由表 4－1－3 可知，不同組別在四種測驗表現之差異情形，皆有顯著性的差異存在($F=184.45$, $F=134.35$, $F=216.50$, $F=133.80$, $p<.001$)，經 Scheffé 法事後比較，在數學算術計算測驗方面，結果發現第一組學生優於第二、三、四組學生、第二組學生優於第三、四組學生、第三組學生優於第四組學生。同質子集顯示四組學生可分為四群：第一組、第二組、第三組、第四組。由於一開始的分組方式是把高算術能力(T 分數大於 50 分)的學生歸類為第一、二組，把低算

術能力(T分數小於等於50分)的學生歸類為第三、四組，因此，此結果雖與預試的結果不完全相同，但也高低有序，尚可令人接受。

表4－1－3：各組學生在各測驗之差異摘要表

	組別	人數	平均數	標準差	F值	p值	Scheffé
數學算術計算測驗	1	74	59.32	5.58	184.45	.000	1＞2＞3＞4
	2	35	54.32	4.07			
	3	26	43.71	4.54			
	4	68	40.40	5.46			
語文測驗	1	74	58.73	5.45	134.35	.000	1，3＞2，4
	2	35	42.90	4.86			
	3	26	56.89	5.77			
	4	68	41.52	6.55			
傳統文字問題	1	74	39.82	6.48	216.50	.000	1＞2＞3＞4
	2	35	34.31	7.05			
	3	26	23.31	5.43			
	4	68	12.85	6.76			
故事文字問題	1	74	30.65	11.04	133.80	.000	1＞2，3＞4
	2	35	12.51	6.57			
	3	26	14.04	9.56			
	4	68	3.31	3.69			

*** p＜.001

在語文測驗方面，結果發現第一組和第三組學生的語文理解能力優於其他二組學生。同質子集顯示四組學生可分為二群：第一組和第三組、第二組和第四組。表示第一組和第三組學生具有相類似的高語文理解能力，第二組和第四組學生有相似的低語文理解能力。此結果與分組方法有關，完全符合期望。

在傳統文字問題方面，結果發現第一組學生優於第二、三、四組學生、第二組學生優於第三、四組學生、第三組學生優於第四組學生。同質子集顯示四組學生可分為四群：第一組、第二組、第三組、第四組。表示第一組有高得分情況，而其他組依序遞減，而第四組學生則有最低的得分情況。此結果與數學算術測驗

結果完全相同，推測可能的原因如前文(第二章)所提到，傳統的學校數學文字問題已去情境化，刻意刪除了與解題無關的訊息，故強調的是計算能力。但仍需做進一步的分析(下文第三節之第一部分)，以支持此推測。

在故事文字問題方面，結果發現第一組學生的故事文字問題表現優於其他三組學生，而第二組和第三組學生優於第四組學生。同質子集顯示四組學生可分為三群：第一組、第二和第三組、第四組。表示第一組有最高的得分情形，第二組和第三組學生無顯著差異，第四組學生依然為低得分情況。此結果若與前面三項測驗結果相互對照，或許可有一些推論。其中，第二組與第三組學生在故事文字問題的表現上無顯著差異，可能是因為第二組學生雖有較好的算術運算能力，但較之於第三組學生而言，較無法理解題意，或無法辨別有用訊息而無從下手；而第三組學生則反之，雖較之能明白問題文意，但較弱的算術能力，使其仍不能對故事文字問題做出完整的處理。對這兩組學生在故事文字問題的表現，仍需後續的分析，以及評鑑其解題歷程階段，以更能了解他們之間的差異。

第二節 學生之背景能力與兩種文字問題得分之相關情形

本節探討本研究之研究問題三:「學生的計算能力、語文理解能力、傳統文字題問題得分、與故事文字問題得分，是否具有相關？」本節以皮爾森積差相關分析，探討 203 位學生其兩種背景能力測驗得分與兩種文字問題得分的相關程度，結果如表 4－2－1 所示。

表 4－2－1：203 位學生兩種背景能力測驗與兩種文字問題之相關係數矩陣

	數學算術計算測驗	語文測驗	傳統文字問題	故事文字問題
數學算術計算測驗	—			
語文測驗	.52**	—		
傳統文字問題	.80**	.57**	—	
故事文字問題	.68**	.66**	.77**	—

**. 在顯著水準為 0.01 時(雙尾)，相關顯著。

由上表 4－2－1 可知，203 位學生所接受之各個測驗之得分，皆具有顯著的正相關，相關係數(r)介於.52~.80 之間，其中以「數學算術計算測驗」的得分，和「傳統文字問題」的得分具有高度的正相關（r=.80, p<. 01），與上一節的結果能夠相呼應。

第三節 學生之背景能力對兩種文字問題得分的迴歸分析

本節延續上面二節的研究結果，接續探討本研究之研究問題四：「學生的計算能力、語文理解能力對傳統文字問題得分的預測力如何？」及問題五：「學生的計算能力、語文理解能力對故事文字問題得分的預測力如何？」因此本節分為二個部分，皆是以多元迴歸之逐步分析法來了解學生之背景能力對兩種文字問題得分的預測力。

壹、「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「傳統文字問題」的迴歸分析

此部分以「語文測驗」得分與「數學算術計算測驗」得分為預測變項，以「傳統文字問題」得分為依變項，採用多元迴歸分析之逐步分析法探討變項間的影響情形，結果如表4－3－1所示。

表4－3－1：「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「傳統文字問題」之多元迴歸分析摘要表（N＝203）

	未標準化係數 B之估計值	未標準化係數 標準誤	標準化迴歸係數β	t值
逐步分析法：模式1—數學算術計算測驗				
常數	-4.555	1.814		-2.511***
1、算術	1.908	.102	.798	18.744***
模式1：R^2＝.636；adj. R^2＝.634；F＝351.38***				
逐步分析法：模式2—再加入語文測驗				
常數	-10.803	2.199		-4.912***
1、算術	1.640	.113	.685	14.476***
2、語文	.280	.061	.218	4.599***
模式2：R^2＝.671；adj. R^2＝.668；R^2改變量＝.035；F改變＝21.151*** F＝203.856***				

* p＜.05　**p＜.01　***p＜.001

由表 4－3－1 可看出，首先，迴歸效果達顯著水準(F＝351.38, p＝.000；F＝203.856, p＝.000)，具有統計上的意義。由表中可知，「數學算術計算測驗」在第一階段(模式 1)即被選入，「數學算術計算測驗」獨立可以解釋「傳統文字問題」的 63.6%變異量 (F＝351.38, p＝.000)，以調整後 R^2 來表示，仍有 63.4%的解釋力。第二個被選入的預測變項是「語文測驗」，該變項單獨可解釋依變項 3.5%的變異量，F 改變量為 21.151(p＝.000)，符合被選入的標準，因此模式 2 共有「數學算術計算測驗」與「語文測驗」兩個預測變項，總計共可解釋依變項 67.1%的變異量，調整後為 66.8%。由模式 1 及模式 2，表示「數學算術計算測驗」得分與「語文測驗」得分愈高，在「傳統文字問題」得分也愈高，但以預測力來看，「數學算術計算測驗」得分是較強而有力的預測變項。

此結果能支持前文第一節中的結論之一：「學生在傳統文字問題上的表現與在數學算術計算測驗結果大致相同」。

貳、「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「故事文字問題」的迴歸分析

此部分以「語文測驗」得分與「數學算術計算測驗」得分為預測變項，以「故事文字問題」得分為依變項，採用多元迴歸分析之逐步分析法探討變項間的影響情形，結果如下表 4－3－2 所示。

由表 4－3－2 指出，首先，迴歸效果達顯著水準(F＝170.896, p＝.000；F＝146.614, p＝.000)，具有統計上的意義。由表中可知，「數學算術計算測驗」在第一階段(模式 1)即被選入，「數學算術計算測驗」獨立可以解釋「故事文字問題」的 46.0%變異量 (F＝170.896, p＝.000)，以調整後 R^2 來表示，仍有 45.7%的解釋力。第二個被選入的預測變項是「語文測驗」，該變項單獨可解釋依變項 13.5%的變異量，F 改變量為 66.577(p＝.000)，符合被選入的標準，因此模式 2 共有「數學算術計算測驗」與「語文測驗」兩個預測變項，總計共可解釋依變項 59.5%的變異量，調整後為 59.0%。由模式 1 及模式 2，表示「數學算術計算測驗」得分與「語文測驗」得分愈高，在「故事文字問題」得分也愈高，但以預測力來

看，「數學算術計算測驗」得分較有預測力。

表 4－3－2：「語文測驗」與「數學算術計算測驗」對「故事文字問題」之多元迴歸分析摘要表(N＝203)

	未標準化係數		標準化迴歸	
	B 之估計值	標準誤	係數 β	t 值
逐步分析法：模式 1—數學算術計算測驗				
常數	-12.827	2.342		-5.477***
1、算術	1.718	.131	.678	13.073***
模式 1：R^2＝.460；adj. R^2＝.457；F＝170.896***				
逐步分析法：模式 2—再加入語文測驗				
常數	-25.827	2.342		-5.477***
1、算術	1.158	.133	.457	8.693***
2、語文	.584	.072	.429	8.159***
模式 2：R^2＝.595；adj. R^2＝.590；R^2 改變量＝.135；F 改變＝66.577*** F＝146.614***				

* p＜.05　**p＜.01　***p＜.001

若將此結果與上個部份相比較，發現「數學算術計算測驗」與「語文測驗」兩個預測變項合計對「故事文字問題」之預測力不若對「傳統文字問題」來得高(adj. R^2＝.590；adj. R^2＝.668)，顯示仍有其他重要因素能影響「故事文字問題」的表現。而兩個變項中，「數學算術計算測驗」雖然對兩種文字問題都具有較強勢的預測力，但在故事文字問題中，已略有降低的現象(adj. R^2＝.634；adj. R^2＝.457)；另一個變項為「語文測驗」，其在故事文字問題中的預測力，則有些微的提昇(adj. R^2＝.035；adj. R^2＝.135)。相對於前文(本章第二節)，本分析結果大致上只能說明全部學生在「故事文字問題」的表現，主要受到「數學算術計算」能力的影響，但卻不是如「數學算術計算測驗」的分佈結果，形成兩個群組，而是形成三個群組。其中第二組學生的分數下降地非常嚴重，與第三組學生已無顯著差異，可見第二組在處理這類故事文字問題時，發生了一些困難，值得再深入的加以探討。

第四節 各組學生在兩種文字問題的解題歷程

本節承續上述量的研究結果，認為有必要探討學生的解題歷程階段，以便明白學生在解決兩種文字問題時，實際上所發生的困難。本節探討研究問題六：「經由抽樣，以學生自評的方式，探討各組學生在兩種文字問題中的解題歷程」，並分為二個部份，第一個部份是各組學生解題歷程階段自評分數的基本統計描述，兼以卡方之獨立性考驗各組學生之解題歷程階段與得分之間的關聯；第二部份則是質的例證，提出研究者觀察學生解題過程中的一些描述，以了解被抽樣學生在解題中的實際情況。

壹、學生解題歷程階段自評分數的基本描述

本研究自全部學生 203 人中，各組隨機抽樣 20 人，合計 80 人，以自評方式了解其解題過程。最後的資料處理採用次數、百分比、平均數、卡方適合度及同質性考驗的統計資料，以了解各組學生自評解題階段的分佈情形，結果如下表 4－4－1 和表 4－4－2 所示。其中，傳統題與文字題各有 10 題，所以每位學生各有 10 個自評分數，因此「總次數」＝人數×10、「百分比」＝ 每個階段的次數÷總次數、「平均階段」＝每個階段與該階段次數乘積之總和÷總次數。

由表 4－4－1 可看出，被抽樣的 80 位學生，適合度考驗 $\chi^2_{.95,(5)}=652.59$，p＜.001，顯示所有學生在各個解題階段的次數百分比是有所差異的；80 位學生自評其在傳統文字問題中的解題歷程多能達到第 4 階段，次數比例為 47.6%，明顯地較其它階段來得多，平均階段達到 3.3。而各組之同質性考驗 $\chi^2_{.95,(15)}=211.55$，p＜.001，顯示各組學生自評的解題歷程不具同質性、有所差異。

對第一組學生而言，適合度考驗 $\chi^2_{.95,(4)}=340.80$，p＜.001，顯示該組學生在各解題階段的次數百分比是有所差異的，在 200 次的自評分數中，有高達 137 次(68.5%)是勾選了第 4 階段，有 53 次(26.5%)選了第 5 個階段，沒有人在任一題中自評解題歷程為 0，平均階段達到 4.2，表示第一組學生認為自己在傳統文字題目中，都能順利執行解題計劃，但較少有回顧、判斷最後答案的解題行為。

表 4－4－1：「傳統文字問題」的解題歷程階段自評分數之卡方考驗

組別	人數	總次數		階段 0	1	2	3	4	5	平均階段	卡方適合度考驗
一	20	200	次數	0	1	7	2	137	53	4.2	$\chi^2_{.95,(4)}$=340.80***
			百分比	.0%	.5%	3.5%	1%	68.5%	26.5%		
二	20	200	次數	8	6	30	9	119	28	3.5	$\chi^2_{.95,(5)}$=280.78***
			百分比	4.0%	3.0%	15.0%	4.5%	59.5%	14.0%		
三	20	200	次數	14	7	45	17	77	40	3.3	$\chi^2_{.95,(5)}$=102.64***
			百分比	7.0%	3.5%	22.5%	8.5%	38.5%	20.0%		
四	20	200	次數	42	16	67	6	48	21	2.3	$\chi^2_{.95,(5)}$=78.70***
			百分比	21.0%	8.0%	33.5%	3.0%	24.0%	10.5%		
合計	80	800	次數	64	30	149	34	381	142	3.3	$\chi^2_{.95,(5)}$=652.59***
			百分比	8.0%	3.8%	18.6%	4.3%	47.6%	17.8%		
卡方同質性考驗：$\chi^2_{.95,(15)}$=211.55***											

***p＜.001

第二組學生之適合度考驗$\chi^2_{.95,(5)}$=280.78，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比，亦是有所差異的；其和第一組學生相同，在大部份題目中，都能順利執行解題計劃(59.5%)，其中有些許學生認為自己在解題中會停在尋求模式階段(15.0%)，但也有些許學生認為自己在一些題目中能到檢視最後答案的階段(14.0%)，平均階段達到 3.5。

第三組學生之適合度考驗$\chi^2_{.95,(5)}$=102.64，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比，亦是有所差異的；其和前兩組學生相同，在許多題目中能達到第 4 階段，但比例上已經減少了(為 38.5%)，相對且有趣的，勾選階段 2 和階段 5 的次數比例增加了(22.5%、20.0%)，其平均階段達到 3.3。

第四組學生之適合度考驗$\chi^2_{.95,(5)}$=78.70，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比，亦是有所差異的，大部分學生勾選第 2 階段(33.5%)，也就是處於探索、評估狀態，此階段的比例是四組學生中最多的，而第 4、5 階段的次數百分比例是四組學生中最少的，且在自評的 200 次分數中，有 42 次(21.0%)是處於 0 階段的，也就是完全沒有解題行為，而其平均階段只有 2.3。

由表 4－4－2 可看出，被抽樣的 80 位學生，適合度考驗$\chi^2_{.95,(5)}$=296.79，p＜.001，顯示所有學生在各個解題階段的次數百分比，是有所差異的；80 位學生自評其在故事文字問題中的解題歷程多達到 0 階段、第 2 階段、及第 4 階段，次數百分比例分別為 30.4%、23.0%及 25.8%，平均階段達到 2.2，相較於傳統文字問題，顯示這 80 位學生自評解題階段降低，這類型的文字問題對他們而言較為困難，無法完整地解決。而各組之同質性考驗$\chi^2_{.95,(15)}$=349.78，p＜.001，表示各組學生自評的解題歷程不具同質性、有所差異。

表 4－4－2：「故事文字問題」的解題歷程階段自評分數之卡方考驗

組別	人數	總次數		階段 0	階段 1	階段 2	階段 3	階段 4	階段 5	平均階段	卡方適合度考驗
一	20	200	次數	8	0	25	5	130	32	3.7	$\chi^2_{.95,(4)}$=265.95***
			百分比	4.0%	.0%	12.5%	2.5%	65.0%	16.0%		
二	20	200	次數	68	18	55	7	38	14	1.9	$\chi^2_{.95,(5)}$=89.86***
			百分比	34.0%	9.0%	27.5%	3.5%	19.0%	7.0%		
三	20	200	次數	62	8	54	17	32	27	2.1	$\chi^2_{.95,(5)}$=65.98***
			百分比	31.0%	4.0%	27.0%	8.5%	16.0%	13.5%		
四	20	200	次數	105	33	52	1	6	3	.9	$\chi^2_{.95,(5)}$=245.92***
			百分比	52.5%	16.5%	26.0%	.5%	3.0%	1.5%		
合計	80	800	次數	243	59	186	30	206	76	2.2	$\chi^2_{.95,(5)}$=296.79***
			百分比	30.4%	7.4%	23.0%	3.8%	25.8%	9.5%		
											卡方同質性考驗：$\chi^2_{.95,(15)}$=349.78***

***p＜.001

對第一組學生而言，適合度考驗$\chi^2_{.95,(4)}$=265.95，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比有所差異，在 200 次的自評分數中，有高達 130 次(65.0%)勾選第 4 階段，與傳統文字問題(137 次)差異不大；有 32 次(16.0%)勾選第 5 個階段，較傳統文字問題(53 次)少，值得注意的是，有 25 次(12.5%)勾選階段 2，有 8 次(4.0%)自評解題歷程為 0，平均階段降低為 3.7，顯示第一組學生在此類題目中，仍能順利執行解題計劃，只有少部份問題令他們完全無法理

解，而沒有人勾選第 1 階段，是因為只要達到理解階段，他們會緊接著去尋求符合的數學基模，不會停止在理解程度。

第二組學生之適合度考驗 $\chi^2_{.95,(5)}$=89.86，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比，亦是有所差異的，其和第一組學生的分數分佈已不相同，有許多次解題歷程為 0 階段(34.0%)，有些許學生認為自己在解題中會有停在尋求模式階段(27.5%)，而認為自己有達到執行解題計劃、檢視最後答案的階段只有 38 次、14 次(19.0%、7.0%)，平均階段也降低至 3.5。顯示對第二組學生來說，故事文字問題對他們來說，真可算是棘手的問題，超過半數的問題令他們無法理解、或者處於探索模式階段。

第三組學生之適合度考驗 $\chi^2_{.95,(5)}$=65.98，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比，亦是有所差異的。這組學生有許多次解題歷程為 0 階段(31.0%)，有些許學生認為自己在解題中會有停滯在第 2 階段(27.0%)，而認為自己有達到執行解題計劃、檢視最後答案的階段亦只有 32 次、27 次(16.0%、13.5%)，平均階段為 2.1。我們發現此組學生與第二組學生的情況類似，但有趣的是，他們在第 5 個階段的次數較第二組學生提高了。

第四組學生之適合度考驗 $\chi^2_{.95,(5)}$=245.92，p＜.001，顯示該組學生在各個解題階段的次數百分比亦有所差異。有高達 105 次(52.5%)處於 0 階段，有些許達到第 1、2 階段(16.5%、26.0%)，意即此組學生在故事文字問題中，大部份是處於無法理解至模式尋求階段。沒有任何解題進展的情況是四組中最嚴重的，而第 2 階段的比例則和其他三組差不多。而其平均階段只有.9，是四組中最低的。

最後，本研究以卡方之獨立性考驗方法，檢測學生在兩種文字問題之解題歷程階段與得分的關係，其中所使用的公式(引自林清山，1992，p.289,294)，及 5×5 交叉表結果，皆於附錄十四中。在傳統題與故事題中，我們得到 χ^2 值分別為 106.07、110.45，達顯著差異；列聯相關 C 皆為.76。顯示「解題歷程階段」與「得分」並非互為獨立，二者之間有相關存在，「解題歷程階段」愈高，「得分」也愈高。

貳、學生解題歷程階段的質化描述

本研究自抽樣的 80 位學生中，每次每題抽取 3 位學生(合計 42 位)觀察其解題歷程，以獲得自評者之信度(見前文第三章第五節)。下表統整此 42 位學生的解題歷程觀察，其中「編號」是指被觀察學生的編號，英文字母 T 後第一個數字指該生的組別，第二個數字或字母指該生被觀察的題目。

表 4－4－3：對 42 位學生之解題歷程觀察統整

組別	編號	被觀察的題目	讀題速度	重讀	圈重點或劃線	停滯時間	解題流暢度	回題檢驗算式	有錯誤	放棄解題	自評解題歷程
一	T11	傳 1	○			-	○				4
	T13	傳 3	○	∨		--	△	∨			5
	T14	傳 4	○			-	○				4
	T15	傳 5	○			-	○				4
	T17	傳 7	○	∨	∨	---	△	∨	∨		5
	T18	傳 8	○			-	○				4
	T19	傳 9	○			-	○				4
	T1A	故 A	△	∨	∨	---	╳			∨	3
	T1C	故 C	╳	∨	∨	---	△				4
	T1D	故 D	○	∨	∨	--	△				4
二	T21	傳 1	○		∨	-	○				4
	T22	傳 2	○			-	○		∨		4
	T24	傳 4	○			-	○	∨			4
	T25	傳 5	○	∨		--	△		∨		4
	T26	傳 6	○		∨	-	○				4
	T28	傳 8	○		∨	-	○				4
	T29	傳 9	○		∨	-	○				4
	T20	傳 10	○		∨	-	○				4
	T2A	故 A	△	∨	∨	---	△		∨		4
	T2B	故 B	○			---	╳		∨	∨	2
	T2D	故 D	○	∨	∨	---	△		∨	∨	4

各符號代表意義：讀題速度　○：快(不斷句)。△：適度。╳：慢(讀讀停停)。

停滯時間 -：短(幾乎讀完即進行解題)。--：適度。---：久(讀完超過一分鐘才進行解題)。

解題流暢度 ○：好(歷程間轉換良好)。△：尚可。╳：不佳(歷程間轉換慢，每一階段停留時間皆長)。

表 4－4－3：對 42 位學生之解題歷程觀察統整（續）

組別	編號	被觀察的題目	讀題速度	重讀	圈重點或劃線	停滯時間	解題流暢度	回題檢驗算式	有錯誤	放棄解題	自評解題歷程
三	T31	傳 1	△	∨		--	△	∨	∨		3
	T32	傳 2	△	∨	∨	--	△	∨			4
	T35	傳 5	△	∨		---	╳	∨	∨		4
	T36	傳 6	○		∨	-	○				4
	T37	傳 7	╳	∨	∨	---	╳	∨			0
	T38	傳 8	△	∨		--	╳		∨		3
	T39	傳 9	△	∨	∨	--	○		∨		4
	T30	傳 10	△	∨		--	○				4
	T3A	故 A	╳	∨	∨	---	△	∨	∨		5
	T3B	故 B	╳	∨		---	╳		∨	∨	0
	T3C	故 C	╳	∨		---	△	∨	∨		3
四	T42	傳 2	○	∨		--	△		∨		3
	T43	傳 3	○			-	╳			∨	0
	T44	傳 4	○			--	△		∨		4
	T46	傳 6	○			-	○		∨		4
	T47	傳 7	○			--	╳		∨		2
	T48	傳 8	○			--	△		∨		4
	T40	傳 10	○			--	△		∨		4
	T4B	故 B	○			-	╳			∨	0
	T4C	故 C	△	∨		---	△		∨		4
	T4D	故 D	○			-	╳			∨	0

各符號代表意義：讀題速度　○：快(不斷句)。△：適度。╳：慢(讀讀停停)。

停滯時間 -：短(幾乎讀完即進行解題)。--：適度。---：久(讀完超過一分鐘才進行解題)。

解題流暢度 ○：好(歷程間轉換良好)。△：尚可。╳：不佳(歷程間轉換慢，每一階段停留時間皆長)。

一、對第一組學生的觀察

第一組學生在解傳統文字題時，非常流暢，幾乎是直接由文字轉換為數學算式，考慮時間很短，立即寫出正確的解法，甚至在自評解題歷程時，他們認為自己沒有經歷第 2 個階段，當研究者對他們自評結果有疑問時，他們回答：「*不用想，就直接寫*」。如果遇到步驟較少的問題，則會出現一些跳躍式的計算，顯示他們

對這類問題的模式已非常熟悉，有部份計算在心智中完成(例如 T11 在第 1 題直接寫出 $\frac{35}{4}\times\frac{4}{3}$ 代替 $8\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}$ 、T18 在第 8 題中合併一些移項的步驟、T19 在第 9 題中直接將 594÷0.6 換算成 $594\times\frac{5}{3}$)。如果是多步驟的問題，他們亦會有耐心地完成一連串的運算，以得到答案(例如 T13、T15、T17。其中 T15 在第 5 題中各方案下方先進行仔細的運算，並且為因應 C 方案，再回頭將每個方案用 6 瓶的價錢來比較：A 方案 20×0.75＝15，15×6＝90，6 瓶 90 元；B 方案 20×2＝40，3 瓶 40 元，6 瓶 80 元；C 方案買 5 瓶送 1 瓶，6 瓶 100 元)。在較為困難的問題中，他會確認所完成的運算所代表的意義，再進行下一個運算(例如 T13 在第 3 題中的每個算式後加註其意義：$24-16\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$，3 小時燒 $7\frac{1}{2}$ cm；$7\frac{1}{2}\div3=\frac{5}{2}$， 每小時燒 $\frac{5}{2}$ 公分…)。很少有回顧計算過程及檢查最後答案的行為，「應該會對吧!」是被研究者詢問時所常見的回答，只有在較無把握的問題，他們才會回頭去檢驗每個算式是否符合題意(例如 T13 算出蠟燭每小時燃燒 $\frac{5}{2}$ 公分後，會檢驗題目，以確認接下來是用 24 還是用 $16\frac{1}{2}$ 除以 $\frac{5}{2}$；而 T17 則在算出標準體重加上 10%和 11%，亦即 57＋5.7＝62.7 公斤和 57＋6.27＝63.27 公斤後，一再回顧題目中有關「過重」的敘述，猶豫該選哪一個)，在這個部份，研究者特地把第一組中，所有被抽樣的 20 位學生的自評分數再核閱一次，發現只有 2 位學生是在每一個問題中都會檢驗、判斷自己最後的答案，其他 18 位學生則不一定每一題驗算自己的答案。

而他們做故事文字問題時，明顯的讀題較慢，會標示出重要句字(圈出關鍵字或數字、畫底線等)(T1A、T1C、T1D)，並且一再地重讀(re-read)這些重要的句子(在傳統題中則很少重讀題目)。甚至一開始不先看題目敘述，先看最底下的各個題目內容，然後再回頭去區分出故事中的每個段落是否有用、而且在該段落旁標示出是適用於哪一個問題(T1C)。他們陷入思考的時間明顯較傳統題久，花較多的時間在統整有用的訊息、找出數據間的關係，不斷地核對過去所學得的解

題模式，以便著手列式運算。有時探索解法的時間太久，他也會放棄再思考下去，沒有興趣再投入(例如 T1A 不理解題目中有關 3 天與其它分數之間的關聯，無法列出合理的式子，遂放棄解題)。

二、對第二組學生的觀察

第二組學生做傳統文字問題時，和第一組學生一樣讀題快、很少重讀。他們會把數字部份圈起來，很快列出算式，並執行計算(T21、T26、T28、T29、T20)。但有時會不注意到問題中的關鍵問句，而導致最後結果錯誤(例如 T22 忽略題目中「則媽媽留下多少枝冰棒？」，少了將 18 減去 10 的步驟，以 10 枝為最後答案)；或是不明白問題中的某個條件的實際意義，而無法寫出正確解法(例如 T25，不明白題目中「C 案為容量增加 20%」的意思，便在 A 和 B 中選一個作為最後答案)。

而他們面對故事文字問題時，表現出不願意做題目的情緒(T2B)，顯示其對冗長文字敘述的不耐與沒有信心。他們讀題目時仍然快速，但不易找出對應的關鍵句字，幾乎將每個數據都圈起來。陷入思索變數的有用性與關連性、及試著找出解題路徑(path)的時間太長，常使他們心智疲乏，也打擊自己的信心，最後通常以放棄解題收場(或許也是一種維護自尊的方式)(例如 T2B 在第 5 題一片空白、T2D 在第 10 題沒有具體算式)。有時他們嘗試將題目中的數字去「拼湊」成一些算式，接著埋頭苦算，但算出的結果可能是除不盡的無窮小數或是分數，明顯不符合題目中的要求，多次嘗試之後，只好故意忽略題目中的條件，而以真實生活經驗來回答問題，以擺脫想不出解法的壓力(例如 T2A，首先寫出 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{9}$，得到 $\frac{71}{18}$，接著他寫出 $\frac{71}{18}X=60$，$X=15.211\cdots$，他知道這個答案不符合題意，但仍看不出題目中各個分數的關連性，索性以「設一個月有 30 天」為解決方式，以「$30\times2=60$ 天」及「$60\times\frac{1}{2}=30$ 天」作為第 1、2 題的答案)。

大體上來說，第二組學生過於重視題目中的數字，而忽略數字間的關係。傳統文字問題中的組成元素較少，且每個數字都是有用的，因此對第二組學生較

為有利；而故事文字問題中的組成元素複雜，數字太多，使學生無法判斷該選擇哪些數字合成一個算式，這樣故事般的敘述，太多的前後文承接關係，也使他們工作記憶庫的負荷過重，常常讀了後面忘了前面，因此對第二組學生較為不利。

三、對第三組學生的觀察

第三組學生讀題的速度較慢，探索題意、分析訊息有用性的時間較長(相較於第二組)，很少讀完問題敘述之後，直接轉換成算式，通常會再讀，確定關鍵(數)字後，再著手開始解題計劃。另外，一方面因為他們對自己的運算結果沒有信心，一方面他們想確定自己能緊扣問題的核心，所以常在解題的過程中回頭去核對中介答案與題意的關係(T31、T32、T35、T3C)，有時也會去驗算自己最後的答案(T35、T37、T3A)，這或許與前面結果中(p.74 與 p.76)，第三組學生勾選階段 5 的次數比例較第二組學生多有所呼應。

在傳統文字問題中，數字及數字間的關係較單純，所以他們花在第 1、2 階段的時間不會太長(和故事題相比)，歷程間的轉換較為順暢(T36、T39、T30)。有時他們會試著口語化、轉化題意，以確定自己理解問題、找到了學習經驗中相似的模組(例如 T32，看到問題敘述「…每枝冰棒可裝入$\frac{1}{3}$碗的綠豆湯…」後，接著喃喃說出：「那…1 碗綠豆湯可以變成幾枝冰棒…」)。一旦確定後，接著他們會開始試著從較為基本的運算開始，但是算術部份是他們較為薄弱的一環，所以他們可能會在選擇運算子後，檢驗計算結果是否符合題意(例如 T32，承續上述：「…用乘的…不是，用除的…3 枝…」他一開始將 $1\times\frac{1}{3}$，發現不對，接著改成 $1\div\frac{1}{3}$，認為結果 3 枝是符合題意的)。雖然花的時間較多，但在傳統文字問題中，他們大部份能達到執行計算的階段，只有一些學生是因為對特殊的數學計算過程不熟悉(例如，T38 不會解二元一次聯立方程式、T31 不會做分數的四則運算)，所以導致他們只能停留在第三階段。

在故事文字題方面，他們讀題更慢，花很多時間在分辨訊息的可用性及探

索訊息之間的關係，反覆推敲這些數字和待答問題之間的關聯，若順利建構出解題架構，則著手列出算式(但不一定算得出來)(例如 T3C 不太理解第 6 題該如何運算，第 7 題產生了四則運算錯誤，第 8 題則不是真的了解百分比的意義)。在冗長的故事敘述中，他們頗能耐心閱讀題目，也明白故事中每個組成元素間的先後順序(例如 T3A 看完題目後，也學著題目敘述的口氣，說:「我也被弄得昏頭轉向了。」並且笑了出來，接著問研究者:「來回四天有沒有算在出國內？」而 T3C 則是看完題目後說:「真的有”麵包碗”嗎？好好玩哦!老師你吃過嗎？」)但如何將這些元素對應到數學解題，要花較多的時間，所以他們有時就放棄解題了，也因此他們自評解題歷程為 0，他不認為自己理解這個數學問題(例如 T3B 不會解第 5 題)。一旦解決路徑的輪廓舖設好了，未必能順利計算出結果。他們的解題策略不多，大部份是列方程式，接著才是圖示表徵，但是有許多學生不會解方程式(與第四組學生相同)，或是圖畫完了，還是不知道如何轉換成算式(例如 T38，列出正確的聯立方程式，但他不會解)。特別的是，這組的學生中，有部份學生列不出方程式，但他們會使用「嘗試錯誤」的方法，達到問題的要求，也因此這類學生都自評歷程為第 5 階段(例如 T3A，他無法列出方程式，即使列出，也是錯的，也算不出來，於是他和上述第二組學生 T2A 相同，使用真實生活經驗 60 天作為假設的答案，但不同的是，他代回原來題目驗算，發現不符合，於是他又假設答案是 61 天、62 天、63 天，分別代入都不合，他突發奇想地說:「會不會是低於 60 天？…應該是 3 和 9 的倍數…96…54…54 天…」，代回計算，一切符合，於是他得到了正確答案 54 天)。

四、對第四組學生的觀察

第四組學生，如想像中，是四組中表現最差的。他們解題的意願較低，也缺乏耐心和信心，是非常需要幫助的一群。

在傳統文字問題上，讀題速度快，很少重讀，讀完第一次幾乎就決定他要不要繼續做下去。如果題目沒有直接引導解題者解題方法，他便決定不進行解

題，就說：「看不懂，我不會…」，接著交出白卷，自評解題歷程為 0(T43)，這樣的學生，我們很難看得出他的困難徵結點在哪裡，或許過去太多的打擊使他不願接受看起來可能很難的挑戰。如果題目尚且容易(亦即容易理解)，加上學生還有一點耐心，他便會認真地思考該題的解題架構，也會試著進行一連串「多但不困難」的計算，如果在過程中產生錯誤(通常如此!)，只要這個錯誤不會干擾他進行下一步驟，他也樂於進行下去(例如 T44，他在每一格的下方寫出實際的錢數，有幾個寫錯了，但他還是把這些錢數加總，得到最後答案)。這樣的學生通常不會回頭檢查自己的答案，他們覺得很愉快，自己解決了一個問題(T44、T48、T40)。有時候他們理解問題的某個部份，通常是因為這個部份是平舖直述解題的相關方法，他們便會將這個基本的運算寫出來(不一定寫對)，但仍無法進入解題的核心，結果還是放棄繼續解題，自評解題歷程為 2，因為他們認為自己有試著找出過去經驗中相對應的模式，只是這個模式太模糊，想不出來(例如 T47，他看到題目中「若女警的標準體重為：身高減去 70 再乘以 0.6。…若一女警身高 165 公分…」後，他寫出 $165-(70\times0.6)=165-4.2=160.8$，接著再也想不出任何算式，也沒有寫出最後答案)。他們的解題行為幾乎就只是一些最初步的簡單四則運算，沒有系統性的解題策略，也不太會列出方程式，亦很少圖示表徵。

在故事題方面，只讀幾行文字，就交白卷的情況更加嚴重，面對研究者的關心，常回答：「不想看」、「看下去一定看不懂」，與對傳統題的回答是不同的，顯示這樣的故事敘述並沒有引發他們的好奇與解題興趣。只有非常少部份的學生，能夠耐心地讀完題目一次，接著針對其中他會的問題(因為故事題中一大題中會有 2~3 個問題)，寫出他的解法，拼湊出一些式子(如同上述第二組學生)，但是結果常常算錯(例如 T4C，他在第 7 題中寫出 $85\times15=975$，$975\times\frac{1}{3}=325$；在第 8 題中寫 $5\times\frac{8}{10}=4$，顯示他並不是真的了解題意，也不明白百分比的意義)，他們自評解題歷程為 4。

第五節 各組學生在兩種文字問題的錯誤類型

本節探討研究問題七:「經由抽樣,探討各組學生在兩種文字問題上的錯誤類型」,如前文(第三章第五節)所述,將每組 20 位學生,每位學生各 10 題,合計每組 200 題的錯誤類型加以分類,並一再地修正、增錄錯誤類型類目內容於附錄六。以下是各組學生在文字問題上錯誤類型分類統計的說明,而質的例證則於附錄七、八,最後還有整體性的比較及彙整。

壹、各組學生在傳統文字問題上錯誤類型分析

本研究將學生答題分為三類:「全對的題目」、「有文字書寫但錯誤的題目」,以及「一片空白的題目」,並且合計後兩項為「錯誤的題數」。本研究針對「有文字書寫但錯誤的題目」,歸納其錯誤類型,次數統計結果如下表 4—5—1 所示,其中,學生發生錯誤的題目可能包含數種錯誤類型,因此「錯誤次數總計」可能略大於「有書寫但錯誤的題數」。

由下表 4—5—1 可看出,即使第三組學生在「有文字書寫但錯誤」的題數高於第四組,但第四組學生非常明顯較其他組別有許多題目是一片空白,顯示第四組學生出現較多放棄解題的現象。在「有文字書寫但錯誤」的題目上,四組學生的錯誤大都是發生在操作錯誤中的概念錯誤,亦即無法順利將題目轉譯成式子。而第一、第三組學生在「不適當的習慣」方面,其佔錯誤總次數的比例較另兩組為高,顯示這兩組學生有較多的不適當解題習慣,但也可能是這兩組學生較積極於解題,因此易於顯現出這些直覺反應,另兩組(尤其是第四組)學生也許只是沒有表現出來而已。以下說明各組學生的各種錯誤內容。

在「四則運算錯誤」的次數上,由學生所寫的內容看來,第一、二組學生的錯誤較為分散,是一般整數的四則運算錯誤,看得出來是一時疏忽所造成(例如,附錄七第 3 題的錯解 1,第 8 題的錯解 1)。而第三、四組的錯誤除了少部份如同第一、二組學生是疏忽所造成,大部份集中在分數的除法(例如,附錄七第

1 題的錯解 1)。

在「運算子選擇錯誤」方面，第三組的次數最多，顯示對乘法、除法的基本概念不夠熟悉，各組的錯誤都集中在第 2 題和第 9 題，只是次數的多寡不同(例如，附錄七第 2 題的錯解 1，第 9 題的錯解 1)。

表 4－5－1：各組學生在傳統文字問題的錯誤類型次數統計

類型	內容	各組的次數統計				
		一	二	三	四	合計
一、操作錯誤	1、四則運算錯誤	10	10	20	20	60
	2、概念錯誤：					
	(1)運算子選擇錯誤	3	9	18	10	40
	(2)無法將變項順利轉譯成代數式子	45	46	62	53	206
	(3)程序性錯誤：移項錯誤	1	3	9	1	14
	(概念錯誤合計)	(49)	(58)	(89)	(64)	(260)
	3、忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟	0	5	1	2	8
	4、將題目中的數字拼湊出一些式子	0	5	1	8	11
	5、非關答案的操作：所寫的運算完全無法回答問題或與問題無關	0	3	3	10	19
	(操作錯誤合計)	(59)	(81)	(114)	(104)	(358)
二、不適當的習慣	1、忽略沒有數字的重要句子	5	6	12	4	27
	2、直覺性的反應：					
	(1)改變題目的限制(四捨五入、估計…等)	7	4	8	6	25
	(2)以關鍵字作答，套入以前學過的公式	1	0	1	0	2
	(3)以生活經驗回答，即使與問題明顯不符合	0	1	6	4	11
	(不適當的習慣合計)	(13)	(11)	(27)	(14)	(65)
	錯誤次數 總計	72	92	141	118	423
	有書寫但錯誤的題數	66	74	123	104	367
	一片空白的題數	0	18	15	70	103
	錯誤題數合計	66	92	138	174	470
	全對的題數	134	108	62	26	330

合計題數	200	200	200	200	800

各組組內最多的錯誤次數都是「無法將變項順利轉譯成代數式子」。在這個項目中，又可再分成七個子項目，各組在這七個項目中的次數如下表 4－5－2 所示。在「a. 對餘數的概念錯誤」方面，指的是第 1 題中，各組學生常將「$8\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$」中所得到的 $\frac{2}{3}$ 當成剩餘的公升數，或者他們以「35÷3＝11…2」代替上述式子，接著以 2 當成是剩餘的公升數，顯示學生對除法中餘數的概念不夠清楚。而第三組在「b. 不了解百分比的意義」的次數最多。在觀察學生解第 5、第 7 題的過程中，有些學生直言「百分比的題目，我不會算」，於是他們會在第 5 題中的 A 和 B 方案中，選一個當作最後的答案；有些是寫一些似是而非的式子(例如，附錄七第五題的錯解 2，是由第三組的一位學生寫的)，顯示其不明白百分比的內涵意義。在「c. 不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法」的部份，學生不了解第 7 題中「不含」兩字的意義，索性從 9%、11%、19%算起；也有些學生是不知道該如何使用不等式的符號表示他的答案，於是只好使用「~」代替，例如，附錄七第 7 題的錯解 4、5、6，這三位學生都沒有在最後的答案中寫出單位，顯示出他們在決定答案型式的過程中非常倉促。

表 4－5－2：各組學生在「無法順利轉譯成代數式子」的次數統計(傳統文字題)

內　　容	各組的次數統計				
	一	二	三	四	合計
a. 對餘數的概念錯誤	9	9	8	5	31
b. 不了解百分比的意義	7	12	17	11	47
c. 不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法	13	8	3	9	33
d. 不了解折扣的意義	1	0	0	1	2
e. 對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤	4	4	3	1	12
f. 列出與正確式子相似的算式	11	13	25	15	64
g. 有第一個重要步驟，但無法再繼續下去	0	0	6	11	17

合計	45	46	62	53	206

「d.不了解折扣的意義」，主要是發生在第 9 題。「e. 對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤」指的是學生得到一個正確的中介答案，但自己卻混淆了這個答案的意義，導致下一步驟錯誤。這樣的錯誤通常發生在需要多步驟的問題，可能顯示學生的工作記憶狀態十分忙碌，導致前後式子的不協調，例如附錄七第 3 題的錯解 2，為第一組學生所寫的內容，他將$6\frac{3}{5}$誤以為是全部的燃燒時間，而導致下一步減 3 的錯誤；錯解 3 為第二組學生所寫，他忽略了$\frac{16}{5}$是以每 3 個小時為燃燒單位的計算結果，而沒有乘以 3 倍，直接以之為答案。「f. 列出與正確式子相似的算式」在概念錯誤一項中的比例很高。這項錯誤常是因為忽略變項之間的關係或條件，導致列出不完全正確的式子。例如附錄七中第 3、4、8 題：第 3 題的錯解 4 是第四組學生所寫，他除了忽略題目中的已知條件「剩下$16\frac{1}{2}$公分」中的「剩下」兩個字，他也不清楚自己算出來的$\frac{11}{2}$所代表的意義。第 4 題的錯解 1 也是第四組學生所寫，顯示學生不了解題目中正負記號的意義。第 8 題中的錯解 2 和 3 都沒有寫出 x 和 y 所代表的意義，它們分別是第二組和第三組學生所寫，顯示他們兩位都不是真的了解學生票價和全票票價的關係。在「g.有第一個重要步驟，但無法再繼續下去」的部份，則是受了題目引導，寫出了第一個重要的式子，但是因為不了解題目的意思，或是某些數學名詞，所以無法再繼續做下去，例如第 3、第 7 題中除了第一個步驟外，就不再做下去。

在程序性錯誤方面，指的是解方程式時發生的移項錯誤，第三組的學生這個項目的次數是較多的，通常發生在第 8 題。附錄七第 8 題的錯解 5，是以第一組學生為例，該生對這種題目非常熟悉，所以省略了假設(試後請該生補說明 x 所代表的意義，他表示 x 代表的是一張全票的價錢)、也省略了列出第一個式子，只寫出初步運算後的結果，但這個結果和題目相抵觸(每張學生票比每張全票便

宜 20 元)，而根據過去的學習經驗，該生認為此題無解。第三組學生雖然不像第一組學生一樣能迅速寫出心算結果，但這兩組學生在這裡所犯的錯誤，根本上是相同的。在這裡我們可以推測得出該例中學生所省略的第一個重要式子應該是：$2(X-20)+3X=110$，並且他所發生的錯誤在於腦海中的初步運算，亦即產生了移項錯誤。

在「忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟」方面通常是發生於敘述較長或是較為複雜的題目，在故事問題中較常發生，有一點「差之毫釐，失之千里」的意味存在。在傳統問題這個部份，只發生於第 6 題(附錄七，第 6 題的錯解 1、2)，且第二組的次數較多，顯示第二組學生對於問題敘述中的要求較為忽略。

有些學生會將題目中的數字，拼湊成奇怪的式子，顯然他們不全然理解題意，概念模糊。在表 4－5－1 可看出，以第四組學生次數稍多於其他三組，其次為第二組學生。由附錄七第 3、第 8、第 9 題的錯解 6、7、錯解 6、錯解 4 可看出第四組學生的解題操作非常混亂，不知所云。附錄七第 8 題的錯解 7 是第二組學生所寫，他原本用嘗試錯誤的方法，試著找出答案，但又前後矛盾，且忽略了兩種票價之間的關係。而第 10 題的錯解 1 也是第二組學生所寫，題目中的敘述不知為何讓他將「求正整數解」的隱喻聯想到「質因數分解」，顯然他不是真的理解求正整數解在文字問題上的應用。

「非關答案的操作」指所寫的運算完全無法回答問題或與問題無關，內部充滿著不一致性，由上表 4－5－1 可看出，依然是第四組學生的次數較多。該組學生在解題時，常常不夠專注，容易分心，很難進入解題的核心，所寫的不一定和問題相關，也不一定和最後答案相同，彷彿所寫的和所想的是分開的。(範例可見附錄七第 6 題的錯解 3、第 10 題的錯解 3、4、5。)

以上的錯解類型屬於操作上的錯誤，在不適當的解題習慣上，包括「忽略沒有數字的重要句子」以及「直覺性反應」。在「忽略沒有數字的重要句子」方面，指學生在繁複的計算之後，常忽略了重要的條件敘述或問句，導致答案錯誤。

這項錯誤類型和上述「忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟」的差異，主要在於這項錯誤中，學生忽略的是沒有數字引導的文字敘述，而非明確的數字操作指示。這項錯誤發生於第 2、第 3 題中，學生可能會忽略最後一個問句「則媽媽留下多少枝冰棒？」和「全部燒完『還』需多少小時？」在第 10 題中，則忽略了條件：「兩種都要買」(附錄七第 2、3、10 題的錯解 2、8、6)。這種情況以第一、二、三組較為嚴重，第四組學生較少發生，可能是因為他們很少達到較高層次的解題歷程，大多還在尋求解題模式的階段。

學生產生「直覺性的反應」的可能原因之一是受到過去學習經驗所影響，將問題套入一個熟悉的解題模式內，他可能在不自覺的情況下改變了題目的限制，或是代入以前學過的公式，以便將問題順利解出。例如他們會將答案四捨五入，因為過去在學習「近似值」單元時，他們被教導要將算出來的答案四捨五入以符合最後問句的單位(例如附錄七中第 1、3 題的錯解 4、錯解 9)。又例如他們在看到像「實際值」等關鍵字眼，便會憶起以前學過的公式，不考慮當下問題的條件或單位已有所不同，而直接代入公式，快速地得到答案(例如附錄七中第 7 題的錯解 8)。

第二個可能原因是為了能順利解題，頗有「為達目的，不擇手段」的意味。這樣的學生通常是較積極於解決問題，他們不喜歡懸宕在某一個關卡的感覺，他們為了能計算出答案，使用估計的方式、甚至刻意忽略一些錯誤現象，執著於給定一個答案--像是給自己一個交待，即使他們心中也略感答案的不適宜。例如第 3 題中，第三組學生先寫出了算式：$24-16\frac{1}{2}=7.5$，接著寫出「3 小時燒 7.5 公分」、「6 小時燒 15 公分」，接著他猶豫了一會兒，最後答案寫：「約 7 小時」。研究者認為，該生在猶豫的時刻，應該是考慮到 $16\frac{1}{2}$ 減去 15 後，剩下 $1\frac{1}{2}$ 公分，他知道答案不是 6 小時，但是他也不知道 $1\frac{1}{2}$ 公分要燒多久，於是粗略估計為 7 小時。(此範例在附錄七第 3 題的錯解 10，其它範例為錯解 11、12、13，及第 8 題的錯解 8。)

最後一個可能的原因即是受了生活經驗所影響，直覺性的回應大於計算性的回答。例如學生在生活中購買飲料，是以 10 元為基礎單位，因此遇到像第 6 題的問題時，很容易因為直覺反應而將錢的單位以 10 元為計算單位。（內容可見附錄七中第 6 題的錯解 4、5。）

以上是各組學生在傳統文字問題中的錯誤類型分析，其中第一、二組學生全對的題數最多，他們的錯誤發生於一些零星的數學概念。第三組學生「有書寫但錯誤的題數」較第二組學生來得多，其主要問題可能在於數學的概念與運算能力薄弱。第四組學生的空白題數實在太多，無論是解決問題的企圖心、或解題策略與技巧，他們都是最弱勢的一組，顯然其需要有系統地教學介入。

貳、各組學生在故事文字問題上錯誤類型分析

由下表 4－5－3 可看出，即使第一、三組學生在「有文字書寫但錯誤」的題數高於第二、四組，但第四組學生「一片空白」的題目共有 155 題之多，平均每人 7.75 題，有試著解題的只有約四分之一（共 45 題），顯示第四組學生放棄解題的現象較傳統文字問題嚴重。而第二組學生交空白卷的也達到 109 題，較傳統文字問題嚴重的多，顯示這種文字問題較無法引發該組學生解題的興趣，又或許該組學生看到這麼冗長的文字敘述，便打了退堂鼓。在「有文字書寫但錯誤」的題目上，四組學生的錯誤大都是發生在操作錯誤中的概念錯誤，亦即無法順利將題目轉譯成式子。在「不適當的習慣」方面，前三組的次數相似，而第四組的次數比例較高，可能是因為故事文字題中有較多的問題與日常生活相關，使得他們都以直覺反應來回答。以下說明各組學生的各種錯誤內容。

在四則運算方面，四組學生的次數都不高，也看不出有集中在某種類型的計算錯誤上，這點與傳統題不同。

各組組內最多的錯誤次數都是「無法將變項順利轉譯成代數式子」。在這個項目中，又可再分成八個子項目，各組在這七個項目中的次數如下表 4－5－4 所示。在「a. 誤解有關時間的敘述」方面，指的是第 1、2、3 題，第一組的次數

最多。在第 1、2 題部分，學生不了解題目中的敘述：「暑假的前$\frac{1}{3}$時間」是否包含於「暑假的$\frac{1}{2}$時間」(例如附錄八第 1 題錯解 1、2)；以及「光坐飛機來回就要四天了」、「休息 3 天」兩個敘述，他們會另外再加上 4 天、3 天(例如附錄八第 1 題的錯解 4、5；第 2 題的錯解 1)；也有學生將前後文混淆，沒有考慮到現實生活中不可能一天 24 小時都在寫作業(例如附錄八第 1 題錯解 3)。在第 3 題的部分，學生會將寫作業的小時數除以天數的小時數(例如附錄八第 3 題錯解 1、2、3)，顯示他們無法真正理解問題中的敘述：「則他每天平均要花幾小時寫作

表 4－5－3：各組學生在故事文字問題的錯誤類型次數統計

類型	內容	各組的次數統計				
		一	二	三	四	合計
一、操作錯誤	1、四則運算錯誤	3	2	3	3	11
	2、概念錯誤：無法將變項順利轉譯成代數式子	45	33	48	25	151
	3、忽略(因為)題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少(多)了一個計算步驟	13	3	2	0	18
	4、將題目中的數字拼湊出一些式子	2	8	3	7	20
	5、非關答案的操作：所寫的運算完全無法回答問題或與問題無關	4	8	10	7	29
	（操作錯誤合計）	(67)	(54)	(66)	(42)	(229)
二、不適當的習慣	1、忽略沒有數字的重要句子	5	6	8	2	24
	2、直覺性的反應：					
	(1)刻意忽略一些錯誤現象	4	3	2	3	12
	(2)以關鍵字作答，套入以前學過的公式	1	0	0	0	1
	(3)以生活經驗回答，即使與問題明顯不符合	2	2	3	7	12
	（不適當的習慣合計）	(12)	(11)	(13)	(12)	(49)
	錯誤次數 總計	79	65	79	54	279
	有書寫但錯誤的題數	75	51	68	43	237
	一片空白的題數	12	109	86	155	362
	錯誤題數合計	(87)	(160)	(154)	(198)	(599)

全對的題數	113	40	46	2	201
合計題數	200	200	200	200	800

業？」之意義。學生在第 4 題，容易有「b.時間單位的換算錯誤」和「c.對時速的計算方法混淆」的問題。他們對於 15 分鐘要轉換成 1 小時感到困惑，及時速的計算公式不夠清楚—雖然問句中明確的點出時速是「每小時多少公里」。(例如附錄八第 4 題錯解 2 ~ 10。)

表 4—5—4：各組學生在「無法順利轉譯成代數式子」的次數統計(故事文字題)

內　　容	各組的次數統計				
	一	二	三	四	合計
a.誤解有關時間的敘述	14	4	3	2	22
b.時間單位的換算錯誤	1	4	2	3	9
c.對時速的計算方法混淆	0	5	6	4	13
d.不了解百分比的意義	3	5	5	2	21
e.不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法	12	4	7	5	30
f.對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤	5	1	9	1	15
g.列出與正確式子相似的算式	8	5	11	4	26
h. 有第一個重要步驟,但無法再繼續下去	2	5	5	4	15
合計	45	33	48	25	151

在「d.不了解百分比的意義」方面，學生不明白第 8 題中的敘述「另外加上 8%的購物稅」的數學意義或實質意義，他們可能將 8%與「八成」(在折扣問題中常見)混淆，或是將 8%寫成 0.8，或是將物品價格直接加上 0.08 元。(例如附錄八第 8 題中的錯解 1~3、5、6。)而第一組在「e.不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法」這個錯誤類型，如同在「a.誤解有關時間的敘述」，其次數是四組中的最多，兩者合計超過其在概念錯誤總次數的一半。這部分指的是學生不了解第 5 題中有關計程車收費的方式,尤其在「每滿 320 公尺加收 0.4 美元，不滿 320 公尺，則以 320 公尺計算」部分，他們常不清楚算出來的 22400 公尺是要加上 320 或是減去 320 公尺。而由他們的答案也可以看出，他們對實際值範圍

的表示方式也沒有把握，這個部分和傳統題中的第7題情況相似。(錯誤內容可見於附錄八第5題的錯解1~9)

在「f.對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤」的部分，第三組的次數較多，可能的原因如前一節所述，該組學生花很多時間在分辨訊息的可用性及探索訊息之間的關係。但是他們對於所嘗試的算式不一定有把握，甚而在一連串的運算下，迷惑了原來的目標與順序，混淆了中介答案所代表的意義，也可能有已經得到最終答案，但卻不明白的狀況發生(例如附錄八第2題的錯解2、第6題的錯解1)。各組在「g.列出與正確式子相似的算式」的次數頗高。而第一、三組學生次數較多，可能是這兩組學生較另兩組學生投入於解題，並無法說明這兩組學生較不明白題目中各變項中的關係。在這裡要舉的例子是第7題中，學生對於題目中的敘述:「走了15步之後，發現再$\frac{1}{3}$步就走完了」的誤解。第一、三學生犯的相同的錯誤是誤解了「再$\frac{1}{3}$步」的意義，他們將得到的1275公分直接加上$\frac{1}{3}$而得到最後的答案(附錄八第7題的錯解1)；有些第三組學生則將15「步」、85「公分」兩個單位錯置(附錄八第7題的錯解2)；而第二、四組學生則是將得到的1275公分去乘上$\frac{1}{3}$，顯然誤解題意的程度更深(附錄八第7題的錯解3、4)。

如同傳統題，學生受了題目引導，寫出了第一個重要的式子，但是無法順利鋪陳接下來的解題路徑。在「f.有第一個重要步驟，但無法再繼續下去」的部份，指的是第1題中，學生將所有關鍵的分數全部相加，但無法再進行下一個步驟；以及第3題中，學生知道所有的學習單需要120小時才能完成，但因為無法得知暑假的天數，而中斷了計算。((附錄八第1題的錯解6、第3題的錯解4。)

「忽略(因為)題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少(多)了一個計算步驟」的總次數為18次，是在傳統題中8次的兩倍多，且主要是因為第一組的次數明顯地增加。如上所述，故事題中的敘述冗長，很可能使學生疏忽了一環節而少了一個步驟，也可能造成訊息太多而誤用，以致多了一個步驟。例如第7題中，學生計算完「走了15步」所代表的意義之後(85×15＝1275)，可能疏忽了

「發現再$\frac{1}{3}$步就走完了」這句話，而沒有將 85 乘以$\frac{1}{3}$，再加回原來的 1275。以及在第 8 題中，忽視問句中的單位「美元」，且受了第 6 題題目敘述的干擾，而將 5 美元換算成 175 台幣，可謂多此一舉。可能這些學生的工作記憶忙碌，無法確切判斷訊息的可用性與必要性。(錯解內容可見附錄八第 7、8 題的錯解 5、4~6。)

第二、四組學生較另兩組學生在「將題目中的數字拼湊出一些式子」方面的次數為多，與傳統題的情形相同。附錄八第 3 題的錯解 7 是第四組學生所寫，其解題內容漫無章法;第 6 題的錯解 2 是第二組學生所寫,看得出來他非常匆忙,沒有把題目的敘述看的很仔細；而第 9 題的錯解 2、3，其內容亦是胡亂拼湊，其中錯解 3 和傳統題中第 10 題的錯解 1 是同一個人，是第二組學生，他又犯類似的錯誤，亦即將題目中「求正整數解」的隱喻，聯想成「求最大公因數」。

在「非關答案的操作」方面，第四組學生的次數已經被第二、三組學生趕上，三組在次數比例上是相似的。總次數較傳統題來得多，顯示故事文字問題對學生而言，較難開始著手解決，亦即是難以進入解題核心的問題。(錯解內容可見附錄八第 3 題的錯解 6；第 5 題的錯解 10、11；第 8 題的錯解 7。)

以上的錯解類型屬於操作上的錯誤，在不適當的解題習慣上，上述已解釋「忽略沒有數字的重要句子」與「忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟」的差異。但和傳統題不同的是，在此次抽樣中，在「改變題目的限制」項目上，並沒有看到像是四捨五入、粗略估計答案、改變單位等。而較多發生的是刻意忽略一些錯誤現象,顯然故事問題的冗長敘述深深地影響學生解題的意願與策略。

在「忽略沒有數字的重要句子」方面,最常發生在第 9 題中問題的敘述:「除了…這個買法之外…」，學生在把所有買法都羅列出來後(共 3 種)，經常忘了將題目中已說明的一種扣除(內容在附錄八第 9 題的錯解 4)；另一個錯誤是，有注意到問題的要求，知道最後要扣除一項，但是卻忽略了題目中的條件敘述:「她

堅持要買偶數個」，導致連奇數的買法也算入(內容在附錄八第 9 題的錯解 5)。其他諸如在第 7 題與第 8 題，像是忽略題目四捨五入的要求、或只記得計算購物稅，忘了加上原價等，發生的次數較少(內容可見附錄八第 7 題的錯解 6；第 8 題的錯解 8。)

在「直覺性反應方面」，較常發生的是「刻意忽略一些錯誤」與「以生活經驗回答」，事實上這兩項錯誤有時是相連在一起的，例如附錄八第 1 題的錯解 4 和 7，看得出來這些學生本來嘗試著列出算式，但在無法得到合理的答案之後，他們把這些算式劃掉，選擇了一個日常生活中可接受的概念，亦即是假設每個月有 30 天，其中一位為了能較符合題意，還將 60 天加上 4 天、且在接下來的第 2 題中也加上 4 天(第 2 題的錯解 1)。有些學生知道無法由計算得到答案，但假設每個月為 30 天又會有風險(每個月不一定是 30 天)，因此他們選擇了一個避重就輕的方式解決問題，亦即是刻意地忽略可能的錯誤，使用題目中的敘述來回答問題(例如附錄八第 2 題的錯解 4；第 3 題的錯解 7；第 8 題的錯解 9)。而第 6 題與第 10 題中，皆有學生不考慮變項間的關係，「以生活經驗回答」的例子。

以上為各組學生在故事文字問題上的錯誤類型內容，如同在傳統文字問題，各組在有書寫但錯誤的題目，其錯誤大多發生於操作錯誤。

參、各組學生在兩種文字問題中的錯誤類型比較

一、在總題數方面

下表 4－5－5 為擷取上表 4－5－1 及 4－5－3 合併而成，另外加上兩項錯誤類型佔錯誤次數的比例。由下表可看出，各組在故事題部份，全對的題數全部減少了，尤其是第二組學生。除了第一組學生之外，各組在「有書寫但錯誤的題數」也減少，而「一片空白」的題目急速地增加，以第四組 155 題最多，第二組次之，為 109 題，第三組也有 86 題，顯示這類型的問題對第二、三、四組學生的衝擊很大，易使他們放棄解題。在「操作錯誤」的題數方面，雖然除第一組學生之外，其他組別的合計次數都減少了，但若以佔「錯誤次數總計」的比例來看，

各組的變化都不及第四組學生來的大；在「不適當的解題習慣」方面，除了第三組合計次數減少之外，其他組別的次數變化都不大，當然且關聯地，若以佔「錯誤次數總計」的比例來看，第四組的變化較大。顯示在遇到故事文字題仍肯嘗試解題的學生中，其大部分所犯的錯誤類型與傳統題相似，只有第四組學生在「不適當的解題習慣」之比例變化較大，可能是因為故事題的敘述與日常生活經驗較有關，在無法精確地計算出答案的情況下，學生容易以直覺判斷來輔助解決問題。

表 4－5－5：各組的各項錯誤類型之題數比較

項　　　目	各組的次數統計									
	一		二		三		四		合計	
	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故
操作錯誤　合計	59	67	81	54	114	66	104	42	358	229
佔錯誤次數的比例(%)	82	85	88	83	81	84	88	78	85	82
不適當的習慣　合計	13	12	11	11	27	13	14	12	65	49
佔錯誤次數的比例(%)	18	15	12	17	19	16	12	22	15	18
錯誤次數　總計	72	79	92	65	141	79	118	54	423	279
有書寫但錯誤的題數	66	75	74	51	123	68	104	43	367	237
一片空白的題數	0	12	18	109	15	86	70	155	103	362
錯誤題數合計	66	87	92	160	138	154	174	198	470	599
全對的題數	134	113	108	40	62	46	26	2	330	201
合計題數	200	200	200	200	200	200	200	200	800	800

註：「傳」即為傳統文字問題，「故」即為故事文字問題。

二、在「操作錯誤」方面

下表 4－5－6 為各組在兩種文字題中，「操作錯誤」方面之錯誤題數比較，而表 4－5－7 則為其中「概念錯誤」的「無法順利轉譯成代數式子」的題數比較。由表中可看出各組學生在故事題中的四則運算錯誤次數都降低許多，顯示學生對部份傳統問題的解法較為熟悉。

表 4－5－6：各組「操作錯誤」之題數比較

內　　　　容	各組的次數統計									
	一		二		三		四		合計	
	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故
1、四則運算錯誤	10	3	10	2	20	3	20	3	60	11
佔錯誤次數的比例(%)	14	4	11	3	14	4	17	6	14	4
2、概念錯誤	49	45	58	33	89	48	64	25	260	151
佔錯誤次數的比例(%)	68	57	63	51	63	61	54	46	61	54
3、忽略(因為)題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少(多)一個計算步驟	0	13	5	3	1	2	2	0	8	18
佔錯誤次數的比例(%)	0	16	5	5	.7	3	2	0	2	6
4、將題目中的數字拼湊出一些式子	0	2	5	8	1	3	8	7	11	20
佔錯誤次數的比例(%)	0	3	5	12	.7	4	7	13	3	7
5、非關答案的操作	0	4	3	8	3	10	10	7	19	29
佔錯誤次數的比例(%)	0	5	3	12	2	13	8	13	4	10
合計	59	67	81	54	114	66	104	42	358	229
佔錯誤次數的比例(%)	82	85	88	83	81	84	88	78	85	82

註：「傳」即為傳統文字問題，「故」即為故事文字問題。

第一組學生在兩種文字問題的「概念錯誤」，次數差異不大，但以比例來看，發生在故事題的錯誤概念比較少(68%→57%)。在兩種問題中，其「不了解不等式的相關用語以及實際值範圍的表示方法」的次數都是四組之冠；在傳統題中，他們對餘數的概念不夠清楚，這點和其他四組相同，可能是因為他們在國民中小學九年一貫新制度下，分數的除法單元銜接不完全；在故事題中，則是「誤解有關時間的敘述」，是四組中次數最多的，其他組別的次數較少可能是因為他們都直接放棄解題。第二組學生在故事題中的操作錯誤次數較傳統中少，但以比例來看，變化不大(88%→83%)；其概念錯誤的分佈較為廣泛，較無集中某項概念的情況。第三組學生在故事題的操作錯誤次數較傳統題減少，但若以其佔「錯誤次數總計」的比例來看，是差異不大且略為增加的(81%→84%)。在傳統題中，他們「對百分比的意義」不夠清楚；在故事題中，則是對「時速的計算方法」混淆及「不

了解不等式的相關用語」；且在兩種問題中，其「列出與正確式子相似的算式」之次數都是四組最多的，可見第三組學生需要的教學是針對某些數學概念的補強。第四組學生在故事題的概念錯誤次數最少，可能是因為一片空白的題數過多，減少了書寫錯誤的次數。在傳統題中，他們「有第一個步驟，但無法再繼續下去」的次數是四組最多的，而「列出與正確式子相似的算式」也達到 15 次；在故事題中，他們在各個錯誤項目的次數分佈較為平均。

表 4－5－7：各組學生在「無法順利轉譯成代數式子」的題數比較

內容	各組的次數統計									
	一		二		三		四		合計	
	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故
a. 對餘數的概念錯誤	9	0	9	0	8	0	5	0	31	0
b. 誤解有關時間的敘述	0	14	0	4	0	3	0	2	0	22
c. 時間單位的換算錯誤	0	1	0	4	0	2	0	3	0	9
d. 對時速的計算方法混淆	0	0	0	5	0	6	0	4	0	13
e. 不了解百分比的意義	7	3	12	5	17	5	11	2	47	21
f. 不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法	13	12	8	4	3	7	9	5	33	30
g. 不了解折扣的意義	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0
h. 對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤	4	5	4	1	3	9	1	1	12	15
i. 列出與正確式子相似的算式	11	8	13	5	25	11	15	4	64	26
j. 有第一個重要步驟，但無法再繼續下去	0	2	0	5	6	15	11	4	17	15
合計	45	45	46	33	62	48	53	25	206	151

註：「傳」即為傳統文字問題，「故」即為故事文字問題。

第一組學生在故事題中，「忽略(因為)題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少(多)了一個計算步驟」的次數增加了許多，可能是因為故事題的敘述冗長，使得學生的工作記憶非常忙碌，因此最後忘了或者多了一個步驟。而第二、第四組在故事題中，拼湊式子的次數或是比例增加了許多。第三組雖然在故事題中「非關答案的操作」的次數最多，但與第二、四組學生的比例大約是相同的，

皆比其在傳統題來得多。

三、在不適當的習慣方面

下表 4－5－8 為各組在兩種文字題中，「不適當的解題習慣」題數的比較。由表中可看出，在「忽略沒有數字的重要句子」方面，四組學生在兩種文字問題的次數變化不大。整體而言，第一、二組學生在兩種文字問題中的「直覺性反應」次數沒有很大差異。而第三組在故事題中「直覺性反應」的次數減少許多，尤其是在「刻意忽略一些錯誤現象」上。第四組是四組學生中，在此錯誤類型中比例增加的。他們在故事題中「以生活經驗回答」的現象比在傳統題中嚴重地多，顯示這些沒有直接放棄解題的學生，對這類與生活相關的問題還有一些興趣，會嘗試用直覺的生活經驗回答問題。

表 4－5－8：各組「不適當的解題習慣」之題數比較

內　　　容	各組的次數統計									
	一		二		三		四		合計	
	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故	傳	故
1、忽略沒有數字的重要句子	5	5	6	6	12	8	4	2	27	24
佔錯誤次數的比例(%)	7	6	7	9	9	10	3	4	6	9
2、直覺性反應：										
(1)改變題目的限制	7	0	4	0	8	0	6	0	25	0
佔錯誤次數的比例(%)	10	0	4	0	6	0	5	0	6	0
(2)刻意忽略一些錯誤現象	0	4	0	3	0	2	0	3	0	12
佔錯誤次數的比例(%)	0	5	0	5	0	3	0	6	0	4
(3)以關鍵字作答，套入以前學的公式	1	1	0	0	1	0	0	0	2	1
佔錯誤次數的比例(%)	1	1	0	0	.7	0	0	0	.5	.3
(4)以生活經驗回答	0	2	1	2	6	3	4	7	11	12
佔錯誤次數的比例(%)	0	3	1	3	4	4	3	13	3	4
合計	13	12	11	11	27	13	14	12	65	49
佔錯誤次數的比例(%)	18	15	12	17	19	16	12	22	15	18

註：「傳」即為傳統文字問題，「故」即為故事文字問題。

第六節 學生合作解題得分之差異

本研究根據前文研究旨趣，認為有必要進行合作解題，以探討研究問題八「經由抽樣配對的方式，觀察合作解題的效果。探討：(一)各種組合學生在兩種文字問題中的得分是否有所差異；(二)各組學生在兩種文字問題中的得分是否較未組合之前高」。研究進行的方式如前文所述，由抽樣的80位學生中，第一組取15位、第二、三組各取10位、第四組取5位，合計40人，形成四種兩兩配對模式，每種配對方式各有5小組，合計20組。每一小組先核對兩人中有錯的題目，只要其中一人沒有做對該問題，該問題就納入合作解題的題目中。因此每一小組所需要做的題數不盡相同，故在分數的評量上，最後只能計算其平均分數(計算方法，容下文再說明)。另外，要加以說明的是，每一小組進行合作解題時，最後的分數評量以「較低分者」為依據。舉例來說，若兩人中有一人最後的作答結果只能達到3分，即使另一位能達到5分，但因為無法使兩人都達到相同一致的階段，因此以較低分者為兩人合作解題的計分結果。但在試後的「解題歷程」自評部份，因為是兩人分開填寫，所以解題歷程階段分開評量，此部份的質化描述，將於下一節再述。

本研究中的合作解題，共有四種組合方式，分別為第一組和第二組、第一組和第三組、第一組和第四組、第二組和第三組。每種組合方式各有5小組，每組2人，因此合計為20小組、40位學生。而下表4－6－1即為此40位學生在兩種文字問題上，個人的得分與合作後的得分摘要表。要注意的是，由於各種組合中的各小組學生所需要做的題數不同，所以無法直接以總分作為分析依據，故接下來的比較只能以平均分數為主。下表4－6－1中「題數範圍」指的是個人(或各小組)所需要合作的題數範圍；「總分/題數」是將個人(或每小組)的總分除以(或該小組)題數；「平均分數」是將個人(或各小組)的「總分/題數」加總之後，除以5，亦即是該種組合方式的個人(或各小組)的平均得分；「平均差」則是將合作解題的平均分數減去個人解題的平均分數。

表 4－6－1：40 位學生個人與合作解題得分之摘要表

	組合方式	題數範圍	個人解題 總分/題數範圍	個人解題 平均分數	個人解題 標準差	合作解題 總分/題數範圍	合作解題 平均分數	合作解題 標準差	平均差 合作－個人
傳統文字問題	組一	2~8	2.60~5.00	3.64	1.01	3.25~4.8	3.93	.68	..29
	組二		1.75~4.30	2.84	1.05				1.09
	組一	7~9	3.33~4.63	4.05	.57	3.67~4.86	4.29	.48	.24
	組三		1.25~2.33	1.75	.47				2.54
	組一	7~10	3.56~4.71	4.16	.47	3.00~4.11	3.64	.43	－.52
	組四		.44~1.57	.87	.41				2.77
	組二	7~9	2.43~4.29	3.19	.69	3.56~4.43	4.06	.35	.87
	組三		1.43~2.33	1.93	.36				2.13
	合計	2~10	.44~5.00	2.80	1.28	3.00~4.86	3.98	.52	1.18
故事文字問題	組一	8~10	2.10~4.13	3.02	.81	3.30~4.75	4.09	.56	1.07
	組二		.30~1.80	1.10	.70				2.99
	組一	5~10	2.70~4.80	3.52	.57	4.40~4.71	4.55	.13	1.03
	組三		.43~.80	.65	.70				3.90
	組一	10	2.20~4.80	3.38	1.20	3.20~4.00	3.54	.30	.16
	組四		.00~.90	.44	.40				3.10
	組二	8~10	1.20~2.40	1.68	.50	3.40~4.50	4.01	.40	2.33
	組三		.60~2.60	1.26	.82				2.75
	合計	5~10	.00~4.80	2.09	1.36	3.20~4.75	4.05	.51	1.96

註：兩種文字題每題都是 5 分。

由上表 4－6－1 可看出，大致上來說，每一小組所需做的題數，故事題比傳統題多。在傳統題方面，個人解題與合作解題平均得分的差異在-.52~2.77 分之間，此唯一「負成長」(-.52 分)發生於組合方式為「組一+組四」中的第一組，最大的分數差異亦發生在此種組合方式中的第四組；整體的得分差距為 1.18 分。

在故事題方面，個人解題與合作解題平均得分的差異在.16~3.90 分之間，

最小的分數差異仍發生於「組一+組四」中的第一組，最大的分數差異則發生於「組一+組三」中的第三組；整體的分數差距為 1.96 分。

以下的內容將分為兩個部分，第一個部份探討各種組合在兩種文字問題得分上的差異，屬於組間的比較，第二個部份則探究各組學生在兩種文字問題上，個人與合作後得分的差異，屬於組內的比較。

壹、各種組合在兩種文字問題得分上的差異

此部份採用單因子變異數分析，分別探討各種配對合作解題學生在兩種文字問題上的差異，屬於組間的差異考驗。其中因為每一題文字問題的滿分都是 5 分，所以平均數的範圍在 0~5 分之間。

表 4—6—2：各種組合學生在兩種文字問題得分之差異摘要表

	組合方式	組數	平均數	標準差	F 值	p 值	Scheffé
傳統文字題	組一+組二	5	3.93	.68	1.457	.264	
	組一+組三	5	4.29	.48			
	組一+組四	5	3.64	.43			
	組二+組三	5	4.06	.35			
故事文字題	組一+組二	5	4.09	.56	5.885**	.007	組 13＞組 14
	組一+組三	5	4.55	.13			
	組一+組四	5	3.54	.30			
	組二+組三	5	4.01	.40			

**p＜.01

在進行單因子變異數分析之前，先分別進行變異數同質性檢定，結果兩種文字問題的解題結果皆符合同質性假設。上表 4—6—2 即為此差異考驗之摘要表。由上表 4—6—2 可知，不同組合方式學生在傳統文字問題的表現無顯著差異(F＝1.457, p＝.264)。而不同組合方式學生在故事文字問題的表現則有顯著的

差異存在(F＝5.885, p＝.007)，經 Scheffé 法事後比較，結果發現「組 1＋組 3」優於「組 1＋組 4」，同質子集顯示四組配對模式可分為二群，第一群為「組 1＋組 3」、「組 1＋組 2」、「組 2＋組 3」；第二群為「組 1＋組 2」、「組 2＋組 3」、「組 1＋組 4」。這個部份若以下圖 4－6－1 表示，會更容易看出「組 1＋組 2」、「組 2＋組 3」和另外兩種組合之得分沒有顯著差異，但分為二群的現象。

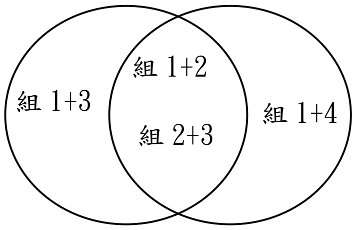


圖 4－6－1　各組合在故事文事題得分之差異解析圖

貳、各組學生個人解題與合作解題得分的差異

此部份採用相依 t 考驗，分別探討每一組學生在兩種文字問題上，個人得分與合作解題後得分的差異，屬於組內的差異考驗。其中因為每一題文字問題的滿分都是 5 分，所以成對變數變異之平均數(合作得分－個人得分)的範圍在-5~5 分之間。下表 4－6－3 即為各組學生在傳統文字題上，個人與合作得分之差異考驗摘要表。

由下表 4－6－3 可知，在傳統文字問題方面，整體而言，40 位學生合作解題之後的得分與個人得分有顯著差異(平均數＝1.06，t＝4.787***)，顯示合作解題之後的得分較個人解題的得分為高。對第一組學生而言，無論與其他那一組組合，或合計來看，其合作解題得分與個人得分皆無顯著差異(t 值＝.547、2.416、-1.638)，可能的原因是第一組學生個人的表現原本就較優，其他三組對他們較無法有明顯的助益。對第二組學生而言，他們與第三組學生合作後的得分與其個

人得分有顯著進步(t 值＝3.351*)，但與第一組學生合作後得分卻無明顯進步。對第三組學生來說，無論與第一組或第二組學生配對，合作後的得分都較其個人得分有顯著的進步(t 值＝7.740**，9.821**)。而第四組學生和第一組學生合作解題後，其得分與個人得分亦有顯著地進步(t 值＝8.793**)。

表 4－6－3：各組學生在傳統文字問題上個人得分與合作得分之相依 t 考驗結果

組別	(合作得分－個人得分)	成對變數差異			
	組合方式	平均數	標準差	平均數的標準誤	t 值
第一組	組一＋組二(N＝5)	.29	1.18	.53	-.547
	組一＋組三(N＝5)	.24	.22	.10	2.416
	組一＋組四(N＝5)	-.52	.71	.32	-1.638
	合計(N＝15)	-.30	.71	.18	-1.636
第二組	組一＋組二(N＝5)	1.09	1.01	.45	2.433
	組二＋組三(N＝5)	.87	.58	.26	3.351*
	合計(N＝10)	.98	.78	.25	3.966**
第三組	組一＋組三(N＝5)	2.54	.75	.34	7.490**
	組二＋組三(N＝5)	2.13	.48	.22	9.821**
	1 合計(N＝10)	2.33	.64	.20	11.576***
第四組	組一＋組四(N＝5)	2.77	.70	.31	8.793**
	合計(N＝40)	1.06	1.40	.22	4.787***

*p＜.05　**p＜.01　***p＜.001

由下表 4－6－4 可看出，在故事文字問題方面，整體而言，40 位學生合作解題之後的得分與個人得分有顯著差異(平均數＝2.17，t＝9.648***)，顯示合作解題之後的得分較個人解題的得分為高。對第一組學生而言，其與第二組學生組合後得分與個人得分有顯著差異(t 值＝3.729*)，與其他組配合則無顯著進步。對第二組學生而言，他們在「組 1＋組 2」、「組 2＋組 3」組合模式中的得分

較其個人得分皆有顯著進步(t 值＝6.229**、7.159**)。對第三組學生來說，亦是與第一組或第二組學生配對，合作後的得分都較其個人得分有顯著的進步(t 值＝33.890 ***、6.529**)。而第四組學生和第一組學生合作解題後，其得分與個人得分也是有顯著地進步(t 值＝11.976***)。

綜合來看，合作解題在故事題方面的效益更為顯著。其中，第一組與其他組合作解題的結果較不顯著。最有趣的是「組二+組三」的組合方式，這兩組學生在傳統文字題、故事文字問題合作，都有顯著的進步。也就是說，第二組學生只有與第三組學生在合作解故事文字問題有顯著進步；而第三組學生則是與第一組或第二組學生合作解題後，在兩種文字問題都有顯著進步。最後，第四組學生受益亦不淺，他們和第一組學生合作解題後，在兩種文字問題的得分上皆有顯著進步。有關此四組學生在合作解題過程中的歷程描述，將於下一節中詳述。

表 4－6－4：各組學生在故事文字問題上個人得分與合作得分之相依 t 考驗

組別	(合作得分－個人得分) 組合方式	成對變數差異 平均數	標準差	平均數的標準誤	t 值
第一組	組一＋組二	1.15	.69	.31	3.729*
	組一＋組三	1.03	.92	.41	2.492
	組一＋組四	.16	1.20	.54	.299
	合計	.78	1.00	.26	3.021**
第二組	組一＋組二	2.99	1.07	.48	6.229**
	組二＋組三	2.33	.73	.32	7.159**
	合計	2.66	.93	.29	9.020***
第三組	組一＋組三	3.90	.26	.12	33.890***
	組二＋組三	2.75	.94	.42	6.529**
	合計	3.32	.89	.28	11.817***
第四組	組一＋組四	3.10	.58	.26	11.976***
	合計(N＝40)	2.17	1.42	.23	9.648***

*p＜.05　**p＜.01　　***p＜.001

第七節 學生合作解題的解題歷程

本節承接上一節，接著探究研究問題八「經由抽樣配對的方式，觀察合作解題的效果。亦即探討：(三)各種組合學生在兩種文字問題中的解題歷程。(四)各組學生在兩種文字問題中的解題歷程階段，是否較未組合之前高。」本節分為三個部份，第一個部份為各組學生在兩種文字問題中，合作解題之歷程的基本統計描述;第二部份探討各組學生個人解題與合作解題的解題歷程改變是否有所差異；最後一部份則以質化描述各種組合學生解題的情況。

壹、各組學生在各種組合中合作解題之歷程的基本描述

本研究由各組隨機抽樣 20 位學生，合計 80 位學生中，再抽取 40 位學生為觀察合作解題樣本，分為四種配對組合，每種組合有 5 個小組，共計 20 個小組。在每小組解完一個問題之後，發給兩人自評表，各自就自己的情況自評解題歷程，最後的資料採用次數、百分比、平均數的描述統計，如下表 4－7－1 和 4－7－2 所示。下兩表中，第一組學生分佈於三種配對組合中，其他各組依此類推，因此，由表可看出各組學生在該種配對方式中的解題歷程分佈情況。另外，由於每小組合作解題的題數都不相同，所以每小組的「總次數」都不相同；每一個次數下方都有一個「百分比%」，其計算方式為該「次數」除以「總次數」，再乘以百分之百。

在傳統文字題方面，由下表 4－7－1 可看出，抽樣的 40 位學生在傳統文字問題的 296 次自評分數中，有高達 221 次(74.66%)勾選第四階段，明顯地較其它階段多，平均階段為 3.94，選擇階段 0、階段 1、階段 3 的次數非常少。

對第一組學生來說，與其它三組合作之後，大部份學生勾選第四階段，佔總次數的百分比為 76.32%~88.64%之間，而解題的平均階段在 4.00~4.12 之間，合計達到 4.07。

表 4－7－1：各組學生合作解題之解題歷程的結果摘要（傳統文字問題）

組別	組合方式	人數	總次數		階段						平均階段
					0	1	2	3	4	5	
第一組	組 1＋組 2	5	26	次數	0	0	1	0	20	5	4.12
				百分比%	0	0	3.85	0	76.92	19.23	
	組 1＋組 3	5	38	次數	0	0	3	0	29	6	4.00
				百分比%	0	0	7.89	0	76.32	15.79	
	組 1＋組 4	5	44	次數	0	0	0	0	38	5	4.02
				百分比%	0	0	0	0	88.64	11.36	
	合計	15	107	次數	0	0	4	0	87	16	4.07
				百分比%	0	0	3.74	0	81.31	14.95	
第二組	組 1＋組 2	5	26	次數	0	0	4	2	14	6	3.85
				百分比%	0	0	15.38	7.69	53.85	23.08	
	組 2＋組 3	5	41	次數	0	0	4	0	31	6	3.95
				百分比%	0	0	9.76	0	75.61	14.63	
	合計	10	67	次數	0	0	8	2	45	12	3.91
				百分比%	0	0	11.94	2.99	67.16	17.91	
第三組	組 1＋組 3	5	38	次數	0	0	4	0	29	5	3.92
				百分比%	0	0	10.53	0	76.05	13.16	
	組 2＋組 3	5	41	次數	0	0	3	0	32	6	4.00
				百分比%	0	0	7.32	0	78.05	14.63	
	合計	10	79	次數	0	0	7	0	61	11	3.96
				百分比%	0	0	8.86	0	77.22	13.92	
第四組	組 1＋組 4	5	44	次數	0	2	7	3	28	3	3.45
				百分比%	0	4.55	15.91	6.82	63.64	6.82	
合計		40	296	次數	0	2	26	5	221	42	3.94
				百分比%	0	.68	8.78	1.69	74.66	14.19	

第二組學生與其他兩組學生合作之後，勾選第四階段的次數佔總次數的百分比為 53.85%和 75.61%，而解題的平均階段為 3.85 和 3.95，合計達到 3.91。有趣的是和第三組合作的高階段(階段 4 與階段 5)合計較與第一組合作高許多。

第三組學生與其它兩組學生合作之後，勾選第四階段的次數佔總次數的百分比為 76.32%和 78.05%，而解題的平均階段為 3.92 和 4.00，合計達到 3.96。

第四組學生與第一組學生合作之後，勾選第四階段的次數佔總次數的百分比為 63.64%，進步良多。而解題的平均階段為 3.45，是四組中最低的。

表 4—7—2：各組學生合作解題之解題歷程的結果摘要(故事文字問題)

組別	組合方式	人數	總次數		階段						平均階段
					0	1	2	3	4	5	
第一組	組1＋組2	5	45	次數	0	0	0	1	42	2	4.02
				百分比%	0	0	0	2.22	93.33	4.44	
	組1＋組3	5	39	次數	0	0	0	0	39	0	4.00
				百分比%	0	0	0	0	100	0	
	組1＋組4	5	50	次數	0	0	2	0	47	1	3.94
				百分比%	0	0	4.00	0	94.00	2.00	
	合計	15	134	次數	0	0	2	1	128	3	3.99
				百分比%	0	0	1.49	.75	95.52	2.24	
第二組	組1＋組2	5	45	次數	0	0	2	1	40	2	3.93
				百分比%	0	0	4.44	2.22	88.90	4.44	
	組2＋組3	5	49	次數	0	0	1	0	45	3	4.02
				百分比%	0	0	2.04	0	91.84	6.12	
	合計	10	94	次數	0	0	3	1	85	5	3.98
				百分比%	0	0	3.19	1.06	90.43	5.32	
第三組	組1＋組3	5	39	次數	0	0	1	0	37	1	3.97
				百分比%	0	0	2.56	0	94.87	2.56	
	組2＋組3	5	49	次數	0	0	1	0	45	3	4.02
				百分比%	0	0	2.04	0	91.84	6.12	
	合計	10	88	次數	0	0	2	0	82	4	4.00
				百分比%	0	0	2.27	0	93.18	4.55	
第四組	組1＋組4	5	50	次數	1	0	7	6	36	0	3.52
				百分比%	2.00	0	14.00	12.00	72.00	0	
合計		40	366	次數	1	0	14	8	331	12	3.92
				百分比%	.27	0	3.83	2.19	90.44	3.28	

由上表 4—7—2 可看出，全部學生在合作解故事文字問題的 366 次自評分數中，有高達 331 次(90.44%)勾選第四階段，明顯地較其它階段來得多，也比合

作解傳統題的第四階段多(74.66%)。但平均階段為 3.92，與合作解傳統題的平均階段 3.94 差異不大，原因是勾選第五階段的總次數較傳統題來的少。

對第一組學生來說，與其它三組合作之後，大部份學生勾選第四階段，尤其和第三組合作，有 100%學生勾選第四階段，其它兩小組的百分比都在 90%以上，皆比合作解傳統文字題多，而解題的平均階段在 3.94~4.02 之間，合計達到 3.99，較在傳統題來得低，原因同上述，為勾選第 5 階段的次數減少了。

第二組學生與其他兩組學生合作之後，勾選第四階段的百分比為 88.90%和 91.84%，較其在合作解傳統題上多，但勾選第五階段的百分比則比合作解傳統題來得少。而解題的平均階段為 3.93 和 4.02，合計達到 3.98，皆高於傳統題。

第三組學生與其它兩組學生合作之後，勾選第四階段的次數佔總次數的百分比為 94.87%和 91.84%，較其在合作解傳統題上多，但勾選第五階段的百分比則比合作解傳統題來得少。而解題的平均階段為 3.97 和 4.02，合計達到 4.00，皆高於傳統題。

第四組學生與第一組學生合作之後，勾選第四階段的次數佔總次數的百分比為 72.00%，較其在合作解傳統題上進步。而解題的平均階段為 3.45，亦是四組中最低的。

綜合來看，不論是合作解傳統問題或故事問題，四組學生勾選第四階段的次數皆明顯地多於其它階段。且合作解故事文字題時，勾選第四階段(執行方法)的次數較合作解傳統文字題多，但勾選第五階段(判斷)的次數則較少。整體而言，各組在合作解兩種文字題的平均階段都有好的表現(解題歷程都接近第四階段)。另外，與第六節結果相符的是，第二組學生和第三組學生合作解傳統題的高階段(階段 4 與階段 5)合計較其與第一組學生合作高許多。

貳、各組學生「個人解題」與「合作解題」的解題歷程改變差異

為探討各組學生「個人解題」與「合作解題」的解題歷程是否有所改變及差異，本研究先將各組學生在兩種文字問題中，個人與合作解題之後自評的解題

歷程各階段製成次數百分比表格，以提供初步的比較(附錄九與附錄十)。接著擷取附錄九與附錄十中，各組學生之「個人解題」與「合作解題」歷程的平均階段，如下兩表 4—7—3、4—7—4 所示，以方便比較。其中表 4—7—3 是傳統文字問題部份，由此表可看出，只有第一組學生出現「合作解題」的平均階段低於「個人解題」的平均階段，此情況分別是與第三組、第四組學生合作(但無顯著差異，下文會再詳述)；其他組別在「合作解題」之後，解題歷程階段皆較個人解題來得高。其中「合作解題」與「個人解題」的平均階段差異最大的是第四組學生(合作—個人＝3.54—2.21＝1.24)，其與第一組學生合作。

表 4—7—3：各組學生個人與合作解題的平均階段（傳統文字題）

組別	組合方式	人數	總次數	平均階段	
				個人解題	合作解題
第一組	組 1＋組 2	5	26	3.78	4.12
	組 1＋組 3	5	38	4.34	4.00
	組 1＋組 4	5	44	4.26	4.02
	合計	15	107	4.17	4.07
第二組	組 1＋組 2	5	26	3.04	3.85
	組 2＋組 3	5	41	3.39	3.95
	合計	10	67	3.25	3.91
第三組	組 1＋組 3	5	38	2.87	3.92
	組 2＋組 3	5	41	3.46	4.00
	合計	10	79	3.18	3.96
第四組	組 1＋組 4	5	44	2.21	3.45
合計		40	296	3.41	3.94

而下表 4—7—4 是各組學生在故事文字題之「個人解題」與「合作解題」的平均階段。由該表可看出，首先，整體而言，各組「合作解題」與「個人解題」平均階段的差異較傳統題來得大，可能的原因是各組在個人解故事文字題的解題歷程平均階段低於個人解傳統題，以及故事文字題適合以合作解題方式進行。再

者，雖然整體而言，「合作解題」與「個人解題」的差異變大了，但第一組學生仍是差異較小的，顯示「合作解題」對第一組學生在解題歷程的助益可能較小。另，對第一組學生而言，在傳統文字題上，「合作解題」歷程大部份都低於「個人解題」歷程，但在故事文字題上，至少「合作解題」歷程全部是高於「個人解題」歷程的，也再次呼應了故事題適合以合作方式進行。最後，「合作解題」與「個人解題」的平均階段差異最大的已不是第四組學生，而是與第一組學生合作的第三組學生。

表 4—7—4：各組學生個人與合作解題的平均階段（故事文字題）

組別	組合方式	人數	總次數	平均階段	
				個人解題	合作解題
第一組	組 1＋組 2	5	45	3.47	4.02
	組 1＋組 3	5	39	3.82	4.00
	組 1＋組 4	5	50	3.50	3.94
	合計	15	134	3.58	3.99
第二組	組 1＋組 2	5	45	1.89	3.93
	組 2＋組 3	5	49	1.78	4.02
	合計	10	94	1.83	3.98
第三組	組 1＋組 3	5	39	1.33	3.97
	組 2＋組 3	5	49	2.08	4.02
	合計	10	88	1.75	4.00
第四組	組 1＋組 4	5	50	1.32	3.52
合計		40	366	2.38	3.93

上述兩表僅能提供我們對「合作解題」與「個人解題」平均階段的差異有輪廓性的了解，為考驗各組學生之「合作解題」與「個人解題」的平均階段是否真有統計上的差異，本研究採用卡方考驗之改變的顯著性考驗。首先將各小組學生在「個人解題」與「合作解題」中，自評解題歷程階段的各個次數製成 4×4 或 6×6 的方形交叉表(如附錄十一、附錄十二所示)，接以參考林清山(1992)所提

供之包卡爾(Bowker, 1984；引自林清山，1992)運算公式：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{(X_{ij}-X_{ji})^2}{X_{ij}+X_{ji}} \quad \text{其中 } i>j\text{，df}=C_2^I \quad \text{（林清山，1992，p. 300）}$$

以考驗出對角線以外各細格的概率是否對稱。因此，4×4 的方形交叉表，其自由度為 $C_2^4=6$；而 6×6 的方形交叉表，其自由度為 $C_2^6=15$。經由查表，得到 $\chi^2_{.95(6)}=12.592$、$\chi^2_{.95(15)}=24.996$，接著再分別計算出附錄十一、十二中，各組在各種組合之下的 χ^2 值。下表 4－7－5 為擷取各組計算後的 χ^2 值，以方便比較。由下表 4－7－5 可看出，在傳統文字問題方面，依上述計算方式，結果只有第三組學生(兩種配對模式合計)、第四組學生(其與第一組學生合作)，與全部學生，其「個人解題」與「合作解題」的平均階段有顯著差異(χ^2＝33.15*、χ^2＝28.33*、χ^2＝66.49*，*P＜.05)，亦即合作解題促使這些組別的學生在解傳統文字題歷程中有所進步。而其他組別的配對模式無顯著差異。

表 4－7－5：各組「個人解題」與「合作解題」的平均階段差異之 χ^2 值整理表

	組別	組合方式	人數	χ^2 值		組別	組合方式	人數	χ^2 值
傳統文字問題	第一組	組 1＋組 2	5	3.60	故事文字問題	第一組	組 1＋組 2	5	15.80*
		組 1＋組 3	5	6.27			組 1＋組 3	5	16.00
		組 1＋組 4	5	8.23			組 1＋組 4	5	15.00
		合計	15	6.23			合計	15	44.89*
	第二組	組 1＋組 2	5	9.00		第二組	組 1＋組 2	5	39.00*
		組 2＋組 3	5	13.00			組 2＋組 3	5	37.00*
		合計	10	17.59			合計	10	74.50*
	第三組	組 1＋組 3	5	15.51		第三組	組 1＋組 3	5	35.00*
		組 2＋組 3	5	18.90			組 2＋組 3	5	42.00*
		合計	10	33.15*			合計	10	77.00*
	第四組	組 1＋組 4	5	28.33*		第四組	組 1＋組 4	5	39.22*
	合	計	40	66.49*		合	計	40	229.10*

*p＜.05

但在故事文字問題方面，得到的結果與傳統題卻大不相同。由上表 4－7－5 可看出，除了第一組學生(其分別與第三組、第四組學生合作)之外，其他各組的合作模式皆有顯著的改變，亦即合作解題促使這些組別的學生解故事文字問題的解題歷程有顯著性的進步。

綜合來說，在合作解兩種文字問題的比較上，第一，不論是何種文字題，每一組與他組合作解題之後的歷程階段都有很好的表現，都接近階段四。第二，對各組學生而言，合作解故事文字題時，勾選第四階段的次數百分比較合作解傳統文字題多，但勾選第五階段的次數百分比則較少。第三，第二組學生和第三組學生合作解傳統題的高階段(階段 4 與階段 5)合計較其與第一組學生合作高許多。第四，雖然第四組學生的解題歷程階段非常有所進展，但其平均階段仍是四組中最低的，兩種文字問題都是。

而在比較「個人解題」與「合作解題」上，首先，由觀察平均階段與 χ^2 考驗的結果，「合作解題」對第一組學生在解題歷程上的助益可能不大，對其他三組的幫助較為明顯。不過這可能是因為第一組學生原本就有較好的個人表現，相較於其他三組，再進步的空間不大。第二，在故事題上，「合作解題」與「個人解題」的平均階段較有顯著性的進步。雖然可能的原因是各組學生個人解故事題時所經歷到的困難較大，解題歷程較低，因此造成「合作解題」與「個人解題」的平均階段有顯著差異；但也說明了故事文字題適合以合作解題方式進行。第三，若與前一節的表 4－6－4 比較，會發現各組在故事文字題中「個人解題」與「合作解題」的得分相依 t 考驗、與解題歷程改變的顯著性考驗結果相同。

參、各種組合學生解題情況的質化描述

本研究觀察 20 個小組，合計 40 位學生合作解題的過程，並且排除步調不一致、各自解題、不討論等少數情況。而下表 4－7－6 即為觀察各種組合學生的解題歷程摘要。

表 4－7－6：對 40 位學生合作解題歷程之觀察摘要

類別	指標行為	組 1+組 2		組 1+組 3		組 1+組 4		組 2+組 3	
		傳	故	傳	故	傳	故	傳	故
情意支持	1、鼓勵解題意願較低的一方參與解題	19	1	6	10	32	30	6	2
	2、相互複述對方的話(或式子的意義)	5	11	5	9	10	1	5	3
	3、過程中對話，以增加解題樂趣	1	10	5	11	1	2	10	14
	（合計）	(25，22)		(16，30)		(43，33)		(21，19)	
	4、受鼓勵的一方仍意願較低	1	12	5	11	16	2	1	1
理解題意	1、討論問題主要部份，或指導一方劃重點	7	29	6	36	1	16	1	76
	2、問題轉譯:解釋或討論某數學用語的意思	14	1	14	10	55	4	41	2
	（合計）	(21，30)		(20，46)		(56，20)		(42，78)	
	3、問題轉譯失敗：對某數學用語解釋錯誤	0	2	0	11	0	1	0	5
尋求模式	1、討論初步的問題表徵或架構	18	13	19	12	35	5	1	5
	2、畫圖以表徵問題	1	1	2	12	17	7	37	15
	3、判斷這個問題的難易度	2	2	1	5	1	1	6	7
	4、問題整合：判斷或決定訊息的有用性	0	29	0	41	0	9	0	4
	（合計）	(21，45)		(22，70)		(53，22)		(42，31)	
擬定解法	1、資源評估：討論曾遇到類似問題的解法	0	0	0	0	0	0	2	0
	2、直接提出解題計劃，或指導對方列出式子	11	16	3	21	24	19	6	14
	3、討論解題計劃，擬定算式	1	8	5	6	5	0	8	15
	4、計劃確認：詢問對方算式的意義	5	5	1	6	4	1	2	7
	5、計劃確認：尋求對方支持自己寫的式子	3	0	4	0	5	0	7	5
	6、提出更好的解法，或給對方二種方法選擇	2	0	0	0	6	0	2	2
	7、再次確認題意，以精緻化基模假設	0	3	0	1	3	0	5	1
	8、計劃監控：讓對方嘗試錯誤後才說明	1	0	0	0	0	0	0	0
	9、計劃監控：提出問題挑戰對方，使其知錯	1	1	1	0	1	0	1	2
	10、計劃監控：直接指出對方錯誤	1	3	7	3	1	3	4	2
	11、重新界定問題	2	1	0	2	1	0	3	2
	（合計）	(27，37)		(21，39)		(50，23)		(40，50)	
	12、計劃確認失敗：不明白對方的說明	1	3	1	1	4	5	0	0
	13、計劃確認失敗：沒發現對方列式錯誤	1	2	2	2	0	1	2	1
	14、計劃確認失敗：引導對方到錯的方向	1	1	0	0	3	1	2	0

表 4－7－6：對 40 位學生合作解題歷程之觀察摘要（傳統文字題）（續）

類別	指標行為	組 1+組 2		組 1+組 3		組 1+組 4		組 2+組 3	
		傳	故	傳	故	傳	故	傳	故
執行方法	1、監控操作過程：對一方計算結果表示同意或提出質疑	16	19	12	17	35	6	46	42
	2、監控操作過程：協助對方澄清計算結果	5	1	3	11	10	12	6	13
	3、引導計算、提供相關計算計巧	2	6	13	5	12	13	3	2
	（合計）	（24，26）		（28，33）		（62，31）		（61，57）	
	4 監控操作過程失敗：沒有發現對方算錯	1	13	0	6	5	1	5	11
判斷	1、對答案進行驗算，以求得兩人一致同意	2	1	1	2	1	0	5	2
	2、對答案確認，協助對方檢核最後答案	3	0	6	0	2	0	3	0
	3、單獨確認答案（對方無法參與）	1	0	1	0	5	1	0	1
	4、重擬解法，因一方發現答案不對	0	0	1	0	0	0	3	1
	（合計）	（6，	2）	（9，	2）	（8，	1）	（11，	4）
	合計	124		112		290		218	

註：「傳」即為傳統文字題，「故」即為故事文字題。

上表 4－7－6 中，在「情意支持」方面，各種組合學生相互之間都有不錯的情感上的支持，使得階段 0 的次數的大幅減少。首先，可以理解的，「組 1+組 4」在「鼓勵解題意願較低的一方參與解題」的次數最多，意即有許多第四組學生在解題的初始即表示「不想寫」、或「看不懂題目」，有明顯的低解題意願傾向，而與其合作的第一組學生則以勸導或是鼓勵的方式，使他們願意參與接下來的活動，例如第一組對第四組學生說：

「我把題目的意思解釋給你聽，說慢一點？」

另外，有部份合作學生會有一些減低解題壓力的對話，使得一方會心而笑，產生了與解題無關的樂趣，使得雙方學生樂意持續合作解題。例如「組 2＋組 3」學生，合作解傳統題第 7 題、第 3 題：

「你也不會嗎？那我們硬著頭皮來吧…」，「頭皮？豬皮吧？(笑)」。

「你知道這個6.6是什麼意思嗎？你會解釋嗎？(得意的笑)」。

「組 1＋組 4」學生，合作解傳統題第 9 題(第一組學生算出來後，第四組學生回應)：

「我全都知道，懶得算而已」，「是嗎？那下一題看你的囉」。

「組 1＋組 2」學生合作解故事題 A：

「看到這裡，我前面都忘了」，「嗯，記憶不好，是國文不好，不是數學不好」。

「組 1＋組 3」學生合作解故事題 B：

「為什麼不直接講題目就好了，講故事很複雜!」「對啊，會忘記。這是心理戰，我們不要上當」。

然而，在「受鼓勵的一方仍意願較低」的次數上，傳統題仍以「組 1+組 4」來得多，故事題則以「組 1+組 2」來得多，對部份第二組學生而言，沒有耐心讀文字敘述仍是主要問題。

在觀察學生「理解題意」的歷程上，明顯地可以觀察到學生在故事題中「討論問題主要部份」的次數多於傳統題，且以「組 2＋組 3」的次數最多。當然，因為故事題本身的結構與敘述較為冗長，所以較為容易看到學生們討論問題的重點。其中，「組 1＋組 3」、「組 2＋組 3」在討論問題的時候，有部份時候是由其中一方指導另一方將重點標示或劃線，尤其在解故事題時。

在「問題轉譯」的部份，指的是解釋或討論某數學用語的意思。其中「組 1＋組 4」的學生通常是由第一組學生向第四組學生「解釋」數學名詞的意義，例如傳統題 5 中「打 75 折」、「增加 20%」的意義；傳統題 9 中，強調是打完折「後」為 594 元；故事題 8 中「8%」意即乘以「$\frac{8}{100}$」。而「組 2＋組 3」的學生則常是「討論」數學名詞的意義，例如討論傳統題 7 中的「不含」是否為「不超過」？傳統題 10 中，「兩種都要買」的意思即是任一項不可以為 0；故事題 8 中的「5 元」是否已包括 8%等。但也有「問題轉譯失敗」的時候，通常發生於傳統題 7，對「超過 20%(不含)為過重」的解釋錯誤，且是由「組 1＋組 3」的次數較多。

在「尋求模式」的歷程上，是不容易觀察的。因為有時學生們在討論完題目後，陷入沉默，各自思考，眼神專注於題目上。我們無法知道他們的想法，只

能由他們的外在行為與語言來判斷是否在「尋求模式」階段。在「形成問題表徵」方面，很多時候是由第一組學生向第四組學生說明題目的架構，例如傳統題 4 中，第一組學生解釋「＋1 就是多 50，－1 就是少 50」，試圖幫助第四組學生建立起對這個問題的解題輪廓。在「畫圖表徵問題」方面，「組 2＋組 3」出現次數較多以畫圖方式建立出問題的結構，有時是其中一方為了說明而畫，有時是兩人共同討論，但不一定畫的正確。(例圖可見附錄 8 中第 1 題的錯解 2)

「組 2＋組 3」的學生在合作解題時，交談較多，他們有時也以判斷題目難易做為尋求模式的方式之一，例如在傳統題 7 中，其中一小組的第三組學生說：*「哦!這題我有印象，這題真是恐怖。」*另外一小組也是在傳統題 7 中，第二組學生指著題目中「實際值範圍」，和他的伙伴討論答案的型式應該是「…＜實＜…」，並結論出*「這題很難」*。

研究者可以明顯地觀察到學生在故事題中「判斷訊息的有用性」的次數非常多，這也是與題目本身的性質有關，畢竟，傳統題的敘述短、句句都是解題線索；而故事題中的文字敘述較長，且同時包含著有用與無用的訊息。「組 1＋組 3」、「組 1＋組 2」討論訊息之有用性的次數較多，通常都是第一組學生向他們合作伙伴說：*「先看題目問什麼，再去找相關的」*，這種說明在每一個故事題都有發生。也有第一組學生向第四組學生表示：*「我都是跳著看。我們來找和第 6 題有關的」*；且第一組學生有時也會將題目的內文區分為數段，並在旁邊空白處標示出對應的題號，而後向第三組學生指示：*「這題你先看第二段就好了」*。

在觀察「擬定解法」的歷程時，研究者發現大部份的解題計劃是由其一中方直接提出來，然後才講解給對方聽，傳統題中以「組 1+組 2」、「組 1+組 4」次數較多，故事題除了「組 2+組 3」的次數和「討論解題計劃」的次數相當之外，其他三種組合的次數也較多。例如在傳統題 3，第一組學生看完問題後，直接向第四組學生說：*「先算一小時燒幾公分」*；傳統題第 10 題，第一組學生說：*「一種一種列出來啊!」*第二組學生亦是聽從指示列出所有買法，此時第一組學生在一旁監督其列表。故事題第 10 題，第一組學生說：*「把他們都化為一樣的，就是設每個阿嬤的力量是 1…」*，

第二組學生聞後就在題目附圖底下寫出數字。以上這些例子雖然都說明了第一組學生的強勢，但會有這個現象大部份也是因為合作組別的學生實在提不出合理的解題方法，只能在一旁等侯。有不少第一組(其和第四組合作)和第二組(其和第三組合作)學生，有「頓悟」的現象發生。通常是因為第四組學生完全無法提出看法，第一組學生為了解決問題，只好反覆自問自答、讀題，而突然地說：「我知道了！」或是「我看懂了！」。而第二組學生和第三組學生反覆討論題意之後，第二組學生突然領悟了解決之道，提出了解題方法。

「組 2+組 3」討論解題計劃的次數普遍較多。他們也會就曾經遇到類似問題而討論解法。例如在傳統題第 5 題，兩組學生討論著題目「增量 20%」的意思，第二組學生說：

「以前學過，20%就是 0.2，再加上本身 1，就是 1.2。如果 1.2x20，就會等於 24‥24 是什麼意思?」

而在形成解題計劃的過程中，此兩組學生也較容易有「放聲思考」的情況發生。例如在故事題 6，第三組學生複述問題多次，並延伸意義，進而計算出每分鐘雙方所需支付的錢。

當其中一方提出一個算式之後，通常會「尋求支持自己寫的算式」，或對方經由「詢問算式的意義」、「指出錯誤」、「精緻化基模假設」或「提出更好的方法」等方式以「確認或監控解題計劃」。在「尋求支持自己寫的算式」方面，仍以「組 2+組 3」的次數較多。例如傳統題 2、3：第二組學生邊寫式子，邊解釋其意義，且頻頻問第三組學生「對不對？」第三組學生若有正面回應，第二組學生就再繼續寫下去；故事題 8 中，第三組學生看到「付帳時要『再另外加上』8%的購物稅」，於是認為「5 元還沒包括 8%」，問第二組學生：「對不對？」，但第二組學生不說話，第三組學生：*「你都不講話，那我們再想一想…」*。

在「詢問對方算式的意義」方面，整體看來，故事題發生的次數多於傳統題。例如在傳統題 3，第一組學生看了問題後，寫出「3 小時 $7\frac{1}{2}$ 小時」，欲再繼續寫

下去時，第二組學生阻止他，並且一再地詢問這句話的意思；故事題 5 中，第三組學生指著第二組學生所寫的式子，說：

「你的意思是說，從美國打回台灣，每分鐘 31 元，台幣，…所以這個(手指著題目『你們以後假日打給我…』)比較便宜嗎？」

當其中一方提出錯誤的算式，進行監控的另一位合作伙伴便會指出其錯誤。有時是他已經知道對方列式錯了，但他會「讓對方嘗試錯誤後才說明」，有時則以「提出問題以挑戰對方的算式」，但大部份是「直接指出對方的錯誤」。因為有另一方的指正，才得以使其正確地進行下一步驟，最後終能順利解決問題，這是個人解題較無法達到的。例證方面，在傳統題 1，第一組學生看著第二組學生例出錯誤的式子 $\frac{35}{\cancel{4}}\times\frac{3}{\cancel{4}}=105$，第二組學生自己說：*「不可能…」*，第一組學生才告訴他弄錯了乘除法，也計算錯誤。也是在傳統題 1，第一組學生看到第三組學生將 $\frac{35}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$ 中的 $\frac{2}{3}$ 當作是剩餘的公升數，第一組學生就問他：

「你的 $\frac{2}{3}$ 不是餘數嗎？」「是啊，就是剩下的。」「每公升不是 1 公升，所以 $\frac{2}{3}$ 不是剩下的公升數。」「我聽不懂。」「嗯，那你用驗算的，就是把全部加起來，看是不是原來的 $8\frac{3}{4}$ 公升。」

第二組學生寫出 $\frac{33}{4}+\frac{2}{3}=\frac{99}{12}+\frac{8}{12}=\frac{107}{12}=8\frac{11}{12}$ 後：

「哦!不對!那 $\frac{2}{3}$ 是什麼？」「$\frac{2}{3}$ 是 $\frac{2}{3}$ 瓶，所以你要再乘以 $\frac{3}{4}$ 才對，因為 1 瓶是 $\frac{3}{4}$ 公升，題目是要問剩幾公升。」

在傳統題 2：第三組學生算出 18 枝後，說：*「18—$\frac{5}{9}$，對不對？」*第二組學生說：*「不是用減的，是用乘的」*，便是直接指出錯誤之處。在傳統題 8：第二組學生在題目中的「學生票」上方寫 x，「全票」上方寫 y(顯然是假設學生票一張 x 元，全票一張 y 元)，但他列的第二條方程式錯誤了：x－y＝20，第一組學生說：*「你寫反了，x、y 要對調」*。故事題 9 中：第一組學生說：*「先算 1 個杯墊」*，第二組學生打斷他，並提醒：*「題目說要買偶數」*。

當然，亦有計劃確認失敗的時候，例如根本就「沒發現對方列式錯誤」、詢問對方算式的意義，卻「不明白對方的說明」，甚而「引導對方到錯的方向」。例如，在「不明白對方的說明」方面，通常因為有些第一組學生使用較技巧性的解法、或是沒有流暢的解釋與引導能力，導致第四組學生無法理解其說明。例如傳統題 1：第一組學生不是寫 $\frac{35}{4}\div\frac{3}{4}=11\frac{2}{3}$，而是寫出 35÷3＝11…2，當然第四組學生無法理解餘數 2 的意義；傳統題 2 中，第一組學生已算出共有 18 枝冰棒，並寫出下一個步驟：$18\times\frac{5}{9}=10$，第四組學生問：*「為什麼不用倒數？」*（亦即他認為式子應寫成 $18\times\frac{9}{5}$），第一組學生無法回答，故第四組學生 4 只能理解到前一個中介答案(18 枝)。在「引導對方到錯的方向」方面，由於第一組學生對第四組學生解題能力的不肯定，所以當第一組學生提出錯誤看法，即使第四組學生說：*「是嗎？我覺得怪怪的」*，第一組學生仍堅持自己的看法才是對的，而第四組學生也只好接受了。例如在故事題 8：第一組學生喃喃說：

「5 元有包括 8%嗎？…嗯，應該有…」，「是嗎？我覺得怪怪的…好像沒有吧(第四組學生說)？」(第一組學生回應)「你看題目，應該是有才對」，

第四組學生沒有再反對，於是第一組學生列出式子：$\frac{108}{100}X=5$。

在確認解題計劃的過程中，有時也會出現其中一方提出更好的解法，或者提出二種以上的方法供對方選擇。例如在傳統題 10，第一組學生建用設未知數 x、y 的方法，但第二組學生提出*「應該從奶茶每瓶 10 元開始，會更快」*，第一組學生表示贊同；在傳統題 2：第一組學生提出兩種方法給第四組學生選：*「你要 $18\times\frac{5}{9}$，還是 $18\div9\times5$？」*。可見得這樣的第一組學生，對問題的理解是較為全面的，可以有一個以上的說明方法，增加第四組學生理解的機會。

至於「精緻化基模假設」與「重新界定問題」的發生次數不多，但以「組 2+組 3」較易觀察到。例如在傳統題 2，第二組學生認為一定是將 6 乘以或除以 $\frac{1}{3}$，他再次讀題，確認使用除法，並且解釋給第三組學生聽。在故事題 5 中，第一組

學生(其和第二組學生合作)認為 30.5 是重要的數字，是要除以 2.5 或是除以 0.4，他複述題目中「不加小費」一詞，眼神並在相關的敘述中上下來回對照問題，然後說：*「要先減去 2.5，再除以 0.4，對，就是這樣。」*而在故事題 9 中，第二組學生已算出所有的買法有三種，且認為已經是最後的答案，但第三組學生不同意，認為還要再減 1，兩人決定回頭再確認問題，重新介定題目要的答案，指出題目中「除了」兩個字的關鍵意義。

在觀察小組合作「執行方法」部份，「組 2+組 3」學生常有「分工」現象，意即相互負責一些運算，尤其是自己較為擅長的，有一小組學生甚至在過程中(故事題 6)，以心算術語交談，研究者當時無法理解，請其代為解說，該第三組學生說明他請合作的第二組學生計算 2.9×9，因為他*「小數的乘法，我不太會」*。

整體而言，彼此對「操作過程的監控」，仍以「組 2+組 3」學生次數較多。有時其中一方會「對一方計算結果表示同意或提出質疑」，或者「協助對方澄清計算結果」，當然也有可能「引導對方正確的計算方法，或提供相關計算計巧」。

在「對一方計算結果提出質疑」部份，例如在傳統題 3，第二組學生已寫出最後的答案 6 小時 36 分鐘，但第三組學生不認同，他說：*「我覺得你可能算錯了，你再算一遍。」*於是 2 人一起算，還是得到 6 小時又 36 分鐘，第三組學生突然注意到題目最後問的是「小時」，遂提議將 6 小時 36 分鐘換成小時，第二組學生同意，最後得到 6.6 小時。故事題 7 中，第三組學生在一旁監督第二組學生的運算，如果同意，就以「嗯…」表示，當第二組學生說：*「四捨五入…」*時，第三組學生馬上打斷他，說：*「加起來再四捨五入」*。在「協助對方澄清計算結果」方面，例如在故事題 6，第四組學生認為答案是否定的，第一組學生於是從頭再解釋所有的算式，以協助他明白答案應該是肯定的。傳統題 10 中，第一組學生以假設未知數 x、y 的方式得到錯誤答案，第二組學生提醒：*「你剛才不是說 2 種都要買嗎？所以不能寫 x=0」*，第一組學生立即修正，得到正確答案 9 種。而在「引導計算、提供相關計算計巧」方面，例如在傳統題 5，第一組學生提供、教導第三組學生小數乘除法的技巧(20÷0.75)。故事題 2 中，第一組學生以填空式問題引導第四組學生計算：*「18 分之多*

少會等於二分之一？」（意即 $\frac{?}{18}=\frac{1}{2}$）這樣類似製造次目標給第四組學生練習，對幫助他們完成計算頗有幫助。

可想見的，監控操作過程失敗，沒有發現對方算錯的例子也是有的。例如故事題 9，第一組學生忽略題目中的「還有」兩字，導致沒有將 3 種減去 1 種，而第二組學生也沒有發現這錯誤。

最後，在觀察小組合作解題中是否進行「判斷」方面，兩人對答案進行驗算，有時是為「求得兩人一致同意」，有時為其中一方為「協助對方檢核最後答案」。例如傳統題 10，最後第一組學生對第二組學生強調*「因為2種都要買」*，第二組學生點頭表示同意後，第一組學生才寫下最後答案。傳統題 8 中，第一組學生要求第四組學生把過程講一次，以確定第四組學生了解最後答案的如何得到的。

但如果遇到其中一方無法參與解題，如前述中大部份是「組 1+組 4」的學生，則有可能一方會「單獨確認答案」。例如傳統題 3，第一組學生講解所列式子的意義，但是第四組學生仍舊為題目中出現的時間(小時)、長度(公分)所困擾，於是第一組學生放棄再說明，獨自再次驗算，以確認自己的做法正確。

「一方因發現答案不對，而重擬解法」的情形較少，例如傳統題 6 中，第三組學生指出：*「最多可以買7瓶，所以最多350元」*，接著問第二組學生：*「那最少可以買幾瓶？」*，第二組學生說：*「嗯‥1瓶，所以是50元」*，兩人已經打算以此為答案，但第二組學生始終猶豫不決：*「我還是覺得奇怪‥(停頓了數分鐘)哦!我知道了!」*遂發展出正確的解法，再說明給第三組學生聽。

以上為對各種組合學生合作解題歷程的觀察。大致而言，每一種組合方式皆較個人解題有良好的成效。和諧幽默的對話產生情意上的支持，使得階段 0 的次數的大幅減少。整體而言，四種組合方式可略分為兩大類，第一類是第一組與其它三組的組合，亦即「組 1+組 2」、「組 1+組 3」、「組 1+組 4」；第二類則是第二組與第三組的組合，即「組 2+組 3」。在第一類組合中，第一組學生是主要的發

號施令者，較多單向的指令或指導。第二類組合中，第二、三組學生能產生較多的談話與討論，是雙向的溝通。第一類組合中，第一組學生常要鼓勵對方參與解題、向對方解題目中的數學名詞、協助對方建立解題的輪廓、指引文字敘述中，與題目相對應的段落、接以，提出並解說解題算式、教導對方相關的計算技術與技巧、最後協助對方檢核答案或獨自驗算。而第二類組合中，兩組學生間有趣但與解題無關的對話較多，解題氣氛愉快。他們討論題目中的數學名詞與問題的架構、相互提醒對方重要的線索與細節、討論解題計劃、分工計算、相互檢視過程後，再一起驗算結果，以求得兩人一致的同意。上述這兩類組合模式的解題行為差異摘要，如下表 4－7－7 所示。

表 4－7－7：兩類組合模式的解題行為差異摘要

行為＼分類	第一類	第二類
溝通模式	單向的指令或指導	雙向的討論與溝通
情意支持	鼓勵對方參與解題	解題氣氛愉快
理解題意	解釋名詞	討論名詞
尋求模式	協助對方建立解題輪廓	討論問題的架構
	指引與問題相對應的段落	互相提醒重要的訊息
擬定解法	由第一組直接提出並解說	直接提出與討論各半
	因反覆自問自答、讀題而頓悟	因反覆討論題意而領悟解法
執行方法	提供相關的計算技巧	分工計算，相互監控計算過程
判斷	協助對方檢核答案、獨自驗算	求得一致同意

對第一類的組合而言，成敗的結果似乎取決於第一組學生的耐心與教導方法，許多第四組學生對其沒有直接的幫助。對第一組學生而言，可能的情況有二：第一，其仍維持個人解題時的解題階段，沒有太大的進步；第二則是其為了教導

合作伙伴，獨自反覆思考後領悟了個人解題時所無法想通的解題方法，提升了解題階段。而其他組學生的角色則常是被動的—尤其是第四組學生，端賴於第一組學生是否擅於說明、引喻，或許其他組學生會有所理解，提昇理解階段；或許無法理解而沒有太多參與的機會，便無法提昇自我解題階段。

對於第二類的組合方式，亦即「組 2+組 3」的模式，成敗的結果並不單獨落在一人的身上，兩人對彼此都有重要的幫助。對第二組學生而言，第三組學生時常能提醒其重要的問題細節與解題線索，最後還能協助核對答案是否符合題意；對第三組學生而言，第二組學生常使其能由解題的文字面進入符號運算面，進入解題核心，並且能提供較為精確的計算方法與過程。他們相互間的討論、監控與修正，得以使他們能正確地進行下一步驟，最後終能順利解決問題，而這也是個人解題較無法達到的。

第八節 歸納與討論

本節為針對前面七節中各項研究結果，加以歸納與做出相關的討論。本節共分為四個部份，第一個部份為「各組學生在兩種文字問題的表現」；第二部份探討「各組學生的解題歷程」；第三部份討論「各組學生的錯誤類型」；第四部份則是探究「合作解題的成效」。

壹、各組學生在兩種文字問題的表現

下表 4—8—1 為歸納前面第一至三節的研究結果。由此表可看出，傳統文字問題方面，其與數學算術測驗結果完全相同，且相關分析、迴歸分析皆與此結果

表 4—8—1：背景能力對兩種文字問題的影響彙整表

學生在兩種文字問題得分的相依 t 考驗摘要(N＝203)

傳統題－故事題

平均數＝11.49　標準差＝9.45　t＝17.327***　***p＜.001

各組學生在各測驗之事後比較摘要 (Scheffé)(N＝203)

一、數學算術計算測驗	1 ＞ 2 ＞ 3 ＞ 4
二、語文測驗	1，3 ＞ 2，4
三、傳統文字問題	1 ＞ 2 ＞ 3 ＞ 4
四、故事文字問題	1 ＞ 2，3 ＞ 4

背景能力與兩種文字問題的高度正相關摘要(N＝203)

「數學算術計算測驗」與「傳統文字問題」，r＝.80, p＜.01

背景能力對兩種文字問題的迴歸分析摘要(N＝203)

（預測變項）	（可解釋的變異量）(adj.R^2)	（依變項）
數學算術計算測驗	63.4%	傳統文字問題
語文測驗	3.5%	
	（合計 66.8%）	
數學算術計算測驗	45.7%	故事文字問題
語文測驗	13.5%	
	（合計 59.0%）	

相呼應。前面第二章中所提到 Jordan & Montani(1997)探討兩類型學生：「數學學習困難—特殊領域」(MD-specific)與「數學學習困難——般領域」(MD-general)，與本研究中相互比較後，前者可類比為本研究中的第三組學生，後者則可類比為第四組學生，兩種文字題中，第三組學生的得分都較第四組學生來得高，與 Jordan 等人的研究結果相符合。

傳統文字問題即為常見的學校數學文字問題。其簡短的敘述已去情境化，且刻意刪除了與解題無關的訊息，故強調的是計算能力。長期地機械式演練大量這樣類型的問題，可能會形成抽象命題式的知識基模，導致「呆板的知識」(inert knowledge)，使得學生無法應用該知識於真實的問題解決情境中(Gagné, Yekovich & Yekovich, 1993)。因此 Cooper & Harries(2002)建議學校給予學生文字問題作為練習時，應安排一些希望學生有真實觀點的線索，亦即是與真實情境相關的問題。

然而，故事文字題的問題情境雖然是學生所熟悉的日常生活情景，但其包括許多無關的資訊，且有一些有用或重要的線索夾雜在題目的敘述中，不易發現，使得學生對故事題較傳統題感到困難許多(Yancy1981,引自古明峰，1998)，因此各組學生在故事題中表現得較差，此亦可由上表 4－8－1 看出。

Jordan, Hanich, & Kaplan(2003)以二至三年級兒童為對象，類似本研究般地將兒童分為四組：一為數學與閱讀無困難學生(normal achievement in math and reading, NA)、二為只有閱讀困難學生(reading difficulties but normal math, RD-only)、三為只有數學困難學生(math difficulties but normal reading,MD-only)、四為數學與閱讀皆有困難學生(math and reading difficulties,MD-RD)。其研究結果與本研究頗為相符：即 NA 與 RD-only 兩組學生在文字題上表現皆勝過 MD-RD 學生;MD-only 學生在單純數學算術方面與 MD-RD 學生無顯著差異，但在解文字題方面勝過 MD-RD 學生；而縱貫研究之後，MD-only 與 RD-only 兩組學生在解文字題方面無顯著差異。而本研究中，第二組與第三組學生在故事文字問題的表現上無顯著差異。為再深入探討這二組學生的差異，我

們由前面第四節探討各組解題歷程中，可以看到第二組學生雖有較好的算術運算能力，但其過於重視題目中的數字、讀題快、對故事題長篇的文字敘述沒有耐心詳讀，所以無法組織有用訊息而無從下手，而這也是第二組學生得分嚴重下降的主要原因。第三組學生則反之，他們讀題慢、一再重讀，花很多時間在分辨資訊的有用性及其關係，雖然可能計劃解題方法，但其較弱的數學運算能力，使其仍不能完整地解決故事文字題。

從上表 4－8－1 我們還可以看出，調整後的決定係數值(adj. R^2)略為提高，意即在故事文字問題中，「語文測驗」的預測力有些微的提昇，但「數學算術計算測驗」與「語文測驗」兩個預測變項合計對「故事文字問題」之預測力不若對「傳統文字問題」來得高(adj. R^2＝.590；adj. R^2＝.668)。這個結果顯示仍有其他重要因素能影響「故事文字問題」的表現，由前文第四節探討各組解題歷程的結果，本研究認同「努力不懈」(persevere)(Thom & Pirie, 2002)為成功解故事文字題的重要因素之一，亦即對問題是否能持續地嘗試，不要太早放棄解題。

貳、各組學生的解題歷程

由前文第四節的第一部份，使用卡方之獨立性考驗，我們知道「解題歷程階段」與「得分」有正相關存在。並且，在第一、二組學生在傳統文字題中，大多能達到執行計劃、檢核結果的高階段(4 和 5)，第三組學生約有 60%可達到高階段，但約有 30%是落在低階段(0~2)。第四組學生則只約有 35%達到高階段，其餘 62.5%是落在低階段的。但在故事題中，情況大為不同。除了第一組學生仍有高達 91%達到高階段，第二、三組學生大部份是停滯在 0~2 的低階段，只有大約 26%達到高階段。而第四組學生的情況更嚴重，有超過 50%沒有任何解題歷程。

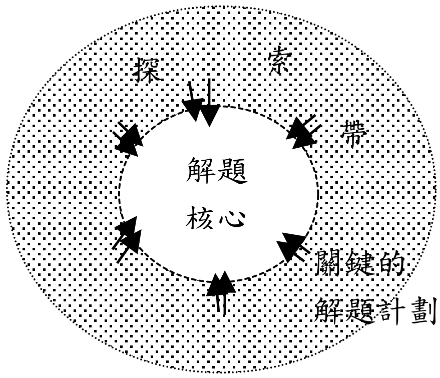
在上述學生自評解題歷程統整說明中，首先，不論是傳統題或故事題，較少學生勾選階段 3(擬定解法)，不是自評為 0、1、或 2，就是自評為 4 或 5。莊裕庭(2002)將學生區分為高、低數學成就，並且整理各學者的看法後，將解題歷程分為六個階段：讀題、探索、分析、計劃、執行、驗證。其中探索與分析階段

的內涵，恰如本研究中的「尋求模式」階段。莊裕庭(2002)在其研究中指出，不論高或低數學成就學生，其計劃階段大多不明顯，大部份都包含在執行階段或與執行階段連接，與本研究中結果相符。第一、二組學生解傳統文字題的過程非常流暢快迅，與平時練習較多有關，他們讀題之後，便直接列出解題算式、計算並得到答案。而其他在兩種文字題中，許多自評解題階段為 2 的學生，他們在探索的過程中，也做了一些簡單的列式與運算，但這些列式與運算都無法使他們進入解題核心，也無法得到重要的中介答案，故他們自評達到階段 2。

另外，達到「執行計劃」的大部份學生，沒有進行下一階段「判斷」的習慣。在傳統題中，只有對較無把握的問題，或是個人對於計算的過程感到不順利，才會回頭去檢驗算式，亦即是憑直覺或歷程順利與否來決定是否驗證自己的答案(莊裕庭，2002)。但在故事題中，第一、二、三組有部份的學生、第四組幾乎是全部的學生，無論是否察覺到自己的答案可能不對，都不會再進行判斷的檢驗工作，原因是故事題太多的敘述太長，有用與無用訊息雜混，他們沒有信心或是沒有能力再驗算。

綜觀每一組學生的解題歷程，本研究試著建立一個解題模型:「探索帶」、「解題核心」，如下圖 4－8－1 所示。成功的解題必須先經歷「探索帶」，才能進入「解題核心」。「探索帶」歷程的長短因解題者對題目的熟悉度而相異，學生的理解題意、尋求模式都在「探索帶」中發生，直到發展出一個關鍵的解題計劃，始進入「解題核心」，這個解題計劃能夠得到重要的中介或最後答案。在「解題核心」中，學生執行解題計劃，經由一連串的運算之後，得到最後的答案並進行檢驗。

第一、二組學生解傳統文字題時，在探索帶中理解題意，利用題目中的條件，組識成有效的算式，快速地進入解題核心。但在故事題方面，兩組學生處於探索帶的階段較長，第一組學生利用不斷地「重讀」(re-read)以過濾重要的訊息，並將這些訊息結構而成有用的算式，進入解題核心。但第二組學生無法掌控有用的訊息，組織錯誤，可能做出錯的推論以快速跳離探索帶，或是一直處於探索帶，失去耐心與信心，最後放棄解題。



（每一個「↖」都是可能的關鍵解題計劃）

圖 4－8－1：解題模型示意圖

第三組學生解兩種文字題時處於探索帶階段較長，常利用重讀以理解問題。縱然已理解題意，但不一定能列出關鍵的算式以進入解題核心。即使已進入解題核心，因為對特殊的數學運算不熟悉，所以也不一定能得到最後答案。

第四組學生在探索帶的階段最長，對於訊息的處理沒有結構，找不到或視而不見解題關鍵。在故事題中，幾乎就停留在探索帶中，找不到出口。

本研究綜合前文第二章第一節的第三部份(p.18)與本章第四節的第二部份(p.76)，將各組學生在兩種文字問題的解題歷程與 Pape(2004)對解題行為的分類相比較，可得到下表 4－8－2。其中 Pape 的二大類解題行為分別為 DTA(Direct Translation Approach)與 MBA(Meaning-Based Approach)。

本研究認為，在傳統文字題中，第一、二組學生對題目結構熟悉，得以自動地和高效率地轉譯問題元數至數學算式與計算，且其最後答案常是正確的，故可歸類為 DTA – proficient。在故事文字題中，第二、四組學生對閱讀可能有困難，對形成解法的過程非常猶豫，一再地尋求模式可能是唯一的解題行為。而計算過程與最後的答案可能是拼湊而來的；故將之歸類為 DTA-not proficient。而每一組在兩種文字題中，都有使用題目中不完全的訊息，將之直接轉釋為算式的現象，故四組學生都被歸類為 DTA-limited context。在故事題中，第一、三

組學生常不斷地重讀每一句話，專注於變項及變項間的關係。其組織訊息以支持整個解題過程，並且能試著解釋每一個算式的意義。其中第一組學生猶能檢驗最後的答案，故歸類於兩種 MBA；第三組學生經常無法順利完成數學運算，故只能歸類為 MBA-full context.

表 4－8－2：各組的解題歷程與五種解題行為的比較

組別 / Pape 的分類	第一組	第二組	第三組	第四組
DTA-proficient	V	V		
DTA-not proficient		V		V
DTA-limited context	V	V	V	V
MBA-full context	V		V	
MBA-justification	V			

參、各組學生的錯誤類型

張景媛(1994)綜觀各學者對於學生解決文字問題的看法，大約可略分為二種。一種認為學生的數學解題能力會因文字題中無關訊息的干擾而無法解決問題，例如 Muth (1991，引自張景媛，1994)。而另一種看法則認為問題生活化的方式較能引起學生的學習動機，使其持續注意力於問題情境中，增加順利解題的機會，例如 Davis-Dorsey, Ross, & Morrison (1991，引自張景緩，1994)以及黃明螢 (2000)。本研究因前面的研究結果，認為有故事背景的文字題雖能引發部份學生的興趣，也能使其考慮真實情況，產生數學文字題與生活情境上的聯結，但對大部份學生而言，第一次接觸到這種類型的問題，使他們感到極為困擾。尤其我們可以看到第二、三、四組學生，他們在「一片空白」的題數遠遠地超過傳統題。這些學生在張景媛(1994)對國中生數學文字題錯誤概念的分類中，屬於「語言知識的錯誤」，亦即「面對較長的數學文字題時，常不知重點所在，不知從何處著手，所以會立即放棄思考問題」。

在前文第五節中，我們統整各組出現較多的錯誤類型。若不分文字題種類地

將這些錯誤類型歸納與整理，再與張景緩(1994)之四種國中生數學文字題錯誤概念來比較，我們得到下表4－8－3。其中在第一組學生部份，其在故事題中，「忽略(因為)題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少(多)了一個計算步驟」的次數增加了許多。可能的原因是故事題的敘述綿長，使得該組學生的工作記憶非常忙碌，因此最後忘了或者多了一個步驟。第二、四組學生則是他們在故事題中，拼湊式子的次數或是比例增加了許多。第三組學生在兩種問題中，「列出與正確式子相似的算式」之次數都是四組最多的，同時他們在傳統題中，對百分比的意義不夠清楚；在故事題中，則是對時速的計算方法混淆及不了解不等式的相關用語。第四組學生在傳統題中，他們「有第一個步驟，但無法再繼續下去」的次數是四組最多的，而「列出與正確式子相似的算式」也達到15次。他們在故事題中「以生活經驗回答」的現象比在傳統題中嚴重地多，顯示這些沒有直接放棄解題的學生，對這類與生活相關的問題還有一些興趣，會嘗試用直覺的生活經驗回答問題。

Cardelle-Elawar(1992)認為改善學生的語文能力，有助於學生了解問題，間接提昇解題能力。由下表4－8－3，我們可以看出，第二、四組非常需要接受閱讀理解的再訓練。Thom & Pirie(2002)認為在解題的閱讀過程中自我提問(self-questioning)，能夠使得題目中的訊息變得有用和有意義(make use and sense)，亦即使學生對於問題核心「精確性」的重視(Whimbey & Lockhead, 1981)。

表4－8－3：各組的錯誤類型與四種錯誤類型的比較

組別 學者的分類	第一組	第二組	第三組	第四組
語言知識錯誤	○	●	○	●
基模知識錯誤			○	●
策略知識錯誤		○	●	●
程序知識錯誤			●	●

註：○表情況些許；●表情況嚴重。

每一組學生解題的過程中，至少都會有一些零星的數學概念錯誤。故教師在給予這類基模形成的初步教學時，除了要將定義講解清楚之外，尚要選擇適當的例子與反例說明，並且要讓學生自己產生例子(self-regulation)(Gagné et al, 1993)。若是基模的原型(prototypical)已構成，但並不是一個定義完整的基模(fuzzy schema)，則教師應該給予基模精鍊的教學支援。可以使用的方法之一是例子與非例子(non-example)的同時呈現，如同「類比教學」(analogies)。

本研究中，第三、四組學生「列出與正確式子相似的算式」的情況較為嚴重，顯示其策略知識不足，無法將題目中的有用資訊加以表徵和組織成完整的方程式。這樣的學生不清楚變項間關係，所列出來的式子常常是兩邊不相等的，亦即沒有正確的「等價概念」(the concepts of equivalent equations)(Rosnick, 1981；Steinberg, Sleeman, & Ktorza, 1990,引自張景媛，1994；Herscovics & Kieran, 1980)，因此教師應多注意一開始對假設的書寫，並且強調方程式等號兩邊的對等關係。另外，不要只給一種解題方法，鼓勵並肯定學生發明其它解法，並對這些解法給予詳細說明、比較；引導學生歸納解題策略，增加他們有效的解題經驗。

Jordan & Montani (1997)認為第三、四組學生需要加強程序性知識，亦即「自動化技能」(automatic skills)的加速技巧，故建議教師增加他們限時完成工作的經驗。傳統上的教學則是以反覆練習作為精熟技能的不二方法。Gagné 等人(1993)建議教師可以先讓學生精熟次技能或先備程序(subskills or prerequisite procedures)，接著再組合這些小技能為較大的程序，最後才是使使這些程序自動化。他們並且認為要使程序化技能能夠有用，必須要在各種情境中練習這些技能。

肆、合作解題的成效

Vygotsky(1978,引自 Tappan, 1998)的社會學習理論指出，較高的心理功能(例如概念性思考、邏輯性記憶、自我調節能力等)的起源係來自社會-溝通的交

互作用(social-communicative interactions)；亦即人與人心理間的互動可以內化形成個人內的心理功能。他認為和成人或較有能力的同儕合作能夠促進較高心理功能的發展，也因而促使本研究探究合作解題的成效。前文第六、七節中，本研究探討了合作解題之得分上與解題歷程上的差異。量化的分析方面，有各組之間的比較，以及組內個人的比較；質化的分析方面，描述各組合作解題的過程。

一、在組間比較方面

首先，各組合作解傳統題之後的得分，並無顯著差異，分數都很高，40 位學生平均分數達到 3.98 分(40 位學生個人解傳統題之平均分數為 2.80 分)。而各組合作解故事題之後的得分，經由事後考驗後，只有「組 1+組 3」顯著高於「組 1+組 4」。整體而言，平均分數達到 4.05 分，較個人解故事題的平均分數(2.09 分)高許多。

在解題歷程階段之組間比較方面，各組合作解兩種文字題後的解題歷程都偏高階段(4 或 5)，較個人解題進步得多。尤其是在故事題方面，各種組合的高階段的次數都較合作解傳統題後來得多。

二、在組內個人比較與質化描述方面

下表 4－8－4 是歸納整理前文第六節中表 4－6－3、表 4－6－4(各組學生在兩種文字題上個人得分與合作得分之相依 t 考驗結果)、與第七節中表 4－7－5(各組「個人解題」與「合作解題」的平均階段差異之 χ^2 值整理表)的結果。

由下表 4－8－4 可看出，整體而言，合作解題能夠促進學生解文字題的得分與提昇解題歷程階段，且在故事題的效果比在傳統題來得好。雖然可能的原因是全體學生在傳統題的個人表現，原本就較在故事題好，故進步空間不那麼大。但也說明故事文字題以同儕合作的方式進行對分數及歷程的幫助較大，故合作解題可能是較適合較為複雜或是生活化的數學問題。此對合作解題的教學方式是一個重要的結果。尤其是本研究中的故事文字題對學生個人解題而言是非常困難的，

但透過合作解題，藉由同儕之間的對話，使得問題得以被解決。如同 Vygostsky 之社會互動觀點，口語化語言扮演著重要的角色，同儕互動中將名詞字義做逐字解釋的成分對認知發展而言，可能是關鍵點(Mintzes, Wandersee, & Novak, 1998)。

表 4－8－4：「個人解題」與「合作解題」之比較結果彙整表

組別	組合方式	人數	得分(相依 t 考驗) 傳統題	得分(相依 t 考驗) 故事題	歷程(χ^2改變顯著性) 傳統題	歷程(χ^2改變顯著性) 故事題
第一組	組一＋組二	5		*		*
	組一＋組三	5				
	組一＋組四	5				
	合計	15		*		*
第二組	組一＋組二	5		*		*
	組二＋組三	5	*	*		*
	合計	10	*	*		*
第三組	組一＋組三	5	*	*		*
	組二＋組三	5	*	*		*
	1 合計	10	*	*	*	*
第四組	組一＋組四	5	*	*	*	*
	合計	40	*	*	*	*

由上表 4－8－4、及前文第六、七節中亦可看出，對第一組學生而言，不論是得分或是解題歷程階段的提昇，效果似乎不如其他組學生來得好。但前文中本研究也指出，這可能是因為第一組學生的表現原本就較其他組來得好，故無法再有太顯著的進步。另外，本研究認同 Fantuzzo, Riggio, Connelly, & Dimeff (1989)的看法。他們指出近年來的研究顯示「交互同儕指導」(reciprocal peer tutoring, RPT)的過程使得教導者與被教導者都受益。甚至在一些研究報告中顯示，教導者比被教導者顯著地在認知方面獲得更多進步。那些為了教導同儕而學

習的學生，得到更深入的概念理解、提昇個人本質上的動機、且更投入、參與解題情境。因此本研究認為，第一組學生即使在合作之後的得分與解題歷程階段較個人解題沒有顯著差異，但內化的概念與基模精鍊是很可能存在而無法以外在行為被觀察出來的。

Fantuzzo 等人(1989)的研究結果也顯示，交互同儕指導學習除了使學生的認知方面獲得進步(cognitive gains)之外，並且也降低了與課業表現有關的精神壓力(psychological stress associated with academic performance)。大致而言，本研究中的每一種組合方式皆較個人解題有良好的成效。而和諧幽默的對話產生情意上的支持，使得階段 0 的次數的大幅減少，亦頗為符合 Greeno, Collins, & Resnick (1996)的看法：來自於社群中參與關係的認同，是學習動機的來源。當學生參與學習被看重的社群時，就會投入學習中。如果學生愈投入，且與同儕互動良好，他們將更樂於學習。

前文第七節最後，本研究將四種組合方式約略分為兩大類，第一類是第一組與其它三組的組合，亦即「組 1+組 2」、「組 1+組 3」、「組 1+組 4」；第二類則是第二組與第三組的組合，即「組 2+組 3」。兩類組合模式的解題行為特徵已摘要於表 4－7－7 中。我們看到第一類的組合模式是由能力較強的一方帶領能力較弱的一方建構解題歷程，頗為符合「鷹架支持」(scaffolding)的隱喻。Roth(1995, 引自 Mintzes 等人，1998)描述鷹架支持是提供支援予不能獨立完成作業的學生。這種依賴關係(dependant relationship)類似於專家-生手形態。

而第二類的組合模式是由能力較為互補的兩方所形成，因此產生的口語互動、意見交換較多。Rogoff(1991，引自 Mintzes 等人，1998)認為這種同儕在「相同平面」(equivalent planes)的合作關係上，並沒有太明顯的專家或生手之別，而是兩個個體共同學習、創造意義。

第五章 結論與建議

本章共分為三節，首先根據前面第四章的研究結果與討論，彙整成為本研究的結論；接著是提出本研究在數學教育實務上的應用；最後則是說明本研究的研究限制及探討未來相關研究的可能方向。

第一節 結論

本研究將學生依其語文理解能力與數學計算能力的不同而分為四組：第一組為「數學計算與語文理解皆未發生困難的學生」、第二組為「語文理解困難學生」、第三組為「數學計算困難學生」，而第四組學生為「數學計算與語文理解同時發生困難的學生」。接著對其施以兩種數學文字問題：「傳統文字題」、「故事文字題」，探究其個人與合作解題之得分、解題特徵與解題歷程。在得分方面，研究者以統計方法考驗其得分差異的顯著性；在解題特徵與解題歷程方面，研究者以質的觀察與學生自評方式，描述其個人與合作之解題行為。以下即針對本研究之研究結果統整而成結論，共分為兩個部份陳述之。

壹、各組學生解兩種文字問題的情況

本研究探究四組學生解決兩種文字問題的情況，包括得分上的差異、解題歷程、與錯誤類型。根據前面的研究結果與討論，得到的結論如下所述。

一、得分差異

首先，在傳統文字題方面，各組經由事後分析比較，發現其得分高低呈現第一組>第二組>第三組>第四組的情況，與數學算術測驗結果相同，且相關分析、迴歸分析皆與此結果相互呼應，表示此類常見的學校數學文字問題，其簡短的敘述已去情境化，故強調的是計算能力。

在故事文字題方面，各組經由事後比較，發現其得分高低呈現第一組>第二、三組>第四組，而迴歸分析中語文理解的預測力也略為提昇，顯示第二組與第三

組學生在故事題中各有困難產生，因而無顯著差異。

以上的研究結果，與 Jordan 等人(2003)的研究結果頗為相符。另外，由於「數學算術計算測驗」與「語文測驗」兩個預測變項合計對「故事文字問題」之預測力並不高(adj. R^2=.668)，因此本研究認為仍有其他重要因素能影響「故事文字問題」的表現。其中，「努力不懈」(persevere)(Thom & Pirie, 2002)可能即為重要因素之一，亦即對問題是否能持續地嘗試，不要太早放棄解題。

二、解題歷程

本研究綜合各學者對解題歷程的看法，將其分為五個階段：1、理解題意；2、尋求模式；3、擬定解法；4、執行方法；5、判斷。本研究使用卡方獨立性考驗方法，結果發現「解題歷程階段」與「得分」之間有正相關存在。在學生自評解題歷程方面，傳統題部份，第一、二組學生大多自評達到執行計劃、檢核結果的高階段(4 和 5)，第三組學生約有 60%可達到高階段，第四組學生則只約有 35%達到高階段，其餘 62.5%是落在低階段(0~2)的。但是在故事題中，除了第一組學生仍有高達 91%達到高階段，第二、三組學生大部份是停滯在 0~2 的低階段，只有大約 26%達到高階段。而第四組學生的情況更嚴重，有超過 50%為一片空白。

較為特殊的是，在兩種文字題中，較少學生勾選階段 3(擬定解法)、且達到「執行計劃」的大部份學生，沒有進行下一階段「判斷」的習慣，此結果與莊裕庭(2002)的研究結果頗為相符。本研究認為，不論哪一組學生，其計劃階段大多不明顯，大部份都包含在執行階段或與執行階段連接；而只有對較無把握的問題，或是個人對於計算的過程感到不順利，才會回頭去檢驗算式，亦即是憑直覺或歷程順利與否來決定是否驗證自己的答案。

本研究亦嘗試建立一個解題歷程的模型，如前文圖 4－8－1 所示。成功的解題必須先經歷「探索帶」，才能進入「解題核心」。「探索帶」歷程的長短因解題者對題目的熟悉度而相異，「理解題意」、「尋求模式」都在「探索帶」中發生，直到發展出一個關鍵的「解題計劃」，始進入「解題核心」。在「解題核心」中，學生執行解題計劃，經由一連串的運算之後，得到最後的答案並進行檢驗。本研

究中，第一、二組學生解傳統文字題時，在探索帶裡組識訊息為有效的算式，快速地進入解題核心。但在故事題方面，兩組學生處於探索帶時間較長，第一組學生利用不斷地「重讀」(re-read)過濾訊息，並結構而成有用的算式，進入解題核心。但第二組學生無法掌控有用的訊息，組織錯誤，可能做出錯的推論以快速跳離探索帶，或是一直處於探索帶，失去耐心與信心，最後放棄解題。第三組學生解兩種文字題時處於探索帶階段較長，常利用重讀以理解問題，但不一定能列出關鍵的算式以進入解題核心。即使已進入解題核心，因為對特殊的數學運算不熟悉，所以也不一定能得到最後答案。第四組學生在探索帶的階段最長，對於訊息的處理沒有結構，找不到或視而不見解題關鍵。在故事題中，幾乎就停留在探索帶中，找不到出口。

三、錯誤類型

本研究認為有故事背景的文字題雖能引發部份學生的興趣，使其考慮真實情況，但對大部份學生而言，這類型的問題使他們感到極為困擾，也表現得較差。尤其我們可以看到第二、三、四組學生，他們在「一片空白」的題數遠遠地超過傳統題。

本研究試著將各組的錯誤類型與張景媛(1994)之四種國中生數學文字題錯誤概念來比較。其中第二、四組學生於故事文字題中，有明顯的「語言知識錯誤」，需要接受閱讀理解的再訓練(Cardelle-Elawar, 1992)。而第三、四組學生則需要加強程序性知識，亦即「自動化技能」(automatic skills)的加速技巧(Jordan & Montani, 1997)。

貳、各組學生合作解題的成效

本研究探討各組學生合作解題之得分與解題歷程的差異。量化的分析方面，有各組之間的比較，以及組內個人的比較；質化的分析方面，描述各組合作解題的過程。

一、在組間比較方面

各組合作解傳統題之後的得分，並無顯著差異，分數都很高。而各組合作解故事題之後的得分，經由事後考驗後，只有「組 1+組 3」顯著高於「組 1+組 4」。

在解題歷程階段之組間比較方面，各組合作解兩種文字題後的解題歷程都偏高階段(4 或 5)，較個人解題進步得多。尤其是在故事題方面，各種組合的高階段的次數都較合作解傳統題後來得多。

二、在組內個人比較與質化描述方面

整體而言，合作解題能夠促進學生解文字題的得分與提昇解題歷程階段，且在故事題的效果比在傳統題來得好。雖然對於第一組學生而言，即使在合作之後的得分與解題歷程階段較個人解題沒有顯著差異，但本研究認同 Fantuzzo 等人(1989)的看法，認為第一組學生之內化的概念與基模精鍊是很可能較其合作伙伴更為深入的。另外，各組學生在合作解題的過程中，和諧幽默的對話產生情意上的支持，使得故事題之階段 0 的次數的大幅減少，亦頗為符合 Greeno 等人(1996)的看法：來自於社群中參與關係的認同，是學習動機的來源。

最後，本研究將四種配對組合約略分為兩大類，第一類是第一組與其它三組的組合，亦即「組 1+組 2」、「組 1+組 3」、「組 1+組 4」；第二類則是第二組與第三組的組合，即「組 2+組 3」。第一類的組合模式是由能力較強的一方帶領能力較弱的一方建構解題歷程，頗為符合「鷹架支持」(scaffolding)的隱喻，類似於專家-生手形態。而第二類的組合模式是由能力較為互補的兩方所形成，因此產生的口語互動、意見交換較多。類似同儕在「相同平面」(equivalent planes)的合作關係(Rogoff, 1991，引自 Mintzes 等人，1998)，沒有太明顯的專家或生手之別，而是兩個個體共同學習、創造意義。

第二節 在數學教育上的應用

本研究探究不同的「數學算術能力」與「語文理解能力」的學生，解兩種文字問題的情況，以及初探合作解題的成效。結果發現學生在傳統文字問題方面的表現依數學算術能力的不同而有所差異；在故事文字問題方面，各組學生則有不同的解題困難；而合作解題能提昇學生解題之得分與解題歷程階段，故事題成效尤高。本研究結果在數學教育上可能的應用主要有二，首先幫助學校教師易於區分數學學習困難的學生之障礙來源；第二，提供一些可能適合各組的教學建議。

一、易於區分困難來源：

本研究的研究對象為國中的普通班級學生，而非資源班學生。且本研究將學生區分為四組的依據，並非使用特殊的鑑定量表，而是利用每一所學校新生入學時必然施測的國民中學智力測驗。這對於大部份教授普通班數學科目的教師而言，是非常容易取得的資料，也很容易區分其不同的數學解題困難可能原因。

二、合適的教學建議：

(一)閱讀理解策略

要增進學生的數學學習，必須也增進他們的閱讀能力(Fuentes, 1998)。由本研究結果，我們推測第二、四組學生可能更能夠從閱讀理解策略訓練中提昇數學文字問題解決能力。已有許多的學者從事這方面的研究，例如 Siegel & Fonzi(1998)、Borasi & Siegel(1998)、McIntosh(1997)、McIntosh 和 Bear(1993)等，其研究指出閱讀策略能促進學生理解數學文本(making sense in mathematics texts)，而且更可以將這些文本當作探索數學想法的媒介，並且學生討論數學概念的次數也增加了。學校中的數學教師不妨和國文教師合作協同教學，使學生投入一個動態的閱讀過程，運用推理能力與自己的想法，提昇對數學文本的理解。

(二)清晰的教學過程

本研究結果中，學生不完全明白某些概念的內涵，例如不等式的用語與表示方法等。因此教師呈現一個新的數學概念時，應注意將定義講解清楚之外，尚要選擇適當的例子與反例說明，並且讓學生自己產生例子(Gagné et al, 1993)。

另外，由本研究結果中，第三、四組學生面對問題中的變項時，並不清楚其間的關係，也不了解等號的等價關係。因此教師若從事代數問題的教學，應多注意一開始對假設的書寫內容、強調方程式等號兩邊的對等關係。且在教導解題過程中，可鼓勵學生回憶與解題有關的概念或公式,以協助解題計劃的擬定。另外，不要只給一種解題方法，肯定學生發明其它解法，並對這些解法給予詳細說明、比較。接以，應鼓勵學生在獲得答案後,以驗算等方式來偵錯。最後，引導學生歸納解題策略，增加他們有效的解題經驗。

在執行計劃與運算技巧方面，應培養學生熟練的程序性知識，使其自動化。Gagné 等人(1993)建議教師可以先讓學生精熟次技能或先備程序，接著再組合這些小技能為較大的程序，最後才是使這些程序加速地自動化。

(三)小組合作的學習模式

Denise(1997)認為數學溝通技巧是成功地解決數學問題的基礎。而本研究經由前面的研究結果，認為兩人一組的組合方式可以提昇解題的得分與歷程。因此合作解題是一個重要的未來的研究與教學方向。教師欲讓學生進行合作學習解題前，應先教導學生人際合作技巧。剛開始可以兩人一組，讓學生練習闡述自己的想法。教師應清楚地解釋作業要求，並提供時間討論、監控其合作過程。最後讓每一組展示他們的解法，並由其他學生與教師對其提供適當的回饋與建議。

第三節 研究限制與建議

一、研究限制

本研究因人力、時間限制，僅以新竹市某一國中二年級的九個班學生為預試與正式研究對象，因此研究結果之推論有其限制性。而且本研究的文字問題內容為代數與四則運算、故事題的編撰風格與能力可能也受到了研究者自編的限制，因此推論到其他的數學領域，諸如幾何與機率，或是不同的故事題編寫方式，都有其侷限。

另外，為使評分、分類具有一致性，本研究在正式施測前進行預試，計算評分者信度，包括文字題評分、解題歷程階段自評；在錯誤類型部份，則以研究者尊重專家意見下而自行分類。雖然本研究力求評分的一致性與穩定性，但仍難免受到個人主觀之影響，此亦為一研究限制。

二、建議

本研究將不同數學計算能力與語文理解能力的學生分為四組，探究其在兩種文字問題的解題情況。研究結果顯示傳統文字題主要受到了數學計算能力的影響；而故事文字題對大部份學生而言是非常困難的，且每一組學生的解題困難不盡相同；另外，本研究也指出，整體而言，合作解題的成效是非常不錯的，提昇了得分和解題歷程階段。承此，本研究對未來可能的研究方向亦提出一些建議。

首先，如上所述，在樣本的選擇地區、年級、數學問題的範疇、故事題述敘風格、評分者的人數等，可以在未來的研究加以擴展，增加結果的可推論性。

第二，由於本研究採用一般國民中學智力測驗結果為分組依據，為使學生不同的背景能力更為明確，故建議未來的研究可以使用更專業的學習困難鑑定量表，甚至研究樣本可以延伸為特教班學生。

第三，鑑於本研究中，每一組學生個人解故事文字題的表現皆較解傳統題差，而迴歸分析中亦指出除了數學算術計算能力、語文理解能力兩變項之外，還

有其它重要因素影響解題結果。因此未來研究方向或許可以探討影響學生解決故事文字題的其它因素，兼以學生在解此類型問題中的後設認知能力之運作情形。

第四，本研究在前文中也提出了因應不同組別學生的可能之教學策略與介入。或許有興趣的研究者們可以試著為各組學生設計一些建構取向的教學活動，並探究這些教學活動的影響與成果。

第五，對大部份學生而言，故事文字題長篇的述敘常使他們沒有耐心繼續解題。故未來研究可以考慮以多媒體電腦呈現問題情境，或許能使學生更能融入情境，產生「沉浸式學習」(immersion learning)(邱貴發，1996)，願意更努力的投入解題。

最後，本研究的結果指出，合作解題的成效良好，提昇了兩種文字題的得分及解題歷程。顯示合作解題應該是後續研究的重要方向之一。然本研究中，僅以四種配對、倆倆一組的模式進行初探研究。是故後續研究中，或許可以考慮增加合作解題的配對模式及各組人數，以及讓合作的學生回頭再進行個別解題，以更深入地探究合作解題的功效。

參考文獻

古明峰（1998）。數學應用題的解題認知歷之探討。教育研究資訊，6(3)，63-77.

邱貴發（1996）。情境學習理念與電腦輔助學習—學習社群理念探討。台北市：師大書苑。

何淑真（2003.6.1）。芬蘭的基礎教育。民 94 年 3 月 2 日，取自高雄市教師會教育政策中心：http://perc.kta.org.tw/

杜佳真（1997）。建構論在數學教學上的應用。科學教育研究與發展，7，14-23。

林清山（1992）。心理與教育統計學。台北市：東華。

林清山、張景媛（1993）。國中生後設認知、動機信念與數學學習之關係暨代數應用題教學策略效果之評估(I)。師範大學教育心理學報，26，115-137。

吳吉昌（1995）。國中數學科個別化補救教學實驗研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

陳致麟（2004.5.25）。搶救台灣中文溝通表達能力!。民 94 年 3 月 2 日，取自：http://www.voy.com/9406/220.html

陳雅玲（2004）。搶救台灣中文力。商業週刊，861，15-23.

莊裕庭（2002）。國二高低數學成就學生解題之後設認知個案研究。高雄師範大學數學研究所碩士論文，未出版。

教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北市：教育部。

張春興（1994）。心理學。台北市：東華。

張景媛（1994）。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。師範大學教育心理學報，27，175-200。

袁媛（1993）。國中學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

黃敏晃（1998）。數學年夜飯。台北市：心理。

黃明瑩（2000）。探討幾何問題中的情境及相關變因對解題影響之研究。臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版。

路君約、盧欽銘（民 80）。國民中學智力測驗。台北市：中國行為科學社。

劉天民（1993）。高雄地區國一學生整數與分數四則運算錯誤類型之分析研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

詹秀美（1989）。問題解題能力的訓練與評量。資優教育，32，13-16。

蔡培村（1994）。思考活動與教學。林生傳主編，教育心理學。台北：五南圖書。

羅汝惠（1993）。台灣南區國中數學科解題導向教學法與傳統教學法之教學成效比較研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

顧玉池 （2000）。高雄縣高一學生數學小組合作教學對函數學習成就影響之研究。高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

Appleton, K. (1993). Using theory to guide practice: Teaching science from a constructivist perspective. School Science and Mathematics, 93(5), 269-274.

Bodner, G. M. (1986). Constructivism: A theory of knowledge. Journal of Chemical Education, 63(10), 873-878.

Borasi, R., & Siegel, M. (1998). Using transactional reading strategies to support sense-making and discussion in mathematics classrooms: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 275-305.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.

Case, R., & McKeough, A. (1990). Schooling and the development of central conceptual structures: An example of from the domain of childrens' s narrative. International Journal of Educational Research, 13, 835-856.

Cardelle-Elawar, M. (1992). Effects of teaching metacognitive skills to students with low mathematics ability. Teaching and Teacher Education, 8, 109-121.

Charles, R. I., & Lester, F. K. (1982). Problem solving: What, why, and how. Palo Alto, Calif: Dale Seymour publications.

Cooper, B., & Harries, T. (2002). Children' s responses to contrasting 'realistic' mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? Educational Studies in Mathematics, 49, 1-23.

Cuoco, A. A., & Goldenberg, E. P. (1996). A role for technology in mathematics education. Journal of Education, 178(2), 15-32.

Davis, P. J., & Hersch, R. H. (1981). The mathematical experience. Boston: Birkhauer.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1989). Teaching word problems in the primary school: What research has to say to the teacher. In G. Mulhern, & B. Greer (Eds.), New directions in the mathematics education. NY: Routledge.

Denise, M. K. (1997). Using cooperative learning to improve reading and writing in mathematical problem solving. Reading & Writing Quarterly, 13, 71-82.

Dirk De, B., Wim Van, D., Dirk, J., & Lieven, V. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. Educational Studies in Mathematics, 50, 311-334.

Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., & Scott, P. (1994). Constructing scientific knowledge in the classroom. Educational

Researcher, 23(7), p5-12.
Eylon, B. S., & Linn, M. C. (1998). Learning and instruction: An examination of four research perspectives in science education. Review of Educational Research, 58, 251-301.
Fantuzzo, J. W., Riggio, R. E., Connelly, S., & Dimeff, L. A. (1989). Effects of reciprocal peer tutoring on academic achievement and psychological adjustment: A component analysis. Journal of Educational Psychology, 81(2), 173-177.
Fuentes, P. (1998). Reading comprehension in mathematics. Clearing House, 72, 81-88.
Glass, A. L., & Holyoak, K. J. (1986). Cognition. NY: Random House.
Gagné, R. M. (1970). The conditions of learning. NY: Holt, Rinethart & Winston.
Gagné, E. D., Yekovich, C. W, & Yekovich, F. R. (1993). The cognitive psychology of school learning. NY: HarperCollins College.
Greeno, J. G., Collins, A. M., & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), Handbook of educational psychology (p.15-46). New York: Macmillan.
Griffin, M. M., & Griffin, B. W. (1998). An investigation of the effects of reciprocal peer tutoring on achievement, self-efficacy, and test anxiety. Contemporary Educational Psychology, 23, 298-311.
Hart, L. R. (1993). Some factors that impede of enhance performance in mathematical problem solving. Journal for Research in Mathematics Education, 24, 167-171.
Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. Mathematics Teacher, 73(8)，572-580.
Hiebert , J., & Wearne, D. (1988). Instuction and cognitive change in mathematics. Educational Psychologist, 23, 105-117.
Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.). Handbook of Research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan.
Hersch, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), New directions in the philosophy of mathematics (pp. 9-28). Boston: Birkhauser.

Jordan, N. C., & Montani, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities, 30,

624-634.
Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. Child Development, 74, 834-850.
Kane, M. (1993). Alternative assessment. CA: Dale Seymour Publications.
Kehney, H. (1993). Problem solving: Current issues(2nd ed.). Philadelphia: Open University Press.
Kilpatrick, J. (1985). A restrospective account of the past 25years of research and teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspective. NJ: LEA, Hillsdale.
Kilpatrick, J. (2002). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. Educational Studies in Mathematics, 47, 101-116.
Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, 92(1), 109-129.
Kintsch, W. (1989). Learning from text. In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Galser. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Kitcher, P. (1984). The nature of mathematics knowledge. Oxford: Oxford University Press.
Larkin, J. H. (1989). Robust performance in algebra: The role of the problem representation. In S. Wagner., & C. Kieran (Eds.). Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. NT: Lawrence Erlbaum Associates.
Lave, J. & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral Participation. New York：Cambridge University Press.
Lawrenc, A. K., & Ronald, J. S. (2001). Predicting reading and mathematics achievement in fourth-grade children from kindergarten readiness scores. Journal of Educational Psychology, 93(3), 451-455.
Leblanc, J. F., Proudfit, L., & Putt, L. J. (1980). Teaching problem solving in the elementary school. In NCTM year book, Problem Solving in School Mathematics. Reston Virginia: NCTM.

Marshall, S. P., Pribe, C. A., & Smith, J. D. (1987). Schema knowledge structure for representing and understanding arithmetic story problems. Arlington, VA: Office of Naval Research.

Marshall, S. P. (1995). Schemas in problem solving. NY: Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (1975). Different problem solving competencies established in learning computer programming with and without meaningful models. Journal of Educational Psychology, 67, 725-734.

Mayer, R. E. (1987) Educational psychology: a cognitive approach. Boston: Little, Brown and Company.

Mayer, R. E. (1992). Thinking, problem solving, cognition. NY: W. H. Freeman and Company.

Mcaloon, A., & Robinson, G. E. (1988). How do you evaluate problem solving? Arithmetic teacher, 35, 44-91.

McIntosh, M. E., Bear, D. R. (1993). Directed reading-thinking activities to promote learning through reading in mathematics. Clearing House, 67, 40-44.

McIntosh, M. E. (1997). Guide students to better comprehension of word problems. Clearing House, 71, 26-32.

Mintzes, J. J., Wandersee, J. H., & Novak, J. D. (1998). Teaching Science for Understanding. NY: Academic Press.

Muth, K. D. (1991). Effects of cuing on middle-school students' performance on arithmetic word problems containing extraneous information. Journal of Educational Psychology, 83(1), 173-174.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Pape, S. J. (2004). Middle school children's problem-solving behavior: A cognitive analysis from a reading comprehension perspective. Journal for Research in Mathematics Educaion, 35(3), 187-219.

Polya, G. (1957). How to solve it: A new aspect of mathematical method. NY: Doubleday.

Polya, G. (1962). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. NY: Jonh Wiley & Sons, inc.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg (Ed.), The development of mathematical thinking. Orlando, Flofida: Academic Press.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Mathematics Teacher, 74(6)，418-520.

Schank, R. C. & Edelson, D. J. (1989). AI is education: Using technology to reshape education. Journal of Artificial Intelligence in

Education, 1(2), 3-20.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In A. G. Douglas (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NY: Maxwell Macmillan International.

Siegel, M., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 378-413.

Tappan, M. B. (1998). Sociocultural psychology and caring pedagogy: Exploring Vygotsky's "hidden curriculum". Education Psychologist, 33, 23-33.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. B. (2002). Problems, perseverance, and mathematical residue. Educational Studies in Mathematics, 50, 1-28.

Tsai, C. C. (1998). Science learning and constructivism. Curriculum and Teaching, 13(1), 31-52.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Process. NY: Academic Press.

Von Haneghan, J. P. (1990). Third and fifth graders' use of multiple standards of evaluation to detect errors in word problems. Journal of Educational Psychology, 82(2), 352-358.

Wandersee, J. H., Mintzes, J. J., & Novak, J. D. (1994). Research on alternative conceptions in science. In D. L. Gabel (eds.), Handbook of research on science teaching and learning. NY: Macmillan.

Whimbey, A., & Lockhead, J. (1981). Problem Solving and Comprehension. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

附錄一、傳統文字問題測驗及解答

各位同學好：
這份數學題目主要的目的，在於了解同學們解決應用問題時的學習沉狀。最後的結果僅供老師研究用，不會對你們的其它成績造成任何影響。請你們安心作答。

你可以在題目上做任何你覺得有必要的記號，並請你把計算過程(包括你所用的任何方法、圖表)寫在你的答案紙上。

教師　葉家綺

基本資料：班級：二年____班，座號：_____號姓名：____________

1、$8\frac{3}{4}$公升的果汁，每$\frac{3}{4}$公升裝成一整瓶，共可以裝成整瓶果汁幾瓶？

還剩幾公升無法裝成一瓶？

解：　$8\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{35}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$（瓶），$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$（公升）

答：共可裝成 11 瓶果汁，剩下$\frac{1}{2}$公升無法裝成一瓶。

2、媽媽將 6 碗綠豆湯分裝在冰棒盒中，製做綠豆冰棒。

已知每枝冰棒盒可裝入$\frac{1}{3}$碗的綠豆湯，媽媽將製成的冰棒總數的$\frac{5}{9}$送給隔壁鄰居王媽媽吃，則媽媽留下多少枝冰棒？

解：　$6\div\frac{1}{3}=18$（枝），　$18\times\frac{5}{9}=10$（枝）

18－10＝8（枝）

答：8 枝。

3、一枝長 24 公分的蠟燭，燃燒 3 小時後，長度剩下$16\frac{1}{2}$公分，按此燃燒速度，則該支蠟燭全部燒完還需多少小時？

解： $24-16\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$（公分）

$7\frac{1}{2}\div3=\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{2}$ （公分/小時）

$16\frac{1}{2}\div\frac{5}{2}=\frac{33}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}$ （小時） 答：$6\frac{3}{5}$小時

4、陳老師每天買菜的預算為 400 元，若今天花 450 元買菜，則她會在帳本上記錄「＋1」，若花 300 元買菜，則記錄「－2」。下表為她本週的帳本記錄，則她本週共花多少元買菜？

星期	一	二	三	四	五	六	日
記錄	＋3	－1	＋2	－3	－2	＋4	＋1

解 1： 3－1＋2－3－2＋4＋1＝4

50×4＝200(元)，400×7＝2800(元)，2800＋200＝3000(元)

解 2： 550＋350＋500＋250＋300＋600＋450＝3000(元) 答：3000 元

5、味好公司新推出一種運動飲料，原價每瓶 20 元，現在為了促銷以打開市場知名度，提出了 A、B、C 三種降價方案：

A 案為原價打 75 折；

B 案為買 2 送 1；

C 案為容量增加 20%，且價格不變。

則那一種方案降價最多？

解： A 案 20×0.75＝15 （元/瓶）

B 案 20×2＝40，$40\div3=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$（元/瓶）

C 案 $20\div1.2=20\div\frac{6}{5}=20\times\frac{5}{6}=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$（元/瓶） 答：B 案降價最多

6、鮮奶每瓶 50 元，小明身上的錢最多可買 7 瓶，則小明身上的錢數

最多可能是多少元？最少可能是多少元？

解： 50×7＝350（元）

50×8＝400，400－1＝399（元）　　答：最多 399 元，最少 350 元

7、若女警的標準體重為：身高減去 70 再乘以 0.6。

超過標準體重的 10%(不含)，稱為過重；超過 20%(不含)為過胖。

若一女警身高 165 公分，其體重為過重但不是過胖，則其體重的實際值範圍

為何？

解：(165－70）×0.6＝57（公斤）

57×1.1＝62.7（公斤），　57×1.2＝68.4 （公斤）

答：62.7 公斤<實際體重≦68.4 公斤

8、小英一家人到博物館玩，爸爸買了 2 張學生票和 3 張全票，共付了 110 元，

已知學生票每張比全票便宜 20 元。請問學生票每張多少元？

解： 設一張學生票 x 元，則一張全票為(x+20)元

2x＋3(x＋20)＝110

2x+3x+60＝110

5x＝50

x＝10　　答：10 元

9、在換季大拍賣時，媽媽花了 594 元買了一件照原價打 6 折的裙子，那麼

這條裙子原價是多少元？

解： 594÷0.6＝990(元)　　答：990 元

10、養樂多一瓶 5 元，奶茶一瓶 10 元，小明拿 100 元去超商買這兩種飲料，

若兩種都要買且花完 100 元，請問小明有幾種買法？

解 1： 100÷10＝10（種）

10－1＝9（種）

解 2： 設養樂多買了 x 瓶，奶茶買了 y 瓶

則 5x+10y＝100，求 x、y 的正整數解

x	18	16	14	12	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9

答：9 種

附錄二、故事文字問題測驗及其解答

各位同學好：
這份數學題目主要的目的，在於了解同學們解決像故事述敘般的應用問題的情況。最後的結果僅供老師研究用，不會對你們的其它成績造成任何影響。
請你們安心作答。

你可以在題目上做任何你覺得有必要的記號，並請你把計算過程(包括你所用的任何方法、圖表)寫在答案紙上。另外，請將題號標示清楚。　　教師葉家綺

基本資料：班級：二年____班，座號：_____號　姓名：____________

A、　　阿亮今年九月要升國二了，他打算要好好利用這個暑假。他想起媽媽在上學期開學初即答應他，只要他這學期作業確實繳交，暑假就讓他一起去美國舊金山的阿姨家玩一段時間。他這得這學期得勝者課程的家長回條忘了交一次，隔天補交之外，其餘功課幾乎都在老師規定的時間內交齊。在放暑假之前，阿亮跟媽媽說他這個暑假想去阿姨家玩。

媽媽想一想，回答他說，「你這學期的交作業情況大致上還都良好…好吧！我可以讓你跟我去阿姨家玩，但是有一個條件，就是你必須先把這個暑假的時間規劃好，包括把寫暑假作業的時間算進去，才能讓你一起去。」

阿亮的各科暑假作業加起來，共有 30 張學習單、10 篇閱讀心得報告，他估計每張學習單、每一分心得報告都大約要花 3 小時才能完成。他又問媽媽：「如果有去阿姨家，大概要待幾天？」媽媽回答他：「不一定，要看你自己的規劃，光坐飛機來回就要四天了，總共停留的天數接近一個月就可以了。」阿亮想一想後，決定向媽媽展現他上學期所學的分數概念，於是他向媽媽列出暑假時間計劃來：「暑假的前$\frac{1}{3}$時間，我要拿來寫學習單，而整個暑假的$\frac{1}{2}$時間，包括坐飛機，我想在美國阿姨家渡過，回國後應該會有時差問題吧？休息 3 天好了。…這樣暑假就剩了$\frac{1}{9}$，那剩的$\frac{1}{9}$暑假就拿來寫沒寫完的學習單和閱讀心得報告好了！」媽媽被他的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{9}$弄得昏頭轉向，不知道他到底計劃多少天寫作業、多少天出國玩？阿亮看到媽媽的反應後，得意的哈哈大笑呢！

問題：

1、阿亮今年暑假到底放假幾天？

2、阿亮打算出國幾天？

3、如果阿亮想要在計劃時間內完成所有的暑假作業，則他每天平均要花幾

小時寫作業？

解：1、設阿亮今年暑假放假 X 幾天

$\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}X+\frac{1}{9}X+3=X$

$\frac{17}{18}X+3=X$

X＝54（天） 答：54 天

2、 $54\times\frac{1}{2}=27$（天） 答：27 天

3、 $54\times\frac{1}{3}+54\times\frac{1}{9}=18+6=24$（天）

$(30+10)\times3=120$（小時）

$120\div24=5$（小時/天） 答：5 小時

B、 阿亮和媽媽、姐姐阿美在前往舊金山的飛機上，三人覺得時間過得好久。於是阿亮拿起了旅遊書，看看當地的旅遊資訊，書上說到：

「舊金山是一個多元的城市，各色人種和諧相處，而特別的是它對同性戀者的包容力，同性戀的家會插上彩虹旗，和異性戀者比鄰而居。…

在時差及氣溫方面，舊金山比台灣慢了 15 小時，八月雖然是夏天，但最高氣溫也只有攝氏 20 度左右。…

在稅金方面，購物需加付 8%的消費稅。住宿則需加付 14%的住房稅。

在交通方面，從機場到市中心，可以搭民營的小巴士(shuttle)或是坐計程車。小巴士的票價介於 10~14 美元之間(每人)，而計程車則是跳表式的，0~265 公尺收費 2.5 美元，超過 265 公尺的部分，每滿 320 公尺加收 0.4 美元，不滿 320 公尺，則以 320 公尺計算。……」

阿亮問媽媽：「我們到達後，阿姨會來接我們嗎？」媽媽說「會啊，我跟她約我們抵達後的 40 分鐘在出境大廳外面。」「為什麼要 40 分鐘？」阿亮問。「笨!還要等行李啊!」姐姐阿美嘲笑地說。

終於下了飛機，阿亮有一種很奇妙的感覺，他記得「今天下午」才從桃園搭飛機，過了二十幾個小時，怎麼下飛機後的時間是「今天上午」？彷彿時光倒回呢!媽媽告訴他，這就是時差的不適應感。

坐上阿姨的車，阿亮發現公路邊的里程標示著 $\boxed{184}$(公里)，當時時間是早上 10:35，過了一會兒，當他再發現路邊的里程標示著 $\boxed{171}$(公里)時，時間已經是 10:50 了，他想看阿姨開多快，但是他就坐在阿姨的後方，所以看不到。

阿姨看阿亮對著車窗外，似乎看呆了，她跟媽媽說：「你們坐飛機一定很累了吧？等會兒到家裡先休息一下。」媽媽笑著說：「我還好，但這兩個孩

子第一次坐這麼久的飛機，時差可能還沒調適過來。對了，真是謝謝你還來接我們，不然我們三人提著這麼多行李坐計程車的話，加上小費，不知道要花多少錢呢!」阿亮聽到「計程車」三個字，突然「醒」來似的問：「阿姨，如果你沒來接我們，從機場到你們家，坐計程車大概要花多少錢？」阿姨想一想，回答：「如果不加小費，大概 30.5 美元吧!」姐姐「哇」的一聲叫出來，「那不就是台幣 1000 多元？真是太貴了!」全車人聽到阿美的話，哈哈哈地笑起來。

問題：

4、阿姨開車的時速是每小時多少公里呢？

5、阿姨家離機場大約是幾公尺呢？(寫出實際值的範圍來)

解：4、 184－171＝13（公里）

50－35＝15（分鐘） $15 \div 60 = \frac{1}{4}$（小時）

$13 \div \frac{1}{4} = 52$（公里/小時） 答：每小時 52 公里

5、 30.5－2.5＝28（美元）

$28 \div 0.4 = 70$（次）

$70 \times 320 = 22400$（公尺） $69 \times 320 = 22080$（公尺）

22400＋265＝22665（公尺）

22080＋265＝22345（公尺） 答：22345 公尺＜實際值≦22665 公尺

C、 到了阿姨家，媽媽隨即打電話給在台灣的爸爸報平安。在媽媽撥號的時候，阿美問：「阿姨，從舊金山打回台灣，要怎麼撥？」阿姨很快地回答說：「先撥 011、886，再打你們家的區域碼 3，再撥你們家的電話就好啦!」阿亮又接著問：「那打回台灣會不會很貴？」阿姨想一想後說：「嗯…上次我打回台灣和你們外婆聊，通話 20 分鐘，電話費是 18 美元，這樣應該算貴吧？」阿美說：「阿姨，我爸爸也常打國際電話給在加拿大的叔叔，我爸爸用的是中華電信 019 方案，在優惠的時段內，打到美國、加拿大，每通電話的前九分鐘費率是每分鐘 2.9 元，第十分鐘起費率一律是每分鐘 0.19 元。當然我說的是台幣啦!」阿姨聽了說：「優惠的時段一定不是上班時間吧？」阿美不了解

上班時間是什麼時間，她說：「我不知道平時的時段怎麼區分，但是我知道周六、日全天，都是這個費率。」阿姨說「如果以一美元換算成 35 元台幣的話，看來你們以後假日打電話給我，比我打電話給你們會更便宜哦!」

媽媽打完電話後，阿姨決定帶大家去市區逛逛，順便吃點東西，但由於市區停車非常不方便，所以她打算叫計程車。阿亮說：「阿姨，我們可不可以坐『叮噹車』去？」「『叮噹車』？哦!你說的是『纜車』、『Cable car』吧？可以啊，可是我們得走一小段路哦，『叮噹車』可沒有直接停在我們家門口啊。」

坐在『叮噹車』上，因為舊金山市高低起伏的地形，搭乘時就像坐雲宵飛車一般，上坡下坡地，很有趣。下了車，為了留下回憶，阿亮拿起了相機，請家人幫他拍一張和『叮噹車』的合照。同時，他很想知道『叮噹車』的車身有多長，於是他從車頭走到車尾，走了 15 步之後，發現再$\frac{1}{3}$步就走完了。阿姨看阿亮對『叮噹車』都這麼好奇，於是提議等一下吃完東西，去買幾張『叮噹車』的風景明信片！

他們來到了著名的觀光景點「漁人碼頭」(Fisherman’s Warf)，在一家名為「波丁酸麵包工廠 (Boudin Sourdough Factory)」的餐廳坐下來。阿姨說：「這裡以前是個海港，很多義大利人在這裡捕魚後，直接賣給店家，所以食物都是很新鮮的。我們就來吃「麵包碗」(bread bowl)吧！再配上剛煮熟的丹金尼斯巨蟹 (Dungeness Crab)，真是太過癮了！」原來，阿姨所謂的「麵包碗」就是一個很大很硬的麵包，裡面挖空，再盛入奶油蛤蜊湯。

這是阿亮來到舊金山的第一餐，他覺得口味比台灣來得鹹，他想：「難道外國人都吃這麼鹹嗎？」但是基於禮貌，他沒有把這個想法說出來。他瞄了一眼菜單，看到一份「麵包碗」竟然要 5 元!付帳時要再另外加上 8%的購物稅，「真是好貴!」阿亮心裡想。他覺得兩邊比起來，台灣在吃的方面，真是「好吃、便宜又大碗」。阿姨看到阿亮不說話，知道他還沒適應這裡的口味，她說：「很鹹吧？我剛開始也不習慣。不過吃太鹹的確對身體不好，所以外面的東西還是偶爾吃就好了。等一下，我帶你們去「藝術宮」(Palace of Fine Arts)走走吧，那是個公園，很美哦!」

問題：

6、阿姨說「你們以後假日打電話給我，比我打電話給你們會更便宜哦!」
這句話是對的嗎？請你實際算算看。(請以一美元換算成 35 元台幣來計算)

7、如果阿亮的每一步長是 85 公分，則叮噹車大約是幾公分？(請四捨五入到整數位)

8、實際上一份「麵包碗」是多少美元呢？

解：6、 $(18\times35)\div20=31.5$ (元/分鐘)　　答：是

7、$85\times15+85\times\frac{1}{3}=1275+28.333\cdots\fallingdotseq1303$ (公分)　　答：1303 公

8、 5×1.08＝5.4　　答：5.4 美元

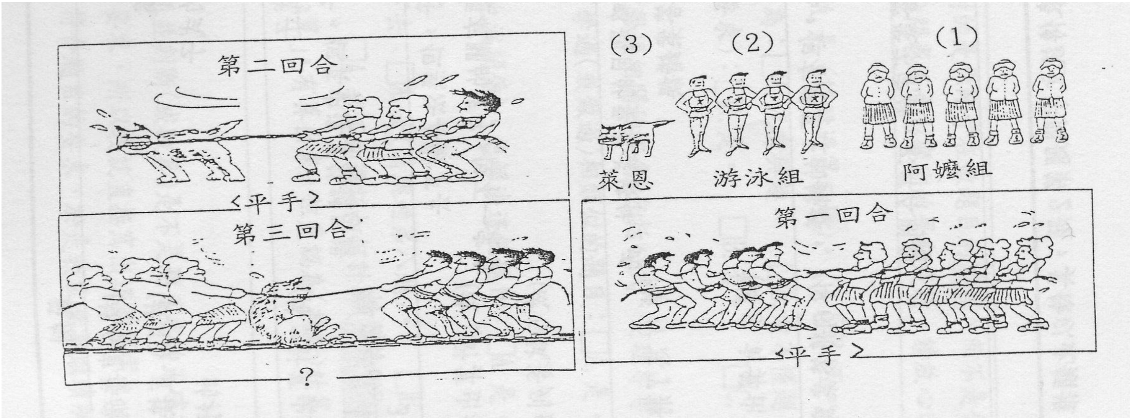
D、　開學後的第一個週休二日，因為媽媽要去參加大學同學會，所以爸爸決定帶阿亮和阿美去台北市中正紀念堂廣場的愛心園遊會逛一逛，下午順便去看資訊展。

園遊會上人好多，也有許多有意思的攤位。有捏麵人、棉花糖、各種飲料製作、喜憨兒蛋糕、也有現場壓花教學製作…等，阿亮、阿美看得目不轉睛。天氣好熱，爸爸買了三份「油炸冰淇淋」，三人一邊吃一邊逛，走著走著看到一輛捐血車。爸爸說他打算去捐血，阿亮和阿美也想加入，可是爸爸說不行，因為只有年齡在 16~65 歲、身體健康的人才能捐，而他們兩個都未滿 16 歲，所以只能在旁邊看囉!

雖然他們兩姐弟都不能捐血，但爸爸為了獎勵他們倆有這份愛心，所以決定給他們 200 元(總共 200 元，不是每人 200 元哦!)自由購買一些紀念品帶回家。阿亮想買玻璃飾品，像小狗、小豬這些可愛的動物，每個 10 元；阿美想買壓花杯墊送給媽媽，而且她堅持要買偶數個，每個 30 元。他們兩爭吵不休，因為都想買到最多各自想要的東西，但他們決定不管怎麼買，一定要把 200 元用完。看他們一直沒有結論，爸爸不耐煩的說，姐姐阿美買 4 個杯墊，家裡一人一個，阿亮買 8 個，不就好了嗎？!姐弟兩「哦!」的一聲，不敢再說下去，因為他們知道爸爸快要生氣了!

買完東西後，園遊會開始廣播，原來要開始「趣味拔河比賽」了。比賽的隊伍有三隊，第一隊是「阿嬤組」，由 5 個 55~65 歲的阿嬤組成，她們每年都會參加這項比賽；第二隊是「兒童游泳選手組」，由 4 個五或六年級的男生組成，他們參加學校游泳隊已經一年了；第三隊是「萊恩組」，萊恩是一隻經過特殊訓練的救難狗，一旦牠跳到水裡，一定會緊緊咬住溺水者的領子，游到岸邊之前決不鬆口。

首先是第一回合，由第一隊和第二隊比賽，結果是平手。真是出乎阿亮的意料之外!接著進行第二回合，一邊是萊恩，另一邊是第一隊的 2 個阿嬤、第二隊的 1 個男生。大家看到這個組合，笑到眼淚都掉出來了，阿美和爸爸一直為萊恩加油，結果兩邊還是平手。最後一回合，右邊是第二隊全體隊員，左邊是第一隊的 3 個阿嬤，加上萊恩。主辦單位為了增加趣味性，要求現場民眾猜猜那一邊會贏。爸爸也要阿亮和阿美猜一猜，那邊會贏？猜對的人，爸爸會送他一個捏麵人哦!



問題：

9、除了爸爸所說：「阿美買 4 個杯墊，阿亮買 8 個玻璃飾品」這個買法之外，還有幾種買法可以解決阿美和阿亮買紀念品的爭執？(請務必寫出計算過程)

10、雖然影響拔河比賽勝負結果的因素有很多，但如果從數學的角度上來看，去除一些意外的狀況，根據前面第一、二回合的線索，你認為第三回合是右邊還是左邊會贏？(請寫出你的想法或計算方法)

解：9、 設阿美買 X 個杯墊，阿亮買 Y 個玻璃飾品

則 30X＋10Y＝200 求 X、Y 的整數解，且 X 必為偶數

X	2	4	6
Y	14	8	2

但需扣除原來的買法 3－1＝2（種） 答：2 種

10、假設第一組平均每個阿嬤的力量為 X、

第二組平均每個游泳選手的力量為 Y、第三組萊恩的力量為 Z

則根據第一回合與第二回合，可得到：

$$\begin{cases} 4Y=5X \\ Z=2X+Y \end{cases}$$

而第三回合的左邊為 3X＋Z，亦即為 3X＋2X＋Y＝5X＋Y

右邊為 4Y，亦即為 5X

左邊比右邊多了一個 Y 的力量，故研判左邊贏。 答：左邊

附錄三、文字問題的評量指標

得分	指標	範例
0	A、完全空白 B、沒有任何算式，卻有答案 C、一開始即列出完全無關的式子	(故 6)直接猜答案爲「是」，沒有任何說明 (故 10) 直接猜答案爲「左邊」，沒有任何說明，或說明中僅是個人感覺的抒發，沒有使用到數學的概念
1	A、列出一個與解題有關的式子 B、列出一個解題的關鍵式子，但其中運算符號用錯	(傳 7)計算出標準體重：(165－70)×0.6=57 公斤，但之後的式子都錯誤 (傳 2)將 $6\div\frac{1}{3}$ 寫成 $6\times\frac{1}{3}$
2	A、 列出一個解題的關鍵式子，但無法再做下去 B、 試著再列出第二個與解題有關的式子，但不一定有做下去，或不一定做對	(故 1)計算出初步的式子：$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$ ，但沒有再做下去 (故 5)試著列出第二個式子：69×320，與 70×320，但沒有再做下去
3	A、算出極相關的答案，但忽略題目的要求或條件，而少了一個步驟，使最後的答案錯誤	(傳 1) 忘了將 $\frac{2}{3}$ 乘以 $\frac{3}{4}$，而直接寫 $\frac{2}{3}$ 公升 (傳 3) 計算出 $16\frac{1}{2}\div 7\frac{1}{2}=2\frac{1}{5}$，沒有再乘以3，直接以 $2\frac{1}{5}$ 小時爲答案
4	A、已將最後一個步驟做出來，但有運算上的錯誤，導致最後的答案錯誤 B、已經將答案計算出來，但答案不完備，不符合問題	(傳 6)將答案寫成：350 元≤錢數 π 400 元
5	A、算式與答案完全正確	

註：範例中的括號，例如(傳 2)代表傳統文字問題第 2 題，其餘以此類推

附錄四：解題歷程自評表

各位同學好，以下的十個問題，針對的是你剛才在做題目的過程，而不是你做題目的結果。 請在符合自己情況的□內打∨，這份問卷不會影響你的學期成績，請放心回答每個問題。

1、我有把題目的內容看完一遍：□A. 是（請跳過第二題）。　□B. 否。

2、我沒有把題目的內容看完，是因為：□A. 沒有興趣。　□B. 看不懂題目的意思。□C. 其它：________________

3、我了解題目的意思(明白題目的要求)：□A. 是。　□B. 否。　□C. 不確定。

4、我有試著想一想，以前是不是有學過相關的概念(包括公式、定理等等)：□A. 是。□B. 否。

5、我有試著想一想，以前是不是有學過(或做過)相類似的題目：□A. 是。　□B. 否。

6、我有試著列出式子(不一定正確也沒關係)，想解決這個題目：□A. 是。　□B. 否(本問卷結束)。

7、我列出式子後，我有繼續運算下去：□A. 是(請跳過第八題)。　□B. 否。

8、我沒有繼續運算下去，是因為：　□A. 我不知道該如何計算(本問卷結束)。　□B. 我在心裡面「心算」，但是算不出來(本問卷結束)。　□C. 我在心裡面「心算」，有算出來，但是認為(判斷)計算後的結果不是這個題目最後要的答案，所以就不寫出來了(本問卷結束)。　□D. 其它：________________(本問卷結束)。

9、我對我最後寫的答案，有想一想並判斷(或驗算)是不是題目要的正確答案：□A. 是。　□B. 否(本問卷結束)。

10、判斷的結果：□A. 符合題目的要求，所以我就直接寫出這個答案。　□B. 不符合題目的要求，所以我又回頭重新再想一想有沒有其他的解決辦法。　□C. 不符合題目的要求，於是我放棄再繼續解題。

附錄五、解題歷程評鑑的指標

階段	指標	作答內容之參考指標	與自評表勾選對應
0	A、 無解題動作發生，或 B、 試著閱讀問題的敘述，但因為某些原因不再做下去。	■ 一片空白，或 ■ 寫出的東西與解題毫無相關。	1A→3B→4B→5B→6B 1B→2 任選
1	A、 有嘗試著閱讀問題的敘述，且 B、 可能明白問題的要求為何	■ 將問題中的關鍵問句做記號，或 ■ 將問題敘述以圖形或表格表徵，或 ■ 其他。	1A→3A 或 C→4B→5B→6B
2	A、思考是否有相關的先備經驗，例如再回頭重新檢視問題或有停頓情況。		1A→3A 或 C→4A→5A 或 C→6B →4B→5A
3	A、擬定問題的解決方法	■ 列出可能與解題有關的式子。	1A→3A 或 C→4A→5A 或 C→6A→7B→8A 或 D →4B→5A
4	A、 針對所列的式子，進行運算 B、 針對所列的式子，進行心智上的評估	■ 針對列出的式子，有進一步的演算。	1A→3A 或 C→4A→5A 或 C→6A→7A→9B →4B→5A →7B→8B
5	A、對於運算的結果進行判斷	■ 針對結果，進行驗算。	1A→3A 或 C→4A→5A 或 C→6A→7A→9A→10 任選 →4B→5A →7B→8C

附錄六、錯誤類型類目表

錯誤類型	項目	編碼	內容
一、操作錯誤	1、計算錯誤	1-1-1	1、四則運算錯誤
	2、概念錯誤	1-2-1	1、運算子選擇錯誤
		1-2-2	2、無法將變項順利轉譯成代數式子(例如，寫出與正確式子相似的算式)
		1-2-3	3、解方程式過程中的系統性程序錯誤 (例如，移項錯誤)
	3、忽略可運算的數據	1-3-1	1、忽略(因為)題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少(多)一個計算步驟
	4、拼湊算式	1-4-1	1、將題目中的數字拼湊出一些算式
	5、非關答案的操作	1-5-1	1、所寫的運算完全無法回答問題、或與問題無關
二、不適當的習慣	1、忽略重要敘述	2-1-1	1、忽略沒有數字的重要句字
	2、直覺性反應	2-2-1	1、改變題目的限制(四捨五入、估計…等)
		2-2-2	2、刻意忽略一些錯誤現象
		2-2-3	3、以關鍵字作答，套入以前學過的公式
		2-2-4	4、以生活經驗回答，即使與問題明顯不符合
三、一片空白	1、完全沒有作答	3-1-1	1、沒有任何操作，交白卷

二、「無法將變項順利轉譯成代數式子」之內容

a. 對餘數的概念錯誤。b. 誤解有關時間的敘述。c. 時間單位的換算錯誤。d. 對時速的計算方法混淆。e. 不了解百分比的意義。f. 不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法。g. 不了解折扣的意義。h. 對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤。i. 列出與正確式子相似的算式。j. 有第一個重要步驟，但無法再繼續下去。

附錄七、傳統文字問題的錯誤類型範例

1、$8\frac{3}{4}$公升的果汁，每$\frac{3}{4}$公升裝成一整瓶，共可以裝成整瓶果汁幾瓶？
還剩幾公升無法裝成一瓶？

【錯解 1：四則運算錯誤】

$8\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=8\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=8$　　答：8 瓶，0 公升

【錯解 2：對餘數的概念錯誤】

$8\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$　　答：11 瓶，$\frac{2}{3}$公升

【錯解 3：對餘數的概念錯誤】

35÷3＝11…2　　答：11 瓶，2 公升

【錯解 4：改變題目的限制--四捨五入、忽略沒有數字的重要句子】

$8\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}=11.666\cdots\fallingdotseq 12$　　答：12 瓶

2、媽媽將 6 碗綠豆湯分裝在冰棒盒中，製做綠豆冰棒。
已知每枝冰棒盒可裝入$\frac{1}{3}$碗的綠豆湯，媽媽將製成的冰棒總數的$\frac{5}{9}$送給隔壁鄰居王媽媽吃，則媽媽留下多少枝冰棒？

【錯解 1：選運算子選擇錯誤】

$6\times\frac{1}{3}=2$　　$2-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$枝

【錯解 2：忽略沒有數字的重要句子】

$6\div\frac{1}{3}=18$　　$18\times\frac{5}{9}=10$　　答：10 枝

3、一枝長 24 公分的蠟燭，燃燒 3 小時後，長度剩下$16\frac{1}{2}$公分，按此燃燒速度，則該支蠟燭全部燒完還需多少小時？

【錯解 1：四則運算錯誤】

24－16.5＝7.5　7.5÷3＝1.5　16.5÷1.5＝11 小時

【錯解 2：對中介答案的意義混淆】

24-16.5=7.5，　$7.5\div3=\frac{5}{2}$，　$\frac{33}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}$

$6\frac{3}{5}-3=3\frac{3}{5}$　　答：$3\frac{3}{5}$小時

【錯解 3：對中介答案的意義混淆】

$\frac{48}{2}-\frac{33}{2}=\frac{15}{5}$(3 小時)，　$24\times\frac{2}{15}=\frac{16}{5}$時　　答：$\frac{16}{5}$小時

【錯解 4：列出與正確式子相似的算式--忽略題目中的已知條件】

$16\frac{1}{2}=\frac{33}{2}$ 公分，　$\frac{33}{2}\div\frac{3}{1}=\frac{33}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{2}$小時

【錯解 5：有第一個重要步驟，但無法再繼續下去】

$24-16\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$

【錯解 6：將題目中的數字拼湊出一些式子】

$24\div16\frac{1}{2}=\frac{16}{11}$小時

【錯解 7：將題目中的數字拼湊出一些式子】

$\frac{33}{2}\div3=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$

$24-16\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$

$7\frac{1}{2}-5\frac{1}{2}=2$　　答：2 小時

【錯解 8：忽略沒有數字的重要句子】

24－16.5＝7.5　7.5÷3＝2.5　24÷2.5＝9.6　　答：9.6 小時

【錯解 9：改變題目的限制--四捨五入】

24－16.5＝7.5　7.5÷3＝2.5　16.5÷2.5＝6.6≒7　　答：7 小時

【錯解 10：改變題目的限制--粗略估計】

$24-16\frac{1}{2}=7.5$

3 小時燒 7.5 公分

6 小時燒 15 公分　　答：約 7 小時

【錯解 11：改變題目的限制—粗略估計、四則運算錯誤】

3 小時燒了 $8\frac{1}{2}$ 公分

6 小時燒了 18 公分　$8.5\div 3=2.8\overline{3}$

1 小時燒了 $5.8\overline{3}$ 公分　　答:7.5 小時

【錯解 12：改變題目的限制—粗略估計、忽略沒有數字的重要句子】

24－16.5＝7.5

7.5 公分花了 3 小時

24 公分要花 9 小時又多一點吧

so, 應該是 10hr　　答:10 小時

【錯解 13：改變題目的限制—刻意忽略一些錯誤現象】

$23\frac{2}{2}-16\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$

3 小時燒 $7\frac{1}{2}$ 公分

$\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}=2\frac{1}{2}$ ＝1 小時燒

$\underbrace{7\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}}_{6hr}=15$

$16\frac{1}{2}-15=1\frac{1}{2}$　　答：6 小時

4、陳老師每天買菜的預算為 400 元，若今天花 450 元買菜，則她會在帳本上記錄「＋1」，若花 300 元買菜，則記錄「－2」。下表為她本週的帳本記錄，則她本週共花多少元買菜？

星期	一	二	三	四	五	六	日
記錄	＋3	－1	＋2	－3	－2	＋4	＋1

【錯解 1：列出與正確式子相似的算式--不了解題目中正負記號的意義】

1350＋150＋900＋900＋300＋1800＋450=5850 元

5、味好公司新推出一種運動飲料，原價每瓶 20 元，現在為了促銷以打開市場知名度，提出了 A、B、C 三種降價方案：

A 案為原價打 75 折；

B 案為買 2 送 1；

C 案為容量增加 20%，且價格不變。

則那一種方案降價最多？

【錯解 1：不了解百分比的意義】

說出「百分比的題目，我不會算」，並且在 A 和 B 方案中，選一個當作最後的答案。

【錯解 2：不了解百分比的意義】

A 案：20×0.75＝15 元

B 案：送 20 元

C 案：$+\frac{20}{100}\%=\frac{1}{5}\%$，$20\times\frac{1}{5}=4$ 元　　　　答：B

【錯解 3：以生活經驗回答】

答：B 案。可能比較多人買。

6、鮮奶每瓶 50 元，小明身上的錢最多可買 7 瓶，則小明身上的錢數
最多可能是多少元？最少可能是多少元？

【錯解 1：忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟】

50×7＝350，50×8＝400　　　　　　　　答：最多 400 元，最少 350 元

【錯解 2：忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟】

50×7＝350　　　　　　　　答：最少：350 元，最多：350 元以上都可以

【錯解 3：非關答案的操作】

43　　　　　　　　　　　　　　　　答：最多 396 元，最少 350 元

【錯解 4：改變題目的限制--改變單位】

50×7＝350　　　　　　　　　　　　答：最多 390 元，最少 350 元

【錯解 5：改變題目的限制--改變單位】

50×7＝350

350＋40＝390　　　　　　　　　　答：最多 390 元，最少 350 元

7、若女警的標準體重為：身高減去 70 再乘以 0.6。
超過標準體重的 10%(不含)，稱為過重；超過 20%(不含)為過胖。
若一女警身高 165 公分，其體重為過重但不是過胖，則其體重的實際值範圍為何？

【錯解 1：四則運算錯誤】

(165－70)×0.6＝165－42＝123

【錯解 2：不了解百分比的意義】

95×0.6＝57　　　　　　　　　　　　　　答：57~67 公斤

【錯解 3：不了解百分比的意義】

95×0.6＝57　　　　　　　　　　　　　　答：67＜X＜77

【錯解 4：不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法】

(165－70)×0.6＝57

$57+57\times\frac{11}{100}=57+6.27=63.27$

$57+57\times\frac{20}{100}=57+11.4$ 答：63.27 ~ 68.4

【錯解 5：不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法】

$(165-70)\times0.6=57$

$57\times\frac{90}{100}=49.3$　　$49.3\times\frac{120}{100}=59.16$ 答：49.3 ~ 59.16

【錯解 6：四則運算錯誤、不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法】

$165-70=95$，　$95\times0.6=58$

$58\times10\%=5.8$，　$58\times20\%=11.6$

$58+5.8=63.8$　　$58+11.6=69.6$ 答：63.9 ~ 69.6

【錯解 7：有第一個重要步驟，但無法再繼續下去】

$(165-70)\times0.6=57$

【錯解 8：套入以前學過的公式】

$95\times0.6=57$ 答：$56.5\leqq X<57.5$

8、小英一家人到博物館玩，爸爸買了 2 張學生票和 3 張全票，共付了 110 元，已知學生票每張比全票便宜 20 元。請問學生票每張多少元？

【錯解 1：四則運算錯誤】

$5X=150$　　$X=50$　　$50-20=30$ 元

【錯解 2：對中介答案的意義混淆】

$20\times3=60$

$110-60=50$

$25\times2=50$ 答：25 元

【錯解 3：列出與正確式子相似的算式--不了解學生票價和全票票價的關係】

$$\begin{cases}2x+3y=110\\ x-y=20\end{cases}$$

5y＝70 ➔ y＝14 元

【錯解 4：列出與正確式子相似的算式--不了解學生票價和全票票價的關係】

$$\begin{cases} 2x+3y \\ (2x-20)+3y=110 \end{cases}$$

【錯解 5：程序性錯誤】

5X＝70 ➔ X＝14， 14－20⋯ 答：無解

【錯解 6：將題目中的數字拼湊出一些式子】

110－100＝10， 10×2＝20 答：20 元

【錯解 7：將題目中的數字拼湊出一些式子】

20×2＝40， 30×2＝60， 22×2＝44， 32×2＝64 答：22 元

【錯解 8：程序性錯誤、四則運算錯誤、刻意忽略錯誤現象】

110－40＝70

20×2＝40

70÷3＝22

全票 22 元 答：30 元

9、在換季大拍賣時，媽媽花了 594 元買了一件照原價打 6 折的裙子，那麼這條裙子原價是多少元？

【錯解 1：選運算子選擇錯誤、改變題目的限制】

594×0.6＝356.~~4~~＝356 元

【錯解 2：不了解折扣的意義】

說出「不知道折扣怎麼算」或是寫出「594÷6＝99 元」

【錯解 3：不了解折扣的意義】

594×1.6＝950 元

【錯解 4：將題目中的數字拼湊出一些式子】

594÷6＝99， 594＋99＝693 答：693 元

10、養樂多一瓶 5 元，奶茶一瓶 10 元，小明拿 100 元去超商買這兩種飲料，若兩種都要買且花完 100 元，請問小明有幾種買法？

【錯解 1：將題目中的數字拼湊出一些式子】

2 | 100

2 | 50

5 | 25

5

答：10 種

【錯解 2：將題目中的數字拼湊出一些式子】

5X＋10Y＝100

2　　9

答：18 種

【錯解 3：非關答案的操作】

100÷15＝6…

答：4 種

【錯解 4：非關答案的操作】

5＋10＝15

答：5 種

【錯解 5：非關答案的操作】

10，5

答：無限多種

【錯解 6：忽略沒有數字的重要句子】

100÷10＝10

答：10 種

【錯解 7：改變題目的限制】

1、10 瓶養樂多，5 瓶奶茶

2、2　〃　，9　〃

3、4　〃　，8　〃

4、6　〃　，7　〃

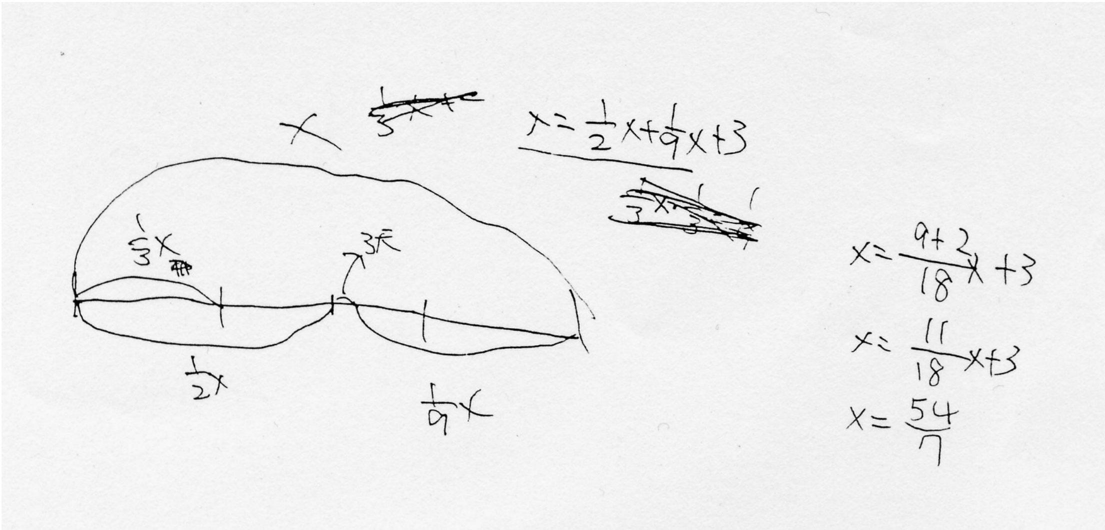
5、8　〃　，6　〃

答：5 種

附錄八、故事文字問題的錯誤類型範例

1、阿亮今年暑假到底放假幾天？

【錯解1：誤解有關時間的敘述】

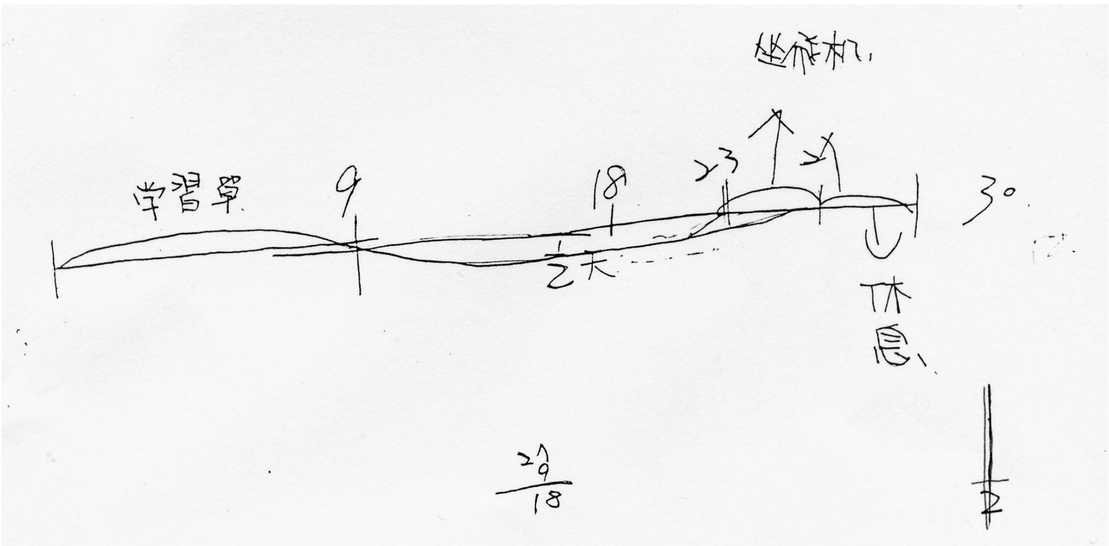


$$X=\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}X+3$$

$$X=\frac{11}{18}X+3$$

$$X=\frac{54}{7}$$

【錯解2：誤解關於時間的敘述；以生活經驗回答】



【錯解 3：誤解有關時間的敘述】

$120 \div 24 = 5$

$\frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

暑假 $\frac{4}{9}$ 有 5 天

【錯解 4：誤解關於時間的敘述；以生活經驗回答、刻意忽略一些錯誤現象】

$\cancel{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{6}{18} + \frac{9}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}}$

2 個月＋3 天＝63 天　　答：63 天

【錯解 5：誤解關於時間的敘述】

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{9} =$

【錯解 6：有第一個重要步驟，但無法再繼續下去】

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$

【錯解 7：以生活經驗回答、刻意忽略一些錯誤現象】

$\cancel{\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}X + \frac{1}{9}X = X}$

$\cancel{6X + 9X + 2X = X}$

假設 1 個月 30 天　　答：60 天

2、阿亮打算出國幾天？

【錯解 1：承續上題而刻意忽略一些錯誤現象；誤解有關時間的敘述】

$60 \times \frac{1}{2} = 30$

$30 + 4 = 34$　　答：34 天

【錯解 2：不了解中介答案】

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} =$

$27 \times 2 = 54$

【錯解 3：承續上題而刻意忽略一些錯誤現象】

$60\times\frac{1}{2}=30$ 天　　答：30 天

【錯解 4：刻意忽略一些錯誤現象】

（用題目中的敘述回答）　　答：1 個月

3、如果阿亮想要在計劃時間內完成所有的暑假作業，則他每天平均要花幾小時寫作業？

【錯解 1：誤解有關時間的敘述】

$27\times24=648$

$\frac{648}{120小時}=\frac{324}{60}=\frac{162}{30}=\frac{81}{15}=\frac{27}{5}$　　答：$\frac{27}{5}$ 小時

【錯解 2：誤解有關時間的敘述】

（在第 1 題寫出 60 天為答案）

$60\times\frac{1}{3}=20$ 天

$30\times3+10\times3=120$ 小時

$20\times24=480$

$480\div120=4$ 小時　　答：4 小時

【錯解 3：誤解有關時間的敘述】

（前面第 1、第 2 題答案皆正確）

$30\times3+10\times3=120$

$24\times24=576$

$576\div120=4.8$　　答：4.8 小時

【錯解 4：有第一個重要步驟，但無法再繼續下去】

$30\times3+10\times3=120$

【錯解 5：將題目中的數字拼湊出一些式子】

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

$40\div\frac{4}{9}=40\times\frac{9}{4}=90$

$90\div24=3.75$ 答：3.75 小時

【錯解 6：非關答案的操作】

1 個月 答:6 小時

【錯解 7：刻意忽略一些錯誤現象】

（用題目中的敘述回答） 答：3 小時

4、阿姨開車的時速是每小時多少公里呢？

【錯解 1：四則運算錯誤】

$184-171=7$ $7\times4=28$ 答：28 公里/小時

【錯解 2：時間單位的換算錯誤、刻意忽略一些錯誤現象】

$184-171=13$

$13000\div15=866.666\cdots$

$866\div6=144.333\cdots$ 答：144 公里

【錯解 3：時間單位的換算錯誤】

$13\div60=0.216\cdots$（忽略 15 分鐘，誤以為 13 公里是一小時走的距離）

答:大約 0.22 公里

【錯解 4：時間單位的換算錯誤】

$13\times12=156$

$156\div5=31.2$ 答：31.2km

【錯解 5：對時速的計算方法混淆】

$13\times15=195$ 公里

【錯解 6：對時速的計算方法混淆】

15÷13＝1.153⋯　　　　　　　　　　　　　　答：1.2 公里

【錯解 7：對時速的計算方法混淆】

171÷15＝11.4　　　1 分鐘 11.4 公里

11.4×60＝684　　　　　　　　　　　　　　答：684 公里

【錯解 8：對時速的計算方法混淆】

184＋171＝355　　355÷15＝23.666⋯＝24　　　　　　答：24 公里

【錯解 9：對時速的計算方法混淆】

184＋171＝355　　　　　　　　　　　　　　答：355 公里

【錯解 10：對時速的計算方法混淆；四則運算錯誤】

$$時速＝\frac{184-171}{15分}=\frac{13}{900秒}\frac{13000公尺}{900秒}=1.4\ 公里$$

5、阿姨家離機場大約是幾公尺呢？(寫出實際值的範圍來)

【錯解 1：不了解不等式的相關用語】

0.4X＝30.5

4X＝305

X＝76.25

76.25×320＝24400

77×320＝24640　　　　　　　　　答：24640 公尺 ~ 24400 公尺

【錯解 2：不了解不等式的相關用語】

0 ~ 265 ➔2.5

320 ➔0.4

30.5－2.5＝28　28÷0.4＝70

320×70＝22400

2240－320＝1920

22400＋265＝22665　答：1920＜X≦22665（m）

【錯解 3：不了解不等式的相關用語；四則運算錯誤】

(X－265)÷320＝30.5

(X－265)＝9760

X＝10025

(X－265)÷320＝28

(X－265)＝9960　X＝10225　答：10225m

【錯解 4：不了解不等式的相關用語；套入以前學過的公式】

30.5＝2.5X＋0.4Y

305＝25X＋4Y

30.5÷2.5＝12.2　30.5÷0.4＝76.25

X＝12　25×12＝300　5÷4＝1.25　Y＝1.25

12×265＝3180　答：3174 ~3180

【錯解 5：不了解不等式的相關用語】

30.5－2.5＝28　28÷0.4＝70

320×70＝22400

22400＋265＝22665

22665＋319＝22984　答：22665≦X＜22984

【錯解 6：不了解不等式的相關用語、少了一個計算步驟】

30.5－2.5＝28　28÷0.4＝70

320×70＝22400

69.1×320＝22112　答：大於 22112m，小於 22400m

【錯解 7：不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法】

30.5－2.5＝28　28÷0.4＝70

320×70＝22400

$22400+265=22665$

$22665-319=22346$　　答：$22346 \leqq X \leqq 22665$

【錯解 8：不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法】

$30.5-2.5=28$　$28 \div 0.4=70$

$320 \times 70=22400$

$22400+265=22665$　　答：22665 公尺

【錯解 9：不了解不等式的相關用語及實際值範圍的表示方法】

$30.5 \div 2.5=12.2$　$265 \times 12.2=3233$　　答：0 ~ 3233 公尺

【錯解 10：非關答案的操作】

13 ~ 15 km

【錯解 11：非關答案的操作】

答：1000 公尺

【錯解 12：以關鍵字作答，套入以前學過的公式】

$30.5-2.5=28$　$28 \div 0.4=70$

$320 \times 70=22400$

$22400+265=22665$　　答：$22664.5m \leqq X < 22665.5m$

6、阿姨說「你們以後假日打電話給我，比我打電話給你們會更便宜哦!」 這句話是對的嗎？請你實際算算看。(請以一美元換算成 35 元台幣來計算)

【錯解 1：對中介答案的意義混淆，導致嚴重錯誤】

$18 \times 35=630$　1 分鐘 31.5 元　　答：不對

【錯解 2：將題目中的數字拼湊出一些式子】

$0.19+2.9+0.19=3.28$

$3.28 \times 18=59.04$

$59.04 \div 35=1.68\cdots$　　答：對

【錯解 3：以生活經驗回答】

我想是對的，可是我不會算　　答：對

7、如果阿亮的每一步長是 85 公分，則叮噹車大約是幾公分？(請四捨五入到整數位)

【錯解 1：列出與正確式子相似的算式】

$85\times15+\frac{1}{3}=1275.33\cdots=1275$　　答：1275 公分

【錯解 2：列出與正確式子相似的算式】

$15\times85+15\times\frac{1}{3}=1275+5=1280$ 公分

【錯解 3：列出與正確式子相似的算式】

$85\times15=1275\quad 1275\times\frac{1}{3}=425$　　答：425 公分

【錯解 4：列出與正確式子相似的算式】

$\frac{1}{3}\times15=5\quad 85\times5=425$　　答：425 公分

【錯解 5：忽略題目中一個可操作、有數字的敘述，導致少了一個計算步驟】

$85\times15=1275$　　答：1275cm

【錯解 6：忽略沒有數字的重要句子】

$85\times15=1275\quad \frac{85}{3}=28\frac{1}{3}$

$1275+28\frac{1}{3}=1303\frac{1}{3}$ 步

8、實際上一份「麵包碗」是多少美元呢？

【錯解 1：不了解百分比的意義】

$5\times\frac{8}{10}=4$　　答：4 美元

【錯解 2：不了解百分比的意義】

$5\times0.8=4 \quad 4+5=9$　　答：9 美元

【錯解 3：不了解百分比的意義】

$5+\frac{8}{100}=\frac{127}{25}$　　答：$\frac{127}{25}$ 美元

【錯解 4：因為題目中一個可操作、有數字的敘述，導致多了一個計算步驟】

$5\times35=175$

$175\times\frac{8}{100}=14 \quad 175+14=189$　　答：189 元

【錯解 5：因為題目中的敘述，導致多了一個計算步驟；不了解百分比的意義】

$5\times35=175 \quad 175\times0.8=140$　　答：140 元

【錯解 6：因為題目中的敘述，導致多了一個計算步驟；不了解百分比的意義】

$5\times35=175 \quad 175\div0.8=218\fallingdotseq220$ 美元

【錯解 7：非關答案的操作】

$35\times0.5=28$

【錯解 8：忽略沒有數字的重要句子】

$5\times0.08=0.4$　　答：0.4 元

【錯解 9：刻意忽略一些錯誤】

還沒付帳？　　答：5 元

9、除了爸爸所說:「阿美買 4 個杯墊,阿亮買 8 個玻璃飾品」這個買法之外,還有幾種買法可以解決阿美和阿亮買紀念品的爭執?(請務必寫出計算過程)

【錯解 1:列出與正確式子相似的算式】

$2\times30+10\times14=200$　　答:2 個杯墊,14 個玻璃飾品

【錯解 2:將題目中的數字拼湊出一些式子】

$10+30=40$

$200\div40=5$　　答:5 種

【錯解 3:將題目中的數字拼湊出一些式子】

(10,30)=10　　答:10 種

【錯解 4:忽略沒有數字的重要句子】

$30X+10Y=200$

X	2	4	6
Y	14	8	2

答:3 種

【錯解 5:忽略沒有數字的重要句子】

$30X+10Y=200$

阿亮	阿美
2	6
5	5
11	3
14	2
17	1

答:5 種

10、雖然影響拔河比賽勝負結果的因素有很多，但如果從數學的角度上來看，去除一些意外的狀況，根據前面第一、二回合的線索，你認為第三回合是右邊還是左邊會贏？(請寫出你的想法或計算方法)

【錯解 1：列出與正確式子相似的算式】

$$\begin{cases} 5X=4Y \\ Z=2X+Y \end{cases}$$

【錯解 2：刻意忽略錯誤】

設每人 50 公斤，狗 25 公斤

200－175＝25　　答：右邊

【錯解 3：直覺性的反應】

左邊會贏，因為人數較多　　答：左邊

附錄九、各組學生之個人解題與合作解題的各階段次數百分比（傳統文字問題）

組別	組合方式	人數	總次數	個人解題							合作解題						
				各階段的次數百分比(%)						平均階段	各階段的次數百分比(%)						平均階段
				0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5	
第一組	組 1＋組 2	5	26	0	0	15.38	0	76.92	7.69	3.78	0	0	3.85	0	76.92	19.23	4.12
	組 1＋組 3	5	38	0	0	0	0	65.79	34.21	4.34	0	0	3.89	0	76.32	15.79	4.00
	組 1＋組 4	5	44	0	0	2.27	2.27	61.36	31.82	4.26	0	0	0	0	88.64	11.36	4.02
	合計	15	107	0	0	4.67	.93	67.29	27.10	4.17	0	0	3.74	0	81.31	14.95	4.07
第二組	組 1＋組 2	5	26	11.54	15.36	7.69	7.69	38.46	19.23	3.04	0	0	15.38	7.69	53.85	23.08	3.85
	組 2＋組 3	5	41	4.88	2.44	14.63	4.88	73.17	0	3.39	0	0	9.76	0	75.61	14.63	3.95
	合計	10	67	7.46	7.46	11.94	5.97	59.70	7.46	3.25	0	0	11.94	2.99	67.16	17.91	3.91
第三組	組 1＋組 3	5	38	7.89	5.26	36.84	2.63	36.84	10.53	2.87	0	0	10.53	0	76.05	13.16	3.92
	組 2＋組 3	5	41	2.44	4.88	19.51	14.63	34.15	24.39	3.46	0	0	7.32	0	78.05	14.63	4.00
	合計	10	79	5.06	5.06	27.85	8.86	35.44	17.72	3.18	0	0	8.86	0	77.22	13.92	3.96
第四組	組 1＋組 4	5	44	13.64	4.55	54.55	2.27	18.18	4.55	2.21	0	4.55	15.91	6.82	63.64	6.82	3.45
合計		40	296	5.07	3.72	19.93	4.39	50.00	16.89	3.41	0	.68	8.78	1.69	75.00	14.19	3.94

附錄十、各組學生之個人解題與合作解題的各階段次數百分比（故事文字問題）

組別	組合方式	人數	總次數	個人解題							合作解題						
				各階段的次數百分比(%)						平均階段	各階段的次數百分比(%)						平均階段
				0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5	
第一組	組1＋組2	5	26	0	0	31.11	2.22	55.56	8.89	3.47	0	0	0	2.22	93.33	4.44	4.02
	組1＋組3	5	38	5.13	0	7.69	5.13	74.36	23.08	3.82	0	0	0	0	100	0	4.00
	組1＋組4	5	44	6.00	0	18.00	0	66.00	10.00	3.50	0	0	4.00	0	94.00	2.00	3.94
	合計	15	107	3.37	0	19.40	2.24	60.45	14.18	3.58	0	0	1.49	.75	95.52	2.24	3.99
第二組	組1＋組2	5	26	35.56	8.89	28.89	2.22	6.67	17.78	1.89	0	0	4.44	2.22	88.90	4.44	3.93
	組2＋組3	5	41	38.78	4.08	26.53	6.12	20.41	4.08	1.78	0	0	2.04	0	91.84	6.12	4.02
	合計	10	67	37.23	6.38	27.66	4.26	13.83	10.64	1.83	0	0	3.19	1.06	90.43	5.32	3.98
第三組	組1＋組3	5	38	41.03	5.13	33.33	5.13	10.26	0	1.33	0	0	2.56	0	94.87	2.56	3.97
	組2＋組3	5	41	36.73	2.04	26.53	6.12	8.16	20.41	2.08	0	0	2.04	0	91.84	6.12	4.02
	合計	10	79	38.64	5.68	29.55	2.68	9.09	11.36	1.75	0	0	2.27	0	93.18	4.55	4.00
第四組	組1＋組4	5	44	38.00	8.00	46.00	2.00	4.00	2.00	1.32	2.00	0	14.00	12.00	72.00	0	3.52
合計		40	296	25.41	4.10	27.60	3.55	28.42	10.93	2.38	.27	0	3.83	2.19	90.44	3.28	3.92

附錄十一　各組學生個人與合作解題之解題歷程列聯表(傳統文字題)

表 1：第一組：在「組 1+組 2」

		合作解題歷程階段				
		2	3	4	5	合計
個人	2	0	0	4	0	4
解題	3	0	0	0	0	0
歷程	4	1	0	15	4	20
階段	5	0	0	1	1	2
合計		1	0	20	5	26

$\chi^2_{.95(6)}=12.592$

$\chi^2=3.60$

表 2：第一組：在「組 1+組 3」

		合作解題歷程階段				
		2	3	4	5	合計
個人	2	0	0	0	0	0
解題	3	0	0	0	0	0
歷程	4	3	0	18	4	25
階段	5	0	0	11	2	13
合計		3	0	29	0	38

$\chi^2_{.95(6)}=12.592$

$\chi^2=6.27$

表 3：第一組：在「組 1+組 4」

		合作解題歷程階段				
		2	3	4	5	合計
個人	2	0	0	1	0	1
解題	3	0	0	1	0	1
歷程	4	0	0	25	2	27
階段	5	0	0	11	3	14
合計		0	0	38	5	45

$\chi^2_{.95(6)}=12.592$

$\chi^2=8.23$

表 4：第一組：三種模式合計

		合作解題歷程階段				
		2	3	4	5	合計
個人	2	0	0	5	0	5
解題	3	0	0	1	0	1
歷程	4	4	0	58	10	72
階段	5	0	0	23	6	29
合計		4	0	87	16	107

$\chi^2_{.95(6)}=12.592$

$\chi^2=6.23$

表 5：第二組：在「組 1+組 2」

		合 作 解 題 歷 程 階 段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	1	0	1	1	3
個人	1	0	0	2	1	1	0	4
解題	2	0	0	1	0	1	0	2
歷程	3	0	0	0	1	1	0	2
階段	4	0	0	0	0	7	3	10
	5	0	0	0	0	3	2	5
合計		0	0	4	2	14	6	26

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=9.00$

表 6：第二組：在「組 2+組 3」

		合 作 解 題 歷 程 階 段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	1	0	1	0	2
個人	1	0	0	0	0	1	0	1
解題	2	0	0	1	0	4	1	6
歷程	3	0	0	0	0	2	0	2
階段	4	0	0	2	0	23	5	30
	5	0	0	0	0	0	0	0
合計		0	0	4	0	31	6	41

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=13.00$

表 7：第二組：二種模式合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	2	0	2	1	5
個人	1	0	0	2	1	2	0	5
解題	2	0	0	2	0	5	1	8
歷程	3	0	0	0	1	3	0	4
階段	4	0	0	2	0	30	8	40
	5	0	0	0	0	3	2	5
合計		0	0	8	2	45	12	67

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=17.56$

表 8：第三組：在「組 1+組 3」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	3	0	3
個人	1	0	0	1	0	1	0	2
解題	2	0	0	2	0	10	2	14
歷程	3	0	0	0	0	1	0	1
階段	4	0	0	1	0	10	3	14
	5	0	0	0	0	4	0	4
合計		0	0	4	0	29	5	38

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=15.51$

表 9：第三組：在「組 2+組 3」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	1	0	1
個人	1	0	0	1	0	1	0	2
解題	2	0	0	1	0	6	1	8
歷程	3	0	0	0	0	3	3	6
階段	4	0	0	1	0	11	2	14
	5	0	0	0	0	10	0	10
合計		0	0	3	0	32	6	41

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=18.90$

表 10：第三組：二種模式合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	4	0	4
個人	1	0	0	2	0	2	0	4
解題	2	0	0	3	0	16	3	22
歷程	3	0	0	0	0	4	3	7
階段	4	0	0	2	0	21	5	28
	5	0	0	0	0	14	0	14
合計		0	0	7	0	61	11	79

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=33.15^*$　　$^*p<.05$

表 11：第四組：在「組 1+組 4」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	1	1	0	4	0	6
個人	1	0	0	0	0	2	0	2
解題	2	0	1	6	2	14	1	24
歷程	3	0	0	0	0	0	1	1
階段	4	0	0	0	1	6	1	8
	5	0	0	0	0	2	0	2
合計			2	7	3	28	3	43

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=28.33^*$　　$^*p<.05$

表 12：四組學生合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	1	3	0	10	1	15
個人	1	0	0	4	1	6	0	11
解題	2	0	1	11	2	40	5	59
歷程	3	0	0	0	1	8	4	13
階段	4	0	0	8	1	115	24	148
	5	0	0	0	0	42	8	50
合計		0	2	26	5	221	42	296

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=66.49^*$　　$^*p<.05$

附錄十二　各組學生個人與合作解題之解題歷程列聯表（故事文字題）

表 1：第一組：在「組 1+組 2」

		合作解題歷程階段				
		2	3	4	5	合計
個人	2	0	0	14	0	14
解題	3	0	0	1	0	1
歷程	4	0	1	23	1	25
階段	5	0	0	4	1	4
	合計	0	1	42	2	45

$\chi^2_{.95(6)}=12.592$　　$\chi^2=15.8^*$

*p<.05

表 2：第一組：在「組 1+組 3」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	2	0	2
個人	1	0	0	0	0	0	0	0
解題	2	0	0	0	0	3	0	3
歷程	3	0	0	0	0	2	0	2
階段	4	0	0	0	0	23	0	23
	5	0	0	0	0	9	0	9
	合計	0	0	0	0	39	0	39

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$　　$\chi^2=16.00$

表 3：第一組：在「組 1+組 4」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	3	0	3
個人	1	0	0	0	0	0	0	0
解題	2	0	0	0	0	9	0	9
歷程	3	0	0	0	0	0	0	0
階段	4	0	0	0	0	32	1	33
	5	0	0	2	0	3	0	5
	合計	0	0	0	0	47	1	50

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$　　$\chi^2=15.00$

表 4：第一組：三種模式合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	5	0	5
個人	1	0	0	0	0	0	0	0
解題	2	0	0	0	0	23	0	26
歷程	3	0	0	0	0	3	0	3
階段	4	0	0	0	1	78	2	81
	5	0	0	2	0	16	1	19
	合計	0	0	2	1	128	3	134

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$　　$\chi^2=44.89^*$　*p<.05

表 5：第二組：在「組 1+組 2」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	1	1	14	0	16
個人	1	0	0	0	0	4	0	4
解題	2	0	0	1	0	12	0	13
歷程	3	0	0	0	0	1	0	1
階段	4	0	0	0	0	3	0	3
	5	0	0	0	0	6	2	8
	合計	0	0	2	1	40	2	45

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$　　$\chi^2=39.00^*$　*p<.05

表 6：第二組：在「組 2+組 3」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	1	0	17	1	19
個人	1	0	0	0	0	2	0	2
解題	2	0	0	0	0	13	0	13
歷程	3	0	0	0	0	3	0	3
階段	4	0	0	0	0	9	1	10
	5	0	0	0	0	1	1	2
	合計	0	0	1	0	45	3	49

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$　　$\chi^2=37.00^*$　*p<.05

表 7：第二組：二種模式合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	2	1	31	1	35
個人	1	0	0	0	0	6	0	6
解題	2	0	0	1	0	25	0	26
歷程	3	0	0	0	0	4	0	4
階段	4	0	0	0	0	12	1	13
	5	0	0	0	0	7	3	10
合計		0	0	3	1	85	5	94

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=74.50$*　　*p＜.05

表 8：第三組：在「組 1+組 3」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	16	0	16
個人	1	0	0	0	0	4	0	2
解題	2	0	0	0	0	12	1	13
歷程	3	0	0	1	0	1	0	2
階段	4	0	0	0	0	4	0	4
	5	0	0	0	0	0	0	0
合計		0	0	1	0	37	1	39

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=35.00$*　　*p＜.05

表 9：第三組：在「組 2+組 3」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	18	0	18
個人	1	0	0	0	0	1	0	1
解題	2	0	0	1	0	12	0	13
歷程	3	0	0	0	0	2	1	3
階段	4	0	0	0	0	4	0	4
	5	0	0	0	0	8	2	10
合計		0	0	1	0	45	3	49

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=42.00$*　　*p＜.05

表 10：第三組：二種模式合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	0	0	0	0	34	0	34
個人	1	0	0	0	0	5	0	5
解題	2	0	0	1	0	24	1	26
歷程	3	0	0	1	0	3	1	5
階段	4	0	0	0	0	8	0	8
	5	0	0	0	0	8	2	10
合計		0	0	2	0	82	4	88

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=77.00$*　　*p＜.05

表 11：第四組：在「組 1+組 4」

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	1	0	2	3	13	0	19
個人	1	0	0	0	0	4	0	4
解題	2	0	0	4	2	17	0	23
歷程	3	0	0	0	1	0	0	1
階段	4	0	0	1	0	1	0	2
	5	0	0	0	0	1	0	1
合計		1	0	7	6	36	0	50

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=39.22$*　　*p＜.05

表 12：四組學生合計

		合作解題歷程階段						
		0	1	2	3	4	5	合計
	0	1	0	4	4	83	1	93
個人	1	0	0	0	0	15	0	15
解題	2	0	0	6	2	92	1	101
歷程	3	0	0	1	1	10	1	13
階段	4	0	0	1	1	99	3	104
	5	0	0	2	0	32	6	40
合計		0	0	14	8	331	12	366

$\chi^2_{.95(15)}=24.996$

$\chi^2=229.10$*　　*p＜.05

附錄十三、使用學生資料同意書

<table>
<tr><td colspan="2">使用學生資料同意書</td></tr>
<tr><td colspan="2">茲同意本校 葉家綺 教師使用輔導處之 91 學年度學生「國民中學智力測驗」結果等資料。唯該資料只可用於學術研究，不可有公開等損及學生權益之事項。

新竹市立虎林國民中學輔導處
中華民國九十三年九月二日</td></tr>
<tr><td>資料組長</td><td>輔導主任</td></tr>
<tr><td>資料組長 劉欣蕙</td><td>輔導主任 賴田棋</td></tr>
</table>

附錄十四、各組學生「解題歷程考驗」與「得分」之獨立性考驗

一、傳統文字題（N＝80）

		解題歷程(平均數)					
		0~1.0	1.1~2.0	2.1~3.0	3.1~4.0	4.1~5.0	合計
得分	0~10	0	7	1	0	0	8
	11~20	0	3	8	2	0	13
	21~30	0	0	4	12	1	17
	31~40	0	0	0	18	3	21
	41~50	0	0	0	8	13	21
	合計	0	10	13	40	17	80

註 1：解題歷程為 0~5 階段；得分之滿分為 50 分。註 2：各斜格中的數字為人數。

df＝(I－1)(J－1)＝(5－1)(5－1)＝16　　查表得到　$*\chi^2_{.95}$＝26.296

$$\chi^2 = \mathrm{N}\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}} - 1\right] = 80\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}} - 1 = 106.07*$$

（林清山，1992，p. 289）

列聯相關 $C = \sqrt{\dfrac{\chi^2}{\chi^2+N}} = \sqrt{\dfrac{106.07}{106.07+80}} = .76$　　（林清山，1992，p. 294）

二、故事文字題（N＝80）

		解題歷程(平均數)					
		0~1.0	1.1~2.0	2.1~3.0	3.1~4.0	4.1~5.0	合計
得分	0~10	17	12	2	0	0	31
	11~20	1	6	11	1	0	19
	21~30	0	0	9	7	0	16
	31~40	0	0	0	5	0	5
	41~50	0	0	0	6	3	9
	合計	18	18	22	19	3	80

註 1：解題歷程為 0~5 階段；得分之滿分為 50 分。　註 2：各斜格中的數字為人數。

$$\chi^2 = \mathrm{N}\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}} - 1\right] = 80\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}} - 1 = 110.45*$$

列聯相關 $C = \sqrt{\dfrac{\chi^2}{\chi^2+N}} = \sqrt{\dfrac{110.45}{110.45+80}} = .76$