

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

具額外阻尼之彈性板的導波波傳

Guided Wave Propagation in Elastic Plates  
with Excessive Attenuation



研究生：許世明

指導教授：尹慶中 博士

中華民國一〇〇年七月

具額外阻尼之彈性板的導波波傳

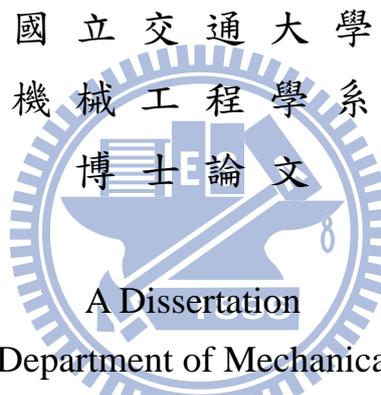
Guided Wave Propagation in Elastic Plates  
with Excessive Attenuation

研究生：許世明

Student : Shih-Ming Hsu

指導教授：尹慶中 博士

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin



Submitted to Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Doctor of Philosophy

in

Mechanical Engineering

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇〇年七月

# 具額外阻尼之彈性板的導波波傳

研究生：許世明

指導教授：尹慶中 博士

國立交通大學機械工程學系博士班

## 摘 要

本研究是研究彈性平板的導波波傳為主，考慮平板本身的熱彈耦合效應，或者是其表面黏滯液體負載所造成的額外阻尼，探討波傳遞時的頻散與衰減關係及其能量耗散。前者代表一個動力系統含有狀態變數對時間 $t$ 一次微分的阻尼項，後者即為隱含於系統本身彈性係數中的阻尼項。因此，本研究會區分成兩大主題。

第一個主題是探討一受單軸拉伸殘留應力之等向性平板的熱彈導波波傳問題。應用自然、初始與最終三個狀態的聲彈理論，配合傳統熱彈理論，推導在初始狀態下描述的熱彈統御方程式及其導波特徵方程式。利用曲線追蹤法針對複波數的虛部作複數尋根，獲得熱彈導波的頻散與衰減頻譜。由數值結果可發現，除 $A_0$ 模態外，其餘模態在某些特定頻率下會出現最小衰減的驟降現象，稱之為Lamé模態，它代表會在厚度方向形成共振，而且在導波傳遞時的能量損耗最小。此外，本文亦探討波傳方向與單軸施力方向的夾角為 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 與 $45^\circ$ 之熱彈導波的頻散與衰減頻譜。

第二個主題是探討表面黏滯液體負載之玻璃平板的導波波傳問題。將黏滯性液體層視為一具剪力剛性 $c_{55} = -i\omega\eta$ 的假想性等向性固體， $\eta$ 為動態黏滯係數， $\omega$ 為角頻率。經由平板與液體層所架構的雙層結構全域矩陣，利用複數尋根方式獲得頻散與衰減曲線關係，探討平板表面質點運動以及液體層內壓力變化的頻譜特性。除 $A_0$ 模態外，其餘模態在頻率接近Lamé模態時會出現最小衰減的驟降現象，在固液界面上的質點軌跡會出現逆轉現象。隨著頻率遞增，平板 $A_0$ 模態之位移與應力變化逐漸集中於固液界面，而 $S_0$ 模態則是集中於平板下表面。再者，液體層上下表面間壓力差變化及其均勻特性會與平板上表面質點軌跡運動的偏振狀態有直接關係。此外，亦探討液體層厚度改變對相速度頻散與衰減曲線的影響。

**關鍵字：** 殘留應力、熱彈聲波、黏滯液體負載、Lamé 模態、頻散、衰減、  
曲線追蹤法、正則模態展開法。



# Guided Wave Propagation in Elastic Plates with Excessive Attenuation

Student: Shih-Ming Hsu

Advisor: Dr. Ching-Chung Yin

Department of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University

## Abstract

This dissertation mainly investigates the dispersion, attenuation, and energy dissipation of ultrasonic guided waves propagating in an elastic plate with excessive damping. The excessive attenuation caused by the thermoelastic coupling of plate or the external viscous fluid loading on the top surface of plate is taken into account. The former represents the damping resulted from the time derivative of state variables in a dynamic system, but the later denotes the intrinsic damping term in the elastic constants. Owing to the above two different excessive damping, the investigation is divided into two works.

Thermoelastic waves propagating in an isotropic thin plate exerted by a uniaxial tensile stress are represented in the first work. Characteristic equation of thermoelastic guided waves is formulated based on the theory of acoustoelasticity and classical thermoelasticity. Curve tracing method for complex root-finding is used to determine the attenuation, which is the imaginary part of the complex-value wavenumber. It is found that each plate mode of thermoelastic wave propagating in an isotropic plate with or without pre-stress has a minimum attenuation at a specific frequency except the  $A_0$  mode. These modes are called by the Lamé modes, which are the volume resonances in the thickness direction and propagate along the plate with the least energy dissipation. Frequency spectra of the phase velocity dispersion and attenuation of thermoelastic waves propagating along various orientations in the uniaxial pre-stressed thin plate have further been discussed.

The second work describes an investigation of acoustic guided wave propagation in a glass plate overlain with a poly-vinyl-alcohol (PVA) layer. The PVA layer is modeled as a hypothetical isotropic solid with dynamic viscosity. Dispersion and attenuation curves, mode shape, trajectories of surface particles on the substrate, and pressure in the fluid layer are

studied numerically. Except for the  $A_0$  mode, a steeply decreasing attenuation and a reverse trajectory of motion are observed near the frequency of Lamé mode for the different modes. With increasing frequency, displacement, stress, and energy of the  $A_0$  mode are significantly confined to a region near the top surface of the plate. A similar phenomenon occurs near the bottom surface for the  $S_0$  mode. The pressure gradient and its distribution in the fluid layer are directly related to the trajectories of surface particles on the interface of fluid and substrate. The symmetric modes, except for the  $S_0$  mode, at frequencies corresponding to the maximum group velocity, are the appropriate choices for generating uniform acoustic pressure in the fluid layer. Moreover, a glass substrate overlain with a glycerin layer is also taken in account, and its frequency spectra of the phase velocity dispersion and attenuation have further been discussed.

**Keywords:** residual stress, thermoelastic waves, viscous fluid loading, Lamé mode, dispersion, attenuation, curve tracing method, normal mode expansion.



# 誌 謝

自進入博士班進修，即承蒙指導教授 尹慶中博士多年來的耐心指導與鼓勵，除了在研究方向引導與觀念啟發之外，並且協助解決種種研究上所遭遇的難題，使本論文得以順利完成，首先要在此表達個人由衷的感謝與敬意。此外，游泰和學長、王多聞學長、劉育翔、溫子達、曾世華、羅世青、楊秋華、許家保、許家豪、黃俊傑、蔡德新、孫繼增、張桓真、陳俊宏、黃國彰、施文斌、楊炘岳、蘇裕為、李政良、嚴承侯、潘權文、蔡汶志、張逸涵、黃康哲、鍾重光、鄭博毅、吳昱瑾、賴佑年、蔡慶芳、鄭致遠、吳家宇、湯士杰、黃室維、王裕太、蔡旻軒、吳旻修、李劭遠、郇心慧、梁均帆、黃仲平、李柏勳、吳雨倩、何家豪諸位學弟妹，在個人的學習研究與生活上的協助與陪伴，克服種種困難而順利前進。最後，在漫長的求學過程中，感謝我敬愛的父親 許昆輝先生與母親 曾鳳英女士，二位妹妹曉苓與雅芳，以及內人亭均的全力支持與體諒，當然還有女兒芷歆貼心的陪伴，使我能夠無後顧之憂，全心全意地專注在學業上，終能克服萬難而獲得此學位。

謹以此文獻給我所有親愛的家人與朋友。

許世明 謹誌

中華民國 100 年 7 月

(本頁空白)



# 目 錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	iii
誌謝 .....	v
目錄 .....	vii
表目錄 .....	xi
圖目錄 .....	xii
符號說明 .....	xix
第一章 緒論 .....	1
1.1 研究背景及動機 .....	1
1.1.1 熱彈性耦合之聲導波 .....	2
1.1.2 具液體負載之聲導波 .....	5
1.2 文獻回顧 .....	6
1.2.1 光聲光熱現象及技術 .....	6
1.2.2 一般常見的薄膜殘留應力量測方法 .....	8
1.2.2.1 基板曲率量測法 .....	8
1.2.2.2 鼓漲測試法 .....	8
1.2.2.3 高解析度 X 光繞射儀 .....	9
1.2.2.4 顯微式 Raman 散射光譜儀 .....	10
1.2.3 聲彈應力量測法 .....	10
1.2.4 雷射超音波技術 .....	12
1.2.5 熱彈理論的模型 .....	13
1.2.6 熱彈理論的發展 .....	16

1.2.7	正則模態展開法	18
1.2.8	超音波影響微小粒子排列	20
1.2.9	具液體負載之聲導波	21
1.3	內容簡述	22
第二章	具殘留應力的熱彈理論	33
2.1	座標系統描述	33
2.2	統御方程式	35
2.2.1	守恆定理	35
2.2.2	Euler 與 Lagrange 描述下的熱彈統御方程式	39
2.2.3	增量狀態下的熱彈統御方程式	42
2.3	本構方程式	43
2.3.1	熱力學特徵函數	43
2.3.2	在自然狀態下描述	45
2.3.3	在初始狀態下描述	48
2.4	能量守恆以及互置理論	51
2.4.1	熱彈耦合的互置理論	52
2.4.2	模態正交特性	55
2.4.3	正則模態展開法	56
第三章	光聲效應之波傳理論	59
3.1	熱源輸入及其傅立葉積分轉換	59
3.2	水平 $X_1X_2$ 平面之座標轉換	62
3.2.1	立方性或等向性材料之假設	62
3.2.2	經座標轉換的本構關係與熱傳導方程式	64
3.2.3	特殊情況	67

3.2.4	統御方程式	68
3.2.5	Christoffel 方程式	69
3.3	微體波的相速度	70
3.3.1	$X_1X_3$ 平面波傳	70
3.3.2	$X_1$ 方向	73
3.3.3	$X_3$ 方向	74
3.4	平板導波的頻散方程式	76
3.4.1	水平方向的波傳	76
3.4.2	面內波傳	81
3.4.3	面外波傳	85
3.5	層狀介質結構	87
3.5.1	全域矩陣法	87
3.5.2	三層結構且上下面皆相鄰半無窮域介質	89
3.5.3	單層結構	89
3.5.4	雙層與三層結構	90
3.5.5	單層結構且其中一面相鄰半無窮域介質	90
3.6	光聲訊號的頻率響應	91
3.6.1	傅立葉積分轉換	91
3.6.2	表面施加的曳力與熱源	91
3.6.3	雷射激發之光聲訊號	94
3.6.4	層狀介質之應用	96
第四章	單層平板：數值結果與討論	101
4.1	單位與材料係數	101

4.2	微體波的相速度 .....	101
4.3	複數尋根之曲線追蹤法 .....	103
4.4	等向性平板導波的頻散與衰減曲線 .....	104
4.5	受單軸初始應力之平板導波的頻散與衰減曲線 .....	106
第五章	表面具黏滯性液體負載的平板導波 .....	133
5.1	理論模型 .....	133
5.2	PVA 液體薄層 .....	139
5.3	甘油液體薄層 .....	143
第六章	結論與未來工作 .....	169
6.1	結論 .....	169
6.2	未來工作 .....	170
參考文獻	.....	171
附錄 1	等向性平板中有無熱彈耦合效應之 $\mathbf{P}^{\pm}$ 與 $\mathbf{Q}^{\pm}$ 矩陣 .....	187
附錄 2	等向性平板中傳遞之熱彈導波的 Lamé 模態 .....	191
附錄 3	表面受理想液體負載之平板導波的特徵方程式 .....	197



# 表 目 錄

表 4.1	在自然狀態以及單軸預應力 $T_1^i$ 為 $0.02c_{44}$ 與 $0.04c_{44}$ 之初始狀態下 銅箔的材料係數。.....	109
表 4.2	在自然狀態以及單軸預應力 $T_1^i$ 為 $0.02c_{44}$ 與 $0.04c_{44}$ 之初始狀態下 縱波、橫波與 Lamé 模態的波速資料。.....	110
表 5.1	最小衰減值出現位置，如圖 5.5 中的 Lamé 模態(a 至 g 點)以及 交點模態(o、p 與 q 三點)，頻率、波數、相速度、群速度與界面 處( $X_3 = 0$ )軌跡振幅比的資料整理。.....	143
表 5.2	在平板之界面處( $X_3 = 0$ )與下表面( $X_3 = H$ )，出現特殊方向的 質點軌跡的頻率、波數與相速度的範圍。.....	144
表 5.3	在界面處( $X_3 = 0$ )質點軌跡出現最小振幅比 $ u_3/u_1 $ ，以及液體薄層 之界面處( $X_3 = 0$ )與上表面( $X_3 = -h$ )間出現最少壓力差 $ \Delta p(0) - \Delta p(-h) $ ， 頻率、波數、相速度與群速度的資料整理。.....	145
表 5.4	平板(玻璃)與不同厚度之液體薄層(甘油)的截止頻率大小。.....	146

# 圖目錄

圖 1.1	晶格不匹配造成薄膜產生拉應力與壓應力。.....	25
圖 1.2	珠擊法示意圖及其殘留應力對厚度的分佈圖。.....	26
圖 1.3	(a) 週期調制且強度為 Gauss 分佈的光束照射在層狀結構表面的示意圖。 (b) 訊號接收處至熱源間之距離以及波傳方向與 $X_1$ 軸之夾角的示意圖。..	27
圖 1.5	圓柱型光聲腔的剖面示意圖。.....	28
圖 1.4	(a) 麥克風光聲系統的示意圖； (b) 壓電光聲系統的示意圖。.....	28
圖 1.5	(a) 光熱光偏轉法的示意圖； (b) 光熱光位移法的示意圖。.....	28
圖 1.6	(a) 基板曲率量測法的示意圖； (b) 鼓漲測試的示意圖。.....	29
圖 1.7	(a) X 光低掠角入射法的示意圖； (b) Bragg 繞射的示意圖。.....	30
圖 1.8	(a) 顯微式 Raman 散射光譜儀； (b) Si 基材附近的受力分佈圖。.....	31
圖 1.9	自然、初始與最終三個狀態的架構圖。.....	32
圖 1.10	雷射超音波試驗發射與接收的配置圖。.....	32
圖 3.1	週期調制且強度為 Gauss 分佈的光束照射在單一平板表面的示意圖。....	97
圖 3.2	Gauss 分佈函數圖。.....	97
圖 3.3	座標轉換前，單一平板受水平軸向初始應力之示意圖， 其中 $n$ 為波傳方向。.....	98
圖 3.4	座標轉換後，單一平板受水平軸向初始應力之示意圖， 其中波傳方向 $n$ 與 $X_1$ 軸平行。.....	98
圖 3.5	層狀介質的結構示意圖。.....	99
圖 3.6	三層結構且上下介質皆為半無窮域的示意圖。.....	99
圖 3.7	層狀結構模型的示意圖。.....	100
圖 3.8	單層平板的波數與頻率關係。.....	100

圖 4.1	波數 $k_r$ 固定下，對 $(k_i, f)$ 的尋根示意圖。.....	111
圖 4.2	應用外插法對頻散曲線作軌跡追蹤。.....	111
圖 4.3	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波的波數(a)實部 $k_r$ 與 (b)虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與 反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之 定義，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數 $k_{QL0} = f/c_{QL0}$ 的虛部結果。.....	112
圖 4.4	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波的(a)相速度 $c_{ph}$ 與 (b)群速度 $c_g$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱 與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式 之定義。.....	113
圖 4.5	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波的波數虛部 $k_i$ 對於 (a)頻率 $f$ 與(b)波數實部 $k_r$ 的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式 計算獲得準縱波之波數 $k_{QL0} = f/c_{QL0}$ 的虛部結果。.....	114
圖 4.6	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波， 在固定波數 $k_r$ 下，兩者之各個對稱模態的頻率往右偏移大小圖。 發現對稱 $S_n$ 模態 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 在 $k_r h$ 等於 $(n + \frac{1}{2})$ 時的偏移量是最少。.....	115
圖 4.7	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波， 在固定波數 $k_r$ 下，兩者之各個反對稱模態的頻率往右偏移大小圖。 發現反對稱 $A_m$ 模態 ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) 在 $k_r h$ 等於 $m$ 時的偏移量是最少。.....	116
圖 4.8	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波， 在固定相速度 $c_{ph}$ 下，兩者之各個對稱模態的頻率偏移大小圖。 發現各模態在波速等於 $c_{Lame0}$ 時頻率的變化最小。.....	117
圖 4.9	在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波， 在固定相速度 $c_{ph}$ 下，兩者之各個反對稱模態的頻率偏移大小圖。	

發現除了  $A_0$  模態外，其餘各模態在波速等於  $c_{Lame0}$  時頻率的變化最小。.. 118

- 圖 4.10 對稱與反對稱之 Lamé 模態的駐波振形示意圖。  
 $S_n$  模態 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 會產生波長為  $h/(n + \frac{1}{2})$  的駐波，  
 $A_m$  模態 ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) 會產生波長為  $h/m$  的駐波。..... 119
- 圖 4.11 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_1$  方向傳遞(即  $\theta = 0^\circ$ ) 之熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。..... 120
- 圖 4.12 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_1$  方向傳遞(即  $\theta = 0^\circ$ ) 之熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。..... 121
- 圖 4.13 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_1$  方向傳遞(即  $\theta = 0^\circ$ ) 之熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。.. 122
- 圖 4.14 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_2$  方向傳遞(即  $\theta = 90^\circ$ ) 之熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。..... 123
- 圖 4.15 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_2$  方向傳遞(即  $\theta = 90^\circ$ ) 之熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。..... 124

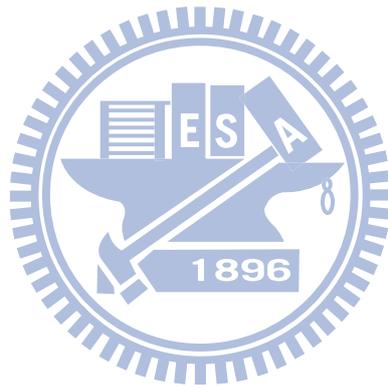
- 圖 4.16 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_2$  方向傳遞(即  $\theta = 90^\circ$ ) 之熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。.. 125
- 圖 4.17 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  作用下之單層平板，傳遞方向為角度  $\theta = 45^\circ$  之熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及 QL (藍色虛線)為(3.43b)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL} = f/c_{QL}$  的虛部結果。..... 126
- 圖 4.18 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  作用下之單層平板，傳遞方向為角度  $\theta = 45^\circ$  之熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。..... 127
- 圖 4.19 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  作用下之單層平板，傳遞方向為角度  $\theta = 45^\circ$  之熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL 與 QSH (藍色虛線)為(3.43b)式計算獲得準縱波與準橫波之波數  $k_{QL} = f/c_{QL}$  與  $k_{QT} = f/c_{QT}$  的虛部結果。..... 128
- 圖 4.20 傳遞方位角度  $\theta$  為  $0^\circ$ 、 $45^\circ$  與  $90^\circ$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，出現最小衰減值的頻率位置與單軸初始應力  $T_1^i$  ( $\times c_{44}$ ) 間的關係圖。..... 129
- 圖 4.21 傳遞方位角度  $\theta$  為  $0^\circ$  與  $45^\circ$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，最小衰減值大小與單軸初始應力  $T_1^i$  ( $\times c_{44}$ ) 間的關係圖。..... 130
- 圖 4.22 單軸初始應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，出現最小衰減值的頻率位置與傳遞方位角度  $\theta$  間的關係圖。..... 131
- 圖 4.23 單軸初始應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，最小衰減值大小與傳遞方位角度  $\theta$  間的關係圖。..... 132

- 圖 5.1 具液體負載之平板結構幾何示意圖。..... 147
- 圖 5.2 以界面  $X_3 = 0$  為基準，在介質 1 (液體) 中， $C_1^+$  與  $C_1^-$  分別為抵達波與離開波，在介質 2 (玻璃) 中， $C_2^-$  與  $C_2^+$  分別為抵達波與離開波。..... 147
- 圖 5.3 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態的波數 (a)實部  $k_r$  與 (b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，**o**、**p** 與 **q** 三點分別代表  $A_2$  與  $S_2$  之交點以及  $A_3$  與  $S_3$  之第一個與第二個交點。..... 148
- 圖 5.4 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態的 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，**a** 至 **g** 點為 Lamé 模態的出現位置，**r**、**s** 與 **t** 三點分別為  $S_1$ 、 $S_2$  與  $S_3$  之群速度最大值的出現位置。..... 149
- 圖 5.5 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態的波數虛部  $k_i$  對於 (a)頻率  $f$  與 (b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，**a** 至 **g** 點以及 **o**、**p** 與 **q** 三點為各個模態之最小衰減值的出現位置，它們的特性可見表 5.1。..... 150
- 圖 5.6 位移  $u_1$  (實線) 與  $u_3$  (虛線) 示意圖。(a) 為 Lamé 模態，即衰減頻譜的 **a** 至 **g** 點。(b) 為交點模態，即波數實部  $k_r$  交會的 **o**、**p** 與 **q** 三點。..... 151
- 圖 5.7 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態在固液界面 ( $X_3 = 0$ ) 處，(a) 質點軌跡振幅比  $|u_3/u_1|$  以及 (b) 時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，「○」與「●」代表出現順時針(cw)軌跡的頻率範圍，如表 5.2 所示。... 152
- 圖 5.8 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態在下表面 ( $X_3 = H$ ) 處，(a) 質點軌跡振幅比  $|u_3/u_1|$  以及 (b) 時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，「○」與「●」代表出現逆時針(ccw)軌跡的頻率範圍，如表 5.2 所示。.. 153
- 圖 5.9 在頻率範圍 1 至 10 MHz 間位移  $u_1$  (實線) 與  $u_3$  (虛線) 示意圖。

	(a) $A_0$ 模態，(b) $S_0$ 模態。.....	154
圖 5.10	平板上表面之質點軌跡示意圖。 (a) $S_0$ 模態在頻率範圍 1.2 至 3.0 MHz， (b) $A_1$ 模態在頻率範圍 3.4 至 5.2 MHz， (c) $S_1$ 模態在頻率範圍 5.6 至 7.4 MHz。.....	155
圖 5.11	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，液體薄層於界面 ( $X_3 = 0$ ) 與上表面 ( $X_3 = -h$ ) 間的壓力差頻譜圖。.....	156
圖 5.12	位移 $u_1$ (實線) 與 $u_3$ (虛線) 示意圖。如圖 5.4(b) 所示， $r$ 、 $s$ 與 $t$ 三點分別為 $S_1$ 、 $S_2$ 與 $S_3$ 之群速度最大值位置。.....	156
圖 5.13	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a) 相速度 $c_{ph}$ 與 (b) 波數虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。.....	157
圖 5.14	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.05 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a) 相速度 $c_{ph}$ 與 (b) 波數虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。.....	158
圖 5.15	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.10 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a) 相速度 $c_{ph}$ 與 (b) 波數虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。.....	159
圖 5.16	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.50 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a) 相速度 $c_{ph}$ 與 (b) 波數虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。.....	160
圖 5.17	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 1.00 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a) 相速度 $c_{ph}$ 與 (b) 波數虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。.....	161
圖 5.18	厚度 1 mm 玻璃板覆蓋一個半無窮域之甘油液體，板波模態的 (a) 相速度 $c_{ph}$ 與 (b) 波數虛部 $k_i$ 對頻率 $f$ 的頻譜圖，其中符號 S 與	

A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。..... 162

圖 5.19 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋一個半無窮域之甘油液體，板波模態的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態。..... 163



# 符號說明

(依出現順序排列)

$0, i, f$	自然、初始與最終三種狀態的上標符號。
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	以自然狀態座標系統作描述的下標符號。
$I, J, K, \dots$	以初始狀態座標系統作描述的下標符號。
$i, j, k, \dots$	以最終狀態座標系統作描述的下標符號。
$t$	時間。
$\xi, \mathbf{X}, \mathbf{x}(t)$	自然、初始與最終狀態的位置向量。
$\xi_\beta, X_\beta, x_\beta(t)$	在自然狀態下觀察的位置向量 $\xi$ 、 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{x}(t)$ 。
$\xi_J, X_J, x_J(t)$	在初始狀態下觀察的位置向量 $\xi$ 、 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{x}(t)$ 。
$\xi_f, X_f, x_f(t)$	在最終狀態下觀察的位置向量 $\xi$ 、 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{x}(t)$ 。
$\frac{Dg}{Dt} = \dot{g}, \frac{\partial g}{\partial t}$	函數 $g(\mathbf{x}, t)$ 對時間 $t$ 的全導函數與局部導函數。
$\mathbf{u}^i (= \mathbf{X} - \xi)$	自然狀態變形至初始狀態的位移增量。
$\mathbf{u}^f (= \mathbf{x} - \xi)$	自然狀態變形至最終狀態的位移增量。
$\mathbf{u} (= \mathbf{x} - \mathbf{X})$	初始狀態變形至最終狀態的位移增量。
$\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^f$	位置函數 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{x}$ 對時間 $t$ 的一次全導函數，即速度向量。
$\dot{\mathbf{v}}^i, \dot{\mathbf{v}}^f$	位置函數 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{x}$ 對時間 $t$ 的二次全導函數，即加速度向量。
$u_\beta^i, u_\beta^f, u_\beta$	在自然狀態下觀察的位移增量 $\mathbf{u}^i$ 、 $\mathbf{u}^f$ 與 $\mathbf{u}$ 。
$u_J^i, u_J^f, u_J$	在初始狀態下觀察的位移增量 $\mathbf{u}^i$ 、 $\mathbf{u}^f$ 與 $\mathbf{u}$ 。
$u_f^i, u_f^f, u_f$	在最終狀態下觀察的位移增量 $\mathbf{u}^i$ 、 $\mathbf{u}^f$ 與 $\mathbf{u}$ 。

$v_{\beta}^i, v_{\beta}^f$	在自然狀態下觀察的速度向量 $\mathbf{v}^i$ 與 $\mathbf{v}^f$ 。
$v_J^i, v_J^f$	在初始狀態下觀察的速度向量 $\mathbf{v}^i$ 與 $\mathbf{v}^f$ 。
$v_j^i, v_j^f$	在最終狀態下觀察的速度向量 $\mathbf{v}^i$ 與 $\mathbf{v}^f$ 。
$\epsilon_{ijk}, \epsilon_{IJK}$	排列(permutation)或 Levi-Civita 符號。
$\hat{n}_j$	Euler 描述下的表面法向量。
$\rho, dV, dA$	Euler 描述下的質量密度、單位體積與單位面積。
$t_k (= \hat{n}_j \tau_{jk})$	施予法向量為 $\hat{n}_j$ 之表面的曳力。
$q (= \hat{n}_j q_j)$	經由法向量為 $\hat{n}_j$ 之表面所釋出的熱能。
$\tau_{ji}$	Cauchy 應力。
$q_j, k_{ij}$	熱通量與熱傳導常數。
$b_j, \hat{h}$	單位質量的微體力與分佈熱源。
$L_{ij} (= v_{i,j})$	空間速度梯度。
$\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}$	微小應變與應變速率。
$\eta, u, \psi$	單位質量的熵、內能與 Helmholtz 自由能。
$\Theta, \Theta^0, \Delta\Theta$	絕對溫度、參考溫度與溫度變化，關係為 $\Theta = \Theta^0 + \Delta\Theta$ 。
$\mathbf{F} (= \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X})$	位移梯度。
$\hat{n}_j$	Lagrange 描述下的表面法向量。
$\rho^0, dV^0, dA^0$	Lagrange 描述下的質量密度、單位體積與單位面積。
$T_{IJ}$	2 <sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力。
$S_{IJ}$	Lagrange 應變。
$q_J, k_{IJ}$	熱通量與熱傳導常數。
$\Xi, U, \Psi$	熵(= $\rho^0 \eta$ )、內能(= $\rho^0 u$ )與 Helmholtz 自由能(= $\rho^0 \psi$ )。



$\rho^0, \rho^i, \rho^f$	在自然、初始與最終狀態下的質量密度。
$u_\beta, u_J, u_j$	在自然、初始與最終狀態下觀察的位移增量。
$v_J^i, v_j^f$	在初始與最終狀態觀察自身狀態時的速度。
$v_\beta^i, v_\beta^f$	在自然狀態觀察初始與最終狀態時的速度。
$v_J^f$	在初始狀態觀察最終狀態時的速度。
$\tau_{IJ}^i (= T_{IJ}^i), \tau_{ij}^f$	在初始與最終狀態下觀察的 Cauchy 應力。
$T_{\alpha\beta}^i, T_{\alpha\beta}^f$	在自然狀態觀察初始與最終狀態時的 2 <sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力。
$T_{IJ}^i, T_{IJ}^f$	在初始狀態觀察初始與最終狀態時的 2 <sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力。
$T_{\alpha\beta}$	在自然狀態觀察初始至最終狀態間的應力增量。
$T_{IJ}$	在初始狀態觀察初始至最終狀態間的應力增量。
$S_{\alpha\beta}^i, S_{\alpha\beta}^f$	在自然狀態觀察初始與最終狀態時的微小應變。
$S_{IJ}^i, S_{IJ}^f$	在初始狀態觀察初始與最終狀態時的微小應變。
$S_{\alpha\beta}$	在自然狀態觀察初始至最終狀態間的應變增量。
$S_{IJ}$	在初始狀態觀察初始至最終狀態間的應變增量。
$q_J^i (= q_J^i), q_j^f$	在初始與最終狀態下觀察的熱通量。
$q_\beta^i, q_\beta^f$	在自然狀態觀察初始與最終狀態時的熱通量。
$q_J^i, q_j^f$	在初始狀態觀察初始與最終狀態時的熱通量。
$q_\beta$	在自然狀態觀察初始至最終狀態間的熱通增量。
$q_J$	在初始狀態觀察初始至最終狀態間的熱通增量。
$k_{\alpha\beta}^0 (= k_{\alpha\beta})$	在自然狀態下的熱傳導常數。
$k_{IJ}^i (= \bar{k}_{IJ})$	在初始狀態下的熱傳導常數。

$k_{ij}^f$ ( $= k_{ij}$ )	在最終狀態下的熱傳導常數。
$\Delta\Theta^i, \Delta\Theta^f$	初始與最終狀態相較於自然狀態時的溫度變化。
$\Theta^0, \Theta^i, \Theta^f$	在自然、初始與最終狀態下的絕對溫度。
$\Delta\Theta$	初始至最終狀態間的溫度差。
$\eta^i, \eta^f$	在初始與最終狀態下單位質量的熵。
$\Xi^{oi}, \Xi^{of}$	在自然狀態觀察初始與最終狀態時的熵。
$\Xi^{if}$ ( $= \Xi$ )	在初始狀態觀察最終狀態時的熵。
$\Xi$	初始至最終狀態間的熵增量。
$b_\beta^f, b_I^f, b_i^f$	在自然、初始與最終狀態下觀察之單位質量的微體力。
$\hat{h}^f$	在最終狀態下輸入之單位質量的分佈熱源。
$dU, dW, dQ$	內能變化量、外界對系統做功、以及系統自外界吸收熱能。
$U, \Psi, H, G$	內能、Helmholz 自由能、熱焓與 Gibbs 自由能。
$\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\dots\delta}(\xi, t)$	自然狀態座標系統所描述的 $N$ 階張量。
$\mathfrak{R}_{IJK\dots L}(\mathbf{X}, t)$	初始狀態座標系統所描述的 $N$ 階張量。
$J = \det(\partial\mathbf{X}/\partial\xi)$	自然與初始狀態之座標系統間的 Jacobi 行列式。
$\rho_0, dV_0, dA_0$	在自然狀態下的質量密度、單位體積與單位面積。
$c_{IJKL}, c_{PQ}$	在自然狀態下原始的二階彈性常數。
$c'_{IJKLMN}, c'_{PQR}$	在自然狀態下原始的三階彈性常數。
$\lambda_{IJ}, \lambda_P$	在自然狀態下原始的熱壓常數。
$k_{IJ}, k_P$	在自然狀態下原始的熱傳導常數。
$\alpha, \alpha'$	在自然狀態下原始的熱常數。
$C_E$	在自然狀態下原始的熱容常數。

$\rho_i, dV_i, dA_i$	在初始狀態下的質量密度、單位體積與單位面積。
$\Theta_0, \Theta_i$	在自然與初始狀態下的絕對溫度。
$\bar{c}_{IJKL}, \bar{c}_{PQ}$	有效彈性常數。
$\bar{\lambda}_{IJ}, \bar{\lambda}_P$	有效熱壓常數。
$\bar{k}_{IJ}, \bar{k}_P$	有效熱傳導常數。
$\bar{\alpha}$	有效熱常數。
$T_{IJ}, T_P$	2 <sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力。
$T_{IJ}^i, T_P^i$	殘留應力或初始應力。
$S_{IJ}, S_P$	微小應變。
$u_{I,J}, u_{I,J}^i, e_{NN}^i$	位移梯度、初始位移梯度與體積膨脹。
$\Xi, \Delta\Theta$	熵增量與溫度差。
$b_J, \hat{h}$	單位質量的微體力與分佈熱源。
$\mathbf{t} (= \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}})$	表面法向量為 $\hat{n}_j$ 的施加曳力。
$\mathbf{q}_{in} (= -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q})$	表面法向量為 $\hat{n}_j$ 的輸入熱能。
$\mathbf{b}, \mathbf{q}$	微體力 $b_I$ 與熱通量 $q_I$ 之粗體表示。
$\mathbf{v}, \mathbf{u}$	速度 $v_I$ 與位移 $u_I$ 之粗體表示。
$\underline{\underline{\mathbf{T}}}, \underline{\underline{\mathbf{S}}}$	應力 $T_{IJ}$ 與應變 $S_{IJ}$ 之粗體表示。
$\underline{\underline{\mathbf{c}}}, \underline{\underline{\lambda}}$	彈性常數 $c_{IJKL}$ 與熱壓常數 $\lambda_{IJ}$ 之粗體表示。
$\hat{\mathbf{n}} = [\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3]$	表面法向量，且 $\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1$ 。
$\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$	沿 $X_1$ 、 $X_2$ 與 $X_3$ 方向上的單位向量。
$P_{m,n}(\xi_m, \xi_n, \omega)$	元素 $\{ \}_1$ 對整個橫截面的厚度 $X_3$ 方向作積分。

$a_m(X_1, \omega)$	模態展開項的待定係數。
$f_n^s(X_1, \omega)$	外界輸入的表面源。
$f_n^v(X_1, \omega)$	外界輸入的體積源。
$O-X_1^0 X_2^0 X_3^0$	座標轉換前的座標系統。
$O-X_1 X_2 X_3$	座標轉換後的座標系統。
$\theta$	水平 $X_1 X_2$ 平面作旋轉角度。
$m, n$	座標轉換矩陣元素，其中 $m = \cos \theta$ 與 $n = \sin \theta$ 。
$\bar{c}_{IJKL}^0, T_{IJ}^0$	座標轉換前的彈性常數與初始應力。
$\bar{\lambda}_{IJ}^0, \bar{k}_{IJ}^0$	座標轉換前的熱壓常數與熱傳導常數。
$\bar{\alpha}^0$	座標轉換前的熱常數。
$\rho_i b_i^0, \rho_i h_i^0$	座標轉換前的微體力與熱源。
$\mathbf{n} = [n_1, n_3]$	波前的單位波傳向量，且 $n_1^2 + n_3^2 = 1$ 。
$\mathbf{U}$	元素 $U_I$ ( $I = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的狀態向量。
$(U_1, U_2, U_3)$	位移 $(u_1, u_2, u_3)$ 的待定係數。
$U_4$	溫度差 $\Delta\Theta$ 的待定係數。
$\bar{\Gamma}_{IJ}, \bar{\Lambda}_I, \bar{K}$	Christoffel 方程式中元素的張量表示。
$A_k$ ( $k = 0, 2, 4, 6$ )	展開 Christoffel 方程式獲得 $c^2$ 之 4 次多項式的係數。
$A'_k$ ( $k = 0, 2, 4$ )	展開 Christoffel 方程式獲得 $c^2$ 之 3 次多項式的係數。
$c_{QT}, c_{QL}, c_{Qth}$	準橫波、準縱波與準熱波的微體波相速度。
$c_{PT}, c_{SH}$	純橫波與面外剪力波的微體波相速度。
$c_L, c_{th}$	純縱波與純熱波的微體波相速度。
$c_\lambda$	彈性與熱性兩者間的耦合項。

$\omega, \xi, f, k$	角頻率、角波數、頻率與波數，關係為 $\omega = 2\pi f$ 與 $\xi = 2\pi k$ 。
$\xi = [\xi_1, \xi_3]$	導波波傳的波數向量，關係為 $\xi_1^2 + \xi_3^2$ 等於微體波角波數之平方。
$\xi_1 (= \xi)$	導波波傳沿水平 $X_1$ 方向的角波數。
$\xi_3 (= \zeta)$	導波波傳沿厚度 $X_3$ 方向的角波數。
$a_{IJ}, b_{IJ}, c_{IJ}$	Christoffel 方程式中 $\zeta$ 之 2 次、1 次與 0 次項的係數。
$B_k (k=0,2,4,6)$	展開 Christoffel 方程式獲得 $\zeta^2$ 之 4 次多項式的係數。
$B'_k (k=0,2,4)$	展開 Christoffel 方程式獲得 $\zeta^2$ 之 3 次多項式的係數。
$\pm \zeta_k$	$\zeta^2$ 之 4 次多項式的複數根，其中 $k=1,2,3,4$ 。
$C_k^\pm$	由邊界條件決定的待定係數。
$p_{ik}^\pm$	$(u_1, u_2, u_3, \Delta\Theta)$ 各分量的比例。
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$	分別代表 $X_1, X_2$ 與 $X_3$ 方向。
$q_{\mathbf{X},ik}^\pm, q_{\mathbf{Y},ik}^\pm$	表面法向量為 $X_1$ 與 $X_2$ 方向之 $(t_1, t_2, t_3, q_{in})$ 各分量的比例。
$q_{\mathbf{Z},ik}^\pm (= q_{ik}^\pm)$	表面法向量為 $X_3$ 方向之 $(t_1, t_2, t_3, q_{in})$ 各分量的比例。
$\mathbf{V}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{Y}, \mathbf{V}_\mathbf{Z}$	元素 $V_{\mathbf{X},I}, V_{\mathbf{Y},I}$ 與 $V_{\mathbf{Z},I} (I=1,2,3,4)$ 所構成的狀態向量。
$(V_{\mathbf{X},1}, V_{\mathbf{X},2}, V_{\mathbf{X},3})$	表面法向量為 $X_1$ 方向之曳力 $(t_1, t_2, t_3)$ 的待定係數。
$(V_{\mathbf{Y},1}, V_{\mathbf{Y},2}, V_{\mathbf{Y},3})$	表面法向量為 $X_2$ 方向之曳力 $(t_1, t_2, t_3)$ 的待定係數。
$(V_{\mathbf{Z},1}, V_{\mathbf{Z},2}, V_{\mathbf{Z},3})$	表面法向量為 $X_3$ 方向之曳力 $(t_1, t_2, t_3)$ 的待定係數。
$V_{\mathbf{X},4}, V_{\mathbf{Y},4}, V_{\mathbf{Z},4}$	表面法向量為 $X_1, X_2$ 與 $X_3$ 方向之熱能輸入 $q_{in}$ 的待定係數。
$\mathbf{P}^\pm$	元素 $p_{ik}^\pm (i, k=1,2,3,4)$ 所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_\mathbf{X}^\pm, \mathbf{Q}_\mathbf{Y}^\pm$	元素 $q_{\mathbf{X},ik}^\pm$ 與 $q_{\mathbf{Y},ik}^\pm (i, k=1,2,3,4)$ 所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_\mathbf{Z}^\pm (= \mathbf{Q}^\pm)$	元素 $q_{\mathbf{Z},ik}^\pm$ 或 $q_{ik}^\pm (i, k=1,2,3,4)$ 所構成的矩陣。

$\mathbb{D}^{\pm}(X_3)$	元素 $e^{\pm i\zeta_k X_3}$ ( $k=1,2,3,4$ ) 所構成的對角矩陣。
$\mathbf{C}^{\pm}$	元素 $C_k^{\pm}$ ( $k=1,2,3,4$ ) 所構成的向量。
$\Omega(\omega, \xi)$	頻散及衰減關係的特徵方程式。
$C_k^S, C_k^A$	由邊界條件決定之對稱與反對稱模態的待定係數。
$\mathbf{U}^S, \mathbf{U}^A$	元素 $U_I$ ( $I=1,2,3,4$ ) 所構成之對稱與反對稱模態的狀態向量。
$\mathbf{V}_X^S, \mathbf{V}_X^A$	元素 $V_{X,I}$ ( $I=1,2,3,4$ ) 所構成之對稱與反對稱模態的狀態向量。
$\mathbf{V}_Y^S, \mathbf{V}_Y^A$	元素 $V_{Y,I}$ ( $I=1,2,3,4$ ) 所構成之對稱與反對稱模態的狀態向量。
$\mathbf{V}_Z^S, \mathbf{V}_Z^A$	元素 $V_{Z,I}$ ( $I=1,2,3,4$ ) 所構成之對稱與反對稱模態的狀態向量。
$q_{Z,ik}^S, q_{Z,ik}^A$	對稱與反對稱模態之 $(t_1, t_2, t_3, q_{in})$ 各分量的比例。
$\Omega^{S,A}(\omega, \xi)$	對稱與反對稱模態之頻散及衰減關係的特徵方程式。
$h$	熱彈平板的厚度。
$\mathbf{P}^{\pm}$	元素 $p_{ik}^{\pm}$ ( $i, k=1,3,4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_X^{\pm}, \mathbf{Q}_Y^{\pm}$	元素 $q_{X,ik}^{\pm}$ 與 $q_{Y,ik}^{\pm}$ ( $i, k=1,3,4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_Z^{\pm} (= \mathbf{Q}^{\pm})$	元素 $q_{Z,ik}^{\pm}$ 或 $q_{ik}^{\pm}$ ( $i, k=1,3,4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbb{D}'^{\pm}(X_3)$	元素 $e^{\pm i\zeta_k X_3}$ ( $k=1,3,4$ ) 所構成的對角矩陣。
$\mathbf{C}'^{\pm}$	元素 $C_k^{\pm}$ ( $k=1,3,4$ ) 所構成的向量。
$\Omega_{\parallel}^{S,A}(\omega, \xi)$	面內波傳之對稱與反對稱模態之頻散及衰減關係的特徵方程式。
$\Omega_{\perp}^{S,A}(\omega, \xi)$	面外波傳之對稱與反對稱模態之頻散及衰減關係的特徵方程式。
$\mathbb{N}$	對稱模態為 $n$ ( $n=0,1,2,\dots$ )，及反對稱模態為 $m+1/2$ ( $m=0,1,2,\dots$ )。
$\mathbf{U}_m$	第 $m$ 層之元素 $U_I^{(m)}$ ( $I=1,2,3,4$ ) 所構成的狀態向量。
$\mathbf{V}_m (= \mathbf{V}_{Z,m})$	第 $m$ 層之元素 $V_{Z,I}^{(m)}$ ( $I=1,2,3,4$ ) 所構成的狀態向量。

$\pm \zeta_k^{(m)}$	第 $m$ 層之 $\zeta^2$ 之 4 次多項式的複數根，其中 $k = 1, 2, 3, 4$ 。
$P_{ik}^{\pm(m)}$	第 $m$ 層之 $(u_1, u_2, u_3, \Delta\Theta)$ 各分量的比例。
$q_{Z,ik}^{\pm(m)} (= q_{ik}^{\pm(m)})$	第 $m$ 層之表面法向量為 $X_3$ 方向之 $(t_1, t_2, t_3, q_{in})$ 各分量的比例。
$C_k^{\pm(m)}$	第 $m$ 層之由邊界條件決定的待定係數。
$\mathbb{P}_m^{\pm}$	第 $m$ 層之元素 $p_{ik}^{\pm(m)}$ ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbb{Q}_m^{\pm} (= \mathbb{Q}_{Z,m}^{\pm})$	第 $m$ 層之元素 $q_{Z,ik}^{\pm(m)}$ 或 $q_{ik}^{\pm(m)}$ ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbb{D}_m^{\pm}(X_3)$	第 $m$ 層之元素 $e^{\pm i \zeta_k^{(m)} X_3}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的對角矩陣。
$\mathbb{E}_m$	第 $m$ 層之元素 $e^{i \zeta_k^{(m)} h_m}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的對角矩陣。
$\mathbb{C}_m^{\pm}$	第 $m$ 層之元素 $C_k^{\pm(m)}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的向量。
$Z_{m-1}, Z_m$	第 $m$ 層之上表面與下表面位置，其中 $m = 1, 2, 3, \dots, M$ 。
$h_m$	第 $m$ 層之厚度，定義 $h_m = Z_m - Z_{m-1}$ 。
$\delta_m$	在界面處 ( $X_3 = Z_m$ ) 的不連續點，包括位移 $u_I$ 與溫度差 $\Delta\Theta$ 。
$\mathbb{F}_m$	在界面處 ( $X_3 = Z_m$ ) 的外界施加，包括曳力 $t_I$ 與熱輸入 $q_{in}$ 。
$m = 0$	代表第 0 層，屬於「上半無窮域」。
$\mathbb{U}_0$	上半無窮域之元素 $U_I^{(0)}$ ( $I = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的狀態向量。
$\mathbb{V}_0 (= \mathbb{V}_{Z,0})$	上半無窮域之元素 $V_{Z,I}^{(0)}$ ( $I = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的狀態向量。
$-\zeta_k^{(0)}$	上半無窮域之 $\zeta^2$ 之 4 次多項式的複數根，其中 $k = 1, 2, 3, 4$ 。
$\mathbb{P}_0^-$	上半無窮域之元素 $p_{ik}^{- (0)}$ ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbb{Q}_0^- (= \mathbb{Q}_{Z,0}^-)$	上半無窮域之元素 $q_{Z,ik}^{- (0)}$ 或 $q_{ik}^{- (0)}$ ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbb{D}_0^-(X_3)$	上半無窮域之元素 $e^{-i \zeta_k^{(0)} X_3}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的對角矩陣。
$\mathbb{C}_0^-$	上半無窮域之元素 $C_k^{- (0)}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 所構成的向量。

$m = M + 1$	代表第 $(M + 1)$ 層，屬於「下半無窮域」。
$\mathbf{U}_{M+1}$	下半無窮域之元素 $U_I^{(M+1)}$ ( $I = 1, 2, 3, 4$ )所構成的狀態向量。
$\mathbf{V}_{M+1}$ ( $= \mathbf{V}_{\mathbf{z}, M+1}$ )	下半無窮域之元素 $V_{\mathbf{z}, I}^{(M+1)}$ ( $I = 1, 2, 3, 4$ )所構成的狀態向量。
$+\zeta_k^{(M+1)}$	下半無窮域之 $\zeta^2$ 之4次多項式的複數根，其中 $k = 1, 2, 3, 4$ 。
$\mathbf{P}_{M+1}^+$	下半無窮域之元素 $p_{ik}^{+(M+1)}$ ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ )所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_{M+1}^+$ ( $= \mathbf{Q}_{\mathbf{z}, M+1}^+$ )	下半無窮域之元素 $q_{\mathbf{z}, ik}^{+(M+1)}$ 或 $q_{ik}^{+(M+1)}$ ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ )所構成的矩陣。
$\mathbf{D}_{M+1}^+(X_3)$	下半無窮域之元素 $e^{+i\zeta_k^{(M+1)}X_3}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ )所構成的對角矩陣。
$\mathbf{C}_{M+1}^+$	下半無窮域之元素 $C_k^{+(M+1)}$ ( $k = 1, 2, 3, 4$ )所構成的向量。
$q_{\text{in}}(X_1, X_2, t)$	雷射光於試件表面 $X_3 = 0$ 處的輸入熱源。
$I_0, a_0$	雷射 TEM <sub>00</sub> 模態的輸出功率(單位 W)與光束半徑。
$R$	試件的光學反射係數。
$g(X_1, X_2)$	Gauss 空間分佈函數，且 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = 1$ 。
$f(t)$	時間變化曲線，分為連續波(CW)與脈衝(pulse)兩種型式。
$H(t)$	Heaviside 單位步階函數。
$\omega_c, f_c$	調制角頻率與調制頻率。
$\tau_r, \tau_p$	上升時間與脈衝時間，關係為 $\tau_p = 2\tau_r$ 。
$Q_{\text{in}}(\xi_1, \xi_2, \omega)$	$q_{\text{in}}(X_1, X_2, t)$ 對 $(X_1, X_2)$ 與 $t$ 的 Fourier 轉換。
$Q'_{\text{in}}(\xi, X_2, \omega)$	$q_{\text{in}}(X_1, X_2, t)$ 對 $X_1$ 與 $t$ 的 Fourier 轉換。
$G(\xi_1, \xi_2)$	$g(X_1, X_2)$ 對變數 $(X_1, X_2)$ 的二維 Fourier 轉換。
$G'(\xi, X_2)$	$g(X_1, X_2)$ 對變數 $X_1$ 的一維 Fourier 轉換。
$F(\omega)$	$f(t)$ 對時間 $t$ 的 Fourier 轉換。
$\text{erf}(\varpi)$	誤差函數，定義為 $\text{erf}(\varpi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\varpi} e^{-x^2} dx$ 與 $\varpi(\omega) = \frac{-i\omega\tau_r}{2\sqrt{2}}$ 。

$Z_{\text{top}}$	層狀介質或平板之上表面位置。
$\square(X_1, X_3, \omega)$	受外界輸入源激發後的物理場，其中 $\square$ 為 $\mathbf{u}$ 、 $\Delta\Theta$ 、 $\underline{\mathbf{T}}$ 或 $\mathbf{q}$ 。
$\square_n(\xi_n, X_3, \omega)$	在某一組 $(\xi, \omega)$ 下的特徵模態。
$a_n(X_1, \omega)$	正 $X_1$ 方向傳遞之模態振幅。
$a_n^t(X_1, \omega)$	$\mathbf{t}_Z^\nabla$ ( $\sim t_{Z,I}^\nabla, I=1,2,3$ ) 所造成的模態振幅。
$a_n^q(X_1, \omega)$	$\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$ 所造成的模態振幅。
$\mathbf{t}_Z^\nabla(X_1, \omega)$	上表面位置受到一個施加曳力，作用範圍為 $\alpha_t \leq X_1 \leq \beta_t$ 。
$\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(X_1, \omega)$	雷射光束照射造成的熱源輸入，作用範圍為 $\alpha_q \leq X_1 \leq \beta_q$ 。
$\mathbf{T}_Z^\nabla(\xi, \omega)$	$\mathbf{t}_Z^\nabla(X_1, \omega)$ 的空間域 Fourier 轉換。
$\mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla(\xi, \omega)$	$\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(X_1, \omega)$ 的空間域 Fourier 轉換。
$\square^t, \square^q$	上表面受到 $\mathbf{t}_Z^\nabla$ 與 $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$ 激發後的物理場，其中 $\square$ 為 $\mathbf{u}$ 、 $\Delta\Theta$ 、 $\underline{\mathbf{T}}$ 或 $\mathbf{q}$ 。
$E_l(\xi_n, \omega)$	第 $n$ 個模態在頻率 $\omega$ 下，表面質點速度大小的可激發性函數。
$E_4(\xi_n, \omega)$	第 $n$ 個模態在頻率 $\omega$ 下，表面質點溫度大小的可激發性函數。
$c_{L0}, c_{S0}$	在自然狀態下的縱波波速與橫波波速。
$c_{R0}, c_{\text{Lame}0}$	在自然狀態下的雷利波波速與 Lamé 模態波速。
$c_{\text{QL}0}, c_{\text{Qth}0}$	在自然狀態下的準縱波波速與準熱波波速。
$c_{\text{th}0}, c_{\lambda 0}$	在自然狀態下的熱波波速，以及熱彈係數 $\lambda$ 造成的耦合項。
$c_{L1}^{[100]}, c_{S1}^{[001]}, c_{S1}^{[010]}$	在初始狀態下沿 $X_1$ 方向的縱波波速與 2 個橫波波速。
$c_{L2}^{[010]}, c_{S2}^{[001]}, c_{S2}^{[100]}$	在初始狀態下沿 $X_2$ 方向的縱波波速與 2 個橫波波速。
$c_{L3}^{[001]}, c_{S3}^{[100]}, c_{S3}^{[010]}$	在初始狀態下沿 $X_3$ 方向的縱波波速與 2 個橫波波速。
$c_{\text{Lame}1}, c_{\text{Lame}2}$	沿 $X_1$ 與 $X_2$ 方向的 Lamé 模態波速。

$\Delta c_{L1}^{[100]}$	縱波波速 $c_{L1}^{[100]}$ 與 $c_{L0}$ 間的波速差。
$\Delta c_{L2}^{[010]}$	縱波波速 $c_{L2}^{[010]}$ 與 $c_{L0}$ 間的波速差。
$\Delta c_{L3}^{[001]}$	縱波波速 $c_{L3}^{[001]}$ 與 $c_{L0}$ 間的波速差。
$\Delta c_{S1}^{[001]}, \Delta c_{S1}^{[010]}$	2 個橫波波速 ( $c_{S1}^{[001]}, c_{S1}^{[010]}$ ) 與 $c_{S0}$ 間的波速差。
$\Delta c_{S2}^{[001]}, \Delta c_{S2}^{[100]}$	2 個橫波波速 ( $c_{S2}^{[001]}, c_{S2}^{[100]}$ ) 與 $c_{S0}$ 間的波速差。
$\Delta c_{S3}^{[100]}, \Delta c_{S3}^{[010]}$	2 個橫波波速 ( $c_{S3}^{[100]}, c_{S3}^{[010]}$ ) 與 $c_{S0}$ 間的波速差。
$\Delta c_{Lame1}, \Delta c_{Lame2}$	2 個 Lamé 模態波速 ( $c_{Lame1}, c_{Lame2}$ ) 與 $c_{Lame0}$ 間的波速差。
$k$	複波數，定義為 $k = k_r + ik_i = k_r(1 + i\gamma_v/2\pi)$ 。
$k_r, k_i$	複波數 $k$ 的實部項與虛部項。
$k_i, \gamma_v$	每單位波傳距離與每單位波長的波數衰減。
$c_{ph} (= f/k_r)$	相速度。
$c_g (= \partial f / \partial k_r)$	群速度。
$\lambda, \mu$	等向性材料的 Lamé 常數。
$c_{11}, c_{13}, c_{55}$	等向性材料的彈性常數。
$k, \lambda, \gamma, \alpha$	等向性材料的熱傳導常數、熱壓常數、熱膨脹常數與熱常數。
$\varphi, \psi$	等向性材料的縱波與橫波勢函數。
$\xi, \zeta_{\square}$	水平 $X_1$ 方向與厚度 $X_3$ 方向的角波數。
$\xi_{\square}, c_{\square}$	徹體波的角波數與相速度。
$\square$	下標符號，可代表 S、L、th、QL 與 Qth 波。
$\zeta_{\lambda 1}, \zeta_{\lambda 2}$	計算角波數 $\xi_{QL}$ 與 $\xi_{Qth}$ 所定義的耦合項。
$o_{\lambda 1}, o_{\lambda 2}$	計算相速度 $c_{QL}$ 與 $c_{Qth}$ 所定義的耦合項。
$e_{QL}, e_{Qth}$	QL 與 Qth 波的振幅比例。



$\rho_f, \kappa_f, \eta_f$	液體層的質量密度、體積模數與動態黏滯係數。
$c_{11}^f, c_{13}^f, c_{55}^f$	液體層的等向性假設之彈性常數。
$\varphi_f, \psi_f$	液體層的縱波與橫波勢函數。
$u_1^f, T_{11}^f, \Delta p$	液體層的位移、應力與壓力差。
$c_{1f}, c_{sf}$	液體層的縱波與橫波波速。
$c_{\text{fluid}}$	液體層 $c_{1f}$ 忽略頻散與衰減影響的縱波波速。
$\xi_{1f}, \xi_{sf}$	液體層的縱波與橫波角波數。
$\zeta_{1f}, \zeta_{sf}$	液體層在 $X_3$ 方向的縱波與橫波角波數。
$h$	液體層厚度。
$\mathbf{U}_1$	液體層位移向量 $\{u_1^f, u_3^f\}^T$ 。
$\mathbf{V}_1, \tilde{\mathbf{V}}_1$	液體層應力向量 $\{T_{31}^f, T_{33}^f\}^T$ 與 $\{T_{11}^f, T_{13}^f\}^T$ 。
$\mathbf{C}_1^-, \mathbf{C}_1^+$	液體層中平面波離開與抵達固液界面的振幅係數。
$p_{ikf}^\pm$	液體層中位移 $(u_1^f, u_3^f)$ 各分量的比例。
$q_{ikf}^\pm, \tilde{q}_{ikf}^\pm$	液體層中表面法向量為 $X_3$ 與 $X_1$ 方向之曳力 $(t_1^f, t_3^f)$ 各分量的比例。
$\varepsilon_{kf}^\pm$	液體層中壓力差 $\Delta p$ 的比例。
$C_{1f}^\pm, C_{sf}^\pm$	液體層中縱波與橫波振幅大小。
$\mathbf{P}_1^\pm$	液體層中元素 $p_{ikf}^\pm$ ( $i, k = 1, 3$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_1^\pm, \tilde{\mathbf{Q}}_1^\pm$	液體層中元素 $q_{ik}^\pm$ 與 $\tilde{q}_{ik}^\pm$ ( $i, k = 1, 3$ ) 所構成的矩陣。
$\varepsilon_k^\pm$	液體層中元素 $\varepsilon_{kf}^\pm$ ( $k = 1, 3$ ) 所構成的行向量。
$\mathbf{D}_1^\pm$	液體層中元素 $(e^{\pm i \zeta_{sf} X_3}, e^{\pm i \zeta_{1f} X_3})$ 所構成的對角矩陣。
$\mathbf{E}_1$	液體層中元素 $(e^{i \zeta_{sf} h}, e^{i \zeta_{1f} h})$ 所構成的對角矩陣。

$H$	平板層厚度。
$\mathbf{U}_2$	平板層位移向量 $\{u_1, u_3\}^T$ 。
$\mathbf{V}_2, \tilde{\mathbf{V}}_2$	平板層應力向量 $\{T_{31}, T_{33}\}^T$ 與 $\{T_{11}, T_{13}\}^T$ 。
$\mathbf{C}_2^+, \mathbf{C}_2^-$	平板層中平面波離開與抵達固液界面的振幅係數。
$p_{ik}^\pm$	平板層中位移 $(u_1, u_3)$ 各分量的比例。
$q_{ik}^\pm, \tilde{q}_{ik}^\pm$	平板層中表面法向量為 $X_3$ 與 $X_1$ 方向之曳力 $(t_1, t_3)$ 各分量的比例。
$C_L^\pm, C_S^\pm$	平板層中縱波與橫波振幅大小
$\mathbf{P}_2^\pm$	平板層中元素 $p_{ik}^\pm$ ( $i, k = 1, 3$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbf{Q}_2^\pm, \tilde{\mathbf{Q}}_2^\pm$	平板層中元素 $q_{ik}^\pm$ 與 $\tilde{q}_{ik}^\pm$ ( $i, k = 1, 3$ ) 所構成的矩陣。
$\mathbf{D}_2^\pm$	平板層中元素 $(e^{\pm i\zeta_S X_3}, e^{\pm i\zeta_L X_3})$ 所構成的對角矩陣。
$\mathbf{E}_2$	平板層中元素 $(e^{i\zeta_S H}, e^{i\zeta_L H})$ 所構成的對角矩陣。
$E_{flowout}^a (= P_{n,n})$	通過厚度 $X_3$ 方向某一截線之時間平均功率流總和。
$\langle P_1^a \rangle$	通過厚度 $X_3$ 方向某一截線之時間平均功率流密度。
$u_0$	液體與固體在平行於界面(沿 $X_1$ 方向上)的切向位移差。
$\Omega_{f-f}(\omega, \xi)$	平板的上下表面皆為自由邊界之特徵方程式。
$\Omega_{s-f}(\omega, \xi)$	平板的上表面為滑動邊界及下表面為自由邊界之特徵方程式。

# 第一章 緒論

本研究是以彈性板的導波波傳為主，考慮平板本身的熱彈耦合效應，或者是其表面黏滯液體負載所造成的額外阻尼，探討波傳時的頻散與衰減關係及其能量耗散。在一個理想無限彈性介質中行進之彈性波在傳遞過程中並不會發生衰減，只有當遇到介質的不連續界面，產生波的反射、折射及繞射使波的能量傳遞方向發生改變，但沒有出現能量型式的轉換。一般而言，彈性波會出現隨著傳遞距離增加而逐漸衰減的現象，有下列兩種情況：熱彈波(thermoelastic waves)在等向性介質傳遞時，只有縱波才伴隨有熱效應出現，產生將應變能轉變為熱能的耗散過程，從而使波在傳遞過程中產生衰減；另一種為黏彈波(viscoelastic waves)，由於介質中有阻尼或內摩擦的存在，縱波與橫波在傳遞過程中皆有能量損失或耗散，此現象稱為介質的黏滯性吸收。由上述得知，一個動力系統若含有狀態變數對時間 $t$ 的一次微分項，在系統中的波傳就會發生振幅衰減以及能量耗散的現象。同理，液體層的黏滯特性就相當是系統中一內部阻尼項，它是隱含於材料係數中的阻尼，不同於熱彈耦合理論中額外熱傳導方程式所造成的阻尼效應。

光聲(photoacoustic, PA)或光熱(photothermal, PT)效應所導致的熱彈波是屬於上述的第一種情形，它主要是應用於量測材料的光電、光化學、熱物理與彈性等性質，可應用於量測試件於不同深度之次表面的結構訊息。根據線性熱彈理論(thermoelasticity)以及配合聲彈理論(acoustoelasticity)，推導內含殘留應力之層狀介質的熱彈波的波傳，並於試件表面上考慮一熱源輸入且其強度經週期性調制(modulation)，模擬分析試件表面的光聲光熱效應對於不同殘留應力(residual stress)的變化。

黏滯性液體本身是屬於上述的第二種情形，其動態黏滯係數(dynamic viscosity)便是一個內部阻尼項，將液體層簡化為含有動態黏滯係數之假想的等向性固體(hypothetical isotropic solid)，推導具液體層負載之平板結構的導波波傳特徵方程式，數值計算並分析其導波波傳的頻散與衰減特性，以及各模態的位移、應力、液體薄層壓力差分佈與平板表面質點運動軌跡。此外，本文亦探討改變液體層厚度對平板導波之頻散與衰減特性所造成的影響。

## 1.1 研究背景及動機

### 1.1.1 熱彈性耦合之聲導波 [1-6]

薄膜材料(thin film materials)本身具有電、磁和光等方面的特殊性質，其範圍包括了與相對較厚基材結合的薄膜、多層薄膜材料(multilayer materials)、鍍於基材上之圖案化薄膜(patterned films)以及無支撐薄膜(free-standing films)等，近年來被廣泛的應用在許多不同的領域，尤其是在超大型積體電路(VLSI)、半導體或微機電(MEMS)製程裡，薄膜元件的缺陷與否更是一大關鍵。以薄膜材料成長或沈積的方式而言，如化學氣相沈積(chemical vapor deposition, CVD)、熱氧化(thermal oxidation)、濺鍍(sputtering)、蒸鍍(evaporation)等，都會使基材表面的薄膜發生變形而產生應力殘留。舉例來說，薄膜與基材之間在接合時，由於兩者本身晶格常數(lattice constant)不同，在介面(interface)處常會導致基材表面的薄膜發生壓縮或拉伸變形，如圖 1.1 所示。根據 1996 年 Kuo 等[1]對鑽石薄膜在作 CVD 過程中可能造成殘留應力的產生原因，分別敘述如下：

- (1) 熱應力(thermal stress)  $\sigma_{th}$ ：主要是在沈積後的冷卻過程中，由於薄膜與基材之間熱膨脹係數(thermal expansion coefficient)上的差異所造成。
- (2) 相變換(phase transformation)  $\sigma_{ph}$ ：其次是在沈積後的冷卻過程中，因相變換所導致的殘留應力。
- (3) 磊晶應力(epitaxial stress)  $\sigma_{ep}$ ：發生在相同晶體結構，但不同晶格常數之薄膜與基材的介面，產生了半契合(semi-coherent)或契合(coherent)情況所導致。
- (4) 本質應力(intrinsic stress)  $\sigma_{in}$ ：主要是因為材料中缺陷(defect)的存在所造成，例如晶界(grain boundary)、差排(dislocation)、孔洞(void)或插入(impurity)等。

因此，殘留應力泛指的是結構體中發生了不均勻的彈性或彈塑性變形，在定溫且無外力作用下，為達到靜力平衡而存在於結構體內的彈性應力。一般來說，無論是對機械加工製程，或是對半導體或微機電製程而言，殘留應力的存在容易使機械工件或薄膜元件的發生變形，造成尺寸上的誤差，並會減損使用壽命及強度。然而，殘留應力的存在並非完全只有負面的影響，有時反而是個有利因素。

舉例來說，從 IV 族半導體材料 Si 本身的固態特性來觀察，其能帶結構為間接能隙(indirect band gap)，發光效率極低，在光電子元件的領域中一直是沒有地位的。另外，Si 在室溫的電子遷移率(mobility)也比 GaAs 約低 5 倍，因此在製備高速元件方面上並不

佔有優勢。但為什麼需要受應變的 Si 材料？根據 2002 年 Samoiloov 與 Thilderkvist [2]，提到此應變主要會影響電子或電洞遷移率，比如在 *p*-MOSFET 中電洞遷移率提高了 30~40%，在 *n*-MOSFET 中電子遷移率飽和在 20%。另外，在 2003 年 Mooney 等 [3] 亦提到此應變會改變其能帶結構，進而增加其遷移率。隨著 Si 分子束磊晶技術日趨成熟以及 Si<sub>1-x</sub>Ge<sub>x</sub>/Si 超晶格(superlattice)或量子阱(quantum corral)等新型材料質量的日益完善，人們希望藉助於能帶工程，對以 Si 為基底的低維量子體系的電學和光學特性進行裁剪，發掘出嶄新的物理現象，給予 Si 基底材料新的活力並孕育出新的方向。

另一方面在機械製程中，殘留應力產生的原因主要是因鑄造、焊接、切削、熱處理、珠擊(shot peening)等加工所導致。如表面加工製程中的珠擊法，如圖 1.2 所示 [4]，就是利用硬度較高的珠粒(或鋼珠)，在機械工件的表面作高速噴擊，使表面受到密集均勻的撞擊力，讓表層造成塑性變形而產生殘留壓應力，使表面能夠承受較大的拉伸應力，並有效抑制表面的裂紋成長，增加機械元件的疲勞強度。目前，珠擊技術的應用仍以汽車與航太工業相關用途的零件為主，主要是改善工件的耐疲勞性、抗應力腐蝕以及抗微震磨耗(fretting)等，以提高工件使用壽命與可靠度。近年來，珠擊技術的應用越來越廣泛，而且其範圍已經延伸至模具、精密零件等領域。

對於表面聲波(surface acoustic wave, SAW)元件，在 1976 年 Nalamwar 與 Epstein [5] 探討了初始應力以及彈性係數與密度隨應變的改變，對表面聲波傳播速度變化的影響，並且比較了石英(quartz)之 YX 切面以及鈮酸鋰(LiNbO<sub>3</sub>)之 YZ 切面的數值與實驗結果。在 2005 年 Kumon 與 Hurley [6] 則針對鍍在單晶矽基材上的氮化鈦(TiN)薄膜，厚度範圍考慮在 0.287-3.330 μm 以及 0.5-5.4 GPa 等雙軸(equi-biaxial)壓應力，隨著厚度的減少與壓應力的增加，可獲得有效的二階彈性係數  $c_{11}$ 、 $c_{44}$  與  $c_{66}$  減少，以及  $c_{12}$ 、 $c_{13}$  與  $c_{33}$  增加，並利用實驗數據來擬合反算自然狀態下的二階彈性係數  $c_{11}$  與  $c_{13}$  以及三階彈性係數  $c_{111}$ 、 $c_{112}$  與  $c_{123}$ 。因此，在元件內部加上殘留拉應力，能使元件的橫波波速與彈性常數增加，增強剛性並提高表面聲波的頻率，可應用於高頻的射頻(radio frequency, RF)元件上，為了探究殘留應力對表面聲波元件之傳遞波速及其頻率的影響，亟需可靠且有效的殘留應力量測方法。

過去二十多年，光聲光熱效應已被歐、美、蘇等國家研究發掘出潛力。光聲顯微鏡(photoacoustic microscopy, PAM)技術的研究主要是針對各種金屬、陶瓷、塑膠材料內部的熱物理性質，以及表面或次表面(subsurface)的微細結構，對於與應力相關的研究卻是

寥寥無幾。若能將此一技術拓展至量測材料內部的殘留應力，對於在半導體或微機電製程等的改良，將會是一個有利的工具。光聲顯微鏡是基於固體的光聲光熱效應，當材料受到光線照射時，吸收光能而受激發，然後通過非輻射的消除激發過程，將吸收的光能全部或部分地轉變成為熱能。假設照射光束(雷射)的強度先經過週期性的調制，在材料表面上就會產生週期性的溫度變化。溫度變化會使材料熱脹冷縮，內部的應力和應變也會產生週期性的變化，產生週期性熱彈性變形。利用感測器將熱彈性變形轉換為電子訊號，其頻率與光的調制頻率相同，強度和相位則由材料本身的光學、熱學、彈性特性及樣品的幾何形狀決定。再透過鎖相(lock-in)技術獲得微弱的時諧電子訊號之強度和相位訊息，藉以分析材料內部的物理性質。再者，鎖相放大器(lock-in amplifier)是用來量測隱藏在雜訊中的微小物理量(nV)，這主要是在訊號中挑選出與某一特定參考頻率符合的成分，並利用相位靈敏檢測(phase sensitive detection, PSD)過濾掉參考頻率以外的雜訊，其缺點是高成本以及大部分頻率最高只達到 100-200 kHz 左右，一般市面所販售儀器中操作頻率能達到較高頻的有 Signal Recovery Model 7280 (0.5 Hz 至 2 MHz)以及 Stanford Research System SR844 (25 kHz 至 200 MHz)兩款。

因此，基於上述的研究背景，讓我們想要去瞭解在內含殘留應力之平板或薄膜結構的光聲光熱效應，希望能夠藉由建立理論模型並且配合數值模擬，探討殘留應力對光聲光熱效應的影響以供後續實驗建立上的參考。在理論模型建立上，我們可假設一個強度經過週期性調制的照射光束(雷射)，照射在一個內含殘留應力之平板或薄膜層狀結構的表面上，於表面上提供一個週期性的熱源使結構發生熱彈性變形，其中熱源能量假設為一個 Gauss 分佈，幾何配置如圖 1.3(a)所示。接著，考慮表面上距離熱源中心某單位長度之位置視為一個訊號接收源，然而，此一位置的訊號接收在一般實驗上是使用雷射光學干涉技術作量測。而本文則是基於此一模型架構下，藉由改變訊號接收處至熱源間的距離  $\Delta r$  以及波傳方向與  $X_1$  軸的夾角  $\Delta\theta$ ，如圖 1.3(b)所示，數值模擬獲得此一質點位置的頻率響應(frequency response)或暫態波形(transient waveform)，分析在近場(near-field)與遠場(far-field)的模擬結果，以助於未來在平板或薄膜結構中殘留應力的分析與鑑定，包括相位、衰減、非等向特性等。此外，誠如前面所介紹的，試件表面經雷射加熱膨脹所造成的熱彈聲波，會因熱彈耦合理論中額外熱傳導方程式的阻尼效應，使波在傳遞過程中皆有能量損失或耗散。

### 1.1.2 具液體負載之聲導波 [7-15]

在研究室過去進行的主題中[7-9]，對於一個內含液體夾層之三明治結構(玻璃/液晶/玻璃)，一個液體層覆蓋之玻璃平板，或是玻璃平板浸沒液體中的導波波傳行為，已有不錯的研究成果。此外，再加上過去進行的聲導波誘發液晶配向層排列的相關研究得知[10-12]，配向技術(alignment technologies) [13]為目前平面顯示面板產業中相當重要的製程之一，此技術可直接決定面板產品的品質好壞，目前產業界使用之摩刷配向技術(rubbing technologies)是屬於面接觸的方式，雖具有一定的品質與水準，但容易累積靜電造成灰塵吸附，以及絨布毛屑掉落而產生污染，仍有待改進的空間。現今已有許多不同於摩刷配向的技術正在研發當中，卻一直無法超越摩刷配向的所有優點，例如：品質、成本、量產性或均勻性等特性，因此，如何改善或取代摩刷配向技術為目前各界所關切的議題。所以，本研究的動機是嘗試以激發超音波的非接觸配向方法來影響液晶配向層分子排列，在配向層的固化過程(curing process)中，以無數週期之超音波所形成的穩定壓力梯度，達成有秩序的分子排列。為了使供給能量不易發生衰減，使配向層內的波傳更容易形成週期性的駐波，瞭解配向層內液體的聲場分佈乃是一件重要的課題。

因配向層分子微小，如何直接觀察其受到超音波影響後的排列結果為一研究重點，常見的配向材料有聚亞醯胺(polyimide, PI)及聚乙烯醇(poly-vinyl-alcohol, PVA)，本研究考慮以 PVA 為分析對象，將之先以碘分子染色，再以線偏光鏡觀察分子排列的狀態。PVA 是一種白色到微黃色的顆粒或粉末，安定且無毒的水溶性高分子，能溶於含 OH 基的極性溶劑中，不溶於幾乎所有的非極性溶劑，其中水是 PVA 的良好溶劑。此外，PVA 亦具有良好的造膜性，形成的膜具有優異的接著力、耐溶劑性、耐摩擦性、伸張強度與氧氣阻絕性。因為 PVA 同時擁有親水基及疏水基兩種官能基，而具有界面活性的性質，因此，PVA 可作為高分子乳化或懸浮聚合反應時的保護體。以上這些特有的性質促使 PVA 廣泛地應用在各行各業。

本研究將 PVA 配向液體薄層簡化為具動態黏滯係數之類等向性固體，推導具液體薄層負載之平板結構的聲導波波傳特徵方程式。由於液體表層動態黏滯係數的影響，會使聲導波在結構中傳遞時會發生衰減，數值計算並分析其導波波傳的頻散與衰減特性，以及各模態的位移、應力、液體薄層壓力差分佈與平板表面質點運動軌跡，有助於推估超音波誘發液晶配向層排列的實驗中，液體薄層中壓力梯度的改變對 PVA 分子排列的影響。除此之外，在本研究的數值結果中，亦將甘油(glycerol 或 glycerin)當作液體薄層

的材料，探討改變液體薄層厚度對平板導波之頻散與衰減特性，以及平板表面質點運動軌跡的影響。再者，望所獲得這些定性結果有助於在聲波平板模式(acoustic plate mode, APM)與撓性板波(flexural plate wave, FPW)感測器上的研發[14, 15]。

## 1.2 文獻回顧

### 1.2.1 光聲光熱現象及技術 [16-36]

早在 1880 年，Bell [16, 17]發明了光感話筒(photophone)，首先在固體中觀察到光聲轉換現象，稱之為光聲效應，他將固體樣品密封於硒晶腔體(selenium cell)裡，聚焦太陽光並間斷地照射在腔體中的樣品，再透過連接到腔體上的聽筒聽到了某種聲響。隔年，Tyndall [18]亦在氣體的光聲實驗中觀察到相同的效應。然而，將近一個世紀以後，到了 1970 年代，由於電聲(electroacoustic)微弱訊號檢測技術不斷地發展進步，加上高靈敏度氣體麥克風(gas microphone)與壓電陶瓷感測器(piezoelectric ceramic sensor)的出現，以及高壓氙氣燈泡(HID Xenon gas lamp)、連續可調制雷射(continuously tunable laser)與脈衝雷射(pulse laser)的相繼地問世，使人們對光聲效應的研究才真正地發生了興趣。其中以 Kreuzer 與 Patel [19]、Rosencwaig [20]以及 Adams 等[21]為代表的科學家作了許多開拓性的工作，確立了光聲學和光聲技術的地位。再者，Rosencwaig 與 Gersho [22]以一個圓柱型光聲腔(cylindrical photoacoustic cell)為推導模型，包括試件、背襯(backing)材料以及氣體，其剖面示意圖如圖 1.4 所示，在一維熱擴散方程式(heat diffusion equation)的基礎下建立了一維固體光聲理論，簡稱為 RG 理論，數學方程式如下所示

$$\frac{\partial^2 \theta_g}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial \theta_g}{\partial t}, \quad 0 < x < l_g \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\beta I_0}{2k_s} e^{\beta x} (1 + e^{i\omega t}), \quad -l_s < x < 0 \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_b}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial \theta_b}{\partial t}, \quad -(l_b + l_s) < x < -l_s \quad (1.1c)$$

其中  $\omega$  代表入射光束的截波頻率(chopping frequency) (rad/sec)， $I_0$  為入射單色光的能量輸入(W/cm<sup>2</sup>)， $\beta$  為試件的光吸收係數(optical absorption coefficient) (cm<sup>-1</sup>)， $\theta_{\square}(x,t)$  代表溫度(°C)， $k_{\square}$  為熱傳導常數(thermal conductivity) (cal/cm.sec.°C)， $\rho_{\square}$  為質量密度(g/cm<sup>3</sup>)，

$C_{\square}$  為比熱(specific heat) (cal/g.°C) ,  $\alpha_{\square}$  ( $=k_{\square}/\rho_{\square}C_{\square}$ ) 為熱擴散常數(thermal diffusivity) ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) , 且下標符號  $\square$  代表氣體(g)、試件(s)與背襯(b) 。配合位置  $x=0$  與  $-l_s$  的界面條件如下所示

$$\theta_s(0,t) = \theta_g(0,t), \quad \theta_s(-l_s,t) = \theta_b(-l_s,t), \quad (1.2a, b)$$

$$k_s \theta'_s(0,t) = k_g \theta'_g(0,t), \quad k_s \theta'_s(-l_s,t) = k_b \theta'_b(-l_s,t). \quad (1.2c, d)$$

以及初始條件( $t=0$ )如下所示

$$\theta_g(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g \quad (1.3a)$$

$$\theta_s(x,0) = 0, \quad -l_s \leq x \leq 0 \quad (1.3b)$$

$$\theta_b(x,0) = 0, \quad -(l_b + l_s) \leq x \leq -l_s \quad (1.3c)$$

上述內容說明了與試件接觸的氣體中光聲訊號生成的物理過程，至今此一理論仍是分析光聲實驗結果的重要依據之一。

近幾十年來，各國科學家對光聲技術進行了更加廣泛深入的研究，分別建立了氣體麥克風光聲[23]與壓電光聲[24, 25]兩套不同系統，分別如圖 1.5(a)與(b)所示，所使用的光源有高壓氬氣燈泡、連續可調制雷射與脈衝雷射等。並從塊材的應用擴大到多層薄膜結構，研究對象涉及到有機、無機、半導體、金屬等材料的物理和化學相關問題。另外，以非輻射(nonradiative)激發機制為物理基礎的其他光熱檢測技術，例如：光熱光偏轉法(PT deflection) [26, 27]、光熱光位移法(PT displacement) [28, 29]、光聲拉曼光譜法(PA Raman spectroscopy) [30, 31]、光感焦電光譜法(photo-pyroelectric spectroscopy, PPES) [32, 33]、熱透鏡法(thermal lensing) [34]以及熱波成像技術(thermal wave imaging technique) [35, 36]等，也相繼被發明出來，其中前兩個檢測技術分別如圖 1.6(a)與(b)所示。

光聲光熱檢測技術的應用發展會如此迅速的原因是由其自身的特點所決定的，這些特點主要如下：

- (1) 光聲檢測與通常的光譜技術的主要區別，在於光聲檢測的光聲訊號是直接取決於物質吸收光能的大小，正因為這樣，所以反射光、散射光等對光聲檢測的干擾就很小，對弱吸收試件則可增大入射光功率，從而提高檢測的信噪比。因此，它可以成功地用來檢測各種試件，如透光的或非透光的固體、液體、氣體、粉

末、膠體、晶體或非晶態等物質的吸收或其吸收光譜。同時，它也是唯一可以用來檢測試件剖面吸收光譜的方法。

- (2) 在光聲檢測中，試件本身既是被研究的對象，也是吸收電磁輻射(包括電子束)的檢測器，因此，可以在一個很寬的光學或電磁學波長範圍內進行研究而不必改變檢測系統。最低檢測極限主要取決於光源強度，檢測器和吸收放大器的靈敏度以及窗口材料(window material)的吸收。
- (3) 光聲訊號是物質分子在吸收強度調制的外界入射能量後，由受激態通過非輻射過程躍遷到低能態時所產生的。因此，它與物質受激發後的輻射過程或光化學過程等是互補的。所以，光聲效應本身又是一種研究物質螢光(luminescent)、光電(photoelectric)和光化學(photochemical)現象之靈敏且有效的方法。
- (4) 光聲效應不僅像光譜方法那樣可用來測定物質的吸收譜線，而且還可用來研究衰減或輻射過程的量子效率，以及用於測定物質的熱學性質、彈性性質、薄膜厚度和對非透光材料次表面熱波成像等各種非光譜的研究等。

## 1.2.2 一般常見的薄膜殘留應力量測方法

### 1.2.2.1 基板曲率量測法(Substrate Curvature Measurement Method) [37, 38]

這是一種傳統的方法，利用量測薄膜曲率變化，以獲得薄膜內應力大小。圖 1.7(a) 為幾何示意圖，藉由轉動反射鏡，雷射光會掃瞄在基板表面，由反射光的偏移量，經定位感測器量測，可得基板鍍膜前後之曲率半徑值分別為  $R_0$  和  $R$ ，由 Stoney 方程式可得薄膜的應力為

$$\sigma = \frac{1}{6} \left( \frac{E_s}{1-\nu_s} \right) \left( \frac{t_s^2}{t_f} \right) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right), \quad (1.4)$$

其中  $E_s/(1-\nu_s)$  基板的雙軸模數(biaxial modulus)， $t_s$  與  $t_f$  分別為基板與薄膜的厚度。

### 1.2.2.2 鼓漲測試(Bulge Test) [39]

鼓漲測試是近年來被用來量測薄膜機械性質的一種方式，如圖 1.7(b)所示，並根據鼓漲方程式，可得薄膜的殘留應力和雙軸模數。Beams 等[39]最早利用鼓漲測試來量測

金和銀薄膜的機械性質，假設一個無支撐薄膜受壓力而鼓起的形狀是呈一顆圓球的上半部，且其應力和應變都是等雙軸的狀態，所算出的壓力  $P$  和薄膜鼓起高度  $h$  的關係為

$$P = c_1 \sigma t \frac{h}{a^2} + c_2 M t \frac{h^3}{a^4}, \quad (1.5)$$

其中  $\sigma$  為加入殘留應力， $c_1$  和  $c_2$  代表的是受懸浮薄膜形狀影響的常數， $a$  為懸浮薄膜的尺寸(對圓形而言為半徑，對正方形而言為邊長的一半)， $t$  為薄膜的厚度。

### 1.2.2.3 高解析度 X 光繞射儀 (High Resolution X-Ray Diffractometry, HRXRD) [40-42]

X 光繞射技術在材料的分析由早期粉末應用到目前的薄膜應用，為能有效控制奈米級半導體的電性及其光學特性，薄膜厚度、組成、晶格結構、不匹配、應變、鬆弛現象、薄膜密度、表面及介面層間粗糙度等特性皆需加以量測並評估，使用 X 光繞射及散射作實際材料特性的監測是目前最為有效的非破壞檢測(non-destructive test, NDT)方法。

傳統的 X 光繞射儀在測試時，所採用的是對稱性 Bragg 繞射法，入射光與反射光是對稱的，即兩者與試樣表面的夾角相同。因 X 光對材料的穿透深度與  $\sin\theta/\mu$  成正比，其中  $\theta$  為 X 光的入射角， $\mu$  為材料的線吸收係數。對大部分的材料而言， $1/\mu$  遠超過於薄層厚度，在這種情況下所量得的繞射訊號，薄膜層僅佔有很低的比例，甚至於會被基板散射所產生之背景輻射遮掩，無法明確的辨識。因此，欲量測薄膜或表層的晶格結構與應力訊息，為了能獲得較佳的測試結果，改進傳統的 Bragg 繞射法，利用低掠角入射 X 光繞射法(grazing incident X-ray diffraction, GIXRD)，由於可以明顯增強薄膜的繞射訊號，近年來被廣泛應用於薄膜分析，儀器配置如圖 1.8(a)所示。此外，亦可配合小角度 X 光散射法(small angle X-ray scattering, SAXD)來獲得材料中微小顆粒的分佈。

Bragg 定律， $2d \sin\theta = n\lambda$ ，如圖 1.8(b)所示，在宏觀可量測的散射線位置(如 Bragg 角  $\theta$  或散射角  $2\theta$ )和材料微觀結構尺寸(晶面間距  $d$ )之間建立起定量關係。在應力作用下晶面間距的變化必會引起 Bragg 角的變化，相對於無應力狀態的 Bragg 角  $\theta_0$ ，受力後的散射線出現在 Bragg 角  $\theta$  偏移  $d\theta$  後的位置。散射線位置變化  $d\theta$  與晶格應變的關係可對 Bragg 方程式微分而得：

$$\Delta d/d = -\cot\theta \Delta\theta \Rightarrow (d-d_0)/d_0 = -\cot\theta_0(\theta-\theta_0). \quad (1.6)$$

在 Agnihotri [42] 所示的轉動曲線(rocking curve)中，以 Si 晶體(400)面之峰值位在 69.2

為基準，利用 Ge 晶體之峰值相對於 Si 峰值可得知：應力大小、晶格常數、傾斜角度與濃度高低，進而利用此結果可計算出薄膜殘留應力的大小。

#### 1.2.2.4 顯微式拉曼散射光譜儀 (Micro-Raman Scattering Spectroscopy) [43-47]

Wolf 在 1996 年[43]利用了顯微式 Raman 散射光譜儀，如圖 1.9(a)所示，量測未受應力之 Si 晶體塊材的 Raman 散射譜峰位於 $\sim 520 \text{ cm}^{-1}$ ，進而量測在積體電路上 Si 晶體譜峰的位置與計算之間譜峰的 Raman 平移大小，來估算受到局域機械應力之影響大小，並顯示出 Si 基材附近的受力分佈情形，如圖 1.9(b)所示。

Raman 光譜儀可用來探測某種原子振動模式(如聲子)的頻率和強度隨應變和組成變化，也可用來表現材料應變和量測材料組成比例。在 2000 年 Shin 等[44]及 2003 年 Rath 等[45]探討  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  合金的 Raman 光譜及其與應變之間的關係，對於沒有應變的  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  合金，三個譜峰分別來自合金層中的 Ge-Ge ( $\omega \approx 295 \text{ cm}^{-1}$ )、Si-Si ( $\omega \approx 415 \text{ cm}^{-1}$ ) 和 Si-Ge ( $\omega \approx 515 \text{ cm}^{-1}$ ) 振動模態。在完全應變的  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  層中，壓應變使得三個振動模態的峰值都向高波數移動[由於 Raman 光譜儀為背散射(back-scattering)配置，只有縱向光學聲子(LO)對散射有貢獻]。另外，根據 1994 年 Tsang 等[46]以及 2000 年 Jawhari [47] 的文獻，亦可知  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  合金的組成成分和面內殘留應變與 Raman 平移的公式關係。

#### 1.2.3 聲彈應力量測法 (Acoustoelastic Stress Measurement) [48-60]

利用超音波量測殘留應力是非破壞檢測方法中頗具發展潛力的一種方法，它是通過超音波在材料內部的傳播特性，利用應力引起的聲彈雙折射(acoustoelastic birefringence)效應量測出超音波傳遞路徑的平均應力。這種現象和透明材料的光彈性效應十分相似，可以用來進行應力測量。聲彈性方法的主要優點是可以測量非透明材料中的應力，特別是金屬或焊接工件內部的殘留應力。

聲彈理論最早是在 1953 年由 Hughes 與 Kelly [48]所提出，考慮在單軸壓力(uniaxial compression)與淨水壓(hydrostatic pressure)的應力狀態下，將等向性(isotropic)材料仿效 1951 年 Murnaghan [49]提供的應變能函數(strain energy function)，引入 Murnaghan 三階彈性常數( $l, m, n$ )，推導並且明確地預知縱波(longitudinal wave)與剪力波(shear wave)的波速改變，以聚苯乙烯(polystyrene)、阿姆克鐵(Armco iron)與派瑞克斯玻璃(Pyrex glass)

等三種材料實驗驗證其關係式。在三階彈性常數的測定，在 1961 年 Toupin 與 Bernstein [50]、1964 年 Thurston 與 Brugger [51] 以及 Thurston [52, 53] 等文獻中已將此一聲彈理論發展完備。因此，聲彈理論是運用連體力學的平衡方程式，並同時加入三階彈性常數的本構方程式為基礎所建立出來的。

此外，理論與實驗的研究仍是持續地進行，最早在 1958 年 Bergman 與 Shahbender [54] 則利用發射接收(transmitter-receiver)的實驗方式觀察到雙折射現象，在初始應力的影響下，沿兩個偏振主軸方向上的剪力波波速與未受應力時比較會有些微地差異。在 1966 年 Smith 等 [55] 則延續 Thurston 與 Brugger [51] 的理論，並利用脈衝回音干涉技術(pulse-echo interferometric technique)量測縱波與橫波的波速，計算出等向性多晶材料(polycrystalline material)的三階彈性常數，例如鋼(steel)、鋁(aluminum)、鎂(magnesium)、鉬(molybdenum)、鎢(tungsten)。在 1976 年 Egle 與 Bray [56] 依照 Hughes 與 Kelly [48] 的理論，利用實驗量測建立出波速對應變的相對變化關係，計算出鐵路軌道上鋼材料的三階彈性常數。

對於正交性(orthotropic)材料的聲彈雙折射公式，在 1983 年 King 與 Fortunko [57] 推導出受到雙軸平面應力  $T_{11}^i$  與  $T_{22}^i$  (假設  $T_{33}^i = 0$ ) 之平板在波傳為厚度  $X_3$  方向上的傳遞波速與預應力之間的關係。在 1984 年 Pao 等 [58] 以及 1985 年 Pao 與 Gamer [59]，引入自然狀態(natural state)、初始狀態(initial state)與最終狀態(final state)的架構，如圖 1.10 所示，推導出受預應力下材料的本構方程式與運動方程式，並應用此架構下的聲彈理論分析預變形作用下之正交性材料的平面波相速度。對於一正交性材料來說，在此平面預應力的影響之下，波速與應力之關係式可表示如下：

$$(v_L - v_L^0)/v_L^0 = A(T_{11}^i + T_{22}^i) + D(T_{11}^i - T_{22}^i), \quad (1.7a)$$

$$(v_{T1} - v_{T2})/v_T^0 = (v_{T1}^0 - v_{T2}^0)/v_T^0 + B(T_{11}^i - T_{22}^i) + E(T_{11}^i + T_{22}^i), \quad (1.7b)$$

$$(v_{T1} + v_{T2} - 2v_T^0)/2v_T^0 = C(T_{11}^i + T_{22}^i) + F(T_{11}^i - T_{22}^i), \quad (1.7c)$$

其中  $v_T^0 = (v_{T1}^0 + v_{T2}^0)/2$ 。上標「0」代表未受應力情況，下標「L」代表縱波(longitudinal wave)，下標「T1」與「T2」分別代表與主平面應力方向相同的兩個剪力波(shear wave)，且主平面應力方向分別為  $X_1$  與  $X_2$ 。係數  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  與  $F$  代表聲彈雙折射常數，它與材料的彈性常數有關，對於輕微正交性材料來說，係數  $D$ 、 $E$  與  $F$  會是一個微小值。

超音波在有應力的介質中傳播時，剪力波會在兩個主平面應力方向上發生偏振，這兩種偏振波以不同的速度傳播，因此，根據上述波速與應力之關係式，可利用剪力波造成的雙折射效應來求得兩個主平面應力(殘留應力或預應力)的大小。

在聲彈應力量測法中，其中以精密的波速量測技術最為重要。然而，在眾多的波速量測方法中，以脈衝回音重合法(pulse-echo-overlap method, PEO method) [60]獲得突破性發展。此法是通過量測超音波脈衝在一定長度的物體中之行進時間(travel time)來計算波速大小，在本質上屬於相位比較法(phase comparison method)。超音波脈衝在衰減係數不大的金屬中產生的多次反射波藉由換能器(transducer)接收後，將同一次發射所產生的兩個不同反射波顯示在示波器上，嘗試將它們完全重合，從而準確地量測出超音波脈衝的行進時間。

由上述看起來聲彈應力量測法的基本原理是清楚的，但是它在實際應用的過程中卻遇到許多困難。首先，因超音波的波長太長及波速太低，預應力對超音波在固體中傳遞波速變化的影響是非常小的，例如 100MPa 的應力僅能引起鋁材中的波速變化為 0.1%，在鋼材中為 0.001%。其次，由於多晶材料本身中晶體顆粒(grain)的取向不同，以及生產加工過程中產生的各種組織缺陷，包括紋理(texture)或錯位的密度等，這些所造成的雙折射效應與殘留應力所造成的雙折射效應是屬於同一數量級，必須將兩者區分出來才能確保量測的精準度。另外，要如何製作一個無應力(或已知初始應力)且又要與實際情況十分接近的標準試件，來獲得所需的材料聲彈特性是十分困難的。最後，還有高效率換能器與耦合劑(couplant)之研發等其他問題。正因為如此，以聲彈性方法量測殘留應力至今尚處於實驗室階段。

#### 1.2.4 雷射超音波技術(Laser Ultrasonic Technique) [61, 62]

在工程實地量測的應用上，據前一節關於聲彈應力量測法的敘述，可知此法是屬於接觸式的量測方法，以耦合劑作為超音波探頭與試件之間彈性波能量傳遞的媒介，藉由探頭的壓電效應作發射與接收，以獲得試件的材料特性，但此一方式也使得傳統以探頭為主的超音波檢測技術的應用受到相當大的限制。尤其是對於半導體或微機電製程等關於微小元件(如薄膜)上的量測，需要一個非接觸式、高解析度、高速自動化的精密量測方法，對此工作環境的需求，其中以雷射作為超音波波源產生及接收的雷射超音波技術具有最大的發展潛力。

由於雷射超音波技術具有非接觸式與高頻寬的特性，近幾十年來，被廣泛地應用於非破壞檢測領域，它主要是在不接觸待測物的前提下，利用雷射光照射到試件表面上並瞬間提供熱源，於試件表面發生熱彈性變形而產生超音波波源，使得超音波能在試件中傳遞；另一方面，再利用雷射光學干涉技術來量測超音波於試件中傳遞時所造成的表面質點位移或速度訊號。在固體的雷射超音波試驗中，視雷射的發射與接收位置可區分出四種配置圖，如圖 1.11 所示。根據 Scruby 在 1990 年[61]的著作中，其內容以理論模型與實驗量測詳細地說明雷射超音波波源生成機制與訊號接收方法以及其相關應用。

雷射超音波技術在非破壞檢測領域的應用範圍廣泛，包括了裂縫檢測、製程監控或材料特性量測等。在 1993 年 Davies 等[62]針對雷射所激發之超音波的特性、力學及其各式應用作了詳細的回顧介紹與說明。尤其在雷射超音波速度與衰減量測的主題上，可藉由量測壓力波(compression wave)與剪力波(shear wave)波速來確定材料的彈性常數與晶體顆粒大小。另外，在測定薄膜厚度的主題上，鑑於以標準 Q-switch 雷射所激發出壓力波之短時寬(temporal width)可用於量測厚度 $\leq 1$  mm 的薄膜，這是過去使用壓電探頭所不能達到的，因此，可以使用雷射在薄膜中產生一個不相互重疊的壓力波來確定薄膜厚度大小。總括來說，將上述兩個主題配合第 1.2.3 節中關於聲彈應力量測法的敘述，相信在殘留應力的非破壞檢測上會有很大的助益。

### 1.2.5 熱彈理論的模型 [63-77]

由於雷射照射在試件表面上會瞬間提供熱源並使其發生熱彈性變形，由此可知，在理論模型須建立熱傳導與彈性耦合理論的架構上。早在 1950 年代，許多科學家[63-68]便開始研究有關溫度場與應變場相互耦合的熱彈理論(thermoelasticity)，是屬於古典的熱彈理論(classical thermoelasticity, CTE)。在 1967 年 Lord 與 Shulman [69]研究動態熱彈理論，發現分析熱傳方程式時，只考慮古典的 Fourier 熱傳導，波傳速度上會有誤差，因此須考慮非 Fourier 熱傳導效應，在古典的 Fourier 熱傳導方程式中熱通量上加入一熱弛緩時間(thermal relaxation time)作修正，簡稱為 LS 模型。在 1998 年 Chandrasekharaiah [70]額外溫度梯度上加入一熱弛緩時間，簡稱為延伸的 LS 模型。在 1972 年 Green 與 Lindsay [71]同樣為了減少動態熱彈理論上的誤差，於能量方程式與 Duhamel-Neumann 熱彈定律中的溫度變化項也引入兩個熱弛緩時間作修正，並簡稱為 GL 模型。在 1975 年 Nowacki [72]的著作中，對熱彈理論的動態時諧問題作了一番整理，並延伸至與電磁

場耦合的電磁熱彈理論(electro-magneto-thermoelasticity)。此外，Green 與 Nagdhi [73-75] 則是針對熱彈材料本身能量消散(energy dissipation)情況，將熱傳方程式考慮為一個波動方程式(即溫度對時間的二次微分)，簡稱為 GN-I、GN-II 與 GN-III 模型。上述這些修正模型統稱為廣義的熱彈理論(generalized thermoelasticity, GTE)。

首先，介紹熱彈耦合理論的統御方程式，包括了運動方程式(equation of motion)與能量方程式(energy equation)分別如下表示：

$$\boxed{T_{IJ,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I}, \quad (1.8a)$$

$$\boxed{-q_{J,J} + \rho h = \Theta_0 \dot{\Xi}}. \quad (1.8b)$$

根據上一段有關廣義的熱彈理論模型之敘述，再依照本構方程式與熱傳導方程式的給定方式，可大致分類如下：

(1) 古典熱彈非耦合理論：

(Classical uncoupled theory of thermoelasticity)

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL} u_{K,L} - \lambda_{IJ} \Delta \Theta \\ \Xi = \alpha \Delta \Theta \end{cases} \quad (1.9a)$$

$$q_J = -k_{JK} \Delta \Theta_{,K} \quad (1.9b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL} u_{K, JL} - \lambda_{IJ} \Delta \Theta_{,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.10a)$$

$$k_{JK} \Delta \Theta_{,JK} + \rho h = \Theta_0 \alpha \Delta \dot{\Theta}. \quad (1.10b)$$

(2) 古典熱彈耦合理論(CTE 或 GN-I 理論) [72, 73]：

(Classical coupled theory of thermoelasticity (CTE or GN-I theory))

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL} u_{K,L} - \lambda_{IJ} \Delta \Theta \\ \Xi = \lambda_{KL} u_{K,L} + \alpha \Delta \Theta \end{cases} \quad (1.11a)$$

$$q_J = -k_{JK} \Delta \Theta_{,K} \quad (1.11b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL} u_{K, JL} - \lambda_{IJ} \Delta \Theta_{,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.12a)$$

$$k_{JK} \Delta \Theta_{,JK} + \rho h = \Theta_0 (\alpha \Delta \dot{\Theta} + \lambda_{KL} \dot{u}_{K,L}). \quad (1.12b)$$

(3) 具單相延遲熱傳導的熱彈理論(LS 理論) [69]：

(Thermoelasticity with single phase-lag heat conduction (LS theory))

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL} u_{K,L} - \lambda_{IJ} \Delta \Theta \\ \Xi = \lambda_{KL} u_{K,L} + \alpha \Delta \Theta \end{cases} \quad (1.13a)$$

$$q_J + t_q \dot{q}_J = -k_{JK} \Delta \Theta_{,K} \quad (1.13b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL}u_{K,JL} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta_{,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.14a)$$

$$k_{JK}\Delta\Theta_{,JK} + (\rho \dot{h} + t_q \rho \dot{h}) = \Theta_0[\alpha(\Delta\dot{\Theta} + t_q \Delta\ddot{\Theta}) + \lambda_{KL}(\dot{u}_{K,L} + t_q \ddot{u}_{K,L})]. \quad (1.14b)$$

(4) 具雙相延遲熱傳導的熱彈理論(延伸的 LS 理論) [70] :

(Thermoelasticity with dual phase-lag heat conduction (extended LS theory))

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL}u_{K,L} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta \\ \Xi = \lambda_{KL}u_{K,L} + \alpha\Delta\Theta \end{cases} \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{q}_J + t_q \dot{\mathbf{q}}_J = -k_{JK}(\Delta\Theta_{,K} + t_g \Delta\dot{\Theta}_{,K}) \quad (1.15b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL}u_{K,JL} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta_{,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.16a)$$

$$\begin{aligned} k_{JK}(\Delta\Theta_{,JK} + t_g \Delta\dot{\Theta}_{,JK}) + (\rho \dot{h} + t_q \rho \dot{h}) \\ = \Theta_0[\alpha(\Delta\dot{\Theta} + t_q \Delta\ddot{\Theta}) + \lambda_{KL}(\dot{u}_{K,L} + t_q \ddot{u}_{K,L})]. \end{aligned} \quad (1.16b)$$

(5) 溫度變化率相關的熱彈理論(GL 理論) [71] :

(Thermoelasticity of temperature-rate-dependence; GL theory)

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL}u_{K,L} - \lambda_{IJ}(\Delta\Theta + t_1 \Delta\dot{\Theta}) \\ \Xi = \lambda_{KL}u_{K,L} + \alpha(\Delta\Theta + t_2 \Delta\dot{\Theta}) \end{cases} \quad (1.17a)$$

$$\mathbf{q}_J = -k_{JK}\Delta\Theta_{,K} \quad (1.17b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL}u_{K,JL} - \lambda_{IJ}(\Delta\Theta_{,J} + t_1 \Delta\dot{\Theta}_{,J}) + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.18a)$$

$$k_{JK}\Delta\Theta_{,JK} - \Theta_0 \lambda_{KL} \dot{u}_{K,L} + \rho \dot{h} = \Theta_0 \alpha(\Delta\dot{\Theta} + t_2 \Delta\ddot{\Theta}). \quad (1.18b)$$

(6) 無能量耗散的熱彈理論(TEWOED 或 GN-II 理論) [74] :

(Thermoelasticity without energy dissipation; TEWOED or GN-II theory)

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL}u_{K,L} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta \\ \Xi = \lambda_{KL}u_{K,L} + \alpha\Delta\Theta \end{cases} \quad (1.19a)$$

$$\mathbf{q}_J = -k_{JK}^* \vartheta_{,K} \quad (1.19b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL}u_{K,JL} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta_{,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.20a)$$

$$k_{JK}^* \Delta\Theta_{,JK} + \rho \dot{h} = \Theta_0(\alpha \Delta\ddot{\Theta} + \lambda_{KL} \ddot{u}_{K,L}). \quad (1.20b)$$

(7) 具能量耗散的熱彈理論(TEWED 或 GN-III 理論) [75] :

(Thermoelasticity with energy dissipation; TEWED or GN-III theory)

$$\begin{cases} T_{IJ} = c_{IJKL}u_{K,L} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta \\ \Xi = \lambda_{KL}u_{K,L} + \alpha\Delta\Theta \end{cases} \quad (1.21a)$$

$$\mathbf{q}_J = -(k_{JK}\Delta\Theta_{,K} + k_{JK}^* \vartheta_{,K}) \quad (1.21b)$$

$$\Rightarrow c_{IJKL}u_{K,JL} - \lambda_{IJ}\Delta\Theta_{,J} + \rho b_I = \rho \ddot{u}_I, \quad (1.22a)$$

$$(k_{JK} \Delta \dot{\Theta}_{,JK} + k_{JK}^* \Delta \Theta_{,JK}) + \rho \dot{h} = \Theta_0 (\alpha \Delta \ddot{\Theta} + \lambda_{KL} \ddot{u}_{K,L}). \quad (1.22b)$$

在上述諸式中， $\rho$ 、 $\rho b_l$  與  $\rho \dot{h}$  分別為質量密度、微體力與分佈熱源； $u_l$ 、 $\Delta \Theta$  與  $\Theta_0$  分別為位移、溫度差與參考溫度； $T_{IJ}$ 、 $q_J$  與  $\Xi$  分別為應力、熱通量與熵； $c_{IJKL}$ 、 $\lambda_{IJ}$ 、 $k_{JK}$  與  $\alpha$  分別為彈性常數、熱彈常數、熱傳導常數與熱常數； $t_q$  與  $t_g$  分別為熱傳導方程式中熱通量與溫度梯度上的熱弛緩時間，且  $t_q > t_g \geq 0$ ； $t_1$  與  $t_2$  為本構方程式中溫度變化率上的 2 個熱弛緩時間，且  $t_1 > t_2 \geq 0$ ； $k_{JK}^*$  為 GN-II 與 GN-III 理論所定義的材料常數； $\vartheta$  為熱位移(thermal displacement)，並定義  $\dot{\vartheta} = \Delta \Theta$ 。上述模型(3)至(7)之內容是屬於廣義熱彈理論的範圍，其詳細的介紹與比較可參考 Hetnarski 與 Eslami 的著作[76]中的第二章，以及 Ignaczak 與 Ostoja-Starzewski 的著作[77]中的第一至三章。此外，模型(6)的本構方程式(1.19a, b)是屬於無能量耗散的熱彈理論，主要是因為無時間微分一次項(亦稱為阻尼項)造成的振幅衰減，即無能量耗散；反之，其他種類的本構方程式皆含有此一阻尼項的影響，所以會有能量耗散造成的振幅衰減現象。在本論文中，所使用的是模型(2)的古典熱彈耦合理論，配合含初始應力的聲彈理論，建構層狀介質的導波波傳理論。

### 1.2.6 熱彈理論的發展 [78-112]

由於試件本身可能會具備電性或磁性效應，在原始熱彈理論的架構上，進而發展出具有電磁耦合的熱彈理論。Mindlin 在 1961 年[78]根據 Biot [63]的連體架構，針對壓電材料中微小振動的線性方程式作了系統的推導，包括力、電與熱三種場的本構與統御方程式。接著在 1974 年[79]引入電性 Gibbs 函數(electric Gibbs function)推導出本構與統御方程式，分析線性範圍內的熱壓電(thermopiezoelectric)平板之位移、電壓與溫度變化。Nowacki 在 1965 年[80]則根據 Mindlin [78]的架構，推導壓電晶體中耦合力場與熱場的互置理論(reciprocity theorem)。接著在 1978 年[81]證明了熱壓電微分方程式解的唯一性定理(uniqueness theorem)，以及推導功的 Hamilton 原理與互置理論。另外，Nowacki 在 1975 年[72]與 1979 年[82]對線性壓電理論與磁彈理論(magnetoelasticity)作了詳細的推導與證明，同時亦考慮熱效應的影響。近數十年來，隨著科技的發展，在微機電感測元件、顯示器、光電及半導體元件等實際應用上，材料本身的微觀物理特性以及多物理場耦合(如電、磁、熱或力學)等相關領域研究受到很大重視，因此，與熱彈理論(含電磁耦合)相關的波傳分析亦是一個熱門的研究方向。

Sharma 在 1985 年[83]對均質橫向等向性(homogeneous transversely isotropic)介質的熱彈波波傳作分析，可將不受熱效應影響的 SH 波獨立出來，再繪出準縱波(QL wave)、準橫波(QT wave)與熱波(thermal wave)之相速度與頻率間的關係圖，並證明了質點運動軌跡為一橢圓形。接著分別在 1989 年[84]與 2000 年[85]針對非等向性與正交性介質的熱彈波波傳作分析，可得知相速度與頻率間的關係是與波傳方向相依的。此外，在 2000 年 Sharma 等[86]針對一均質等向性平板中熱彈波的波傳問題，考慮在傳統熱彈(CTE)、Lord-Shulman (LS) [69]、Green-Lindsay (GL) [71]與 Green-Nagdhi (GN) [75]等四種理論模型下，推導出絕緣(insulated)與等溫(isothermal)的邊界情況下對稱與反對稱模態的特徵方程式，繪出並比較其頻散曲線間的差異。然而，對於壓電熱彈(piezothermoelastic)材料的波傳問題，Sharma 等在 2004 年[87]與 2006 年[88]針對一均質壓電熱彈平板，在不同邊界情況下，推導並分析對稱與反對稱模態之 Lamb 波的頻散與衰減。並在 2005 年[89]與 2007 年[90]針對一均質半無窮域結構之 Rayleigh 波的頻散與衰減作分析。

Verma 與 Hasebe 在 2001 年[91]與 2004 年[92]分別針對一均質等向性及正交性平板中對稱與反對稱模態之板波的頻散與衰減作分析。此外，Verma 在 2002 年[93]針對一非等向性層板作分析，利用傳遞矩陣法(transfer-matrix method)推導層板導波的頻散特徵方程式。Singh 在 2005 年[94]針對一般熱壓電固體以 LS 與 GL 理論推導其統御方程式，並且亦發現平面波相速度是與波傳方向有關連的。Salnikov 與 Scott 在 2006 年[95, 96]針對一均質等向性平板中傳遞的熱彈波，邊界考慮為等溫或絕緣之無應力情況，推導出頻散方程式，並在長波長及低頻率的範圍下展開得到一個近似模型，繪出並分析熱彈波的頻散與衰減。

此外，一些科學家直接將脈衝雷射假設為一個點狀或線狀的熱源輸入，利用上述的各種熱彈理論來模擬其表面質點位移對時間的暫態波形並與實驗結果作比較及討論。Chen 等在 1994 年[97]研究關於 Q-switch 脈衝雷射在有限厚度試件上所造成光熱變形(PT deformation, PTD)偏轉檢測的動態熱彈響應，呈現經準靜態處理後的訊號，討論雷射脈衝上升時間(rise time)與試件厚度對訊號的影響。接著，Cheng 在文獻[98-101]中，研究脈衝雷射在等向性或正交性平板上所激發出軸對稱(axisymmetric)、對稱或反對稱的特徵 Lamb 波模態，並用正則模態展開法(normal mode expansion, NME)來描述熱彈波激發機制，探討表面質點位移的暫態波形。Chandrasekharaiah 在 1998 年[102, 103]基於忽略能量消散的線性熱彈理論，研究由一個點狀或線狀熱源在均勻等向的半無窮固體表面所

造成熱彈交互作用(如位移、溫度與應力場等)。Arias 等在 2002 年[104]與 2003 年[105]提出一個二維理論模型的解析推導，假設線聚焦雷射光照射在一個均勻等向性的半無窮域表面上，並考慮熱擴散(diffusion)與光穿透(penetration)的影響，模擬並探討經熱彈激發後在近場與遠場所接收的超音波訊號。Yoo 等在 2006 年[106]延續 Arias [105]的模型架構，應用 Fourier-Laplace 積分轉換的方法來計算求得表面質點的位移及應力，其中 Fourier 積分逆轉換是用 Filon 方法，而 Laplace 積分逆轉換則是用 Crump-Durbin 方法。另一方面，亦有一些科學家將有限元素法(finite-element method, FEM)用來模擬雷射激發熱彈波的生成機制，近年來 Xu 等針對薄膜基底(film-substrate) [107, 108]、等向性平板 [109]、半無窮域[110, 111]及非等向性平板[112]等結構，利用 FEM 計算獲得表面質點位移的暫態波形以及截面的應力場與溫度場，並探討不同情況下的差異。

由上一段文獻敘述可知過去有一些科學家已針對雷射激發熱彈超音波的生成機制作模擬及探討，但在表面照射光束上有絕大部分皆假設為一脈衝雷射，因此，所接收的會是一個暫態信號。參考圖 1.3 可知，本研究為了去仿效光聲光熱效應，照射光束是假設為一個可週期性調制的連續波(continuous wave, CW)雷射，在試件表面上產生週期性加熱而導致週期性的熱彈波動。若入射光的波長(頻率)可變，則可獲得隨波長(頻率)而變的訊號頻譜圖。



#### 1.2.7 正則模態展開法(Normal Mode Expansion, NME) [113-128]

在研究某一結構的振動或導波波傳問題時，會對結構施予一外界干擾，再經由檢測的實驗方式獲得並分析其反應數據，藉以瞭解此一結構本身的特性。同理，在數學理論模型的建立上，亦會希望將模擬結果與實驗數據作比較，藉以修改已建立的模型。因此，在數值模擬上會先用簡諧分析(harmonic analysis)，在振動問題上是取得其自然頻率，在導波波傳問題則是取得其波數-頻率的頻散關係，再藉此獲得其特徵模態(eigenmode)。假設此一模型受到外界干擾後，欲獲得類似時域或頻域的響應訊號，正則模態展開法(normal mode expansion, NME)是一般常用的方法，它是將受干擾後的物理場利用上述之特徵模態的疊加去作逼近。此外，就干擾後物理場振幅大小之歸一項的取得方式，可將 NME 方法分為兩大類。

第一類主要是針對運動方程式的位移所架構的正交歸一項(normalization)，此方法可參考 Eringen 與 Şuhubi 著作[113]中第 5.17 節的內容。在 1999 年，Prosser 等人[114]

使用 Mindlin 板理論並配合 NME 法來模擬一有限域之平板中音洩(acoustic emission, AE)的波形，並與 FEM 的結果作比較。在 2007 年，Luangvilai [115]利用此一方法來分析 Lamb 波的衰減特性，探討材料特性與結構監測之應用。此外，Tiersten [116]、Peach [117]與 Liu [118]等學者已將此一方法應用至壓電板狀材料的振動分析上。然而，應用至熱彈耦合材料上，Cheng 在文獻[98-101]中已利用此方法研究脈衝雷射在介質表面上激發超音波以及探討表面質點位移的暫態波形。

第二類則是由功-能定理與互置理論(reciprocity)來架構的正交歸一項，此方法主要是由 Auld [119-121]所提出，主要是針對壓電耦合材料。在文獻[119]，考慮在兩個不同特徵頻率下特徵模態的正交特性，當系統受激發後，推導檢測端在不同特徵頻率下分配的振幅大小，過程中並無考慮波傳因子，所以較偏向「振動」觀念。而在文獻[120]，利用已知的波數-頻率關係，考慮在某一固定頻率下的時諧振動，兩個不同特徵波數下特徵模態的正交特性，推導檢測端在不同特徵波數下分配的大小，較偏向「波動」觀念。在文獻[121]的第 11 章，指出此方法除了可應用在導波波傳問題與壓電換能器分析上，仍可應用於彈性波的散射問題以及共振器的特性分析上。

Moulin 等作者[122, 123]針對一表面黏合壓電換能器之複合材料以及黏彈性材料的平板，使用耦合的 FE-NME 方法模擬平板中受激發 Lamb 波的暫態響應，並與實驗結果作比較討論。Núñez 等人[124]在模態分析的基礎上建立 Lamb 波生成的轉換(transfer)與 Green 函數，在數值計算上與 Viktorov [125]提供的理論解作驗證，以及利用楔形換能器在平板激發 Lamb 波所得實驗結果作比較來證明此一方法的可行性。Gao 與 Rose [126]則是利用 NME 法獲得 Lamb 波各個模態的可激發性(excitability)頻譜，配合因平板表面的腐蝕造成群速度變化所建立的靈敏性(sensitivity)頻譜，獲得恰當的激發模態與頻率，達到最佳的損傷監測(damage monitoring)。Santoni [127]研究一壓電圓片主動式感測器(piezoelectric wafer active sensor, PWAS)與主結構(host structure)間的交互關係，延續 Giurgiutiu [128]的架構，使用 NME 法來證明 PWAS 傳遞至主結構的介面剪應力不會受到頻率與模態數目上的限制，並且對 PWAS 在結構健康監測(structural health monitoring, SHM)上的應用作了詳細的探討。

由上述文獻可發現此方法適用於一層狀介質受外界激發後的導波波傳分析，包括了激發源輸入型式、不同特徵模態的可激發性、受激發後物理場的頻域響應、特定波數與頻率模態的激發分析等，屬於一個可與實驗相互搭配的理論分析方法。本論文是應用上

述第二類方法並配合熱彈耦合理論，經由功-能定理推導獲得所需的互置理論，再由此推導出應用於熱彈導波的模態正交特性與模態展開法。

### 1.2.8 超音波影響微小粒子排列[129-139]

超音波駐波用於操控微小物質是一種新型的研究技術[129-135]，過去有學者利用此技術控制氣泡位置、微粒的排列與大小分配、或是奈米碳管的方向等，已獲得到良好的效果，但其實際應用性較低，鮮少有人將此應用於實際製程技術上。此外，超音波在配向層內部所激發的聲場會使液體產生不同型式的應變，並使其中的高分子微粒有不同的運動方式，聲場分佈與高分子間耦合情況可包括：聲輻射力(acoustic radiation force)會使液體中的高分子微粒發生凝聚或分散的現象、液體受到超音波激發而使內部出現聲流動(acoustic streaming)現象、因超音波激發能量過大導致液體內部發生撕裂而出現氣泡所造成的空蝕(cavitation)現象、或者是氣泡受到週期性聲場壓力之影響而提高液體內部的 Bjerknes 力等[136-139]。鑑於上述情況，在配向層液體的固化過程中，欲藉激發超音波的非接觸配向方法來影響配向層分子的排列，在這之前，瞭解配向層內液體的聲場分佈乃是一件重要的課題，如液體中速度、密度、壓力等變化。

在 1995 年，Hertz [129]將兩個鋇鈦酸鉛(lead zirconate titanate, PZT)換能器分別沒於液體底部與液面下方，兩換能器面相對，調整其相對距離使焦點在同一位置上。施加 11 MHz 的交流電後，兩個壓電換能器所產生的駐波可使液體內之直徑 2.1  $\mu\text{m}$  玻璃球聚集並排列於節點上，但因液體內聲流動現象，作用力不穩定，玻璃球之規律性排列僅限於一定範圍內。

在 2004 年，Strobl 等[130]以表面聲波排列奈米碳管之方向。將奈米碳管懸浮於一液體中，以玻璃覆蓋並置於鈮酸鋰基材之上，將表面聲波元件生成的超音波洩露進入間隙為 20  $\mu\text{m}$  的奈米碳管懸浮液中。先以乳膠球狀物取代奈米碳管，乳膠球在表面聲波的影響下會聚成條狀，且與波傳方向垂直，相鄰條紋的間距為一半的驅動波長，證明此為表面聲波造成之駐波效應。當驅動之懸浮物改為奈米碳管時，其排列方向則會與波傳方向夾 25°到 45°，並認為此現象是液體受表面聲波影響而產生渦流(vortex)的效應。

在 2004 年，Haake 與 Dual [131, 132]將超音波換能器於玻璃板側面激發剪力波，使玻璃板下方液體內之玻璃球排列於節點處，藉由改變驅動頻率與換能器位置，改變玻璃

球聚集位置。同時驅動玻璃板之相臨兩側面的超音波換能器，使玻璃板產生二維的振動模態，下方的玻璃球則聚集成交錯的直線狀與橫線狀排列。

在 2008 年，Alvarez 等[133]將高分子與溶劑混合之液滴，以細針針尖滴在表面聲波元件之鈮酸鋰基材上，表面聲波受激發後會傳遞經過此液滴，會以很高的速率將此液滴向前推去，後方僅留下極薄的高分子薄膜，薄膜會因表面聲波引起的振動反應以及溶劑蒸發之作用，薄膜會在反節點處發生破裂，留下之高分子排列均勻且呈週期性分佈。同年，Friend 等[134]使用類似文獻 133 之驅動方式，進一步考慮表面聲波傳入液滴時，會以一毛細(capillary)波之形式傳入液體表面，形成一頻率較低的波動，液體內的奈米粒子因加了表面活性劑，會懸浮於毛細波能量影響之處，作者利用此作用力，將奈米粒子聚集成直徑相當的粒子團。

在 2009 年，Wood 等[135]以不同於文獻 131 的方法，採用表面聲波元件取代剪力波換能器，自互相垂直的方向，將表面聲波傳入一含有懸浮微粒的液體中，可精確的製造出二維粒子陣列。

### 1.2.9 具液體負載之聲導波[140-160]

在平板中傳遞之超音波波傳機制已經廣泛的使用於聲波感測器及相關電子元件上[140-143]，且液體的特性評估就是其實際應用之一。當一個開放系統(如半無窮域、單一平板、或層狀介質)周遭圍繞著液體，由於液體負載或其黏滯特性，聲波的部分傳遞能量會被四周液體所吸收，餘留的能量則會以一個不同的波速傳遞，且會隨波傳距離而衰減，稱之為衰減波(attenuated waves)或洩漏波(leaky waves)。此外，洩漏藍姆波(leaky Lamb waves, LLW)就是屬於其中一特殊例子，其激發與量測是藉由投補方式(pitch-catch)的超音波發射-接收器所架構而成，它主要是用在板狀結構的材料特性或缺陷的評估與鑑定[144, 145]。因此，假設已知板狀結構的材料特性，可藉由上述相反機制來分析並獲得周遭液體的材料特性，例如在化學、醫學與生物技術上非常重視的質量密度、體積模數、黏滯係數、導電性等。

在 1916 年，Lamb [146]發現在上下表面為自由邊界之等向性平板中，存在一種沿平板傳遞的頻散波，稱之 Lamb 波。藍姆波侷限於平板上下表面之間，在厚度方向分為對稱與反對稱的彈性波。因在厚度方向維持共振模態，具有波傳距離長、衰減小的特性。

當頻率跟厚度之乘積趨近於無窮大時，藍姆波之特徵方程會蛻變為雷利表面聲波 (Rayleigh surface acoustic waves) 之特徵方程式。在 1948 年，Scholte [147] 發現沿著固液界面上存在一種相速度略低於雷利波波速的波傳模態，其固體中大部分的能量均侷限於界面附近，此種波傳的模態稱為 Scholte waves。

具液體負載之平板導波波傳的研究最早始於 1970 年代。在 1967 年，Viktorov [125] 完成了一系列有關表面波與板波的數學證明與分析，其中包括了非黏滯性 (inviscid) 液體負載的研究，他提出在一個半無窮域或平板中傳遞之聲波，發生衰減與洩漏是因為周遭液體的質量負載所造成。此外，Nayfeh 在 1995 年的著作 [148] 對於液體負載之板狀結構提供了系統的文獻回顧。LLW 的衰減相當於複波數的虛部項，就如同 1989 年 Dayal 與 Kinra [149] 的證明與討論，它是因為 LLW 的能量洩漏至周遭液體所造成。由過去文獻來看，絕大部分研究主要是探討板狀結構浸沒於非黏滯性液體的問題，但仍有其他不同模型也被討論，例如固-液雙層 [150]、固-液-固三層 [151, 152]、液-固-液三層 [153-155] 等結構。此外，平板基材的選擇亦延伸至壓電材料 (如 PZT、鈮酸鋰等)，並且探討機電耦合對聲波傳遞特性之影響 [156-160]。

根據過去液體感測器的研究進展，檢測對象不僅僅只針對非黏滯性液體，而是擴大到黏滯性液體，因此，液體本身黏滯特性對聲波傳遞的影響就必須要考慮。在 1992 年，Wu 與 Zhu [153] 在忽略液體黏滯效應的條件下，推導一單層平板上下兩側毗鄰有限厚度液體的藍姆波頻散方程式，並以數值模擬方式說明應用於生醫感測器上的可行性。在 1995 年，Zhu 與 Wu [154] 則是考慮液體黏滯特性並且忽略熱傳導效應，推導單層平板浸沒於無限域黏滯性液體中，以及平板上下兩側毗鄰有限厚度黏滯性液體的藍姆波頻散方程式，以數值方法分析比較  $A_0$  與  $S_0$  模態在不同黏滯係數下的相速度頻散及波數衰減情形。在 1997 年，Nayfeh 與 Nagy [155] 延續之前 Zhu 與 Wu [154] 的理論，基於 Stokes 假說下，將黏滯性液體視為一個具剛性  $c_{55} = -i\omega\eta$  之假想的等向性固體 (hypothetical isotropic solid)，其中  $\eta$  為黏滯係數， $\omega$  為角頻率，模擬液體於不同黏滯係數時的相速度變化，並發現將平板浸沒或覆著於具黏滯性的液體中，皆會在特定頻率下使得平板藍姆波之最低階對稱模態 (即  $S_0$  模態) 出現衰減驟降的現象，位於固液界面上質點的運動軌跡則由原本的橢圓偏振轉變為垂直表面的線偏振狀態。

### 1.3 內容簡述

本研究是以彈性板的導波波傳為主，考慮平板本身的熱彈耦合效應，或者是其表面黏滯液體負載所造成的額外阻尼，探討波傳時的頻散與衰減關係及其能量耗散。因此，內容章節將會區分成兩大主題，第一個主題是以熱彈耦合理論為基礎，模擬探討雷射激發熱彈超音波的生成機制，並分析內含殘留應力之材料對光聲光熱效應之影響，其內容共分四個章節。

第二章的第一部份是以連體力學的守恆定理為基礎，包括質量守恆、線動量平衡、角動量平衡、能量守恆與熵平衡，推導在 Euler 與 Lagrange 描述法下的熱彈統御方程式。再應用至 Pao 等 [58, 59] 提出之自然、初始與最終三個狀態的架構，如圖 1.9 所示，推導以初始狀態座標系統為觀察基準的熱彈統御方程式，符合實際情況中材料內含殘留應力的考量。第二部份是以熱力學特徵函數作為出發，利用座標系統間的轉換，推導在初始狀態下描述的熱彈本構方程式。最後，第三部份是以初始狀態下具初始應力之熱彈統御方程式與本構關係為基礎，推導含熱彈耦合效應的功-能定理及其互置理論，並針對  $X_1$  方向波傳的導波，進而獲得模態正交特性與模態展開法。

第三章的第一部份是藉由上一章之具初始應力的熱彈耦合統御與本構方程式，配合導波  $X_1$  方向波傳的假設，引入  $X_1X_2$  平面對  $X_3$  軸旋轉之座標轉換，推導二維  $X_1X_3$  平面的熱彈耦合的 Christoffel 方程式。第二部分推導在不同水平方位向上的相速度表示式。第三部份是以 Sagittal 平面為  $X_1X_3$  平面且沿  $X_1$  方向波傳的假設為主，考慮一個受水平軸向初始應力的等向性平板為例，推導平板導波之對稱與反對稱模態的頻散及衰減特徵方程式。第四部份是應用 Mal [161] 的全域矩陣法(global matrix method)，搭配邊界條件來架構不同層狀結構的特徵矩陣。第五部份應用上一章的模態正交特性與模態展開法，並延續第三部份的平板模型，針對試件上表面的輸入熱源(或者是施加曳力)，推導特徵模態的可激發性頻譜，及其受激發後物理場的頻譜響應。最後，再說明如何將第五部份推廣至多層結構。

第四章是以一受水平軸向初始應力的等向性平板的數值結果與討論。由於平板本身熱彈耦合效應，藉特徵方程式求解頻率  $f$  與波數  $k$  的關係時，須額外考慮具有衰減項的複數  $k$ ，即  $k = k_r + ik_i$ 。因此，在  $(\omega, k_r, k_i)$  空間的複數尋根，應用了 Lowe [162, 163] 所提出的曲線追蹤法(curve-tracing method)。接著，針對一受單軸與等雙軸初始應力作用之等向性平板的數值結果作討論，包括頻散與衰減曲線，以及平板表面質點位移的大小

與相位。最後，搭配輸入熱源的頻譜分佈，探討分析光聲訊號的頻率響應。

在研究室過去進行的主題中[6-8]，對於一個內含液體夾層之三明治結構(玻璃/液晶/玻璃)，或是一個液體層覆蓋之玻璃平板的導波波傳行為，已有不錯的研究成果。然而，對於負載液體之黏滯效應造成導波的衰減特性，在過去的文獻卻是鮮少探討。所以，第二個主題便是以表面黏滯液體負載之平板的導波波傳為探討主題。第五章的第一部份會針對過去含液體負載之導波波傳，以及液體中微粒子操控之應用的相關文獻作介紹。第二部分是使用前面已架構雙層結構的全域矩陣，其中將黏滯液體層視為一具剪力剛性  $c_{55} = -i\omega\eta$  的假想性等向性固體， $\eta$  為動態黏滯係數， $\omega$  為角頻率，然後利用複數尋根方式獲得頻散與衰減曲線關係，探討平板上下表面質點軌跡以及液體層內部壓力變化的頻譜特性。最後，考慮不同液體層厚度情況，探討相速度頻散與衰減曲線的變化趨勢及其特性。

第六章為本研究的結論以及對於未來工作的一些建議。



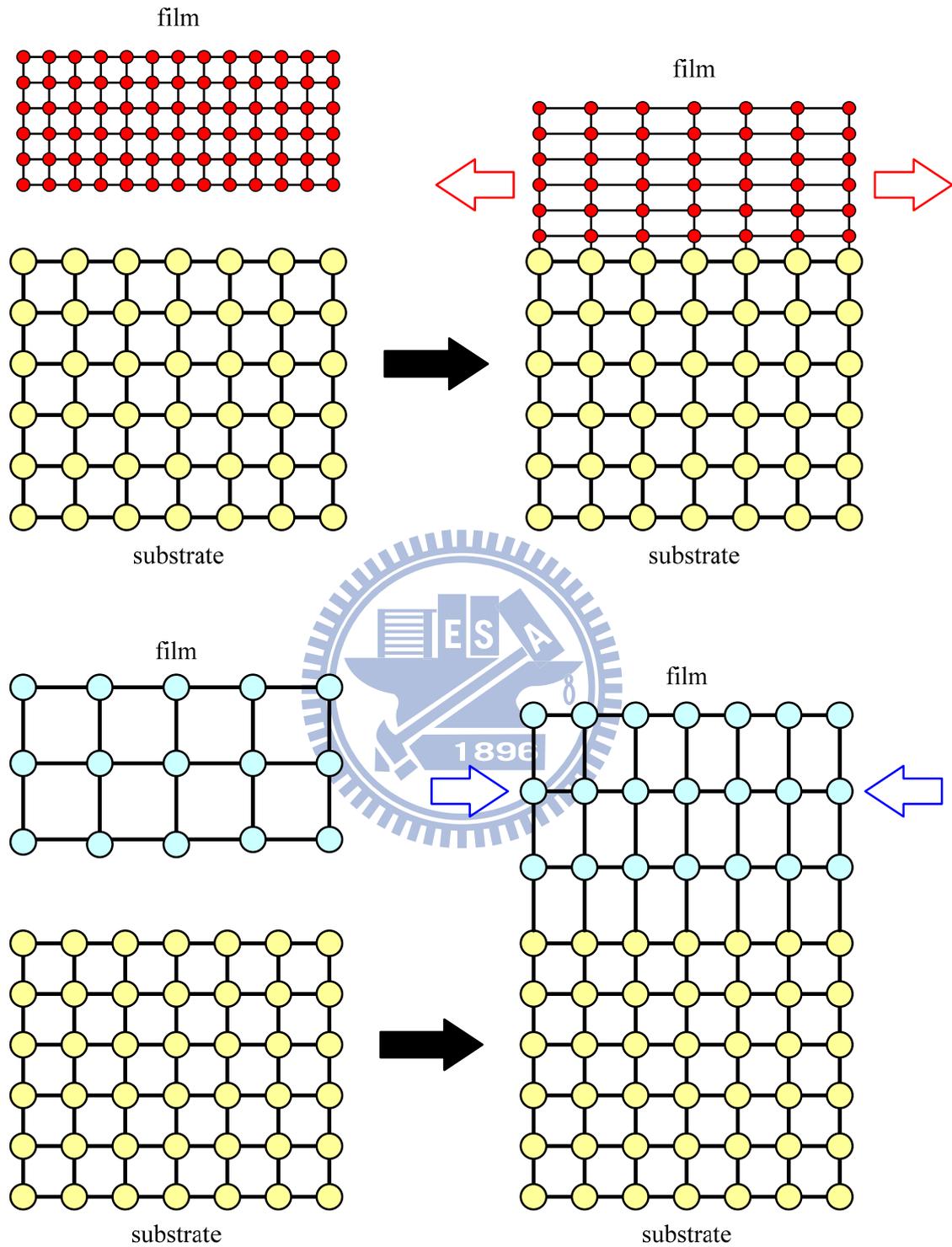
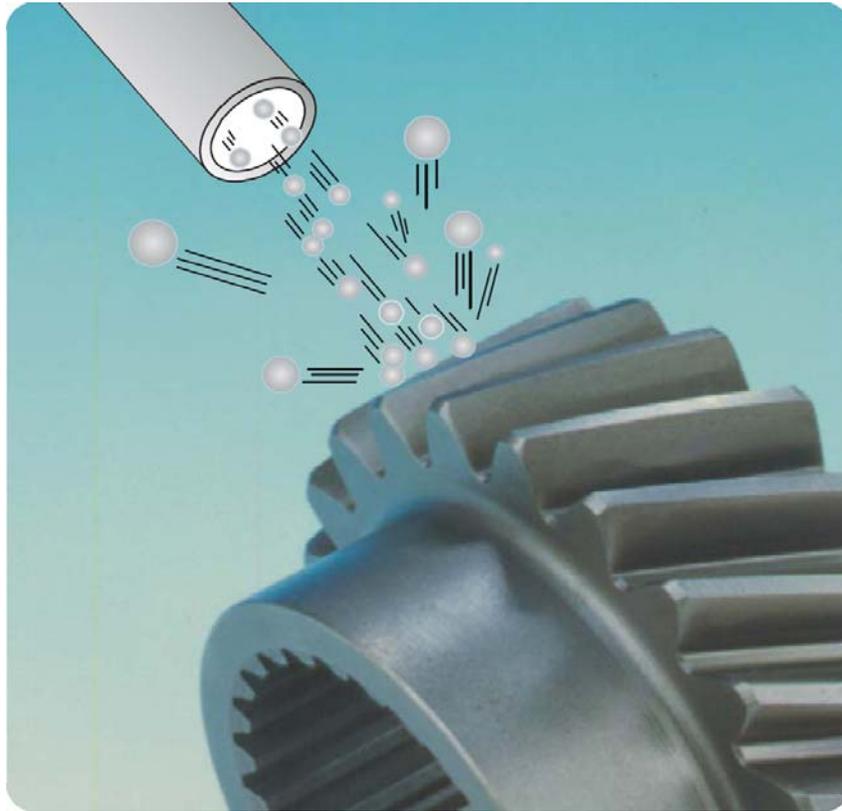


圖 1.1 晶格不匹配造成薄膜產生拉應力與壓應力。



Distribution of residual stress induced by shot peening

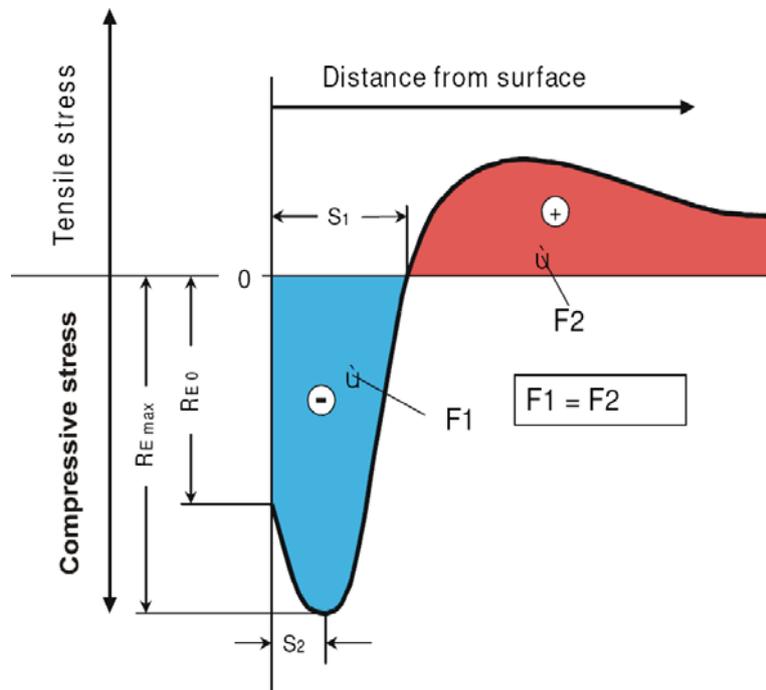


圖 1.2 珠擊法示意圖及其殘留應力對厚度的分佈圖[4]。

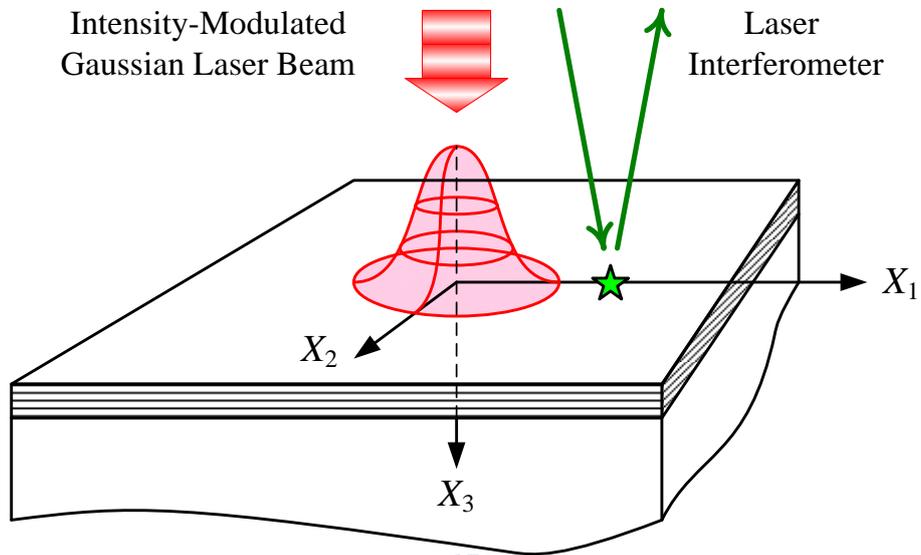


圖 1.3(a) 週期調制且強度為 Gauss 分佈的光束照射在層狀結構表面的示意圖。

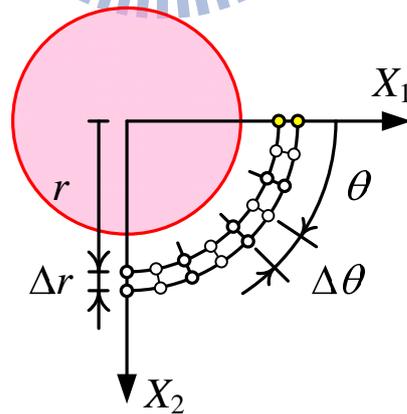


圖 1.3(b) 訊號接收處至熱源間之距離以及波傳方向與  $X_1$  軸之夾角的示意圖。

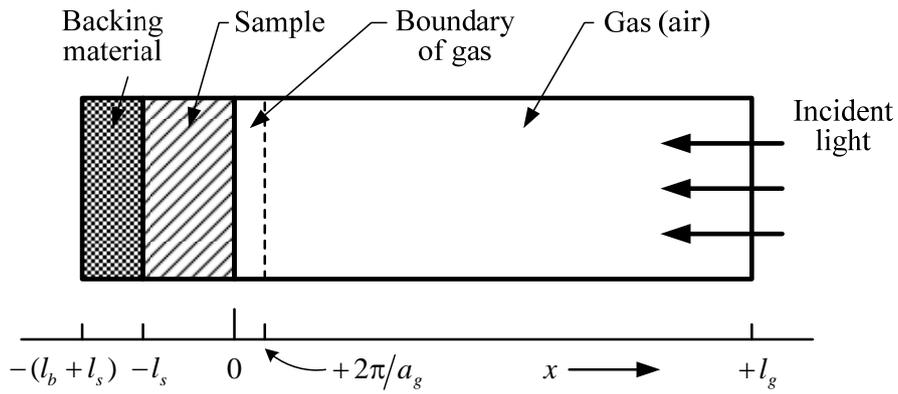


圖 1.4 圓柱型光聲腔的剖面示意圖。

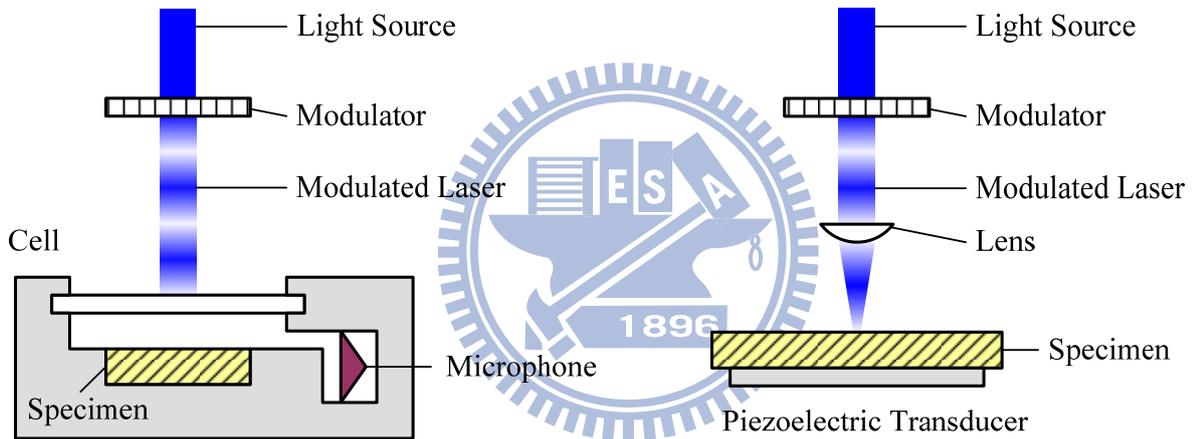


圖 1.5(a) 麥克風光聲系統的示意圖。

圖 1.5(b) 壓電光聲系統的示意圖。

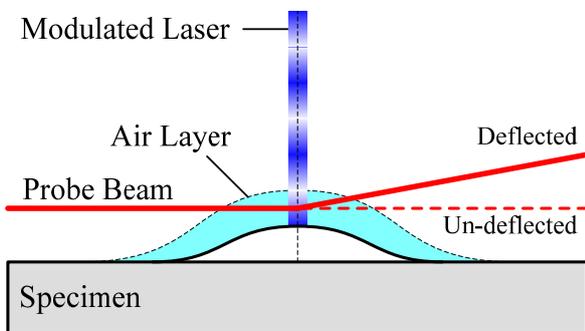


圖 1.6(a) 光熱光偏轉法的示意圖。

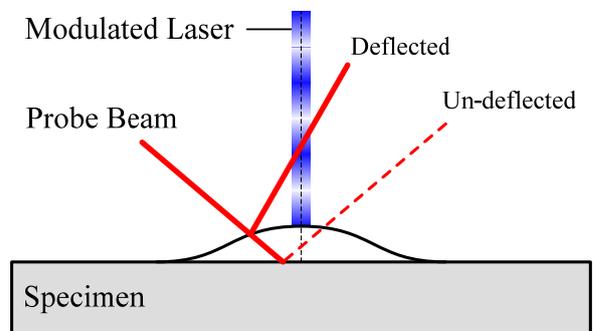


圖 1.6(b) 光熱光位移法的示意圖。

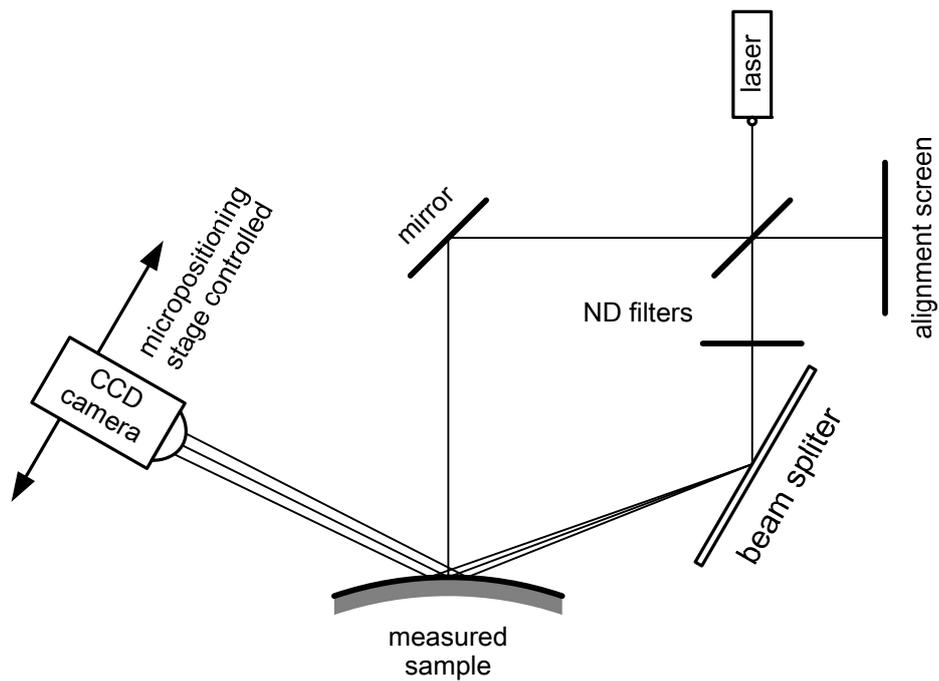


圖 1.7(a) 基板曲率量測法的示意圖。

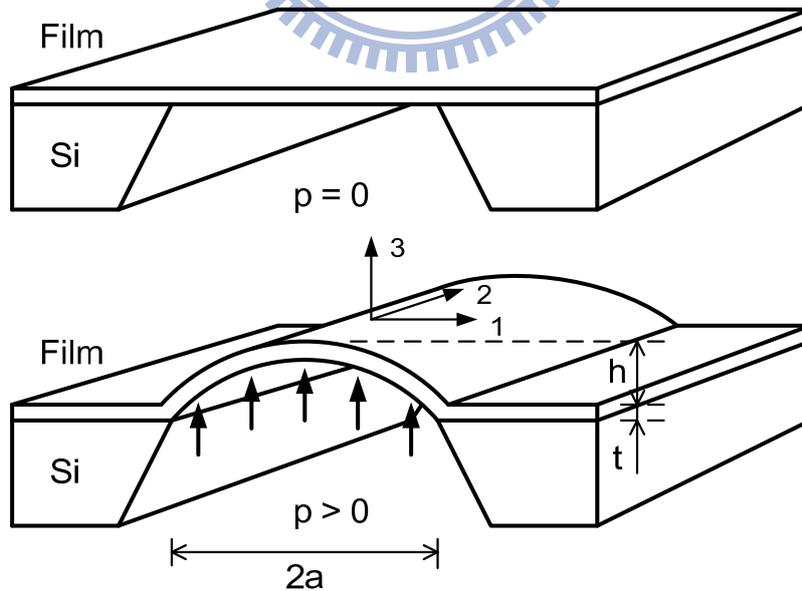


圖 1.7(b) 鼓漲測試的示意圖。

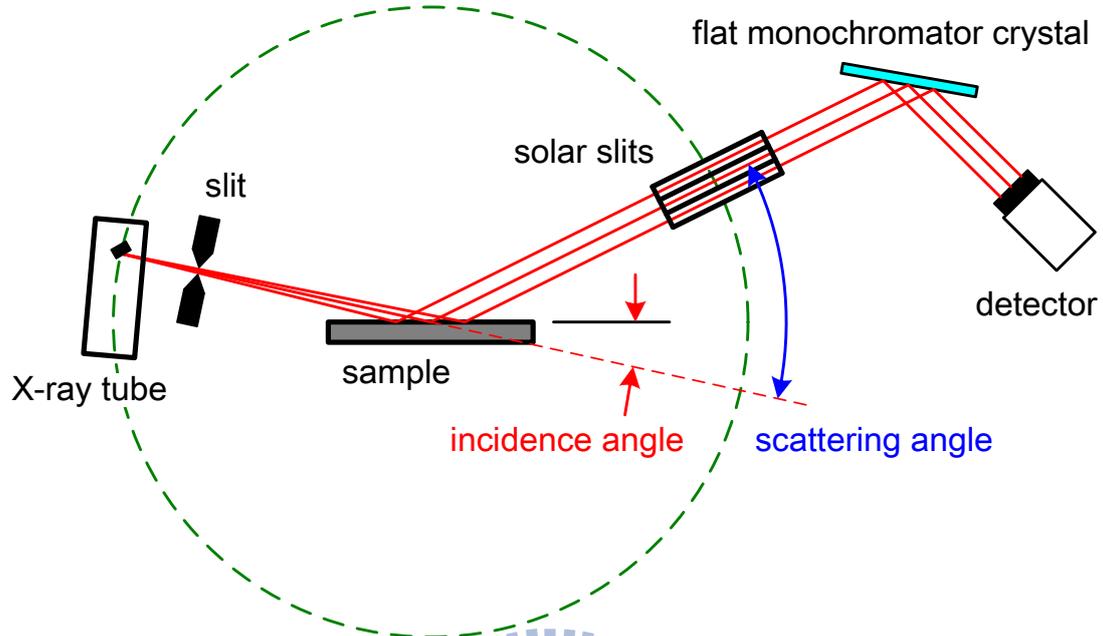
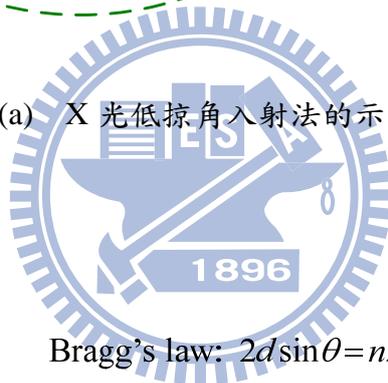


圖 1.8(a) X 光低掠角入射法的示意圖。



Bragg's law:  $2d \sin \theta = n\lambda$

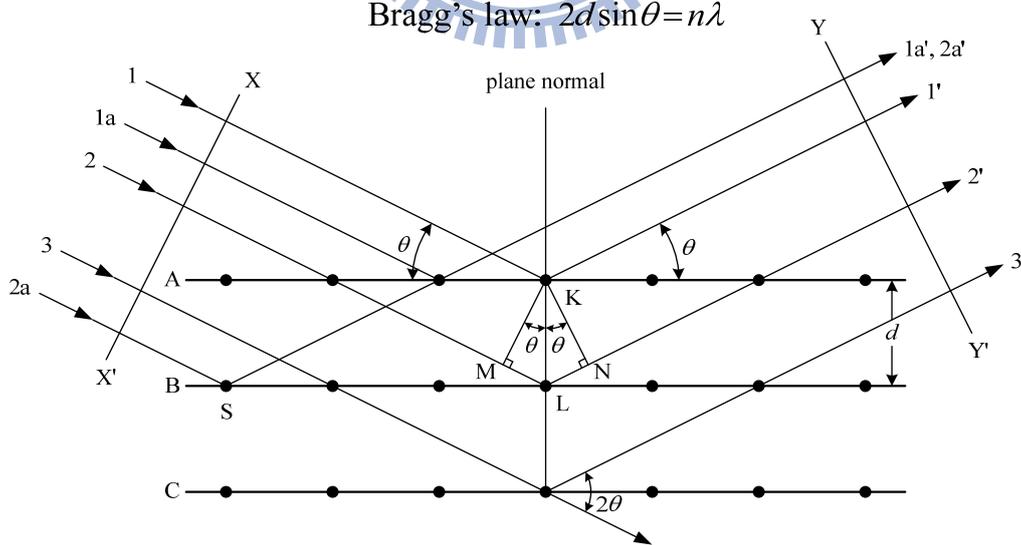


圖 1.8(b) Bragg 繞射的示意圖。

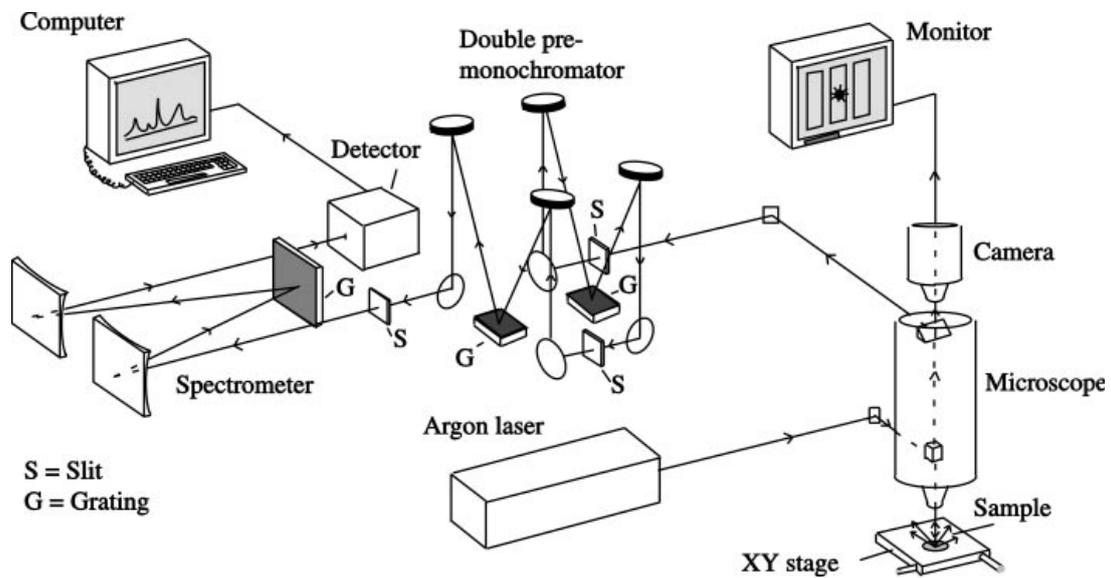


圖 1.9(a) 顯微式 Raman 散射光譜儀的示意圖[43]。

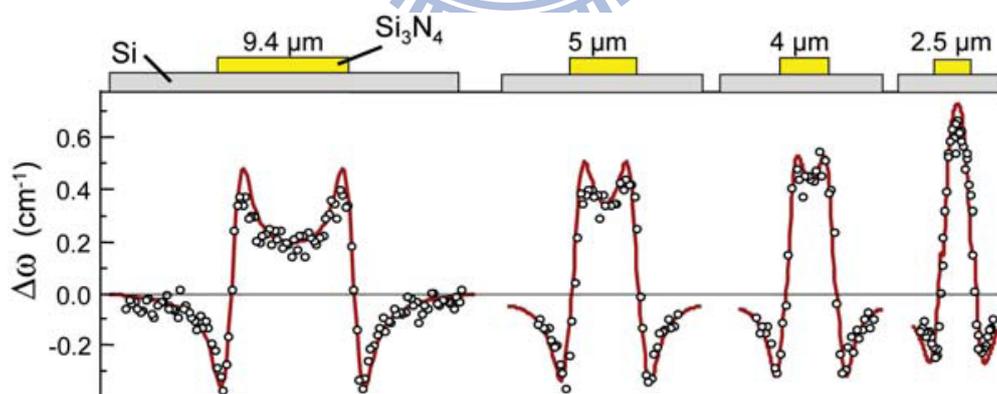


圖 1.9(b) Si 基材附近的受力分佈圖[43]。

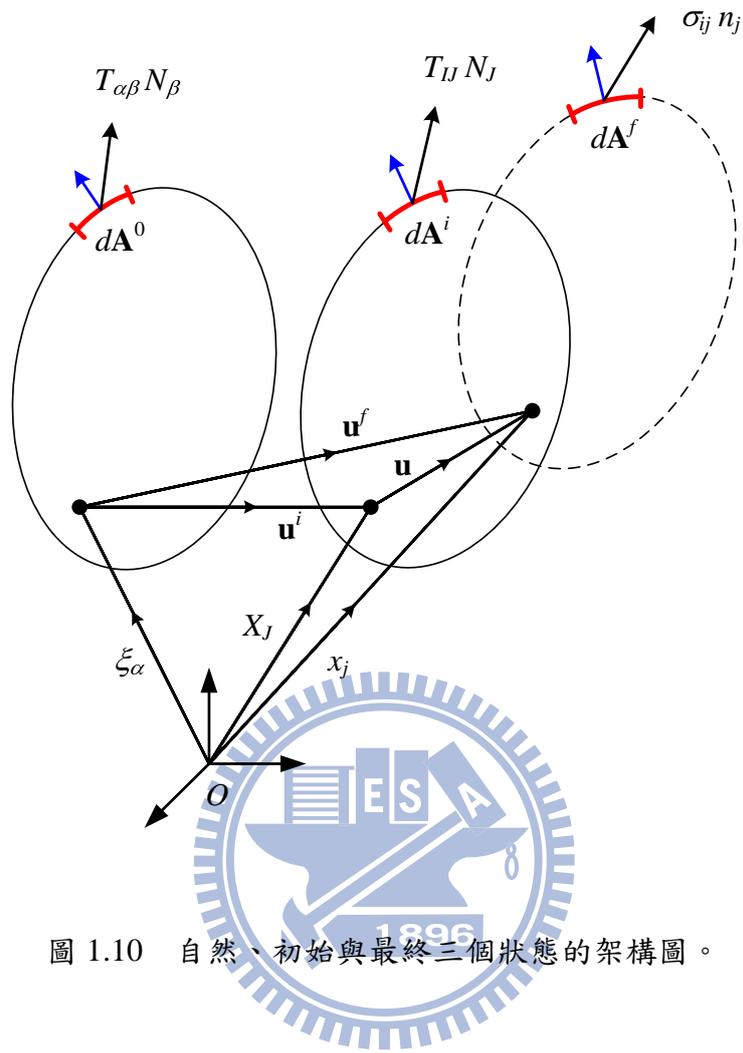


圖 1.10 自然、初始與最終三個狀態的架構圖。

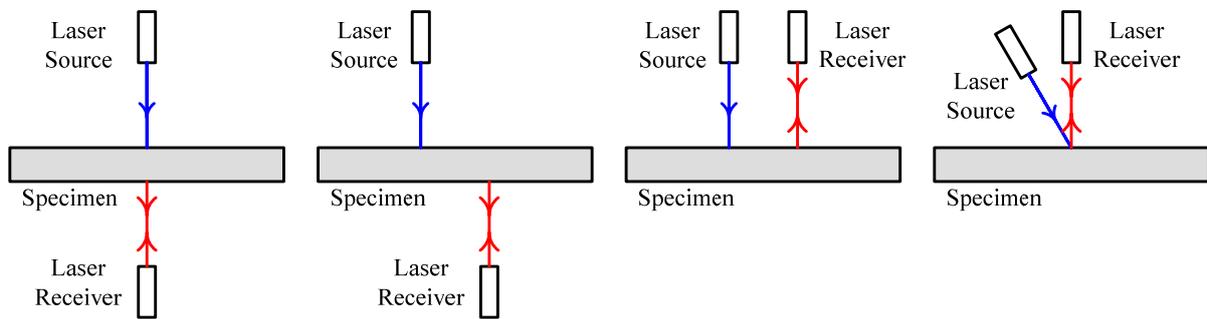


圖 1.11 雷射超音波試驗發射與接收的配置圖。

## 第二章 具殘留應力的熱彈理論

當強度調制之雷射光照射到半透明或不透明的試件上，依試件表面的熱輻射性質，部分能量被反射掉，部分能量則被吸收，後者相當於在試件表面上施予一個忽大忽小的輸入熱源，造成了試件本身的膨脹收縮。若試件本身存有殘留應力，在模型建立上參考聲彈理論所採用的自然、初始及最終三種狀態的座標系統，描述試件的材料行為及變形，再配合熱彈耦合理論，建立統御與本構方程式。本章主要分為三個部分，第一部分主要針對此三種狀態的座標系統作定義及說明；第二部分是依據連體力學的守恆定理，推導以初始狀態之座標系統描述的統御方程式；第三部分是由熱力學的 Helmholtz 自由能出發，推導以初始狀態之座標系統描述的本構方程式；第四部分則是推具導熱彈耦合的功與能量關係。

### 2.1 座標系統描述

物理模型可考慮一個內含殘留應力的預變形物體，座標系統的假設參考 Pao [58,59] 之聲彈理論中所採用的自然、初始及最終三種狀態。自然狀態表示物體本身未受到任何應力與應變的拘束，初始狀態表示物體受到靜平衡的外力作用而發生變形，最終狀態則表示施加微小擾動於初始狀態的結果。聲彈理論主要是探討受預應力作用介質的彈性波波傳分析，座標系統則是以 Lagrange 描述作基礎，將受殘留應力作用之自然狀態座標系統，以及受超音波擾動之最終狀態座標系統，皆轉換至初始狀態下的座標系統，以便於探討含殘留應力之層狀、板狀或薄膜結構。

如圖 1.9 所示，粗體之希臘字母  $\xi$ 、英文大寫字母  $\mathbf{X}$  與小寫字母  $\mathbf{x}$  分別代表自然、初始及最終三種狀態的位置向量。再者，下標中希臘字母  $\alpha, \beta, \gamma$ 、英文大寫字母  $I, J, K$  及小寫字母  $i, j, k$  分別代表以自然、初始及最終三種狀態的座標系統作描述，上標  $i$  與  $f$  分別表示初始與最終狀態。假設由自然狀態至初始狀態及最終狀態之位移分別定義為

$$u_{\beta}^i(\xi) = X_{\beta}(\xi) - \xi_{\beta}, \quad (2.1a)$$

$$u_{\beta}^f(\xi, t) = x_{\beta}(\xi, t) - \xi_{\beta}. \quad (2.1b)$$

在上式中的物理量皆是以自然狀態的座標系統作描述，其中  $\xi_\beta$  代表在自然狀態的原始位置； $X_\beta(\xi)$  代表在初始狀態處於靜平衡時的位置，且不為時間  $t$  的函數； $x_\beta(\xi, t)$  代表在受到外加擾動後最終狀態的位置，是時間  $t$  的函數。因此， $u_\beta^i(\xi)$  不為時間  $t$  的函數， $u_\beta^f(\xi, t)$  則是時間  $t$  的函數。由初始狀態至最終狀態的位移增量  $u_\beta(\xi, t)$  為

$$u_\beta(\xi, t) = x_\beta(\xi, t) - X_\beta(\xi) = u_\beta^f(\xi, t) - u_\beta^i(\xi), \quad (2.1c)$$

而且  $u_\beta(\xi, t)$  亦是時間  $t$  的函數。此外，位置函數  $X_\beta(\xi)$  與  $x_\beta(\xi, t)$  對時間  $t$  的一次及二次導函數分別為

$$v_\beta^i(\xi) \equiv \dot{X}_\beta(\xi) = 0, \quad (2.2a)$$

$$\dot{v}_\beta^i(\xi) \equiv \ddot{X}_\beta(\xi) = 0, \quad (2.2b)$$

$$v_\beta^f(\xi, t) \equiv \dot{x}_\beta(\xi, t) = \frac{\partial u_\beta^f}{\partial t} = \frac{\partial u_\beta}{\partial t}, \quad (2.2c)$$

$$\dot{v}_\beta^f(\xi, t) \equiv \ddot{x}_\beta(\xi, t) = \frac{\partial^2 u_\beta^f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}. \quad (2.2d)$$

同理，若以初始狀態的座標系統作描述，可改寫(2.1a-c)式與(2.2a-d)式為

$$u_j^i(\mathbf{X}) = X_j - \xi_j(\mathbf{X}), \quad (2.3a)$$

$$u_j^f(\mathbf{X}, t) = x_j(\mathbf{X}, t) - \xi_j(\mathbf{X}), \quad (2.3b)$$

$$u_j(\mathbf{X}, t) = x_j(\mathbf{X}, t) - X_j = u_j^f(\mathbf{X}, t) - u_j^i(\mathbf{X}), \quad (2.3c)$$

$$v_j^i(\mathbf{X}) \equiv \dot{X}_j = 0, \quad (2.4a)$$

$$\dot{v}_j^i(\mathbf{X}) \equiv \ddot{X}_j = 0, \quad (2.4b)$$

$$v_j^f(\mathbf{X}, t) \equiv \dot{x}_j(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial u_j^f}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (2.4c)$$

$$\dot{v}_j^f(\mathbf{X}, t) \equiv \ddot{x}_j(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 u_j^f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}. \quad (2.4d)$$

在 Euler 描述法中選擇  $\mathbf{x}$  當作自變量，即是以最終狀態的座標系統作描述，觀察的物理量隨空間質點而變化，在不同的時間下物質質點佔有不同的空間位置。任一物理量  $\mathcal{Q}(\mathbf{x}, t)$  對時間  $t$  的導函數表示如下：

$$\dot{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}, \quad (2.5)$$

其中  $v_k(\mathbf{x}, t) = \dot{x}_k(t) = \partial x_k(t)/\partial t$ 。在(2.5)式中，等號左端是  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)$  對時間  $t$  的全導函數(total derivative)或物質導函數(material derivative)，等號右端的第一項與第二項，分別表示在空間中某一質點上， $\mathcal{G}$  對時間  $t$  的局部導函數(local derivative)與質點空間運動所引起之  $\mathcal{G}$  的遷移導函數(convective derivative)。應用(2.5)式，將上述流程以最終狀態的座標系統描述，可得  $u_j^i(\mathbf{x})$ 、 $u_j^f(\mathbf{x})$ 、 $u_j(\mathbf{x}, t)$ ，及其對時間  $t$  的一次及二次導函數分別表示如下：

$$u_j^i(\mathbf{x}) = X_j(\mathbf{x}) - \xi_j(\mathbf{x}), \quad (2.6a)$$

$$u_j^f(\mathbf{x}, t) = x_j(t) - \xi_j(\mathbf{x}), \quad (2.6b)$$

$$u_j(\mathbf{x}, t) = x_j(t) - X_j(\mathbf{x}) = u_j^f(\mathbf{x}, t) - u_j^i(\mathbf{x}), \quad (2.6c)$$

$$v_j^f(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{x}_j(t) = \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial u_j^f}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (2.7a)$$

$$\dot{v}_j^f(\mathbf{x}, t) \equiv \ddot{x}_j(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_j^f}{\partial t} + v_k^f \frac{\partial v_j^f}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial x_k} \approx \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (2.7b)$$

$$v_j^i(\mathbf{x}) \equiv \dot{X}_j(\mathbf{x}) = v_k^f \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = v_j^f - v_k^f \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_j}{\partial t} - \left( \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \approx \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (2.7c)$$

$$\dot{v}_j^i(\mathbf{x}) \equiv \ddot{X}_j(\mathbf{x}) = \dot{v}_j^f - \dot{v}_k^f \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - v_k^f \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} + v_\ell^f \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} \right) \approx \dot{v}_j^f \approx \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}. \quad (2.7d)$$

上述近似過程中，假設施於初始狀態的擾動很小，故忽略  $u_j$  的二次以上乘積。本文主要是運用 Lagrange 描述法，觀察在自然狀態與初始狀態上物體的運動情形，故後續兩節將依據此一原則推導內含殘留應力且具熱彈耦合的統御與本構方程式。

## 2.2 統御方程式

### 2.2.1 守恆定理

假設英文大寫字母  $\mathbf{X}$  及小寫字母  $\mathbf{x}$  分別代表物體變形前後的位置向量，關係為  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ ，其中  $\mathbf{u}$  為位移。根據連體力學的守恆定理，包括質量守恆、線動量平衡、角動量平衡、能量守恆與熵平衡，使用 Euler 描述法來敘述，則上述五個守恆關係為

(1) 質量守恆：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.8a)$$

$$\dot{\rho} + \rho v_{j,j} = 0; \quad (2.8b)$$

(2) 線動量平衡：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_k dV = \int_A t_k dA + \int_V \rho b_k dV, \quad (2.9a)$$

$$\tau_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i; \quad (2.9b)$$

(3) 角動量平衡：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_A \epsilon_{ijk} x_j t_k dA + \int_V \epsilon_{ijk} x_j b_k dV, \quad (2.10a)$$

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad \text{or} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}; \quad (2.10b)$$

(4) 能量守恆 (或稱熱力學第一定律)：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( u + \frac{1}{2} v_k v_k \right) dV = \int_A (v_k t_k - q) dA + \int_V (v_k b_k + \rho \dot{h}) dV, \quad (2.11a)$$

$$L_{ij} \tau_{ji} - q_{j,j} + \rho \dot{h} = \rho \dot{u}; \quad (2.11b)$$

(5) 熵不等式 (或稱熱力學第二定律)：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \eta dV \geq \int_A (-q/\Theta) dA + \int_V (\rho \dot{h}/\Theta) dV, \quad (2.12a)$$

$$\Theta \rho \dot{\eta} + q_{j,j} - \rho \dot{h} - \frac{1}{\Theta} q_j \Theta_{,j} \geq 0; \quad (2.12b)$$

其中

$\epsilon_{ijk}$  為排列(permutation)或 Levi-Civita 符號；

$dV$  與  $dA$  分別為單位體積與單位面積；

$\rho(\mathbf{x}, t)$  為質量密度(mass density)；

$x_k(t)$  與  $v_k(\mathbf{x}, t)$  分別為某質點的位置及速度；

$t_k = \hat{n}_j \tau_{jk}$  為表面曳力(surface traction)， $\tau_{ji}$  為 Cauchy 應力及  $\hat{n}_j$  為表面法向量；

$q = \hat{n}_j q_j$  為經由表面所釋出的熱能， $q_j$  為熱通量(heat flux)；

$u$  為單位質量的內能(internal energy per unit mass)；

$b_k$  為單位質量的微體力(body force per unit mass)；

$\dot{h}$  為單位質量的分佈熱源(distribution heat source)；

$L_{ij} = v_{i,j}$  為空間速度梯度(spatial velocity gradient)；

$\eta$  為單位質量的熵(entropy per unit mass)；

$\Theta$  為絕對溫度且  $\Theta = \Theta^0 + \Delta\Theta$ ， $\Theta^0$  為參考溫度以及  $\Delta\Theta$  為溫度變化。

此外，(2.8a)、(2.9a)與(2.11a)式分別稱為連續方程式(continuity equation)、運動方程式(equation of motion)與能量方程式(energy equation)的積分型式，(2.8b)、(2.9b)與(2.11b)式分別為其微分型式，而(2.12b)式在熱力學中則稱之為 Clausius-Duhem 不等式。最後，由(2.10b)式可得知 Cauchy 應力  $\tau_{ji}$  為對稱的二維張量。

在(2.9b)式中，應力  $\tau_{ji}$  本身包含了彈性與熱兩部分的應力，即  $\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{th}}$ 。此外，在(2.11b)式中，定義  $\varepsilon_{ij}$  為微小應變(infinitesimal strain)， $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ，則  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  為應變速率(strain rate)， $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ ，可得等式  $L_{ij} \sigma_{ji} = \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ ，並且稱之為應變能變化率。能量方程式(2.11b)可改寫為

$$\tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{j,j} + \rho \dot{h} = \rho \dot{u}. \quad (2.11'b)$$

依據熱彈耦合的連體力學理論，在(2.11'b)式中主要是以內能  $u$  為主角，考慮  $u$  是應變  $\varepsilon_{ij}$  與熵  $\eta$  的函數，即  $u = u(\varepsilon_{ij}, \eta)$ 。在實際情況上，溫度  $\Theta$  比熵  $\eta$  更容易量測獲得，因此用熱力學的 Legendre 轉換將內能  $u$  替換為 Helmholtz 自由能  $\psi$ ，考慮  $\psi$  是應變  $\varepsilon_{ij}$  與溫度  $\Theta$  的函數，即  $\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, \Theta)$ ，其轉換關係為  $\psi = u - \Theta \eta$ 。可得  $\psi$  對時間  $t$  的導函數分別為

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad \text{與} \quad \dot{\psi} = \dot{u} - \dot{\Theta} \eta - \Theta \dot{\eta},$$

比較上述二式可獲得  $\dot{u}$  的結果為

$$\dot{u} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \left( \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \right) \dot{\Theta} + \Theta \dot{\eta}. \quad (2.13)$$

將上式代入(2.11b)式，便可得下列關係：

$$-q_{j,j} + \rho \dot{h} = \Theta \rho \dot{\eta}, \quad (2.14)$$

$$\tau_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}. \quad (2.15a, b)$$

(2.14)式稱為熵方程式(entropy equation)，(2.15a, b)式分別稱為彈性與熱性之本構關係。

將(2.14)式配合(2.11'b)式，以及  $u$  與  $\psi$  的轉換關係，能量方程式可改寫為

$$\tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \Theta \rho \dot{\eta} = \rho \dot{u} \quad \text{或} \quad \rho \dot{u} - \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \Theta \rho \dot{\eta} = 0, \quad (2.16a)$$

$$\tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\Theta} \rho \eta = \rho \dot{\psi} \quad \text{或} \quad \rho \dot{\psi} - \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\Theta} \rho \eta = 0. \quad (2.16b)$$

(2.16a, b)式分別滿足  $u(\varepsilon_{ij}, \eta)$  與  $\psi(\varepsilon_{ij}, \Theta)$  兩個函數本身之自變數對時間  $t$  的導函數關係。

另外，再將(2.14)式配合(2.12b)式，獲得熱傳導(heat conduction)不等式為

$$q_j \Theta_{,j} \leq 0 \quad \text{或} \quad q_j \Delta \Theta_{,j} \leq 0. \quad (2.17)$$

在(2.14)式中，熱通量  $q_j$  與溫度  $\Theta$  的關係可參考 Fourier 熱傳導公式，即為

$$q_i = -k_{ij} \Theta_{,j} \quad \text{或} \quad q_i = -k_{ij} \Delta \Theta_{,j}, \quad (2.18)$$

其中  $k_{ij}$  為熱傳導常數且  $k_{ij} = k_{ji}$ 。由於  $k_{ij}$  為一正定(positive-definite)的張量，將(2.18)式代入(2.17)式亦可滿足不等式條件。

上述的公式皆是使用 Euler 描述法作敘述，以變形後座標系統所描述的物理量皆為  $(\mathbf{x}, t)$  的函數。在固體力學中，由於所探討質點運動並不會像是在流體中質點會在空間中作流動，故需要利用座標轉換方式將之以 Lagrange 描述法表示，以變形前座標系統重新描述這些物理量，轉換為  $(\mathbf{X}, t)$  的函數。因此，此兩座標系統所描述的物理量之間具有下列轉換關係：

$$\mathbf{F} \sim F_{iI} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_I}, \quad \mathbf{F}^{-1} \sim F_{iI}^{-1} \equiv \frac{\partial X_I}{\partial x_i}, \quad (2.19a)$$

$$\rho^0 = \rho \det(\mathbf{F}), \quad \rho = \rho^0 \det^{-1}(\mathbf{F}), \quad (2.19b)$$

$$dV^0 = \det^{-1}(\mathbf{F}) dV, \quad dV = \det(\mathbf{F}) dV^0, \quad (2.19c)$$

$$T_{IJ} = \det(\mathbf{F}) F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = \det^{-1}(\mathbf{F}) F_{iI} F_{jJ} T_{IJ}, \quad (2.19d)$$

$$\dot{S}_{IJ} = F_{iI} F_{jJ} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} \dot{S}_{IJ}, \quad (2.19e)$$

$$k_{IJ} = \det(\mathbf{F}) F_{Ii}^{-1} F_{Jj}^{-1} k_{ij}, \quad k_{ij} = \det^{-1}(\mathbf{F}) F_{iI} F_{jJ} k_{IJ}, \quad (2.19f)$$

$$q_J = \det(\mathbf{F}) F_{Jj}^{-1} q_j, \quad q_j = \det^{-1}(\mathbf{F}) F_{jJ} q_J, \quad (2.19g)$$

其中  $\mathbf{F}$  為位移梯度(deformation gradient)， $\rho^0$ 、 $dV^0$ 、 $T_{IJ}$ 、 $S_{IJ}$ 、 $k_{IJ}$  與  $q_J$  則分別為變形前座標系統下所描述的質量密度、單位面積、2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力、Lagrange 應變、熱傳導常數與熱通量。因此，我們依序將上述(2.9b)、(2.14)、(2.18)、(2.11'b)、(2.16a, b) 與(2.15a, b)式分別改寫為

$$(T_{JK} F_{IK})_{,J} + \rho^0 b_I = \rho^0 \dot{v}_I, \quad (2.20a)$$

$$-q_{J,J} + \rho^0 \dot{h} = \Theta \dot{\Xi}, \quad (2.20b)$$

$$q_I = -k_{IJ} \Delta \Theta_{,J}, \quad (2.20c)$$

$$T_{IJ} \dot{S}_{IJ} - q_{J,J} + \rho^0 \dot{h} = \dot{U}, \quad (2.21a)$$

$$T_{IJ} \dot{S}_{IJ} + \Theta \dot{\Xi} = \dot{U}, \quad (2.21b)$$

$$T_{IJ} \dot{S}_{IJ} - \dot{\Theta} \Xi = \dot{\Psi}, \quad (2.21c)$$

$$T_{IJ} = \frac{\partial \Psi}{\partial S_{IJ}}, \quad \Xi = -\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}. \quad (2.21d, e)$$

同樣地，(2.20a-c)式分別為在 Lagrange 描述法下的運動方程式、熵方程式及熱傳導方程式，(2.21a-c)式皆稱為能量方程式，而(2.21d, e)式則為本構關係。此外，亦可得知能量轉換關係  $\Psi = U - \Theta \Xi$ ，其中  $U \equiv \rho^0 u$ 、 $\Psi \equiv \rho^0 \psi$  與  $\Xi \equiv \rho^0 \eta$ ，分別代表在 Lagrange 描述法下的內能、Helmholz 自由能及熵，且皆為  $(\mathbf{X}, t)$  的函數，並且可發現上述(2.21b, c)式分別滿足  $U(S_{IJ}, \Xi)$  與  $\Psi(S_{IJ}, \Theta)$  兩個函數本身之自變數對時間  $t$  的導函數關係。

## 2.2.2 Euler 與 Lagrange 描述下的熱彈統御方程式

熱彈統御方程式是由運動方程式、熵平衡式及熱傳導方程式所組成，其中在 Euler 描述法下包括(2.9b)、(2.15)與(2.18)式，而在 Lagrange 描述法下則是包括(2.20a-c)式。如圖 1.9 所示，將 Euler 與 Lagrange 描述法應用到自然、初始及最終三個狀態上，並且考慮到觀察者與被觀察者在各狀態間的交叉關係，表達型式可歸納出下列 5 種情況：

(1) 使用 Euler 描述法在初始狀態下：

$$\frac{\partial \tau_{II}^i}{\partial X_J} = \rho^i \dot{v}_I^i = 0, \quad (2.22a)$$

$$-\frac{\partial q_J^i}{\partial X_J} = \Theta^i \rho^i \dot{\eta}^i = 0, \quad (2.22b)$$

$$q_I^i = -k_{II}^i \frac{\partial(\Delta\Theta^i)}{\partial X_J}; \quad (2.22c)$$

(2) 使用 Euler 描述法在最終狀態下：

$$\frac{\partial \tau_{ji}^f}{\partial x_j} + \rho^f b_i^f = \rho^f \dot{v}_i^f \approx \rho^f \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.23a)$$

$$-\frac{\partial q_j^f}{\partial x_j} + \rho^f h^f = \Theta^f \rho^f \dot{\eta}^f \approx \Theta^f \rho^f \frac{\partial \eta^f}{\partial t}, \quad (2.23b)$$

$$q_i^f = -k_{ij}^f \frac{\partial(\Delta\Theta^f)}{\partial x_j}; \quad (2.23c)$$

(3) 使用 Lagrange 描述法在自然狀態下觀察初始狀態：

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( T_{\beta\alpha}^i + T_{\beta\gamma}^i \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\gamma} \right) = \rho^0 \dot{v}_\alpha^i = 0, \quad (2.24a)$$

$$-\frac{\partial q_\beta^i}{\partial \xi_\beta} = \Theta^i \rho^0 \frac{\partial \eta^i}{\partial t} = \Theta^i \frac{\partial \Xi^{oi}}{\partial t} = 0, \quad (2.24b)$$

$$q_\alpha^i = -k_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial(\Delta\Theta^i)}{\partial \xi_\beta}; \quad (2.24c)$$

(4) 使用 Lagrange 描述法在自然狀態下觀察最終狀態：

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( T_{\beta\alpha}^f + T_{\beta\gamma}^f \frac{\partial u_\alpha^f}{\partial \xi_\gamma} \right) + \rho^0 b_\alpha^f = \rho^0 \dot{v}_\alpha^f = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (2.25a)$$

$$-\frac{\partial q_\beta^f}{\partial \xi_\beta} + \rho^0 h^f = \Theta^f \rho^0 \frac{\partial \eta^f}{\partial t} = \Theta^f \frac{\partial \Xi^{of}}{\partial t}, \quad (2.25b)$$

$$q_\alpha^f = -k_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial(\Delta\Theta^f)}{\partial \xi_\beta}; \quad (2.25c)$$

(5) 使用 Lagrange 描述法在初始狀態下觀察最終狀態：

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left( T_{II}^f + T_{JK}^f \frac{\partial u_I}{\partial X_K} \right) + \rho^i b_i^f = \rho^i \dot{v}_i^f = \rho^i \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (2.26a)$$

$$-\frac{\partial q_J^f}{\partial X_J} + \rho^i h^f = \Theta^f \rho^i \frac{\partial \eta^f}{\partial t} = \Theta^f \frac{\partial \Xi^{if}}{\partial t}, \quad (2.26b)$$

$$q_i^f = -k_{II}^i \frac{\partial (\Delta \Theta^f)}{\partial X_J}; \quad (2.26c)$$

其中

$\rho^0$ 、 $\rho^i$  與  $\rho^f$  分別是在自然、初始與最終狀態下的質量密度；

$u_\beta$ 、 $u_J$  與  $u_j$  分別是在自然、初始與最終狀態下觀察的位移增量；

$v_J^i$  與  $v_j^f$  分別是在初始與最終狀態觀察自身狀態時的速度；

$v_\beta^i$  與  $v_\beta^f$  分別是在自然狀態觀察初始與最終狀態時的速度；

$v_j^f$  是在初始狀態觀察最終狀態時的速度；

$\tau_{ij}^i$  與  $\tau_{ij}^f$  分別是在初始與最終狀態下的 Cauchy 應力；

$T_{\alpha\beta}^i$  與  $T_{\alpha\beta}^f$  分別是在自然狀態觀察初始與最終狀態時的 2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力；

$T_{IJ}^f$  是在初始狀態觀察最終狀態時的 2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 應力；

$q_j^i$  與  $q_j^f$  分別是在初始與最終狀態時的熱通量；

$q_\beta^i$  與  $q_\beta^f$  分別是在自然狀態觀察初始與最終狀態時的熱通量；

$q_j^f$  是在初始狀態觀察最終狀態時的熱通量；

$k_{\alpha\beta}^0$ 、 $k_{II}^i$  與  $k_{ij}^f$  分別是在自然、初始與最終狀態下的熱傳導常數；

$\Delta \Theta^i$  與  $\Delta \Theta^f$  分別是初始與最終狀態相較於自然狀態時的溫度變化；

$\Theta^0$ 、 $\Theta^i$  與  $\Theta^f$  分別是在自然、初始與最終狀態下的絕對溫度；

$\eta^i$  與  $\eta^f$  分別是在初始與最終狀態下單位質量的熵；

$\Xi^{oi}$  是在自然狀態觀察初始狀態時的熵，且  $\Xi^{oi} = \rho^0 \eta^i$ ；

$\Xi^{of}$  是在自然狀態觀察最終狀態時的熵，且  $\Xi^{of} = \rho^0 \eta^f$ ；

$\Xi^{if}$  是在初始狀態觀察最終狀態時的熵，且  $\Xi^{if} = \rho^i \eta^f$ ；

$b_\beta^f$ 、 $b_i^f$  與  $b_j^f$  分別是在自然、初始與最終狀態下之單位質量的微體力；

$h^f$  是在最終狀態下輸入之單位質量的分佈熱源。

### 2.2.3 增量狀態下的熱彈統御方程式

如圖 1.9 所示，增量狀態是假設在初始狀態下觀察最終狀態的運動變化情形，如同在已受殘留應力影響的試件上施以微小的擾動，因此，增量之定義為自初始狀態至最終狀態時的物理量差值，包括應力、應變、熱通量、熵與溫度。第一部份，先考慮在自然狀態觀察此增量狀態，需引入第 2.2.3 節的情況(3)與情況(4)，已知各物理量的增量定義表示如下

$$T_{\alpha\beta}(\xi, t) = T_{\alpha\beta}^f(\xi, t) - T_{\alpha\beta}^i(\xi), \quad (2.27a)$$

$$S_{\alpha\beta}(\xi, t) = S_{\alpha\beta}^f(\xi, t) - S_{\alpha\beta}^i(\xi), \quad (2.27b)$$

$$q_\alpha(\xi, t) = q_\alpha^f(\xi, t) - q_\alpha^i(\xi), \quad (2.27c)$$

$$\Xi(\xi, t) = \Xi^{of}(\xi, t) - \Xi^{oi}(\xi), \quad (2.27d)$$

$$\Delta\Theta(\xi, t) = \Delta\Theta^f(\xi, t) - \Delta\Theta^i(\xi) = \Theta^f(\xi, t) - \Theta^i(\xi). \quad (2.27e)$$

則分別比較(2.24a)與(2.25a)式、(2.24b)與(2.25b)式，以及(2.24c)與(2.25c)式，加上假設  $T_{\beta\gamma}u_{\alpha,\gamma} \approx 0$ ，可得

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( T_{\beta\alpha} + T_{\beta\gamma} \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\gamma} + T_{\beta\gamma}^i \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\gamma} \right) + \rho^0 b_\alpha^f = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (2.28a)$$

$$-\frac{\partial q_\beta}{\partial \xi_\beta} + \rho^0 h^f = \Theta^f \frac{\partial \Xi}{\partial t} \approx \Theta^i \frac{\partial \Xi}{\partial t}, \quad (2.28b)$$

$$q_\alpha = -k_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial \xi_\beta}. \quad (2.28c)$$

上述(2.28a-c)式即為在自然狀態觀察此增量狀態的熱彈統御方程式，但是實際上由初始應力所造成的初始位移皆是隱含在整個初始系統中，而且後續相關的量測行為皆是須在初始狀態下施加微擾，則座標系統設定在自然狀態上並不符合實際情況，故不考慮之。

第二部分，考慮在初始狀態觀察此增量狀態，引入第 2.2.3 節的情況(1)與情況(5)，可知其中變數關係： $\tau_{IJ}^i = T_{IJ}^i$ 、 $q_I^i = q_I^i$  及  $k_{IJ}^i = k_{IJ}^i$ ，且各物理量的增量定義表示如下

$$T_{IJ}(\mathbf{X}, t) = T_{IJ}^f(\mathbf{X}, t) - T_{IJ}^i(\mathbf{X}), \quad (2.29a)$$

$$S_{IJ}(\mathbf{X}, t) = S_{IJ}^f(\mathbf{X}, t) - S_{IJ}^i(\mathbf{X}), \quad (2.29b)$$

$$q_I(\mathbf{X}, t) = q_I^f(\mathbf{X}, t) - q_I^i(\mathbf{X}), \quad (2.29c)$$

$$\Xi(\mathbf{X}, t) = \Xi^{if}(\mathbf{X}, t), \quad (2.29d)$$

$$\Delta\Theta(\mathbf{X}, t) = \Delta\Theta^f(\mathbf{X}, t) - \Delta\Theta^i(\mathbf{X}) = \Theta^f(\mathbf{X}, t) - \Theta^i(\mathbf{X}). \quad (2.29e)$$

則分別比較(2.22a)與(2.26a)式、(2.22b)與(2.26b)式，以及(2.22c)與(2.26c)式，加上假設  $T_{JK}u_{I,K} \approx 0$ ，可得

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left( T_{IJ} + T_{JK}^i \frac{\partial u_I}{\partial X_K} \right) + \rho^i b_I^f = \rho^i \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (2.30a)$$

$$-\frac{\partial q_J}{\partial X_J} + \rho^i \dot{h}^f = \Theta^f \frac{\partial \Xi}{\partial t} \approx \Theta^i \frac{\partial \Xi}{\partial t}, \quad (2.30b)$$

$$q_I = -\bar{k}_{IJ} \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial X_J}, \quad (2.30c)$$

其中  $\bar{k}_{IJ} \equiv k_{IJ}^i$  為因初始應力或位移所改變的熱傳導常數，即為有效的熱傳導常數，並且令  $k_{\alpha\beta} \equiv k_{\alpha\beta}^0$  為自然狀態下原始的熱傳導常數，參考(2.19f)式可得兩者關係為

$$\bar{k}_{IJ} = \det^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} k_{\alpha\beta}. \quad (2.31)$$

上述(2.30a-c)式為在初始狀態觀察此增量狀態的熱彈統御方程式，建立在初始狀態座標系統下，符合了實際情況中材料內含殘留應力的考量。此外，運動方程式(2.30a)主要是描述系統的力平衡，其中因微體力作功遠小於應變能與動能，故可將微體力忽略不計 ( $b_I^f = 0$ )。在熵平衡式(2.30b)中亦含有熱源的熵生成，但熱源僅在系統的表面上加熱，所以式中可不考慮分佈熱源 ( $\dot{h}^f = 0$ )，而是以邊界條件來考慮。

## 2.3 本構方程式

### 2.3.1 熱力學特徵函數

根據熱力學第一定律，在可逆非絕熱過程中，系統內能的變化量  $dU$ ，等於外界對

系統做功  $dW$  與系統自外界吸收熱能  $dQ$  之總和，即  $dU = dW + dQ$ 。此式表明了不同形式的能量可以相互轉化，其總和是守恆的，稱為能量平衡方程式。考慮對彈性體作功與熱能發生變化時，即  $dW = TdS$  與  $dQ = \Theta d\Xi$ ，其中  $T$  與  $S$  分別為應力與應變， $\Theta$  與  $\Xi$  分別為溫度與熵(entropy)。內能  $U$  是一種熱力學特徵函數，其他常用的特徵函數還有 Helmholtz 自由能  $\Psi$ 、熱焓(enthalpy)  $H$  以及 Gibbs 自由能  $\mathcal{G}$ ，其定義分別表示如下：

$$\Psi = U - \Theta \Xi, \quad (2.32a)$$

$$H = U - TS, \quad (2.32b)$$

$$\mathcal{G} = H - \Theta \Xi = U - TS - \Theta \Xi. \quad (2.32c)$$

在(2.32a)式中， $U$  與  $\Psi$  之間的轉換關係與第 2.2.1 節以 Lagrange 描述的結果是相同的。熱力學特徵函數之導函數型式分別表示如下：

$$dU = TdS + \Theta d\Xi, \quad (2.33a)$$

$$d\Psi = TdS - \Xi d\Theta, \quad (2.33b)$$

$$dH = -SdT + \Theta d\Xi, \quad (2.33c)$$

$$d\mathcal{G} = -SdT - \Xi d\Theta. \quad (2.33d)$$

已知  $U$ 、 $\Psi$ 、 $H$  與  $\mathcal{G}$  分別為  $(S, \Xi)$ 、 $(S, \Theta)$ 、 $(T, \Xi)$  與  $(T, \Theta)$  之函數，其導函數型式為

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{\Xi} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial \Xi} \right)_S d\Xi, \quad (2.34a)$$

$$d\Psi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial S} \right)_{\Theta} dS + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right)_S d\Theta, \quad (2.34b)$$

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{\Xi} dT + \left( \frac{\partial H}{\partial \Xi} \right)_T d\Xi, \quad (2.34c)$$

$$d\mathcal{G} = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} \right)_{\Theta} dT + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Theta} \right)_T d\Theta. \quad (2.34d)$$

分別比較(2.33a-d)與(2.34a-d)式，可得

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{\Xi} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial S} \right)_{\Theta}, \quad (2.35a)$$

$$-\Xi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right)_S = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Theta} \right)_T, \quad (2.35b)$$

$$-S = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{\Xi} = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} \right)_{\Theta}, \quad (2.35c)$$

$$\Theta = \left( \frac{\partial U}{\partial \Xi} \right)_S = \left( \frac{\partial H}{\partial \Xi} \right)_T. \quad (2.35d)$$

在考慮自變數為應變  $S$  與溫度  $\Theta$  的情況下，特徵函數只針對 Helmholtz 自由能  $\Psi$  作後續推導。已知溫度  $\Theta = \Theta^0 + \Delta\Theta$ ，其中  $\Theta^0$  為參考溫度， $\Delta\Theta$  為微小的溫度變化，應用 Taylor 級數對平衡位置  $S = 0$  與  $\Theta = \Theta^0$  作展開。由於平衡位置是處於一個穩態，其位勢必定為一個(區域)最小值，可將此一最小值假設為零，即  $\Psi(0, \Theta^0) = 0$ ，且其位勢梯度的變化亦須為零，即  $\nabla \Psi(0, \Theta^0) = \mathbf{0}$ 。因此，可假設 Helmholtz 自由能  $\Psi$  為

$$\begin{aligned} \Psi(S, \Delta\Theta) = & \frac{1}{2}(c S^2 - \alpha \Delta\Theta^2 - 2\lambda S \Delta\Theta) \\ & + \frac{1}{6}(c' S^3 - \alpha' \Delta\Theta^3 - 3\lambda' S^2 \Delta\Theta - 3\lambda'' S \Delta\Theta^2), \end{aligned} \quad (2.36)$$

其中係數  $c$ 、 $\alpha$  與  $\lambda$  分別為二階的彈性常數、熱常數與熱壓常數，係數  $c'$ 、 $\alpha'$ 、 $\lambda'$  與  $\lambda''$  分別為三階的彈性常數、熱常數與 2 種熱壓常數。根據(2.35a, b)或(2.21a, b)式，可得

$$T = cS - \lambda \Delta\Theta + \frac{1}{2}c' S^2 - \frac{1}{2}\lambda'' \Delta\Theta^2 - \lambda' S \Delta\Theta, \quad (2.37a)$$

$$\Xi = \lambda S + \alpha \Delta\Theta + \frac{1}{2}\lambda' S^2 + \frac{1}{2}\alpha' \Delta\Theta^2 + \lambda'' S \Delta\Theta. \quad (2.37b)$$

將(2.36)與(2.37a-b)式改寫為張量形式，其中  $T$ 、 $S$ 、 $(c, c')$  與  $(\lambda, \lambda', \lambda'')$  分別改用張量  $T_{IJ}$ 、 $S_{IJ}$ 、 $(c_{IJKL}, c'_{IJKLMN})$  與  $(\lambda_{IJ}, \lambda'_{IJKL}, \lambda''_{IJ})$  表示，則可將(2.36)與(2.27a, b)式分別改寫為

$$\begin{aligned} \Psi(S_{IJ}, \Delta\Theta) = & \frac{1}{2}(c_{IJKL} S_{IJ} S_{KL} - \alpha \Delta\Theta^2 - 2\lambda_{IJ} S_{IJ} \Delta\Theta) \\ & + \frac{1}{6}(c'_{IJKLMN} S_{IJ} S_{KL} S_{MN} - \alpha' \Delta\Theta^3 \\ & - 3\lambda'_{IJKL} S_{IJ} S_{KL} \Delta\Theta - 3\lambda''_{IJ} S_{IJ} \Delta\Theta^2), \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$T_{IJ} = c_{IJKL} S_{KL} - \lambda_{IJ} \Delta\Theta + \frac{1}{2}c'_{IJKLMN} S_{KL} S_{MN} - \frac{1}{2}\lambda''_{IJ} \Delta\Theta^2 - \lambda'_{IJKL} S_{KL} \Delta\Theta, \quad (2.39a)$$

$$\Xi = \lambda_{KL} S_{KL} + \alpha \Delta\Theta + \frac{1}{2}\lambda'_{KLMN} S_{KL} S_{MN} + \frac{1}{2}\alpha' \Delta\Theta^2 + \lambda''_{KL} S_{KL} \Delta\Theta. \quad (2.39b)$$

上述(2.38)與(2.39a, b)式分別為後續推導所需要的 Helmholtz 自由能  $\Psi$  及其本構方程式，且式中的物理量皆是以 Lagrange 描述法作敘述。

### 2.3.2 在自然狀態下描述

根據圖 1.9 所示，當觀察者由自然狀態看初始狀態與最終狀態時，應變張量與溫度變化分別為  $S_{\alpha\beta}^{i,f}$  與  $\Delta\Theta^{i,f}$ ，應用(2.38)式可得知 Helmholtz 自由能  $\Psi$  為

$$\begin{aligned} \Psi(S_{\alpha\beta}^{i,f}, \Delta\Theta^{i,f}) = & \frac{1}{2} \left\{ c_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^{i,f} S_{\gamma\delta}^{i,f} - \alpha (\Delta\Theta^{i,f})^2 - 2\lambda_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{i,f} \Delta\Theta^{i,f} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left\{ c'_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu} S_{\alpha\beta}^{i,f} S_{\gamma\delta}^{i,f} S_{\mu\nu}^{i,f} - \alpha' (\Delta\Theta^{i,f})^3 \right. \\ & \left. - 3\lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^{i,f} S_{\gamma\delta}^{i,f} \Delta\Theta^{i,f} - 3\lambda''_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{i,f} (\Delta\Theta^{i,f})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

由(2.39a, b)式可求得在初始狀態的應力張量  $T_{\alpha\beta}^i$  與熵變化  $\Xi^i$  分別為

$$T_{\alpha\beta}^i = c_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^i - \lambda_{\alpha\beta} \Delta\Theta^i + \frac{1}{2} c'_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu} S_{\gamma\delta}^i S_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2} \lambda''_{\alpha\beta} (\Delta\Theta^i)^2 - \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^i \Delta\Theta^i, \quad (2.41a)$$

$$\Xi^i = \lambda_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^i + \alpha \Delta\Theta^i + \frac{1}{2} \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^i S_{\gamma\delta}^i + \frac{1}{2} \alpha' (\Delta\Theta^i)^2 + \lambda''_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^i \Delta\Theta^i. \quad (2.41b)$$

同理可知，可得在最終狀態的應力張量  $T_{\alpha\beta}^f$  與熵變化  $\Xi^f$  分別為

$$T_{\alpha\beta}^f = c_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^f - \lambda_{\alpha\beta} \Delta\Theta^f + \frac{1}{2} c'_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu} S_{\gamma\delta}^f S_{\mu\nu}^f - \frac{1}{2} \lambda''_{\alpha\beta} (\Delta\Theta^f)^2 - \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^f \Delta\Theta^f, \quad (2.42a)$$

$$\Xi^f = \lambda_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^f + \alpha \Delta\Theta^f + \frac{1}{2} \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^f S_{\gamma\delta}^f + \frac{1}{2} \alpha' (\Delta\Theta^f)^2 + \lambda''_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^f \Delta\Theta^f, \quad (2.42b)$$

在上述本構方程式中，可藉由在初始狀態至最終狀態時物理量之差來計算其增量，應力張量、熵變化、應變張量與溫度變化之增量，可參考(2.27a, b, d, e)式，定義如下：

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^f - T_{\alpha\beta}^i, \quad (2.43a)$$

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^f - S_{\alpha\beta}^i, \quad (2.43b)$$

$$\Xi = \Xi^f - \Xi^i, \quad (2.43c)$$

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta^f - \Delta\Theta^i. \quad (2.43d)$$

將(2.42a, b)式分別減(2.41a, b)式，並配合(2.43a-d)式之定義，可得

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & c_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta} - \lambda_{\alpha\beta} \Delta\Theta \\ & + \frac{1}{2} c'_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu} (S_{\gamma\delta}^i S_{\mu\nu}^i + S_{\gamma\delta}^i S_{\mu\nu}^f + S_{\gamma\delta}^f S_{\mu\nu}^i) - \frac{1}{2} \lambda''_{\alpha\beta} (2\Delta\Theta^i \Delta\Theta + \Delta\Theta^2) \\ & - \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} (S_{\gamma\delta}^i \Delta\Theta + S_{\gamma\delta}^f \Delta\Theta^i + S_{\gamma\delta}^f \Delta\Theta), \end{aligned} \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} \Xi = & \lambda_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \alpha \Delta\Theta \\ & + \frac{1}{2} \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} (S_{\alpha\beta}^i S_{\gamma\delta}^i + S_{\alpha\beta}^i S_{\gamma\delta}^f + S_{\alpha\beta}^f S_{\gamma\delta}^i) - \frac{1}{2} \alpha' (2\Delta\Theta^i \Delta\Theta + \Delta\Theta^2) \end{aligned}$$

$$-\lambda_{\alpha\beta}''(S_{\alpha\beta}^i \Delta\Theta + S_{\alpha\beta} \Delta\Theta^i + S_{\alpha\beta} \Delta\Theta). \quad (2.44b)$$

此增量的物理意義代表由初始狀態來觀察最終狀態的運動情形，其描述方式是基於自然狀態的座標系統。

應用已知的應變與位移關係，將上述(2.41a, b)與(2.44a, b)式中有關 $S_{\alpha\beta}^i$ 與 $S_{\alpha\beta}$ 轉換為 $u_{\xi,\zeta}^i$ 與 $u_{\xi,\zeta}$ 。假設物體在初始狀態與最終狀態的Lagrange應變張量分別定義為

$$S_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right\}, \quad S_{\alpha\beta}^f = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right\}. \quad (2.45a, b)$$

其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 為Kronecker符號。應用(2.1a, b)式之定義，其位移梯度分別為

$$\frac{\partial X_K}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{K\alpha} + \frac{\partial u_K^i}{\partial \xi_\alpha}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{k\alpha} + \frac{\partial u_k^f}{\partial \xi_\alpha}. \quad (2.46a, b)$$

將(2.46a, b)式分別代入(2.45a, b)式，並改以位移梯度表示

$$S_{\alpha\beta}^{i,f} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\alpha^{i,f}}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta^{i,f}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\gamma^{i,f}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\gamma^{i,f}}{\partial \xi_\beta} \right\}. \quad (2.47)$$

將(2.47)式代入(2.43c)式，並以 $u_\alpha^i + u_\alpha^f$ 取代 $u_\alpha^f$ ，可推導出應變張量之增量 $S_{\alpha\beta}$ 為

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \xi_\beta} \right\}. \quad (2.48)$$

在上述式子中，基於假設由初始狀態至最終狀態的位移與溫度之增量變化很小，忽略了乘積項 $u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta}$ 。為了將 $S_{\alpha\beta}^i$ 與 $S_{\alpha\beta}$ 轉換為 $u_{\xi,\zeta}^i$ 與 $u_{\xi,\zeta}$ ，(2.47a)與(2.48)式可改寫為

$$S_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\zeta} + \delta_{\beta\xi} \delta_{\alpha\zeta} + \delta_{\alpha\xi} u_{\xi,\beta}^i) u_{\xi,\zeta}^i, \quad (2.47'a)$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\zeta} + \delta_{\beta\xi} \delta_{\alpha\zeta} + \delta_{\alpha\xi} u_{\xi,\beta}^i + \delta_{\beta\xi} u_{\xi,\alpha}^i) u_{\xi,\zeta}. \quad (2.48')$$

將(2.47'a)與(2.48')式分別代入(2.41a, b)與(2.44a, b)式，並忽略任一初始狀態物理量二次以上的乘積項，以及任一增量二次以上的乘積項，可將式子整理如下：

$$T_{\alpha\beta}^i = c_{\alpha\beta\xi\zeta} u_{\xi,\zeta}^i - \lambda_{\alpha\beta} \Delta\Theta^i, \quad (2.49a)$$

$$\Xi^i = \lambda_{\xi\zeta} u_{\xi,\zeta}^i + \alpha \Delta\Theta^i, \quad (2.49b)$$

$$T_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\beta\xi\xi} + c_{\alpha\beta\gamma\xi} u_{\xi,\gamma}^i + c'_{\alpha\beta\xi\xi\sigma\eta} u_{\sigma,\eta}^i - \lambda'_{\alpha\beta\xi\xi} \Delta\Theta^i) u_{\xi,\zeta} - (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda'_{\alpha\beta\xi\xi} u_{\xi,\zeta}^i + \lambda''_{\alpha\beta} \Delta\Theta^i) \Delta\Theta, \quad (2.50a)$$

$$\Xi = (\lambda_{\xi\xi} + \lambda_{\gamma\xi} u_{\xi,\gamma}^i + \lambda'_{\xi\xi\sigma\eta} u_{\sigma,\eta}^i + \lambda''_{\xi\xi} \Delta\Theta^i) u_{\xi,\zeta} + (\alpha + \lambda''_{\xi\xi} u_{\xi,\zeta}^i + \alpha' \Delta\Theta^i) \Delta\Theta. \quad (2.50b)$$

### 2.3.3 在初始狀態下描述

鑒於偵測材料變形的動態擾動是以初始狀態的座標系統為基準，(2.49a, b)式代表因初始位移  $u_{\xi}^i$  與初始溫度差  $\Delta\Theta^i$  之變化造成的初始應力  $T_{\alpha\beta}^i$  與初始熵  $\Xi^i$ ，(2.50a, b)式是描述由初始狀態至最終狀態的位移  $u_{\xi}$  與溫度差  $\Delta\Theta$  造成的應力變化  $T_{\alpha\beta}$  與熵變化  $\Xi$ ，二者皆是以自然狀態的座標系統來描述，故需要進行座標轉換，由自然狀態的座標系統轉為初始狀態的座標系統。根據  $N$  階張量的座標轉換，定義如下：

$$\mathfrak{R}_{\overset{N \text{ terms}}{IJK\dots L}}(\mathbf{X}, t) = J^{-1} \underbrace{\left\{ \frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_{\gamma}} \dots \frac{\partial X_L}{\partial \xi_{\delta}} \right\}}_{N \text{ terms}} \mathfrak{R}_{\overset{N \text{ terms}}{\alpha\beta\gamma\dots\delta}}(\xi, t), \quad (2.51)$$

其中  $\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\dots\delta}(\xi, t)$  與  $\mathfrak{R}_{IJK\dots L}(\mathbf{X}, t)$  分別為由自然狀態與初始狀態之座標系統所描述的  $N$  階張量，以及  $J$  為這兩座標系統間的 Jacobi 行列式，定義如下：

$$J \equiv \det \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{IJK} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_{\gamma}}, \quad (2.52)$$

其中  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  或  $\epsilon_{IJK}$  為排列(permutation)或 Levi-Civita 符號。將(2.46a)式代入(2.52)式，考慮線性部分，忽略初始位移梯度之二次以上的乘積項，則  $J$  與  $J^{-1}$  可近似為

$$J \approx 1 + u_{v,v}^i = \frac{\rho^0}{\rho^i} \quad \text{or} \quad \frac{dV^i}{dV^0}, \quad (2.53a)$$

$$J^{-1} \approx 1 - u_{v,v}^i = \frac{\rho^i}{\rho^0} \quad \text{or} \quad \frac{dV^0}{dV^i}. \quad (2.53b)$$

這代表了材料之密度或單位體積在兩座標系統間的比例關係，且遵守質量守恆定理。

將(2.51)式應用至四個物理量  $T_{\alpha\beta}^i(\xi, t)$ 、 $\Xi^i(\xi, t)$ 、 $T_{\alpha\beta}(\xi, t)$  與  $\Xi(\xi, t)$ ，可得

$$T_{IJ}^i(\mathbf{X}, t) = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left\{ (1 - u_{v,v}^i) T_{\alpha\beta}^i + u_{\alpha,v}^i T_{\beta v}^i + u_{\beta,\mu}^i T_{\alpha\mu}^i \right\}, \quad (2.54a)$$

$$\Xi^i(\mathbf{X}, t) = (1 - u_{v,v}^i) \Xi^i(\xi, t), \quad (2.54b)$$

$$T_{IJ}(\mathbf{X}, t) = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left\{ (1 - u_{v,v}^i) T_{\alpha\beta} + u_{\alpha,v}^i T_{\beta v} + u_{\beta,\mu}^i T_{\alpha\mu} \right\}, \quad (2.55a)$$

$$\Xi(\mathbf{X}, t) = (1 - u_{v,v}^i) \Xi(\xi, t). \quad (2.55b)$$

上述四式中等號左邊代表在初始狀態下的物理量，(2.54b)與(2.55b)式中等號兩邊的差異僅是因密度或單位體積改變所造成。將(2.49a, b)式代入(2.54a, b)式等號右端，可得：

$$T_{IJ}^i = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left\{ c_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^i - \lambda_{\alpha\beta} \Delta\Theta^i \right\}, \quad (2.56a)$$

$$\Xi^i = \lambda_{\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^i + \alpha \Delta\Theta^i, \quad (2.56b)$$

同理，將(2.50a, b)式代入(2.55a, b)式等號右端，並整理如下：

$$T_{IJ} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left\{ [(1 - u_{v,v}^i) c_{\alpha\beta\gamma\delta} + c_{\mu\beta\gamma\delta} u_{\alpha,\mu}^i + c_{\alpha\mu\gamma\delta} u_{\beta,\mu}^i + c_{\alpha\beta\mu\delta} u_{\gamma,\mu}^i + c'_{\alpha\beta\gamma\delta\sigma\eta} u_{\sigma,\eta}^i - \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta\Theta^i] u_{\gamma,\delta} - [(1 - u_{v,v}^i) \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\mu\beta} u_{\alpha,\mu}^i + \lambda_{\alpha\mu} u_{\beta,\mu}^i + \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^i + \lambda''_{\alpha\beta} \Delta\Theta^i] \Delta\Theta \right\}, \quad (2.57a)$$

$$\Xi = [(1 - u_{v,v}^i) \lambda_{\gamma\delta} + \lambda_{\mu\delta} u_{\gamma,\mu}^i + \lambda'_{\gamma\delta\sigma\eta} u_{\sigma,\eta}^i - \lambda''_{\gamma\delta} \Theta^i] u_{\gamma,\delta} + [(1 - u_{v,v}^i) \alpha + \lambda''_{\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^i + \alpha' \Theta^i] \Delta\Theta. \quad (2.57b)$$

在(2.56a, b)與(2.57a, b)式中，須考慮位移梯度的座標轉換，將 $u_{\gamma,\delta}^i$ 與 $u_{\gamma,\delta}$ 轉換為 $u_{K,L}^i$ 與 $u_{K,L}$ 。首先，下標變換表示如下：

$$\frac{\partial u_{\gamma}^i}{\partial \xi_{\delta}} = \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \frac{\partial u_K^i}{\partial \xi_L}, \quad \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \xi_{\delta}} = \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \frac{\partial u_K}{\partial \xi_L}. \quad (2.58a, b)$$

再者，分母配合(2.1a)式之定義，即 $\partial \xi_L = \partial X_L - \partial u_L^i$ ，則上式可分別近似如下：

$$\frac{\partial u_{\gamma}^i}{\partial \xi_{\delta}} \approx \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_L}, \quad \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \xi_{\delta}} \approx \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \left( \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \frac{\partial u_K}{\partial X_M} \frac{\partial u_M^i}{\partial X_L} \right). \quad (2.58'a, b)$$

將(2.58'a, b)式代入(2.56a, b)與(2.57a, b)式，經整理可獲得基於初始狀態座標系統的本構方程式分別為

$$T_{IJ}^i = c_{IJKL} u_{K,L}^i - \lambda_{IJ} \Delta\Theta^i, \quad (2.59a)$$

$$\Xi^i = \lambda_{KL} u_{K,L}^i + \alpha \Delta\Theta^i, \quad (2.59b)$$

$$\begin{aligned} T_{IJ} = & [(1 - u_{N,N}^i) c_{IJKL} + c'_{IJKLMN} u_{M,N}^i + c_{OJKL} u_{I,O}^i + c_{IOKL} u_{J,O}^i \\ & + c_{IJOL} u_{K,O}^i + c_{IJKO} u_{L,O}^i - \lambda'_{IJKL} \Delta\Theta^i] u_{K,L} \\ & - [(1 - u_{N,N}^i) \lambda_{IJ} + \lambda'_{IJKL} u_{K,L}^i + \lambda_{OJ} u_{I,O}^i + \lambda_{IO} u_{J,O}^i + \lambda''_{IJ} \Delta\Theta^i] \Delta\Theta, \end{aligned} \quad (2.60a)$$

$$\begin{aligned} \Xi = & [(1 - u_{N,N}^i) \lambda_{KL} + \lambda'_{KLMN} u_{M,N}^i + \lambda_{OL} u_{K,O}^i + \lambda_{KO} u_{L,O}^i + \lambda''_{KL} \Delta\Theta^i] u_{K,L} \\ & + [(1 - u_{N,N}^i) \alpha + \lambda''_{KL} u_{K,L}^i + \alpha' \Delta\Theta^i] \Delta\Theta, \end{aligned} \quad (2.60b)$$

其中參數  $c_{IJKL}$ 、 $c'_{IJKLMN}$ 、 $\lambda_{IJ}$ 、 $\lambda'_{IJKL}$  與  $\lambda''_{IJ}$  分別由下列轉換獲得，

$$\begin{aligned} c_{IJKL} &= \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta}, & c'_{IJKLMN} &= \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \delta_{M\sigma} \delta_{N\eta} c'_{\alpha\beta\gamma\delta\sigma\eta}, \\ \lambda_{IJ} &= \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \lambda_{\alpha\beta}, & \lambda'_{IJKL} &= \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta}, & \lambda''_{IJ} &= \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \lambda''_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

(2.60a, b)式經過簡化表示如下：

$$T_{IJ} = \bar{c}_{IJKL} S_{KL} - \bar{\lambda}_{IJ} \Delta\Theta, \quad (2.61a)$$

$$\Xi = \bar{\lambda}_{KL} S_{KL} + \bar{\alpha} \Delta\Theta, \quad (2.61b)$$

其中  $S_{IJ} = \frac{1}{2}(u_{I,J} + u_{J,I})$  為在初始狀態座標系統下的微小應變 (infinitesimal strain)。參數  $\bar{c}_{IJKL}$ 、 $\bar{\lambda}_{IJ}$  與  $\bar{\alpha}$  分別為有效的彈性常數、熱壓常數與熱常數，其定義分別如下：

$$\begin{aligned} \bar{c}_{IJKL} = & (1 - e_{NN}^i) c_{IJKL} + c'_{IJKLMN} u_{M,N}^i + c_{OJKL} u_{I,O}^i + c_{IOKL} u_{J,O}^i \\ & + c_{IJOL} u_{K,O}^i + c_{IJKO} u_{L,O}^i - \lambda'_{IJKL} \Delta\Theta^i, \end{aligned} \quad (2.62a)$$

$$\bar{\lambda}_{IJ} = (1 - e_{NN}^i) \lambda_{IJ} + \lambda'_{IJKL} u_{K,L}^i + \lambda_{OJ} u_{I,O}^i + \lambda_{IO} u_{J,O}^i + \lambda''_{IJ} \Delta\Theta^i, \quad (2.62b)$$

$$\bar{\alpha} = (1 - e_{NN}^i) \alpha + \lambda''_{IJ} u_{I,J}^i + \alpha' \Delta\Theta^i, \quad (2.62c)$$

其中  $e_{NN}^i \equiv u_{N,N}^i = u_{1,1}^i + u_{2,2}^i + u_{3,3}^i$ ，代表材料中的體積膨脹 (cubic dilatation)，由(2.53a-b)式定義可知， $J \approx 1 + e_{NN}^i = \rho^0 / \rho^i = dV^i / dV^0$  與  $J^{-1} \approx 1 - e_{NN}^i = \rho^i / \rho^0 = dV^0 / dV^i$ 。參數  $(c_{IJKL}, c'_{IJKLMN})$ 、 $(\lambda_{IJ}, \lambda'_{IJKL}, \lambda''_{IJ})$  與  $(\alpha, \alpha')$  分別為在自然狀態下原始的彈性常數、熱壓常數與熱常數。因此，可知上述彈性常數與熱壓常數的對稱特性分別如下：

$$c_{IJKL} = c_{KLIJ} = c_{JIKL}, \quad c'_{IJKLMN} = c'_{KLIJMN} = c'_{MNKLIJ} = c'_{IJMNKL} = c'_{JIKLMN},$$

$$\lambda_{IJ} = \lambda_{JI}, \quad \lambda'_{IJKL} = \lambda'_{KLIJ} = \lambda'_{JIKL}, \quad \lambda''_{IJ} = \lambda''_{JI},$$

$$\bar{c}_{IJKL} = \bar{c}_{KLIJ} = \bar{c}_{JIKL}, \quad \bar{\lambda}_{IJ} = \bar{\lambda}_{JI}.$$

在實際分析時，由自然狀態至初始狀態，只考慮初始應力  $T_{IJ}^i$  造成的初始位移梯度  $u_{K,L}^i$ ，可忽略了兩狀態間的初始溫度差  $\Delta\Theta^i$ ，即  $\Delta\Theta^i = 0$  與  $\Theta^i = \Theta^0$ ，加上高階的熱常數  $\alpha'$  以及 2 個熱壓常數  $\lambda'_{IJKL}$  與  $\lambda''_{IJ}$  並不易獲得，因此，(2.62a-c)式可改寫為

$$\bar{c}_{IJKL} = (1 - e_{NN}^i) c_{IJKL} + c'_{IJKLMN} u_{M,N}^i + c_{OJKL} u_{1,O}^i + c_{IOKL} u_{J,O}^i + c_{IJOL} u_{K,O}^i + c_{IJKO} u_{L,O}^i, \quad (2.63a)$$

$$\bar{\lambda}_{IJ} = (1 - e_{NN}^i) \lambda_{IJ} + \lambda_{OJ} u_{1,O}^i + \lambda_{IO} u_{J,O}^i, \quad (2.63b)$$

$$\bar{\alpha} = (1 - e_{NN}^i) \alpha, \quad (2.63c)$$

配合原始的熱常數  $\alpha$  之定義： $\alpha = \rho^0 C_E / \Theta^0$ ，其中  $C_E$  為熱容常數，有效的熱常數  $\bar{\alpha}$  可改寫為  $\bar{\alpha} = \rho^i C_E / \Theta^0$ 。此外，根據本構方程式(2.59a)，即

$$T_{IJ}^i = c_{IJKL} u_{K,L}^i, \quad (2.64)$$

可求得因初始應力  $T_{IJ}^i$  造成的初始位移梯度  $u_{K,L}^i$ 。回顧(2.31)式，有效熱傳導係數  $\bar{k}_{IJ}$  的定義，其亦滿足了(2.51)式的  $N$  階張量座標轉換關係，經由上述推導流程，可獲得

$$\bar{k}_{IJ} = (1 - e_{NN}^i) k_{IJ} + k_{OJ} u_{1,O}^i + k_{IO} u_{J,O}^i, \quad (2.65)$$

其中  $k_{IJ}$  為自然狀態下原始的熱傳導常數，具有對稱特性  $k_{IJ} = k_{JI}$  與  $\bar{k}_{IJ} = \bar{k}_{JI}$ 。

## 2.4 能量守恆以及互置定理

此一章節主要是基於含有初始應力的傳統熱彈性理論，推導功與能量的守恆關係，參考 Auld [120, 121] 提出的方法，推導本論文需要的互置定理(reciprocity theorem)，藉以瞭解材料內部的能量分佈及其功率傳輸，說明雷射激發熱彈聲波之應變能與熱能的傳遞及衰減現象。

### 2.4.1 熱彈耦合的互置定理

根據前兩節所獲得的結果，已知物體在初始狀態下所描述的熱彈統御方程式(2.30a, b)、熱傳導方程式(2.30c)，及熱彈本構方程式(2.61a, b)，再配合物體上某一表面法向量為  $\hat{n}_J$  的施加曳力  $t_I$  與輸入熱能  $q_{in}$ ，其定義分別為

$$t_I = \hat{n}_J \tilde{T}_{JI} = \hat{n}_J (T_{JI} + T_{JL}^i u_{I,L}), \quad (2.66a)$$

$$q_{in} = -\hat{n}_J q_J, \quad (2.66b)$$

則可推導含有初始應力之熱彈性理論的能量守恆關係。首先，由物體某一表面上的曳力作功  $t_I^* v_I$  出發，其中上標「\*」為共軛複數(complex conjugate)，其積分型式如下表示：

$$\begin{aligned} \int_{A_i} t_I^* v_I dA_i &= \int_{A_i} \hat{n}_J (T_{JI}^* + T_{JL}^i u_{I,L}^*) v_I dA_i = \int_{V_i} (T_{JI}^* v_I + T_{JL}^i u_{I,L}^* v_I)_{,J} dV_i \\ &= \int_{V_i} [(T_{JI}^* + T_{JL}^i u_{I,L}^*)_{,J} v_I + T_{JI}^* v_{I,J} + T_{JL}^i u_{I,L}^* v_{I,J}] dV_i \\ &= \int_{V_i} [\rho_i (\dot{v}_I^* - b_I^*) v_I + T_{IJ}^* \dot{S}_{IJ} + T_{JL}^i u_{I,L}^* v_{I,J}] dV_i, \end{aligned} \quad (2.67)$$

其中  $\dot{S}_{IJ} = \frac{1}{2}(v_{I,J} + v_{J,I})$  代表應變率， $dA_i$  與  $dV_i$  分別代表物體在初始狀態下的單位面積與單位體積。利用本構方程式(2.61a, b)，上式中  $T_{IJ}^* \dot{S}_{IJ}$  的結果為

$$\begin{aligned} T_{IJ}^* \dot{S}_{IJ} &= (c_{IJKL} S_{KL}^* - \lambda_{IJ} \Delta \Theta^*) \dot{S}_{IJ} = c_{IJKL} S_{KL}^* \dot{S}_{IJ} - \Delta \Theta^* (\lambda_{IJ} \dot{S}_{IJ}) \\ &= c_{IJKL} S_{KL}^* \dot{S}_{IJ} + \alpha \Delta \Theta^* \Delta \dot{\Theta} - \Delta \Theta^* \dot{\Xi}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

假設物體在初始狀態下仍須滿足熱力學第二定律，回顧熵(2.30b)式並改寫為熵不等式，即為： $\Theta_i \dot{\Xi} \geq \rho_i \dot{h} - q_{J,J}$ ，則上式中  $\Delta \Theta^* \dot{\Xi}$  的結果為

$$\begin{aligned} \Delta \Theta^* \dot{\Xi} &\geq \Delta \Theta^* (\Theta_i^{-1} \rho_i \dot{h} - \Theta_i^{-1} q_{J,J}) \\ &= \Delta \Theta^* (\Theta_i^{-1} \rho_i \dot{h}) + [\Delta \Theta^* (-\Theta_i^{-1} q_J)]_{,J} - \Delta \Theta_{,J}^* (-\Theta_i^{-1} q_J). \end{aligned} \quad (2.69)$$

結合上述(2.68)與(2.69)二式並代入(2.67)式，可得

$$\begin{aligned} &\int_{A_i} [t_I^* v_I + \Delta \Theta^* (\Theta_i^{-1} q_{in})] dA_i + \int_{V_i} [\rho_i b_I^* v_I + \Delta \Theta^* (\Theta_i^{-1} \rho_i \dot{h})] dV_i \\ &- \int_{V_i} (\rho_i \dot{v}_I^* v_I + c_{IJKL} S_{KL}^* \dot{S}_{IJ} + \alpha \Delta \Theta^* \Delta \dot{\Theta} + T_{JL}^i u_{I,L}^* \dot{u}_{I,J}) dV_i \\ &- \int_{V_i} \Delta \Theta_{,J}^* (-\Theta_i^{-1} q_J) dV_i \leq 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

根據熱傳導方程式(2.30c)，可得知  $\Delta\Theta_{,J}^*(-\Theta_i^{-1}q_J) \geq 0$ 。假設

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [t_I^* v_I + \Delta\Theta^*(\Theta_i^{-1}q_{in})] dA_i + \int_{V_i} [\rho_i b_I^* v_I + \Delta\Theta^*(\Theta_i^{-1}\rho_i \dot{h})] dV_i \\ &= \int_{V_i} (\rho_i \dot{v}_I^* v_I + c_{IJKL} S_{KL}^* \dot{S}_{IJ} + \alpha \Delta\Theta^* \Delta\dot{\Theta} + T_{JL}^i u_{I,L}^* \dot{u}_{I,J}) dV_i, \end{aligned} \quad (2.71)$$

即可滿足下述不等式關係：

$$- \int_{V_i} \Delta\Theta_{,J}^*(-\Theta_i^{-1}q_J) dV_i \leq 0. \quad (2.72)$$

上述(2.71)式即為含有初始應力之熱彈性理論的能量守恆關係，等號左端包含了於物體表面上單位面積  $dA_i$  的拘束  $(v_I, \Delta\Theta)$  與輸入  $(t_I, q_{in})$ ，以及內部單位體積  $dV_i$  中的輸入  $(\rho_i b_I, \rho_i \dot{h})$  等外部作功。

在含有初始應力之熱彈性理論的能量守恆關係下，引入狀態(1)與狀態(2)，例如將(2.67)式中的  $t_I^* v_I$  視為  $t_I^{(2)*} v_I^{(1)}$ ，再依照上述過程，並應用(2.71)式的結果可得

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [t_I^{(2)*} v_I^{(1)} + \Delta\Theta^{(2)*}(\Theta_i^{-1}q_{in}^{(1)})] dA_i \\ &+ \int_{V_i} [\rho_i b_I^{(2)*} v_I^{(1)} + \Delta\Theta^{(2)*}(\Theta_i^{-1}\rho_i \dot{h}^{(1)})] dV_i \\ &= \int_{V_i} (\rho_i \dot{v}_I^{(2)*} v_I^{(1)} + c_{IJKL} S_{KL}^{(2)*} \dot{S}_{IJ}^{(1)} + \alpha \Delta\Theta^{(2)*} \Delta\dot{\Theta}^{(1)} + T_{JL}^i u_{I,L}^{(2)*} \dot{u}_{I,J}^{(1)}) dV_i, \end{aligned} \quad (2.73a)$$

同理，將  $t_I^* v_I$  視為  $t_I^{(1)*} v_I^{(2)*}$ ，可得

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [t_I^{(1)*} v_I^{(2)*} + \Delta\Theta^{(1)}(\Theta_i^{-1}q_{in}^{(2)*})] dA_i \\ &+ \int_{V_i} [\rho_i b_I^{(1)*} v_I^{(2)*} + \Delta\Theta^{(1)}(\Theta_i^{-1}\rho_i \dot{h}^{(2)*})] dV_i \\ &= \int_{V_i} (\rho_i \dot{v}_I^{(1)*} v_I^{(2)*} + c_{IJKL} S_{KL}^{(1)} \dot{S}_{IJ}^{(2)*} + \alpha \Delta\Theta^{(1)} \Delta\dot{\Theta}^{(2)*} + T_{JL}^i u_{I,L}^{(1)*} \dot{u}_{I,J}^{(2)*}) dV_i. \end{aligned} \quad (2.73b)$$

上述二式相加，整理後可獲得含有狀態(1)與狀態(2)的互置理論如下表示

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [t_I^{(2)*} v_I^{(1)} + t_I^{(1)*} v_I^{(2)*} + \Delta\Theta^{(2)*}(\Theta_i^{-1}q_{in}^{(1)}) + \Delta\Theta^{(1)}(\Theta_i^{-1}q_{in}^{(2)*})] dA_i \\ &+ \int_{V_i} [\rho_i b_I^{(2)*} v_I^{(1)} + \rho_i b_I^{(1)*} v_I^{(2)*} + \Delta\Theta^{(2)*}(\Theta_i^{-1}\rho_i \dot{h}^{(1)}) + \Delta\Theta^{(1)}(\Theta_i^{-1}\rho_i \dot{h}^{(2)*})] dV_i \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{V_i} (\rho_i v_I^{(2)*} v_I^{(1)} + c_{IJKL} S_{KL}^{(2)*} S_{IJ}^{(1)} + \alpha \Delta\Theta^{(2)*} \Delta\Theta^{(1)} + T_{JL}^i u_{I,L}^{(2)*} u_{I,J}^{(1)}) dV_i. \end{aligned} \quad (2.74)$$

此外，為配合矩陣向量型式表示，先定義施加曳力  $\mathbf{t}$  與輸入熱能  $q_{in}$  為

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [\underline{\underline{\mathbf{T}}} + (\underline{\underline{\mathbf{T}}}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}], \quad (2.75a)$$

$$q_{in} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (-\mathbf{q}), \quad (2.75b)$$

並將(2.74)式改寫為

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [\mathbf{t}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \Delta\Theta_2^*(\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_{in1}) + \Delta\Theta_1(\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_{in2}^*)] dA_i \\ & + \int_{V_i} [\rho_i \boldsymbol{\delta}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \rho_i \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \Delta\Theta_2^*(\Theta_i^{-1} \rho_i \hat{h}_1) + \Delta\Theta_1(\Theta_i^{-1} \rho_i \hat{h}_2^*)] dV_i \\ & = \frac{D}{Dt} \int_{V_i} [\rho_i \mathbf{v}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \underline{\underline{\mathbf{S}}}_1 : (\underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}_2^*) + \alpha \Delta\Theta_2^* \Delta\Theta_1 + (\nabla \mathbf{u}_1) : (\underline{\underline{\mathbf{T}}}^i \cdot \nabla \mathbf{u}_2^*)] dV_i, \end{aligned} \quad (2.76)$$

其中  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \sim a_i b_i$  與  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \sim A_{IJ} B_{IJ}$  為內積定義。符號  $\mathbf{t} \sim t_i$ 、 $\boldsymbol{\delta} \sim \delta_i$ 、 $\mathbf{v} \sim v_i$  與  $\mathbf{u} \sim u_i$  為一階張量， $\underline{\underline{\mathbf{T}}} \sim T_{IJ}$  與  $\underline{\underline{\mathbf{S}}} \sim S_{IJ}$  為二階張量，以及  $\underline{\underline{\mathbf{c}}} \sim c_{IJKL}$  為四階張量。

假設上述(2.74)或(2.76)式中所有變數皆屬於時諧函數，即  $\square(\mathbf{X}, t) = \square(\mathbf{X}, \omega) e^{-i\omega t}$ ，可得等號右端為零，則原式可改寫為

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [t_i^{(2)*} v_i^{(1)} + t_i^{(1)} v_i^{(2)*} + \Delta\Theta^{(2)*}(\Theta_i^{-1} q_{in}^{(1)}) + \Delta\Theta^{(1)}(\Theta_i^{-1} q_{in}^{(2)*})] dA_i \\ & + \int_{V_i} [\rho_i \delta_i^{(2)*} v_i^{(1)} + \rho_i \delta_i^{(1)} v_i^{(2)*} + \Delta\Theta^{(2)*}(\Theta_i^{-1} \rho_i \hat{h}^{(1)}) + \Delta\Theta^{(1)}(\Theta_i^{-1} \rho_i \hat{h}^{(2)*})] dV_i \\ & = 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

以及其矩陣向量型式為

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} [\mathbf{t}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \Delta\Theta_2^*(\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_{in1}) + \Delta\Theta_1(\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_{in2}^*)] dA_i \\ & + \int_{V_i} [\rho_i \boldsymbol{\delta}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \rho_i \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \Delta\Theta_2^*(\Theta_i^{-1} \rho_i \hat{h}_1) + \Delta\Theta_1(\Theta_i^{-1} \rho_i \hat{h}_2^*)] dV_i \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

根據上述二式的結果，針對一受到殘留應力影響之平板，其內部傳遞之熱彈聲波之波傳問題上，可利用已計算獲得的時諧解，求解平板受到外力輸入(例如探頭或雷射)所影響的頻率響應。此一計算過程主要分為兩個步驟：一為找出在相同頻率  $\omega$  下的時諧振動，兩個不同波數  $\xi_m$  與  $\xi_n$  之間的模態正交特性(mode orthogonality)；二為利用強迫振盪場(forced oscillation field)的正則模態展開法(normal mode expansion)，求解系統受到外界激

振影響後的物理場，此即頻率  $\omega$  的響應。

## 2.4.2 模態正交特性

回顧(2.78)式，改寫成微分型式(differential form)，並表示為

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ -\underline{\tilde{\mathbf{T}}}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 - \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* - \Delta\Theta_2^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_1) - \Delta\Theta_1(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_2^*) \right\} \\ & = \left\{ \rho_i \mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \rho_i \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \Delta\Theta_2^*(\Theta_i^{-1}\rho_i h_1) + \Delta\Theta_1(\Theta_i^{-1}\rho_i h_2^*) \right\}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

仿照 Auld 的推導流程，假設某一平板或層狀介質中的導波波傳方向為  $X_1$  方向，其波傳的 Sagittal 平面為  $X_1 X_3$  平面，在厚度或深度方向( $X_3$  方向)，具有幾何拘束與邊界連續的條件，由此可知，(2.79)式中的空間變數為  $(X_1, X_3)$ 。再者，在某一頻率  $\omega$  下的時諧振動 ( $e^{-i\omega t}$ )，考慮狀態(1)與狀態(2)皆為此一導波的特徵模態，並忽略介質中微體力與分佈熱源，即  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$  與  $h_1 = h_2 = 0$ 。在這些假設情況下，(2.79)式可簡化為

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \{ \} \equiv \frac{\partial}{\partial X_1} \{ \}_1 + \frac{\partial}{\partial X_3} \{ \}_3 = 0, \quad (2.80) \\ & \{ \} \equiv \left\{ -\underline{\tilde{\mathbf{T}}}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 - \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* - \Delta\Theta_2^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_1) - \Delta\Theta_1(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_2^*) \right\}, \end{aligned}$$

其中下標  $J$  代表向量場  $\{ \}$  的第  $J$  個元素，即  $\{ \}_J \equiv \hat{\mathbf{e}}_J \cdot \{ \}$ 。接下來，配合波傳方向為  $X_1$  方向 ( $e^{i\xi X_1}$ ) 的假設，兩狀態下之物理場  $\underline{\tilde{\mathbf{T}}}$ 、 $\mathbf{q}$ 、 $\mathbf{v}$  與  $\Delta\Theta$  的解型式可定義為

$$\square_1(X_1, X_3, \omega) \equiv \square_m(\xi_m, X_3, \omega) e^{i\xi_m X_1}, \quad (2.81a)$$

$$\square_2(X_1, X_3, \omega) \equiv \square_n(\xi_n, X_3, \omega) e^{i\xi_n X_1}, \quad (2.81b)$$

其中下標  $m$  與  $n$  分別代表導波的第  $m$  個與第  $n$  個特徵模態， $e^{i\xi_m X_1}$  與  $e^{i\xi_n X_1}$  分別代表波數為  $\xi_m$  與  $\xi_n$  且沿正  $X_1$  方向的波傳項。將(2.81a, b)式代入(2.80)式，並改寫為

$$\begin{aligned} & i(\xi_m - \xi_n^*) \left\{ -\underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n^* \cdot \mathbf{v}_m - \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_m \cdot \mathbf{v}_n^* - \Delta\Theta_n^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_m) - \Delta\Theta_m(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_n^*) \right\}_1 e^{i(\xi_m - \xi_n^*)X_1} \\ & = \frac{\partial}{\partial X_3} \left\{ \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n^* \cdot \mathbf{v}_m + \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_m \cdot \mathbf{v}_n^* + \Delta\Theta_n^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_m) + \Delta\Theta_m(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_n^*) \right\}_3 e^{i(\xi_m - \xi_n^*)X_1}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

將(2.82)式對變數  $X_3$  作積分，並在等號右端引入傳遞介質之橫截面(cross section)在  $X_3$  位置於「上端」(top)與「下端」(bottom)表面的邊界條件，此式可轉換成

$$i(\xi_m - \xi_n^*)4P_{m,n} = \left\{ \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n^* \cdot \mathbf{v}_m + \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_m \cdot \mathbf{v}_n^* + \Delta\Theta_n^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_m) + \Delta\Theta_m(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_n^*) \right\}_3 \Big|_{X_3=\text{bottom}}^{X_3=\text{top}}, \quad (2.83)$$

其中  $P_{m,n} = P_{m,n}(\xi_m, \xi_n, \omega)$  並定義為元素  $\{ \}$  對整個橫截面的厚度  $X_3$  方向作積分，即為

$$P_{m,n} \equiv \frac{1}{4} \int_{\text{section}}^{\text{cross}} \left\{ -\underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n^* \cdot \mathbf{v}_m - \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_m \cdot \mathbf{v}_n^* - \Delta\Theta_n^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_m) - \Delta\Theta_m(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_n^*) \right\}_1 dX_3. \quad (2.84)$$

若(2.83)式中，彈性邊界條件考慮為固定端(fixed-end)或曳力為零(traction-free)，

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \underline{\tilde{\mathbf{T}}} = \mathbf{0}, \quad \text{於} \quad X_3 = \text{top} \text{ 與 } \text{bottom} \text{ 時}, \quad (2.85)$$

以及熱性邊界條件考慮為等溫的(isothermal)或絕熱的(adiabatic)，

$$\Delta\Theta = 0 \quad \text{或} \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot (-\mathbf{q}) = 0, \quad \text{於} \quad X_3 = \text{top} \text{ 與 } \text{bottom} \text{ 時}. \quad (2.86)$$

可知(2.83)式的等號右端為零，則聲導波的模態正交關係為

$$i(\xi_m - \xi_n^*)P_{m,n} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{m,n} = 0, \quad \xi_m \neq \xi_n^*. \quad (2.87)$$

根據獲得波數  $\xi_m$  與  $\xi_n$  的數值，聲導波的模態編號  $m$  與  $n$  間關係以及  $P_{m,n}$  不為零的條件，可區分為下列三種關係：

- (1)  $\xi_m$  與  $\xi_n$  為實數：亦稱為波傳模態(propagating modes)

$$P_{m,n} = 0, \quad m \neq n \quad \Leftrightarrow \quad P_{m,m} \neq 0 \quad (\xi_n = \xi_m). \quad (2.88)$$

- (2)  $\xi_m$  與  $\xi_n$  為虛數：亦稱為非波傳模態(non-propagating modes)

$$P_{m,n} = 0, \quad m \neq -n \quad \Leftrightarrow \quad P_{m,-m} \neq 0 \quad (\xi_n = -\xi_m = \xi_{-m}). \quad (2.89)$$

- (3)  $\xi_m$  與  $\xi_n$  為複數：

$$P_{m,n} = 0, \quad m \neq n' \quad \Leftrightarrow \quad P_{m,m'} \neq 0 \quad (\xi_n = \xi_m^* = \xi_{m'}). \quad (2.90)$$

### 2.4.3 正則模態展開法

此章節是應用模態分析中的強迫振盪方法，求解在介質表面或是內部受到外界輸入源激發後的物理場。延續之前的時諧振動( $e^{-i\omega t}$ )及層狀結構外型的假設，並考慮了外界輸入項，回顧(2.79)式並寫為

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ -\tilde{\mathbf{T}}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* - \Delta\Theta_2^* (-\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_1) - \Delta\Theta_1 (-\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_2^*) \right\}_1, \\
& + \frac{\partial}{\partial X_3} \left\{ -\tilde{\mathbf{T}}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* - \Delta\Theta_2^* (-\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_1) - \Delta\Theta_1 (-\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_2^*) \right\}_3 \\
& = \left\{ \rho_i \mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{v}_1 + \rho_i \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* + \Delta\Theta_2^* (\Theta_i^{-1} \rho_i h_1) + \Delta\Theta_1 (\Theta_i^{-1} \rho_i h_2^*) \right\}. \quad (2.91)
\end{aligned}$$

根據(2.91)式所示，將狀態(1)視為受外界輸入源激發後的物理場，其源包含  $\mathbf{v}_1$ 、 $\Delta\Theta_1$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \tilde{\mathbf{T}}_1$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot (-\mathbf{q}_1)$ 、 $\mathbf{b}_1$  與  $h_1$ 。而狀態(2)視為導波的第  $n$  個特徵模態，同(2.81b)式所示，並令  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$  與  $h_2 = 0$ 。因此，兩狀態下之物理場的解型式可分別定義為

$$\square_1(X_1, X_3, \omega) \equiv \square(X_1, X_3, \omega), \quad (2.92a)$$

$$\square_1(X_1, X_3, \omega) \equiv \sum_m a_m(X_1, \omega) \square_m(\xi_m, X_3, \omega), \quad (2.92b)$$

$$\square_2(X_1, X_3, \omega) \equiv \square_n(\xi_n, X_3, \omega) e^{i\xi_n X_1}, \quad (2.92c)$$

其中  $a_m(X_1, \omega)$  為模態展開項的待定係數，其相乘的  $\square_m(\xi_m, X_3, \omega)$  為導波的第  $m$  個特徵模態。(2.92a)式代表介質表面或是內部外界輸入源，適用於括號  $\{ \}_3$  中  $\mathbf{v}_1$ 、 $\Delta\Theta_1$ 、 $\tilde{\mathbf{T}}_1$  與  $\mathbf{q}_1$ ，以及(2.91)式等號右端的  $\mathbf{b}_1$  與  $h_1$ 。(2.92b)式代表受激發後的物理場，以模態展開法近似，適用於括號  $\{ \}_1$  中  $\mathbf{v}_1$ 、 $\Delta\Theta_1$ 、 $\tilde{\mathbf{T}}_1$  與  $\mathbf{q}_1$ 。(2.92c)式代表作參考用的特徵模態，適用於所有的狀態(2)。將(2.92a-c)式代入(2.91)式，並對變數  $X_3$  作積分，整理可得

$$\sum_m 4P_{m,n} \left( \frac{\partial}{\partial X_1} - i\xi_n^* \right) a_m(X_1, \omega) = f_n^s(X_1, \omega) + f_n^v(X_1, \omega), \quad (2.93)$$

其中  $P_{m,n}$  的定義如同(2.84)式，等號右端的  $f_n^s(X_1, \omega)$  與  $f_n^v(X_1, \omega)$  分別代輸入的表面源(surface source)與體積源(volume source)並定義如下：

$$f_n^s(X_1, \omega) = \left\{ \tilde{\mathbf{T}}_n^* \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{T}}_1 \cdot \mathbf{v}_n^* + \Delta\Theta_n^* (-\Theta_i^{-1} \mathbf{q}) + \Delta\Theta (-\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_n^*) \right\}_3 \Big|_{X_3=\text{bottom}}^{X_3=\text{top}}, \quad (2.94)$$

$$f_n^v(X_1, \omega) = \int_{\text{cross section}} \left\{ \rho_i \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_n^* + \Delta\Theta_n^* (\Theta_i^{-1} \rho_i h) \right\} dX_3. \quad (2.95)$$

由於本論文所探討的熱彈耦合系統含有能量耗散的現象，在波傳表現上為代表傳遞的波數  $\xi_m$  含有虛部項，即波數  $\xi_m$  為複數。因此，引入上一節中(2.90)式的模態正交關係，當  $m = n'$  或  $\xi_n = \xi_m^* = \xi_{m'}$ ，可知存在  $P_{m,m'} \neq 0$ 。上述(2.93)可改寫為

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1} - i\xi_n\right)a_n(X_1, \omega) = \frac{1}{4P_{n,n'}} \left[ f_{n'}^s(X_1, \omega) + f_{n'}^v(X_1, \omega) \right], \quad (2.96)$$

稱之為模態振幅方程式(mode amplitude equation)。並配合  $\mathbf{v} = -i\omega\mathbf{u}$  與  $\mathbf{v}^* = i\omega\mathbf{u}^*$ ，以及(2.84)、(2.94)與(2.95)三式可改寫為

$$\begin{aligned} P_{n,n'} &= \frac{1}{4} \int_{\text{cross section}} \left\{ -\underline{\tilde{\mathbf{T}}}_{n'}^* \cdot \mathbf{v}_n - \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n \cdot \mathbf{v}_{n'}^* - \Delta\Theta_{n'}^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_n) - \Delta\Theta_n(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_{n'}^*) \right\} dX_3 \\ &= \frac{1}{4} \int_{\text{cross section}} \left\{ \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_{n'}^* \cdot (i\omega\mathbf{u}_n) - \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n \cdot (i\omega\mathbf{u}_{n'}^*) - \Delta\Theta_{n'}^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_n) - \Delta\Theta_n(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_{n'}^*) \right\} dX_3, \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} f_{n'}^s(X_1, \omega) &= \left\{ \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_{n'}^* \cdot \mathbf{v} + \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n \cdot \mathbf{v}_{n'}^* + \Delta\Theta_{n'}^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}) + \Delta\Theta(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_{n'}^*) \right\} \Big|_{X_3=\text{bottom}}^{X_3=\text{top}} \\ &= \left\{ -\underline{\tilde{\mathbf{T}}}_{n'}^* \cdot (i\omega\mathbf{u}) + \underline{\tilde{\mathbf{T}}}_n \cdot (i\omega\mathbf{u}_{n'}^*) + \Delta\Theta_{n'}^*(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}) + \Delta\Theta(-\Theta_i^{-1}\mathbf{q}_{n'}^*) \right\} \Big|_{X_3=\text{bottom}}^{X_3=\text{top}}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} f_{n'}^v(X_1, \omega) &= \int_{\text{cross section}} \left\{ \rho_i \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_{n'}^* + \Delta\Theta_{n'}^*(\Theta_i^{-1}\rho_i \hat{h}) \right\} dX_3 \\ &= \int_{\text{cross section}} \left\{ \rho_i \mathbf{b} \cdot (i\omega\mathbf{u}_{n'}^*) + \Delta\Theta_{n'}^*(\Theta_i^{-1}\rho_i \hat{h}) \right\} dX_3, \end{aligned} \quad (2.99)$$

其中  $P_{n,n'} = P_{n,n'}(\xi_n, \omega)$ ，相當為導波之第  $n$  個特徵模態沿正  $X_1$  方向傳遞之每單位長度的時間平均功率流密度(time-average power flow per unit width)。此外，再由(2.96)式的微分型式可知，它屬於一階線性非齊次微分方程式，其特解為

$$a_n(X_1, \omega) = \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ \int_{X_1} f_{n'}^s(\eta_1, \omega) e^{-i\xi_n \eta_1} d\eta_1 + \int_{X_1} f_{n'}^v(\eta_1, \omega) e^{-i\xi_n \eta_1} d\eta_1 \right\} e^{i\xi_n X_1}, \quad (2.100)$$

其中括號  $\{\dots\}$  內須對表面源  $f_{n'}^s(X_1, \omega)$  與體積源  $f_{n'}^v(X_1, \omega)$  在  $X_1$  軸上的作用範圍作積分。根據(2.96)式所示， $e^{i\xi_n X_1}$  代表波數為  $\xi_n$  且沿正  $X_1$  方向的波傳項，而  $\frac{1}{4P_{n,n'}} \{\dots\}$  相當於此項的振幅項，振幅大小為  $|\frac{1}{4P_{n,n'}} \{\dots\}|$ 。最後，將(2.100)式代入(2.92b)式，即可獲得外界輸入源激發後的物理場。在接下第 3.6.2 節中，則是應用此節之內容，並配合所照射的調制雷射熱源，求解因熱彈耦合效應所激發光聲訊號。

## 第三章 光熱效應之波傳理論

光聲光熱效應的含意是指物質吸收光能量而激發出聲波的效應，本文是將光源當作一個方便且可精確控制的加熱型式來使用。因此，如圖 3.1 所示，將調制雷射光假設為光源，考慮試件的表面為自由表面，在表面局部加熱而生成時諧的彈性波與熱波。物理模型須藉由具殘留應力之熱彈耦合的統御與本構方程式來建立，並以層狀介質熱彈波傳理論探討薄膜結構殘留應力的光聲效應。

此一章節主要分為五大部分：第一部分是說明原座標系統為配合在水平  $X_1X_2$  平面上之波傳方向所作的座標轉換；第二部分則是推導經座標轉換後的熱彈耦合本構與統御方程式；第三部分是以平面波波傳理論推導出熱彈耦合的 Christoffel 方程式及其相速度表示式；第四部分以在層狀介質中的傳遞導波波傳理論推導出平板導波的頻散及衰減的特徵方程式；最後，第五部分是利用第 2.4 節的互置理論來推導模態正交歸一條件以及正則模態展開法，並配合所描述調制熱源輸入的 Gauss 外形及其空間的 Fourier 轉換，求解試件表面受到熱源輸入而激發的光聲訊號頻率響應。

### 3.1 熱源輸入及其傅立葉積分轉換

如圖 3.1 所示，考慮一個範圍為  $-\infty < X_1, X_2 < \infty$  與  $-h \leq X_3 \leq h$  的平板，而且藉由強度調制的雷射光作激發。首先，將雷射考慮為一個  $TEM_{00}$  模態的光束，其輸出功率為  $I_0$  (單位為 W)，半徑為  $a_0$ ，且功率強度的空間分佈函數屬於二維 Gaussian 分佈。此外，光束半徑  $a_0$  的大小，一般定義為光束中心軸 (beam axis) 至光強度大小降至峰值  $1/e^2$  ( $\approx 13.5\%$ ) 之位置的距離，幾何示意圖可見如圖 3.2。因此，雷射光於試件表面  $X_3 = 0$  處的輸入熱源  $q_{in}(X_1, X_2, t)$  可表示為

$$q_{in}(X_1, X_2, t) = (1-R)I_0 g(X_1, X_2) f(t), \quad (3.1)$$

其中  $R$  為試件的光學反射係數 (optical reflectivity)。空間分佈函數  $g(X_1, X_2)$  假設為 [105]

$$g(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi a_0^2} \exp\left(-2 \frac{X_1^2 + X_2^2}{a_0^2}\right), \quad (3.2)$$

且此函數對二維無限空間的積分大小為 1，即： $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = 1$ 。時間變化曲線(temporal profile)  $f(t)$  則是根據雷射光的輸入型式而有所不同，大致區分為連續波(continuous wave, CW)與脈衝(pulse)兩種型式。首先，對於一連續波型式之雷射，其  $f(t)$  可假設為一含有  $n$  個脈衝的調制序列(modulated train)，其函數表示為[164]

$$f(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\omega_c t)] \cdot [1 - H(t - n/f_c)], \quad (t \geq 0) \quad (3.3)$$

其中  $\omega_c = 2\pi f_c$  且  $f_c$  為調制頻率(modulated frequency)，及  $H(t)$  代表 Heaviside 單位步階(unit step)函數。其次，對於一脈衝型式之雷射，其  $f(t)$  可假設為 skew-Gaussian 函數，其函數表示為[105, 164]

$$f(t) = \frac{8t^3}{\tau_r^4} \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_r^2}\right), \quad (t \geq 0) \quad (3.4)$$

其中  $\tau_r$  為上升時間(rise time)，且此函數對時間  $t$  的積分大小為 1，即： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$ 。然而，一般脈衝型式之雷射只提供在一個脈衝時間(pulse duration)  $\tau_p$  內輸入總能量  $E_p$  (單位為 Joule) 的數據，因此，回顧(3.1)式，其輸出功率  $I_0$  可近似表示為  $I_0 \approx 0.94 E_p / \tau_p$ ，其中一個脈衝時間  $\tau_p$  約為上升時間  $\tau_r$  的兩倍，即  $\tau_p = 2\tau_r$ 。

對於一層狀結構中聲導波的波傳問題，一般會將原本的空間-時間域  $(X_1, X_2, t)$  轉換至波數-頻率域  $(\xi_1, \xi_2, \omega)$  與  $(\xi, X_2, \omega)$  下作分析與討論，因此，將(3.1)式轉換改寫為

$$Q_m(\xi_1, \xi_2, \omega) = (1-R) I_0 G(\xi_1, \xi_2) F(\omega), \quad (\text{二維}) \quad (3.5)$$

$$Q'_m(\xi, X_2, \omega) = (1-R) I_0 G'(\xi, X_2) F(\omega), \quad (\text{一維}) \quad (3.5')$$

其中(3.5)式的  $G(\xi_1, \xi_2)$  是屬於  $g(X_1, X_2)$  的二維 Fourier 轉換，而(3.5')式的  $G'(\xi, X_2)$  則是屬於  $g(X_1, X_2)$  對變數  $X_1$  的一維 Fourier 轉換。因此，空間域  $g(X_1, X_2)$  與波數域  $G(\xi_1, \xi_2)$  間的 Fourier 積分轉換對之型式可表示如下

$$G(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}[g(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2) e^{-i(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2)} dX_1 dX_2, \quad (3.6a)$$

$$g(X_1, X_2) = \mathcal{F}^{-1}[G(\xi_1, \xi_2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1, \xi_2) e^{i(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.6b)$$

空間域  $g(X_1, X_2)$  與波數域  $G'(\xi, X_2)$  間的 Fourier 積分轉換對之型式可表示如下

$$G'(\xi, X_2) = \mathcal{F}[g(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2) e^{-i\xi X_1} dX_1, \quad (3.6'a)$$

$$g(X_1, X_2) = \mathcal{F}^{-1}[G'(\xi, X_2)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G'(\xi, X_2) e^{i\xi X_1} d\xi. \quad (3.6'b)$$

以及時間域  $f(t)$  與頻率域  $F(\omega)$  間的 Fourier 積分轉換對之型式可表示如下

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (3.7a)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.7b)$$

其中  $\omega$  為角頻率， $\xi_j$  為角波數向量以及  $\xi_j = \xi n_j$  且  $n_j$  為方向向量，其與頻率  $f$  與波數  $k$  的關係分別為  $\omega = 2\pi f$  與  $\xi = 2\pi k$ 。將已知的(3.2)式代入(3.6a)與(3.6'a)式，可得

$$G(\xi_1, \xi_2) = \exp\left(-\frac{a_0^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{8}\right), \quad (3.8)$$

$$G'(\xi, X_2) = \exp\left(-\frac{a_0^2 \xi^2}{8}\right) \cdot \frac{\sqrt{2/\pi}}{a_0} \exp\left(-2\frac{X_2^2}{a_0^2}\right). \quad (3.8')$$

對於一個連續波型式之雷射，將(3.3)式代入(3.7a)式，可得

$$F(\omega) = \frac{1}{2} i\omega (1 - e^{i\omega t_r}) \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_c^2} \right). \quad (3.9)$$

對於一個脈衝型式之雷射，將(3.4)式代入(3.7a)式，可得

$$F(\omega) = (1 + \varpi^2) - \sqrt{\pi} \varpi \left(\frac{3}{2} + \varpi^2\right) [1 - \text{erf}(\varpi)] e^{\varpi^2}, \quad (3.10)$$

其中  $\varpi(\omega) = \frac{-i\omega t_r}{2\sqrt{2}}$ ，以及誤差函數(error function)  $\text{erf}(\varpi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\varpi} e^{-x^2} dx$ 。由(3.1)與(3.5)式可發現  $q_{\text{in}}(X_1, X_2, t)$  與  $Q_{\text{in}}(\xi_1, \xi_2, \omega)$  間 Fourier 積分轉換的目的，是為了在層狀介質矩陣計算時可當作一個邊界外力，計算出某一厚度  $X_3$  位置時在波數-頻率域  $(\xi_1, \xi_2, \omega)$  的狀態向量，利用正則模態展開法將其轉換至空間-頻率域  $(X_1, X_2, \omega)$  上，即在平面中某一位置的頻率響應，此外，亦可利用逆 Fourier 轉換獲得其時域訊號。

## 3.2 水平 $X_1X_2$ 平面之座標轉換

此一小節是為了說明為何要將上一章所獲得的統御與本構方程式，針對水平  $X_1X_2$  平面作旋轉角度  $\theta$  的座標轉換。本論文主要是針對一個平板或層狀結構去求解一個三維波傳問題，其中在  $X_1X_2$  平面上的任一方向為水平方向， $X_3$  軸為厚度或深度方向。在此一問題中，由於在  $X_3$  方向上會受到此一結構的幾何外形之拘束，在水平方向上的波傳會出現頻散的現象。因此，一般作法是會將其數學模型簡化成朝某一水平方向上傳遞的二維波傳問題，且此一波傳方向與  $X_3$  方向所構成平面稱之為 Sagittal 平面。

根據 Auld [121] 在能量與功的「互置定理」方面的推導過程中，假設此一波傳方向為  $X_1$  方向，其波傳的 Sagittal 平面為  $X_1X_3$  平面。此假設的好處是會簡化後續在「模態正交歸一」以及「正則模態展開」上的推導，尤其針對一階線性非齊次微分方程式，只需要考慮一維求解問題而非二維求解問題。而且，在物理意義上，藉此方法可瞭解材料內部沿著  $X_1$  方向傳遞的導波，其不同模態間在  $X_1X_3$  平面上的能量分佈及功率流傳輸。因此，將此方法應用至本論文的熱彈耦合模型上，利用此一優點簡化後續的推導。

### 3.2.1 立方性或等向性材料之假設

承續第 2.3.3 節中材料常數  $\bar{c}_{IJKL}$ 、 $\bar{\lambda}_{IJ}$ 、 $\bar{\alpha}$  與  $\bar{K}_{IJ}$  的結果，同(2.63a-c)與(2.65)式所示，在忽略自然狀態與初始狀態間的溫度差(即  $\Theta_i = \Theta_0$ )，以及高階的熱常數  $\alpha'$  與 2 個熱壓常數  $\lambda'_{IJKL}$  與  $\lambda''_{IJ}$  之條件下，對於一個立方性(cubic)或等向性(isotropic)之材料，假設初始應力  $T_{IJ}^i$  只考慮水平軸向應力且不考慮剪應力，當  $I \neq J$  時  $T_{IJ}^i = 0$  以及  $T_{33}^i = 0$ ，如圖 3.3 所示，配合(2.64)式之關係， $T_{IJ}^i = c_{IJKL} u_{K,L}^i$ ，可求得初始位移梯度  $u_{I,J}^i$  為

$$u_{1,1}^i = \frac{c_{11}T_1^i + c_{12}(T_1^i - T_2^i)}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}, \quad (3.11a)$$

$$u_{2,2}^i = \frac{c_{11}T_2^i + c_{12}(T_2^i - T_1^i)}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}, \quad (3.11b)$$

$$u_{3,3}^i = \frac{-c_{12}(T_1^i + T_2^i)}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}, \quad (3.11c)$$

$$u_{2,3}^i = u_{3,2}^i = u_{1,3}^i = u_{3,1}^i = u_{1,2}^i = u_{2,1}^i = 0, \quad (3.11d)$$

其中  $T_1^i \equiv T_{11}^i$  與  $T_2^i \equiv T_{22}^i$ 。在上述(3.11a-d)式，此材料受水平軸向初始應力的作用過程中，假設忽略了剪應變的存在。因此，利用(2.63a-c)式可求得有效的彈性常數  $\bar{c}_{PQ}$  為

$$\bar{c}_{11} = (1 - e_{NN}^i) c_{11} + c'_{112} e_{NN}^i + (4c_{11} + c'_{111} - c'_{112}) u_{1,1}^i, \quad (3.12a)$$

$$\bar{c}_{22} = (1 - e_{NN}^i) c_{11} + c'_{112} e_{NN}^i + (4c_{11} + c'_{111} - c'_{112}) u_{2,2}^i, \quad (3.12b)$$

$$\bar{c}_{33} = (1 - e_{NN}^i) c_{11} + c'_{112} e_{NN}^i + (4c_{11} + c'_{111} - c'_{112}) u_{3,3}^i, \quad (3.12c)$$

$$\bar{c}_{23} = (1 - e_{NN}^i) c_{12} + (2c_{12} + c'_{112}) e_{NN}^i - (2c_{12} + c'_{112} - c'_{123}) u_{1,1}^i, \quad (3.12d)$$

$$\bar{c}_{13} = (1 - e_{NN}^i) c_{12} + (2c_{12} + c'_{112}) e_{NN}^i - (2c_{12} + c'_{112} - c'_{123}) u_{2,2}^i, \quad (3.12e)$$

$$\bar{c}_{12} = (1 - e_{NN}^i) c_{12} + (2c_{12} + c'_{112}) e_{NN}^i - (2c_{12} + c'_{112} - c'_{123}) u_{3,3}^i, \quad (3.12f)$$

$$\bar{c}_{44} = (1 - e_{NN}^i) c_{44} + (2c_{44} + c'_{155}) e_{NN}^i - (2c_{44} + c'_{155} - c'_{144}) u_{1,1}^i, \quad (3.12g)$$

$$\bar{c}_{55} = (1 - e_{NN}^i) c_{44} + (2c_{44} + c'_{155}) e_{NN}^i - (2c_{44} + c'_{155} - c'_{144}) u_{2,2}^i, \quad (3.12h)$$

$$\bar{c}_{66} = (1 - e_{NN}^i) c_{44} + (2c_{44} + c'_{155}) e_{NN}^i - (2c_{44} + c'_{155} - c'_{144}) u_{3,3}^i, \quad (3.12i)$$

$$\bar{c}_{14} = \bar{c}_{15} = \bar{c}_{16} = \bar{c}_{24} = \bar{c}_{25} = \bar{c}_{26} = \bar{c}_{34} = \bar{c}_{35} = \bar{c}_{36} = \bar{c}_{45} = \bar{c}_{46} = \bar{c}_{56} = 0; \quad (3.12j)$$

有效的熱壓常數  $\bar{\lambda}_p$  為

$$\bar{\lambda}_1 = (1 - e_{NN}^i) \lambda + 2\lambda u_{1,1}^i, \quad (3.13a)$$

$$\bar{\lambda}_2 = (1 - e_{NN}^i) \lambda + 2\lambda u_{2,2}^i, \quad (3.13b)$$

$$\bar{\lambda}_3 = (1 - e_{NN}^i) \lambda + 2\lambda u_{3,3}^i, \quad (3.13c)$$

$$\bar{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_5 = \bar{\lambda}_6 = 0; \quad (3.13d)$$

有效的熱常數  $\bar{\alpha}$  為

$$\bar{\alpha} = (1 - e_{NN}^i) \alpha, \quad (3.14)$$

$$\bar{\alpha} = \rho_i C_E / \Theta_i = \rho_i C_E / \Theta_0. \quad (3.14')$$

同理，利用(2.64)式亦可求得有效的熱傳導常數  $\bar{k}_p$  為

$$\bar{k}_1 = (1 - e_{NN}^i) k + 2k u_{1,1}^i, \quad (3.15a)$$

$$\bar{k}_2 = (1 - e_{NN}^i)k + 2ku_{2,2}^i, \quad (3.15b)$$

$$\bar{k}_3 = (1 - e_{NN}^i)k + 2ku_{3,3}^i, \quad (3.15c)$$

$$\bar{k}_4 = \bar{k}_5 = \bar{k}_6 = 0. \quad (3.15d)$$

$c_{PQ}$  與  $c'_{PQR}$  為等向性材料在自然狀態下原始的二階及三階彈性常數，以及  $\lambda$ 、 $\alpha$  與  $k$  為原始的熱壓常數、熱常數與熱傳導常數。

根據第二章的定義，我們可知在初始狀態的質量密度  $\rho_i$  與單位體積  $dV^i$  分別為

$$\rho_i = (1 - e_{NN}^i)\rho_0, \quad dV^i = (1 + e_{NN}^i)dV^0. \quad (3.16a, b)$$

由(3.11a-c)式可計算獲得由自然狀態至初始狀態之單位體積變化率  $e_{NN}^i$  為

$$e_{NN}^i = u_{1,1}^i + u_{2,2}^i + u_{3,3}^i = \frac{T_1^i + T_2^i}{c_{11} + 2c_{12}}. \quad (3.17)$$

相反地，亦可獲得質量密度變化率為  $(-e_{NN}^i)$ 。因此，由上式可知材料若是受到任一水平軸向應力  $T_1^i$  或  $T_2^i$ ，皆會影響到質量密度或單位體積的大小。

### 3.2.2 經座標轉換的本構關係與熱傳導方程式

如圖 3.3 所示，考慮一個範圍為  $-\infty < X_1, X_2 < \infty$  與  $-h \leq X_3 \leq h$  的平板，於  $X_1$  與  $X_2$  方向分別施予軸向的初始預應力  $T_1^i$  與  $T_2^i$ ，而落在水平  $X_1X_2$  平面上的箭頭  $\mathbf{n}$  代表平面波的波傳方向。承續第 3.2.1 節的動機，對原始座標系統  $O-X_1X_2X_3$  的  $X_3$  軸旋轉  $\theta$  角度，並將  $X_1$  軸並與箭頭  $\mathbf{n}$  重合，代表平面波的波傳方向即為  $X_1$  方向，如圖 3.4 所示。為了區分在座標轉換前後兩個座標系統，將座標轉換前的符號皆加上上標「o」，代表原始的意思，其座標系統表示為  $O-X_1^oX_2^oX_3^o$ ，而座標轉換後的座標系統則維持為  $O-X_1X_2X_3$ 。同理，此一區分亦包括初始應力以及受其影響的等效材料係數，其表示整理如下：

$$\text{轉換前}(O-X_1^oX_2^oX_3^o): \quad \bar{c}_{IJKL}^o, T_{IJ}^o, \bar{\lambda}_{IJ}^o, \bar{k}_{IJ}^o, \bar{\alpha}^o;$$

$$\text{轉換後}(O-X_1X_2X_3): \quad \bar{c}_{IJKL}, T_{IJ}^i, \bar{\lambda}_{IJ}, \bar{k}_{IJ}, \bar{\alpha}.$$

根據本構關係(2.61a, b)與熱傳導方程式(2.30c)，座標轉換前的結果分別表示如下：

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ \Xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^o & \bar{c}_{12}^o & \bar{c}_{13}^o & 0 & 0 & 0 & -\bar{\lambda}_1^o \\ \bar{c}_{12}^o & \bar{c}_{22}^o & \bar{c}_{23}^o & 0 & 0 & 0 & -\bar{\lambda}_2^o \\ \bar{c}_{13}^o & \bar{c}_{23}^o & \bar{c}_{33}^o & 0 & 0 & 0 & -\bar{\lambda}_3^o \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44}^o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55}^o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66}^o & 0 \\ \hline \bar{\lambda}_1^o & \bar{\lambda}_2^o & \bar{\lambda}_3^o & 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ \Delta\Theta \end{Bmatrix}, \quad (3.18a)$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_1^o & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_2^o & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\Theta_{,1} \\ \Delta\Theta_{,2} \\ \Delta\Theta_{,3} \end{Bmatrix}, \quad (3.18b)$$

其中  $T_1 \equiv T_{11}$ 、 $T_2 \equiv T_{22}$ 、 $T_3 \equiv T_{33}$ 、 $T_4 \equiv T_{23}$ 、 $T_5 \equiv T_{13}$  與  $T_6 \equiv T_{12}$  為應力成分，以及  $S_1 \equiv u_{1,1}$ 、 $S_2 \equiv u_{2,2}$ 、 $S_3 \equiv u_{3,3}$ 、 $S_4 \equiv u_{3,2} + u_{2,3}$ 、 $S_5 \equiv u_{1,3} + u_{3,1}$  與  $S_6 \equiv u_{2,1} + u_{1,2}$  為應變成分。接著，根據上述座標轉換內容，並參考圖 3.4 所示，兩個座標系統  $O-X_1^o X_2^o X_3^o$  與  $O-X_1 X_2 X_3$  間的轉換關係為

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^o \\ X_2^o \\ X_3^o \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{X}^o \quad (3.19)$$

其中  $m = \cos \theta$  與  $n = \sin \theta$ ，且  $\theta$  為  $X_1$  軸與  $X_1^o$  軸之夾角。此一轉換矩陣為一個正交矩陣 (orthogonal matrix)，具有  $\det(\mathbf{R}) = 1$  (體積不變) 以及  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  的特性。根據二階與四階張量對  $X_3$  軸 (或  $X_3^o$  軸) 旋轉  $\theta$  角度的座標轉換公式，可得轉換後之彈性常數  $\bar{c}_{IJKL}$  與轉換前之彈性常數  $\bar{c}_{IJKL}^o$  之間的關係為

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11} &= \bar{c}_{11}^o m^4 + \bar{c}_{22}^o n^4 + 2(\bar{c}_{12}^o + 2\bar{c}_{66}^o) m^2 n^2, \\ \bar{c}_{22} &= \bar{c}_{11}^o n^4 + \bar{c}_{22}^o m^4 + 2(\bar{c}_{12}^o + 2\bar{c}_{66}^o) m^2 n^2, \\ \bar{c}_{33} &= \bar{c}_{33}^o, \\ \bar{c}_{23} &= \bar{c}_{23}^o m^2 + \bar{c}_{13}^o n^2, \\ \bar{c}_{13} &= \bar{c}_{23}^o n^2 + \bar{c}_{13}^o m^2, \\ \bar{c}_{12} &= \bar{c}_{12}^o (m^4 + n^4) + (\bar{c}_{11}^o + \bar{c}_{22}^o - 4\bar{c}_{66}^o) m^2 n^2, \\ \bar{c}_{44} &= \bar{c}_{44}^o m^2 + \bar{c}_{55}^o n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{55} &= \bar{c}_{44}^0 n^2 + \bar{c}_{55}^0 m^2, \\
\bar{c}_{66} &= \bar{c}_{66}^0 (m^2 - n^2)^2 + (\bar{c}_{11}^0 + \bar{c}_{22}^0 - 2\bar{c}_{12}^0) m^2 n^2, \\
\bar{c}_{16} &= [(\bar{c}_{12}^0 + 2\bar{c}_{66}^0 - \bar{c}_{11}^0) m^2 - (\bar{c}_{12}^0 + 2\bar{c}_{66}^0 - \bar{c}_{22}^0) n^2] mn, \\
\bar{c}_{26} &= [(\bar{c}_{12}^0 + 2\bar{c}_{66}^0 - \bar{c}_{11}^0) n^2 - (\bar{c}_{12}^0 + 2\bar{c}_{66}^0 - \bar{c}_{22}^0) m^2] mn, \\
\bar{c}_{36} &= (\bar{c}_{23}^0 - \bar{c}_{13}^0) mn, \\
\bar{c}_{45} &= (\bar{c}_{44}^0 - \bar{c}_{55}^0) mn.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

轉換後之熱彈常數  $\bar{\lambda}_{IJ}$  與轉換前之熱彈常數  $\bar{\lambda}_{IJ}^0$  之間的關係為

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_1 &= \bar{\lambda}_1^0 m^2 + \bar{\lambda}_2^0 n^2, \\
\bar{\lambda}_2 &= \bar{\lambda}_1^0 n^2 + \bar{\lambda}_2^0 m^2, \\
\bar{\lambda}_3 &= \bar{\lambda}_3^0, \\
\bar{\lambda}_6 &= (\bar{\lambda}_2^0 - \bar{\lambda}_1^0) mn.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

轉換後之熱傳導常數  $\bar{k}_{IJ}$  與轉換前之熱傳導常數  $\bar{k}_{IJ}^0$  之間的關係為

$$\begin{aligned}
\bar{k}_1 &= \bar{k}_1^0 m^2 + \bar{k}_2^0 n^2, \\
\bar{k}_2 &= \bar{k}_1^0 n^2 + \bar{k}_2^0 m^2, \\
\bar{k}_3 &= \bar{k}_3^0, \\
\bar{k}_6 &= (\bar{k}_2^0 - \bar{k}_1^0) mn.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

轉換後之熱常數  $\bar{\alpha}$  與轉換前之熱常數  $\bar{\alpha}^0$  之間的關係為

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^0. \tag{3.23}$$

轉換後之初始應力  $T_{IJ}^i$  與轉換前之初始應力  $T_{IJ}^{oi}$  之間的關係為

$$\begin{aligned}
T_1^i &= T_1^{oi} m^2 + T_2^{oi} n^2, \\
T_2^i &= T_1^{oi} n^2 + T_2^{oi} m^2, \\
T_3^i &= T_3^{oi} = 0, \\
T_6^i &= (T_2^{oi} - T_1^{oi}) mn.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

根據(3.20)至(3.23)式獲得轉換後存在之係數，經座標轉換後的本構關係與熱傳導方程式分別表示如下：

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ \Xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & \bar{c}_{16} & -\bar{\lambda}_1 \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & \bar{c}_{26} & -\bar{\lambda}_2 \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & \bar{c}_{36} & -\bar{\lambda}_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} & 0 & 0 \\ \hline \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{36} & 0 & 0 & \bar{c}_{66} & -\bar{\lambda}_6 \\ \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_6 & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ \Delta\Theta \end{Bmatrix}, \quad (3.25a)$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_6 & 0 \\ \bar{k}_6 & \bar{k}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\Theta_{,1} \\ \Delta\Theta_{,2} \\ \Delta\Theta_{,3} \end{Bmatrix}. \quad (3.25b)$$

比較上述(3.18a, b)與(3.25a, b)式可發現，係數 $\bar{c}_{16}$ 、 $\bar{c}_{26}$ 、 $\bar{c}_{36}$ 、 $\bar{c}_{45}$ 、 $\bar{\lambda}_6$ 、 $\bar{k}_6$ 與 $T_6^i$ 是因為座標轉換而額外出現的。雖然此一作法會額外增加許多係數，但是若假設此一波傳方向為 $X_1$ 方向，可令 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} = 0$ ，可將空間變數簡化為 $X_1$ 與 $X_3$ 兩個變數，這對於接下的推導仍是有好處的。綜合上述兩座標系統的描述可知，座標轉換前(如圖 3.3 所示)，材料的座標系統固定及改變波傳方向 $\mathbf{n}$ ，優點是材料無須作座標轉換且推導方式直觀，缺點是不易去分析 Sagittal 平面上的波傳特徵。其次，座標轉換後(如圖 3.4 所示)，波傳方向 $\mathbf{n}$ 固定及改變材料的座標系統，優點是容易分析 Sagittal 平面上的波傳特徵，缺點是材料須經座標轉換且手續繁複。因此，為配合 Auld [121]在能量與功的「互置定理」方面的推導，選擇後者的座標系統描述。

### 3.2.3 特殊情況

回顧(3.20)至(3.24)式，當 $X_1$ 軸與 $X_1^0$ 軸之夾角 $\theta$ 等於 $0^\circ$ 與 $90^\circ$ 時， $m$ 與 $n$ 其中一者會等於零，可得下列特殊情況：

$$\bar{c}_{16} = \bar{c}_{26} = \bar{c}_{36} = \bar{c}_{45} = \bar{\lambda}_6 = \bar{k}_6 = T_6^i = 0. \quad (3.26)$$

此外，當 $\theta = 45^\circ$ 時，並配合等雙軸預應力(equi-biaxial pre-stress)的條件，即 $T_1^{oi} = T_2^{oi}$ ，可得在材料係數上的一些特殊情況：

$$\bar{c}_{11}^0 = \bar{c}_{22}^0, \quad \bar{c}_{13}^0 = \bar{c}_{23}^0, \quad \bar{c}_{44}^0 = \bar{c}_{55}^0, \quad \bar{\lambda}_1^0 = \bar{\lambda}_2^0, \quad \bar{k}_1^0 = \bar{k}_2^0. \quad (3.27)$$

再代回(3.20)至(3.24)式後，亦可獲得同(3.26)式的結果。此結果會使(3.25a, b)式退化至與

(3.18a, b)式相同的型式。再者，上述特殊情況的判別，對於接下來有關微體波或是層狀結構導波波傳的推導的簡化上是有幫助的。

### 3.2.4 統御方程式

首先，根據第二章的具殘留應力的熱彈耦合理論，由於兩個座標系統  $O-X_1^0 X_2^0 X_3^0$  與  $O-X_1 X_2 X_3$  皆屬直角座標系統，其之間的轉換並不會改變統御方程式(2.30a, b)與熱傳導方程式(2.30c)的表現型式。因此，將(2.61a, b)與(2.30c)式代入(2.30a, b)式，可得

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left\{ (\bar{c}_{IJKL} + \delta_{IK} T_{JL}^i) \frac{\partial u_K}{\partial X_L} - \bar{\lambda}_{IJ} \Delta \Theta \right\} + \rho_i b_I = \rho_i \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (3.28a)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left\{ \bar{k}_{JL} \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial X_L} \right\} + \rho_i \dot{h} = \Theta_i \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{\lambda}_{KL} \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \bar{\alpha} \Delta \Theta \right\}, \quad (3.28b)$$

其中  $\rho_i = \rho^i$ ， $\Theta_i = \Theta^i$ ， $\rho_i b_I = \rho_i b_I^f$  以及  $\rho_i \dot{h} = \rho_i \dot{h}^f$ 。假設試件中所受的初始應力  $T_{IJ}^i$  與初始應變  $S_{IJ}^i$  是均勻的，在初始狀態時的材料特性是均質的，即材料常數不會因為所處位置不同而改變，不為空間  $X_J$  的函數，則(3.28a, b)式可改寫為

$$(\bar{c}_{IJKL} + \delta_{IK} T_{JL}^i) \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_J \partial X_L} - \bar{\lambda}_{IJ} \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial X_J} + \rho_i b_I = \rho_i \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (3.29a)$$

$$\bar{k}_{JL} \frac{\partial^2(\Delta \Theta)}{\partial X_J \partial X_L} - \Theta_i \bar{\lambda}_{KL} \frac{\partial u_K}{\partial t \partial X_L} + \rho_i \dot{h} = \Theta_i \bar{\alpha} \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial t}. \quad (3.29b)$$

假設將空間變數簡化為  $X_1$  與  $X_3$  兩個變數，可令  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} = 0$ ，配合上一節所獲得材料係數，

則(3.29a, b)式可展開整理如下：

$$\left\{ \bar{c}_{11}^{-T_1^i} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} + \bar{c}_{55}^{-T_3^i} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_3^2} \right\} + \left\{ \bar{c}_{16} \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} + \bar{c}_{45} \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_3^2} \right\} + (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1 \partial X_3} - \bar{\lambda}_1 \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial X_1} + \rho_i b_1 = \rho_i \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (3.30a)$$

$$\left\{ \bar{c}_{16} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} + \bar{c}_{45} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_3^2} \right\} + \left\{ \bar{c}_{66}^{-T_1^i} \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} + \bar{c}_{44}^{-T_3^i} \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_3^2} \right\} + (\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1 \partial X_3} - \bar{\lambda}_6 \frac{\partial(\Delta \Theta)}{\partial X_1} + \rho_i b_2 = \rho_i \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (3.30b)$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_3} + (\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1 \partial X_3} \\
& + \left\{ \bar{c}_{55}^{T_i} \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} + \bar{c}_{33}^{T_i} \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_3^2} \right\} - \bar{\lambda}_3 \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial X_3} + \rho_i b_3 = \rho_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (3.30c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Theta_i \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{\lambda}_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \bar{\lambda}_6 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \bar{\lambda}_3 \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right\} \\
& + \left\{ \bar{k}_1 \frac{\partial^2(\Delta\Theta)}{\partial X_1^2} + \bar{k}_3 \frac{\partial^2(\Delta\Theta)}{\partial X_3^2} \right\} + \rho_i \dot{h} = \Theta_i \bar{\alpha} \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial t}. \quad (3.30d)
\end{aligned}$$

其中有效的彈性常數受到初始應力之影響部分分別表示如下：

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{11}^{T_i} &= \bar{c}_{11} + T_1^i, & \bar{c}_{66}^{T_i} &= \bar{c}_{66} + T_1^i, & \bar{c}_{55}^{T_i} &= \bar{c}_{55} + T_1^i, \\
\bar{c}_{55}^{T_3} &= \bar{c}_{55} + T_3^i, & \bar{c}_{44}^{T_i} &= \bar{c}_{44} + T_3^i, & \bar{c}_{33}^{T_i} &= \bar{c}_{33} + T_3^i.
\end{aligned} \quad (3.31)$$

此外，在(3.30a)式中分佈於系統中的微體力  $\rho_i b_i$  與熱源  $\rho_i \dot{h}$  是屬於座標轉換後的結果，其與轉換前原始的微體力  $\rho_i b_i^0$  與熱源  $\rho_i \dot{h}^0$  之間的關係為

$$b_1 = b_1^0 m + b_2^0 n, \quad b_2 = b_2^0 m - b_1^0 n, \quad b_3 = b_3^0, \quad \dot{h} = \dot{h}^0. \quad (3.32)$$

### 3.2.5 Christoffel 方程式

將整個系統的物理場考慮為空間  $(X_1, X_3)$  與時間  $t$  的簡諧函數，其解可假設為

$$\begin{cases} u_i(X_1, X_3, t) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, t) \end{cases} = \begin{cases} U_1(\xi_1, \xi_3, \omega) \\ U_4(\xi_1, \xi_3, \omega) \end{cases} \exp[i(\xi_1 X_1 + \xi_3 X_3 - \omega t)], \quad (3.33)$$

其中  $\xi_1$  與  $\xi_3$  分別為沿  $X_1$  與  $X_3$  方向傳遞的角波數。在(3.31)式中，我們可將它視為一個 Fourier 轉換的簡易表示式，等號左端是空間-時間域  $(X_1, X_3, t)$  的函數，右端則是波數-頻率域  $(\xi_1, \xi_3, \omega)$  的函數。將上述的解型式分別代入(3.30a-d)式，並令  $\rho_i b_i = \rho_i \dot{h} = 0$ ，可獲得具初始應力之熱彈耦合的 Christoffel 方程式為

$$\begin{bmatrix} \xi^2 \bar{\Gamma}_{11} - \omega^2 \rho_i & \xi^2 \bar{\Gamma}_{12} & \xi^2 \bar{\Gamma}_{13} & i \xi \bar{\Lambda}_1 \\ \xi^2 \bar{\Gamma}_{12} & \xi^2 \bar{\Gamma}_{22} - \omega^2 \rho_i & \xi^2 \bar{\Gamma}_{23} & i \xi \bar{\Lambda}_2 \\ \xi^2 \bar{\Gamma}_{13} & \xi^2 \bar{\Gamma}_{23} & \xi^2 \bar{\Gamma}_{33} - \omega^2 \rho_i & i \xi \bar{\Lambda}_3 \\ \omega \Theta_i \xi \bar{\Lambda}_1 & \omega \Theta_i \xi \bar{\Lambda}_2 & \omega \Theta_i \xi \bar{\Lambda}_3 & \xi^2 \bar{K} - i \omega \Theta_i \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.34)$$

其中

$$\begin{aligned}
\xi^2 \bar{\Gamma}_{11} &= \xi_1^2 \bar{c}_{11}^{T_1^i} + \xi_3^2 \bar{c}_{55}^{T_3^i}, & \xi^2 \bar{\Gamma}_{23} &= \xi_1 \xi_3 (\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}), & \xi \bar{\Lambda}_1 &= \xi_1 \bar{\lambda}_1, \\
\xi^2 \bar{\Gamma}_{22} &= \xi_1^2 \bar{c}_{66}^{T_1^i} + \xi_3^2 \bar{c}_{44}^{T_3^i}, & \xi^2 \bar{\Gamma}_{13} &= \xi_1 \xi_3 (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}), & \xi \bar{\Lambda}_2 &= \xi_1 \bar{\lambda}_6, \\
\xi^2 \bar{\Gamma}_{33} &= \xi_1^2 \bar{c}_{55}^{T_1^i} + \xi_3^2 \bar{c}_{33}^{T_3^i}, & \xi^2 \bar{\Gamma}_{12} &= \xi_1^2 \bar{c}_{16} + \xi_3^2 \bar{c}_{45}, & \xi \bar{\Lambda}_3 &= \xi_3 \bar{\lambda}_3, \\
\xi^2 \bar{K} &= \xi_1^2 \bar{k}_1 + \xi_3^2 \bar{k}_3.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

由此可知，(3.34)式為變數 $(\omega, \xi)$ 型式的 Christoffel 方程式。它可根據不同的求解需要，例如微體波相速度以及平板導波波傳等問題，而轉化成其他型式的 Christoffel 方程式。

### 3.3 微體波的相速度

#### 3.3.1 $X_1 X_3$ 平面波傳

承續第 3.2.6 節，參考圖 3.4 中的紅色斜線區塊，其代表  $O-X_1 X_2 X_3$  座標系統上的  $X_1 X_3$  平面。假設向量  $[n_1, n_3]$  為在  $X_1 X_3$  平面上某一微體波(bulk wave)之波前(wave front)的單位波傳向量( $n_1^2 + n_3^2 = 1$ )。令  $\xi_1 = \xi n_1$  與  $\xi_3 = \xi n_3$ ，並利用  $\xi = \omega/c$  的關係，可將(3.34)式改寫為變數 $(\omega, c)$ 型式的 Christoffel 方程式：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} - c^2 \rho_i & \bar{\Gamma}_{12} & \bar{\Gamma}_{13} & c \bar{\Lambda}_1 \\ \bar{\Gamma}_{12} & \bar{\Gamma}_{22} - c^2 \rho_i & \bar{\Gamma}_{23} & c \bar{\Lambda}_2 \\ \bar{\Gamma}_{13} & \bar{\Gamma}_{23} & \bar{\Gamma}_{33} - c^2 \rho_i & c \bar{\Lambda}_3 \\ c \bar{\Lambda}_1 & c \bar{\Lambda}_2 & c \bar{\Lambda}_3 & -i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} - c^2 \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ (i/\omega)U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{3.36}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{11} &= n_1^2 \bar{c}_{11}^{T_1^i} + n_3^2 \bar{c}_{55}^{T_3^i}, & \bar{\Gamma}_{23} &= n_1 n_3 (\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}), & \bar{\Lambda}_1 &= n_1 \bar{\lambda}_1, \\
\bar{\Gamma}_{22} &= n_1^2 \bar{c}_{66}^{T_1^i} + n_3^2 \bar{c}_{44}^{T_3^i}, & \bar{\Gamma}_{13} &= n_1 n_3 (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}), & \bar{\Lambda}_2 &= n_1 \bar{\lambda}_6, \\
\bar{\Gamma}_{33} &= n_1^2 \bar{c}_{55}^{T_1^i} + n_3^2 \bar{c}_{33}^{T_3^i}, & \bar{\Gamma}_{12} &= n_1^2 \bar{c}_{16} + n_3^2 \bar{c}_{45}, & \bar{\Lambda}_3 &= n_3 \bar{\lambda}_3, \\
\bar{K} &= n_1^2 \bar{k}_1 + n_3^2 \bar{k}_3.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

已知  $X_1$  與  $X_1^0$  兩軸間角度  $\theta$  的變化皆隱含在每一材料係數裡面，因此，(3.37)式所列參數皆為  $\theta$  之函數。由(3.36)式推導出矩陣的行列式並將其整理成  $c^2$  的 4 次多項式為

$$A_8 c^8 + A_6 c^6 + A_4 c^4 + A_2 c^2 + A_0 = 0, \tag{3.38}$$

其中係數  $A_8$ 、 $A_6$ 、 $A_4$ 、 $A_2$  與  $A_0$  整理如下

$$A_8 = +\rho_i^3 \cdot \bar{\alpha}, \quad (3.39a)$$

$$A_6 = +\rho_i^3 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} \\ - \rho_i^2 \cdot [ \bar{\alpha} (\bar{\Gamma}_{11} + \bar{\Gamma}_{22} + \bar{\Gamma}_{33}) + (\bar{\Lambda}_1^2 + \bar{\Lambda}_2^2 + \bar{\Lambda}_3^2) ], \quad (3.39b)$$

$$A_4 = -\rho_i^2 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} (\bar{\Gamma}_{11} + \bar{\Gamma}_{22} + \bar{\Gamma}_{33}) \\ + \rho_i^1 \cdot [ \bar{\alpha} (\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{22} + \bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{33} + \bar{\Gamma}_{22} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{12}^2 - \bar{\Gamma}_{13}^2 - \bar{\Gamma}_{23}^2) \\ + \bar{\Lambda}_1^2 (\bar{\Gamma}_{22} + \bar{\Gamma}_{33}) - 2\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 \bar{\Gamma}_{12} \\ + \bar{\Lambda}_2^2 (\bar{\Gamma}_{11} + \bar{\Gamma}_{33}) - 2\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_3 \bar{\Gamma}_{13} \\ + \bar{\Lambda}_3^2 (\bar{\Gamma}_{11} + \bar{\Gamma}_{22}) - 2\bar{\Lambda}_2 \bar{\Lambda}_3 \bar{\Gamma}_{23} ], \quad (3.39c)$$

$$A_2 = +\rho_i^1 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} (\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{22} + \bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{33} + \bar{\Gamma}_{22} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{12}^2 - \bar{\Gamma}_{13}^2 - \bar{\Gamma}_{23}^2) \\ - \rho_i^0 \cdot [ \bar{\alpha} (\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{22} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{13}^2 \bar{\Gamma}_{22} - \bar{\Gamma}_{23}^2 \bar{\Gamma}_{11} + 2\bar{\Gamma}_{12} \bar{\Gamma}_{13} \bar{\Gamma}_{23}) \\ + \bar{\Lambda}_1^2 (\bar{\Gamma}_{22} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{23}^2) - 2\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 (\bar{\Gamma}_{12} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{13} \bar{\Gamma}_{23}) \\ + \bar{\Lambda}_2^2 (\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{13}^2) - 2\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_3 (\bar{\Gamma}_{13} \bar{\Gamma}_{22} - \bar{\Gamma}_{12} \bar{\Gamma}_{23}) \\ + \bar{\Lambda}_3^2 (\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{22} - \bar{\Gamma}_{12}^2) - 2\bar{\Lambda}_2 \bar{\Lambda}_3 (\bar{\Gamma}_{23} \bar{\Gamma}_{11} - \bar{\Gamma}_{12} \bar{\Gamma}_{13}) ], \quad (3.39d)$$

$$A_0 = -\rho_i^0 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} (\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{22} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{13}^2 \bar{\Gamma}_{22} - \bar{\Gamma}_{23}^2 \bar{\Gamma}_{11} + 2\bar{\Gamma}_{12} \bar{\Gamma}_{13} \bar{\Gamma}_{23}). \quad (3.39e)$$

已知某一固定頻率  $\omega$ ，由(3.38)式可知，在不同方向向量  $[n_1, n_3]$  上皆可求得出 4 個根，其代表了 4 個相速度(phase velocity)  $c_{ph}$ ，此結果並不一定屬於哪種單純類型的微體波，而是屬於相互耦合的微體波，例如 1 個 QL 波、2 個 QT 波與 1 個 Qth 波，分別稱之為準縱波(quasi-longitudinal wave)、準橫波(quasi-transverse wave)及準熱波(quasi-thermal wave)，它們之間的大小關係為： $\text{Re}(c_{QL}) > \text{Re}(c_{QT1}) > \text{Re}(c_{QT2}) > \text{Re}(c_{Qth})$ 。然而，為了方便討論熱彈耦合微體波之特性，可引用第 3.2.3 節中所述的特殊情況(3.26)，並將波傳向量  $[n_1, n_3]$  設定在  $X_1$  與  $X_3$  方向上，來探討受到不同初始應力情況下的微體波相速度並比較其差異。

應用第 3.2.3 節中所述的特殊情況，當  $\theta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  以及當  $\theta = 45^\circ$  且  $T_1^{oi} = T_2^{oi}$ ，由(3.37)式獲得  $\bar{\Gamma}_{12} = \bar{\Gamma}_{23} = \bar{\Lambda}_2 = 0$  之結果，並將(3.36)式中的  $X_2$  方向的位移  $u_2$  作去耦合

(decouple)的動作，並整理成下列二種情況：

(1) SH 波：

$$(\bar{\Gamma}_{22} - c^2 \rho_i) U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{\text{SH}} = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{22}}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{(n_1^2 \bar{c}_{66}^{T_1^i} + n_3^2 \bar{c}_{44}^{T_3^i})}{\rho_i}}. \quad (3.40a)$$

(2) QL 波、QT 波與 Qth 波：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} - c^2 \rho_i & \bar{\Gamma}_{13} & c\bar{\Lambda}_1 \\ \bar{\Gamma}_{13} & \bar{\Gamma}_{33} - c^2 \rho_i & c\bar{\Lambda}_3 \\ c\bar{\Lambda}_1 & c\bar{\Lambda}_3 & -i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} - c^2 \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ (i/\omega)U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.40b)$$

SH 波代表垂直於  $X_1 X_3$  平面運動之位移  $u_2$  的水平剪力波(shear horizontal wave)，而 QL 波、QT 波與 Qth 波分別為在  $X_1 X_3$  平面上運動之位移  $(u_1, u_3)$  與溫度差  $\Delta\Theta$  相互耦合的準縱波、準橫波與準熱波。如此可知，對於  $X_1 X_3$  平面來說，SH 波的運動是可被獨立分解出來，而 QL 波、QT 波與 Qth 波的運動是彼此相互耦合的；換言說，SH 波可視為面外波(out-of-plane wave)，QL 波、QT 波與 Qth 波則皆視為相互耦合的面內波(in-plane wave)。接著，由(3.40b)式可展開推導出矩陣的行列式並整理成  $c^2$  的 3 次多項式為

$$A'_6 c^6 + A'_4 c^4 + A'_2 c^2 + A'_0 = 0, \quad (3.41)$$

其中係數  $A'_6$ 、 $A'_4$ 、 $A'_2$  與  $A'_0$  整理如下

$$A'_6 = -\rho_i^2 \cdot \bar{\alpha}, \quad (3.42a)$$

$$A'_4 = -\rho_i^2 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} + \rho_i^1 \cdot [\bar{\alpha}(\bar{\Gamma}_{11} + \bar{\Gamma}_{33}) + (\bar{\Lambda}_1^2 + \bar{\Lambda}_3^2)], \quad (3.42b)$$

$$A'_2 = +\rho_i^1 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K}(\bar{\Gamma}_{11} + \bar{\Gamma}_{33}) - \rho_i^0 \cdot [\bar{\alpha}(\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{13}^2) + \bar{\Lambda}_1^2 \bar{\Gamma}_{33} + \bar{\Lambda}_3^2 \bar{\Gamma}_{11} - 2\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_3 \bar{\Gamma}_{13}], \quad (3.42c)$$

$$A'_0 = -\rho_i^0 \cdot i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K}(\bar{\Gamma}_{11} \bar{\Gamma}_{33} - \bar{\Gamma}_{13}^2). \quad (3.42d)$$

由(3.41)式可計算出此多項式的 3 個根，即為在  $X_1 X_3$  平面上 QL 波、QT 波與 Qth 波的速度，其大小關係為： $\text{Re}(c_{\text{QL}}) > \text{Re}(c_{\text{QT}}) > \text{Re}(c_{\text{Qth}})$ 。

### 3.3.2 $X_1$ 方向

如圖 3.4 所示，考慮波傳向量  $[n_1, n_3]$  在  $X_1$  方向，須令  $n_1 = 1$  與  $n_3 = 0$ ，並由(3.37)式可獲得  $\bar{\Gamma}_{13} = \bar{\Gamma}_{23} = \bar{\Lambda}_3 = 0$  之結果，將(3.36)式中的  $X_3$  方向的  $u_3$  位移去耦合(decouple)，並整理成下列二種情況：

(1) PT 波：

$$(\bar{\Gamma}_{33} - c^2 \rho_i) U_3 = 0 \Rightarrow c_{\text{PT}} = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{33}}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}^{T_i}}{\rho_i}}. \quad (3.43a)$$

(2) QL 波、QT 波與 Qth 波：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} - c^2 \rho_i & \bar{\Gamma}_{12} & c\bar{\Lambda}_1 \\ \bar{\Gamma}_{12} & \bar{\Gamma}_{22} - c^2 \rho_i & c\bar{\Lambda}_2 \\ c\bar{\Lambda}_1 & c\bar{\Lambda}_2 & -i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} - c^2 \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ (i/\omega)U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.43b)$$

PT 波代表沿  $X_1$  方向傳遞且垂直於  $X_1 X_2$  平面運動之位移  $u_3$  的純橫波(pure transverse wave)，而 QL 波、QT 波與 Qth 波分別為在  $X_1 X_2$  平面上運動之位移  $(u_1, u_2)$  與溫度差  $\Delta\Theta$  相互耦合的準縱波、準橫波與準熱波。同理，由(3.43b)式可推導出與(3.41)式相同的  $c^2$  之 3 次多項式，其係數可參考(3.42a-d)式之結果，再將參數  $\bar{\Gamma}_{13}$ 、 $\bar{\Gamma}_{33}$  與  $\bar{\Lambda}_3$  分別置換為  $\bar{\Gamma}_{12}$ 、 $\bar{\Gamma}_{22}$  與  $\bar{\Lambda}_2$ ，並計算此多項式的 3 個根，即為 QL 波、QT 波與 Qth 波的相速度，其關係為： $\text{Re}(c_{\text{QL}}) > \text{Re}(c_{\text{QT}}) > \text{Re}(c_{\text{Qth}})$ 。

應用第 3.2.3 節中所述的特殊情況，當  $\theta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  以及當  $\theta = 45^\circ$  且  $T_1^{oi} = T_2^{oi}$ ，根據  $\bar{\Gamma}_{12} = \bar{\Lambda}_2 = 0$  之結果，可將(3.43a, b)式重新整理成下列二種情況：

(1) SH 波與 PT 波：

$$(\bar{\Gamma}_{22} - c^2 \rho_i) U_2 = 0 \Rightarrow c_{\text{SH}} = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{22}}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}^{T_i}}{\rho_i}}, \quad (3.44a)$$

$$(\bar{\Gamma}_{33} - c^2 \rho_i) U_3 = 0 \Rightarrow c_{\text{PT}} = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{33}}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}^{T_i}}{\rho_i}}. \quad (3.44b)$$

(2) QL 波與 Qth 波：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} - c^2 \rho_i & c \bar{\Lambda}_1 \\ c \bar{\Lambda}_1 & -i\omega \Theta_i^{-1} \bar{K} - c^2 \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ (i/\omega) U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.44c)$$

SH波與PT波分別代表沿  $X_1$  方向傳遞且垂直於  $X_1$  方向運動之位移 ( $u_2, u_3$ ) 的水平剪力波與純橫波，而 QL 波與 Qth 波代表平行於  $X_1$  方向運動之位移  $u_1$  與溫度差  $\Delta\Theta$  相互耦合的準縱波與準熱波。由(3.44c)式可計算出  $c^2$  之 2 次多項式的根，即可得 QL 波與 Qth 波的相速度分別為

$$c_{\text{QL}} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_L^2 + c_{\text{th}}^2 + c_\lambda^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(c_L^2 + c_{\text{th}}^2 + c_\lambda^2)^2 - c_L^2 c_{\text{th}}^2}}, \quad (3.45a)$$

$$c_{\text{Qth}} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_L^2 + c_{\text{th}}^2 + c_\lambda^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(c_L^2 + c_{\text{th}}^2 + c_\lambda^2)^2 - c_L^2 c_{\text{th}}^2}}, \quad (3.45b)$$

其中  $c_L$  與  $c_{\text{th}}$  分別為單純之縱波(longitudinal wave)與熱波(thermal wave)的相速度， $c_\lambda$  為彈性與熱性兩者間的耦合項，它們分別定義如下：

$$c_L^2 = \frac{\bar{\Gamma}_{11}}{\rho_i}, \quad c_{\text{th}}^2 = -\frac{i\omega \bar{K}}{\Theta_i \bar{\alpha}}, \quad c_\lambda^2 = \frac{\bar{\Lambda}_1^2}{\rho_i \bar{\alpha}}, \quad (3.46a-c)$$

$$c_L = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{11}}{\rho_i}}, \quad c_{\text{th}} = (1-i) \sqrt{\frac{\omega \bar{K}}{2\Theta_i \bar{\alpha}}}, \quad c_\lambda = \frac{\bar{\Lambda}_1}{\sqrt{\rho_i \bar{\alpha}}}. \quad (3.47a-c)$$

其中  $c_{\text{th}}$  是頻率  $\omega$  的函數，因此， $c_{\text{QL}}$  與  $c_{\text{Qth}}$  亦是頻率  $\omega$  的函數。在上述(3.45a, b)式中，假設熱壓常數  $\bar{\lambda}_1 = 0$ ，即  $\bar{\Lambda}_1 = 0$ ，代表彈性與熱性兩者間是獨立不相互耦合，可得單純之縱波與熱波的相速度  $c_L$  與  $c_{\text{th}}$ 。然而，就一般實際情況是屬於非高溫且非高頻， $c_L$ 、 $c_{\text{th}}$  與  $c_\lambda$  三者間的大小關係為： $\text{Re}(c_L) > \text{Re}(c_\lambda) > \text{Re}(c_{\text{th}})$ ，而且  $c_L^2$ 、 $c_\lambda^2$  與  $c_{\text{th}}^2$  彼此間大小的階數差約為 3 ( $10^3$  倍)。因此，(3.45a, b)式可近似為

$$c_{\text{QL}} \approx \sqrt{c_L^2 + c_\lambda^2}, \quad c_{\text{Qth}} \approx (c_L/c_{\text{QL}}) c_{\text{th}}. \quad (3.48a, b)$$

反之，若是考慮低溫且高頻的情況， $c_{\text{th}}$  項的大小就會在  $c_{\text{QL}}$  與  $c_{\text{Qth}}$  有明顯的影響。

### 3.3.3 $X_3$ 方向

如圖 3.4 所示，考慮波傳向量  $[n_1, n_3]$  在  $X_3$  方向，須令  $n_1 = 0$  與  $n_3 = 1$ ，並由(3.37)式可獲得  $\bar{\Gamma}_{13} = \bar{\Gamma}_{23} = \bar{\Lambda}_1 = \bar{\Lambda}_2 = 0$  之結果，將(3.36)式整理成下列二種情況：

(1) 二個 PT 波：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} - c^2 \rho_i & \bar{\Gamma}_{12} \\ \bar{\Gamma}_{12} & \bar{\Gamma}_{22} - c^2 \rho_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.49a)$$

(2) QL 波與 Qth 波：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{33} - c^2 \rho_i & c\bar{\Lambda}_3 \\ c\bar{\Lambda}_3 & -i\omega\Theta_i^{-1}\bar{K} - c^2\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ (i/\omega)U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.49b)$$

在情況(1)中，在(3.49a)式中引入(3.20)與(3.37)之假設，其行列式展開後整理，可得二個 PT 波的相速度  $c_{PT1}$  與  $c_{PT2}$  分別為

$$c_{PT1} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}^o + T_3^{oi}}{\rho_i}}, \quad c_{PT2} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{44}^o + T_3^{oi}}{\rho_i}}, \quad (3.50a, b)$$

其質點位移的偏振方向則分別為未轉換之座標系統  $O-X_1^o X_2^o X_3^o$  下的  $X_1^o$  與  $X_2^o$  方向。而在情況(2)中，由(3.49b)式可計算出  $c^2$  之 2 次多項式的根，可得 QL 波與 Qth 波的相速度  $c_{QL}$  與  $c_{Qth}$ ，結果如同(3.45a, b)式所示，而三個參數  $c_L$ 、 $c_{th}$  與  $c_\lambda$  則分別定義如下：

$$c_L^2 = \frac{\bar{\Gamma}_{33}}{\rho_i}, \quad c_{th}^2 = -\frac{i\omega\bar{K}}{\Theta_i\bar{\alpha}}, \quad c_\lambda^2 = \frac{\bar{\Lambda}_3^2}{\rho_i\bar{\alpha}}, \quad (3.51a-c)$$

$$c_L = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{33}}{\rho_i}}, \quad c_{th} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\bar{K}}{2\Theta_i\bar{\alpha}}}, \quad c_\lambda = \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}_3}{\rho_i\bar{\alpha}}}, \quad (3.52a-c)$$

其中參數  $\bar{\Gamma}_{33} = \bar{c}_{33} + T_3^i = \bar{c}_{33}^o + T_3^{oi}$ 、 $\bar{\Lambda}_3 = \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_3^o$ 、 $\bar{K} = \bar{k}_3 = \bar{k}_3^o$  與  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^o$ 。同樣地， $c_{QL}$  與  $c_{Qth}$  兩者之後續討論亦與上一節所述雷同。總括來說，由上面獲得相速度  $c_{PT1}$ 、 $c_{PT2}$ 、 $c_{QL}$  與  $c_{Qth}$  之結果可知，其與在未轉換之座標系統  $O-X_1^o X_2^o X_3^o$  下所推導之結果相同。

若是考慮第 3.2.3 節中所述的特殊情況，可得知  $\bar{\Gamma}_{12} = 0$ ，代入(3.49a)式可獲得二個 PT 波的相速度  $c_{PT1}$  與  $c_{PT2}$ ，則(3.50a, b)式可改寫為

$$(\bar{\Gamma}_{11} - c^2 \rho_i) U_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{PT1} = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{11}}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}^i}{\rho_i}}, \quad (3.50'a)$$

$$(\bar{\Gamma}_{22} - c^2 \rho_i) U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{PT2} = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{22}}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{44}^i}{\rho_i}}, \quad (3.50'b)$$

其質點位移的偏振方向則分別為轉換後之座標系統  $O-X_1X_2X_3$  下的  $X_1$  與  $X_2$  方向。另一方面，有關 QL 波與 Qth 波的結果則如同上一節的情況(2)之內容所述。

### 3.4 平板導波的頻散方程式

#### 3.4.1 水平方向的波傳

在(3.34)與(3.35)式中，令  $\xi = [\xi_1, \xi_3]$  代表  $X_1X_3$  平面上某一彈性波波傳的波數向量，對於一平板或層狀介質中的導波波傳問題，假設  $\xi_1 = \xi$  與  $\xi_3 = \zeta$ ，其分別為水平  $X_1$  方向與深度  $X_3$  方向傳遞的角波數。上述此一平板或層狀介質之結構外型在水平方向的邊界考慮為無限的，而在厚度方向是有邊界條件的拘束存在。因此，在  $\exp(i\zeta X_3)$  的解型式中， $\zeta$  值的取得是須配合邊界條件，計算出導波在此結構中傳遞之角波數  $\zeta$  對角頻率  $\omega$  的頻散及衰減關係。

不同於第 3.3 節計算微體波相速度只須針對  $c^2$  之多項式，我們須針對(3.34)式推導出矩陣的行列式並將其整理成  $\zeta^2$  的多項式，為了方便表示，將(3.34)式簡化改寫成

$$\begin{bmatrix} \zeta^2 a_{11} + c_{11} & \zeta^2 a_{12} + c_{12} & \zeta b_{13} & c_{14} \\ \zeta^2 a_{21} + c_{21} & \zeta^2 a_{22} + c_{22} & \zeta b_{23} & c_{24} \\ \zeta b_{31} & \zeta b_{32} & \zeta^2 a_{33} + c_{33} & \zeta b_{34} \\ c_{41} & c_{42} & \zeta b_{43} & \zeta^2 a_{44} + c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.53)$$

其中符號  $a_{IJ}$ 、 $b_{IJ}$  與  $c_{IJ}$  分別代表  $\zeta$  之 2 次、1 次以及 0 次項的係數，詳情如下所示

$$\begin{aligned} a_{11} &= \bar{c}_{55}^{T_3^i}, & c_{11} &= \xi^2 \bar{c}_{11}^{T_1^i} - \omega^2 \rho_i, \\ a_{22} &= \bar{c}_{44}^{T_3^i}, & c_{22} &= \xi^2 \bar{c}_{66}^{T_1^i} - \omega^2 \rho_i, \\ a_{33} &= \bar{c}_{33}^{T_3^i}, & c_{33} &= \xi^2 \bar{c}_{55}^{T_1^i} - \omega^2 \rho_i, \\ a_{44} &= \bar{k}_3, & c_{44} &= \xi^2 \bar{k}_1 - i\omega \Theta_i \bar{\alpha}, \\ a_{12} = a_{21} &= \bar{c}_{45}, & b_{13} = b_{31} &= \xi (\bar{c}_{13} + \bar{c}_{55}), \\ c_{12} = c_{21} &= \xi^2 \bar{c}_{16}, & b_{23} = b_{32} &= \xi (\bar{c}_{36} + \bar{c}_{45}), \\ c_{14} &= i \xi \bar{\lambda}_1, & c_{41} &= \omega \Theta_i \xi \bar{\lambda}_1, \\ c_{24} &= i \xi \bar{\lambda}_6, & c_{42} &= \omega \Theta_i \xi \bar{\lambda}_6, \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_{34} = i\bar{\lambda}_3, \quad \mathbf{b}_{43} = \omega\Theta_i\bar{\lambda}_3. \quad (3.54)$$

就非零解(nontrivial solution)而言，由(3.34)式所展開的矩陣行列式須為零，並將其整理成 $\zeta^2$ 的4次多項式為

$$B_8\zeta^8 + B_6\zeta^6 + B_4\zeta^4 + B_2\zeta^2 + B_0 = 0, \quad (3.55)$$

其中係數 $B_8$ 、 $B_6$ 、 $B_4$ 、 $B_2$ 與 $B_0$ 展開後其符號表示過於長且不易作整理，可利用符號運算軟體 Maple 作整理，這裡就不再多作敘述。由(3.55)式可計算出此一多項式的8個複數根 $\pm\zeta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ )，為了確定 $\zeta_k$ 為一個單值函數，我們假設 $\zeta_k$ 須滿足一個拘束條件，即 $\text{Im}(\zeta_k) \geq 0$ ，避免因 $\exp(i\zeta_k X_3)$ 所造成的指數增大，其物理意義為傳入結構的彈性波與熱波，其振幅強度隨著傳入之深度增加而遞減。因此，在複數根 $\pm\zeta_k$ 中，正號(+)代表朝正 $X_3$ 方向波傳的下傳波(down-going wave)，負號(-)代表朝負 $X_3$ 方向波傳的上傳波(up-going wave)。將所獲得的8個複數根 $\pm\zeta_k$ 代入(3.53)式，求得對應之特徵向量 $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}^T$ 中各分量的比值關係：

$$\begin{aligned} (U_1^\pm, U_2^\pm, U_3^\pm, U_4^\pm)^{(k)} &= C_k^\pm \times (p_{1k}^\pm, p_{2k}^\pm, p_{3k}^\pm, p_{4k}^\pm) \\ \Rightarrow \frac{U_1^{\pm(k)}}{p_{1k}^\pm} &= \frac{U_2^{\pm(k)}}{p_{2k}^\pm} = \frac{U_3^{\pm(k)}}{p_{3k}^\pm} = \frac{U_4^{\pm(k)}}{p_{4k}^\pm} = C_k^\pm, \end{aligned} \quad (3.56)$$

其中未知係數 $C_k^\pm$ 必須由邊界條件來決定，而各項比例 $p_{ik}^\pm$ 表示如下：

$$p_{1k}^+ = (+) \begin{pmatrix} \zeta_k^2 \mathbf{a}_{12} + \mathbf{c}_{12} & \zeta_k \mathbf{b}_{13} & \mathbf{c}_{14} \\ \zeta_k^2 \mathbf{a}_{22} + \mathbf{c}_{22} & \zeta_k \mathbf{b}_{23} & \mathbf{c}_{24} \\ \mathbf{c}_{42} & \zeta_k \mathbf{b}_{43} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{44} + \mathbf{c}_{44} \end{pmatrix}, \quad p_{1k}^- = -p_{1k}^+, \quad (3.57a)$$

$$p_{2k}^+ = (-) \begin{pmatrix} \zeta_k^2 \mathbf{a}_{11} + \mathbf{c}_{11} & \zeta_k \mathbf{b}_{13} & \mathbf{c}_{14} \\ \zeta_k^2 \mathbf{a}_{21} + \mathbf{c}_{21} & \zeta_k \mathbf{b}_{23} & \mathbf{c}_{24} \\ \mathbf{c}_{41} & \zeta_k \mathbf{b}_{43} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{44} + \mathbf{c}_{44} \end{pmatrix}, \quad p_{2k}^- = -p_{2k}^+, \quad (3.57b)$$

$$p_{3k}^+ = (+) \begin{pmatrix} \zeta_k^2 \mathbf{a}_{11} + \mathbf{c}_{11} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{12} + \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{14} \\ \zeta_k^2 \mathbf{a}_{21} + \mathbf{c}_{21} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{22} + \mathbf{c}_{22} & \mathbf{c}_{24} \\ \mathbf{c}_{41} & \mathbf{c}_{42} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{44} + \mathbf{c}_{44} \end{pmatrix}, \quad p_{3k}^- = +p_{3k}^+, \quad (3.57c)$$

$$p_{4k}^+ = (-) \begin{pmatrix} \zeta_k^2 \mathbf{a}_{11} + \mathbf{c}_{11} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{12} + \mathbf{c}_{12} & \zeta_k \mathbf{b}_{13} \\ \zeta_k^2 \mathbf{a}_{21} + \mathbf{c}_{21} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{22} + \mathbf{c}_{22} & \zeta_k \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{c}_{41} & \mathbf{c}_{42} & \zeta_k \mathbf{b}_{43} \end{pmatrix}, \quad p_{4k}^- = -p_{4k}^+. \quad (3.57d)$$

根據(2.66a, b)所述，假設表面法向量(surface normal)  $\hat{\mathbf{n}} = [\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3]$ ，配合本研究所要探討的  $X_1 X_3$  平面，表面的施加曳力  $t_I$  與輸入熱能  $q_{in}$  可分別針對法向量為  $X_1$ 、 $X_2$  與  $X_3$  方向的表面作分類。令  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} = 0$ ，利用(3.25a, b)式獲得相關的應力  $T_{II}$  與熱通量  $q_J$ ，再應用(3.56)式所提供  $p_{ik}^{\pm}$  的比值關係，並將  $X_1$ 、 $X_2$  與  $X_3$  方向分別以符號  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Y}$  與  $\mathbf{Z}$  作標示，其結果分類如下：

(1)  $X_1$  方向(或  $\mathbf{X}$  方向)： 令  $\hat{\mathbf{n}} = [1, 0, 0]$

$$\begin{Bmatrix} V_{X,1} \\ V_{X,2} \\ V_{X,3} \\ V_{X,4} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ q_{in} \end{Bmatrix}_X = \begin{Bmatrix} T_1 + T_1^i u_{1,1} \\ T_6 + T_1^i u_{2,1} \\ T_5 + T_1^i u_{3,1} \\ -q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i\xi \bar{c}_{11}^{T_1^i} & i\xi \bar{c}_{16} & i\xi \bar{c}_{13} & -\bar{\lambda}_1 \\ i\xi \bar{c}_{16} & i\xi \bar{c}_{66}^{T_1^i} & i\xi \bar{c}_{36} & -\bar{\lambda}_6 \\ i\xi \bar{c}_{55} & i\xi \bar{c}_{45} & i\xi \bar{c}_{55}^{T_1^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\xi \bar{k}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix},$$

$$q_{X,1k}^+ = i(\xi \bar{c}_{11}^{T_1^i} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{16} p_{2k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{13} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_1 p_{4k}^+), \quad q_{X,1k}^- = -q_{X,1k}^+, \quad (3.58a)$$

$$q_{X,2k}^+ = i(\xi \bar{c}_{16} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{66}^{T_1^i} p_{2k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{36} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_6 p_{4k}^+), \quad q_{X,2k}^- = -q_{X,2k}^+, \quad (3.58b)$$

$$q_{X,3k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{55} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{45} p_{2k}^+ + \xi \bar{c}_{55}^{T_1^i} p_{3k}^+), \quad q_{X,3k}^- = +q_{X,3k}^+, \quad (3.58c)$$

$$q_{X,4k}^+ = i(\xi \bar{k}_1 p_{4k}^+), \quad q_{X,4k}^- = -q_{X,4k}^+. \quad (3.58d)$$

(2)  $X_2$  方向(或  $\mathbf{Y}$  方向)： 令  $\hat{\mathbf{n}} = [0, 1, 0]$

$$\begin{Bmatrix} V_{Y,1} \\ V_{Y,2} \\ V_{Y,3} \\ V_{Y,4} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ q_{in} \end{Bmatrix}_Y = \begin{Bmatrix} T_6 + T_6^i u_{1,1} \\ T_2 + T_6^i u_{2,1} \\ T_4 + T_6^i u_{3,1} \\ -q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i\xi \bar{c}_{16}^{T_6^i} & i\xi \bar{c}_{66} & i\xi \bar{c}_{36} & -\bar{\lambda}_6 \\ i\xi \bar{c}_{12} & i\xi \bar{c}_{26}^{T_6^i} & i\xi \bar{c}_{23} & -\bar{\lambda}_2 \\ i\xi \bar{c}_{45} & i\xi \bar{c}_{44} & i\xi \bar{c}_{45}^{T_6^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\xi \bar{k}_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix},$$

$$q_{Y,1k}^+ = i(\xi \bar{c}_{16}^{T_6^i} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{66} p_{2k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{36} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_6 p_{4k}^+), \quad q_{Y,1k}^- = -q_{Y,1k}^+, \quad (3.59a)$$

$$q_{Y,2k}^+ = i(\xi \bar{c}_{12} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{26}^{T_6^i} p_{2k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{23} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_2 p_{4k}^+), \quad q_{Y,2k}^- = -q_{Y,2k}^+, \quad (3.59b)$$

$$q_{Y,3k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{45} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{44} p_{2k}^+ + \xi \bar{c}_{45}^{T_6^i} p_{3k}^+), \quad q_{Y,3k}^- = +q_{Y,3k}^+, \quad (3.59c)$$

$$q_{Y,4k}^+ = i(\xi \bar{k}_6 p_{4k}^+), \quad q_{Y,4k}^- = -q_{Y,4k}^+. \quad (3.59d)$$

(3)  $X_3$  方向(或  $\mathbf{Z}$  方向)： 令  $\hat{\mathbf{n}} = [0, 0, 1]$

$$\begin{Bmatrix} V_{Z,1} \\ V_{Z,2} \\ V_{Z,3} \\ V_{Z,4} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \mathbf{q}_{\text{in}} \end{Bmatrix}_Z = \begin{Bmatrix} T_5 + T_3^i u_{1,3} \\ T_4 + T_3^i u_{2,3} \\ T_3 + T_3^i u_{3,3} \\ -\mathbf{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i\zeta \bar{c}_{55}^{T_3^i} & i\zeta \bar{c}_{45} & i\xi \bar{c}_{55} & 0 \\ i\zeta \bar{c}_{45} & i\zeta \bar{c}_{44}^{T_3^i} & i\xi \bar{c}_{45} & 0 \\ i\xi \bar{c}_{13} & i\xi \bar{c}_{36} & i\zeta \bar{c}_{33}^{T_3^i} & -\bar{\lambda}_3 \\ 0 & 0 & 0 & i\zeta \bar{k}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix},$$

$$q_{Z,1k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{55}^{T_3^i} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{45} p_{2k}^+ + \xi \bar{c}_{55} p_{3k}^+), \quad q_{Z,1k}^- = +q_{Z,1k}^+, \quad (3.60a)$$

$$q_{Z,2k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{45} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{44}^{T_3^i} p_{2k}^+ + \xi \bar{c}_{45} p_{3k}^+), \quad q_{Z,2k}^- = +q_{Z,2k}^+, \quad (3.60b)$$

$$q_{Z,3k}^+ = i(\xi \bar{c}_{13} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{36} p_{2k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{33}^{T_3^i} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_3 p_{4k}^+), \quad q_{Z,3k}^- = -q_{Z,3k}^+, \quad (3.60c)$$

$$q_{Z,4k}^+ = i(\zeta_k \bar{k}_3 p_{4k}^+), \quad q_{Z,4k}^- = +q_{Z,4k}^+. \quad (3.60d)$$

將 8 個複數根  $\pm\zeta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) 所代表的每一個解型式疊加起來，可獲得在波數-頻率域  $(\xi, \omega)$  下的位移場  $u_i$  與溫度差  $\Delta\Theta$ ，以及法向量為  $X_1$ 、 $X_2$  與  $X_3$  方向之表面上所施加曳力  $t_i$  與輸入熱能  $q_{\text{in}}$ 。因此，利用波傳分析中常用的矩陣法(matrix method) [100]，將這些物理場的解以矩陣向量型式表達，並分別整理表示如下：

$$\mathbf{U}(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{P}^+ \quad \mathbf{P}^-] \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix}, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{V}_X(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{Q}_X^+ \quad \mathbf{Q}_X^-] \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{V}_Y(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{Q}_Y^+ \quad \mathbf{Q}_Y^-] \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{V}_Z(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{Q}_Z^+ \quad \mathbf{Q}_Z^-] \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix}, \quad (3.64)$$

其中  $X_3$  代表平板或層狀介質中的深度位置，其餘變數符號則定義如下：

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}^\pm = \begin{bmatrix} p_{11}^\pm & p_{12}^\pm & p_{13}^\pm & p_{14}^\pm \\ p_{21}^\pm & p_{22}^\pm & p_{23}^\pm & p_{24}^\pm \\ p_{31}^\pm & p_{32}^\pm & p_{33}^\pm & p_{34}^\pm \\ p_{41}^\pm & p_{42}^\pm & p_{43}^\pm & p_{44}^\pm \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_X &= \begin{Bmatrix} V_{X,1} \\ V_{X,2} \\ V_{X,3} \\ V_{X,4} \end{Bmatrix}, & \mathbf{Q}_X^\pm &= \begin{bmatrix} q_{X,11}^\pm & q_{X,12}^\pm & q_{X,13}^\pm & q_{X,14}^\pm \\ q_{X,21}^\pm & q_{X,22}^\pm & q_{X,23}^\pm & q_{X,24}^\pm \\ q_{X,31}^\pm & q_{X,32}^\pm & q_{X,33}^\pm & q_{X,34}^\pm \\ q_{X,41}^\pm & q_{X,42}^\pm & q_{X,43}^\pm & q_{X,44}^\pm \end{bmatrix}, \\
\mathbf{V}_Y &= \begin{Bmatrix} V_{Y,1} \\ V_{Y,2} \\ V_{Y,3} \\ V_{Y,4} \end{Bmatrix}, & \mathbf{Q}_Y^\pm &= \begin{bmatrix} q_{Y,11}^\pm & q_{Y,12}^\pm & q_{Y,13}^\pm & q_{Y,14}^\pm \\ q_{Y,21}^\pm & q_{Y,22}^\pm & q_{Y,23}^\pm & q_{Y,24}^\pm \\ q_{Y,31}^\pm & q_{Y,32}^\pm & q_{Y,33}^\pm & q_{Y,34}^\pm \\ q_{Y,41}^\pm & q_{Y,42}^\pm & q_{Y,43}^\pm & q_{Y,44}^\pm \end{bmatrix}, \\
\mathbf{V}_Z &= \begin{Bmatrix} V_{Z,1} \\ V_{Z,2} \\ V_{Z,3} \\ V_{Z,4} \end{Bmatrix}, & \mathbf{Q}_Z^\pm &= \begin{bmatrix} q_{Z,11}^\pm & q_{Z,12}^\pm & q_{Z,13}^\pm & q_{Z,14}^\pm \\ q_{Z,21}^\pm & q_{Z,22}^\pm & q_{Z,23}^\pm & q_{Z,24}^\pm \\ q_{Z,31}^\pm & q_{Z,32}^\pm & q_{Z,33}^\pm & q_{Z,34}^\pm \\ q_{Z,41}^\pm & q_{Z,42}^\pm & q_{Z,43}^\pm & q_{Z,44}^\pm \end{bmatrix}, \\
\mathbf{C}^\pm &= \begin{Bmatrix} C_1^\pm \\ C_2^\pm \\ C_3^\pm \\ C_4^\pm \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}^\pm(X_3) &= \text{diag} \left\{ \begin{matrix} e^{\pm i \zeta_1 X_3} \\ e^{\pm i \zeta_2 X_3} \\ e^{\pm i \zeta_3 X_3} \\ e^{\pm i \zeta_4 X_3} \end{matrix} \right\}. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

結合上述(3.61)與(3.64)二式，配合在  $X_3$  方向上邊界拘束，進而推導一平板或層狀結構之頻散及衰減關係的特徵方程式，以及系統受外界干擾(如曳力或熱源)激振後的響應。此外，結合(3.61)與(3.62)二式，則可獲得導波沿  $X_1$  方向上傳遞的時間平均功率流密度(time-averaged power flow density)。

將欲討論的模型考慮為一厚度為  $h$  的平板，並假設其上下表面( $X_3 = \pm h/2$ )的邊界條件是自由的，包括表面上無曳力作用且無熱能輸入或輸出，根據(3.64)式之結果，若待定係數  $C_k^\pm$  存在非零解，我們可推導出頻散及衰減關係的特徵方程式為

$$\Omega(\xi, \omega) \text{ or } \Omega(k, f) \equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_Z^+ \mathbf{D}^+(+h/2) & \mathbf{Q}_Z^- \mathbf{D}^-(+h/2) \\ \mathbf{Q}_Z^+ \mathbf{D}^+(-h/2) & \mathbf{Q}_Z^- \mathbf{D}^-(-h/2) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.66}$$

再者，以平板的中平面( $X_3 = 0$ )為基準來觀察各點物理場運動行為的對稱特性，可區分出對稱(symmetric)與反對稱(anti-symmetric)的運動模態。然而，利用上述(3.66)式所計算獲得的數值結果發現，平板模態的階數越高，越是不易將這二種運動模態區分出來。因此，將對角矩陣(diagonal matrix)  $\mathbf{D}^\pm$  中的指數函數  $\exp$ ，拆解成三角函數  $\sin$  與  $\cos$ ，並利用其對於中平面( $X_3 = 0$ )的對稱特性，將(3.61)至(3.64)式分別改寫成下列型式：

$$\mathbf{U}^S = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} \cos(\zeta_k X_3) p_{1k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) p_{2k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) p_{3k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) p_{4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^S, \quad \mathbf{U}^A = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} i \sin(\zeta_k X_3) p_{1k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) p_{2k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) p_{3k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) p_{4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^A, \quad (3.67a, b)$$

$$\mathbf{V}_X^S = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} \cos(\zeta_k X_3) q_{X,1k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{X,2k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{X,3k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{X,4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^S, \quad \mathbf{V}_X^A = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} i \sin(\zeta_k X_3) q_{X,1k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{X,2k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{X,3k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{X,4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^A, \quad (3.68a, b)$$

$$\mathbf{V}_Y^S = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} \cos(\zeta_k X_3) q_{Y,1k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{Y,2k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{Y,3k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{Y,4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^S, \quad \mathbf{V}_Y^A = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} i \sin(\zeta_k X_3) q_{Y,1k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{Y,2k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{Y,3k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{Y,4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^A, \quad (3.69a, b)$$

$$\mathbf{V}_Z^S = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} i \sin(\zeta_k X_3) q_{Z,1k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{Z,2k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{Z,3k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{Z,4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^S, \quad \mathbf{V}_Z^A = \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} \cos(\zeta_k X_3) q_{Z,1k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{Z,2k}^+ \\ i \sin(\zeta_k X_3) q_{Z,3k}^+ \\ \cos(\zeta_k X_3) q_{Z,4k}^+ \end{Bmatrix} C_k^A, \quad (3.70a, b)$$

其中係數  $C_k^S = C_k^+ - C_k^-$  與  $C_k^A = C_k^+ + C_k^-$ ，上標 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態。假設平板上下表面 ( $X_3 = \pm h/2$ ) 的邊界條件是自由的，應用(3.70a, b)式之結果，若待定係數  $C_k^S$  與  $C_k^A$  存在非零解，可推導出對稱與反對稱模態之頻散及衰減關係的特徵方程式為

$$\Omega^{S,A}(\xi, \omega) \text{ or } \Omega^{S,A}(k, f) \equiv \det \begin{pmatrix} q_{Z,11}^{S,A} & q_{Z,12}^{S,A} & q_{Z,13}^{S,A} & q_{Z,14}^{S,A} \\ q_{Z,21}^{S,A} & q_{Z,22}^{S,A} & q_{Z,23}^{S,A} & q_{Z,24}^{S,A} \\ q_{Z,31}^{S,A} & q_{Z,32}^{S,A} & q_{Z,33}^{S,A} & q_{Z,34}^{S,A} \\ q_{Z,41}^{S,A} & q_{Z,42}^{S,A} & q_{Z,43}^{S,A} & q_{Z,44}^{S,A} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.71)$$

其中矩陣內每一行向量(column vector)之元素定義為

$$q_{Z,ik}^S = \sin(\zeta_k h/2) q_{Z,ik}^+, \quad q_{Z,3k}^S = \cos(\zeta_k h/2) q_{Z,3k}^+, \quad (3.72a)$$

$$q_{Z,ik}^A = \cos(\zeta_k h/2) q_{Z,ik}^+, \quad q_{Z,3k}^A = \sin(\zeta_k h/2) q_{Z,3k}^+. \quad (3.72b)$$

根據(3.66)與(3.71)式中的特徵方程式  $\Omega(k, f)$  與  $\Omega^{S,A}(k, f)$ ，可使用數值分析中的尋根法(root-finding)來搜尋對應的波數  $k$  與頻率  $f$ ，再進一步去分析相關的導波波傳問題。

### 3.4.2 面內波傳

根據第 3.2.3 節中所述的特殊情況，當  $\theta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  以及  $\theta = 45^\circ$  且  $T_1^{oi} = T_2^{oi}$ ，並參考第 3.3.1 節關於微體波運動特性所整理獲得的結果，我們可知道在此特殊情況下，垂直  $X_1X_3$  平面的面外運動(位移  $u_2$ )可被獨立區分出來。因此，此一情況下的導波波傳分析亦區分為面內波傳與面外波傳兩種，進而可簡化上一節所述的特徵方程式。

回顧(3.26)與(3.54)式，可得： $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_{21} = \mathbf{c}_{12} = \mathbf{c}_{21} = \mathbf{b}_{23} = \mathbf{b}_{32} = \mathbf{c}_{24} = \mathbf{a}_{42} = 0$ ，將此一結果代入(3.54)式並區分成下列二種情況：

(1) 面外波(或 SH 波)：

$$(\zeta^2 \mathbf{a}_{22} + \mathbf{c}_{22}) U_2 = 0; \quad (3.73a)$$

(2) 面內波：

$$\begin{bmatrix} \zeta^2 \mathbf{a}_{11} + \mathbf{c}_{11} & \zeta \mathbf{b}_{13} & \mathbf{c}_{14} \\ \zeta \mathbf{b}_{31} & \zeta^2 \mathbf{a}_{33} + \mathbf{c}_{33} & \zeta \mathbf{b}_{34} \\ \mathbf{c}_{41} & \zeta \mathbf{b}_{43} & \zeta^2 \mathbf{a}_{44} + \mathbf{c}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.73b)$$

將情況(2)依照第 3.4.1 節的推導流程，就非零解而言，由(3.73b)式展開的矩陣行列式須為零，並將其整理成  $\zeta^2$  的 3 次多項式為

$$B'_6 \zeta^6 + B'_4 \zeta^4 + B'_2 \zeta^2 + B'_0 = 0. \quad (3.74)$$

其中係數  $B'_6$ 、 $B'_4$ 、 $B'_2$  與  $B'_0$  亦可利用符號運算軟體 Maple 作整理，這裡就不再多作敘述。由(3.74)式可計算出此多項式的 6 個複數根  $\pm \zeta_k$  ( $k = 1, 3, 4$ )，同樣地，我們須假設一個拘束條件以確定  $\zeta_k$  為單值函數，即  $\text{Im}(\zeta_k) \geq 0$ 。將複數根  $\pm \zeta_k$  再代入(3.73b)式，可求得對應之特徵向量  $\{U_1, U_3, U_4\}^T$  中各分量的比值關係：

$$\begin{aligned} (U_1^\pm, U_3^\pm, U_4^\pm)^{(k)} &= C_k^\pm \times (p_{1k}^\pm, p_{3k}^\pm, p_{4k}^\pm) \\ \Rightarrow \frac{U_1^{\pm(k)}}{p_{1k}^\pm} &= \frac{U_3^{\pm(k)}}{p_{3k}^\pm} = \frac{U_4^{\pm(k)}}{p_{4k}^\pm} = C_k^\pm, \end{aligned} \quad (3.75)$$

其中未知係數  $C_k^\pm$  必須由邊界條件來決定，而各項比例  $p_{1k}^\pm$ 、 $p_{3k}^\pm$  與  $p_{4k}^\pm$  分別表示如下

$$p_{1k}^+ = (-) \begin{pmatrix} \zeta_k \mathbf{b}_{13} & \mathbf{c}_{14} \\ \zeta_k \mathbf{b}_{43} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{44} + \mathbf{c}_{44} \end{pmatrix}, \quad p_{1k}^- = -p_{1k}^+, \quad (3.76a)$$

$$p_{3k}^+ = (+) \begin{pmatrix} \zeta_k^2 \mathbf{a}_{11} + \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{14} \\ \mathbf{c}_{41} & \zeta_k^2 \mathbf{a}_{44} + \mathbf{c}_{44} \end{pmatrix}, \quad p_{3k}^- = +p_{3k}^+, \quad (3.76b)$$

$$p_{4k}^+ = (-) \begin{pmatrix} \zeta_k^2 \mathbf{a}_{11} + \mathbf{c}_{11} & \zeta_k \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{c}_{41} & \zeta_k \mathbf{b}_{43} \end{pmatrix}, \quad p_{4k}^- = -p_{4k}^+. \quad (3.76c)$$

此外，根據情況(1)中的(3.73a)式，只有單一物理場 $U_2$ ，我們可以假設其比例為

$$p_{22}^\pm = \pm 1, \quad (3.77a)$$

$$p_{2k}^\pm = p_{k2}^\pm = 0 \quad (k = 1, 3, 4). \quad (3.77b)$$

將第 3.2.3 節中所述的特殊情況(3.26)代入(3.58a-d)、(3.59a-d)與(3.60a-d)式，在法向量為 $X_1$ 、 $X_2$ 與 $X_3$ 方向之表面的施加曳力 $t_l$ 與輸入熱能 $q_{in}$ ，其結果亦可分類如下：

(1)  $X_1$  方向(或  $\mathbf{X}$  方向)：

$$q_{\mathbf{X},1k}^+ = i(\xi \bar{c}_{11}^{T_1^i} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{13} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_1 p_{4k}^+), \quad q_{\mathbf{X},1k}^- = -q_{\mathbf{X},1k}^+, \quad (3.78a)$$

$$q_{\mathbf{X},2k}^+ = i(\xi \bar{c}_{66}^{T_1^i} p_{2k}^+), \quad q_{\mathbf{X},2k}^- = -q_{\mathbf{X},2k}^+, \quad (3.78b)$$

$$q_{\mathbf{X},3k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{55} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{55}^{T_1^i} p_{3k}^+), \quad q_{\mathbf{X},3k}^- = +q_{\mathbf{X},3k}^+, \quad (3.78c)$$

$$q_{\mathbf{X},4k}^+ = i(\xi \bar{K}_1 p_{4k}^+), \quad q_{\mathbf{X},4k}^- = -q_{\mathbf{X},4k}^+. \quad (3.78d)$$

(2)  $X_2$  方向(或  $\mathbf{Y}$  方向)：

$$q_{\mathbf{Y},1k}^+ = i(\xi \bar{c}_{66} p_{2k}^+), \quad q_{\mathbf{Y},1k}^- = -q_{\mathbf{Y},1k}^+, \quad (3.79a)$$

$$q_{\mathbf{Y},2k}^+ = i(\xi \bar{c}_{12} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{23} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_2 p_{4k}^+), \quad q_{\mathbf{Y},2k}^- = -q_{\mathbf{Y},2k}^+, \quad (3.79b)$$

$$q_{\mathbf{Y},3k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{44} p_{2k}^+), \quad q_{\mathbf{Y},3k}^- = +q_{\mathbf{Y},3k}^+, \quad (3.79c)$$

$$q_{\mathbf{Y},4k}^+ = 0, \quad q_{\mathbf{Y},4k}^- = -q_{\mathbf{Y},4k}^+. \quad (3.79d)$$

(3)  $X_3$  方向(或  $\mathbf{Z}$  方向)：

$$q_{\mathbf{Z},1k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{55}^{T_3^i} p_{1k}^+ + \xi \bar{c}_{55} p_{3k}^+), \quad q_{\mathbf{Z},1k}^- = +q_{\mathbf{Z},1k}^+, \quad (3.80a)$$

$$q_{\mathbf{Z},2k}^+ = i(\zeta_k \bar{c}_{44}^{T_3^i} p_{2k}^+), \quad q_{\mathbf{Z},2k}^- = +q_{\mathbf{Z},2k}^+, \quad (3.80b)$$

$$q_{\mathbf{Z},3k}^+ = i(\xi \bar{c}_{13} p_{1k}^+ + \zeta_k \bar{c}_{33}^{T_3^i} p_{3k}^+ + i\bar{\lambda}_3 p_{4k}^+), \quad q_{\mathbf{Z},3k}^- = -q_{\mathbf{Z},3k}^+, \quad (3.80c)$$

$$q_{\mathbf{Z},4k}^+ = i(\zeta_k \bar{K}_3 p_{4k}^+), \quad q_{\mathbf{Z},4k}^- = +q_{\mathbf{Z},4k}^+. \quad (3.80d)$$

根據上述(3.77a, b)、(3.78a-d)、(3.79a-d)與(3.80a-d)式提供之參數， $p_{ik}^\pm$ 、 $q_{X,ik}^\pm$ 、 $q_{Y,ik}^\pm$  與  $q_{Z,ik}^\pm$ ，將(3.65)式的矩陣 $\mathbf{P}^\pm$ 、 $\mathbf{Q}_X^\pm$ 、 $\mathbf{Q}_Y^\pm$ 與 $\mathbf{Q}_Z^\pm$ 中存在的元素整理如下：

$$\mathbf{P}^\pm = \begin{bmatrix} p_{11}^\pm & 0 & p_{13}^\pm & p_{14}^\pm \\ 0 & p_{22}^\pm & 0 & 0 \\ p_{31}^\pm & 0 & p_{33}^\pm & p_{34}^\pm \\ p_{41}^\pm & 0 & p_{43}^\pm & p_{44}^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_X^\pm = \begin{bmatrix} q_{X,11}^\pm & 0 & q_{X,13}^\pm & q_{X,14}^\pm \\ 0 & q_{X,22}^\pm & 0 & 0 \\ q_{X,31}^\pm & 0 & q_{X,33}^\pm & q_{X,34}^\pm \\ q_{X,41}^\pm & 0 & q_{X,43}^\pm & q_{X,44}^\pm \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_Y^\pm = \begin{bmatrix} 0 & q_{Y,12}^\pm & 0 & 0 \\ q_{Y,21}^\pm & 0 & q_{Y,23}^\pm & q_{Y,24}^\pm \\ 0 & q_{Y,32}^\pm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_Z^\pm = \begin{bmatrix} q_{Z,11}^\pm & 0 & q_{Z,13}^\pm & q_{Z,14}^\pm \\ 0 & q_{Z,22}^\pm & 0 & 0 \\ q_{Z,31}^\pm & 0 & q_{Z,33}^\pm & q_{Z,34}^\pm \\ q_{Z,41}^\pm & 0 & q_{Z,43}^\pm & q_{Z,44}^\pm \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

由上述(3.81)式的結果可知，矩陣 $\mathbf{P}^\pm$ 、 $\mathbf{Q}_X^\pm$ 、 $\mathbf{Q}_Y^\pm$ 與 $\mathbf{Q}_Z^\pm$ 中的元素 $p_{22}^\pm$ 、 $q_{X,22}^\pm$ 、 $q_{Y,12}^\pm$ 、 $q_{Y,32}^\pm$ 與 $q_{Z,22}^\pm$ 是屬於面外波傳，此部分則是會在下一節作敘述。此外，在矩陣 $\mathbf{Q}_Y^\pm$ 的第4行可得知 $X_2$ 方向的热通量 $q_2$ 為零，此結果代表熱能的流動會侷限在 $X_1X_3$ 平面。

假設只考慮 $X_1X_3$ 平面上的面內波傳，意即只存在物理場 $(U_1, U_3, U_4)$ ，且 $U_2 = 0$ 。配合上述(3.81)式的結果，元素 $p_{22}^\pm$ 、 $q_{X,22}^\pm$ 、 $q_{Y,12}^\pm$ 、 $q_{Y,32}^\pm$ 與 $q_{Z,22}^\pm$ 皆為零。因此，將(3.61)、(3.62)、(3.63)與(3.64)式改寫成下列型式：

$$\mathbf{U}'(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{P}'^+ \quad \mathbf{P}'^-] \begin{bmatrix} \mathbf{D}'^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}'^+ \\ \mathbf{C}'^- \end{Bmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{V}'_X(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{Q}'^+_X \quad \mathbf{Q}'^-_X] \begin{bmatrix} \mathbf{D}'^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}'^+ \\ \mathbf{C}'^- \end{Bmatrix}, \quad (3.83)$$

$$\mathbf{V}'_Y(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{Q}'^+_Y \quad \mathbf{Q}'^-_Y] \begin{bmatrix} \mathbf{D}'^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}'^+ \\ \mathbf{C}'^- \end{Bmatrix}, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{V}'_Z(\xi, X_3, \omega) = [\mathbf{Q}'^+_Z \quad \mathbf{Q}'^-_Z] \begin{bmatrix} \mathbf{D}'^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}'^+ \\ \mathbf{C}'^- \end{Bmatrix}. \quad (3.85)$$

同樣地，其中 $X_3$ 代表介質的深度位置，上標「'」是為了與之前(3.61)、(3.62)、(3.63)與(3.64)式的結果作區分，屬於第3.2.3節所述的特殊情況，其變數符號則定義如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}' &= \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}, & \mathbf{P}'^{\pm} &= \begin{bmatrix} p_{11}^{\pm} & p_{13}^{\pm} & p_{14}^{\pm} \\ p_{31}^{\pm} & p_{33}^{\pm} & p_{34}^{\pm} \\ p_{41}^{\pm} & p_{43}^{\pm} & p_{44}^{\pm} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{V}'_{\mathbf{X}} &= \begin{Bmatrix} V_{\mathbf{X},1} \\ V_{\mathbf{X},3} \\ V_{\mathbf{X},4} \end{Bmatrix}, & \mathbf{Q}'_{\mathbf{X}}{}^{\pm} &= \begin{bmatrix} q_{\mathbf{X},11}^{\pm} & q_{\mathbf{X},13}^{\pm} & q_{\mathbf{X},14}^{\pm} \\ q_{\mathbf{X},31}^{\pm} & q_{\mathbf{X},33}^{\pm} & q_{\mathbf{X},34}^{\pm} \\ q_{\mathbf{X},41}^{\pm} & q_{\mathbf{X},43}^{\pm} & q_{\mathbf{X},44}^{\pm} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{V}'_{\mathbf{Y}} &= \{V_{\mathbf{Y},2}\}, & \mathbf{Q}'_{\mathbf{Y}}{}^{\pm} &= [q_{\mathbf{Y},21}^{\pm} \quad q_{\mathbf{Y},23}^{\pm} \quad q_{\mathbf{Y},24}^{\pm}], \\
\mathbf{V}'_{\mathbf{Z}} &= \begin{Bmatrix} V_{\mathbf{Z},1} \\ V_{\mathbf{Z},3} \\ V_{\mathbf{Z},4} \end{Bmatrix}, & \mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}{}^{\pm} &= \begin{bmatrix} q_{\mathbf{Z},11}^{\pm} & q_{\mathbf{Z},13}^{\pm} & q_{\mathbf{Z},14}^{\pm} \\ q_{\mathbf{Z},31}^{\pm} & q_{\mathbf{Z},33}^{\pm} & q_{\mathbf{Z},34}^{\pm} \\ q_{\mathbf{Z},41}^{\pm} & q_{\mathbf{Z},43}^{\pm} & q_{\mathbf{Z},44}^{\pm} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{C}'^{\pm} &= \begin{Bmatrix} C_1^{\pm} \\ C_3^{\pm} \\ C_4^{\pm} \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}'^{\pm}(X_3) &= \text{diag} \begin{Bmatrix} e^{\pm i \zeta_1 X_3} \\ e^{\pm i \zeta_3 X_3} \\ e^{\pm i \zeta_4 X_3} \end{Bmatrix}. \tag{3.86}
\end{aligned}$$

承續第 3.4.2 節內容，考慮一厚度  $h$  的平板，其上下表面 ( $X_3 = \pm h/2$ ) 的邊界條件是自由的，根據(3.85)式之結果，若待定係數  $C_k^{\pm}$  存在非零解，我們可推導出頻散及衰減關係的特徵方程式為

$$\Omega'_{\parallel}(\xi, \omega) \text{ or } \Omega'_{\parallel}(k, f) \equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}{}^{+} \mathbf{D}'^{+}(+h/2) & \mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}{}^{-} \mathbf{D}'^{-}(+h/2) \\ \mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}{}^{+} \mathbf{D}'^{+}(-h/2) & \mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}{}^{-} \mathbf{D}'^{-}(-h/2) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.87}$$

其中下標「 $\parallel$ 」代表平行  $X_1 X_3$  平面的面內波傳。再者，對稱與反對稱運動模態的區分仍延續(3.67)至(3.70)式的方法，可推導出頻散及衰減關係的特徵方程式為

$$\Omega_{\parallel}^{\text{S,A}}(\xi, \omega) \text{ or } \Omega_{\parallel}^{\text{S,A}}(k, f) \equiv \det \begin{pmatrix} q_{\mathbf{Z},11}^{\text{S,A}} & q_{\mathbf{Z},13}^{\text{S,A}} & q_{\mathbf{Z},14}^{\text{S,A}} \\ q_{\mathbf{Z},31}^{\text{S,A}} & q_{\mathbf{Z},33}^{\text{S,A}} & q_{\mathbf{Z},34}^{\text{S,A}} \\ q_{\mathbf{Z},41}^{\text{S,A}} & q_{\mathbf{Z},43}^{\text{S,A}} & q_{\mathbf{Z},44}^{\text{S,A}} \end{pmatrix} = 0, \tag{3.88}$$

其中矩陣內每一行向量(column vector)之元素定義為

$$q_{\mathbf{Z},ik}^{\text{S}} = \sin(\zeta_k h/2) q_{\mathbf{Z},ik}^{+} \quad (i=1,4), \quad q_{\mathbf{Z},3k}^{\text{S}} = \cos(\zeta_k h/2) q_{\mathbf{Z},3k}^{+}, \tag{3.89a}$$

$$q_{\mathbf{Z},ik}^{\text{A}} = \cos(\zeta_k h/2) q_{\mathbf{Z},ik}^{+} \quad (i=1,4), \quad q_{\mathbf{Z},3k}^{\text{A}} = \sin(\zeta_k h/2) q_{\mathbf{Z},3k}^{+}. \tag{3.89b}$$

### 3.4.3 面外波傳

根據第 3.2.3 節中所述的特殊情況，當  $\theta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  以及  $\theta = 45^\circ$  且  $T_1^{oi} = T_2^{oi}$ ，假設只考慮垂直  $X_1X_3$  平面且往  $X_1$  方向傳遞之面外波，意即只存在物理場  $U_2$ 。承續(3.73a)式，可得 2 個複數根  $\pm\zeta_2$ ，

$$\zeta_2 = i\sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}} = i\sqrt{\frac{\xi^2 \bar{c}_{66}^{T_1^i} - \omega^2 \rho_i}{\bar{c}_{44}^{T_3^i}}}. \quad (3.90)$$

參考(3.77)式，已知  $p_{22}^\pm = \pm 1$ ，並且由(3.78b)與(3.80b)式可得

$$q_{X,22}^\pm = \pm i \xi \bar{c}_{66}^{T_1^i}, \quad q_{Z,22}^\pm = i \zeta_2 \bar{c}_{44}^{T_3^i}. \quad (3.91a, b)$$

$$q_{Y,12}^\pm = \pm i \xi \bar{c}_{66}, \quad q_{Y,32}^\pm = i \zeta_2 \bar{c}_{44}. \quad (3.91c, d)$$

因此，配合上述結果，將(3.61)、(3.62)、(3.63)與(3.64)式簡化成下列型式：

$$U_2(\xi, X_3, \omega) = [p_{22}^+ \quad p_{22}^-] \begin{bmatrix} e^{+i\zeta_2 X_3} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta_2 X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2^+ \\ C_2^- \end{Bmatrix}, \quad (3.92)$$

$$V_{X,2}(\xi, X_3, \omega) = [q_{X,22}^+ \quad q_{X,22}^-] \begin{bmatrix} e^{+i\zeta_2 X_3} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta_2 X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2^+ \\ C_2^- \end{Bmatrix}, \quad (3.93)$$

$$V_{Y,1}(\xi, X_3, \omega) = [q_{Y,12}^+ \quad q_{Y,12}^-] \begin{bmatrix} e^{+i\zeta_2 X_3} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta_2 X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2^+ \\ C_2^- \end{Bmatrix}, \quad (3.94a)$$

$$V_{Y,3}(\xi, X_3, \omega) = [q_{Y,32}^+ \quad q_{Y,32}^-] \begin{bmatrix} e^{+i\zeta_2 X_3} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta_2 X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2^+ \\ C_2^- \end{Bmatrix}, \quad (3.94b)$$

$$V_{Z,2}(\xi, X_3, \omega) = [q_{Z,22}^+ \quad q_{Z,22}^-] \begin{bmatrix} e^{+i\zeta_2 X_3} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta_2 X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2^+ \\ C_2^- \end{Bmatrix}. \quad (3.95)$$

同理，針對一厚度  $h$  的平板，其上下表面 ( $X_3 = \pm h/2$ ) 的邊界條件是自由的，對稱與反對稱運動模態的特徵方程式分別為

$$\Omega_\perp^S(\xi, \omega) \text{ or } \Omega_\perp^S(k, f) \equiv \sin(\zeta_2 h/2) = 0, \quad (3.96a)$$

$$\Omega_\perp^A(\xi, \omega) \text{ or } \Omega_\perp^A(k, f) \equiv \cos(\zeta_2 h/2) = 0. \quad (3.96b)$$

其中下標「 $\perp$ 」代表著垂直  $X_1X_3$  平面的面外波。根據上述(3.96a, b)式，其解型式為

$$\zeta_2 h/2 = \mathbb{N}\pi. \quad (3.97)$$

其中  $\mathbb{N} = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 為對稱模態，及  $\mathbb{N} = m + 1/2$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) 為反對稱模態。

### 3.5 層狀介質結構

#### 3.5.1 全域矩陣法

不同於上一節所述，只針對一厚度  $h$  的單層平板，我們亦可考慮一個  $M$  層的層狀介質模型，如圖 3.5 所示，水平範圍為  $-\infty < X_1, X_2 < \infty$ ， $X_3$  軸為深度方向。回顧(3.61)與(3.64)式中單層的狀態向量  $\mathbf{U}$  與  $\mathbf{V}_Z$ ，為了表示上方便，去除下標  $Z$ ，將  $\mathbf{V}_Z$  與  $\mathbf{Q}_Z^\pm$  分別簡化為  $\mathbf{V}$  與  $\mathbf{Q}^\pm$ 。將它們推廣應用至第  $m$  層的狀態向量  $\mathbf{U}_m$  與  $\mathbf{V}_m$  並且合併表示為

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m(\xi, X_3, \omega) \\ \mathbf{V}_m(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m^+ & \mathbf{P}_m^- \\ \mathbf{Q}_m^+ & \mathbf{Q}_m^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_m^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_m^+ \\ \mathbf{C}_m^- \end{Bmatrix}, \quad (3.98)$$

其中  $Z_{m-1} \leq X_3 \leq Z_m$ ，且  $Z_{m-1}$  與  $Z_m$  分別為第  $m$  層的上表面與下表面位置，矩陣  $\mathbf{P}_m^\pm$  與  $\mathbf{Q}_m^\pm$  分別代表第  $m$  層的  $[p_{ik}^\pm]_m$  與  $[q_{ik}^\pm]_m$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ )，以及向量  $\mathbf{C}_m^\pm$  代表第  $m$  層的待定係數  $\{\mathbf{C}_k^\pm\}_m$ 。然而，對角矩陣  $\mathbf{D}_m^\pm(X_3)$  的假設可根據不同方法而會有所不同，本文是採用全域矩陣法[161, 163]，因此，所需要的矩陣定義分別表示如下：

$$\mathbf{D}_m^+(X_3) = \text{diag} \left[ \exp \{ i \zeta_k^{(m)} (X_3 - Z_{m-1}) \} \right], \quad (3.99a)$$

$$\mathbf{D}_m^-(X_3) = \text{diag} \left[ \exp \{ i \zeta_k^{(m)} (Z_m - X_3) \} \right], \quad (m = 1 \text{ to } M) \quad (3.99b)$$

$$\mathbf{E}_m = \text{diag} \left[ \exp \{ i \zeta_k^{(m)} h_m \} \right], \quad (3.99c)$$

其中  $\zeta_k^{(m)}$  代表第  $m$  層的複數根，滿足單值條件： $\text{Im}(\zeta_k^{(m)}) \geq 0$ ；以及  $h_m$  為第  $m$  層的厚度， $h_m = Z_m - Z_{m-1}$  且  $Z_0 = 0$ 。根據上述(3.99a-c)式，我們可知  $\mathbf{E}_m$  相當於第  $m$  層在上表面處  $Z_{m-1}$  的  $\mathbf{D}_m^-(Z_{m-1})$ ，或者是下表面處  $Z_m$  的  $\mathbf{D}_m^+(Z_m)$  之結果。

另外，假設層狀介質並非處於真空或空氣的情況，其上下兩邊皆由半無窮域的介質所包覆，因此，我們可令第 0 層與第  $(M+1)$  層分別代表上下半無窮域的介質。首先，在模型的第 0 層中須忽略了朝正  $X_3$  方向波傳的下傳波， $\mathbf{U}_0$  與  $\mathbf{V}_0$  可寫為

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0(\xi, X_3, \omega) \\ \mathbf{V}_0(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0^- & \mathbf{D}_0^-(X_3) \\ \mathbf{Q}_0^- & \mathbf{D}_0^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_0^- \end{Bmatrix}. \quad (X_3 \leq Z_0) \quad (3.100)$$

其次，第  $(M+1)$  層中須忽略了朝負  $X_3$  方向波傳的上傳波， $\mathbf{U}_{M+1}$  與  $\mathbf{V}_{M+1}$  可寫為

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{M+1}(\xi, X_3, \omega) \\ \mathbf{V}_{M+1}(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{M+1}^+ & \mathbf{D}_{M+1}^+ \\ \mathbf{Q}_{M+1}^+ & \mathbf{D}_{M+1}^+ \end{bmatrix} \{\mathbf{C}_{M+1}^+\}. \quad (X_3 \geq Z_M) \quad (3.101)$$

由層狀介質的截面來觀察，在第  $m$  層與第  $(m+1)$  層間的界面處，即  $X_3 = Z_m$  處，須考慮邊界連續的條件，可得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m(\xi, Z_m, \omega) \\ \mathbf{V}_m(\xi, Z_m, \omega) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{m+1}(\xi, Z_m, \omega) \\ \mathbf{V}_{m+1}(\xi, Z_m, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_m(\xi, \omega) \\ \mathbf{F}_m(\xi, \omega) \end{Bmatrix}. \quad (3.102)$$

上式的第一行代表相連兩層介質在界面處 ( $X_3 = Z_m$ ) 的  $\mathbf{U}_m$  與  $\mathbf{U}_{m+1}$  之間有一個不連續的躍遷(jump)  $\boldsymbol{\delta}_m$ ，包含了位移  $u_i$  與溫度差  $\Delta\Theta$ 。同理，第二行代表兩層介質的  $\mathbf{V}_m$  與  $\mathbf{V}_{m+1}$ ，與外界施加的  $\mathbf{F}_m$  之間的平衡方程式，包含了表面曳力  $t_i$  與輸入熱源  $q_{in}$ 。因此，將(3.98)式代入(3.102)式推導可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_m^+ \mathbf{E}_m & \mathbf{P}_m^- \\ \mathbf{Q}_m^+ \mathbf{E}_m & \mathbf{Q}_m^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_m^+ \\ \mathbf{C}_m^- \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{m+1}^+ & \mathbf{P}_{m+1}^- \mathbf{E}_{m+1} \\ \mathbf{Q}_{m+1}^+ & \mathbf{Q}_{m+1}^- \mathbf{E}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{m+1}^+ \\ \mathbf{C}_{m+1}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_m \\ \mathbf{F}_m \end{Bmatrix}. \quad (3.103)$$

在第 0 層與第 1 層間的界面處，即  $X_3 = Z_0$  處，可得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0(\xi, Z_0, \omega) \\ \mathbf{V}_0(\xi, Z_0, \omega) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1(\xi, Z_0, \omega) \\ \mathbf{V}_1(\xi, Z_0, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_0(\xi, \omega) \\ \mathbf{F}_0(\xi, \omega) \end{Bmatrix}, \quad (3.104)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0^- \\ \mathbf{Q}_0^- \end{bmatrix} \{\mathbf{C}_0^-\} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^+ & \mathbf{P}_1^- \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{Q}_1^+ & \mathbf{Q}_1^- \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_1^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_0 \\ \mathbf{F}_0 \end{Bmatrix}. \quad (3.104')$$

在第  $M$  層與第  $(M+1)$  層間的界面處，即  $X_3 = Z_M$  處，可得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_M(\xi, Z_M, \omega) \\ \mathbf{V}_M(\xi, Z_M, \omega) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{M+1}(\xi, Z_M, \omega) \\ \mathbf{V}_{M+1}(\xi, Z_M, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_M(\xi, \omega) \\ \mathbf{F}_M(\xi, \omega) \end{Bmatrix}, \quad (3.105)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_M^+ \mathbf{E}_M & \mathbf{P}_M^- \\ \mathbf{Q}_M^+ \mathbf{E}_M & \mathbf{Q}_M^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_M^+ \\ \mathbf{C}_M^- \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{M+1}^+ \\ \mathbf{Q}_{M+1}^+ \end{bmatrix} \{\mathbf{C}_{M+1}^+\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_M \\ \mathbf{F}_M \end{Bmatrix}. \quad (3.105')$$

根據(3.98)式可知，矩陣  $\mathbf{P}_m^\pm$  與  $\mathbf{Q}_m^\pm$  是依照(3.65)式中矩陣  $\mathbf{P}^\pm$  與  $\mathbf{Q}_Z^\pm$  的給定方式，其中元素  $p_{ik}^\pm$  與  $q_{Z,ik}^\pm$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) 是建立在受軸向預應之力之等向性或立方性材料的模型上，所以，這些元素會因材料的對稱特性不同而有所改變。因此，假設層狀介質中各層的材料性質皆為理想的等向性材料，而且，基於一般對於等向性材料的波傳推導皆是以

「勢函數」(potential function)假設作出發點，這與前面第 3.4 節關於「位移函數」假設的推導作比較，發現兩個假設在矩陣  $\mathbf{P}^\pm$  與  $\mathbf{Q}_Z^\pm$  的表示上是有差異的，然而，其物理意義及模擬計算結果則是相同的。在附錄 1 中，內容是以勢函數假設為出發，同時考慮有無熱彈耦合效應的情況，推導並整理矩陣  $\mathbf{P}^\pm$  與  $\mathbf{Q}_Z^\pm$  的表示式。因此，在等向性材料的簡化假設下，附錄 1 的矩陣整理對後續有關熱彈耦合層狀介質模型建立上是有幫助的。

### 3.5.2 三層結構且上下面皆相鄰半無窮域介質

考慮一個三層結構(tri-layered structure)，且上下介質皆為半無窮域(half-space)，參考圖 3.6 所示，其中  $\mathbf{F}_0$  是施加在  $X_3 = Z_0$  處朝負  $X_3$  方向的外界輸入，而  $\mathbf{F}_3$  是施加在  $X_3 = Z_3$  處朝正  $X_3$  方向的外界輸入。依據每一界面的邊界條件，並參考(3.103)、(3.104')與(3.105')的結果，可整理獲得一組聯立方程式表示為：

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc|cc|c} \mathbf{P}_0^- & -\mathbf{P}_1^+ & -\mathbf{P}_1^- \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_0^- & -\mathbf{Q}_1^+ & -\mathbf{Q}_1^- \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{P}_1^+ \mathbf{E}_1 & \mathbf{P}_1^- & -\mathbf{P}_2^+ & -\mathbf{P}_2^- \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^+ \mathbf{E}_1 & \mathbf{Q}_1^- & -\mathbf{Q}_2^+ & -\mathbf{Q}_2^- \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_2^+ \mathbf{E}_2 & \mathbf{P}_2^- & -\mathbf{P}_3^+ & -\mathbf{P}_3^- \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^+ \mathbf{E}_2 & \mathbf{Q}_2^- & -\mathbf{Q}_3^+ & -\mathbf{Q}_3^- \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_3^+ \mathbf{E}_3 & \mathbf{P}_3^- & -\mathbf{P}_4^+ \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3^+ \mathbf{E}_3 & \mathbf{Q}_3^- & -\mathbf{Q}_4^+ \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_0^- \\ \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^+ \\ \mathbf{C}_2^- \\ \mathbf{C}_3^+ \\ \mathbf{C}_3^- \\ \mathbf{C}_4^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ +\mathbf{F}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

以上式等號左端的全域矩陣來看，行(row)方向的區隔代表四個界面處 ( $X_3 = Z_0, Z_1, Z_2, Z_3$ ) 的邊界條件，列(columne)方向的區隔代表五個材料及其本身在  $X_3$  方向的波傳特性。等號右端則代表在  $X_3 = Z_0$  與  $Z_3$  處的外界輸入  $\mathbf{F}_0$  與  $\mathbf{F}_3$ 。

### 3.5.3 單層結構(Single-Layered Structure)

根據第 3.4 節所述，以一厚度為  $h$  的平板為例，如圖 3.1 所示，可將層狀介質假設為單層結構，並參考(3.106)式所示，可獲得一組聯立方程式表示為

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -\mathbf{Q}^+ & -\mathbf{Q}^- \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{Q}^+ \mathbf{E} & \mathbf{Q}^- \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ +\mathbf{F}_1 \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

如圖 3.1 所示，考慮在平板最上層的上表面( $X_3 = Z_0$ )須滿足曳力為零，且熱源輸入滿足(3.5')式的分佈。另外，在最下層的下表面( $X_3 = Z_1$ )則滿足無任何曳力作用與熱能流通，即： $\mathbf{F}_0 = \{0, 0, 0, Q_{in}\}^T$  與  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$ 。利用 Cramer 法則求出(3.107)式的待定係數 $\{\mathbf{C}^+, \mathbf{C}^-\}^T$ ，由(3.61)式獲得位移場與溫度差的核函數(kernel function)  $\mathbf{U}(\zeta, X_3, \omega)$ ，再利用波數積分 [124, 125]，求得雷射激發的熱彈聲波在某一位置( $X_1, X_3$ )的頻率響應 $\mathbf{U}(X_1, X_3, \omega)$ 。

### 3.5.4 雙層(Double-Layered)與三層(Tri-Layered)結構

考慮一層狀結構由兩個與三個不同性質的材料所組成，分別整理可得

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -Q_1^+ & -Q_1^- E_1 & 0 & 0 \\ P_1^+ E_1 & P_1^- & -P_2^+ & -P_2^- E_2 \\ \hline Q_1^+ E_1 & Q_1^- & -Q_2^+ & -Q_2^- E_2 \\ 0 & 0 & Q_2^+ E_2 & Q_2^- \end{array} \right] \begin{Bmatrix} C_1^+ \\ C_1^- \\ C_2^+ \\ C_2^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ 0 \\ +F_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.108)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} -Q_1^+ & -Q_1^- E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1^+ E_1 & P_1^- & -P_2^+ & -P_2^- E_2 & 0 & 0 \\ \hline Q_1^+ E_1 & Q_1^- & -Q_2^+ & -Q_2^- E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2^+ E_2 & P_2^- & -P_3^+ & -P_3^- E_3 \\ 0 & 0 & Q_2^+ E_2 & Q_2^- & -Q_3^+ & -Q_3^- E_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & Q_3^+ E_3 & Q_3^- \end{array} \right] \begin{Bmatrix} C_1^+ \\ C_1^- \\ C_2^+ \\ C_2^- \\ C_3^+ \\ C_3^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +F_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.109)$$

上述二式之層狀結構分別如圖 3.7(a, b)所示。在後續有關液體負載之單層平板的模型則是使用上述(3.108)式所示，討論平板受到黏滯性液體負載影響的頻散與衰減特性。

### 3.5.5 單層結構且其中一面相鄰半無窮域介質

考慮一個單層結構，且相鄰的其中一面為半無窮域，整理可得

$$\left[ \begin{array}{c|cc} P_0^- & -P_1^+ & -P_1^- E_1 \\ \hline Q_0^- & -Q_1^+ & -Q_1^- E_1 \\ 0 & P_1^+ E_1 & P_1^- \end{array} \right] \begin{Bmatrix} C_0^- \\ C_1^+ \\ C_1^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_0 \\ +F_1 \end{Bmatrix}, \quad (3.110a)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -Q_1^+ & -Q_1^- E_1 & 0 \\ \hline P_1^+ E_1 & P_1^- & -P_2^+ \\ Q_1^+ E_1 & Q_1^- & -Q_2^+ \end{array} \right] \begin{Bmatrix} C_1^+ \\ C_1^- \\ C_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ +F_1 \end{Bmatrix}. \quad (3.110b)$$

上述(3.110a)式代表相鄰一個上半無窮域，適用於一單層平板覆蓋一個半無窮域液體，如圖 3.7(c)所示；而(3.110b)式則代表相鄰一個下半無窮域，適用於一單層薄膜鍍在一個半無窮域基材上，如圖 3.7(d)所示。

## 3.6 光聲訊號的頻率響應

### 3.6.1 傅立葉積分轉換

回顧第 3.1 節中有關空間頻譜函數以 Fourier 積分轉換對表示，如(3.6'a, b)式所示，應用此方法至  $u_I$  與  $\Delta\Theta$ ，其  $(\xi, X_3, \omega)$  與  $(X_1, X_3, \omega)$  域間的積分轉換對為

$$\begin{cases} U_I(\xi, X_3, \omega) \\ U_4(\xi, X_3, \omega) \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} u_I(X_1, X_3, \omega) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, \omega) \end{cases} e^{-i\xi X_1} dX_1, \quad (3.111a)$$

$$\begin{cases} u_I(X_1, X_3, \omega) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, \omega) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} U_I(\xi, X_3, \omega) \\ U_4(\xi, X_3, \omega) \end{cases} e^{i\xi X_1} d\xi, \quad (3.111b)$$

其中下標  $I, J = 1, 2, 3$ 。同樣地，其  $(X_1, X_3, \omega)$  與  $(X_1, X_3, t)$  域間的積分轉換對為

$$\begin{cases} u_I(X_1, X_3, \omega) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, \omega) \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} u_I(X_1, X_3, t) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, t) \end{cases} e^{i\omega t} dt, \quad (3.112a)$$

$$\begin{cases} u_I(X_1, X_3, t) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, t) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} u_I(X_1, X_3, \omega) \\ \Delta\Theta(X_1, X_3, \omega) \end{cases} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.112b)$$

以一單層結構為例，狀態向量  $\mathbf{U}$  的待定係數  $\{\mathbf{C}^+ \mathbf{C}^-\}^T$ ，藉由給定的外界輸入  $\mathbf{F}_0$  與  $\mathbf{F}_1$ ，利用 Cramer 法則求解聯立方程式(3.107)獲得。代入(3.61)式獲得狀態向量  $\mathbf{U}$ ，利用上述(3.111b)與(3.112b)式的積分轉換，求得單層結構中某一位置  $(X_1, X_3)$  的頻域  $\omega$  與時域  $t$  的響應。針對具能量耗散的熱彈耦合系統，可知傳遞的波數  $\xi$  為一複數，因此，這過程中需要對波數  $\xi$  作積分，數值方法可參考文獻[165, 166]。然而，為了方便在數值上的求解，在本論文中採用的是第 2.4.3 節所述的正則模態展開法。

### 3.6.2 表面施加的曳力與熱源

首先，回顧第 2.4.3 節的推導結果，並延續第 3.4.1 節的平板導波的波傳分析，考慮一個厚度為  $h$  的單層平板，其上下邊界皆為自由的，即為曳力為零與絕熱的邊界。經由

特徵方程式(3.71)求解獲得特定的波數 $\xi$ 與頻率 $\omega$ 間關係，如圖 3.8 所示，再代入(3.61)至(3.64)式來獲得在某一組 $(\xi, \omega)$ 下的特徵模態 $\square_n(\xi_n, X_3, \omega)$ ，其中 $\square$ 為 $\mathbf{u}$ 、 $\Delta\Theta$ 、 $\mathbf{T}$ 或 $\mathbf{q}$ 。

此外，根據(3.92b)式的模態展開式，假設受外界輸入源激發後的物理場 $\square$ 表示為

$$\square(X_1, X_3, \omega) = \sum_n a_n(X_1, \omega) \square_n(\xi_n, X_3, \omega). \quad (3.113)$$

考慮一個厚度為 $h$ 的單層平板，在其上表面( $X_3 = h/2$ ，即 $X_3 = \text{top}$ )受到一個外界施加曳力 $\mathbf{t}_Z^\nabla$  ( $\sim t_{Z,I}^\nabla$ ,  $I=1,2,3$ )，或是一個調制雷射光束照射造成的熱源輸入 $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$ ，其中上標「 $\nabla$ 」代表輸入意思。下表面( $X_3 = -h/2$ ，即 $X_3 = \text{bottom}$ )的邊界是自由的，意即曳力為零與絕熱邊界。此外，平板內部考慮沒有任何輸入源 $\mathbf{b}$ 或 $h$ 。由於只有邊界上的輸入源，根據(2.98)式之定義，可知

$$f_{n'}^s(X_1, \omega) = \left\{ \mathbf{t}_Z^\nabla \cdot (i\omega \mathbf{u}_{n'}^*) + \Delta\Theta_{n'}^* (\Theta_i^{-1} \mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla) \right\} \Big|_{X_3=Z_{\text{top}}}, \quad (3.114)$$

其中 $Z_{\text{top}}$ 為平板上表面的位置，亦即 $Z_{\text{top}} = h/2$ 。假設施加曳力 $\mathbf{t}_Z^\nabla$ 與熱源輸入 $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$ 的作用範圍分別為 $\alpha_t \leq X_1 \leq \beta_t$ 與 $\alpha_q \leq X_1 \leq \beta_q$ ，由(2.100)式可知正 $X_1$ 方向傳遞之模態振幅為

$$a_n(X_1, \omega) = a_n^t(X_1, \omega) + a_n^q(X_1, \omega), \quad (3.115)$$

其中 $a_n^t(X_1, \omega)$ 與 $a_n^q(X_1, \omega)$ 分別為 $\mathbf{t}_Z^\nabla$ 與 $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$ 所造成的模態振幅，其結果會因為表面檢測的水平位置位置 $X_1$ 與作用範圍間的相對關係而有所不同，其表示分別整理如下[126]：

$$a_n^t(X_1, \omega) = \begin{cases} 0, & X_1 \leq \alpha_t \\ \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ i\omega \mathbf{u}_{n'}^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \int_{\alpha_t}^{X_1} \mathbf{t}_Z^\nabla(\eta_1, \omega) e^{-i\xi_n \eta_1} d\eta_1 \right\} e^{i\xi_n X_1}, & \alpha_t < X_1 < \beta_t \\ \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ i\omega \mathbf{u}_{n'}^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \int_{\alpha_t}^{\beta_t} \mathbf{t}_Z^\nabla(\eta_1, \omega) e^{-i\xi_n \eta_1} d\eta_1 \right\} e^{i\xi_n X_1}, & \beta_t \leq X_1 \end{cases} \quad (3.116a)$$

$$a_n^q(X_1, \omega) = \begin{cases} 0, & X_1 \leq \alpha_q \\ \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ \Delta\Theta_{n'}^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \Theta_i^{-1} \int_{\alpha_q}^{X_1} \mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(\eta_1, \omega) e^{-i\xi_n \eta_1} d\eta_1 \right\} e^{i\xi_n X_1}, & \alpha_q < X_1 < \beta_q \\ \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ \Delta\Theta_{n'}^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \Theta_i^{-1} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(\eta_1, \omega) e^{-i\xi_n \eta_1} d\eta_1 \right\} e^{i\xi_n X_1}, & \beta_q \leq X_1 \end{cases} \quad (3.116b)$$

反之，負  $X_1$  方向傳遞情況則是將上述變數  $\xi_n$  替換為  $-\xi_n$  ( $=\xi_{\bar{n}}$ )，將  $n$  替換為  $\bar{n}$ ，再依照位置  $X_1$  與作用範圍間的相對關係，可獲得負  $X_1$  方向傳遞之  $a_n^t(X_1, \omega)$  與  $a_n^q(X_1, \omega)$  為

$$a_n^t(X_1, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{4P_{\bar{n}, \bar{n}}} \left\{ i\omega \mathbf{u}_{\bar{n}}^*(\xi_{\bar{n}}, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \int_{\alpha_t}^{\beta_t} \mathbf{t}_Z^\nabla(\eta_1, \omega) e^{i\xi_{\bar{n}}\eta_1} d\eta_1 \right\} e^{-i\xi_{\bar{n}}X_1}, & X_1 \leq \alpha_t \\ \frac{1}{4P_{\bar{n}, \bar{n}}} \left\{ i\omega \mathbf{u}_{\bar{n}}^*(\xi_{\bar{n}}, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \int_{\beta_t}^{X_1} \mathbf{t}_Z^\nabla(\eta_1, \omega) e^{i\xi_{\bar{n}}\eta_1} d\eta_1 \right\} e^{-i\xi_{\bar{n}}X_1}, & \alpha_t < X_1 < \beta_t \\ 0, & \beta_t \leq X_1 \end{cases} \quad (3.117a)$$

$$a_n^q(X_1, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{4P_{\bar{n}, \bar{n}}} \left\{ \Delta\Theta_{\bar{n}}^*(\xi_{\bar{n}}, Z_{\text{top}}, \omega) \Theta_i^{-1} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(\eta_1, \omega) e^{i\xi_{\bar{n}}\eta_1} d\eta_1 \right\} e^{-i\xi_{\bar{n}}X_1}, & X_1 \leq \alpha_q \\ \frac{1}{4P_{\bar{n}, \bar{n}}} \left\{ \Delta\Theta_{\bar{n}}^*(\xi_{\bar{n}}, Z_{\text{top}}, \omega) \Theta_i^{-1} \int_{\beta_q}^{X_1} \mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(\eta_1, \omega) e^{i\xi_{\bar{n}}\eta_1} d\eta_1 \right\} e^{-i\xi_{\bar{n}}X_1}, & \alpha_q < X_1 < \beta_q \\ 0, & \beta_q \leq X_1 \end{cases} \quad (3.117b)$$

明顯地，(3.116a, b)與(3.117a, b)式是屬於區段式積分，輸入  $\mathbf{t}_Z^\nabla(X_1, \omega)$  與  $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(X_1, \omega)$  相當於核函數(kernel function)， $e^{i\xi_n X_1}$  為振盪函數(oscillatory function)，當波數  $\xi_n$  越高時其數值振盪越強烈，為增加在積分上的準確性，數值求解方法可參考文獻[165, 166]，它是用 Chebyshev 多項式去擬合核函數，再搭配相乘的振盪函數  $e^{i\xi_n X_1}$  去作積分，並稱之為修正的 Clenshaw-Curtis 積分法[165]。

在一般實驗情況下，無論是使用超音波探頭( $\mathbf{t}_Z^\nabla$ )或是雷射光束( $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$ )作激發源，欲檢測的表面水平位置  $X_1$  會在  $\mathbf{t}_Z^\nabla$  與  $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$  的作用範圍之外，如同(3.116a, b)的第 3 式，則積分上下限範圍可考慮延伸至  $\pm\infty$  [124]，此積分依舊會涵蓋了  $\mathbf{t}_Z^\nabla$  與  $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$  的作用範圍。我們可發現新的積分型式相當於一個空間域  $X_1$  至波數域  $\xi_n$  的 Fourier 積分轉換，型式如同(3.111a)式所示。因此，則上述(3.116a, b)式可改寫為

$$a_n^t(X_1, \omega) = \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ i\omega \mathbf{u}_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \mathbf{T}_Z^\nabla(\xi_n, \omega) \right\} e^{i\xi_n X_1}, \quad (3.118a)$$

$$a_n^q(X_1, \omega) = \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ \Delta\Theta_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) [\Theta_i^{-1} \mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega)] \right\} e^{i\xi_n X_1}, \quad (3.118b)$$

同理，負  $X_1$  方向傳遞情況，(3.118a, b)式亦可改寫為

$$a_n^t(X_1, \omega) = \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ i\omega \mathbf{u}_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \mathbf{T}_Z^\nabla(\xi_n, \omega) \right\} e^{-i\xi_n X_1}, \quad (3.119a)$$

$$a_n^q(X_1, \omega) = \frac{1}{4P_{n,n'}} \left\{ \Delta\Theta_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) [\Theta_i^{-1} \mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega)] \right\} e^{-i\xi_n X_1}, \quad (3.119b)$$

其中  $\mathbf{T}_Z^\nabla \sim T_{Z,I}^\nabla$  ( $I=1,2,3$ )，以及  $\mathbf{T}_Z^\nabla(\xi_n, \omega)$  與  $\mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega)$  兩者分別為  $\mathbf{t}_Z^\nabla(X_1, \omega)$  與  $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(X_1, \omega)$  的空間域 Fourier 轉換，如同(3.111a)式的積分型式，它們的轉換表示分別為

$$\mathbf{T}_Z^\nabla(\xi_n, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}_Z^\nabla(X_1, \omega) e^{-i\xi_n X_1} dX_1, \quad (3.120a)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla(X_1, \omega) e^{-i\xi_n X_1} dX_1. \quad (3.120b)$$

此一假設方式，除了能滿足位置  $X_1$  與作用範圍間的相對關係，亦能簡化(3.116a, b)式中積分項，直接代入在  $(\xi, \omega)$  域的外界輸入  $\mathbf{T}_Z^\nabla$  與  $\mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla$ 。

### 3.6.3 雷射激發之光聲訊號

最後，將(3.115)與(3.118a, b)三式代入(3.113)式，可獲得平板上表面受到施加曳力  $\mathbf{t}_Z^\nabla$  與熱源輸入  $\mathbf{q}_{\text{in}}^\nabla$  激發後於位置  $(X_1, X_3)$  的物理場  $\square^t$  與  $\square^q$  分別表示如下：

$$\square^t(X_1, X_3, \omega) = \sum_n \left\{ i\omega \mathbf{u}_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \cdot \mathbf{T}_Z^\nabla(\xi_n, \omega) \right\} \frac{1}{4P_{n,n'}} \square_n(\xi_n, X_3, \omega) e^{i\xi_n X_1}, \quad (3.121a)$$

$$\square^q(X_1, X_3, \omega) = \sum_n \left\{ \Delta\Theta_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) [\Theta_i^{-1} \mathbf{Q}_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega)] \right\} \frac{1}{4P_{n,n'}} \square_n(\xi_n, X_3, \omega) e^{i\xi_n X_1}, \quad (3.121b)$$

並利用時域逆 Fourier 轉換獲得為時域  $t$  的物理場  $\square^t$  與  $\square^q$  分別為

$$\square^t(X_1, X_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \square^t(X_1, X_3, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.122a)$$

$$\square^q(X_1, X_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \square^q(X_1, X_3, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.122b)$$

其中  $\square$  為  $\mathbf{u}$ 、 $\Delta\Theta$ 、 $\mathbf{T}$  或  $\mathbf{q}$ 。根據(2.121a, b)式所示， $\frac{1}{4P_{n,n'}} \square_n(\xi_n, X_3, \omega) e^{i\xi_n X_1}$  此項相當於特徵模態經歸一化(normalization)的原始頻率響應，因此，令

$$P_{n,n'} = 1, \quad (3.123)$$

它可視為系統物理場振幅大小的歸一指標，物理意義相當於沿  $X_1$  方向傳遞的時間平均功率流密度  $P_{n,n'}$  考慮為一個單位。如此一來，(3.61)至(3.64)式中的待定係數  $\{\mathbf{C}^+ \mathbf{C}^-\}^T$  之大小即可確定，獲得之狀態向量  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}_X$ 、 $\mathbf{V}_Y$  與  $\mathbf{V}_Z$  即可視為歸一化的特徵模態。再者，為了瞭解每一個特徵模態本身是否容易受外界輸入所影響，定義第  $n$  個特徵模態在某一頻率  $\omega$  下於上表面的可激發性函數(excitability function)為

$$E_I(\xi_n, \omega) \equiv \left| v_I^{(n)*}(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \right| = \left| i\omega u_I^{(n)*}(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \right|, \quad (I=1,2,3) \quad (3.124a)$$

$$E_4(\xi_n, \omega) \equiv \left| \Delta\Theta_n^*(\xi_n, Z_{\text{top}}, \omega) \right|, \quad (3.124b)$$

其中  $E_I(\xi_n, \omega)$  相當於表面質點在  $X_1$ 、 $X_2$  與  $X_3$  三個方向上的位移速度大小，配合三個方向上的施加曳力  $T_{Z,I}^\nabla$  ( $I=1,2,3$ )；而  $E_4(\xi_n, \omega)$  相當於表面質點的溫度大小，配合熱源輸入  $q_{\text{in}}^\nabla$ 。兩者之間的大小須相互配合，在頻譜  $E_I$  或  $E_4$  振幅峰值所對應之頻率處，施予適當的輸入  $T_{Z,I}^\nabla$  或  $q_{\text{in}}^\nabla$ ，才能獲得振幅較明顯的頻譜響應，換句話說，可藉由頻率調制的輸入來控制所要激發導波模態。因此，(2.121a, b)式中的大括號  $\{ \}$  之大小相當於特徵模態與輸入源間耦合的權重(weighting)，判斷特徵模態於介質上表面的可激發性，可瞭解在同一頻率  $\omega$  下不同特徵模態間對與頻率響應的影響大小。

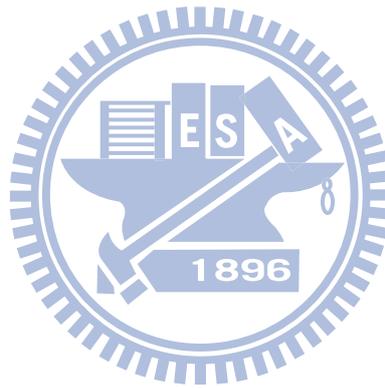
假設只考慮雷射照射上表面所提供的熱源輸入，其能量的空間分佈如圖 3.1 所示，再根據(3.121b)式所示，其中輸入源  $Q_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega)$  可引用(3.5')式中  $Q'_{\text{in}}(\xi_n, X_2, \omega)$  在  $X_2 = 0$  時的結果，即輸入源位置落在波傳  $X_1$  方向上。因此，令

$$Q_{\text{in}}^\nabla(\xi_n, \omega) = (1-R)I_0 G'_0(\xi) F(\omega), \quad (3.125)$$

其中波數函數  $G'_0(\xi) \equiv G'(\xi, X_2 = 0) = \exp(-\frac{1}{8}a_0^2 \xi^2) \cdot \frac{\sqrt{2/\pi}}{a_0}$ ，頻率分佈函數  $F(\omega)$  可依照雷射輸出型式而給定不同，連續波型式參考(3.9)式，脈衝型式參考(3.10)式。再者，若考慮欲檢測位置亦在上表面位置，令  $X_3 = \text{top}$ ，經由(3.121b)式可計算出雷射激發熱彈聲波在位置  $X_1$  光聲頻域響應訊號  $\square^q(X_1, Z_{\text{top}}, \omega)$ ，再利用(3.122b)式的時域逆 Fourier 轉換來獲得其時域訊號  $\square^q(X_1, Z_{\text{top}}, t)$ 。除此之外，考慮第 3.4 節的初始應力  $T_1^{oi}$  與  $T_2^{oi}$  以及波傳角度  $\theta$ ，並探討計算獲得的光聲響應訊號。

### 3.6.4 層狀介質之應用

欲將前兩節推導應用至層狀介質上，首先，必須先獲得波數 $\xi$ 與頻率 $\omega$ 間的頻散與衰減關係。根據第 3.5 節的結果，參考不同層狀結構所架構的聯立方程式，例如(3.106)至(3.110)式，假設等號右端為零，可獲得的矩陣行列式即為該結構的特徵方程式。數值求解該特徵方程式並獲得 $(\xi, \omega)$ 的關係，將其代回每一層的狀態向量 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}_X$ 、 $\mathbf{V}_Y$ 與 $\mathbf{V}_Z$ ，如同(3.61)至(3.64)式所示，此結果即為每一層的特徵模態 $\square_n(\xi_n, X_3, \omega)$ ，接著，再經由(3.121)式獲得歸一化的狀態向量(或特徵模態)。如同第 3.6.2 節的假設，在層狀介質的上表面處( $X_3 = Z_0$ ，即 $X_3 = \text{top}$ )施予一個外界施加曳力 $\mathbf{t}_Z^\nabla$ ，或是一個調制雷射光束照射造成的熱源輸入 $\mathbf{q}_m^\nabla$ 。然後，接下的推導過程則如同前兩節內容所述，唯一不同處是在時間平均功率流密度 $P_{n,n'}$ 與特徵模態 $\square_n(\xi_n, X_3, \omega)$ 兩個部分須，將單層結構推廣至多層結構。



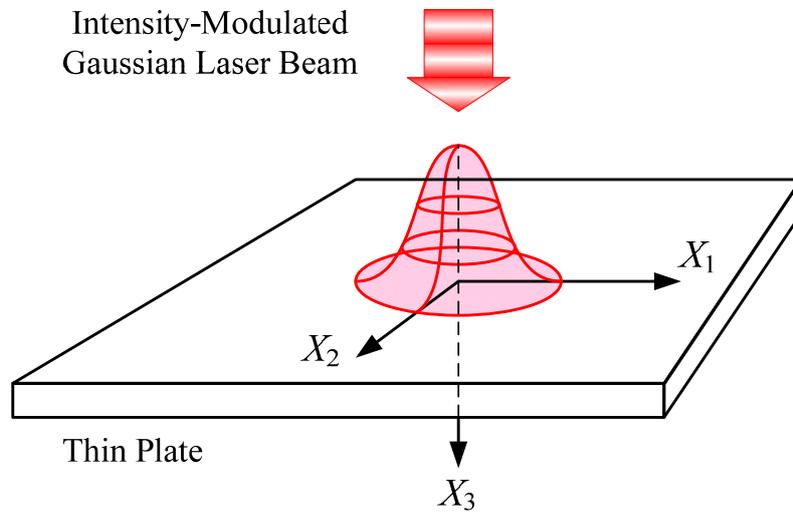


圖 3.1 週期調制且強度為 Gauss 分佈的光束照射在單一平板表面的示意圖。

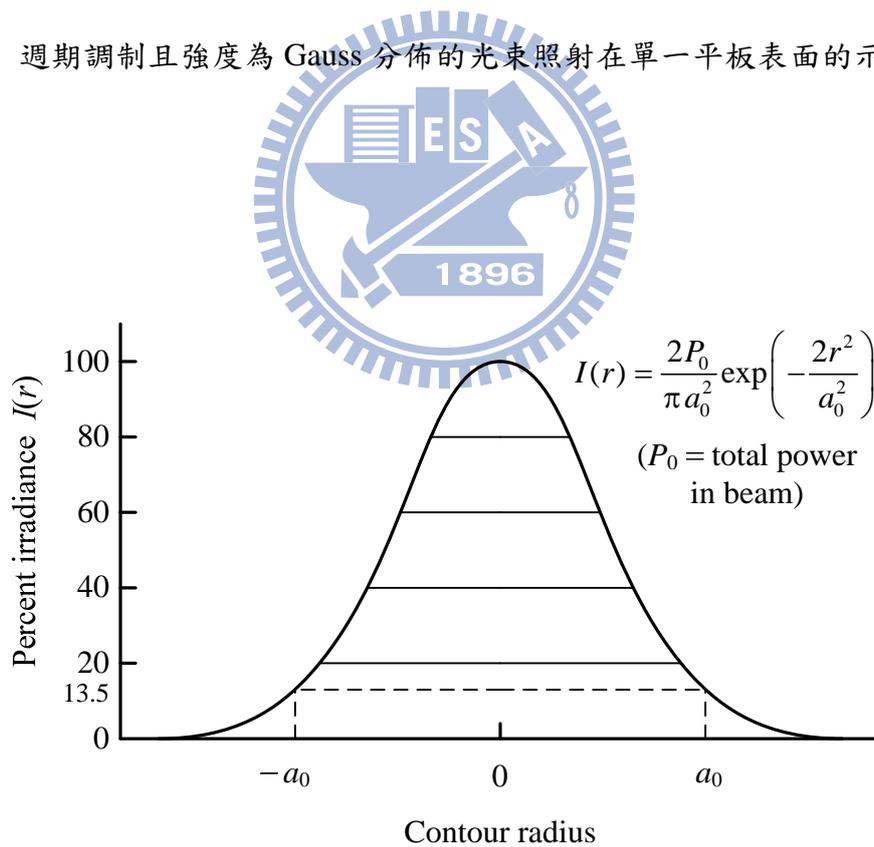


圖 3.2 Gauss 分佈函數圖。

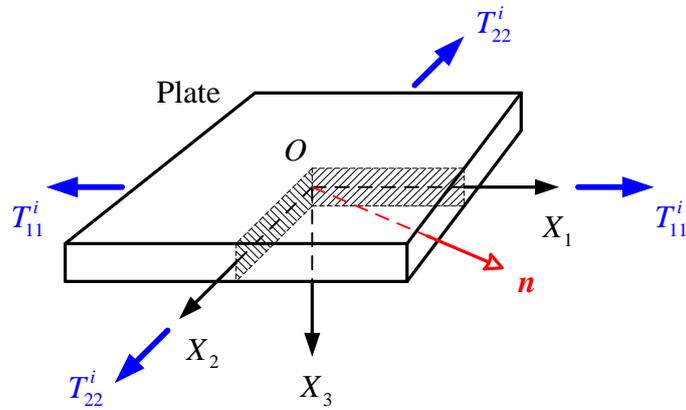


圖 3.3 座標轉換前，單一平板受水平軸向初始應力之示意圖，  
其中  $n$  為波傳方向。

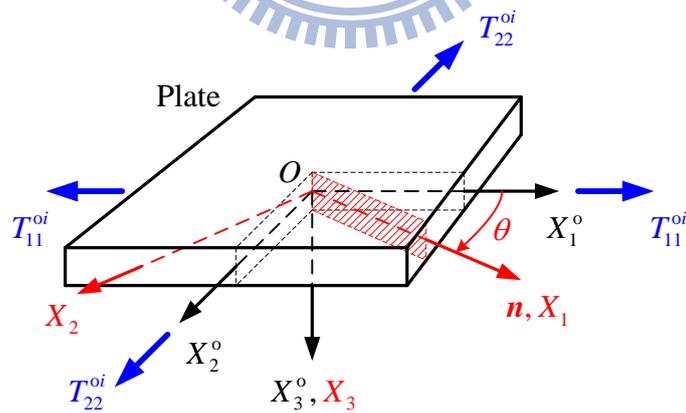


圖 3.4 座標轉換後，單一平板受水平軸向初始應力之示意圖，  
其中波傳方向  $n$  與  $X_1$  軸平行。

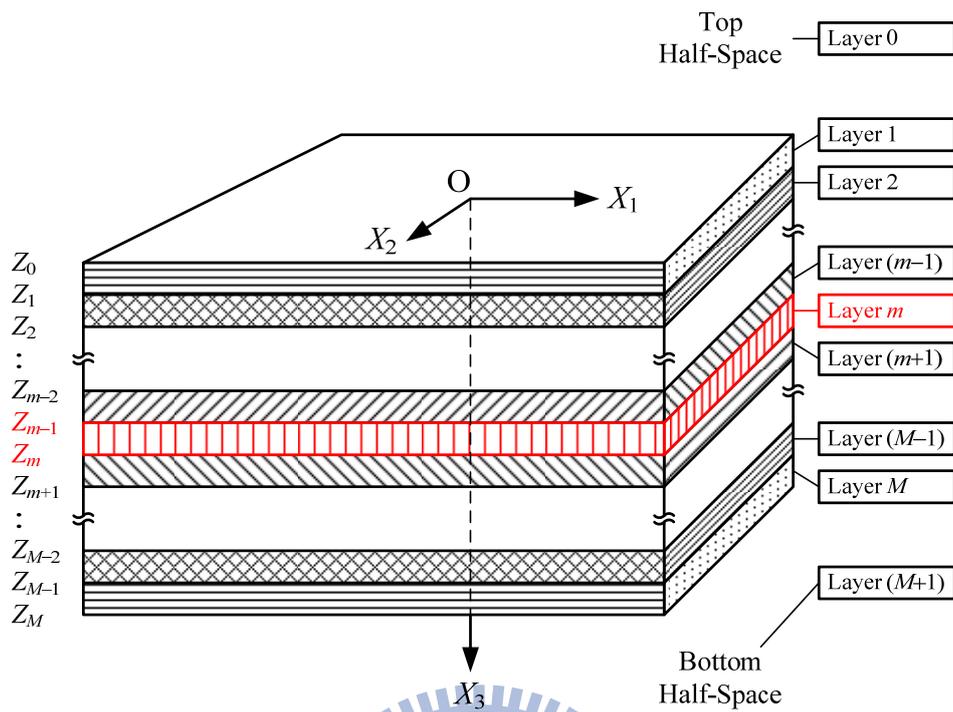


圖 3.5 層狀介質的結構示意圖。

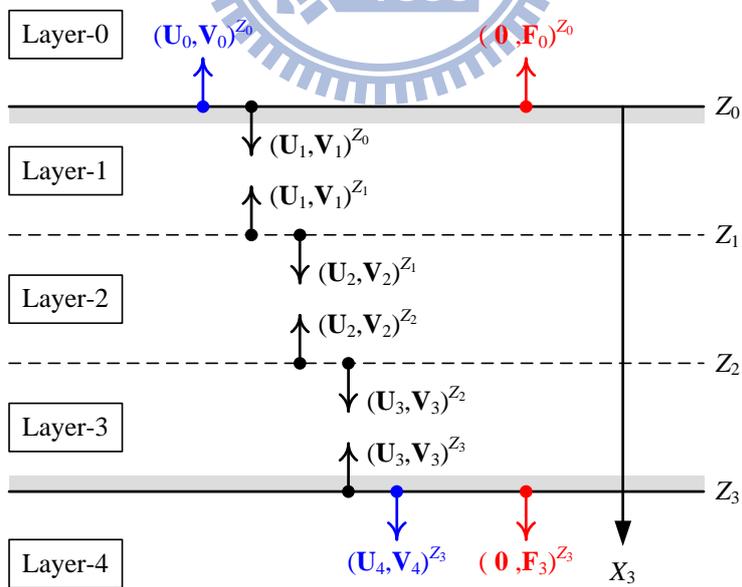


圖 3.6 三層結構且上下面皆相鄰半無窮域介質的示意圖。

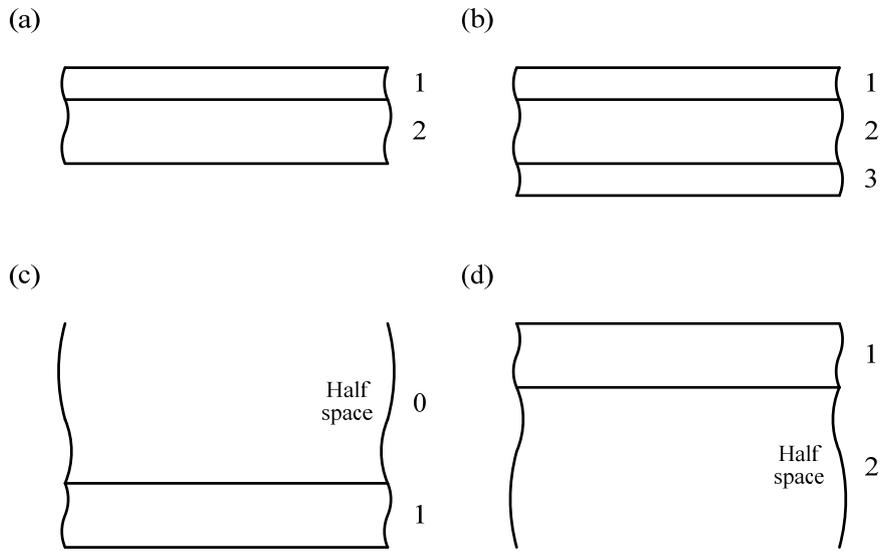


圖 3.7 層狀結構模型的示意圖。

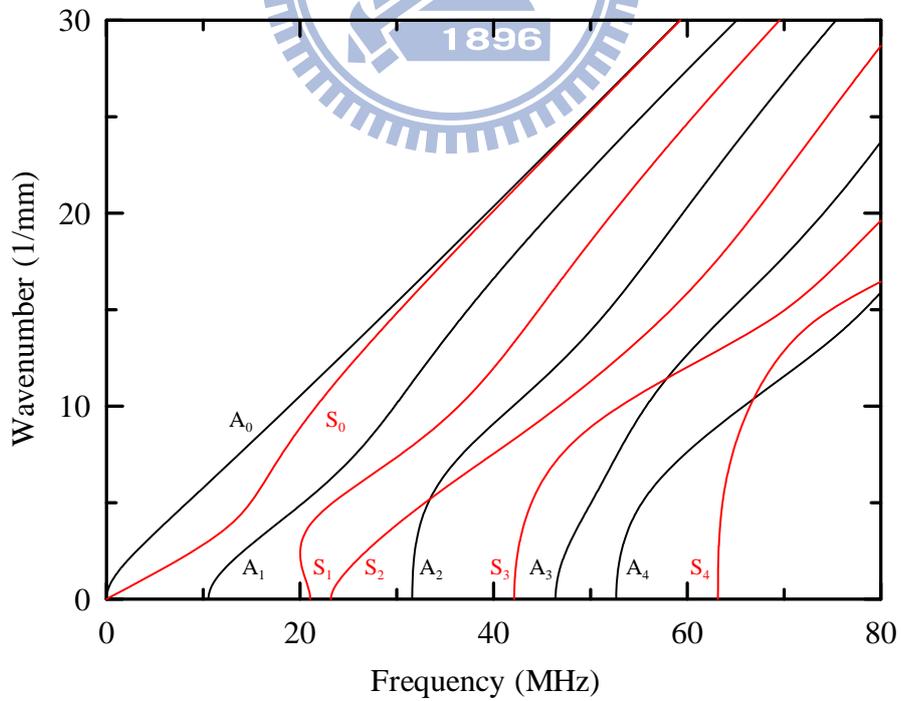


圖 3.8 單層平板的波數與頻率關係。

## 第四章 數值結果與討論

本章是依據第三章的理論推導來撰寫數值程式，主要是針對平板之熱彈導波的頻散及衰減關係作分析討論。根據第 3.4 節所述，考慮一個受水平單軸方向之初始應力作用的單層平板，計算繪製出在板波傳遞方向與初始應力方向的夾角分別為  $0^\circ$ 、 $90^\circ$  與  $45^\circ$  之對稱與反對稱模態的頻散及衰減曲線圖，並且討論其物理意義及比較差異。

### 4.1 單位和材料係數

對於材料係數的給定上，我們一般會考慮 M.K.S. 制的基本單位，例如公斤(kg)、公尺(m)、秒(s)以及度( $^\circ\text{K}$ )。為了避免計算時各係數之間的尺度差異過大，造成數值運算上的不穩定，我們將上述的基本單位設定改為毫克(mg)、毫米(mm)、微秒( $\mu\text{s}$ )以及千度( $\text{k}^\circ\text{K}$ )。配合第 3.2.2 節有關材料係數之假設，我們以銅箔(Cu)當作本研究欲探討的等向性材料，參考文獻 167 與 168 所提供的材料係數，其係數給定如表 4.1 的第一列自然狀態所示。再根據聲彈理論的描述，可獲得受水平單軸拉伸應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  的有效係數，如表 4.1 的第二列與第三列所示。顯而易見，根據在  $X_2X_3$  平面上的關係  $\bar{c}_{22} = \bar{c}_{33} \approx \bar{c}_{23} + 2\bar{c}_{44}$ 、 $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3$  與  $\bar{k}_2 = \bar{k}_3$ ，可知在上述兩單軸拉伸應力  $T_1^i$  作用下，材料係數在垂直於  $T_1^i$  施予方向的平面呈現出近似等向性(nearly isotropy)的特性，因此，整體可視為橫向等向性(transversely isotropic)材料。

### 4.2 徹體波的相速度

首先，先定義在自然狀態下的波速，包括縱波(L0)、橫波(S0)、Lamé 模態(Lame0)與雷利波(R0)，如下表示：

$$c_{L0} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_0}}, \quad c_{S0} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho_0}}, \quad (4.1a, b)$$

$$c_{\text{Lame}0} = \sqrt{2} c_{S0}, \quad c_{R0} = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} c_{S0}. \quad (4.1c, d)$$

其中  $\nu = 0.367$  為銅箔的泊松比(Poisson's ratio)。(4.1c)式的定義是參考文獻 169 與 170 的內容，而(4.1d)式的定義是參考文獻 171 的內容。參考第 3.3.4 節中(3.45a, b)式，或者是附錄 1 中(A.3)式，可得在自然狀態下的準縱波(QL0)與準熱波(Qth0)分別為

$$c_{QL0} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_{L0}^2 + c_{th0}^2 + c_{\lambda 0}^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(c_{L0}^2 + c_{th0}^2 + c_{\lambda 0}^2)^2 - c_{L0}^2 c_{th0}^2}}, \quad (4.2a)$$

$$c_{Qth0} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_{L0}^2 + c_{th0}^2 + c_{\lambda 0}^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(c_{L0}^2 + c_{th0}^2 + c_{\lambda 0}^2)^2 - c_{L0}^2 c_{th0}^2}}, \quad (4.2b)$$

其中  $c_{th0}$  為熱波(th0)的波速， $c_{\lambda 0}$  為熱彈係數  $\lambda$  造成的耦合項，其定義分別為

$$c_{th0}^2 = -\frac{i\omega k}{\Theta_0 \alpha}, \quad c_{\lambda 0}^2 = \frac{\lambda^2}{\rho_0 \alpha}. \quad (4.3a, b)$$

此外，為了方便討論受預應力作用後初始狀態與原本自然狀態間的差異，忽略熱彈耦合效應，在  $X_1$ 、 $X_2$  與  $X_3$  方向的縱波(L)與橫波(S)分別定義如下：

$$c_{L1}^{[100]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{11}^{T_1^i}}{\rho_i}}, \quad c_{S1}^{[001]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}^{T_1^i}}{\rho_i}}, \quad c_{S1}^{[010]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}^{T_1^i}}{\rho_i}}, \quad (4.4a-c)$$

$$c_{L2}^{[010]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{22}^{T_2^i}}{\rho_i}}, \quad c_{S2}^{[001]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{44}^{T_2^i}}{\rho_i}}, \quad c_{S2}^{[100]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}^{T_2^i}}{\rho_i}}, \quad (4.5a-c)$$

$$c_{L3}^{[001]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{33}}{\rho_i}}, \quad c_{S3}^{[100]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{55}}{\rho_i}}, \quad c_{S3}^{[010]} = \sqrt{\frac{\bar{c}_{44}}{\rho_i}}, \quad (4.6a-c)$$

其中上標  $[IJK]$  代表平面波的偏振方向，下標阿拉伯數字代表其波傳方向。接著，初始狀態與自然狀態間的波速差分別給定如下：

$$\Delta c_{L1}^{[100]} = c_{L1}^{[100]} - c_{L0}, \quad \Delta c_{S1}^{[001]} = c_{S1}^{[001]} - c_{S0}, \quad \Delta c_{S1}^{[010]} = c_{S1}^{[010]} - c_{S0}, \quad (4.7a-c)$$

$$\Delta c_{L2}^{[010]} = c_{L2}^{[010]} - c_{L0}, \quad \Delta c_{S2}^{[001]} = c_{S2}^{[001]} - c_{S0}, \quad \Delta c_{S2}^{[100]} = c_{S2}^{[100]} - c_{S0}, \quad (4.8a-c)$$

$$\Delta c_{L3}^{[001]} = c_{L3}^{[001]} - c_{L0}, \quad \Delta c_{S3}^{[100]} = c_{S3}^{[100]} - c_{S0}, \quad \Delta c_{S3}^{[010]} = c_{S3}^{[010]} - c_{S0}. \quad (4.9a-c)$$

Lamé 模態的波速及其與自然狀態間的波速差分別定義為

$$c_{Lame1} = \sqrt{2} c_{S3}^{[100]}, \quad \Delta c_{Lame1} = \sqrt{2} \Delta c_{S3}^{[100]}, \quad (4.10a, b)$$

$$c_{Lame2} = \sqrt{2} c_{S3}^{[010]}, \quad \Delta c_{Lame2} = \sqrt{2} \Delta c_{S3}^{[010]}. \quad (4.11a, b)$$

根據 Lamé 模態在平板厚度的共振特性，如(4.10a)與(4.11a)式所示，它們會與  $X_3$  方向的橫波(S)波速有關係。此外，根據表 5.1 所示，因等向性材料受到單軸預應力  $T_1^i$  的影響，材料係數在  $X_2X_3$  平面上會呈現近似等向性特徵，(4.11a, b)式可提供有關 Lamé 模態波速的準確結果；然而，在  $X_1X_3$  平面上則會呈現正交性(orthorhombic)特徵，(4.10a, b)只能提供一個近似的結果。最後，將表 5.1 的資料代入上述(4.4)之(4.11)式，並將在自然狀態以及單軸預應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之初始狀態下的所有資料整理於表 5.2。

### 4.3 複數尋根之曲線追蹤法

此節內容主要是介紹 Lowe [162, 163]針對一個具額外阻尼負載之彈性介質的頻散特徵方程式  $\Omega(f, k)$  求解而發展出來的有效複數尋根方法，此方法又稱為曲線追蹤法。過去對於求解特徵方程式  $\Omega(f, k)$  並不考慮波數  $k$  的虛部  $k_i$ ，主要是在介質本身不考慮阻尼負載或能量消散的影響，計算獲得的虛部值  $k_i$  也會非常地小。但是，在考慮熱彈性耦合的問題上，介質本身考慮了因為熱效應造成的能量消散，虛部值  $k_i$  大小的影響也就變的非常重要。因此，令波數  $k = k_r + ik_i = k_r(1 + i\gamma_v/2\pi)$ ，特徵方程式  $\Omega(f, k)$  可考慮為  $\Omega(f, k_r, k_i)$  或  $\Omega(f, k_r, \gamma_v)$  的函數型式，其中  $k_r$  與  $\gamma_v$  分別為每單位波傳距離[Np/mm]與每單位波長[Np/wavelength]的波數衰減。

首先，我們先參考圖 4.3(a)所示波數-頻率域的頻散曲線圖，由此圖可以發現在波數  $k_r$  軸上的任意一點，皆可對應出固定數量的頻率  $f$ ，此一特點有助於在作  $f$  尋根時，不會因為沒有對應的  $f$  值而無法作波數  $k_r$  的掃描動作。曲線追蹤法便是以此特點作出發，下面則列出此方法的步驟流程：

- (1) 先在波數  $k_r$  軸上任意選出鄰近間隔非常小的 3 個點  $k_1$ 、 $k_2$  與  $k_3$ 。
- (2) 當  $k_r = k_1$  時，先假設  $\kappa = k_i = 0$ ，此時  $\Omega(f, k_1, \kappa)$  為頻率  $f$  的單值函數，利用 MATLAB 指令 `fminbd` [172] 尋找出區域最小值(local minimum)的位置點  $f_{1j}$ ，它代表在第  $j$  條頻散曲線所對應的頻率值。參考圖 4.1 所示，其中粗線代表對頻率  $\omega$  的「粗略搜尋」(coarse search)，最小值即為搜尋獲得的根  $f_{1j}$ 。
- (3) 以第 1 條頻散曲線所對應的頻率值  $f_{11}$  為例，即以  $(f_{11}, k_1, 0)$  作為初始點，此時

將  $\Omega(f, k_1, \kappa)$  視為頻率  $f$  與衰減  $\kappa$  的函數，利用文獻 173 的 **amoeba** 指令在此初始點附近尋找區域最小值且結果為  $(f_{11}^*, k_1, \kappa_{11}^*)$ 。參考圖 4.1 所示，其中細虛線代表「細密搜尋」(fine search)的軌跡，即以粗線上的任一最小值作為初始點出發，尋找此點附近的區域最小值。

- (4) 以此類推，在固定波數  $k_1$  值的情況下，可尋找出一組由  $N$  條頻散曲線所對應的頻率與衰減數據，即  $(f_{1j}^*, k_1, \kappa_{1j}^*)$  ( $j=1$  to  $N$ )。
- (5) 同理，當  $k_r = k_2$  與  $k_3$  時，重複步驟(1)至(4)的流程，獲得另外兩組頻率與衰減數據，即  $(f_{2j}^*, k_2, \kappa_{2j}^*)$  與  $(f_{3j}^*, k_3, \kappa_{3j}^*)$  ( $j=1$  to  $N$ )。
- (6) 以第 1 條頻散曲線上的 3 個點為例， $(f_{11}^*, k_1, \kappa_{11}^*)$ 、 $(f_{21}^*, k_2, \kappa_{21}^*)$  與  $(f_{31}^*, k_3, \kappa_{31}^*)$ ，利用「外差法」算出第 4 點  $(f_{41}, k_4, \kappa_{41})$ 。由於此一外差步驟是基於 3 點所形成之曲線再尋求第 4 點。然而，此點結果並不會落在區域最小值的位置上，須再以此點作為初始點，利用文獻 173 的 **amoeba** 指令在此初始點附近尋找區域最小值且結果為  $(f_{41}^*, k_4, \kappa_{41}^*)$ 。以此類推，我們可順著曲線上已知的點來追蹤搜尋下一個未知點。參考圖 4.2 所示，其中空心點為外差所獲得的結果，而實心點則為此空心點附近的區域最小值，最後，再將這些實心點連接起來繪出一條曲線，即可建構出一條含複數根的頻散曲線。
- (7) 重複步驟(6)的流程，可建構出其餘的頻散曲線。

上述步驟僅為曲線追蹤法的基本內容，但由於考慮的物理模型不同，所獲得的頻散曲線外型的也都不同，因此，須視不同情況而對上述步驟作些修改。如圖 4.3(a, b)所示，此為利用曲線追蹤法獲得的波數實部  $k_r$  與虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖。

#### 4.4 等向性平板導波的頻散及衰減曲線

此節一開始先考慮一未受應之力等向性單層平板(如銅箔)為例，應用上一節所敘述的曲線追蹤法，經數值計算可獲得對稱及反對稱模態的頻散與衰減曲線圖，如圖 4.3 至 4.5 所示。圖 4.3(a)與 4.4(a, b)為一般所知的波數  $k_r$ 、相速度  $c_{ph}$  與群速度  $c_g$  頻散曲線圖，其中  $c_{ph} = f/k_r$  與  $c_g = \partial f / \partial k_r$ 。然而，在圖 4.3(b)中，我們可明顯地發現除了  $A_0$  模態外，

每一個模態的衰減(即波數虛部 $k_i$ )會在某一特定頻率時，衰減 $k_i$ 大小會趨近於最小值。在圖 4.5(a, b)中則顯示出衰減 $k_i$ 取對數後的半對數圖，每一個模態的值會在其特定頻率與波數時呈現一個轉折(即衰減 $k_i$ 的最小值)。此外，根據(4.1a-d)式，在圖 4.4(a)中藍色虛線 $c_{L0}$ 、 $c_{S0}$ 、 $c_{Lame0}$ 與 $c_{R0}$ 的數值分別為 4.590、2.106、2.978 與 1.972 mm/ $\mu$ s，當頻率增加時， $A_0$ 與 $S_0$ 模態的波速會收斂至 $c_{R0}$ ，其餘模態的波速則會收斂至 $c_{S0}$ 。在圖 4.5(a)中藍色虛線 QL0 為(4.2a)式所計算獲得準縱波之波數 $k_{QL0} = f/c_{QL0}$ 的虛部結果， $A_0$ 與 $S_0$ 模態的衰減在 80 MHz 會收斂至  $0.5 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$ 。

另一方面，將熱彈性耦合的波數實部 $k_r$ 與相速度 $c_{ph}$ 的頻譜圖，如圖 4.3(a)與 4.4(a)所示，與一般無熱彈性耦合的結果作比較，發現兩者結果差異不大但在數值上仍有些微的偏移。考慮在固定波數 $k_r$ 下，圖 4.6 與 4.7 分別為各個對稱與反對稱模態的頻率往右偏移大小圖，發現 $S_n$ 模態( $n = 0, 1, 2, \dots$ )在 $k_r h$ 等於 $(n + \frac{1}{2})$ 時的偏移量是最少的，除了 $A_0$ 模態外， $A_m$ 模態( $m = 1, 2, 3, \dots$ )在 $k_r h$ 等於 $m$ 時的偏移量是最少的。將兩者的結果對照到圖 4.5(b)的結果，發現頻率偏移大小變化幾乎與衰減值大小變化一致，可說由於熱彈耦合引起的能量耗散會導致頻率往右偏移，同時也會反應波數的衰減上。此外，可利用 $k_r = f/c$ 之關係獲得在相速度 $c_{ph}$ 域的變化大小，圖 4.8 與 4.9 分別為各個對稱與反對稱模態的頻率往右偏移大小圖，發現除了 $A_0$ 模態外，其餘各模態在波速等於 $c_{Lame0}$ 時頻率的變化最小，而在波速大於 $c_{L0}$ 時頻率則是有較明顯的變大。

在圖 4.5(a)中，由於這些最小值所對應之特定頻率都具有規律性，而且每相鄰頻率之間隔大小固定，我們可將此一特徵對應到相速度-頻率域的頻散曲線圖，如圖 4.4(a)所示，會發現當相速度 $c_{ph}$ 約為 $c_{Lame0}$ 時可與上述特定頻率之規律一致。因此，針對相速度 $c_{ph}$ 約為 $c_{Lame0}$ 時，探討平板中的熱彈導波會具有何種物理特性？參考 Graff [169]以及 Royal 與 Dieulesaint [170]的著作中有關板波方面的推導，發現當相速度 $c_{ph} = c_{Lame0}$ 時，或波數 $\xi = \zeta_{S0}$ 且 $\zeta_{S0}^2 = \xi_{S0}^2 - \xi^2$ ，將此時的運動特性稱作 Lamé 模態。著作中敘述了此一模態的特徵是運動時其單位體積脹縮變化為零，即為等體積變化，並可發現一面內 SV 波若以 45°角作入射與反射，其過程中無任何能量轉換或消散。因此，我們便開始探討驗證平板中的熱彈導波是否亦具有此一特徵？最後，經推導後證實平板中的熱彈導波亦具有 Lamé 模態的特性，詳細推導可參考附錄 2 之內容。

當熱彈耦合的 Lamé 模態發生時，平板內部的溫度變化  $\Delta\Theta$  為零，而且無熱能傳輸 ( $q_3 = q_1 = 0$ )，及平板中各質點所受的剪應力  $T_{13}$  皆為零，只有兩個方向的軸向應力交互作用 ( $T_{11} = -T_{33}$ )。因此，可以說當 Lamé 模態發生時，平板內振動主要是由體積的膨脹收縮所造成，而且在振動過程中不會因熱的作用而發生能量消散，這代表平板內的熱彈聲導波能夠傳遞得更遠。如同附錄 2 之推導內容，(A.21)與(A.26)二式為波數  $k_r$  與頻率  $f$  之頻散曲線圖中，如圖 4.3(a)所示，發生 Lamé 模態的滿足條件， $S_n$  模態在  $k_r h = n + \frac{1}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )， $A_m$  模態在  $k_r h = m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )，可發現熱彈波會在厚度  $X_3$  方向以及水平波傳  $X_1$  方向上皆會產生駐波(standing wave)。參考(A.22)與(A.27)二式所示，在對稱 Lamé 模態會產生波長  $\nu$  為  $h/(n + \frac{1}{2})$  的駐波，而在反對稱 Lamé 模態會產生波長  $\nu$  為  $h/m$  的駐波，其駐波的振形如圖 4.10 所示。(A.23)與(A.28)二式分別代表發生 Lamé 模態時頻率  $f$  的位置， $S_n$  模態在  $fh = (n + \frac{1}{2}) \cdot c_{\text{Lame0}}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )， $A_m$  模態在  $fh = m \cdot c_{\text{Lame0}}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )，結果如圖 4.4(a)所示。

然而，對於一個非等向性平板來說，依然可依據上述 Lamé 模態的滿足條件來確認發生衰減最小值時的頻率位置，但此衰減最小值不會接近零。這代表了因為材料本身的非等向性，每一個方向運動不是相同的，因此，即使在衰減最小值時的特定頻率位置上，其模態在運動時單位體積脹縮變化不會為零。加上再考慮熱彈耦合效應的因素，更是會有部分能量會藉由熱的作用而發生能量消散。

#### 4.5 受單軸初始應力之平板導波的頻散及衰減曲線

此節考慮一個受水平單軸拉伸初始應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之單層平板(如銅箔)為例，針對波傳角度  $\theta$  在  $0^\circ$ 、 $90^\circ$  與  $45^\circ$ ，獲得對稱及反對稱模態的頻散與衰減曲線圖。首先，針對波傳角度  $\theta$  在  $0^\circ$  (即沿  $X_1$  方向傳遞)的情況，圖 4.11(a, b)為熱彈性導波的波數實部  $k_r$  與虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，圖 4.12(a, b)為相速度  $c_{\text{ph}}$  與群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，圖 4.13(a, b)為波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  與波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{\text{QL0}} = f/c_{\text{QL0}}$  的虛部結果。圖 4.12(a)可觀察得知受單軸初始應力  $T_1^i$  ( $0.02c_{44}$  為虛線與  $0.04c_{44}$  為實虛線)與自然狀態

(實線)之間，各模態相速度頻散曲線變化趨勢與微體波的波速差有關係。已知在  $T_1^i = 0.02c_{44}$  的  $\Delta c_{L1}^{[100]} = -0.044$  與  $\Delta c_{S1}^{[001]} = 0.024$  mm/ $\mu$ s，相速度  $c_{ph}$  範圍在 4.5 至 6.0 mm/ $\mu$ s (靠近  $c_{L0}$  附近)之間會受到  $\Delta c_{L1}^{[100]}$  的影響而向左下方平移，其餘範圍則是會受到  $\Delta c_{S1}^{[001]}$  的影響而向右上方向平移，且差異量會隨著頻率  $f$  變大而增加。同理，在圖 4.11(a)亦可觀察相同現象，在藍色虛線  $L0$  附近會向左方平移，其餘則是向右方平移，且差異量會隨著波數  $k_r$  與頻率  $f$  變大而增加。然而，在圖 4.12(b)則是向普遍右方平移。此外，在衰減曲線表現，如圖 4.13(a)所示，除  $A_0$  模態外，各模態的衰減  $k_i$  最小值會隨單軸拉伸預應力  $T_1^i$  變大而增大，主要是因為初始應力  $T_1^i$  破壞了  $X_1X_3$  平面的等向性，例如表 4.1 的參數  $\bar{c}_{11}$ 、 $\bar{c}_{33}$ 、 $\bar{c}_{13}$ 、 $\bar{c}_{55}$ 、 $\bar{\lambda}_1$ 、 $\bar{\lambda}_3$ 、 $\bar{k}_1$  與  $\bar{k}_3$ ，使其變成正交性。另一方面，由上一節得知 Lamé 模態發生時，平板內部的溫度變化  $\Delta\Theta$  為零，且無熱能傳輸( $q_3 = q_1 = 0$ )，應用第 3.6.3 節中(3.124b)式的觀念，在 Lamé 模態時輸入熱能  $Q_m^V$  於平板表面的可激發性  $E_4$  是最小的或是幾乎為零。根據圖 4.13(a)所示，在 Lamé 模態的頻率附近的衰減值會因預應力  $T_1^i$  的作用而會有較大的差異，其內部的溫度變化  $\Delta\Theta$  不為零，且會有熱能傳輸，這也代表與輸入熱能  $Q_m^V$  相互耦合的可激發性  $E_4$  會有較大的變化。

針對波傳角度  $\theta$  在  $90^\circ$  (即沿  $X_2$  方向傳遞)的情況，包括圖 4.14(a, b)、4.15(a, b)與 4.16(a, b)。已知在  $T_1^i = 0.02c_{44}$  的  $\Delta c_{L2}^{[101]} = -0.005$  與  $\Delta c_{S2}^{[001]} = -0.050$  mm/ $\mu$ s，在圖 4.15(a)所示的相速度  $c_{ph}$  會向左下方平移，且差異量會隨著頻率  $f$  變大而增加。而在圖 4.14(a)與 4.15(b)可觀察所有曲線會皆向左方平移。此外，在衰減曲線表現，如圖 4.16(a)所示，除  $A_0$  模態外，各 Lamé 模態(衰減  $k_i$  幾乎為零)出現的頻率會隨單軸拉伸預應力  $T_1^i$  變大而降低，這是因為初始應力  $T_1^i$  影響了  $X_2X_3$  平面的等向性關係，例如  $\bar{c}_{22} = \bar{c}_{33} \approx \bar{c}_{23} + 2\bar{c}_{44}$ 、 $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3$  與  $\bar{k}_2 = \bar{k}_3$ 。與上一個情況不同，這裡差異性較大的反而是相速度  $c_{ph}$  與群速度  $c_g$ ，可藉由探討初始應力  $T_1^i$  對導波波速上的影響。

在上述二個情況中，熱彈聲波中垂直於 Sagittal 平面的 SH 波可被獨立出來。然而，在針對波傳角度  $\theta$  在  $45^\circ$  的情況，波傳運動已經不屬於在 Sagittal 平面的面內運動，或是垂直偏振的面外運動，而是 L、SV、SH 與熱波的相互耦合。只考慮  $T_1^i = 0.02c_{44}$  的影響，數值結果包括圖 4.17(a, b)、4.18(a, b)與 4.19(a, b)，其中 QL 與 QSH (藍色虛線)為(3.43b)

式計算獲得準縱波與準橫波之波數  $k_{QL} = f/c_{QL}$  與  $k_{QT} = f/c_{QT}$  的虛部結果。在圖 4.19(a, b)中，除了  $A_0$  模態外， $A_m$  模態( $m$  為偶數，黑色實線)與  $S_n$  模態( $n$  為奇數，紅色實線)擁有 Lamé 模態(最小衰減值)的特性，而  $A_m$  模態( $m$  為奇數，綠色實虛線)與  $S_n$  模態( $n$  為偶數，粉紅色實虛線)則代表有面外 SH 波的參與。相較於圖 4.13(a, b)與 4.16(a, b)，在圖 4.19(a, b)中普遍會有 QSH (藍色虛線)附近的衰減，這現象顯示波傳方向  $\theta$  若在  $0^\circ$  與  $90^\circ$  間，熱彈聲波的部分能量會因垂直於 Sagittal 平面的面外運動而耗散。此外，頻散曲線交會處附近會表現出不同模態的耦合運動，在使用 LIU 或 PA 技術時，很難去解釋這些區域所生成之波式轉換(mode-converted)的響應。

參考圖 4.5(a)、4.13(a)、4.16(a)與 4.19(a)等衰減頻譜，可得知受單軸初始應力  $T_1^i$  之平板的熱彈聲導波，其最小衰減值會發生在一些特定頻率附近，例如  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態分別為 15、30 與 45 MHz。首先，考慮傳遞方位角度  $\theta$  為  $0^\circ$ 、 $45^\circ$  與  $90^\circ$ ，圖 20 為出現最小衰減值的頻率位置與單軸初始應力  $T_1^i$  ( $\times c_{44}$ ) 間的關係圖。當  $\theta = 90^\circ$  時(紅線)，由於  $X_2X_3$  平面的等向性特徵，頻率位置會與初始應力  $T_1^i$  的大小呈現線性關係。當  $\theta = 0^\circ$  與  $90^\circ$  時(黑線與綠線)，由於 Sagittal 平面的正交性特徵，兩者會呈現線性關係，其衰減值分佈如圖 21 所示，且大小會隨著初始應力  $T_1^i$  變大而增加。其次，考慮單軸初始應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  (黑線)與  $0.04c_{44}$  (紅線)，圖 22 為出現最小衰減值的頻率位置與傳遞方位角度  $\theta$  間的關係圖，由於 Lamé 模態在平板厚度上的駐波特性，此結果類似於厚度  $X_3$  方向之橫波與角度  $\theta$  間的關係，如(3.49a)式所示。在  $\theta = 90^\circ$  時， $T_1^i$  為  $0.04c_{44}$  造成的頻率偏移大小為  $0.02c_{44}$  的兩倍。圖 22 的衰減值結果如圖 23 所示，當傳遞方位角度  $\theta$  靠近  $90^\circ$  時衰減值會驟降。

表 4.1 在自然狀態以及單軸預應力  $T_{11}^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之初始狀態下

銅箔的材料係數。

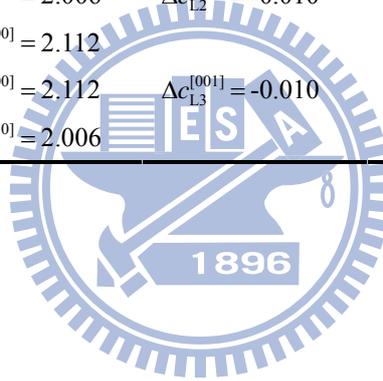
	Natural state	Pre-stress $T_{11}^i = 0.02c_{44}$	Pre-stress $T_{11}^i = 0.04c_{44}$
Thickness (mm)	$h = 0.1$	$h = 0.1$	$h = 0.1$
Mass density (mg/mm <sup>3</sup> )	$\rho_0 = 8.93$	$\rho_i = 8.913$	$\rho_i = 8.895$
Elastic constants (mg/mm. $\mu$ s <sup>2</sup> )	$c_{11} = 188.1$	$\bar{c}_{11} = 183.377$	$\bar{c}_{11} = 178.655$
	$c_{12} = 108.9$	$\bar{c}_{22} = \bar{c}_{33} = 187.343$	$\bar{c}_{22} = \bar{c}_{33} = 186.587$
	$c_{44} = 39.6$	$\bar{c}_{23} = 111.926$	$\bar{c}_{23} = 114.952$
	$c'_{111} = -1894$ $c'_{112} = -754$	$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{13} = 106.094$	$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{13} = 103.288$
	$c'_{123} = 56$ $c'_{144} = -401$	$\bar{c}_{44} = 37.704$	$\bar{c}_{44} = 35.807$
	$c'_{155} = -287$ $c'_{456} = 57$	$\bar{c}_{55} = \bar{c}_{66} = 39.636$	$\bar{c}_{55} = \bar{c}_{66} = 39.671$
Temperature (k <sup>o</sup> K)	$\Theta_0 = 0.300$	$\Theta_i = 0.300$	$\Theta_i = 0.300$
Thermal constant (mg/mm. $\mu$ s <sup>2</sup> .k <sup>o</sup> K <sup>2</sup> )	$\alpha = \rho_0 C_E / \Theta_0 = 11.129$	$\bar{\alpha} = 11.107$	$\bar{\alpha} = 11.085$
Thermoelastic coupling coeff. (mg/mm. $\mu$ s <sup>2</sup> .k <sup>o</sup> K)	$\lambda = (c_{11} + 2c_{12})\gamma = 6.697$	$\bar{\lambda}_1 = 6.782$ $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = 6.648$	$\bar{\lambda}_1 = 6.867$ $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = 6.599$
Thermal conductivity (mg/mm. $\mu$ s <sup>3</sup> .k <sup>o</sup> K)	$k = 0.398 \times 10^{-3}$	$\bar{k}_1 = 0.403 \times 10^{-3}$ $\bar{k}_2 = \bar{k}_3 = 0.395 \times 10^{-3}$	$\bar{k}_1 = 0.408 \times 10^{-3}$ $\bar{k}_2 = \bar{k}_3 = 0.392 \times 10^{-3}$

$C_E = 3.74$  is the heat capacity (mg/ $\mu$ s<sup>2</sup>.k<sup>o</sup>K), and  $\gamma = 0.0165$  is the thermal expansion coefficient (1/k<sup>o</sup>K).

表 4.2 在自然狀態以及單軸預應力  $T_{11}^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之初始狀態下

縱波、橫波與 Lamé 模態的波速資料。

Wave speed (mm/ $\mu$ s)	Longitudinal wave	Shear wave	Corresponding differences of wave speed due to Eqs. (4.7) to (4.9)		Lamé mode
Natural state	$c_{L0} = 4.590$	$c_{S0} = 2.106$	-	-	$c_{Lame0} = 2.978$
Pre-stress $T_{11}^i = 0.02c_{44}$	$c_{L1}^{[100]} = 4.546$	$c_{S1}^{[001]} = 2.130$	$\Delta c_{L1}^{[100]} = -0.044$	$\Delta c_{S1}^{[001]} = 0.024$	$c_{Lame1} = 2.982$
		$c_{S1}^{[010]} = 2.130$		$\Delta c_{S1}^{[010]} = 0.024$	$\Delta c_{Lame1} = 0.0004$
	$c_{L2}^{[010]} = 4.585$	$c_{S2}^{[001]} = 2.056$	$\Delta c_{L2}^{[010]} = -0.005$	$\Delta c_{S2}^{[001]} = -0.050$	$c_{Lame2} = 2.908$
		$c_{S2}^{[100]} = 2.109$		$\Delta c_{S2}^{[100]} = 0.003$	$\Delta c_{Lame2} = -0.0707$
	$c_{L3}^{[001]} = 4.585$	$c_{S3}^{[100]} = 2.109$	$\Delta c_{L3}^{[001]} = -0.005$	$\Delta c_{S3}^{[100]} = 0.003$	
		$c_{S3}^{[010]} = 2.056$		$\Delta c_{S3}^{[010]} = -0.050$	
Pre-stress $T_{11}^i = 0.04c_{44}$	$c_{L1}^{[100]} = 4.502$	$c_{S1}^{[001]} = 2.154$	$\Delta c_{L1}^{[100]} = -0.088$	$\Delta c_{S1}^{[001]} = 0.048$	$c_{Lame1} = 2.986$
		$c_{S1}^{[010]} = 2.154$		$\Delta c_{S1}^{[010]} = 0.048$	$\Delta c_{Lame1} = 0.0008$
	$c_{L2}^{[010]} = 4.580$	$c_{S2}^{[001]} = 2.006$	$\Delta c_{L2}^{[010]} = -0.010$	$\Delta c_{S2}^{[001]} = -0.100$	$c_{Lame2} = 2.838$
		$c_{S2}^{[100]} = 2.112$		$\Delta c_{S2}^{[100]} = 0.006$	$\Delta c_{Lame2} = -0.1414$
	$c_{L3}^{[001]} = 4.580$	$c_{S3}^{[100]} = 2.112$	$\Delta c_{L3}^{[001]} = -0.010$	$\Delta c_{S3}^{[100]} = 0.006$	
		$c_{S3}^{[010]} = 2.006$		$\Delta c_{S3}^{[010]} = -0.100$	



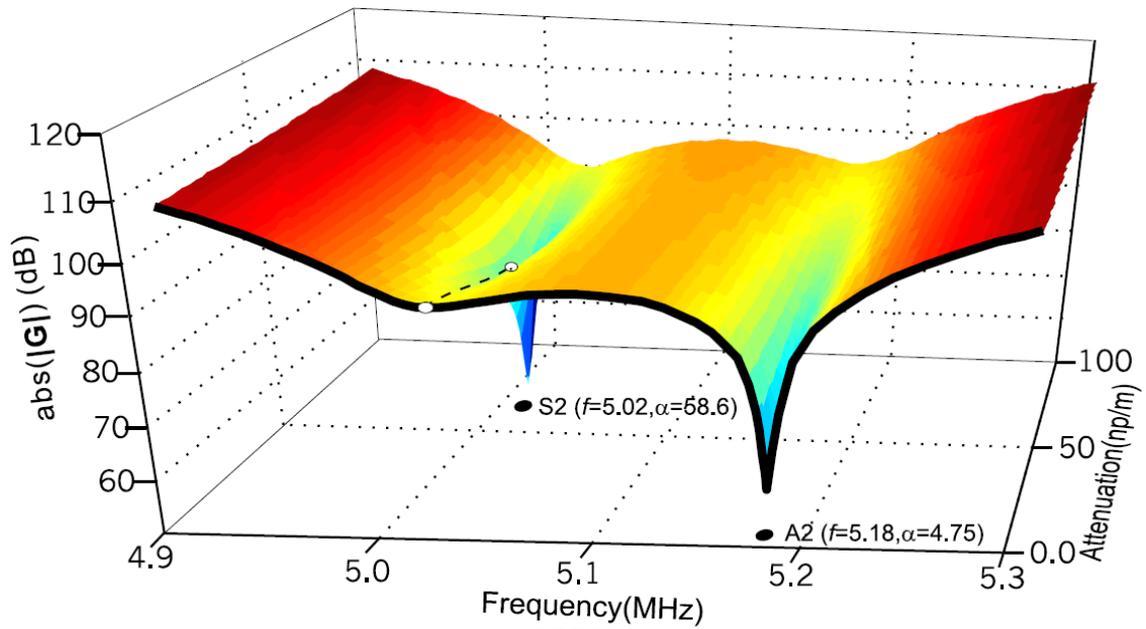


圖 4.1 波數  $k$ , 固定下, 對  $(k_i, f)$  的尋根示意圖[162, 163]。

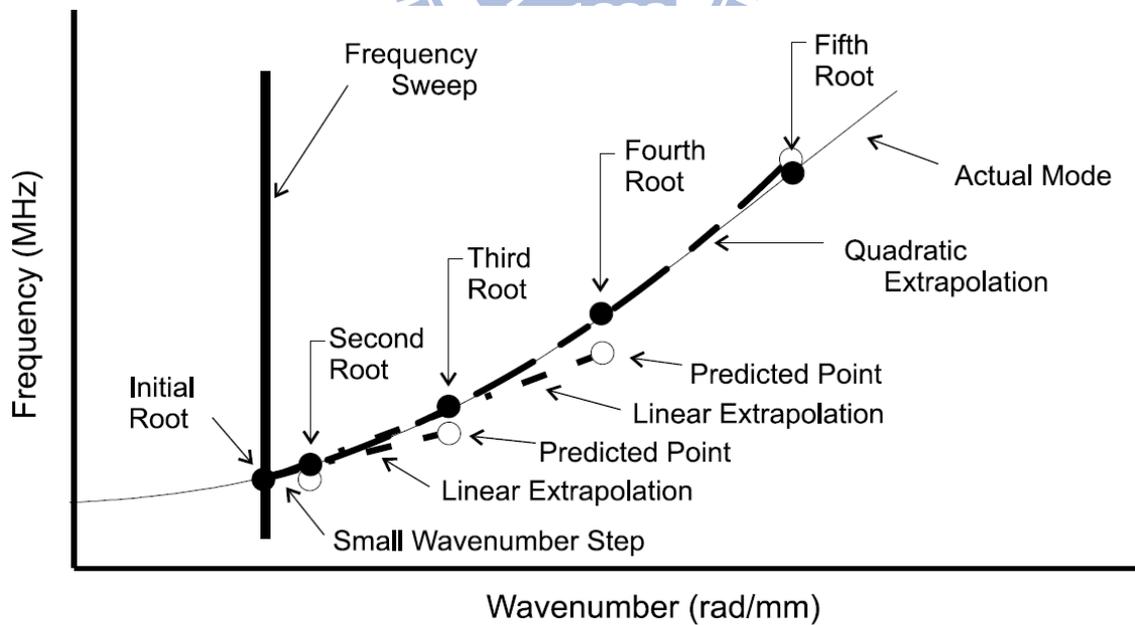


圖 4.2 應用外插法對頻散曲線作軌跡追蹤[162, 163]。

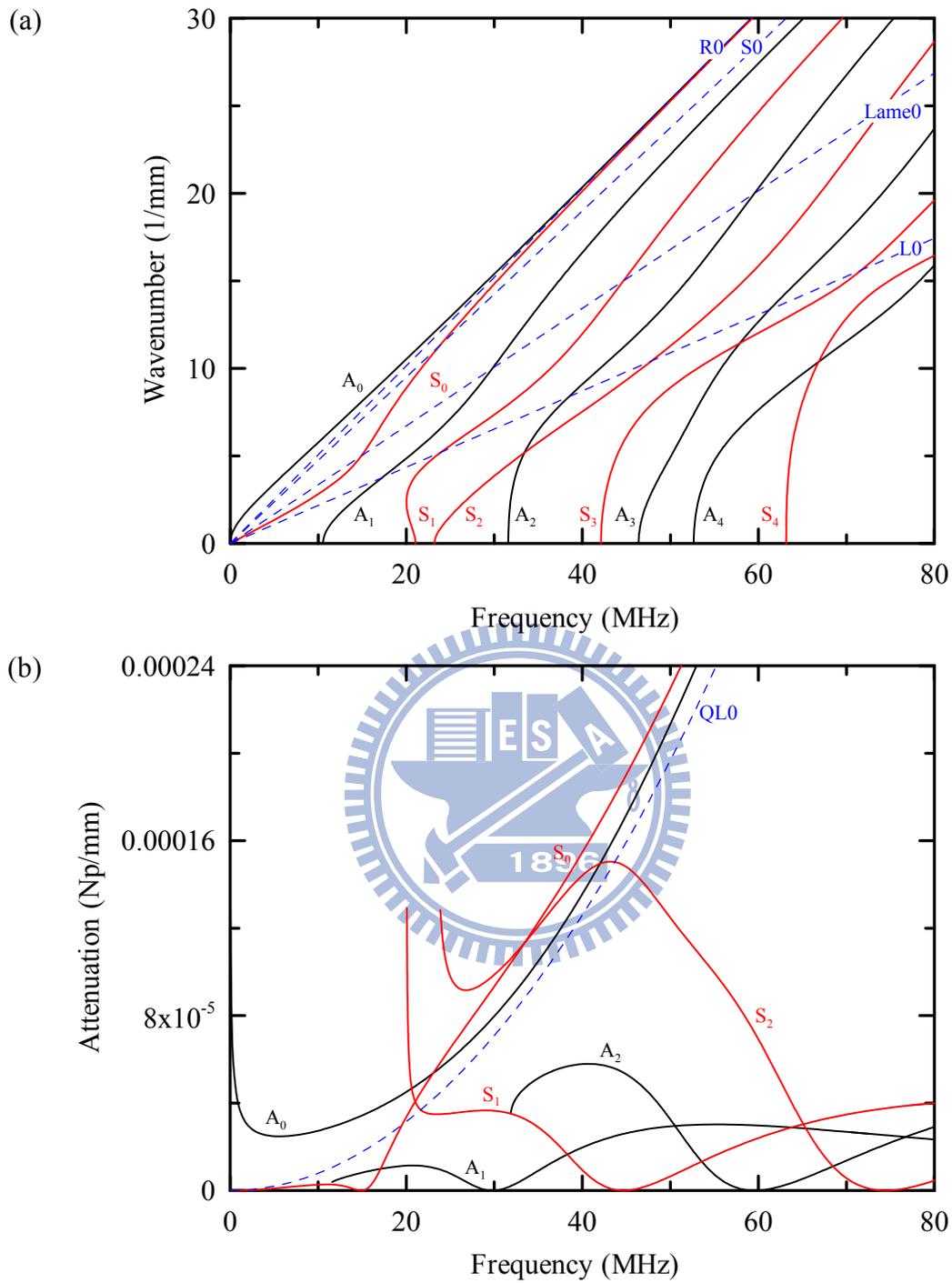


圖 4.3 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。

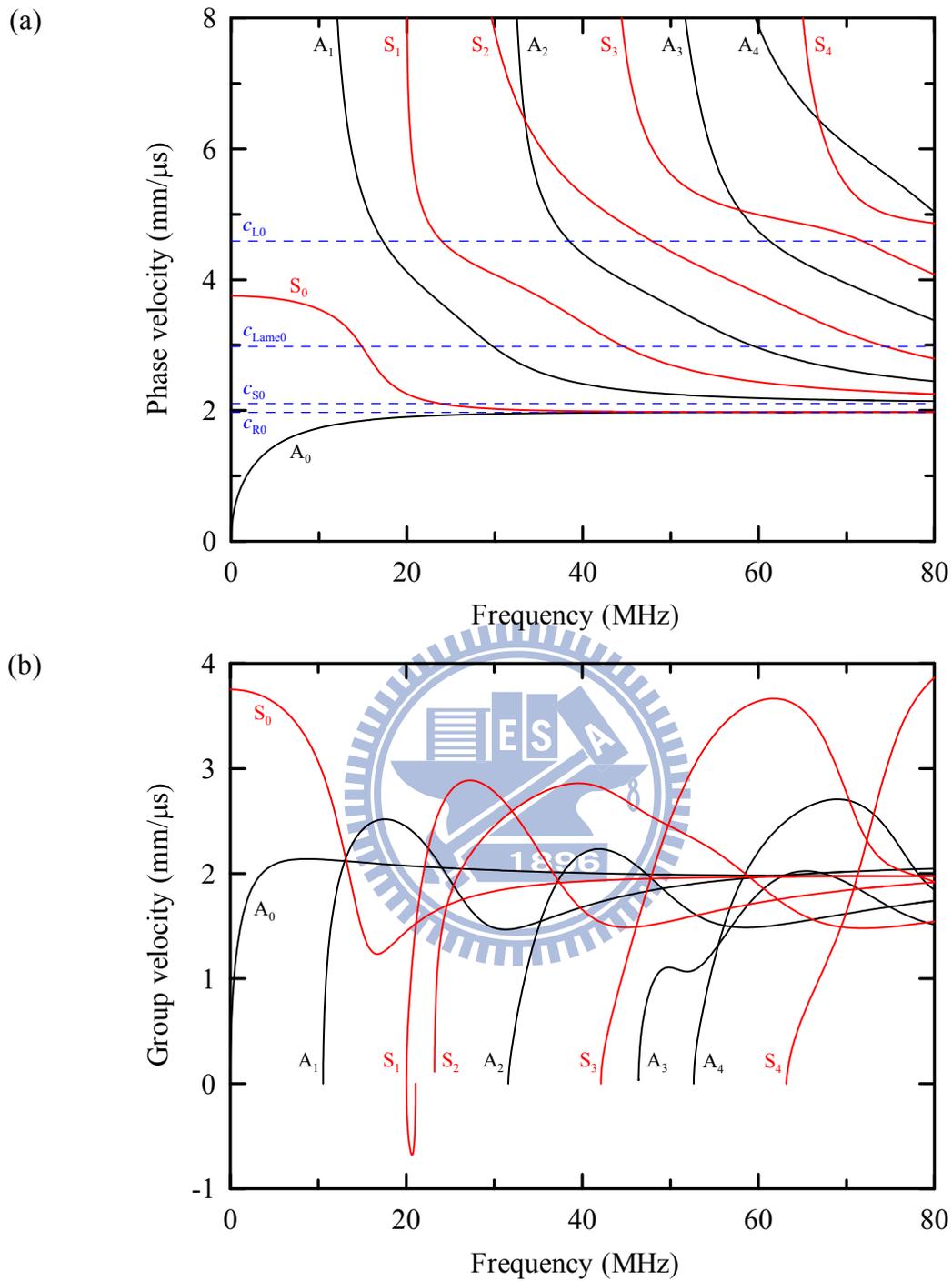


圖 4.4 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。

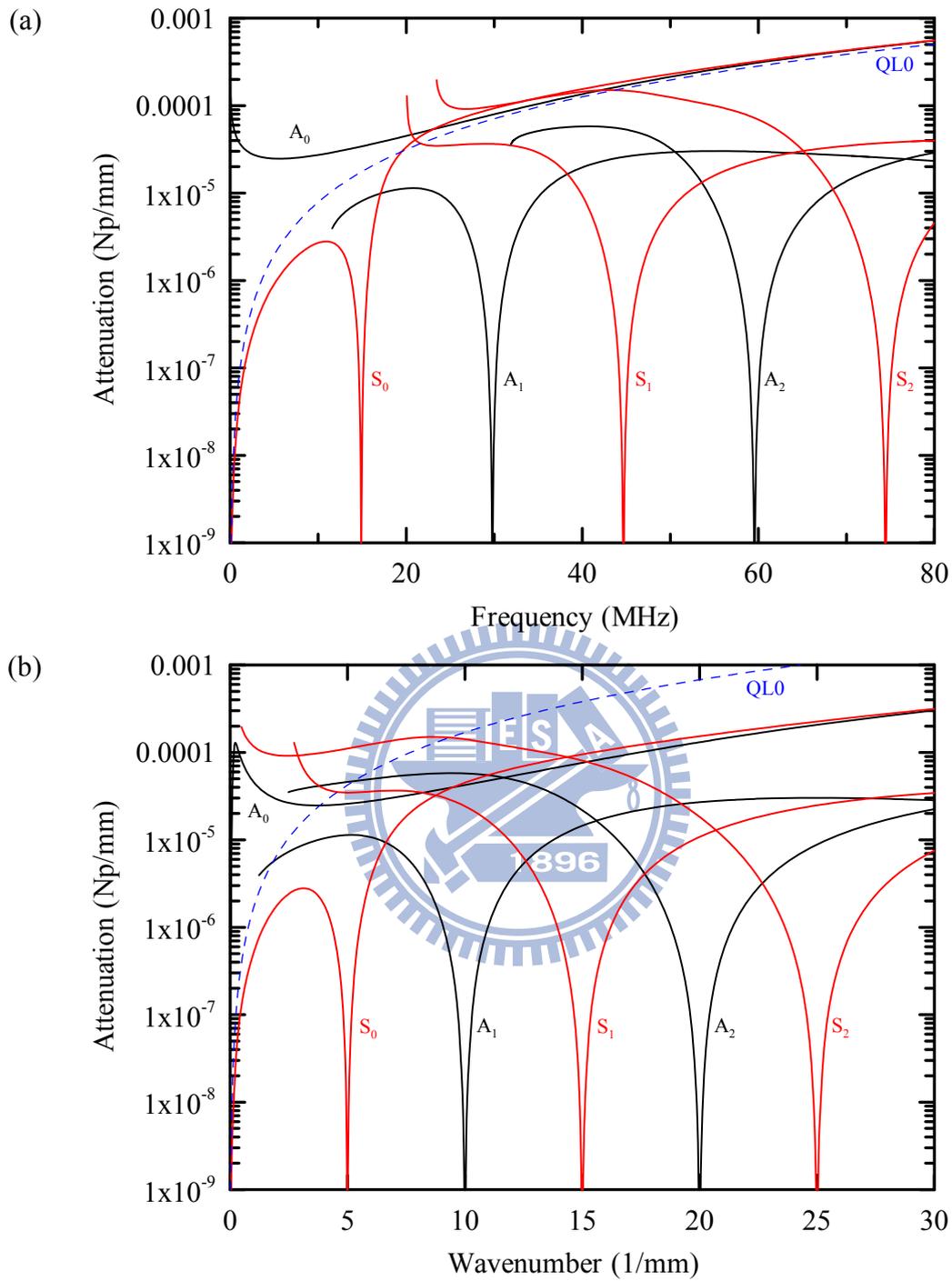


圖 4.5 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL0 (藍色虛線) 為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。

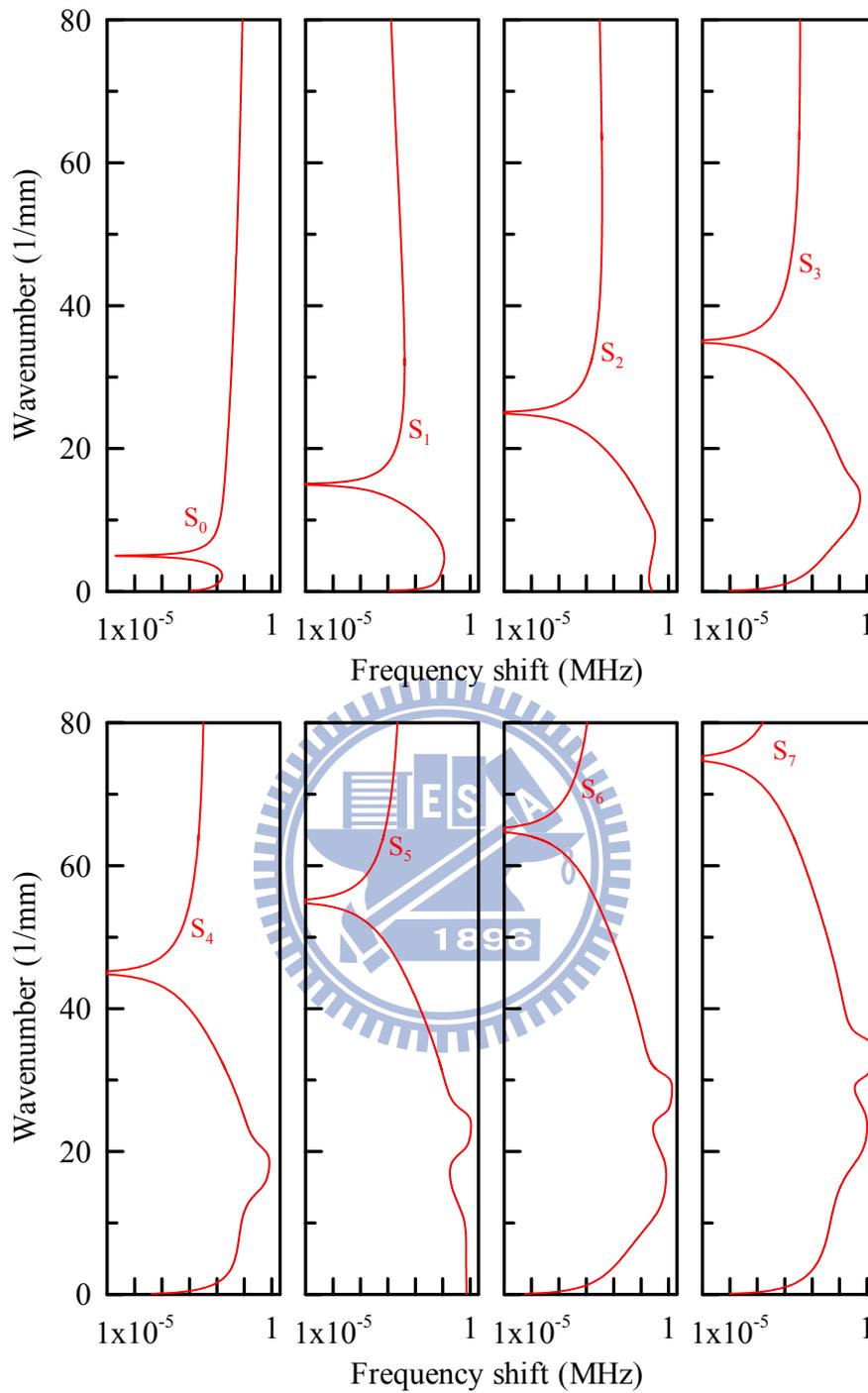


圖 4.6 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波，在固定波數 $k$ ，下，兩者之各個對稱模態的頻率往右偏移大小圖。發現對稱 $S_n$ 模態( $n = 0, 1, 2, \dots$ )在 $k, h$ 等於 $(n + \frac{1}{2})$ 時的偏移量是最少。

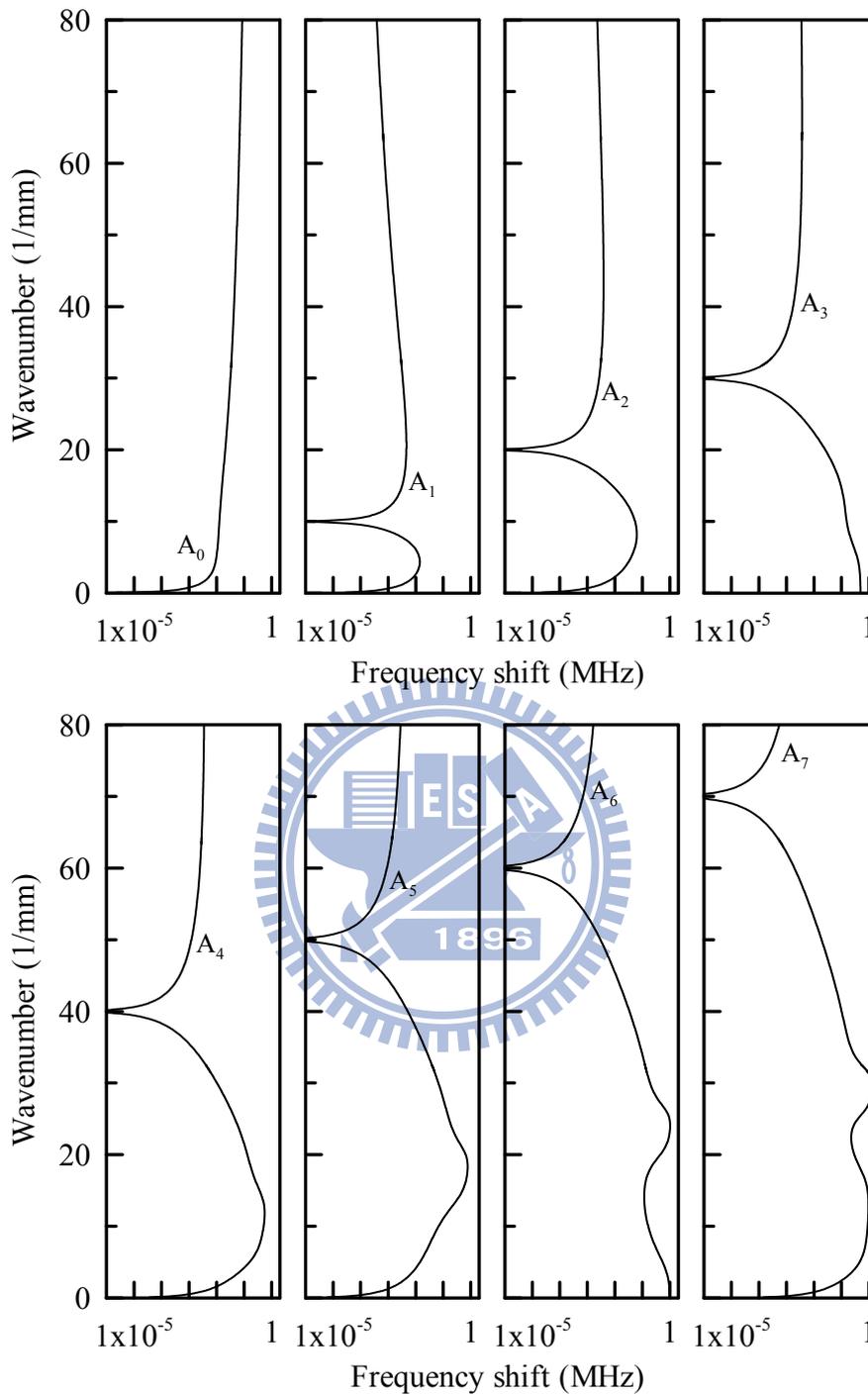


圖 4.7 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波，在固定波數 $k_r$ 下，兩者之各個反對稱模態的頻率往右偏移大小圖。發現反對稱 $A_m$ 模態( $m = 1, 2, 3, \dots$ )在 $k_r h$ 等於 $m$ 時的偏移量是最少。

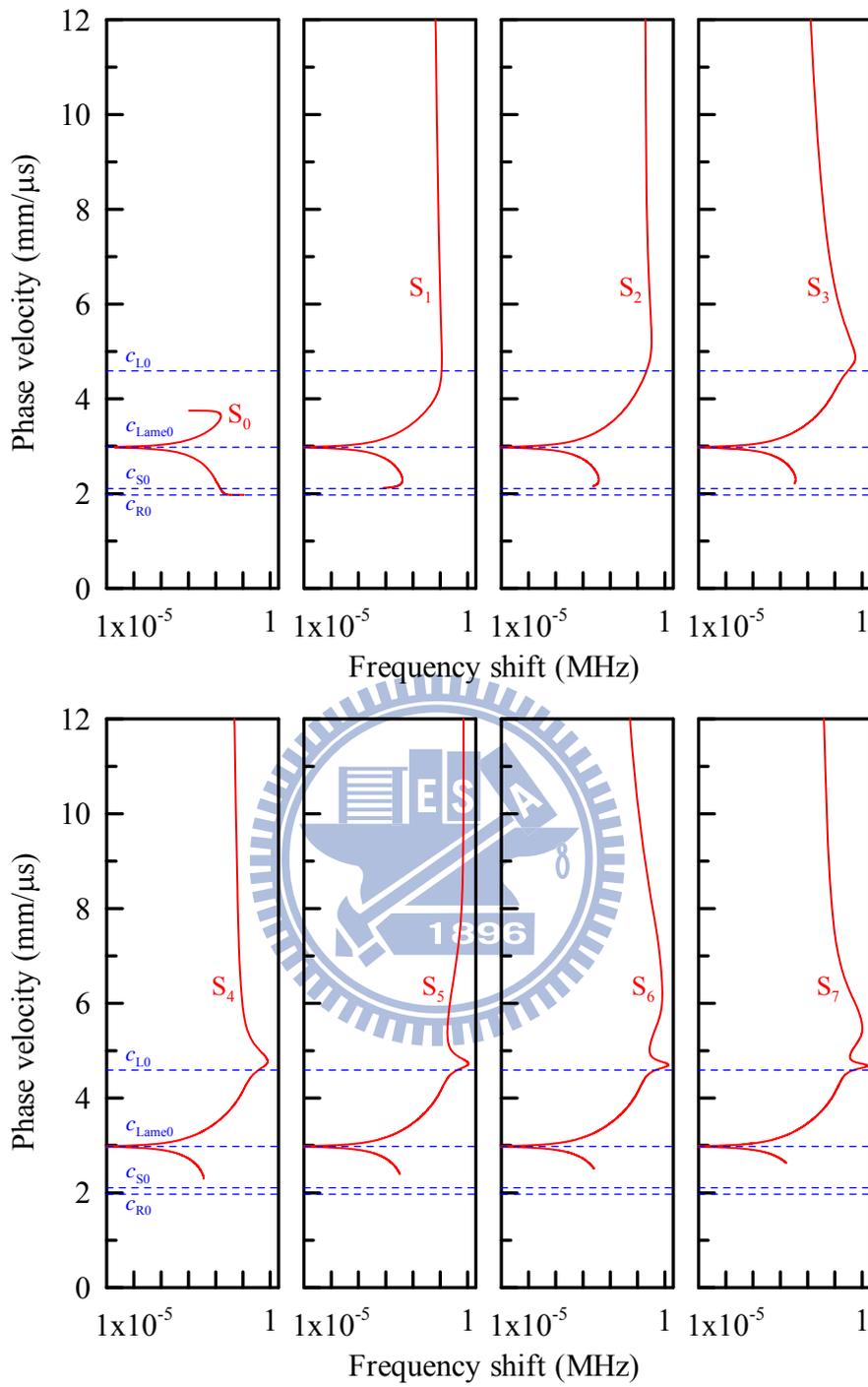


圖 4.8 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波，在固定相速度  $c_{ph}$  下，兩者之各個對稱模態的頻率偏移大小圖。發現

各模態在波速等於  $c_{Lame0}$  時頻率的變化最小。

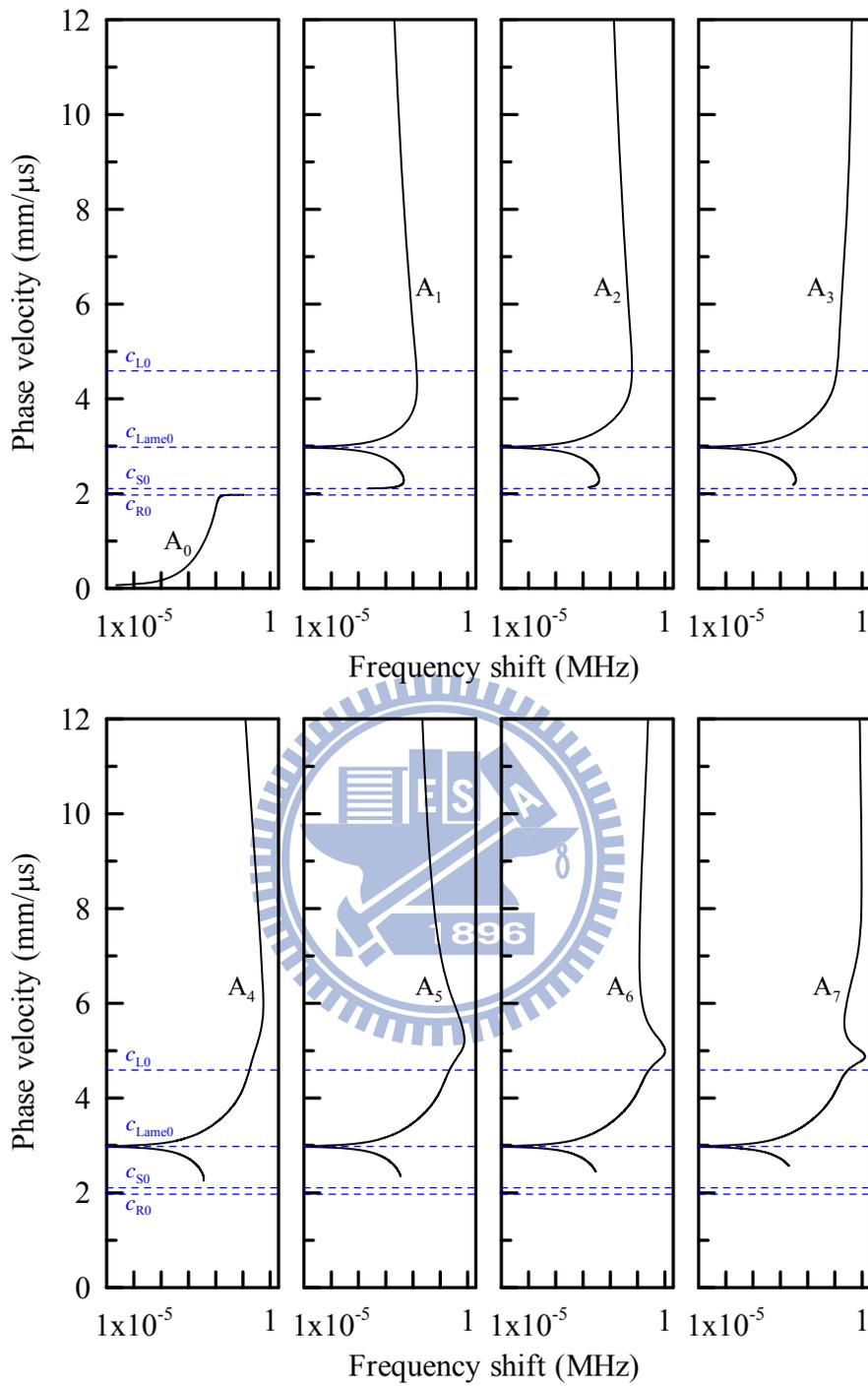


圖 4.9 在無初始應力作用之單層平板，熱彈性導波相較於純彈性導波，在固定相速度  $c_{ph}$  下，兩者之各個反對稱模態的頻率偏移大小圖。發現除了  $A_0$  模態外，其餘各模態在波速等於  $c_{Lame0}$  時頻率的變化最小。

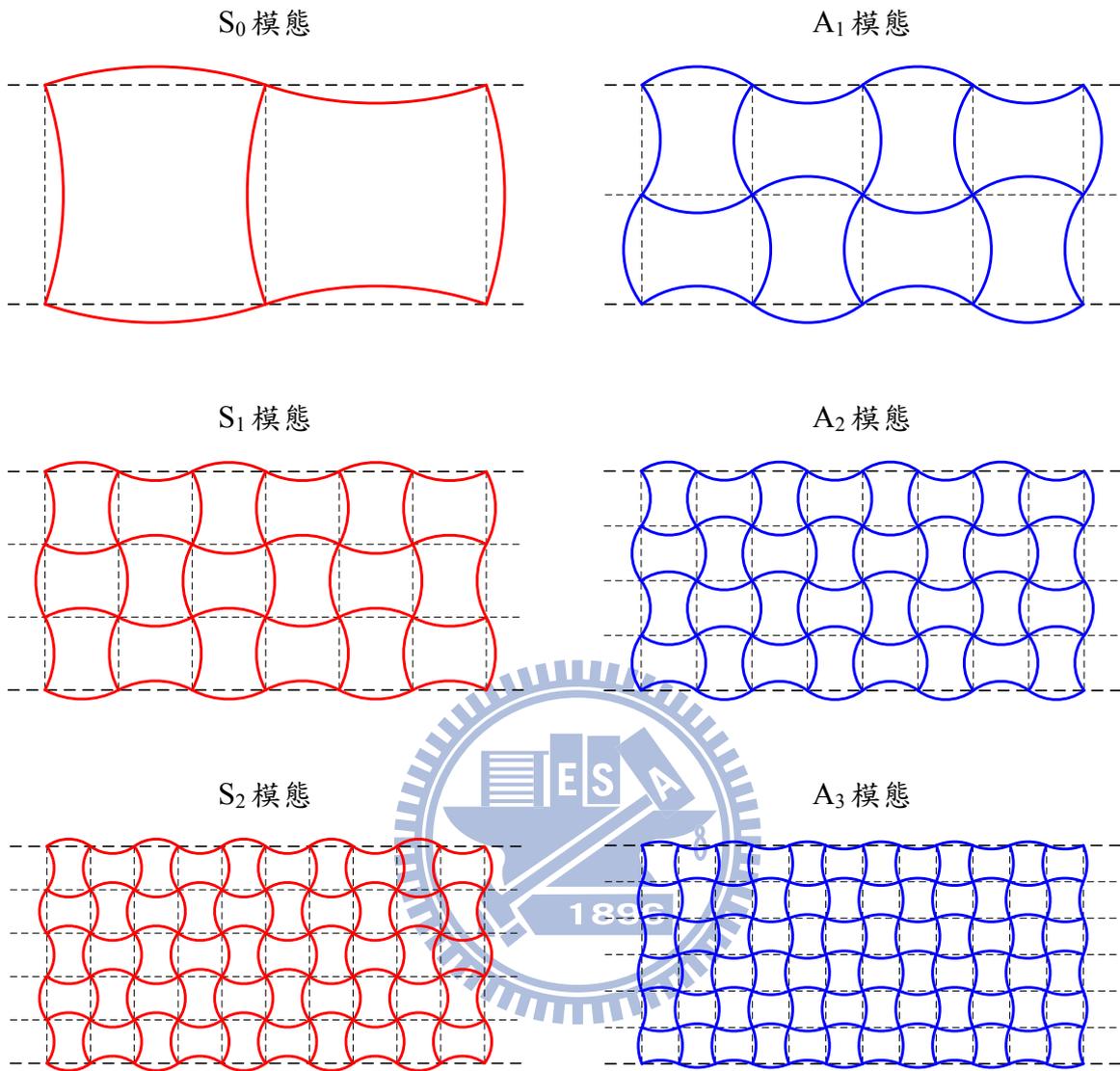


圖 4.10 對稱與反對稱之 Lamé 模態的駐波振形示意圖。

$S_n$  模態 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 會產生波長為  $h/(n + \frac{1}{2})$  的駐波，

$A_m$  模態 ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) 會產生波長為  $h/m$  的駐波。

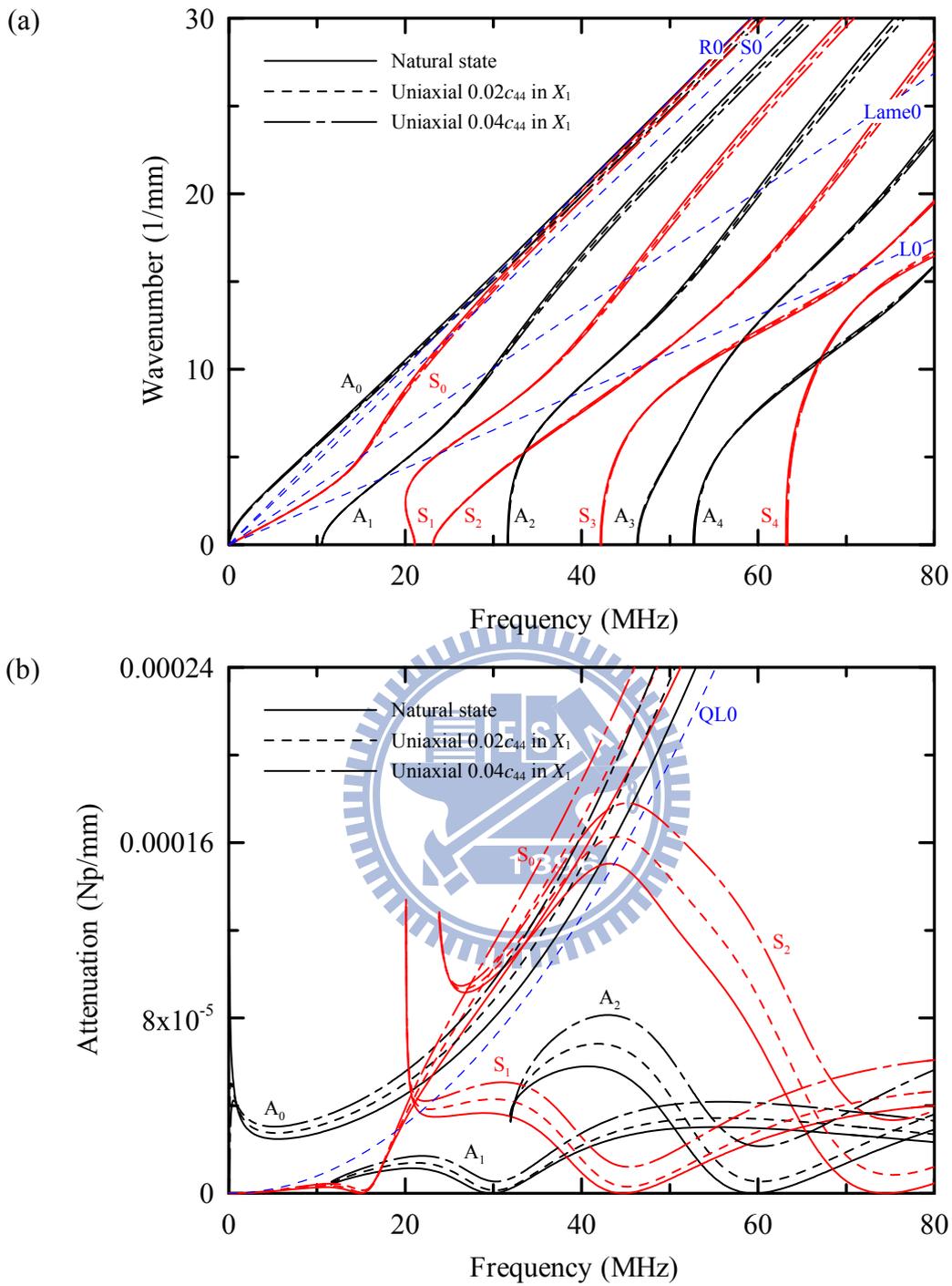


圖 4.11 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_1$  方向傳遞(即  $\theta = 0^\circ$ )之熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。

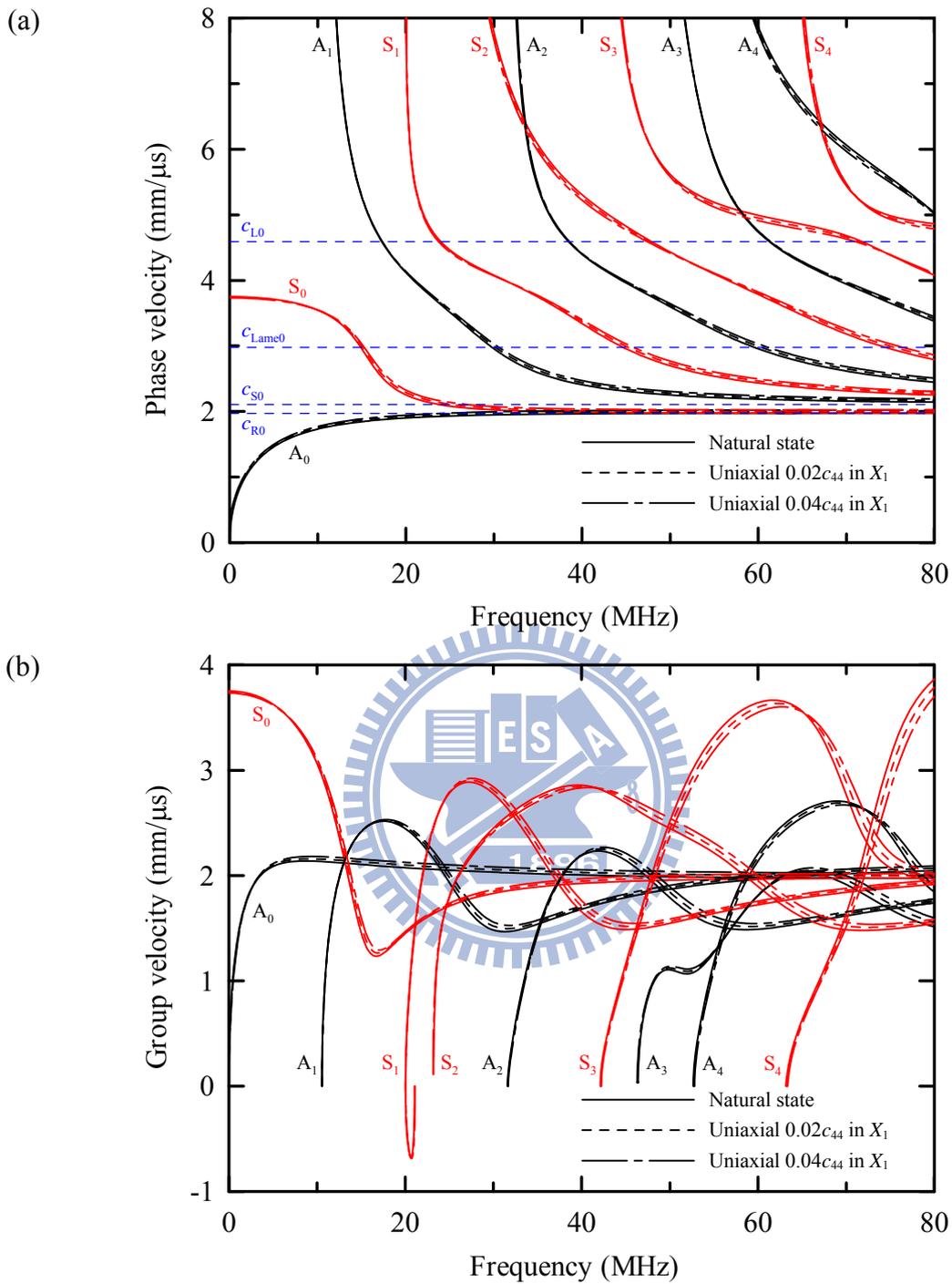


圖 4.12 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_1$  方向傳遞(即  $\theta = 0^\circ$ )之熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。

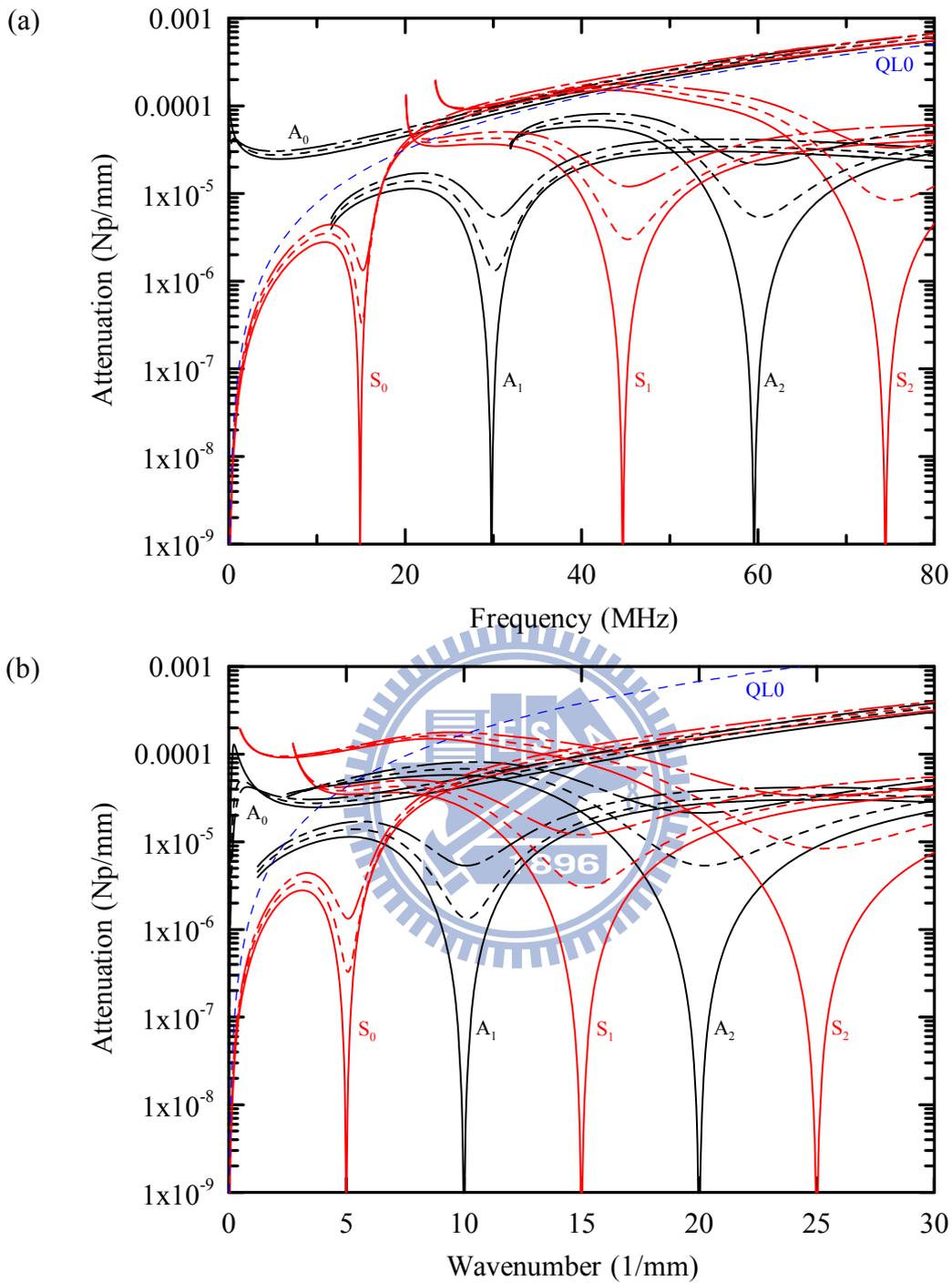


圖 4.13 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_1$  方向傳遞(即  $\theta = 0^\circ$ )之熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。

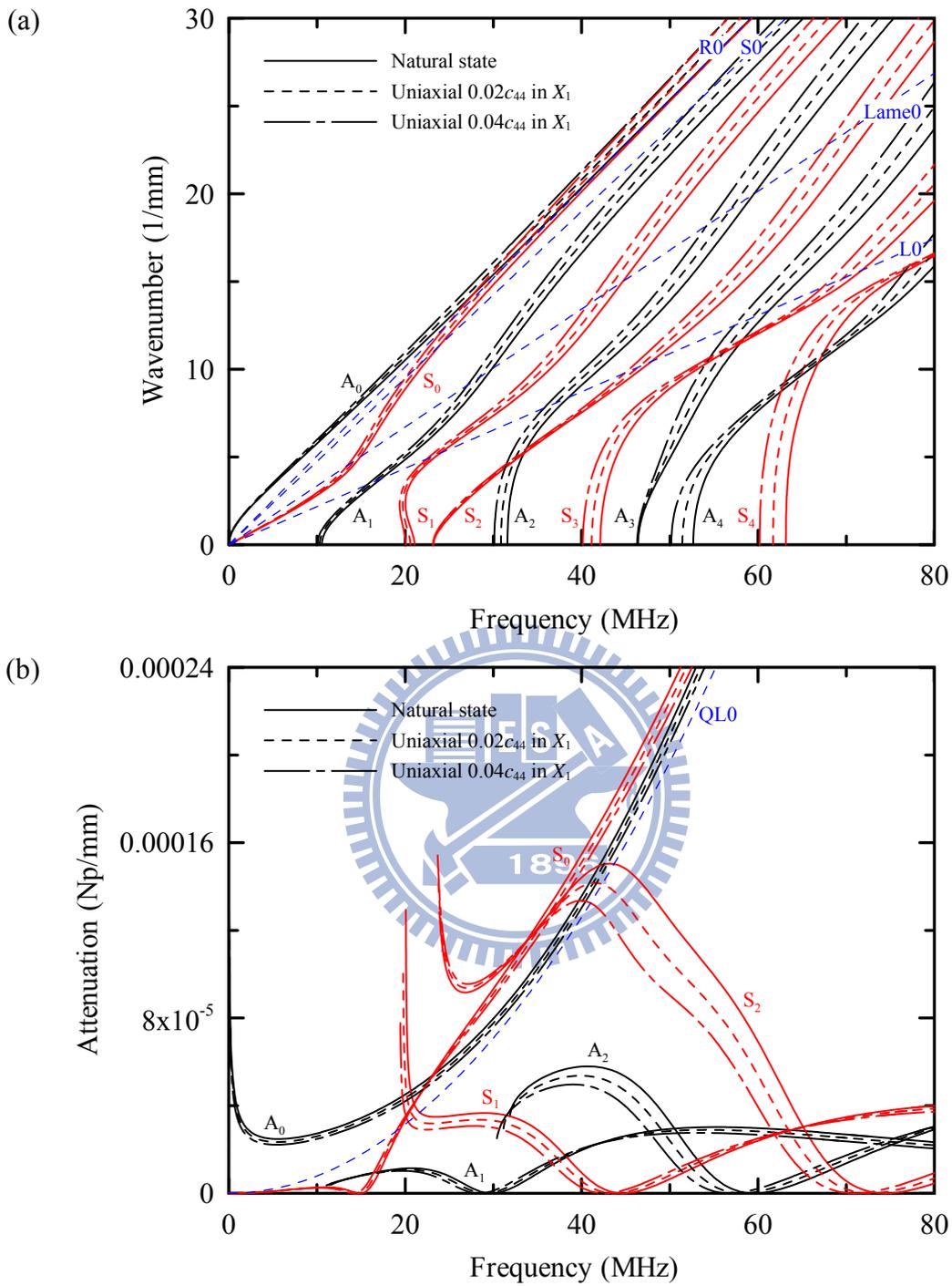


圖 4.14 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_2$  方向傳遞(即  $\theta = 90^\circ$ )之熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L<sub>0</sub>、S<sub>0</sub>、Lame<sub>0</sub> 與 R<sub>0</sub> (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及 QL<sub>0</sub> (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。

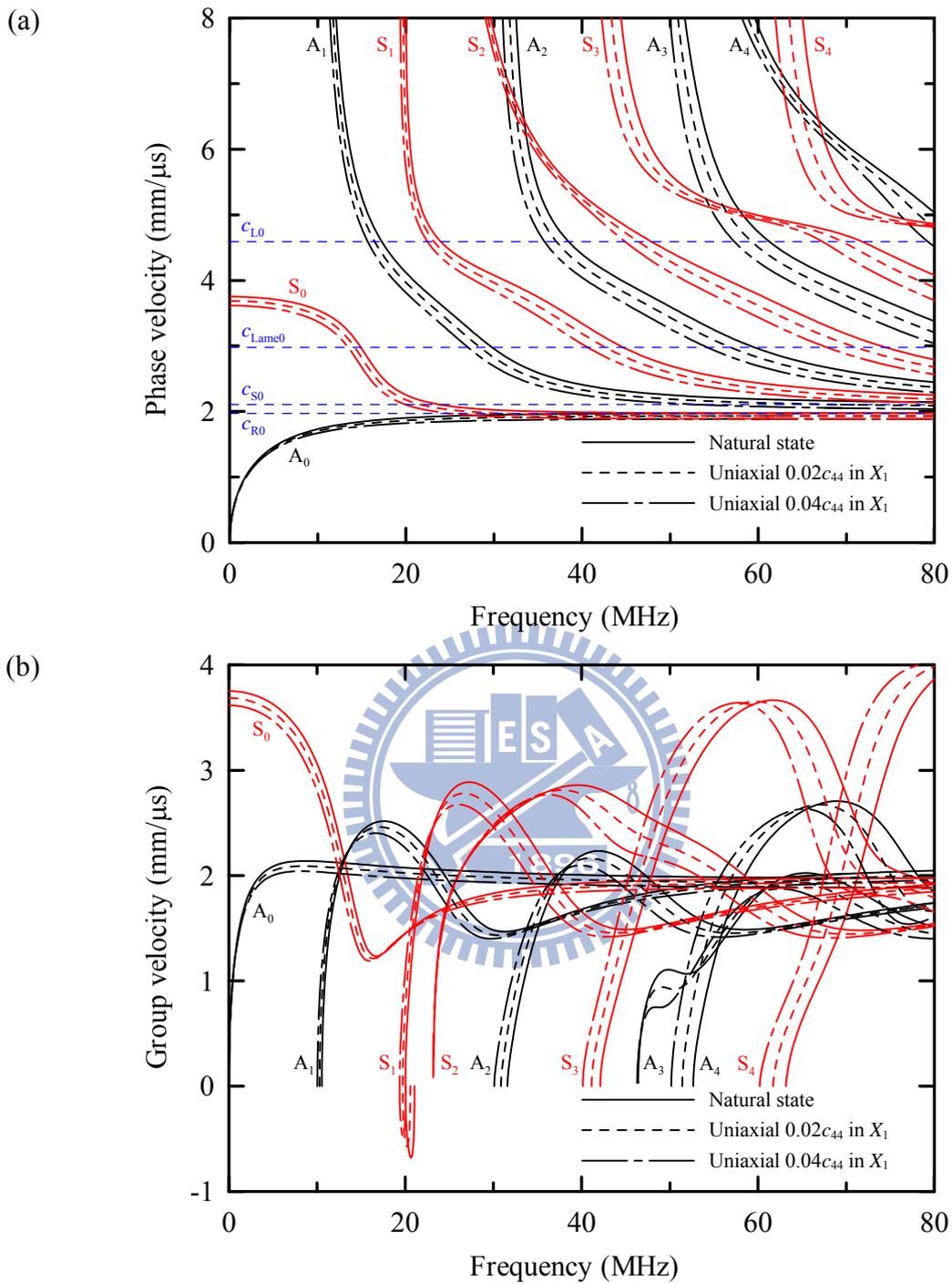


圖 4.15 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_2$  方向傳遞(即  $\theta = 90^\circ$ )之熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。

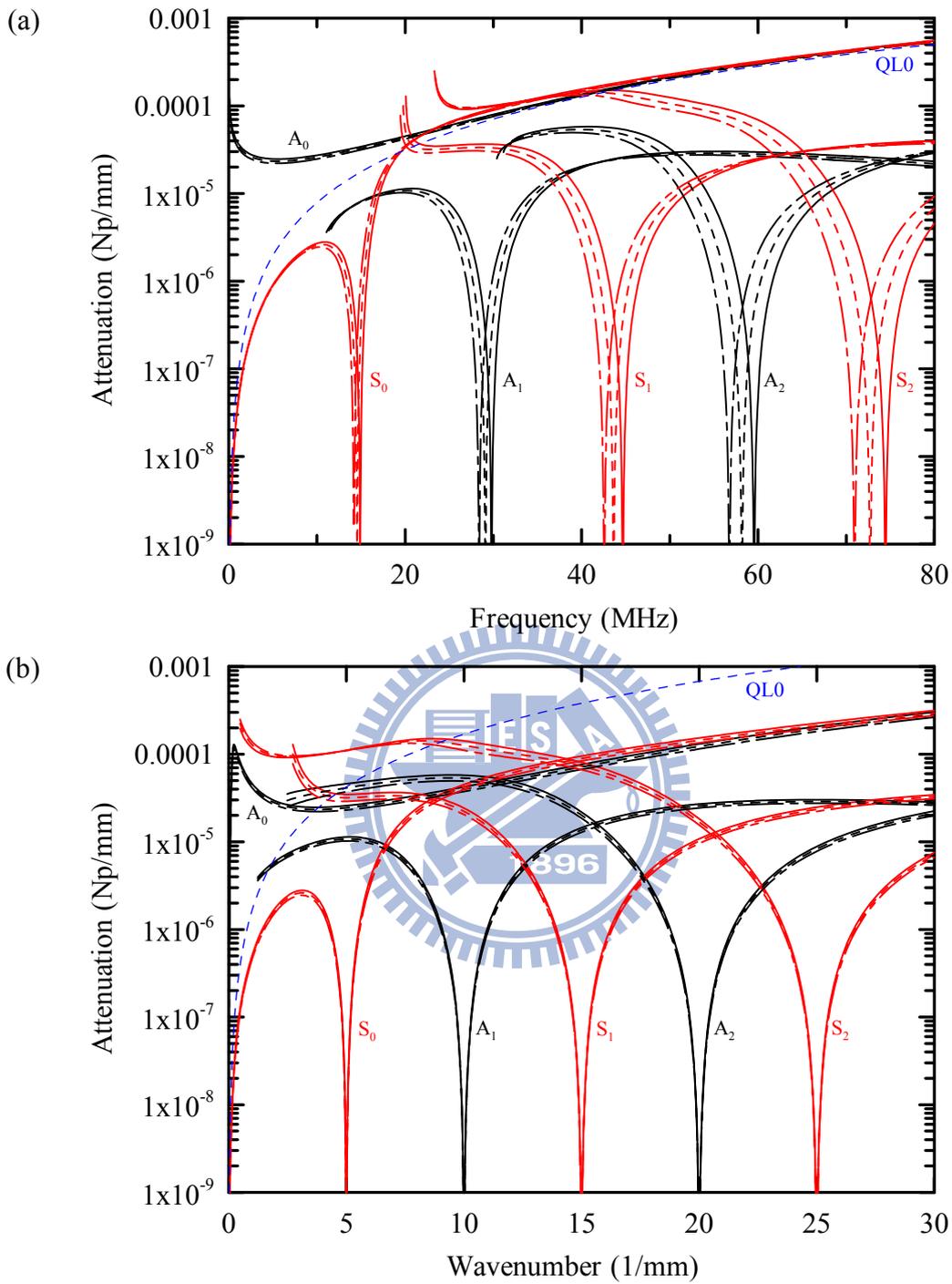


圖 4.16 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  作用下之單層平板，沿  $X_2$  方向傳遞(即  $\theta = 90^\circ$ )之熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL0 (藍色虛線)為(4.2a)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL0} = f/c_{QL0}$  的虛部結果。

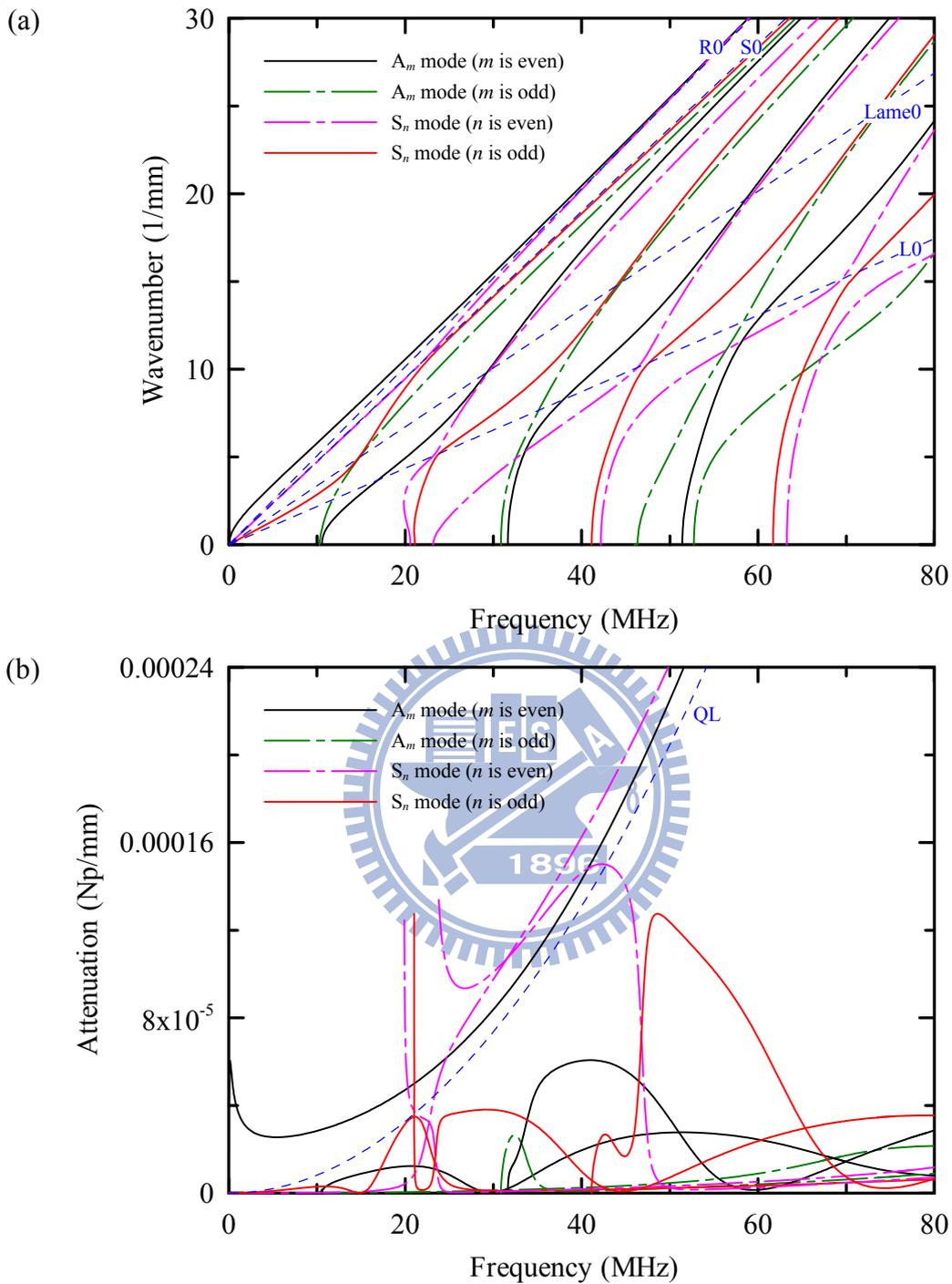


圖 4.17 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  作用下之單層平板，傳遞方向為角度  $\theta = 45^\circ$  之熱彈性導波的波數(a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態， $L_0$ 、 $S_0$ 、 $Lame_0$  與  $R_0$  (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義，以及  $QL$  (藍色虛線)為(3.43b)式計算獲得準縱波之波數  $k_{QL} = f/c_{QL}$  的虛部結果。

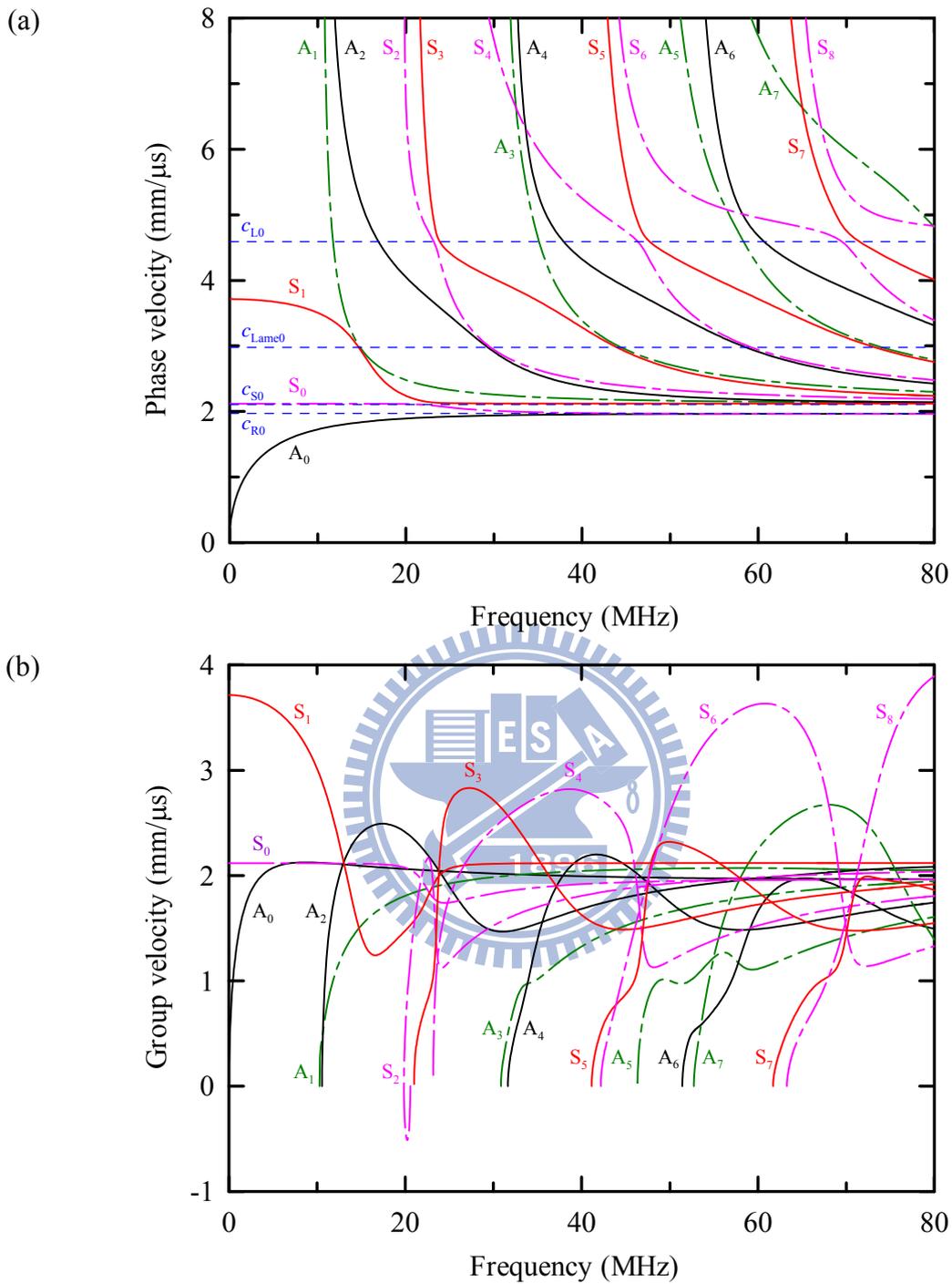


圖 4.18 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  作用下之單層平板，傳遞方向為角度  $\theta = 45^\circ$  之熱彈性導波的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，L0、S0、Lame0 與 R0 (藍色虛線)可見(4.1a-d)式之定義。

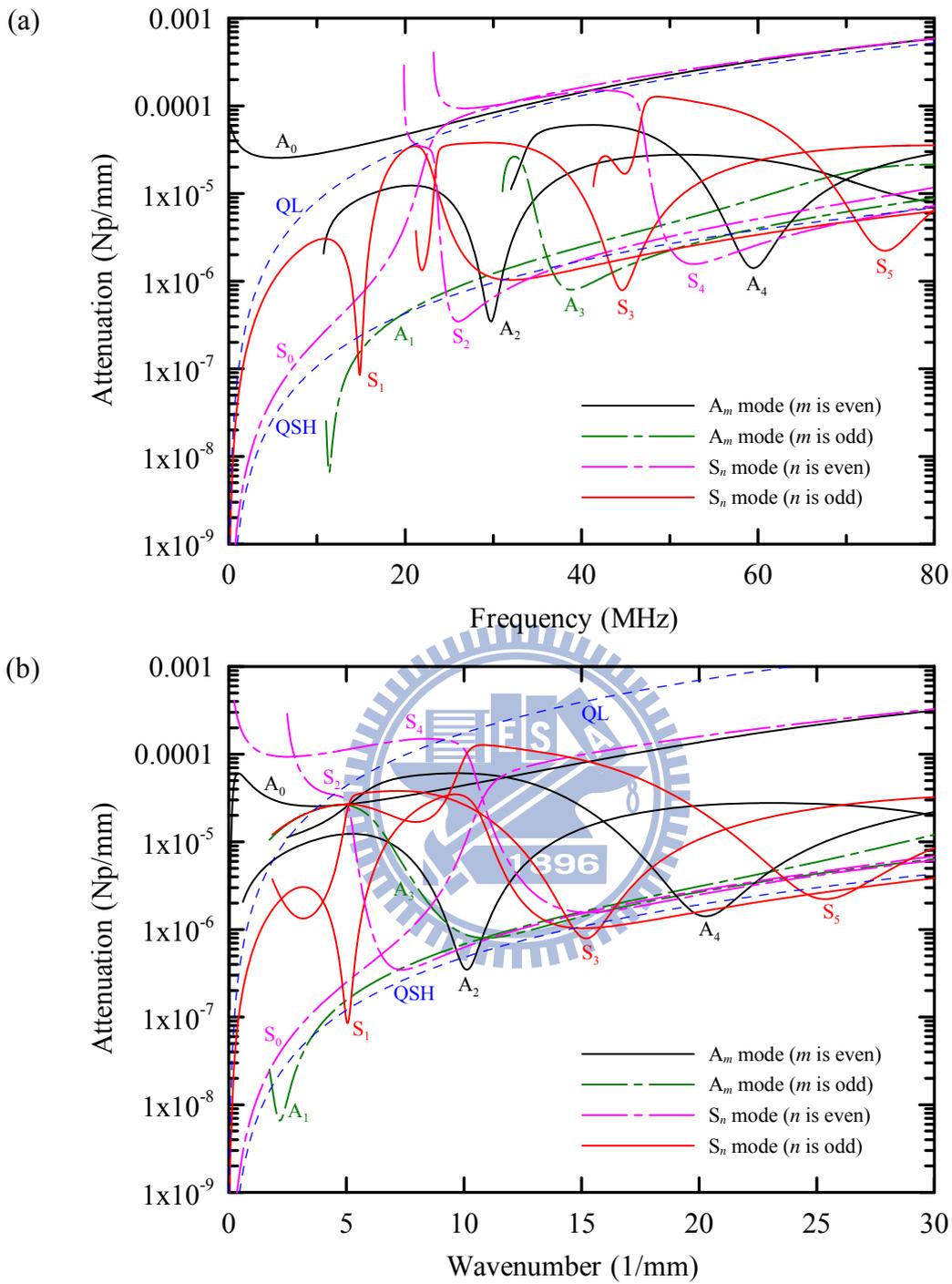


圖 4.19 在  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  作用下之單層平板，傳遞方向為角度  $\theta = 45^\circ$  之熱彈性導波的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，以及 QL 與 QSH (藍色虛線) 為(3.43b)式計算獲得準縱波與準橫波之波數  $k_{QL} = f/c_{QL}$  與  $k_{QT} = f/c_{QT}$  的虛部結果。

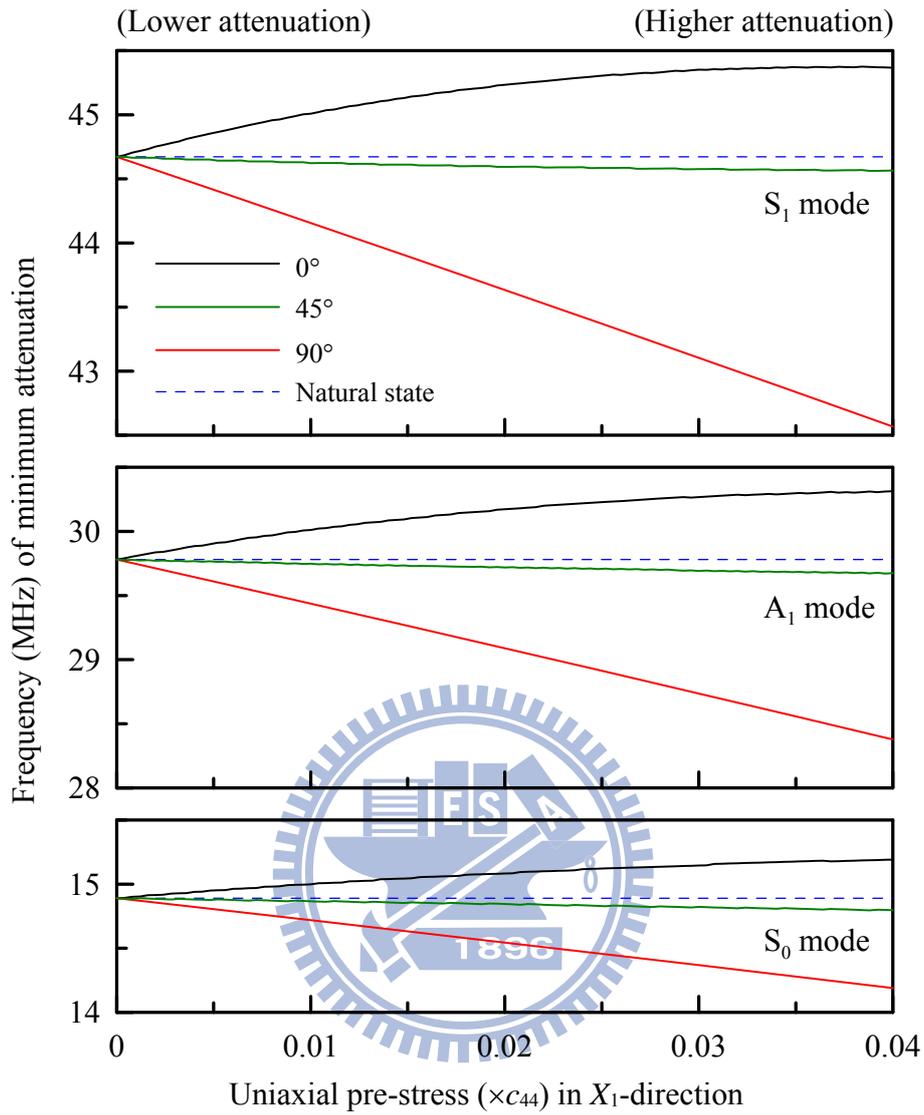


圖 4.20 傳遞方位角度  $\theta$  為  $0^\circ$ 、 $45^\circ$  與  $90^\circ$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，出現最小衰減值的頻率位置與單軸初始應力  $T_1^i$  ( $\times c_{44}$ ) 間的關係圖。

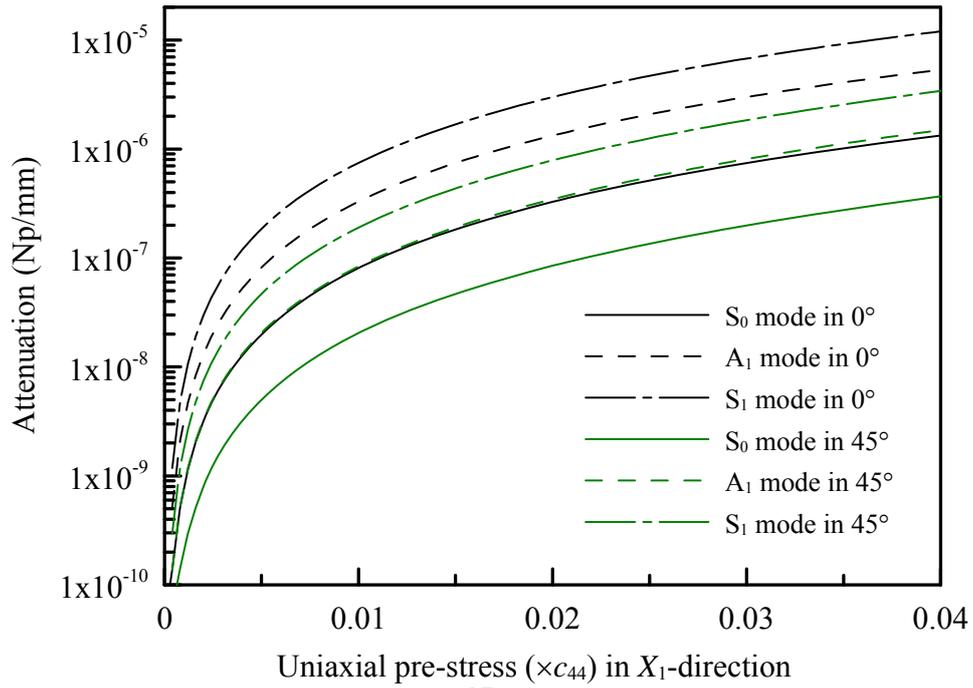


圖 4.21 傳遞方位角度  $\theta$  為  $0^\circ$  與  $45^\circ$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，最小衰減值大小與單軸初始應力  $T_1^i$  ( $\times c_{44}$ ) 間的關係圖。



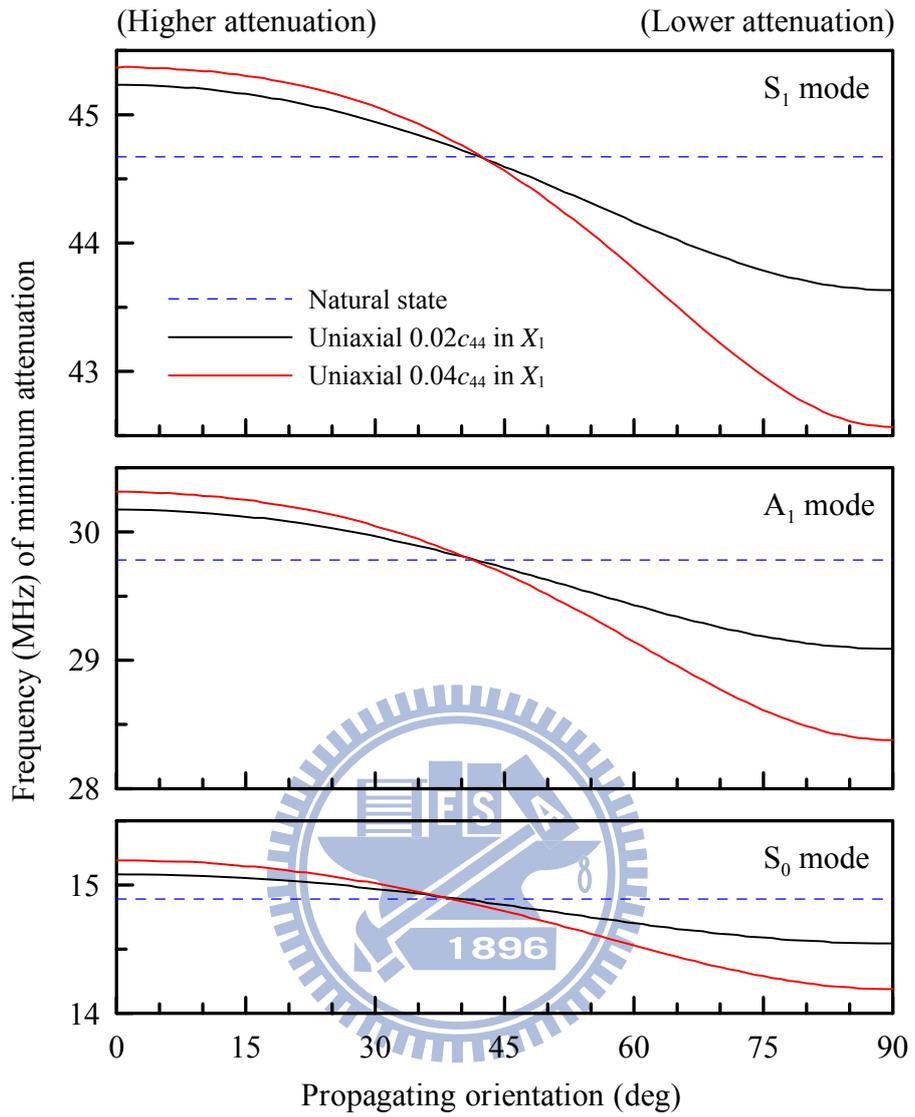


圖 4.22 單軸初始應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，出現最小衰減值的頻率位置與傳遞方位角度  $\theta$  間的關係圖。

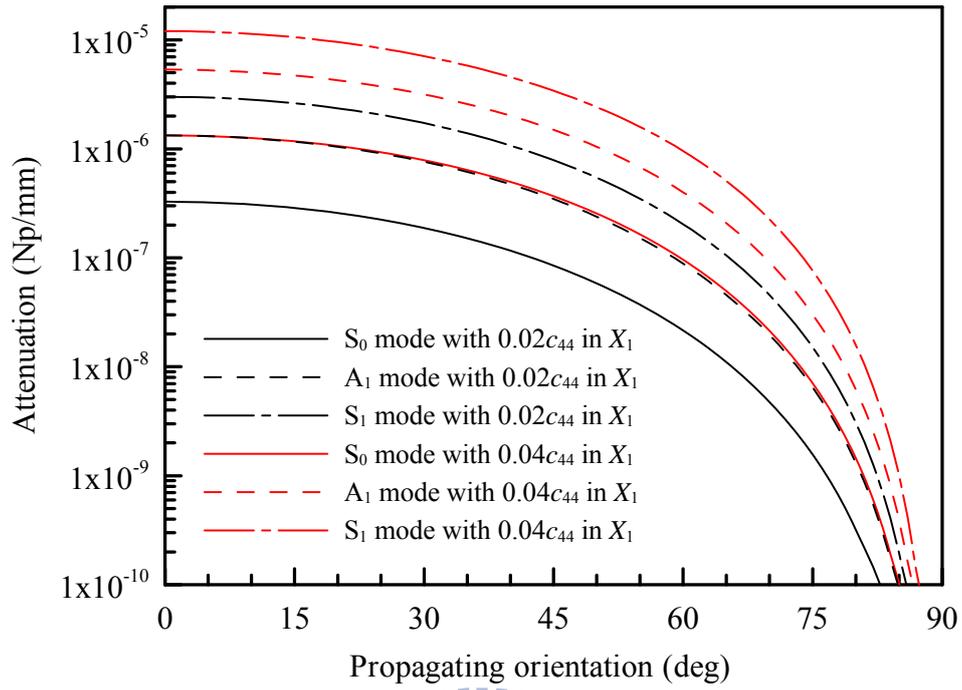


圖 4.23 單軸初始應力  $T_1^i$  為  $0.02c_{44}$  與  $0.04c_{44}$  之熱彈性導波的  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  模態，最小衰減值大小與傳遞方位角度  $\theta$  間的關係圖。



## 第五章 表面具黏滯性液體負載的平板導波

本章探討表面具黏滯性液體負載的平板結構導波，它屬於第一章所述第二種情形，黏彈波，利用數值方法獲得平板中傳遞導波的頻散與衰減關係，並探討固液界面上平板表面質點對頻率的運動特性，未來可將此結果應用至液體特性的量測，或是操控液體中微小分子或氣泡的排列。

### 5.1 理論模型

考慮一具液體薄層負載之平板，如圖 5.1 所示，其中  $h$  與  $H$  分別為液體薄層與平板的厚度， $X_3$  軸為厚度方向， $X_1$  與  $X_2$  兩方向為無限延伸。假設聲導波沿著  $X_1$  方向傳遞，上述模型可簡化為在  $X_1X_3$  平面上的二維波傳問題，即  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} = 0$ 。首先，在忽略微體力的情況下，運動方程式可寫為

$$T_{11,1} + T_{31,3} = \rho \ddot{u}_1, \quad (5.1a)$$

$$T_{13,1} + T_{33,3} = \rho \ddot{u}_3, \quad (5.1b)$$

以及其應力-位移的本構關係可表示為

$$T_{11} = c_{11} u_{1,1} + c_{13} u_{3,3}, \quad (5.2a)$$

$$T_{33} = c_{13} u_{1,1} + c_{11} u_{3,3}, \quad (5.2b)$$

$$T_{13} = T_{31} = c_{55} (u_{1,3} + u_{3,1}), \quad (5.2c)$$

其中  $\rho$  為質量密度， $u_I$  與  $T_{IJ}$  ( $I, J = 1, 3$ ) 分別代表為位移與應力。對於一等向性材料，材料係數  $c_{11}$ 、 $c_{13}$  與  $c_{55}$  可利用 Lamé 常數  $\lambda$  與  $\mu$  表示，即：

$$c_{11} = \lambda + 2\mu, \quad c_{13} = \lambda, \quad c_{55} = \mu. \quad (5.3a-c)$$

利用 Stokes-Helmholtz 分解法中代表縱波與橫波的勢函數  $\varphi$  與  $\psi$ ，位移  $u_1$  與  $u_3$  分別為

$$u_1 = \varphi_{,1} - \psi_{,3}, \quad u_3 = \varphi_{,3} + \psi_{,1}. \quad (5.4a, b)$$

結合上述(5.1a, b)、(5.2a-c)與(5.3a-c)式，可得勢函數  $\varphi$  與  $\psi$  的波動方程式(wave equation)

分別為

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\varphi}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{c_S^2} \ddot{\psi}, \quad (5.5a, b)$$

其中 Laplacian 算子  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ，以及  $c_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$  與  $c_S = \sqrt{c_{55}/\rho}$  分別為縱波與橫波的波速。配合平面波展開法(plane wave expansion, PWE)，各物理量假設為  $e^{i(\xi X_1 - \omega t)}$  的週期函數，其中  $\xi$  與  $\omega$  分別為角波數與角頻率。由(5.5a, b)式可獲得勢函數  $\varphi$  與  $\psi$  在  $(\omega, \xi)$  域的解型式分別為

$$\varphi(\xi, X_3, \omega) = C_L^+ e^{i\zeta_L X_3} + C_L^- e^{-i\zeta_L X_3}, \quad (5.6a)$$

$$\psi(\xi, X_3, \omega) = C_S^+ e^{i\zeta_S X_3} + C_S^- e^{-i\zeta_S X_3}, \quad (5.6b)$$

其中上標「+」與「-」代表  $X_3$  方向的下傳波與上傳波，下標 L 與 S 代表縱波與橫波， $C_L^\pm$  與  $C_S^\pm$  為待定振幅大小，以及  $\zeta_L$  與  $\zeta_S$  為  $X_3$  方向的角波數且定義如下：

$$\zeta_L^2 = \zeta_S^2 - \xi^2, \quad \zeta_L^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} = \frac{\omega^2 \rho}{c_{11}}, \quad (5.7a, b)$$

$$\zeta_S^2 = \zeta_S^2 - \xi^2, \quad \zeta_S^2 = \frac{\omega^2}{c_S^2} = \frac{\omega^2 \rho}{c_{55}}. \quad (5.7c, d)$$

代入(5.6a, b)式  $\varphi$  與  $\psi$  的結果，在  $(\omega, \xi)$  域的位置  $u_I$  與應力  $T_{IJ}$  ( $I, J=1, 3$ ) 分別為

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi, X_3, \omega) \\ u_3(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\zeta_S & i\xi \\ i\xi & i\zeta_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_S^+ e^{i\zeta_S X_3} \\ C_L^+ e^{i\zeta_L X_3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} i\zeta_S & i\xi \\ i\xi & -i\zeta_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_S^- e^{-i\zeta_S X_3} \\ C_L^- e^{-i\zeta_L X_3} \end{Bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{11}(\xi, X_3, \omega) \\ T_{13}(\xi, X_3, \omega) \\ T_{33}(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_{55}\xi\zeta_S & -(c_{11}\xi^2 - 2c_{55}\zeta_L^2) \\ c_{55}(\zeta_S^2 - \xi^2) & -2c_{55}\xi\zeta_L \\ -2c_{55}\xi\zeta_S & -(c_{11}\xi^2 - 2c_{55}\xi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_S^+ e^{i\zeta_S X_3} \\ C_L^+ e^{i\zeta_L X_3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c_{55}\xi\zeta_S & -(c_{11}\xi^2 - 2c_{55}\zeta_L^2) \\ c_{55}(\zeta_S^2 - \xi^2) & 2c_{55}\xi\zeta_L \\ 2c_{55}\xi\zeta_S & -(c_{11}\xi^2 - 2c_{55}\xi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_S^- e^{-i\zeta_S X_3} \\ C_L^- e^{-i\zeta_L X_3} \end{Bmatrix}. \quad (5.9)$$

上述二式可整理出類似(3.82)、(3.83)與(3.85)式的矩陣表示式，其中矩陣  $\mathbf{P}^\pm$ 、 $\mathbf{Q}_X^\pm$ 、 $\mathbf{Q}_Z^\pm$  與  $\mathbf{D}^\pm(X_3)$  如同(A.5a-d)式所示，此一表示方式有助於在層狀介質中矩陣法的推導。

由於平板與液體薄層皆考慮等向性材料，因此，液體薄層的推導可依照上述流程。為區分兩者材料的不同，液體薄層的相關參數皆會加上一符號「 $f$ 」，例如：

$$\rho_f, c_{11}^f, c_{13}^f, c_{55}^f, c_{L_f}, c_{S_f}, \xi_{L_f}, \xi_{S_f}, \zeta_{L_f}, \zeta_{S_f},$$

$$C_{L_f}^\pm, C_{S_f}^\pm, \varphi_f, \psi_f, u_I^f \text{ 與 } T_{IJ}^f \quad (I, J=1, 3) \text{ 等。}$$

參照 Nayfeh 與 Nagy [155] 的假設，基於 Stokes 假說下，將黏滯性液體視為一個具剪力剛性  $-i\omega\eta_f$  之假想的等向性固體，其中  $\eta_f$  為液體的動態黏滯係數(dynamic viscosity)。Stokes 假說的物理意義為正向應力和為零，代表黏滯應力造成的體積變化為零。因此，黏滯性液體的材料係數定義為

$$c_{11}^f = \kappa_f - \frac{4}{3}i\omega\eta_f, \quad c_{13}^f = \kappa_f + \frac{2}{3}i\omega\eta_f, \quad c_{55}^f = -i\omega\eta_f, \quad (5.10a-c)$$

其中  $\kappa_f$  為液體的體積模數。波速分別為  $c_{L_f} = \sqrt{c_{11}^f/\rho_f}$  與  $c_{S_f} = \sqrt{c_{55}^f/\rho_f}$ ，由此得知液體的縱波波速  $c_{L_f}$  是具有頻散特性(數值隨頻率  $\omega$  變化)以及衰減特性(含有虛部項)。若忽略頻散與衰減影響，則可將  $c_{L_f}$  視為  $c_{\text{fluid}} = \sqrt{\kappa_f/\rho_f}$ 。根據上述推導流程，可得類似(5.5a, b) 式的波動方程式，液體層的勢函數  $\varphi_f$  與  $\psi_f$  在  $(\omega, \xi)$  域的解型式分別為

$$\varphi_f(\xi, X_3, \omega) = C_{L_f}^+ e^{i\zeta_{L_f} X_3} + C_{L_f}^- e^{-i\zeta_{L_f} X_3}, \quad (5.11a)$$

$$\psi_f(\xi, X_3, \omega) = C_{S_f}^+ e^{i\zeta_{S_f} X_3} + C_{S_f}^- e^{-i\zeta_{S_f} X_3}, \quad (5.11b)$$

其中  $C_{L_f}^\pm$  與  $C_{S_f}^\pm$  為液體層的振幅大小，以及  $\zeta_{L_f}$  與  $\zeta_{S_f}$  為液體層在  $X_3$  方向的角波數且

$$\zeta_{L_f}^2 = \xi_{L_f}^2 - \xi^2, \quad \xi_{L_f}^2 = \frac{\omega^2}{c_{L_f}^2} = \frac{\omega^2 \rho_f}{c_{11}^f}; \quad (5.12a, b)$$

$$\zeta_{S_f}^2 = \xi_{S_f}^2 - \xi^2, \quad \xi_{S_f}^2 = \frac{\omega^2}{c_{S_f}^2} = \frac{i\omega\rho_f}{\eta_f}. \quad (5.12c, d)$$

仿照(5.8)與(5.9)二式，在  $(\omega, \xi)$  域的位置  $u_I^f$  與應力  $\sigma_{IJ}^f$  ( $I, J=1, 3$ ) 分別為

$$\begin{Bmatrix} u_1^f(\xi, X_3, \omega) \\ u_3^f(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\zeta_{S_f} & i\xi \\ i\xi & i\zeta_{L_f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{S_f}^+ e^{i\zeta_{L_f} X_3} \\ C_{L_f}^+ e^{i\zeta_{L_f} X_3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} i\zeta_{S_f} & i\xi \\ i\xi & -i\zeta_{L_f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{S_f}^- e^{-i\zeta_{L_f} X_3} \\ C_{L_f}^- e^{-i\zeta_{L_f} X_3} \end{Bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_{11}^f(\xi, X_3, \omega) \\ T_{13}^f(\xi, X_3, \omega) \\ T_{33}^f(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2c_{55}^f \xi \zeta_{Sf} & -(c_{11}^f \xi_{Lf}^2 - 2c_{55}^f \zeta_{Lf}^2) \\ c_{55}^f (\zeta_{Sf}^2 - \xi^2) & -2c_{55}^f \xi \zeta_{Lf} \\ -2c_{55}^f \xi \zeta_{Sf} & -(c_{11}^f \xi_{Lf}^2 - 2c_{55}^f \xi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{Sf}^+ e^{i\zeta_{Lf} X_3} \\ C_{Lf}^+ e^{i\zeta_{Lf} X_3} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -2c_{55}^f \xi \zeta_{Sf} & -(c_{11}^f \xi_{Lf}^2 - 2c_{55}^f \zeta_{Lf}^2) \\ c_{55}^f (\zeta_{Sf}^2 - \xi^2) & 2c_{55}^f \xi \zeta_{Lf} \\ 2c_{55}^f \xi \zeta_{Sf} & -(c_{11}^f \xi_{Lf}^2 - 2c_{55}^f \xi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{Sf}^- e^{-i\zeta_{Lf} X_3} \\ C_{Lf}^- e^{-i\zeta_{Lf} X_3} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

同理，可整理出類似(3.82)、(3.83)與(3.85)式的表示式，其中矩陣 $\mathbf{P}'^{\pm}$ 、 $\mathbf{Q}'_X^{\pm}$ 、 $\mathbf{Q}'_Z^{\pm}$ 與 $\mathbf{D}'^{\pm}(X_3)$ 如同(A.5a-d)式所示。再加上液體壓力差 $\Delta p$ 相當於體積變化率 $-\kappa_f u'_{I,I}$ ，可得

$$\begin{aligned} \Delta p(\xi, X_3, \omega) &= -\kappa_f u'_{I,I} \\ &= \kappa_f \xi_{Lf}^2 (C_{Lf}^+ e^{i\zeta_{Lf} X_3} + C_{Lf}^- e^{-i\zeta_{Lf} X_3}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

如圖 5.1 所示，以固液界面(位置 $X_3 = 0$ )為基準，應用層狀介質之波傳分析常用的矩陣法[161, 163]，整理(5.8)、(5.9)、(5.13)、(5.14)與(5.15)式，獲得各層的位移與應力組成的狀態向量分別為

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1(\xi, X_3, \omega) \\ \mathbf{V}_1(\xi, X_3, \omega) \\ \tilde{\mathbf{V}}_1(\xi, X_3, \omega) \\ \Delta p(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^+ & \mathbf{P}_1^- \\ \mathbf{Q}_1^+ & \mathbf{Q}_1^- \\ \tilde{\mathbf{Q}}_1^+ & \tilde{\mathbf{Q}}_1^- \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\kappa^+ & \boldsymbol{\varepsilon}_\kappa^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_1^- \end{Bmatrix}, \quad (-h \leq X_3 \leq 0) \quad (5.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2(\xi, X_3, \omega) \\ \mathbf{V}_2(\xi, X_3, \omega) \\ \tilde{\mathbf{V}}_2(\xi, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^+ & \mathbf{P}_2^- \\ \mathbf{Q}_2^+ & \mathbf{Q}_2^- \\ \tilde{\mathbf{Q}}_2^+ & \tilde{\mathbf{Q}}_2^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2^+(X_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2^-(X_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_2^+ \\ \mathbf{C}_2^- \end{Bmatrix}, \quad (0 \leq X_3 \leq H) \quad (5.17)$$

其中下標「1」與「2」分別代表液體層與平板層，上標「±」代表下傳與上傳的平面波。向量 $\mathbf{U}$ 代表位移 $u_1$ 與 $u_3$ ，為配合層與層間的邊界關係，以及波在水平方向的能量傳遞，向量 $\mathbf{V}$ 代表平面法線為 $X_3$ 方向的應力 $T_{31}$ 與 $T_{33}$ ，向量 $\tilde{\mathbf{V}}$ 代表平面法線為 $X_1$ 方向的應力 $T_{11}$ 與 $T_{13}$ ，而 $\Delta p$ 為液體層的壓力差。參考圖 5.2 所示，向量 $\mathbf{C}_1^-$ 與 $\mathbf{C}_1^+$ 分別代表液體層中平面波離開(departing)與抵達(arrival)固液界面的振幅係數，向量 $\mathbf{C}_2^+$ 與 $\mathbf{C}_2^-$ 分別代表平板中平面波離開與抵達固液界面的振幅係數。在上述(5.16)與(5.17)二式中，向量或矩陣內各元素之定義分別整理如下：

(1) 液體層：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_1 &= \begin{Bmatrix} u_1^f \\ u_3^f \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1^\pm = \begin{bmatrix} p_{11f}^\pm & p_{13f}^\pm \\ p_{31f}^\pm & p_{33f}^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_1 = \begin{Bmatrix} T_{31}^f \\ T_{33}^f \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1^\pm = \begin{bmatrix} q_{11f}^\pm & q_{13f}^\pm \\ q_{31f}^\pm & q_{33f}^\pm \end{bmatrix}, \\
 \tilde{\mathbf{V}}_1 &= \begin{Bmatrix} T_{11}^f \\ T_{13}^f \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1^\pm = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11f}^\pm & \tilde{q}_{13f}^\pm \\ \tilde{q}_{31f}^\pm & \tilde{q}_{33f}^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^\pm = \begin{Bmatrix} C_{Sf}^\pm \\ C_{Lf}^\pm \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1^\pm = \text{diag} \left\{ \begin{matrix} e^{\pm i \zeta_{Sf} X_3} \\ e^{\pm i \zeta_{Lf} X_3} \end{matrix} \right\}, \\
 p_{11f}^\pm &= \mp i \zeta_{Sf}, \quad p_{33f}^\pm = \pm i \zeta_{Lf}, \quad p_{13f}^\pm = p_{31f}^\pm = i \zeta, \\
 q_{31f}^\pm &= \mp 2c_{55}^f \xi \zeta_{Sf}, \quad q_{33f}^\pm = -(c_{11}^f \xi_{Lf}^2 - 2c_{55}^f \xi^2), \\
 \tilde{q}_{11f}^\pm &= \pm 2c_{55}^f \xi \zeta_{Sf}, \quad \tilde{q}_{13f}^\pm = -(c_{11}^f \xi_{Lf}^2 - 2c_{55}^f \zeta_{Lf}^2), \\
 q_{11f}^\pm &= \tilde{q}_{31f}^\pm = c_{55}^f (\zeta_{Sf}^2 - \xi^2), \quad q_{13f}^\pm = \tilde{q}_{33f}^\pm = \mp 2c_{55}^f \xi \zeta_{Lf}, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_\kappa^\pm &= [\varepsilon_{1f}^\pm \quad \varepsilon_{3f}^\pm], \quad \varepsilon_{1f}^\pm = 0, \quad \varepsilon_{3f}^\pm = \kappa_f \xi_{Lf}^2.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

(2) 平板層：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_2 &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2^\pm = \begin{bmatrix} p_{11}^\pm & p_{13}^\pm \\ p_{31}^\pm & p_{33}^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{Bmatrix} T_{31} \\ T_{33} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2^\pm = \begin{bmatrix} q_{11}^\pm & q_{13}^\pm \\ q_{31}^\pm & q_{33}^\pm \end{bmatrix}, \\
 \tilde{\mathbf{V}}_2 &= \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{13} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_2^\pm = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11}^\pm & \tilde{q}_{13}^\pm \\ \tilde{q}_{31}^\pm & \tilde{q}_{33}^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2^\pm = \begin{Bmatrix} C_S^\pm \\ C_L^\pm \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2^\pm = \text{diag} \left\{ \begin{matrix} e^{\pm i \zeta_S X_3} \\ e^{\pm i \zeta_L X_3} \end{matrix} \right\}, \\
 p_{11}^\pm &= \mp i \zeta_S, \quad p_{33}^\pm = \pm i \zeta_L, \quad p_{13}^\pm = p_{31}^\pm = i \zeta, \\
 q_{31}^\pm &= \mp 2c_{55} \xi \zeta_S, \quad q_{33}^\pm = -(c_{11} \xi_L^2 - 2c_{55} \xi^2), \\
 \tilde{q}_{11}^\pm &= \pm 2c_{55} \xi \zeta_S, \quad \tilde{q}_{13}^\pm = -(c_{11} \xi_L^2 - 2c_{55} \zeta_L^2), \\
 q_{11}^\pm &= \tilde{q}_{31}^\pm = c_{55} (\zeta_S^2 - \xi^2), \quad q_{13}^\pm = \tilde{q}_{33}^\pm = \mp 2c_{55} \xi \zeta_L.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

由於考慮液體的黏滯特性，液體與固體兩者間的界面 ( $X_3 = 0$ ) 須滿足位移與曳力連續，加上液體上表面 ( $X_3 = -h$ ) 與固體下表面 ( $X_3 = H$ ) 邊界之曳力為零，可整理如下：

$$\text{在 } X_3 = -h : \quad T_{31}^f(-h) = 0, \quad T_{33}^f(-h) = 0. \tag{5.20a, b}$$

$$\text{在 } X_3 = 0 : \quad u_1^f(0) - u_1(0) = 0, \quad u_3^f(0) - u_3(0) = 0, \tag{5.21a, b}$$

$$T_{31}^f(0) - T_{31}(0) = 0, \quad T_{33}^f(0) - T_{33}(0) = 0. \tag{5.22a, b}$$

$$\text{在 } X_3 = H : \quad T_{31}(H) = 0, \quad T_{33}(H) = 0. \quad (5.23a, b)$$

(5.16)與(5.17)二式配合上述邊界條件，可得

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_1^+ \mathbf{E}_1^{-1} & -\mathbf{Q}_1^- \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_1^+ & \mathbf{P}_1^- & -\mathbf{P}_2^+ & -\mathbf{P}_2^- \\ \mathbf{Q}_1^+ & \mathbf{Q}_1^- & -\mathbf{Q}_2^+ & -\mathbf{Q}_2^- \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^+ \mathbf{E}_2 & \mathbf{Q}_2^- \mathbf{E}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^+ \\ \mathbf{C}_2^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (5.24)$$

其中

$$\mathbf{E}_1 = \text{diag} \begin{Bmatrix} e^{i\zeta_{sf}h} \\ e^{i\zeta_{lf}h} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \text{diag} \begin{Bmatrix} e^{i\zeta_{sh}H} \\ e^{i\zeta_{lh}H} \end{Bmatrix}. \quad (5.25)$$

觀察上述(5.20)式發現，它與(3.108)式的雙層結構全域矩陣表示是相同的，其非零解即為固液雙層結構之聲導波特徵方程式 $\Omega(\omega, \xi)$ 或 $\Omega(f, k)$ ，再利用 MATLAB 軟體作數值分析，求得具液體薄層負載之平板結構聲導波頻散與衰減曲線。

由於在特徵方程式 $\Omega(f, k) = 0$ 的求解過程中，數值上並無法計算獲得一個使其為零的精確解，一般作法則是會藉由 $\det[\Omega(f, k)]$ 之最小化求得其近似解。Lowe [162, 163]曾針對一層狀介質結構聲導波的特徵方程式作求解，發展出一套有效的複數尋根方法，稱之為曲線追蹤法。參考一般波數-頻率域的頻散曲線，可發現在波數 $k$ 軸上任意一點，皆可對應出無限多的頻率 $f$ ，此一特徵有助於在作 $f$ 尋根時，不會因為沒有對應的 $f$ 值而無法作波數掃描，曲線追蹤法便是以其中一點作出發。在本文中所考慮的平板表面之負載液體具有黏滯係數，會使聲導波在結構中傳遞時，其能量會發生衰減，因此，波數 $k$  [1/mm]的虛根大小影響就變的非常重要。令 $k = k_r + ik_i = k_r(1 + i\gamma_v/2\pi)$ ，特徵方程式 $\Omega(f, k)$ 則可表示為 $\Omega(f, k_r, k_i)$ 或 $\Omega(f, k_r, \gamma_v)$ 的函數型式，其中 $k_i$ 與 $\gamma_v$ 分別為每單位波傳遞距離[Np/mm]與每單位波長[Np/wavelength]的波數衰減。

為了比較分析模型中不同特徵模態的數值結果，將統一各個模態沿 $X_1$ 方向傳遞之聲導波通過某一截面的總能量，因此，可利用通過法向量為 $X_1$ 方向之表面的時間平均功率流(time-average power flow)作歸一化，這代表分析模型中每一個特徵模態通過截面的總能量是固定的，作為模態分析比較時的一個參考依據。根據此一概念，參考第二章的(2.88)與(2.97)式，將其考慮為波傳模態，並且忽略熱通量、溫度與初始應力的部分，第 $n$ 個模態沿 $X_1$ 方向傳遞且通過 $X_3$ 方向上某一截線的時間平均功率流 $P_{n,n}$ 可寫為

$$P_{n,n} = \frac{1}{2} \int_{\text{cross section}} \text{Re} \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{T}}_n \cdot \underline{\mathbf{v}}_n^* \right\} dX_3 = \frac{1}{2} \omega \int_{\text{cross section}} \text{Im} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{T}}_n \cdot \underline{\mathbf{u}}_n^* \right\} dX_3 \quad (5.26)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\text{cross section}} \text{Re} \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{T}}_n^* \cdot \underline{\mathbf{v}}_n \right\} dX_3 = \frac{-1}{2} \omega \int_{\text{cross section}} \text{Im} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{T}}_n^* \cdot \underline{\mathbf{u}}_n \right\} dX_3. \quad (5.26')$$

配合固液雙層結構在厚度  $X_3$  方向的範圍 ( $-h \leq X_3 \leq H$ )，並引用(5.9)與(5.10)式的狀態向量  $\mathbf{U}_1$ 、 $\tilde{\mathbf{V}}_1$ 、 $\mathbf{U}_2$  與  $\tilde{\mathbf{V}}_2$ ，上述(5.15)式可改寫為

$$E_{\text{flowout}}^a = \frac{1}{2} \omega \left[ \int_{-h}^0 \text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{V}}_1^{(n)} \cdot \mathbf{U}_1^{(n)*} \right\} dX_3 + \int_0^H \text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{V}}_2^{(n)} \cdot \mathbf{U}_2^{(n)*} \right\} dX_3 \right] \quad (5.27)$$

$$= \frac{-1}{2} \omega \left[ \int_{-h}^0 \text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{V}}_1^{(n)*} \cdot \mathbf{U}_1^{(n)} \right\} dX_3 + \int_0^H \text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{V}}_2^{(n)*} \cdot \mathbf{U}_2^{(n)} \right\} dX_3 \right]. \quad (5.27')$$

其中  $E_{\text{flowout}}^a$  ( $= P_{n,n}$ ) 代表第  $n$  個模態通過某一截線之時間平均功率流的總和，而且每個積分內則代表通過某一截線之時間平均功率流密度 ( $P_1^a$ )。狀態向量  $\mathbf{U}_1^{(n)}$ 、 $\tilde{\mathbf{V}}_1^{(n)}$ 、 $\mathbf{U}_2^{(n)}$  與  $\tilde{\mathbf{V}}_2^{(n)}$  分別為第  $n$  個模態的狀態向量  $\mathbf{U}_1$ 、 $\tilde{\mathbf{V}}_1$ 、 $\mathbf{U}_2$  與  $\tilde{\mathbf{V}}_2$ 。若令  $E_{\text{flowout}}^a$  的大小為一個單位，可獲得第  $n$  個模態的  $\mathbf{C}_1^\pm$  與  $\mathbf{C}_2^\pm$  在不同  $(\omega, \xi)$  時的振幅大小。

## 5.2 PVA 液體薄層

如圖 1 所示，平板為厚度 1 mm 的玻璃，其密度  $\rho$  為 2.76 g/cm<sup>3</sup>，Lamé 常數  $\lambda$  與  $\mu$  分別為 33.6 與 26.4 GPa，縱波波速  $c_L$  與橫波波速  $c_S$  分別為 5.6 與 3.1 mm/ $\mu$ s；液體薄層為厚度 0.01 mm 的 PVA 水溶液，其密度  $\rho_f$  為 1.01 g/cm<sup>3</sup>，容積模數  $\kappa_f$  為 2.25 GPa，且動態黏滯係數  $\eta_f$  設為 1.0 Pa.s，忽略頻散與衰減影響的縱波波速  $c_{\text{fluid}}$  為 1.5 mm/ $\mu$ s，其值非常接近 Scholte 波波速  $c_{\text{Sch}}$ 。對於一沿  $X_1$  方向傳遞之聲導波，為了統一各個模態之間的能量大小，參考(5.27)式所示，在截線範圍為  $-h \leq X_3 \leq H$  通過的時間平均功率流總和  $E_{\text{flowout}}^a$  定義為 1 GPa.mm<sup>2</sup>/ $\mu$ s。

將上述各參數代入(5.24)式中的特徵方程式，並應用 Lowe 所敘述的曲線追蹤法，經數值計算可獲得頻散與衰減曲線，如圖 5.3 至 5.5 所示。由於具液體薄層負載之平板就結構上已不具有上下對稱特性，獲得之頻散曲線亦不能稱之為對稱(S)或反對稱(A)模態。由於 PVA 水溶液的厚度與平板比較相對小很多，在圖 5.3(a)至 5.4(a, b)所示之波數實部  $k_r$ 、相速度  $c_{\text{ph}}$  與群速度  $c_g$  相對於頻率  $f$  的頻散曲線，與原始單一平板之結果差異

並不大，故改稱之為擬似(pseudo-)對稱或反對稱模態。因此，在圖中黑色虛線分別代表對稱(S)模態，而藍色實線分別代表反對稱(A)模態。而在衰減曲線的表示上，圖 5.3(b) 為波數虛部  $k_i$  相對於頻率  $f$  的衰減曲線，為了能更進一步瞭解衰減驟降的位置及其物理意義，將衰減取對數後對頻率  $f$  與波數實部  $k_r$  分別如圖 5.5(a, b) 所示。

首先，除  $A_0$  模態外，在圖 5.3(b) 中發現在某些特定頻率下，出現衰減驟降的現象，如圖 5.5(a) 中 **a**、**b**、**c**、**d**、**e**、**f** 與 **g** 點所示，其分別代表  $S_0$ 、 $A_1$ 、 $S_1$ 、 $A_2$ 、 $S_2$ 、 $A_3$  與  $S_3$  模態，對應到圖 5.5(b) 上，更能發現它們會在某些特定波數  $k_r$  下出現，約為 0.5、1.0、1.5、2.0、2.5、3.0 與 3.5  $\text{mm}^{-1}$  位置附近，即對稱模態  $S_n$  在  $k_r H = n + \frac{1}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )，反對稱模態  $A_m$  在  $k_r H = m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )。將 **a** 至 **g** 點對應至圖 5.4(a) 上，相速度  $c_{ph}$  約為 4.3  $\text{mm}/\mu\text{s}$  附近，普遍略低於單一平板的 Lamé 模態之波速  $\sqrt{2}c_s = 4.384 \text{ mm}/\mu\text{s}$ ，如圖中紅色虛線所示；再對應至圖 5.4(b)，群速度  $c_g$  約為 2.2  $\text{mm}/\mu\text{s}$  附近。將衰減驟減發生的頻率、波數、相速度與群速度以及平板在  $X_3 = 0$  的質點軌跡位移振幅比值  $|u_3/u_1|$  整理於表 5.1 中 Lamé 模態部分。上述特性是因於在該頻率或波數時，平板的運動特性呈現 Lamé 模態的特徵[169, 170]，模態之位移運動如圖 5.6(a) 所示，其特徵為在邊長 1/2 波長構成之正方單元，於波傳時體積脹縮變化為零或最小，即為類似等體積變化，聲導波在傳遞過程中能量的轉換與耗散最小；而且，隨著模態階次愈高，由於液體負載的影響，衰減驟減發生之波數與波速所落的位置，與單一平板作比較皆有逐漸往後偏移的現象，同時，衰減驟減現象變得愈不明顯，代表著此一運動特性亦變得不明顯。另外，參考表 5.1 所示，由位移  $u_1$  與  $u_3$  之振幅比值  $|u_3/u_1|$  的大小，可發現在固液界面上平板表面質點運動軌跡轉變為垂直表面的線偏振狀態。隨著 Lamé 模態之階次愈高或逐漸偏離 Lamé 模態，線偏振狀態則逐漸趨緩，還原至橢圓偏振狀態。

此外，除去上述 **a** 至 **g** 點，在圖 5.5(a, b) 中仍可發現尚有衰減驟降的現象，如 **o**、**p** 與 **q** 三點所示，分別為  $S_2$ 、 $A_3$  與  $S_3$  模態。將這些特定頻率對應至圖 5.3(a) 或 5.4(a) 時，發現 **o**、**p** 與 **q** 三點分別為  $A_2$  與  $S_2$  之交點以及  $A_3$  與  $S_3$  之第 1 個與第 2 個交點，發生時的相關資料可參考表 5.1 中交點模態(intersection modes)部分，**o**、**p** 與 **q** 三點分別為  $S_2$ 、 $A_3$  與  $S_3$  模態，其位移  $u_1$  與  $u_3$  之振幅比值  $|u_3/u_1|$  相對較大；反之，**o'**、**p'** 與 **q'** 三點分別為  $A_2$ 、 $S_3$  與  $A_3$  模態，其  $|u_3/u_1|$  相對較小。再者，此三點相關的位移運動如圖 5.6(b) 所

示。以 **o** 與 **o'** 兩點為例，發現  $A_2$  模態在固液界面之平板表面位移  $u_3$  趨近為零，這代表此一模態幾乎是藉由位移  $u_1$  作平行界面的切向運動與液體耦合，因液體的黏滯阻尼特性，發生較大的能量損耗；相反地， $S_2$  模態的平板表面位移  $u_1$  則趨近為零，大部分藉由位移  $u_3$  作垂直界面的正向運動直接與液體耦合，故其能量損耗相對較小。參考圖 5.7(a) 所示，發現在 **o** 與 **o'** 兩點頻率 5.2 MHz 附近位置， $A_2$  與  $S_2$  兩模態的位移振幅比值  $|u_3/u_1|$  分別處於極小與極大的相反結果，代表質點運動軌跡呈現了平行與垂直於表面兩種截然不同方向的線偏振運動。再根據圖 5.7(b) 所示，因表面位移  $u_1$  大小的影響， $A_2$  與  $S_2$  兩模態的時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  亦呈現兩種不同結果， $A_2$  模態為 4.4 GPa.mm/ $\mu$ s，而  $S_2$  模態為  $0.4 \times 10^{-3}$  GPa.mm/ $\mu$ s。同理，上述現象在 **p** 與 **p'** 兩點以及 **q** 與 **q'** 兩點發生的情況亦屬相同道理。

由圖 5.4(a) 發現  $A_0$  與  $S_0$  模態的相速度頻散曲線在頻率較高時是略微分開的，且  $A_0$  模態不會收斂至雷利表面聲波波速。因此，將  $A_0$  與  $S_0$  兩者於頻率 1 至 10 MHz 的位移運動輸出至如圖 5.9(a, b) 所示，發現在頻率 1 MHz 時，因波數較小或波長較長， $A_0$  與  $S_0$  兩者仍維持著板波反對稱與對稱模態，由圖 5.7(a) 可知在固液界面之平板質點運動軌跡分別為逆時針與順時針。然而在頻率 10 MHz 時，平板  $A_0$  模態之位移與應力變化集中於固液界面，質點軌跡為逆時針，具有雷利表面聲波的特徵，隨著頻率增加其波速會趨於一個定值 2.859 mm/ $\mu$ s，略低於雷利波波速  $c_R = 0.942c_S = 2.865$  mm/ $\mu$ s (玻璃的泊松比  $\nu = 0.28$ )。相反地，平板  $S_0$  模態之位移與應力變化卻是集中於平板下表面，質點軌跡則為順時針。如同圖 5.9(a, b) 所示， $A_0$  與  $S_0$  模態在頻率愈高時，位移與應力變化分別聚集於平板上下表面的現象，可由圖 5.7(b) 與 5.8(b) 中藍色實線與黑色虛線兩者的交替現象觀察出來。另一方面，再根據圖 5.5(a) 所示， $A_0$  模態約在頻率大於 6 MHz 後衰減逐漸遞增至 0.01 Np/mm，其能量逐漸聚集於平板的上表面，但由於波長逐漸變短，其能量更容易傳遞至液體中，所以衰減相對較大。 $S_0$  模態在頻率大於 6 MHz 後衰減則是逐漸遞減至小於  $1 \times 10^{-7}$  Np/mm，其能量聚集於平板的下表面，由於下表面無液體耦合影響，所以衰減相對較小。

此外，進一步地將平板上下表面質點軌跡的位移振幅比  $|u_3/u_1|$  以及時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  對頻率之分佈分別輸出如圖 5.7 與 5.8 所示，圖中符號「○」與「●」代表在

位置  $X_3 = 0$  處的質點軌跡分別為順時針(cw)旋轉，在位置  $X_3 = H$  處的質點軌跡分別為逆時針(ccw)旋轉。其中，可藉由振幅比  $|u_3/u_1|$  的大小來判斷質點橢圓軌跡的偏振狀態，愈大代表形狀愈狹長，愈小代表愈寬扁，前者顯示平板主要是經由垂直界面的正向位移  $u_3$  直接使液體層發生體積變化而將能量導入，例如 **a** 至 **g** 點以及 **o**、**p** 與 **q** 三點；後者是經由切向位移  $u_1$  與液體層的黏滯係數耦合，因此其衰減也會相對較大，例如 **o'**、**p'** 與 **q'** 三點以及 **r**、**s** 與 **t** 三點，參考表 5.3，可發現 **r**、**s** 與 **t** 三點位置非常接近  $S_1$ 、 $S_2$  與  $S_3$  模態之群速度最大值位置。顯而易見地，由圖 5.7 與 5.8 發現頻率愈靠近 Lamé 模態以及不同模態之交點時，質點位移  $u_1$  最大振幅會發生驟減，垂直表面的線偏振運動現象愈是明顯。此外，亦可發現每一模態之頻率約在小於 Lamé 模態後，上下表面的質點軌跡皆會呈現相反的旋轉方向，上表面由逆時針轉變為順時針，而下表面則是由順時針轉變為逆時針。將各個模態的質點軌跡發生相反旋轉時的頻率、波數以及相速度之範圍整理於表 5.2，並獲得一個規律結果，即對稱模態  $S_n$  在  $k_r H < n + \frac{1}{2}$  ( $n = 0, 1, 2$ )，反對稱模態  $A_m$  在  $k_r H < m$  ( $m = 1, 2, 3$ )，以及兩者的相速度  $c_{ph} > \sqrt{2} c_s$  的範圍。考慮  $S_0$ 、 $A_1$  與  $S_1$  三模態在頻率範圍分別為 1.2-3.0、3.4-5.2 與 5.6-7.4 MHz 附近，平板上表面的質點軌跡可分別參考圖 5.10(a-c) 所示，發現在 2.2、4.4 與 6.6 MHz 出現反轉現象，而且它們與出現 Lamé 模態的頻率相近，同理，此現象亦可推廣至其餘 Lamé 模態上。此外，Nayfeh 與 Nagy [167] 亦發現  $S_0$  模態會在特定頻率發生衰減驟降，位於固液界面上質點軌跡會出現反轉現象，並且會由原本的橢圓偏振轉變為垂直表面的線偏振狀態。

再者，將圖 5.7(a, b) 與圖 5.8(a, b) 分別作比對，除了  $A_0$  與  $S_0$  兩模態，可發現大部分趨勢是雷同的。由圖 5.7(b) 與 5.8(b) 中觀察  $A_0$  與  $S_0$  模態的時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  之變化，在頻率小於 5 MHz 範圍時  $\langle P_1^a \rangle$  大約在 1 至 2.5 GPa.mm/ $\mu$ s 間，中間除了  $S_0$  模態的振幅會在 Lamé 模態附近而發生驟減情形，並配合圖 5.7(a) 與 5.8(a)，可知在愈往低頻時  $A_0$  模態的橢圓軌跡形狀愈狹長， $S_0$  模態則是愈寬扁。在頻率大於 5 MHz 範圍，隨著頻率愈高，平板上下表面的橢圓軌跡之長軸  $u_3$  與短軸  $u_1$  比會愈接近 1.5，在平板上表面  $A_0$  模態的橢圓軌跡之振幅會逐漸變大， $S_0$  模態會逐漸變小。反之，在平板下表面時  $A_0$  與  $S_0$  模態的情況則會完全相反。

根據(5.11)式中  $\varepsilon_{1f}^{\pm}$  與  $\varepsilon_{3f}^{\pm}$  之結果，液體層中壓力差  $\Delta p$  會與液體的縱波有直接關係。

由於液體層厚度  $h$  較薄，在上下表面間壓力差分佈會較接近線性，並由其大小可以瞭解上下表面間的變化差異。圖 5.11 為液體層在固液界面 ( $X_3 = 0$ ) 與上表面 ( $X_3 = -h$ ) 間的壓力差的頻譜圖，發現壓力差的大小會在某些特定頻率出現驟減現象，例如  $\mathbf{o}'$ 、 $\mathbf{p}'$  與  $\mathbf{q}'$  三點以及  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{s}$  與  $\mathbf{t}$  三點，其中  $\mathbf{o}'$ 、 $\mathbf{p}'$  與  $\mathbf{q}'$  三點分別為  $A_2$  與  $S_2$  之交點以及  $A_3$  與  $S_3$  之第 1 個與第 2 個交點，位移運動如圖 5.6(b) 所示，而  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{s}$  與  $\mathbf{t}$  三點分別  $S_1$ 、 $S_2$  與  $S_3$  模態之群速度最大值位置，位移運動如圖 5.12 所示，它們皆是利用平板上表面的切向位移  $u_1$  與液體發生耦合。再根據表 5.3 之內容，可發現這些位置與圖 5.7(a) 中的位移振幅比  $|u_3/u_1|$  最小值出現位置接近，主要是藉由平板上表面的切向位移  $u_1$  與液體耦合，使壓力差發生變化幅度遠不及其他方式有效，這代表藉由此一方式激發的壓力差變化雖小，但因液體黏滯效應影響，上下表面間的壓力差變化卻是比較均勻。反之，藉由正向位移  $u_3$  方式與液體耦合，會使液體層配合平板上表面的起伏一起運動，容易造成靠近固液界面附近的體積變化較大，大部分能量亦侷限在此界面附近，促使兩表面間的壓力差變化差異較大且分佈較不均勻。換言之，液體層上下表面間的壓力差變化與平板上表面質點軌跡運動的偏振狀態有直接關係。同樣地，在圖 5.11 中發現頻率大於 6 MHz 範圍，平板  $S_0$  模態造成壓力差變化的影響會逐漸減小，這是因為平板  $S_0$  模態的能量已經逐漸集中於平板下表面。

### 5.3 甘油液體薄層

如圖 1 所示，平板為厚度  $H = 1$  mm 的玻璃，材料係數沿用上一節之假設，其密度  $\rho$  為  $2.76 \text{ g/cm}^3$ ，Lamé 常數  $\lambda$  與  $\mu$  分別為 33.6 與 26.4 GPa，縱波波速  $c_L$ 、橫波波速  $c_S$ 、雷利波波速  $c_R$  與 Lamé 模態波速  $c_{\text{Lame}}$  分別為 5.6、3.1、2.865 與 4.374 mm/ $\mu\text{s}$ ；液體薄層則考慮為甘油(glycerin 或 glycerol)，其密度  $\rho_f$  為  $1.262 \text{ g/cm}^3$ ，容積模數  $\kappa_f$  為 4.52 GPa，且動態黏滯係數  $\eta_f$  設為 1.495 Pa.s，忽略頻散與衰減影響的縱波波速  $c_{\text{fluid}}$  為 1.893 mm/ $\mu\text{s}$ ，以及 Scholte 波波速  $c_{\text{Sch}}$  為 1.864 mm/ $\mu\text{s}$  (略小於  $c_{\text{fluid}}$ )。

首先，考慮液體層的厚度  $h = 0.01$  mm，經數值計算獲得相速度頻散與衰減頻譜圖，如圖 5.13(a, b) 所示。在圖 5.13(a) 中右上方的圖例說明，淡藍色虛線代表單一平板的對稱模態 ( $A_m$ )，灰色虛線代表對稱模態 ( $S_n$ )。如同上一節所述，在此一頻率範圍下，可

發現頻散曲線與原始單一平板之結果差異並不大，改稱之為擬似(pseudo-)對稱或反對稱模態。圖上方的符號  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  與  $\mathbf{b}_1$  分別代表單一平板  $A_1$ 、 $S_2$ 、 $A_2$  與  $S_1$  模態的截止頻率位置，其公式與數值可見表 5.4 的平板部分。隨著頻率逐漸增大，根據圖 5.13(a) 所示， $S_0$  模態(藍色實線)相速度會趨近至雷利波波速  $c_R$ ， $A_0$  模態(綠色實線)相速度受到液體模態的影響並不明顯，其值只會漸漸略低於  $c_R$  而緩慢地往  $c_{\text{fluid}}$  靠近，而其餘  $A_1$ 、 $S_1$ 、 $A_2$  與  $S_2$  模態則會逐漸趨近至橫波波速  $c_S$ 。根據圖 5.13(b) 所示， $S_0$  模態衰減會逐漸減小， $A_0$  模態衰減則會逐漸增大而趨近於 0.02 Np/mm。此外，除了  $A_0$  模態外，每個模態的 Lamé 模態特性仍存在，但隨著頻率增大，此一現象則會越不明顯。整體而言，圖 5.13(a, b) 仍保有上一節所述的特徵。

考慮液體層的厚度  $h = 0.05$  mm，其相速度頻散與衰減頻譜圖如圖 5.14(a, b) 所示。在圖 5.14(a) 中右上方的圖例說明，額外增加的粉紅色虛線代表液體層模態，代表液體層的上下表面分別設為自由(free)與固定(fixed)邊界，其推導過程可見附錄 3 之內容。而圖上方的符號  $\mathbf{c}_1$  為液體層模態的截止頻率位置，其公式與數值可見表 5.4 的液體層  $h = 0.05$  部分。由於所獲得頻散曲線已經不再具有原始單一平板的模態特性，因此使用符號  $\mathbf{0}$ 、 $\mathbf{1}$ 、 $\mathbf{2}$ 、 $\mathbf{3}$ 、 $\mathbf{4}$ 、 $\mathbf{5}$  與  $\mathbf{6}$  作區分。相較於圖 5.13(a)，相速度頻散曲線已明顯受到液體  $\mathbf{c}_1$  模態的影響，隨著頻率逐漸增大， $\mathbf{1}$  模態(藍色實線)相速度會趨近至  $c_R$ ， $\mathbf{0}$  模態(綠色實線)相速度會快速地往  $c_{\text{fluid}}$  靠近， $\mathbf{2}$  模態相速度在頻率大於 14 MHz 時開始略低於  $c_S$ ，而其餘  $\mathbf{3}$ 、 $\mathbf{4}$ 、 $\mathbf{5}$  與  $\mathbf{6}$  模態則會逐漸趨近至  $c_S$ 。根據圖 5.14(b) 所示，隨著頻率逐漸增大， $\mathbf{0}$  與  $\mathbf{2}$  模態衰減會逐漸增大而分別趨近於 0.6 與 0.1 Np/mm， $\mathbf{1}$  模態衰減則會逐漸減小，而且它的 Lamé 模態特性仍存在，但其衰減值較大(在頻率 2.2 MHz 附近約  $4 \times 10^{-5}$  Np/mm)。此外，根據第 5.4 節的結果，可推測  $\mathbf{0}$  與  $\mathbf{1}$  模態的能量會分別集中於平板的上下表面。

考慮液體層的厚度  $h = 0.10$  mm，其相速度頻散與衰減頻譜圖如圖 5.15(a, b) 所示。在圖 5.15(a) 中上方的符號  $\mathbf{c}_2$  與  $\mathbf{c}_3$  為液體層模態的截止頻率位置，其公式與數值可見表 5.4 的液體層  $h = 0.10$  部分。隨著頻率逐漸增大， $\mathbf{1}$  模態(藍色實線)相速度會趨近至  $c_R$ ，受到液體  $\mathbf{c}_2$  與  $\mathbf{c}_3$  模態的影響， $\mathbf{0}$  模態(綠色實線)相速度則快速地趨近於  $c_{\text{Sch}}$ ， $\mathbf{2}$  模態相速度在頻率大於 12 MHz 時開始略低於  $c_S$ ，而其餘  $\mathbf{3}$ 、 $\mathbf{4}$ 、 $\mathbf{5}$  與  $\mathbf{6}$  模態則會逐漸趨近至  $c_S$ 。根據圖 5.15(b) 所示，隨著頻率逐漸增大， $\mathbf{0}$  與  $\mathbf{2}$  模態衰減會逐漸增大而分別趨近於 0.5

與 0.1 Np/mm，**1** 模態衰減則會逐漸減小，而且它的 Lamé 模態特性則越不明顯。同理，仍可推測 **0** 與 **1** 模態的能量會分別集中於平板的上下表面。

考慮液體層的厚度  $h = 0.50$  mm，其相速度頻散與衰減頻譜圖如圖 5.16(a, b) 所示。在圖 5.16(a) 中上方的符號  $d_1$  至  $d_5$  為液體層模態的截止頻率位置，其公式與數值可見表 5.4 的液體層  $h = 0.50$  部分，可發現前三個液體模態 ( $d_1$ 、 $d_2$  與  $d_3$ ) 已經落在平板模態的頻率範圍 (約小於 5 MHz) 內，代表此三個液體模態直接影響頻散曲線的分佈。根據淡藍色虛線、灰色虛線與粉紅色虛線所構成的輪廓，**0**、**1**、**2**、**3**、**4**、**5** 與 **6** 模態的曲線走向幾乎是依循此一輪廓而形成。隨著頻率逐漸增大，**0** 模態 (綠色實線) 相速度在頻率 2 MHz 附近趨近至  $c_{Sch}$ ，其衰減逐漸增大且趨近至 0.5 Np/mm；**3** 模態 (藍色實線) 相速度會趨近至  $c_R$ ，其衰減會逐漸減小；**6** 模態相速度會往  $c_S$  靠近，其衰減會落在 0.03 Np/mm 附近；其餘 **1**、**2**、**4** 與 **5** 模態相速度皆會往  $c_{fluid}$  靠近，其衰減皆會趨近至 0.2 Np/mm。此外，**3** 模態雖在 7.5 與 10 MHz 附近分別與 **4** 與 **5** 模態相交會，但其衰減趨勢卻是截然不同，再者，根據上述 **3** 模態的雷利波特徵，其能量會集中於平板的下表面。

考慮液體層的厚度  $h = 1.00$  mm，其相速度頻散與衰減頻譜圖如圖 5.17(a, b) 所示。在圖 5.17(a) 中上方的符號  $e_1$  至  $e_5$  為液體層模態的截止頻率位置，其公式與數值可見表 5.4 的液體層  $h = 1.00$  部分，可發現  $e_1$  至  $e_5$  液體模態已經落在平板模態的頻率範圍內。隨著頻率逐漸增大，**0** 模態 (綠色實線) 相速度在頻率 1 MHz 附近趨近至  $c_{Sch}$ ，其衰減逐漸增大且趨近至 0.5 Np/mm；**5** 模態 (藍色實線) 相速度會趨近至  $c_R$ ，其衰減逐漸減小；其餘模態相速度則皆往  $c_{fluid}$  靠近，其衰減皆趨近至 0.2 Np/mm。同理，根據上述 **5** 模態的雷利波特徵，其能量會集中於平板的下表面。

考慮液體層改為一半無窮域液體，其相速度頻散與衰減頻譜圖如圖 5.18(a, b) 所示。整體來看，頻散曲線大致與單一平板的結果相同，不過額外增加一個 fluid 模態，此外， $A_0$  模態在頻率小於 1 MHz 範圍下，頻散曲線與單一平板的結果會略微不同。隨著頻率逐漸增大，fluid 模態相速度在頻率 1 MHz 附近趨近至  $c_{Sch}$ ，其衰減逐漸增大且趨近至 0.2 Np/mm； $A_0$  與  $S_0$  模態相速度皆會趨近至  $c_R$ ，但  $A_0$  模態的衰減逐漸減小， $S_0$  模態則相反 (趨近 0.3 Np/mm)；其餘  $A_1$ 、 $S_1$ 、 $A_2$  與  $S_2$  模態相速度皆會往  $c_S$  靠近，其衰減大約落在 0.02-0.2 Np/mm 範圍內。另一方面，衰減  $k_i$  對頻率  $f$  與波數  $k_r$  的頻譜圖可參考圖

5.19(a, b)所示，在頻率  $f < 2$  MHz 與波數  $k_r < 0.5$  mm<sup>-1</sup> 時， $A_0$  模態的衰減趨勢與 fluid 以及  $S_0$  模態的衰減截然不同，而在頻率  $f > 6$  MHz 與波數  $k_r > 2$  mm<sup>-1</sup> 時，其衰減會趨近於零，同理，此時其能量會集中於平板的下表面。



表 5.1 最小衰減值出現位置，如圖 5.5 中的 Lamé 模態(a 至 g 點)以及交點模態 (o、p 與 q 三點)，頻率、波數、相速度、群速度與界面處( $X_3 = 0$ )軌跡振幅比的資料整理。

	Lamé modes				Intersection modes		
	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>f</b>		<b>o'</b>	<b>p</b>	<b>q'</b>
Plate mode	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>		A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>3</sub>
Frequency (MHz)	-	4.370	8.805	13.389	5.230	6.401	9.067
Wavenumber (mm <sup>-1</sup> )	-	1.002	2.034	3.134	0.792	0.562	1.544
Phase velocity (mm/μs)	-	4.361	4.329	4.272	6.604	11.389	5.872
Group velocity (mm/μs)	-	2.181	2.188	2.208	2.739	2.301	3.649
$ u_3/u_1 $ at $X_3 = 0$	-	66.421	55.707	96.893	0.0061	63.483	0.0140
	<b>a</b>	<b>c</b>	<b>e</b>	<b>g</b>	<b>o</b>	<b>p'</b>	<b>q</b>
Plate mode	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>
Frequency (MHz)	2.183	6.575	11.071	15.752	5.233	6.413	9.072
Wavenumber (mm <sup>-1</sup> )	0.500	1.512	2.572	3.716	0.792	0.562	1.544
Phase velocity (mm/μs)	4.366	4.348	4.304	4.239	6.608	11.412	5.876
Group velocity (mm/μs)	2.170	2.183	2.196	2.223	3.289	1.025	4.064
$ u_3/u_1 $ at $X_3 = 0$	263.654	55.909	64.027	131.850	54.494	0.0046	22.759

表 5.2 在平板之界面處( $X_3 = 0$ )與下表面( $X_3 = H$ )，出現特殊方向的質點軌跡的頻率、波數與相速度的範圍。

Clockwise trajectory of particle at the interface ( $X_3 = 0$ ) corresponding to Figs. 5.7(a, b)							
	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>
Plate mode	$S_0$	$A_1$	$S_1$	$A_2$	$S_2$	$A_3$	$S_3$
Frequency (MHz)	$\leq 2.183$	$\leq 4.388$	$\leq 6.610$	$\leq 8.858$	$\leq 11.128$	$\leq 13.438$	$\leq 15.797$
Wavenumber ( $\text{mm}^{-1}$ )	$\leq 0.500$	$\leq 1.010$	$\leq 1.528$	$\leq 2.058$	$\leq 2.598$	$\leq 3.156$	$\leq 3.736$
Phase velocity ( $\text{mm}/\mu\text{s}$ )	$\geq 4.366$	$\geq 4.344$	$\geq 4.326$	$\geq 4.304$	$\geq 4.283$	$\geq 4.258$	$\geq 4.228$
Counterclockwise trajectory of particle at the bottom surface ( $X_3 = H$ ) corresponding to Figs. 5.8(a, b)							
	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>
Plate mode	$S_0$	$A_1$	$S_1$	$A_2$	$S_2$	$A_3$	$S_3$
Frequency (MHz)	$\leq 2.179$	$\leq 4.357$	$\leq 6.535$	$\leq 8.713$	$\leq 10.891$	$\leq 13.064$	$\leq 15.241$
Wavenumber ( $\text{mm}^{-1}$ )	$\leq 0.498$	$\leq 0.996$	$\leq 1.494$	$\leq 1.992$	$\leq 2.490$	$\leq 2.986$	$\leq 3.484$
Phase velocity ( $\text{mm}/\mu\text{s}$ )	$\geq 4.375$	$\geq 4.375$	$\geq 4.374$	$\geq 4.374$	$\geq 4.374$	$\geq 4.375$	$\geq 4.375$

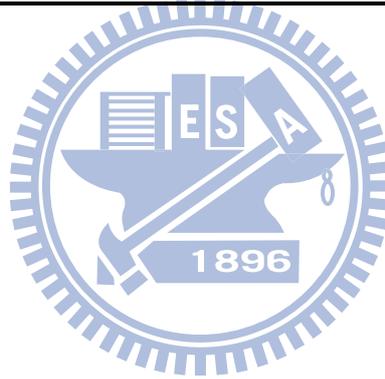


表 5.3 在界面處( $X_3 = 0$ )質點軌跡出現最小振幅比 $|u_3/u_1|$ ，以及液體薄層之界面處( $X_3 = 0$ )與上表面( $X_3 = -h$ )間出現最少壓力差 $|\Delta p(0) - \Delta p(-h)|$ ，頻率、波數、相速度與群速度的資料整理。

Minimum amplitude ratio $ u_3/u_1 $ of particle trajectory at $X_3 = 0$ corresponding to Fig. 5.7(a)						
	<b>o'</b>	<b>p'</b>	<b>q'</b>	<b>r</b>	<b>s</b>	<b>t</b>
Plate mode	A <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	A <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>
Frequency (MHz)	5.247	6.422	9.096	3.734	7.447	11.160
Wavenumber (mm <sup>-1</sup> )	0.798	0.570	1.552	0.670	1.334	1.998
Phase velocity (mm/μs)	6.575	11.266	5.861	5.574	5.583	5.586
Group velocity (mm/μs)	2.775	1.049	3.661	4.730	4.699	4.668
Least pressure difference $ \Delta p(0) - \Delta p(-h) $ in the fluid layer corresponding to Fig. 5.11						
	<b>o'</b>	<b>p'</b>	<b>q'</b>	<b>r</b>	<b>s</b>	<b>t</b>
Plate mode	A <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	A <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>
Frequency (MHz)	5.193	6.422	8.973	3.715	7.400	11.085
Wavenumber (mm <sup>-1</sup> )	0.778	0.570	1.518	0.666	1.324	1.982
Phase velocity (mm/μs)	6.674	11.266	5.911	5.579	5.589	5.593
Group velocity (mm/μs)	2.654	1.049	3.607	4.724	4.705	4.702

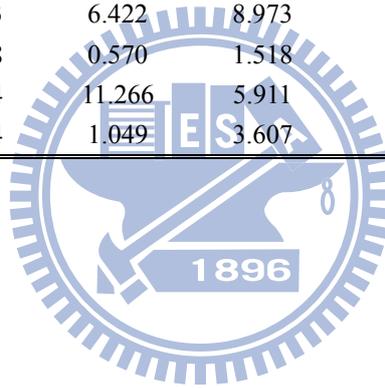
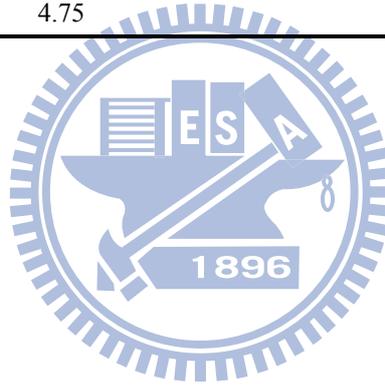


表 5.4 平板(玻璃)與不同厚度之液體薄層(甘油)的截止頻率大小。

Flat Plate (Glass)			Fluid Layer (Glycerol) with Different Thickness					
$f_{\text{cut}} = Nc_{\square}/H$ ( $\square = S, L$ )			$f_{\text{cut}} = Nc_{\text{fluid}}/h$					
$N$	$c_S$ $H = 1.00$	$c_L$ $H = 1.00$	$N$	$c_{\text{fluid}}$ $h = 0.01$	$c_{\text{fluid}}$ $h = 0.05$	$c_{\text{fluid}}$ $h = 0.10$	$c_{\text{fluid}}$ $h = 0.50$	$c_{\text{fluid}}$ $h = 1.00$
0.5	<b>1.546 (a<sub>1</sub>)</b>	<b>2.798 (b<sub>1</sub>)</b>	0.25	47.313	<b>9.463 (c<sub>1</sub>)</b>	<b>4.731 (c<sub>2</sub>)</b>	<b>0.946 (d<sub>1</sub>)</b>	<b>0.473 (e<sub>1</sub>)</b>
1.0	<b>3.093 (a<sub>2</sub>)</b>	5.595	0.75	∴	28.388	<b>14.194 (c<sub>3</sub>)</b>	<b>2.839 (d<sub>2</sub>)</b>	<b>1.419 (e<sub>2</sub>)</b>
1.5	<b>4.639 (a<sub>3</sub>)</b>	8.393	1.25		∴	23.656	<b>4.731 (d<sub>3</sub>)</b>	<b>2.366 (e<sub>3</sub>)</b>
2.0	6.186	11.190	1.75			∴	<b>6.624 (d<sub>4</sub>)</b>	<b>3.312 (e<sub>4</sub>)</b>
2.5	7.732	13.988	2.25				<b>8.516 (d<sub>5</sub>)</b>	<b>4.258 (e<sub>5</sub>)</b>
3.0	9.278	16.785	2.75				10.409	<b>5.204 (e<sub>6</sub>)</b>
3.5	10.825	19.583	3.25				12.301	<b>6.151 (e<sub>7</sub>)</b>
4.0	12.371	22.380	3.75				14.194	<b>7.097 (e<sub>8</sub>)</b>
4.5	13.918	∴	4.25				16.086	8.043
5.0	15.464		4.75				17.979	8.990



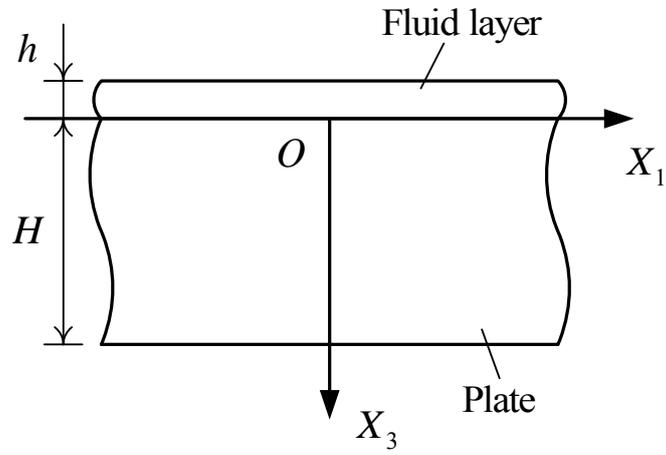


圖 5.1 具液體負載之平板結構幾何示意圖。

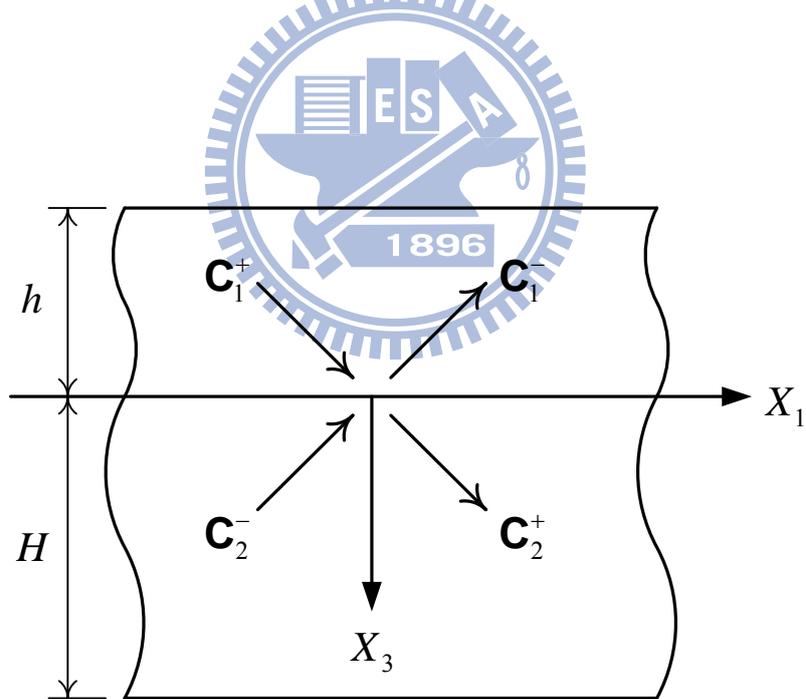


圖 5.2 以界面  $X_3 = 0$  為基準，在介質 1 (液體) 中， $C_1^+$  與  $C_1^-$  分別為抵達波與離開波，  
在介質 2 (玻璃) 中， $C_2^-$  與  $C_2^+$  分別為抵達波與離開波。

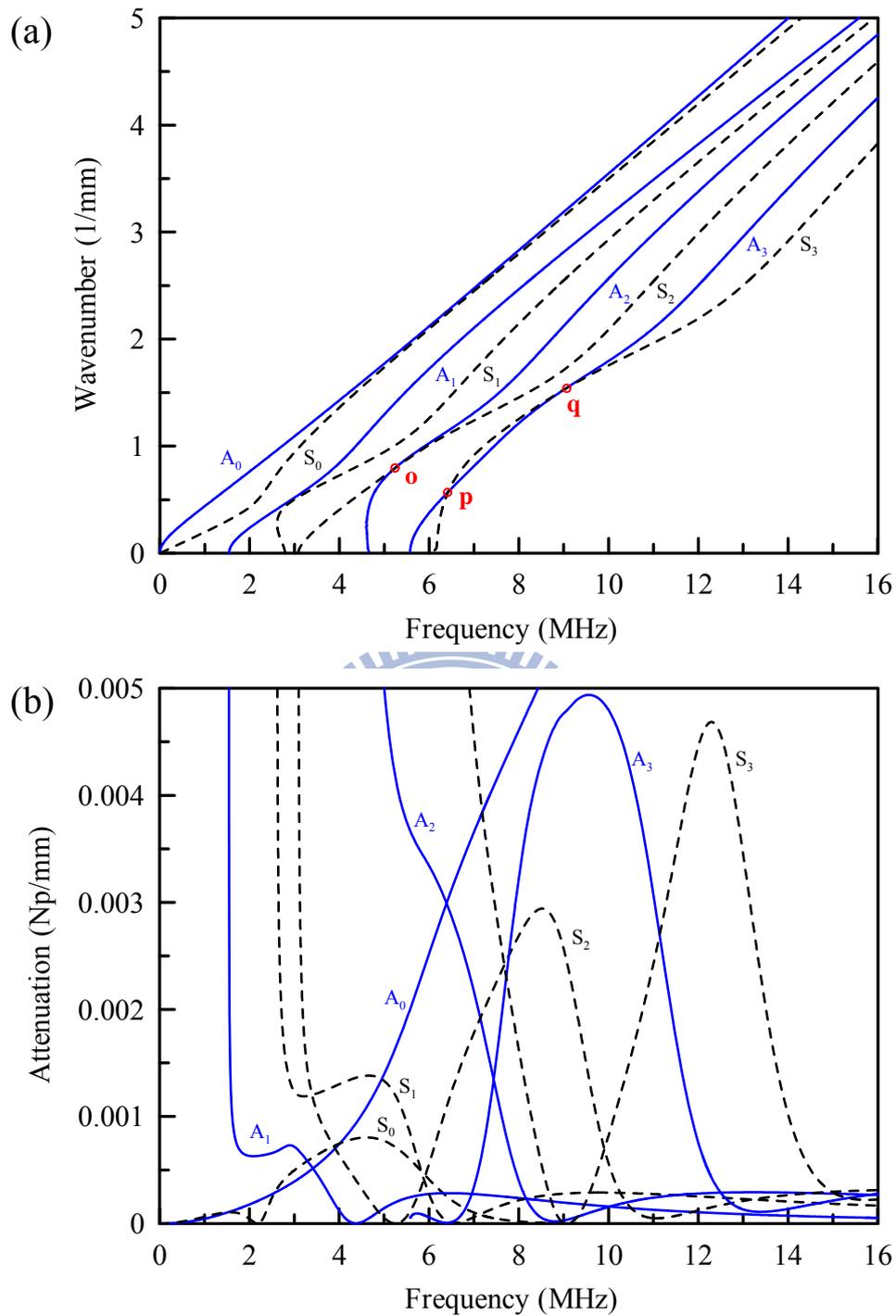


圖 5.3 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態的波數  
 (a)實部  $k_r$  與(b)虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與  
 反對稱模態，**o**、**p** 與 **q** 三點分別代表  $A_2$  與  $S_2$  之交點以及  $A_3$  與  $S_3$  之第一個  
 與第二個交點。

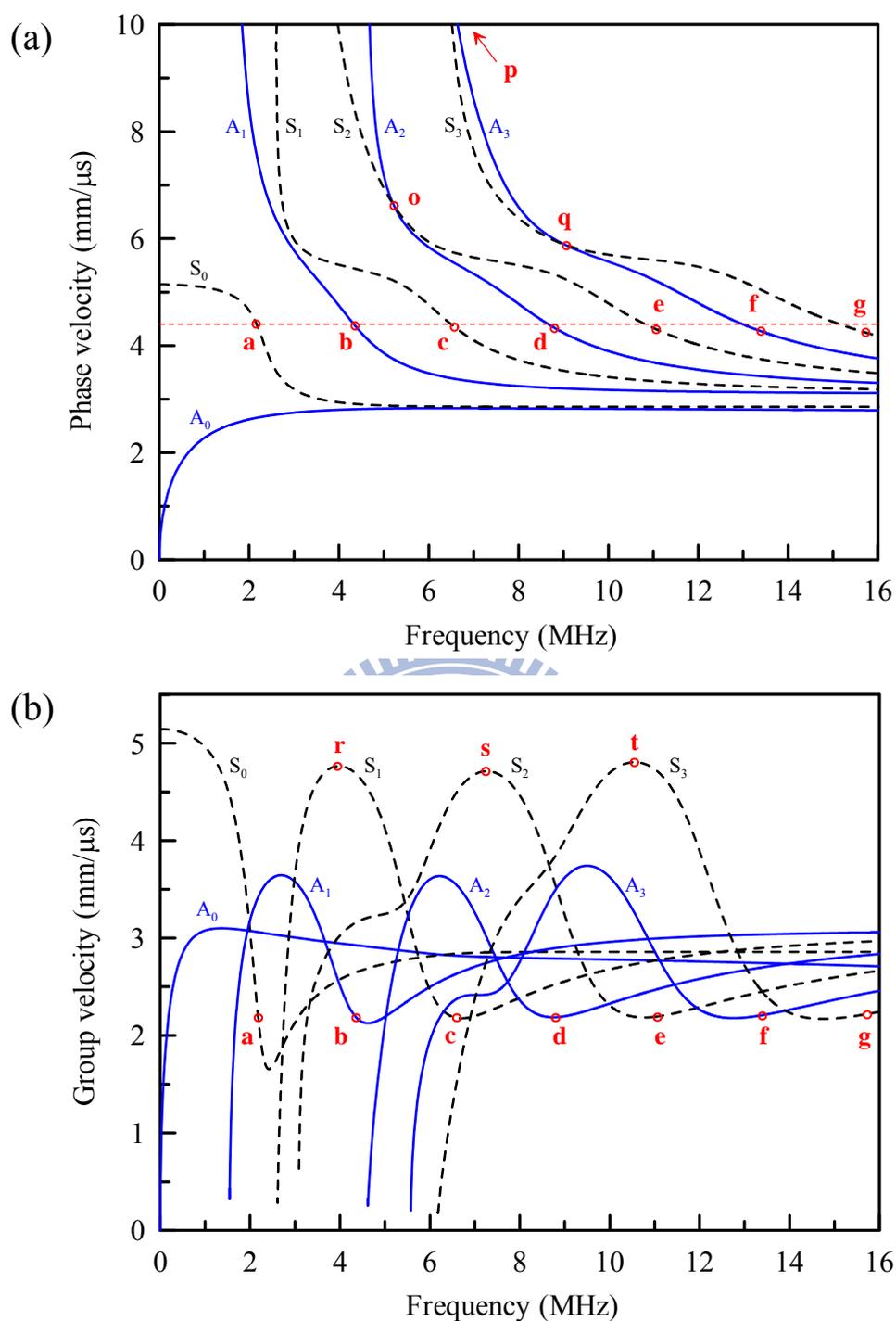


圖 5.4 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態的(a)相速度  $c_{ph}$  與(b)群速度  $c_g$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，**a** 至 **g** 點為 Lamé 模態的出現位置，**r**、**s** 與 **t** 三點分別為  $S_1$ 、 $S_2$  與  $S_3$  之群速度最大值的出現位置。

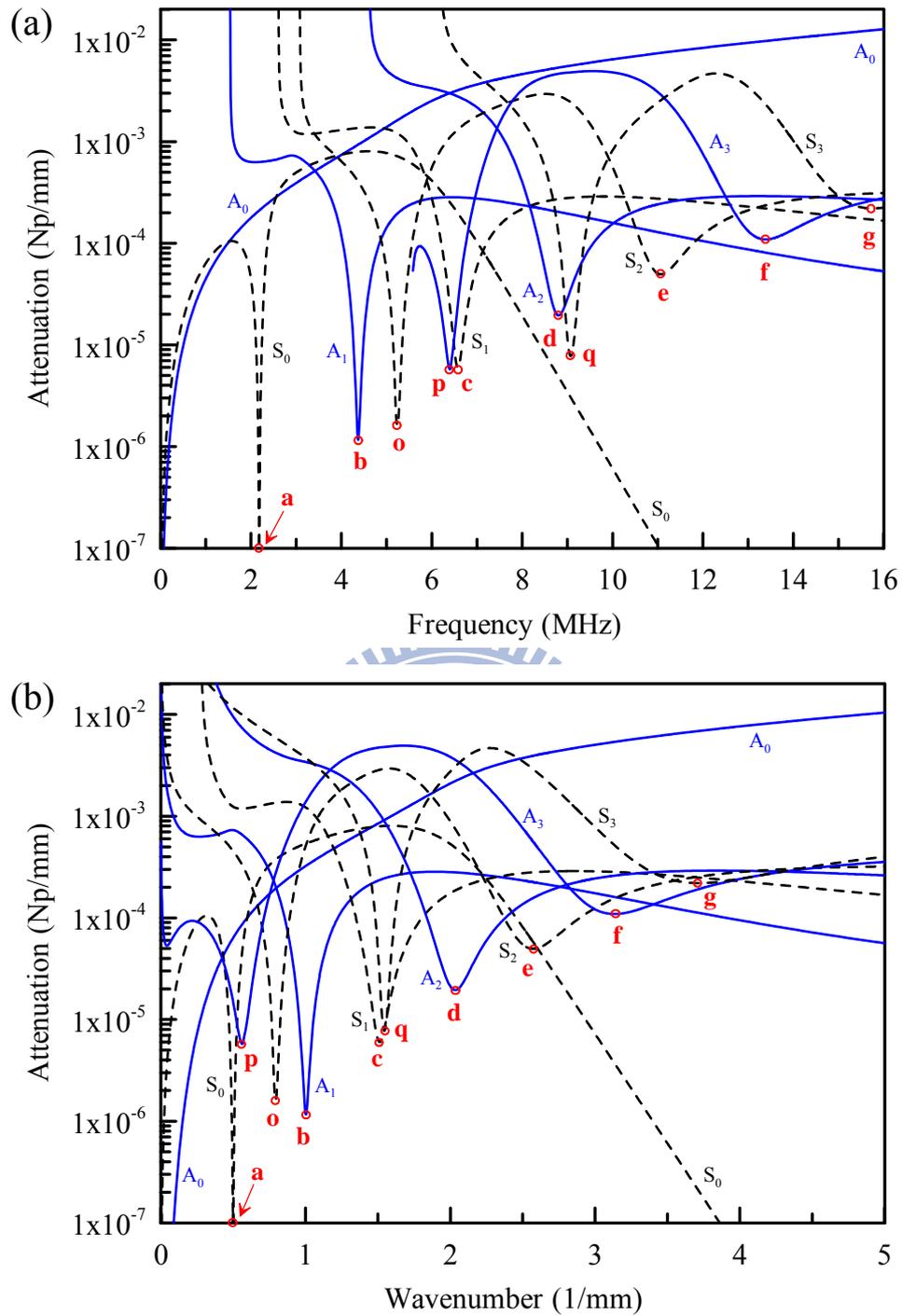


圖 5.5 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模式的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的半對數頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，a 至 g 點以及 o、p 與 q 三點為各個模態之最小衰減值的出現位置，它們的特性可見表 5.1。

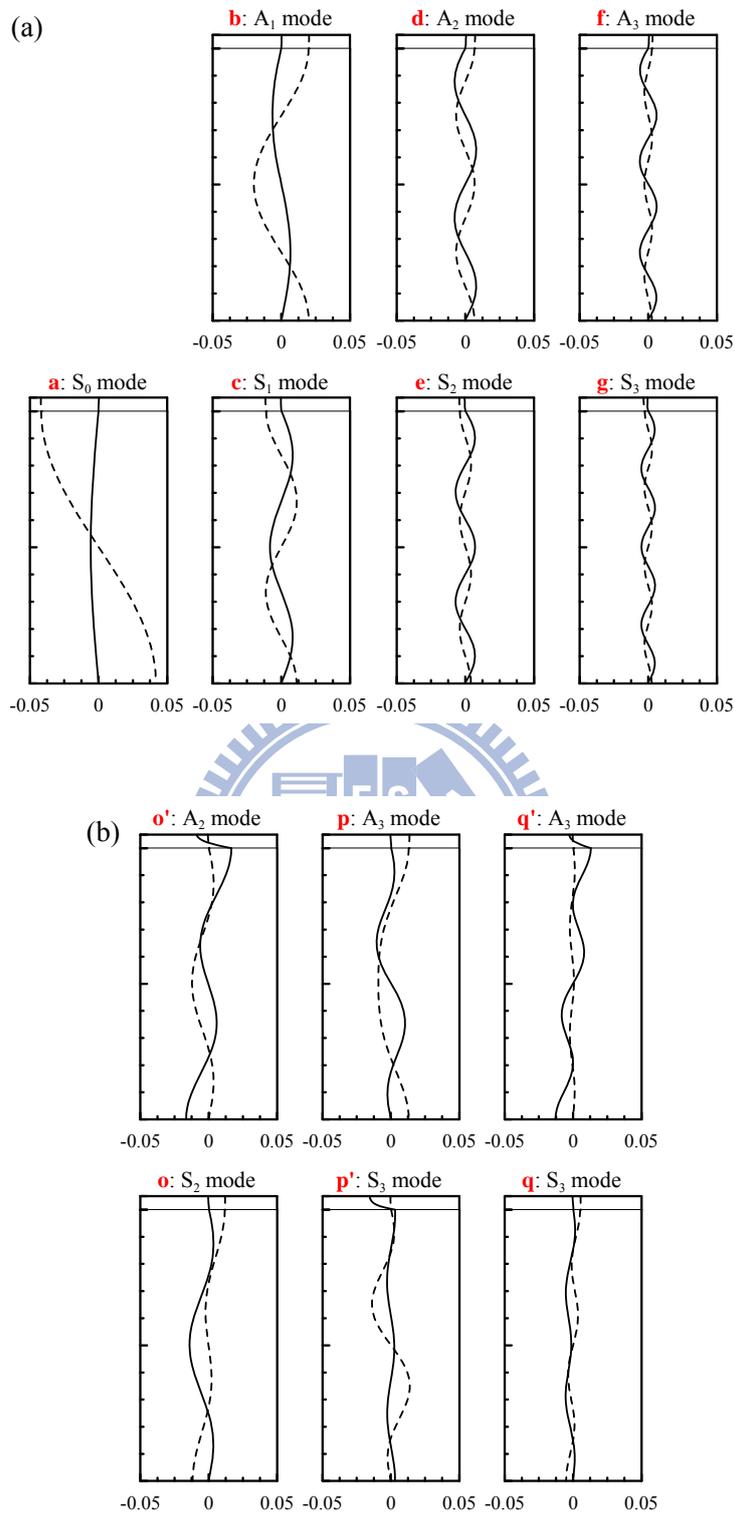


圖 5.6 位移  $u_1$  (實線)與  $u_3$  (虛線)示意圖。(a)為 Lamé 模態，即衰減頻譜的

**a** 至 **g** 點。(b)為交點模態，即波數實部  $k_r$  交會的 **o**、**p** 與 **q** 三點。

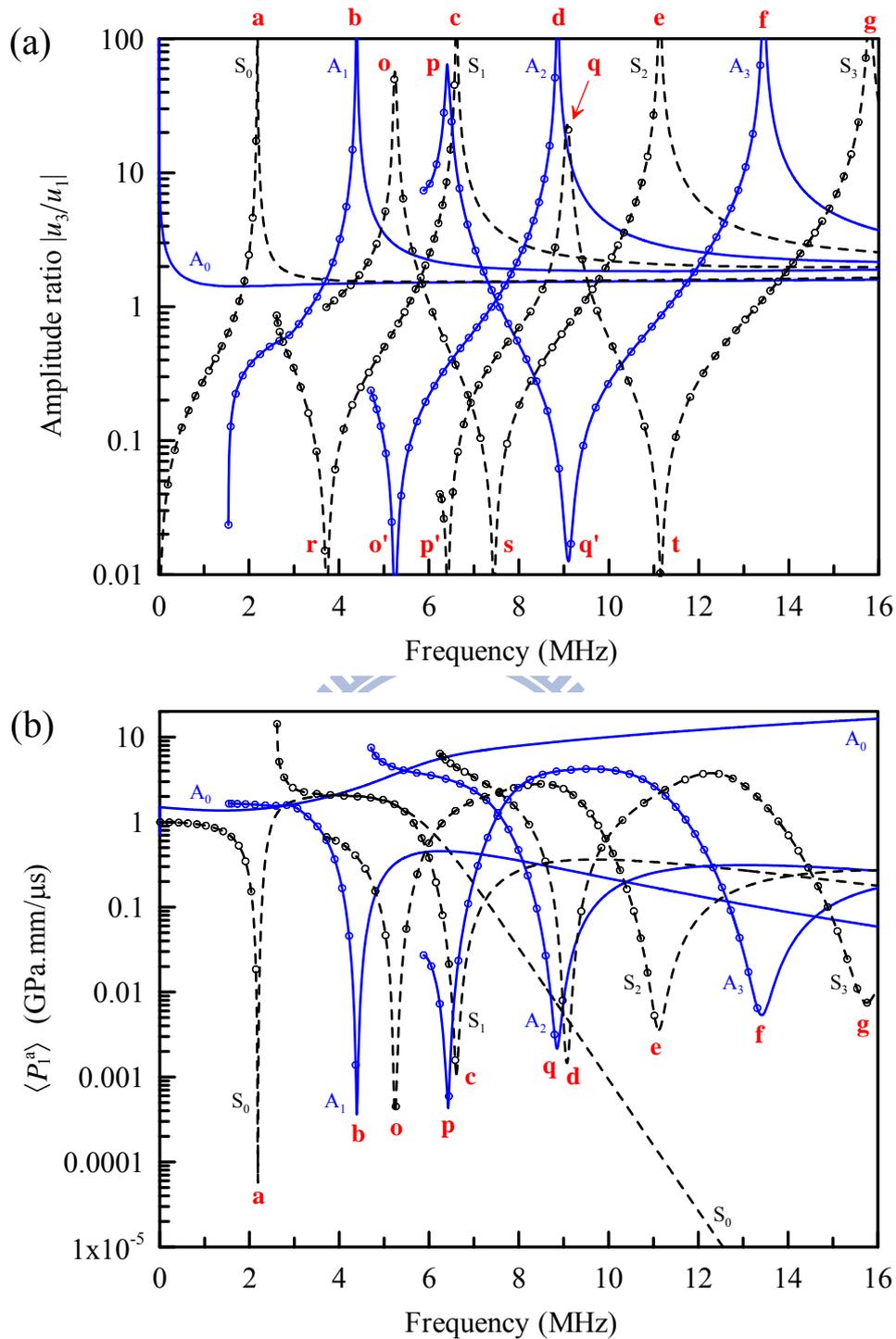


圖 5.7 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態在固液界面 ( $X_3 = 0$ ) 處，(a)質點軌跡振幅比  $|u_3/u_1|$  以及(b)時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，「○」與「●」代表出現順時針(cw)軌跡的頻率範圍，如表 5.2 所示。

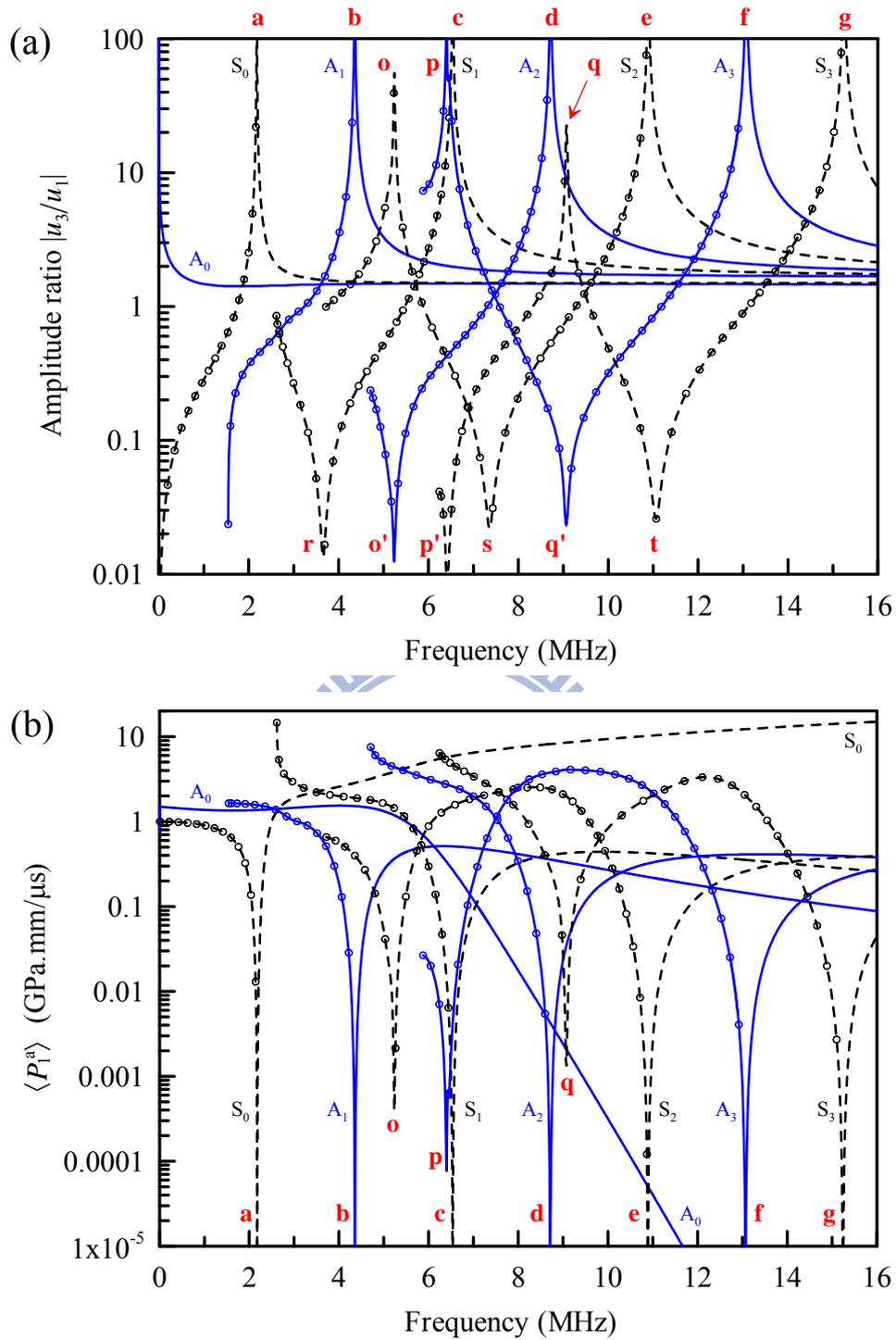


圖 5.8 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，板波模態在下表面 ( $X_3 = H$ ) 處，(a)質點軌跡振幅比  $|u_3/u_1|$  以及(b)時間平均功率流密度  $\langle P_1^a \rangle$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，「○」與「●」代表出現逆時針(ccw)軌跡的頻率範圍，如表 5.2 所示。

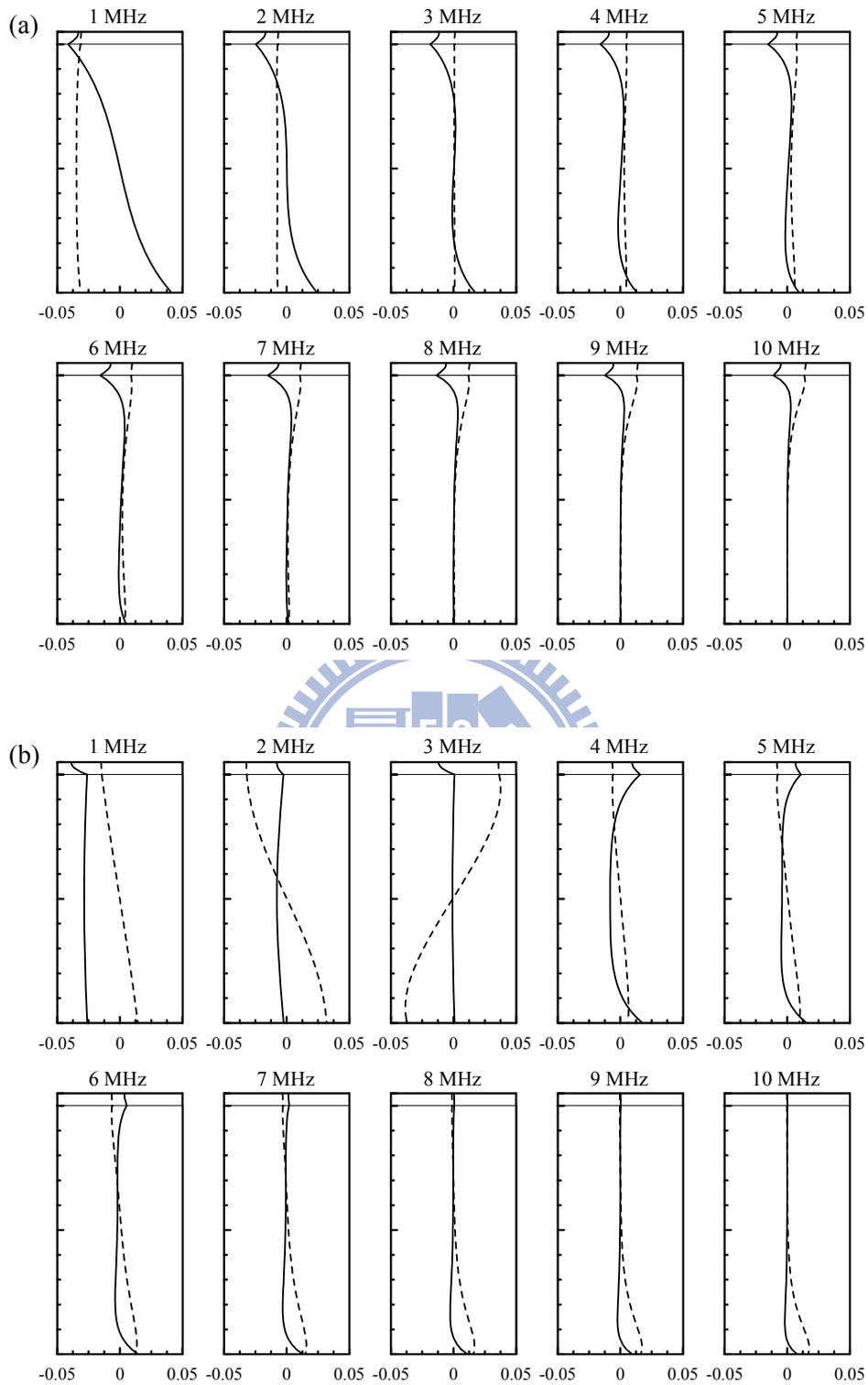


圖 5.9 在頻率範圍 1 至 10 MHz 間位移  $u_1$  (實線)與  $u_3$  (虛線)示意圖。

(a)  $A_0$  模態，(b)  $S_0$  模態。

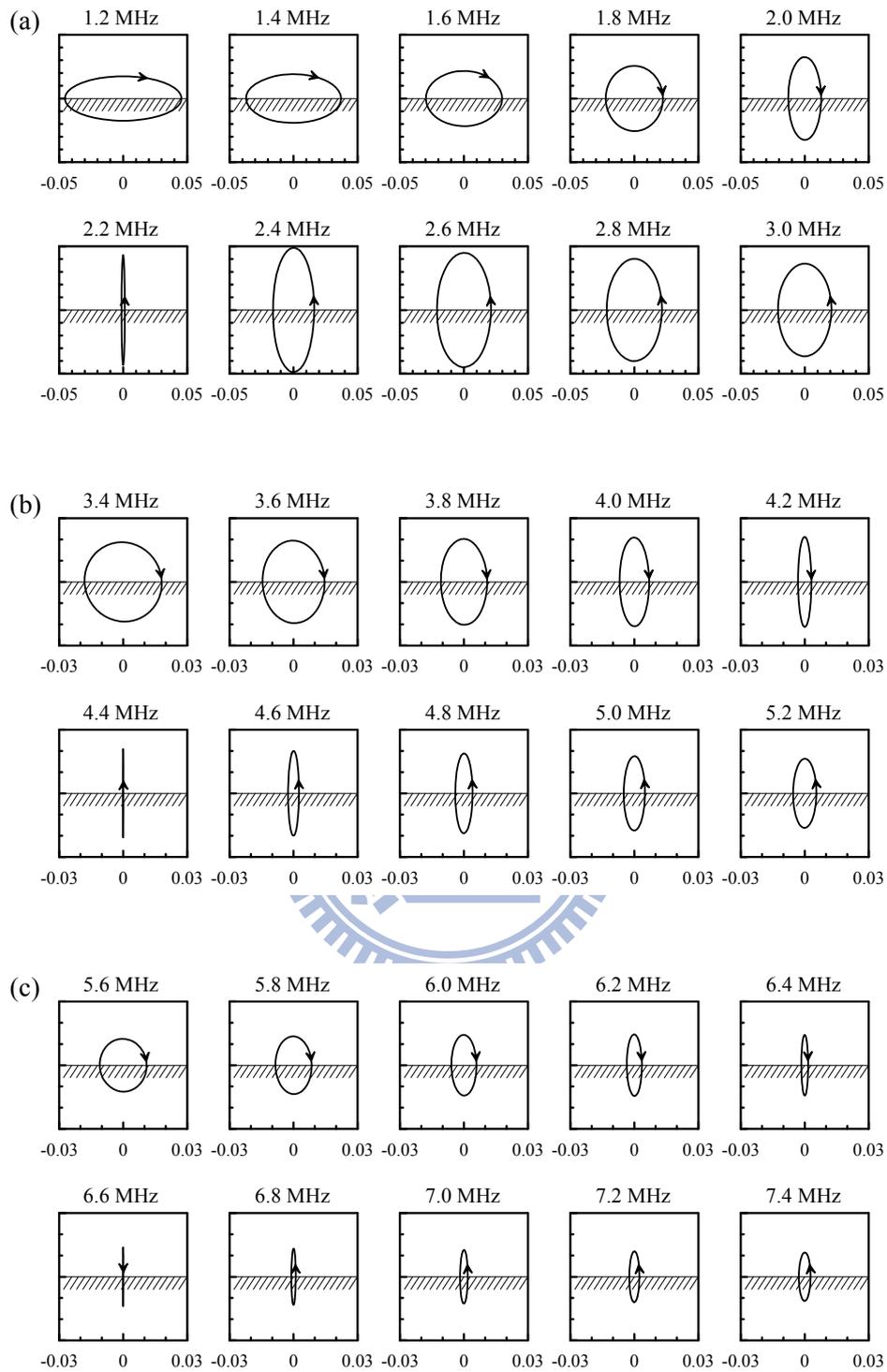


圖 5.10 平板上表面之質點軌跡示意圖。(a)  $S_0$  模態在頻率範圍 1.2 至 3.0 MHz，  
 (b)  $A_1$  模態在頻率範圍 3.4 至 5.2 MHz，(c)  $S_1$  模態在頻率範圍 5.6 至 7.4 MHz。

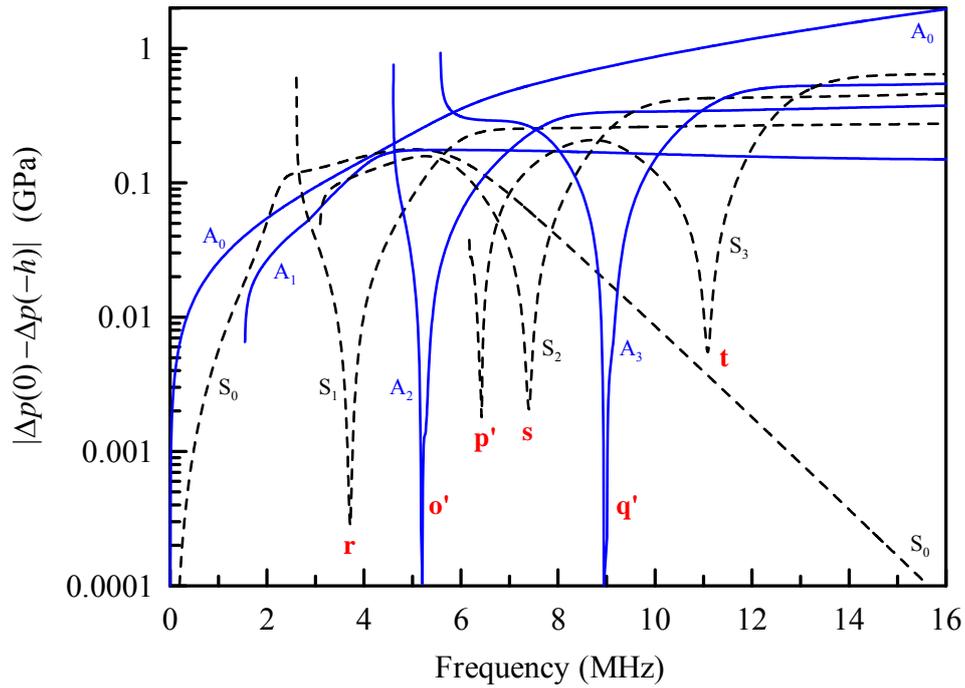


圖 5.11 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm PVA 液體薄層，液體薄層於界面 ( $X_3 = 0$ ) 與上表面 ( $X_3 = -h$ ) 間的壓力差頻譜圖。

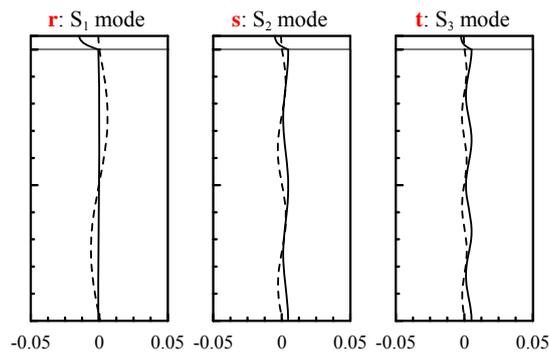


圖 5.12 位移  $u_1$  (實線) 與  $u_3$  (虛線) 示意圖。如圖 5.4(b) 所示， $r$ 、 $s$  與  $t$  三點分別為  $S_1$ 、 $S_2$  與  $S_3$  之群速度最大值位置。

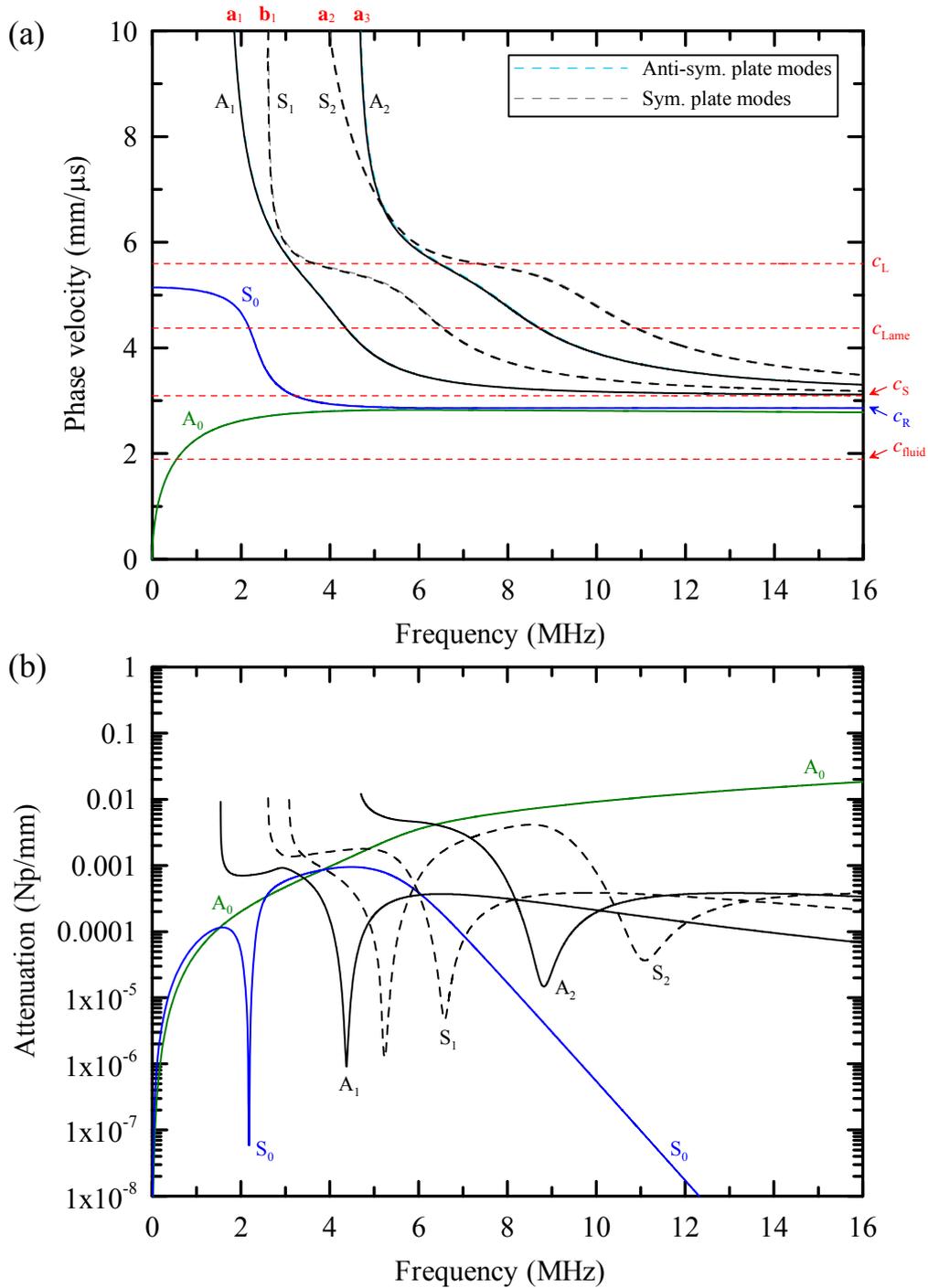


圖 5.13 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.01 mm 甘油液體薄層，板波模態的  
 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別  
 代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。

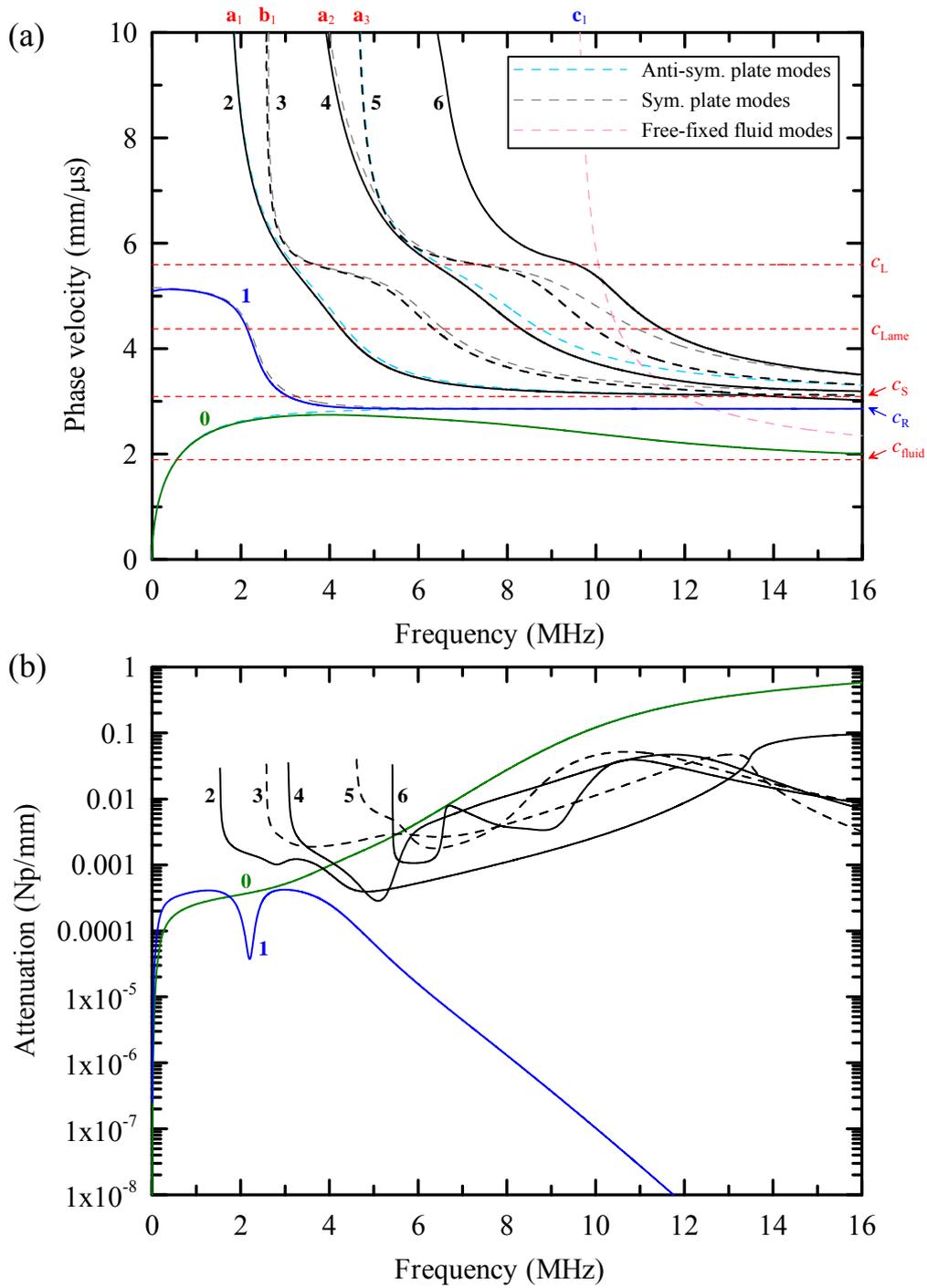


圖 5.14 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.05 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。

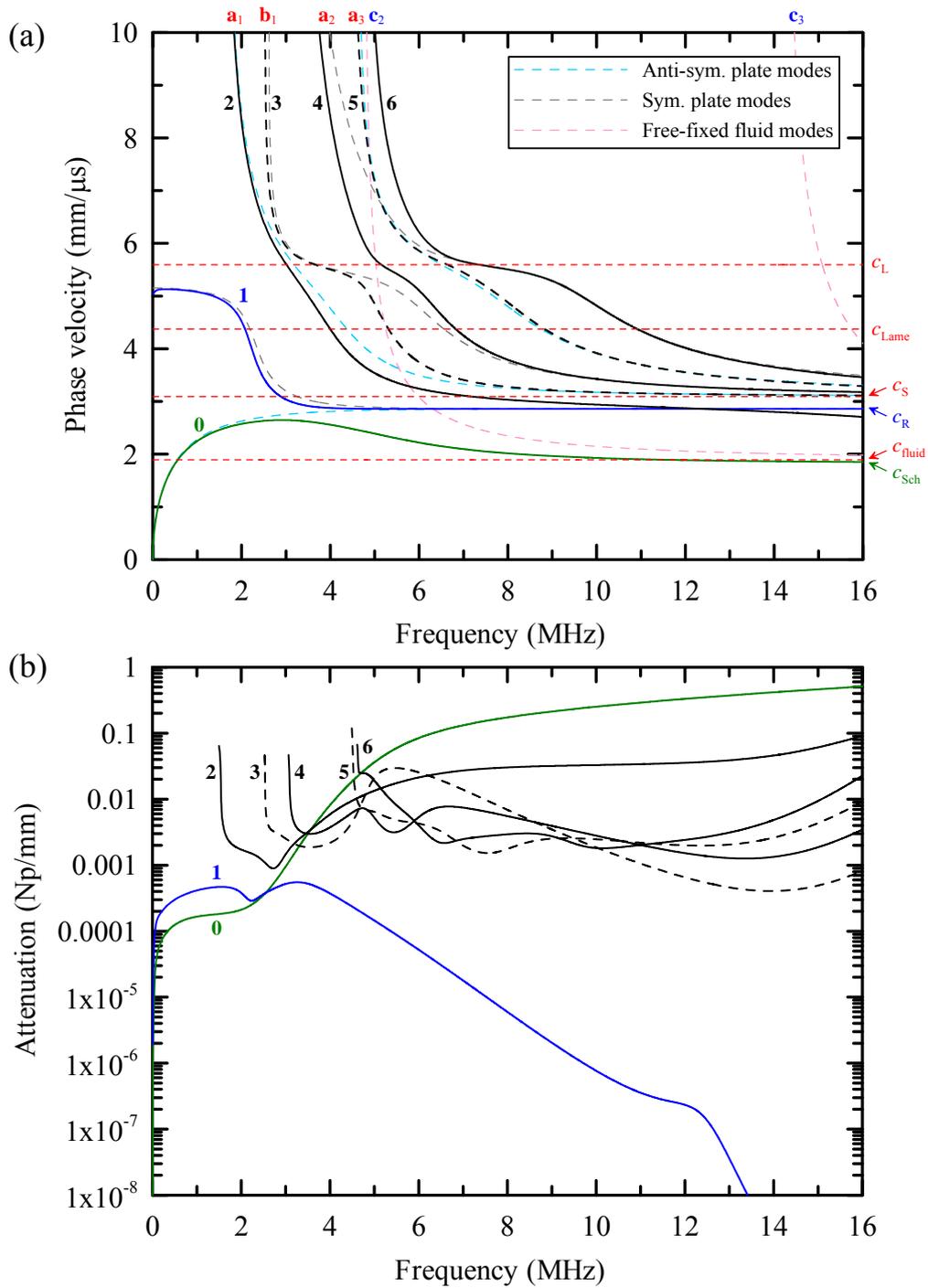


圖 5.15 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.10 mm 甘油液體薄層，板波模態的 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。

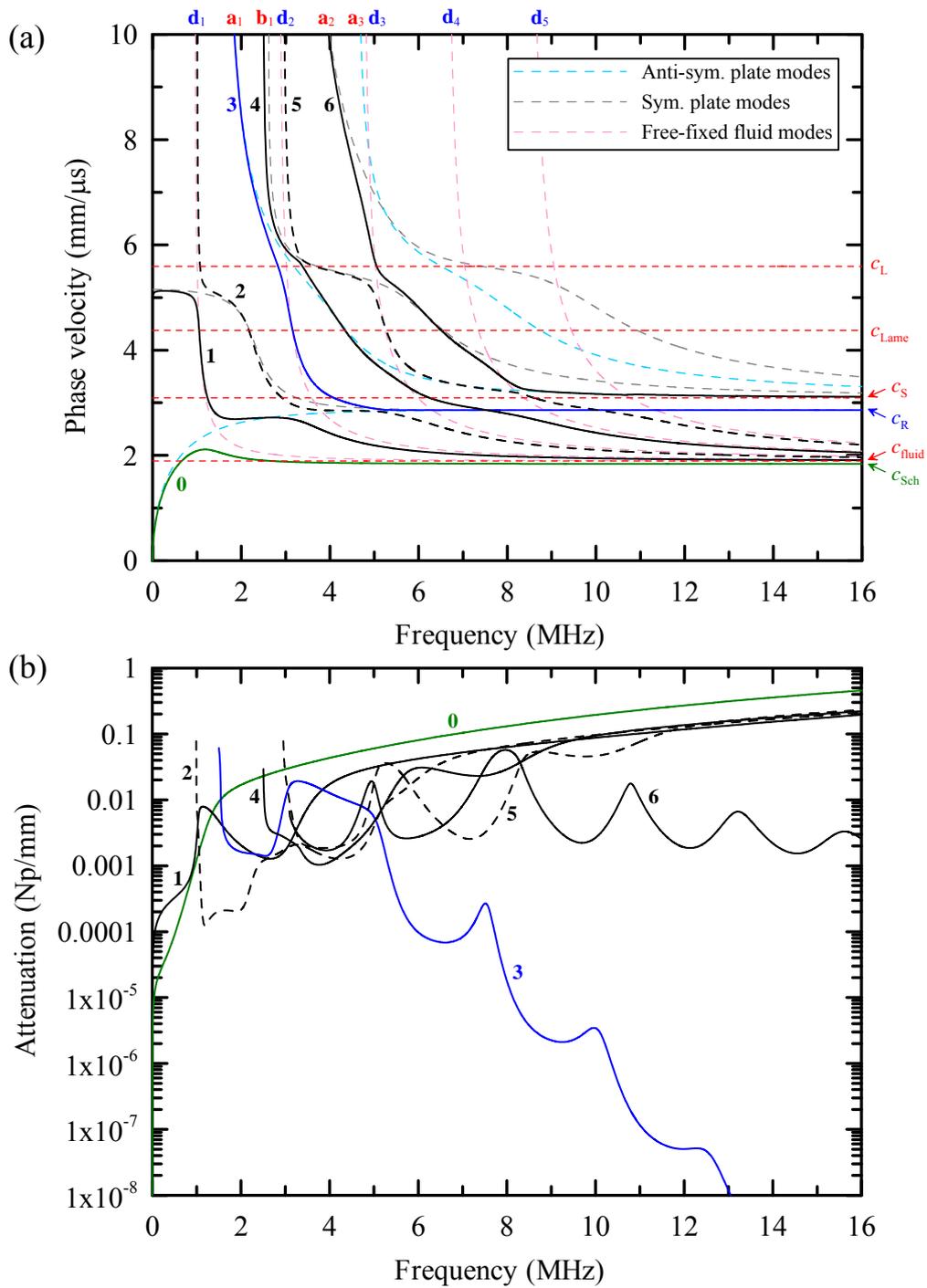


圖 5.16 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 0.50 mm 甘油液體薄層，板波模態的  
 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別  
 代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。

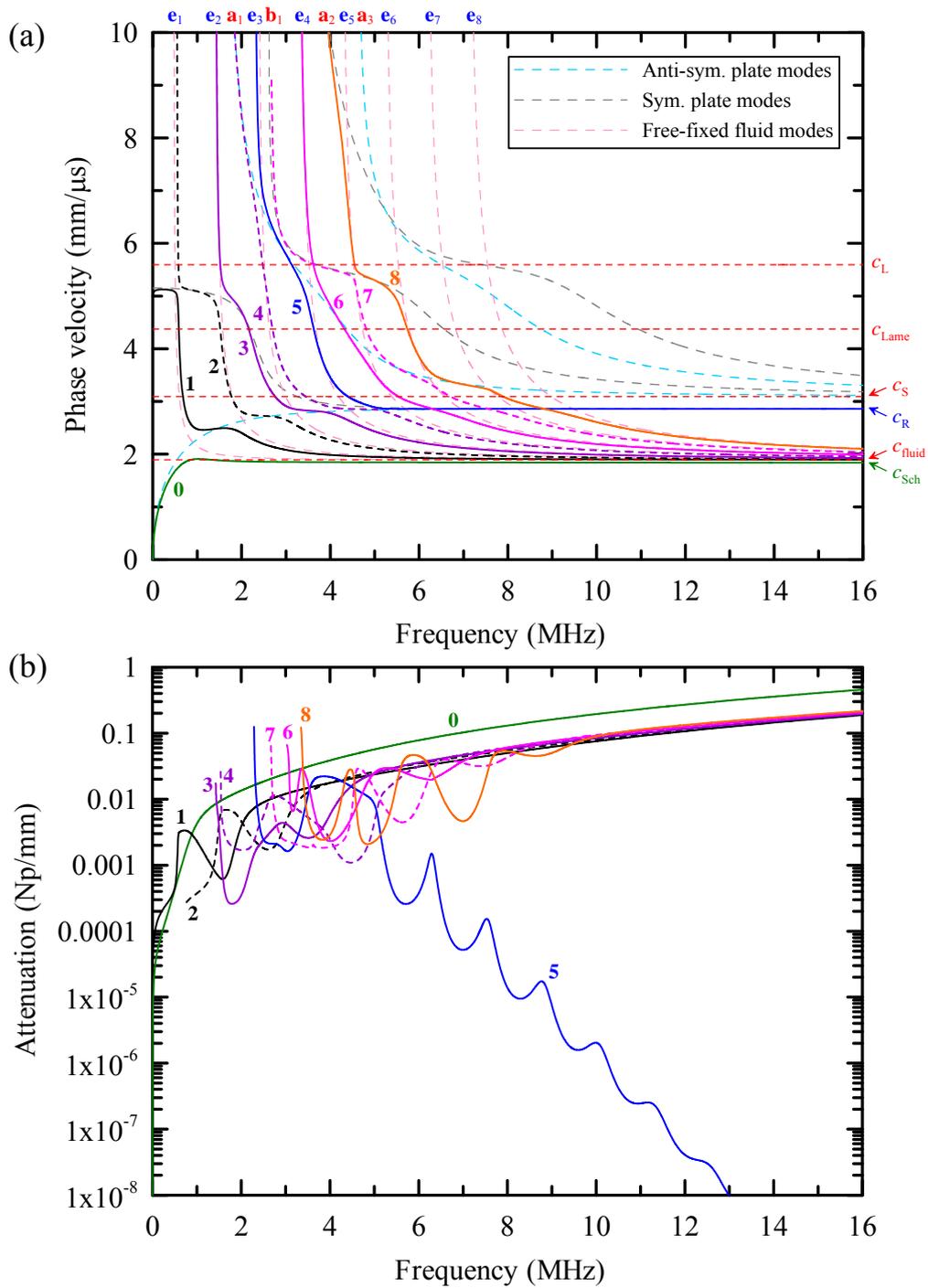


圖 5.17 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋厚度 1.00 mm 甘油液體薄層，板波模態的  
 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別  
 代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。

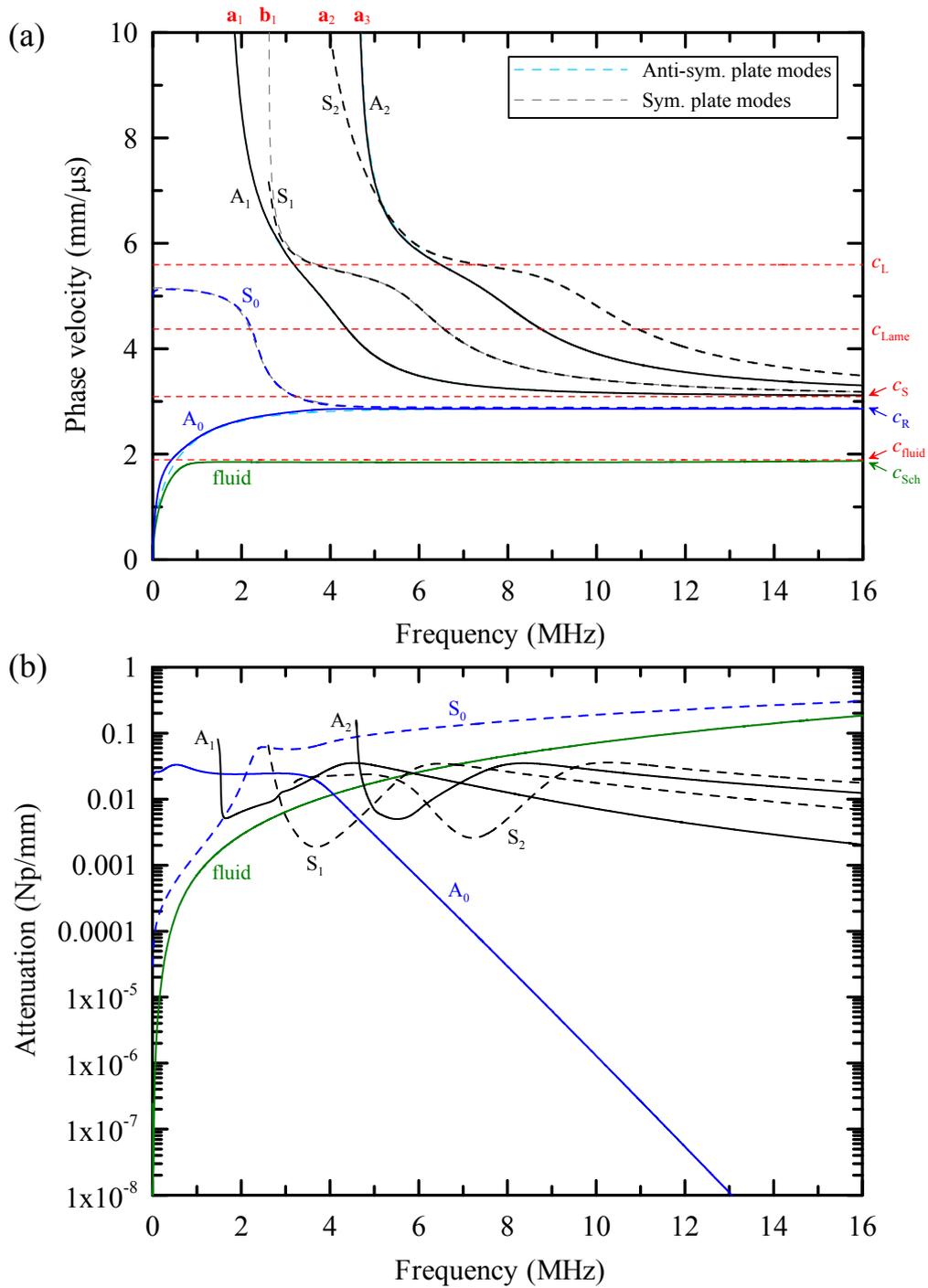


圖 5.18 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋一個半無窮域之甘油液體，板波模態的 (a)相速度  $c_{ph}$  與 (b)波數虛部  $k_i$  對頻率  $f$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態，各模態的截止頻率可參考表 5.4。

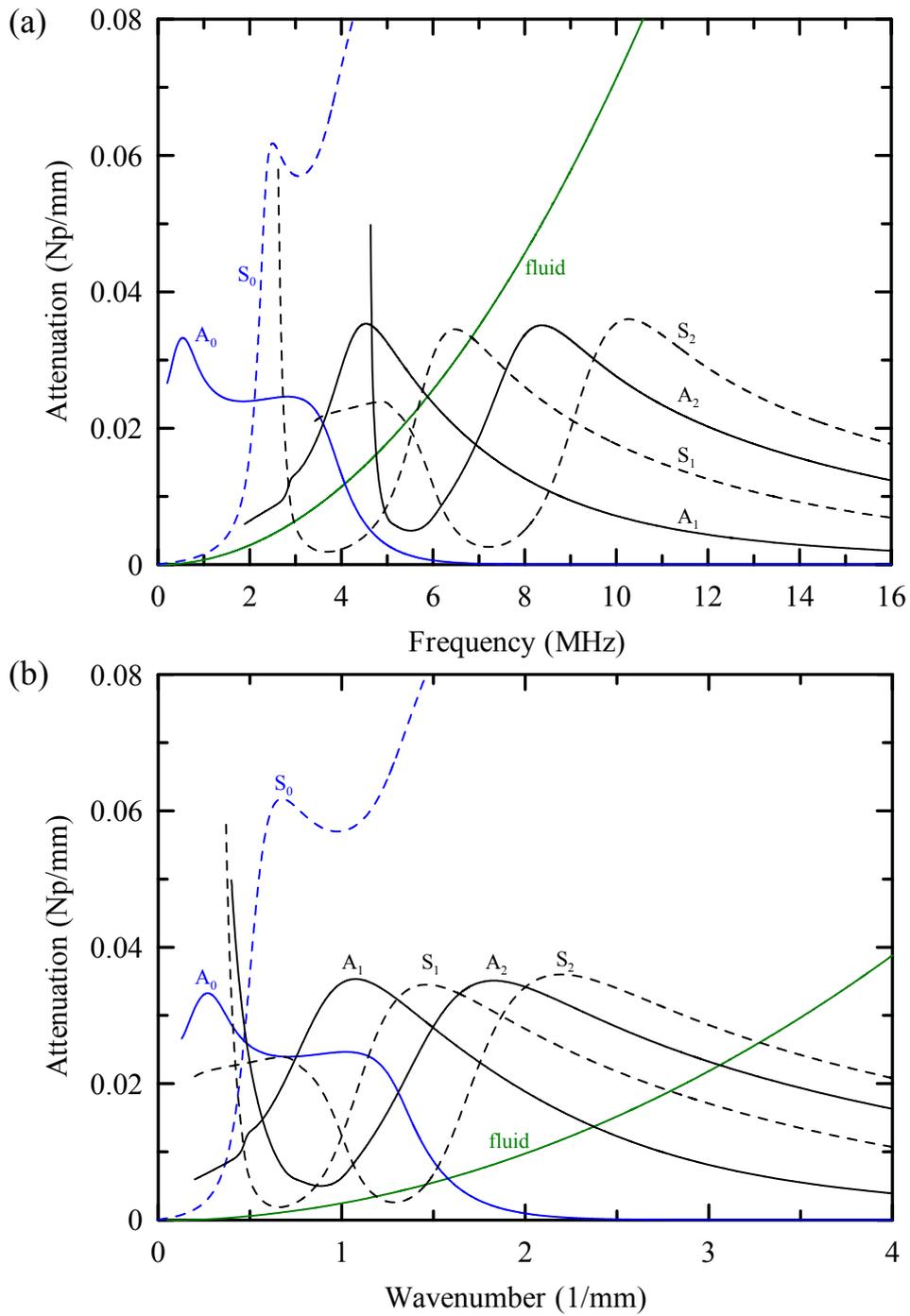
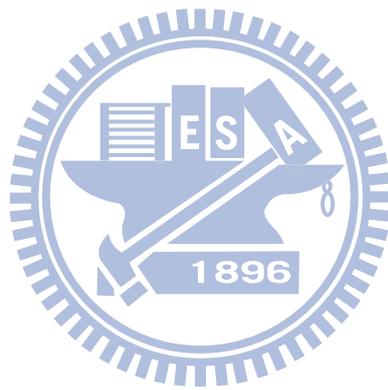


圖 5.19 厚度 1 mm 玻璃板覆蓋一個半無窮域之甘油液體，板波模式的波數虛部  $k_i$  對於(a)頻率  $f$  與(b)波數實部  $k_r$  的頻譜圖，其中符號 S 與 A 分別代表對稱與反對稱模態。



## 第六章 結論與未來工作

### 6.1 結論

本研究是以彈性板的導波波傳為主，考慮平板本身的熱彈耦合效應，或者是其表面黏滯液體負載所造成的額外阻尼，探討波傳時的頻散與衰減關係及其能量耗散。在論文的第二章主要是去架構含有殘留應力的熱彈耦合統御方程式，結合了自然、初始與最終三種狀態的聲彈理論以及傳統熱彈理論。接著，第三章則是推導在一層狀介質中傳遞之熱彈導波的頻散與衰減特徵方程式，並藉由功與能量的互置理論獲得沿波傳方向的正交歸一條件，以及應用正則模態展開法來獲得層狀介質表面受到微擾後的頻譜響應。

根據前面第四章與第五章的數值結果可發現，以 Lowe 的曲線追蹤法為主幹的複數尋根法，幾乎貫穿本論文的數值模擬部分。以彈性板為主體模型，考慮材料本身的熱彈耦合，以及黏滯性液體的額外負載，發現兩者皆會出現衰減現象，代表平板導波在傳遞時會出現能量耗散現象。並利用獲得的  $(f, k)$  值，計算某一特徵模態的運動特性，進而分析受到外界干擾後的頻譜響應。因此，前兩章的結論會可分為兩個部分。

第一部分是關於含殘留應力之平板熱彈導波波傳分析。本研究應用 Lowe 的曲線追蹤法作複數尋根，針對一受單軸拉伸預應力的銅箔，經數值計算獲得了對稱與反對稱模態的相速度頻散與衰減頻譜，並分析受殘留應力之薄膜結構的熱彈聲波特性的，特別是與施力方向平行或垂直的波傳。除  $A_0$  模態外，熱彈聲波的衰減頻譜會在某些特定頻率出現最小衰減值的驟降現象，即  $S_n$  模態在  $k_r h = n + \frac{1}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )， $A_0$  模態在  $k_r h = m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )，稱之為 Lamé 模態，代表聲導波在傳遞時所耗散能量最少。當波傳方向與施力方向平行時，衰減值會隨著預應力變大而增加；若與施力方向垂直時，出現最小衰減值之特定頻率的下降值會與預應力大小成正比關係。此外，熱彈聲波傳遞之 Sagittal 平面的等向性特徵會影響幾近零衰減值的出現。

第二部分是關於表面具黏滯液體負載之平板導波分析。本研究亦應用 Lowe 的曲線追蹤法，經數值計算獲得頻散與衰減曲線，分析了各模態出現衰減驟減時的頻率、波數與相速度關係、運動模態特性與平板上下表面質點軌跡。各個模態出現衰減驟減現象會發生在 Lamé 模態或頻散曲線交點的位置附近，在固液界面上，平板表面的質點軌跡會

呈現垂直表面的線偏振狀態。表面質點運動軌跡會在頻率約小於 Lamé 模態時發生逆轉現象，在上表面為順時針運動，在下表面為逆時針運動。此外，隨著頻率遞增，平板  $A_0$  模態之位移與應力變化逐漸集中於固液界面，具有雷利表面聲波的特徵； $S_0$  模態則是集中於平板下表面。最後，液體層上下表面間壓力差變化及其均勻特性會與平板上表面質點軌跡運動的偏振狀態有直接關係。另一方面，隨著液體層厚度的增加，發現相速度頻散受到液體層模態的影響會越明顯，曲線會逐漸往左移動。越往高頻時，基礎模態曲線會趨近至 Scholte 波波速，其餘曲線會趨近至液體縱波波速，衰減則會隨頻率遞增而逐漸增大。而且，在這些曲線中會有一個模態的相速度會趨近至雷利波波速，且衰減值會逐漸減小，具有雷利波的特徵，推測其能量會逐漸集中至平板下表面。

## 6.2 未來工作

近年來，在聲導波波傳研究上，熱彈耦合效應與黏滯液體負載造成的能量損耗，已成為一個重要的探討主題。因此，延續目前的研究成果，對未來工作有下列幾項建議：

- (1) 含殘留應力之平板的熱彈導波，可繼續探討在雙軸等預應力的情況下的頻散與衰減特性。更進一步，可將平板單層結構推廣至多層結構。
- (2) 表面具黏滯液體負載之平板導波，可探討在不同的液體層厚度  $h$  下，黏滯係數的改變對頻散與衰減的影響，以及各個特徵模態的運動特性。
- (3) 可利用已獲得  $(f, k)$  結果，計算獲得其特徵運動模態，並配合第 3.6.3 節內容，算出不同模態的可激發性頻譜，進而分析當平板受到干擾的頻譜響應。

根據本論文的內容，將系統的額外阻尼劃分為熱彈耦合效應以及黏滯液體負載兩大類。然而，在現今實際應用的模型上，這些問題都是要合併一起作討論的。再加上壓電材料的廣泛應用，電磁場耦合效應搭配熱彈理論亦是目前熱門的研究主題之一。因此，未來在層狀模型建立上，可適時考慮壓電或磁性材料，分析介質中傳遞聲導波的波傳特性，以利往後在檢測或致動微小元件的研究與開發。

## 參考文獻

- [1] C. T. Kuo, C. R. Lin, and H. M. Lien, "Origins of residual stress in CVD diamond films," *Thin Solid Films*, Vol. **290-291**, pp. 254-259 (1996).
- [2] A. V. Samoilo and A. Thilderkvist, "Properties and applications of strained Si/SiGe," *Epi Substrate Division, Applied Materials* (April 17, 2002).
- [3] P. M. Mooney, S. J. Koester, H. J. Hovel, J. O. Chu, K. K. Chan, J. L. Jordan-Sweet, J. A. Ott, N. Klymco, and D. M. Mocuta, "Characterization of Si/SiGe heterostructures for strained Si CMOS," *2003 International Conference on Characterization and Metrology for ULSI Technology. AIP Conference Proceedings*, Vol. **683**, pp. 213-222 (2003).
- [4] *Shot Peening and Shot Blasting*, OSK-Kiefer GmbH Oberflächen- & Strahltechnik, (www.osk-kiefer.com).
- [5] A. L. Nalamwar and M. Epstein, "Surface acoustic waves in strained media," *J. Appl. Phys.*, Vol. **47**, No. 1, pp. 43-48 (1976).
- [6] R. E. Kumon and D. C. Hurley, "Effects of residual stress on the thin film elastic moduli calculated from surface acoustic wave spectroscopy experiments," *Thin Solid Films*, Vol. **484**, pp. 251-256 (2005).
- [7] 施文斌，向列型液晶三明治結構的聲導波波傳，  
國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，2007。
- [8] 蘇裕為，聲導波對於向列型液晶排列的影響，  
國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，2007。
- [9] 嚴承侯，沒水式超音波對於向列型液晶聲光效應的影響，  
國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，2008。
- [10] 張逸涵，表面聲波對於液晶配向層聚亞醯胺排列的影響，  
國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，2009。

- [11] 黃康哲，聲導波操控向列型液晶排列的研究，  
國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，2009。
- [12] 吳昱瑾，超音波誘發液晶配向層排列之分析，  
國立交通大學機械工程學系碩士論文，台灣，2010。
- [13] K. Takatoh, M. Hasegawa, M. Koden, N. Itoh, R. Hasegawa, and M. Sakamoto,  
*Alignment Technologies and Applications of Liquid Crystal Devices*,  
Taylor & Francis, London-NewYork (2005).
- [14] D. S. Ballantine, Jr., R. M. White, S. J. Martin, A. J. Ricco, G. C. Frye, E. T. Zellars,  
and H. Wohltjen, *Acoustic Wave Sensors: Theory, Design, and Physico-Chemical  
Applications*, Academic Press (1997).
- [15] A. A. Vives (Ed.), *Piezoelectric Transducers and Applications*, 2nd Ed.,  
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2008).
- [16] A. G. Bell, "Production of sound by light," *Am. J. Sci.*, Vol. **20**, pp. 305-324 (1880).
- [17] A. G. Bell, "The photophone," *Science*, Vol. **1**, No. 11, pp. 130-134 (1880).
- [18] J. Tyndall, "Action of an intermittent beam of radiant heat upon gaseous matter,"  
*Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. **31**, pp. 307-317 (1881).
- [19] L. B. Kreuzer and C. K. N. Patel, "Nitric oxide air pollution: Detection by  
optoacoustic spectroscopy," *Science*, Vol. **173**, No. 3991, pp. 45-47 (1971).
- [20] A. Rosencwaig, "Photoacoustic spectroscopy of solids," *Opt. Commun.*, Vol. **7**,  
No. 4, pp. 305-308 (1973).
- [21] M. J. Adams, A. A. King and G. F. Kirkbright, "Analytical optoacoustic spectrometry.  
Part I. Instrument assembly and performance characteristics," *Analyst*, Vol. **101**,  
No. 1199, pp. 73-85 (1976).
- [22] A. Rosencwaig and A. Gersho, "Theory of the photoacoustic effect with solids,"  
*J. Appl. Phys.*, Vol. **47**, pp. 64-69 (1976).
- [23] P. Korpiun and B. Büchner, "On the thermodynamics of the photoacoustic effect  
of condensed matter in gas cells," *Appl. Phys. B: Lasers Opt.*, Vol. **30**, No. 3,  
pp. 121-129 (1983).

- [24] W. Jackson and N. M. Amer, "Piezoelectric photoacoustic detection: Theory and experiment," *J. Appl. Phys.*, Vol. **51**, No. 6, pp. 3343-3353 (1980).
- [25] A. L. Tronconi, M. A. Amato, P. C. Morais, and K. Skeff Neto, "Simple model for measurements of the photoacoustic signal by a piezoelectric detector in the microwave region," *J. Appl. Phys.*, Vol. **56**, No. 5, pp. 1462-1464 (1984).
- [26] J. C. Murphy and L. C. Aamodt, "Photothermal spectroscopy using optical beam probing: Mirage effect," *J. Appl. Phys.*, Vol. **51**, No. 9, pp. 4580-4588 (1980).
- [27] M. A. Olmstead and N. M. Amer, "A new probe of the optical properties of surface," *J. Vac. Sci. Technol. B*, Vol. **1**, No. 3, pp. 751-755 (1983).
- [28] M. A. Olmstead, N. M. Amer, S. Kohn, D. Fournier and A. C. Boccara, "Photothermal displacement spectroscopy: An optical probe for solids and surfaces," *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Proc.*, Vol. **32**, No. 3, pp. 141-154 (1983).
- [29] M. A. Olmstead and N. M. Amer, "Direct measurement of the polarization dependence of Si (111)  $2\times 1$  surface-state absorption by use of photothermal displacement spectroscopy," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **52**, No. 13, pp. 1184-1151 (1984).
- [30] J. J. Barrett and M. J. Berry, "Photoacoustic Raman spectroscopy (PARS) using CW laser sources," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **34**, No. 2, pp. 144-146 (1979).
- [31] C. K. N. Patel and A. C. Tam, "Optoacoustic Raman gain spectroscopy of liquids," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **34**, No. 11, pp. 760-763 (1979).
- [32] H. Coufal, "Pyroelectric detection of radiation-induced thermal wave phenomena," *IEEE Trans. Ultra. Ferro. Freq. Cons.*, Vol. **UFFC-33**, No. 5, pp. 507-512 (1986).
- [33] K. Tanaka, Y. Ichimura, and K. Sindo, "Pyroelectric photothermal spectroscopy for thin solid films," *J. Appl. Phys.*, Vol. **63**, No. 6, pp. 1815-1819 (1988).
- [34] M. E. Long, Robert L. Swofford, and A. C. Albrecht, "Thermal lens technique: A new method of absorption spectroscopy," *Science*, Vol. **191**, No. 4223, pp. 183-185 (1976).
- [35] A. Rosencwaig, "Thermal-wave imaging," *Science*, Vol. **218**, No. 4569, pp. 223-228 (1982).
- [36] D. Boyer, P. Tamarat; A. Maali, B. Lounis, and M. Orrit, "Photothermal imaging of

- nanometer-sized metal particles among scatterers,” *Science*, Vol. **297**, No. 5584, pp. 1160-1163 (2002).
- [37] G. G. Stoney, “The tension of metallic films deposited by electrolysis,” *Proc. R. Soc. London Ser. A*, Vol. **82**, No. 553, pp. 172-175 (1909).
- [38] S. N. G. Chu, “Elastic bending of semiconductor wafer revisited and comments on Stoney's equation,” *J. Electrochem. Soc.*, Vol. **145**, No. 10, pp. 3621-3627 (1998).
- [39] J. W. Beams, “Mechanical properties of thin films of gold and silver,” *Structure and Properties of Thin Films*, edited by C. A. Neugebauer, John Wiley and Sons, New York, pp.183-192 (1959).
- [40] V. Holý, U. Pieysch, and T. Baumbach, *High-Resolution X-ray Scattering from Thin Films and Multilayers*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Set. 8.1 (1999).
- [41] I. C. Noyan and J. B. Cohen, *Residual Stress: Measurement by Diffraction and Interpretation*, Springer-Verlag, New York, Set. 5.5 (1987).
- [42] D. Agnihotri, “Recent advances in semiconductor X-ray metrology,” *2005 International Conference on Characterization and Metrology for ULSI Technology. AIP Conference Proceedings* (2005).
- [43] I. De Wolf, “Micro-Raman spectroscopy to study local mechanical stress in silicon integrated circuits,” *Semicond. Sci. Technol.*, Vol. **11**, No. 2, pp. 139-154 (1996).
- [44] H. K. Shin, D. J. Lockwood, and J.-M. Baribeau, “Strain in coherent-wave SiGe/Si superlattices,” *Solid State Commun.*, Vol. **114**, No. 10, pp. 505-510 (2000).
- [45] S. Rath, M. L. Hsieh, P. Etchegoin, and R. A. Stradling, “Alloy effects on the Raman spectra of  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  and calibration protocols for alloy compositions based on polarization measurements,” *Semicond. Sci. Technol.*, Vol. **18**, No. 6, pp. 566-575 (2003).
- [46] J. C. Tsang, P. M. Mooney, F. Dacol, and J. O. Chu, “Measurements of alloy composition and strain in thin  $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}$  layers,” *J. Appl. Phys.*, Vol. **75**, No. 12, pp. 8098-8108 (1994).
- [47] T. Jawhari, “Micro-Raman spectroscopy of the solid state: Applications to semiconductors and thin films,” *ANALUSIS*, 2000, Vol. **28**, No. 1, pp. 15-22 (2000).

- [48] D. S. Hughes and J. L. Kelly, "Second-order elastic deformation of solids," *Phys. Rev.*, Vol. **92**, No. 5, pp. 1145-1149 (1953).
- [49] F. D. Murnaghan, *Finite Deformation of an Elastic Solid*, Wiley, New York (1951).
- [50] R. A. Toupin and B. Bernstein, "Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **33**, No. 2, pp. 216-225 (1961).
- [51] R. N. Thurston and K. Brugger, "Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media," *Phys. Rev.*, Vol. **133**, No. 6A, pp. A1604-A1610 (1964).
- [52] R. N. Thurston, "Wave propagation in fluids and normal solids," *Physical Acoustics: Principles and Methods Volume I*, edited by W. P. Mason, Academic Press, pp. 1-110 (1964).
- [53] R. N. Thurston, "Effective elastic coefficients for wave propagation in crystals under stress," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **37**, No. 2, pp. 348-356 (1965).
- [54] R. H. Bergman and R. A. Shahbender, "Effect of statically applied stresses on the velocity of propagation of ultrasonic waves," *J. Appl. Phys.*, Vol. **29**, No. 12, pp. 1736-1738 (1958).
- [55] R. T. Smith, R. Stern, and R. W. B. Stephens, "Third-order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurements," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **40**, No. 5, pp. 1002-1008 (1966).
- [56] D. M. Egle and D. E. Bray, "Measurement of acoustoelastic and third-order elastic constants for rail steel," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **60**, No. 3, pp. 741-744 (1976).
- [57] R. B. King and C. M. Fortuko, "Determination of in-plane residual stress states in plates using horizontally polarized shear waves," *J. Appl. Phys.*, Vol. **54**, No. 6, pp. 3027-3035 (1983).
- [58] Y.-H. Pao, W. Sachse, and H. Fukuoka, "Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses," *Physical Acoustics: Principles and Methods Volume XVII*, edited by W. P. Mason and R. N. Thurston, Academic Press, pp. 61-143 (1984).
- [59] Y.-H. Pao and U. Gamer, "Acoustoelastic waves in orthotropic media,"

- J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **77**, No. 3, pp. 806-812 (1985).
- [60] E. P. Papadakis, "Ultrasonic velocity and attenuation: Measurement methods with scientific and industrial applications," *Physical Acoustics: Principles and Methods Volume XII*, edited by W. P. Mason and R. N. Thurston, Academic Press, pp. 277-374 (1976).
- [61] C. B. Scruby and L. E. Drain, *Laser Ultrasonics: Techniques and Applications*, Adam Hilger Ltd. (1990).
- [62] S. J. Davies, C. Edwards, G. S. Taylor, and S. B. Palmer, "Laser-generated ultrasound: Its properties, mechanisms and multifarious applications," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. **26**, No. 3, pp. 329-348 (1993).
- [63] M. A. Biot, "Thermoelasticity and irreversible thermodynamics," *J. Appl. Phys.*, Vol. **27**, No. 3, pp. 240-253 (1956).
- [64] H. Deresiewicz, "Plane waves in a thermo-elastic solid," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **29**, No. 2, pp. 204-209 (1957).
- [65] M. Lessen, "The motion of a thermoelastic solid," *Quart. Appl. Math.*, Vol. **15**, No. 1, pp. 105-108 (1957).
- [66] P. Chadwick and I. N. Sneddon, "Plane wave in an elastic solid conducting heat," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **6**, No. 3, pp. 223-230 (1958).
- [67] W. Nowacki, "Some dynamic problems of thermoelasticity," *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol. **11**, No. 2, pp. 259-283 (1959).
- [68] P. Chadwick, "Thermoelasticity: The dynamic theory," *Progress in Solid Mechanics Volume I*, edited by R. Hill and I. N. Sneddon, North-Holland, Amsterdam, pp. 263-328 (1960).
- [69] H. W. Lord and Y. Shulman, "A generalized dynamical theory of thermoelasticity," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **15**, No. 5, pp. 299-309 (1967).
- [70] D. S. Chandrasekharaiah, "Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature," *Trans. ASME Appl. Mech. Rev.*, Vol. **51**, No. 12, pp. 705-729 (1998).
- [71] A. E. Green and K. A. Lindsay, "Thermoelasticity," *J. Elasticity*, Vol. **2**, No. 1, pp.1-7

- (1972).
- [72] W. Nowacki, *Dynamic Problems of Thermoelasticity*, edited by P. H. Francis and R. B. Hetnarski, and translated by H. Zorski, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa (1975).
- [73] A. E. Green and P. M. Naghdi, "A re-examination of the basic postulates of thermomechanics," *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. **432**, No. 1885, pp. 171-194 (1991).
- [74] A. E. Green and P. M. Naghdi, "On undamped heat waves in an elastic solid," *J. Therm. Stresses*, Vol. **15**, No. 2, pp. 253-264 (1992).
- [75] A. E. Green and P. M. Naghdi, "Thermoelasticity without energy dissipation," *J. Elasticity*, Vol. **31**, No. 3, pp. 189-208 (1993).
- [76] Richard B. Hetnarski and M. Reza Eslami, *Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York (2009).
- [77] Józef Ignaczak and Martin Ostojca-Starzewski, *Thermoelasticity with Finite Wave Speeds*, Oxford University Press, New York (2010).
- [78] R. D. Mindlin, "On the equations of motion of piezoelectric crystals," *Problems of Continuum Mechanics*, edited by J. R. M. Radok, Society for Industrial and Applied Mechanics, Philadelphia, pp. 282-290 (1961).
- [79] R. D. Mindlin, "Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates," *Int. J. Solids Structures*, Vol. **10**, No. 6, pp. 625-637 (1974).
- [80] W. Nowacki, "A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals," *Proc. Vib. Probl.*, Vol. **6**, No. 1, pp. 3-12 (1965).
- [81] W. Nowacki, "Some general theorems of thermopiezoelectricity," *J. Thermal Stresses*, Vol. **1**, No. 2, pp. 171-182 (1978).
- [82] W. Nowacki, "Foundations of linear piezoelectricity," Chapter I in *Electromagnetic Interactions in Elastic Solids, International Centre for Mechanical Sciences: Courses and Lectures No. 257*, edited by H. P. Wien, Springer-Verlag, pp. 105-189 (1979).
- [83] H. Singh and J. N. Sharma, "Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **77**, No. 3, pp. 1046-1053 (1985).

- [84] J. N. Sharma and H. Singh, "Generalized thermoelastic waves in anisotropic media," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **85**, No. 4, pp. 1407-1413 (1989).
- [85] J. N. Sharma, V. Kumar, and S. P. Sud, "Plane harmonic waves in orthorhombic thermoelastic materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **107**, No. 1, pp. 293-305 (2000).
- [86] J. N. Sharma, D. Singh, and R. Kumer, "Generalized thermoelastic waves in homogeneous isotropic plates," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **108**, No. 2, pp. 848-851 (2000).
- [87] J. N. Sharma, M. Pal, and D. Chand, "Thermoelastic Lamb waves in electrically shorted transversely isotropic piezoelectric plate," *J. Thermal Stresses*, Vol. **27**, No. 1, pp. 33-58 (2004).
- [88] J. N. Sharma and V. Walia, "Straight and circular crested Lamb waves in generalized piezothermoelastic plates," *J. Thermal Stresses*, Vol. **29**, No. 6, pp. 529-551 (2006).
- [89] J. N. Sharma, M. Pal, and D. Chand, "Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials," *J. Sound Vib.*, Vol. **284**, No. 1-2, pp. 227-248 (2005).
- [90] J. N. Sharma and V. Walia, "Further investigations on Rayleigh waves in piezothermoelastic materials," *J. Sound Vib.*, Vol. **301**, No. 1-2, pp. 189-206 (2007).
- [91] K. L. Verma and N. Hasebe, "Dispersion of thermoelastic waves in a plate with and without energy dissipation," *Int. J. Thermophys.*, Vol. **22**, No. 3, pp. 957-978 (2001).
- [92] K. L. Verma and N. Hasebe, "On the flexural and extensional thermoelastic waves in orthotropic plates with two thermal relaxation times," *J. Appl. Math.*, Vol. **2004**, No. 1, pp. 69-83 (2004).
- [93] K. L. Verma, "On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. **40**, No. 18, pp. 2077-2096 (2002).
- [94] B. Singh, "On the theory of generalized thermoelasticity for piezoelectric materials," *Appl. Math. Comput.*, Vol. **171**, No. 1, pp. 398-405 (2005).
- [95] V. Salnikov and N. Scott, "Asymptotic and numerical analysis of thermoelastic waves in an isotropic plate," *IMA J. Appl. Math.*, Vol. **71**, No. 3, pp. 409-433 (2006).

- [96] V. Salnikov and N. Scott, "Thermoelastic waves in a constrained isotropic plate: Incompressibility at uniform temperature," *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. **59**, No. 3, pp. 359-375 (2006).
- [97] J.-C. Cheng, L. Wu, and S.-Y. Zhang, "Thermoelastic response of pulsed photothermal deformation of thin plates," *J. Appl. Phys.*, Vol. **76**, No. 2, pp. 716-722 (1994).
- [98] L. Wu, J.-C. Cheng, and S.-Y. Zhang, "Mechanisms of laser-generated ultrasound in plates," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. **28**, No. 5, pp. 957-964 (1995).
- [99] J.-C. Cheng and Y. H. Berthelot, "Theory of laser-generated transient Lamb waves in orthotropic plates," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. **29**, No. 7, pp. 1857-1867 (1996).
- [100] J.-C. Cheng and S.-Y. Zhang, "Quantitative theory for laser-generated Lamb waves in orthotropic thin plates," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **74**, No. 14, pp. 2087-2089 (1999).
- [101] J.-C. Cheng, T.-H. Wang, and S.-Y. Zhang, "Normal-mode expansion method for laser-generated ultrasonic Lamb waves in orthotropic thin plates," *Appl. Phys. B: Lasers Opt.*, Vol. **70**, No. 1, pp. 57-63 (2000).
- [102] D. S. Chandrasekharaiah and K. S. Srinath, "Thermoelastic interactions without energy dissipation due to a point heat source," *J. Elasticity*, Vol. **50**, No. 2, pp. 97-108 (1998).
- [103] D. S. Chandrasekharaiah and K. S. Srinath, "Thermoelastic interactions without energy dissipation due to a line heat source," *Acta Mechanica*, Vol. **128**, No. 3-4, pp. 243-251 (1998).
- [104] I. Arias, T. W. Murray, and J. D. Achenbach, "Near-field analysis of laser-generated ultrasound: The effects of thermal diffusion and optical penetration," *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Volume XXI*, edited by D. O. Thompson and D. E. Chimenti, AIP Press, New York, pp. 324-331 (2002).
- [105] I. Arias and J. D. Achenbach, "Thermoelastic generation of ultrasound by line-focused laser irradiation," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 40, No. , pp. 6917-6935 (2003).
- [106] J. W. Yoo, C. H. Lim, and S. H. Baik, "Thermoelastic surface waves generated by irradiation with a line-focused laser pulse," *J. Korean Phys. Soc.*, Vol. **48**, No. 1,

- pp. 61-66 (2006).
- [107] B.-Q. Xu, Z.-H. Shen, J. Lu, X.-W. Ni, S.-Y. Zhang, “Numerical simulation of laser-induced transient temperature field in film-substrate system by finite element method,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **46**, No. 25, pp. 4963-4968 (2003).
- [108] B.-Q. Xu, Z.-H. Shen, X.-W. Ni, J. Lu, and Y.-W. Wang, “Finite element model of laser-generated surface acoustic waves in coating-substrate system,” *J. Appl. Phys.*, Vol. **95**, No. 4, pp. 2109-2115 (2004).
- [109] B.-Q. Xu, Z.-H. Shen, X.-W. Ni, and J. Lu, “Numerical simulation of laser-generated ultrasound by the finite element method,” *J. Appl. Phys.*, Vol. **95**, No. 4, pp. 2116-2122 (2004).
- [110] J.-J. Wang, Z.-H. Shen, B.-Q. Xu, X.-W. Ni, J.-F. Guan, and J. Lu, “Simulation on thermoelastic stress field and laser ultrasound waveform in non-metallic materials by using FEM,” *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Proc.*, Vol. **84**, No. 3, pp. 301-307 (2006).
- [111] B.-Q. Xu, Z.-H. Shen, J.-J. Wang, X.-W. Ni, J.-F. Guan, and J. Lu, “Thermoelastic finite element modeling of laser generation ultrasound,” *J. Appl. Phys.*, Vol. **99**, No. 3, pp. 033508 (2006).
- [112] B.-Q. Xu, J. Feng, G.-D. Xu, J.-J. Wang, H.-X. Sun, and G.-R. Cao, “Laser-generated thermoelastic acoustic sources and Lamb waves in anisotropic plates,” *Appl. Phys. A: Mater. Sci. Proc.*, Vol. **91**, No. 1, pp. 173-179 (2008).
- [113] A. C. Eringen and E. S. Şuhubi, *Elastodynamics, Volume II: Linear Theory*, Academic Press, New York (1975).
- [114] W. H. Prosser, M. A. Hamstad, J. Gary, and A. O’Gallagher, “Finite element and plate theory modeling of acoustic emission waveforms,” *J. Nondestruct. Eval.*, Vol. **18**, No. 3, pp. 83-90 (1999).
- [115] K. Luangvilai, *Attenuation of Ultrasonic Lamb waves with Applications to Material Characterization and Condition Monitoring*, Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Technology (2007).
- [116] H. F. Tiersten, *Linear piezoelectric plate vibrations: Elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations of piezoelectric plates*, Plenum Press, New York

- (1969).
- [117] R. C. Peach, "A normal mode expansion for piezoelectric plates and certain of its applications," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, Vol. **35**, No. 5, pp. 593-611 (1988).
- [118] D.-C. Liu, "A normal mode expansion method for the undamped forced vibration of linear piezoelectric solid," *J. Sound Vib.*, Vol. **233**, No. 3, pp. 423-434 (2000).
- [119] B. A. Auld, "Application of microwave concepts to the theory of acoustic fields and waves in solids," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. **MTT-17**, No. 10, pp. 800-811 (1969).
- [120] B. A. Auld and G. S. Kino, "Normal mode theory for acoustic waves and its application to the interdigital transducer," *IEEE Trans. Electron Devices*, Vol. **ED-18**, No. 10, pp. 898-908 (1971)
- [121] B. A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids, Volume II*, 2nd Ed., Krieger Pub. Co., Malabar, Florida (1990).
- [122] E. Moulin, J. Assaad, C. Delebarre, and D. Osmont, "Modeling of Lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element-normal modes expansion method," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **107**, No. 1, pp. 87-94 (2000).
- [123] L. Duquenne, E. Moulin, J. Assaad, and S. Grondel, "Transient modeling of Lamb waves generated in viscoelastic materials by surface bonded piezoelectric transducers," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **116**, No. 1, pp. 133-141 (2004).
- [124] I. Núñez, R. K. Ing, C. Negreira, and M. Fink, "Transfer and Green functions based on modal analysis for Lamb wave generation," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **107**, No. 5, pp. 2370-2378 (2000).
- [125] I. A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications*, Plenum Press, New York (1967).
- [126] H. Gao and J. L. Rose, "Goodness dispersion curves for ultrasonic guided wave based on SHM: A sample problem in corrosion monitoring," *Aeronaut. J.*, Vol. **114**, No. 1151, pp. 49-56 (2010).

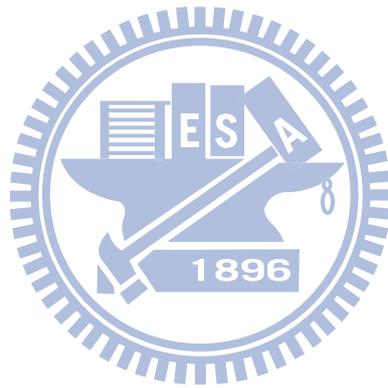
- [127] G. Santoni, *Fundamental Studies in the Lamb-Wave Interaction Between Piezoelectric Wafer Active Sensor and Host Structure During Structural Health Monitoring*, Ph.D. Dissertation, University of South Carolina (2010).
- [128] V. Giurgiutiu, *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*, Elsevier Academic Press (2008).
- [129] H. M. Hertz, "Standing-wave acoustic trap for nonintrusive positioning of microparticles," *J. Appl. Phys.*, Vol. **78**, No. 8, pp. 4845-4849 (1995).
- [130] C. J. Strobl, C. Schaefflein, and U. Beierlein, "Carbon nanotube alignment by surface acoustic waves," *Appl. Phys. Letts.*, Vol. **85**, No. 8, pp. 1427-1429 (2004).
- [131] A. Haake, *Micromanipulation of Small Particles with Ultrasound*, Ph.D. Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology Zurich (2004).
- [132] A. Haake and J. Dual, "Contactless micromanipulation of small particles by an ultrasound field excited by a vibrating body," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **117**, No. 5, pp. 2752-2760 (2005).
- [133] M. Alvarez, J. R. Friend, and L. Y. Yeo, "Surface vibration induced spatial ordering of periodic polymer patterns on a substrate," *Langmuir*, Vol. **24**, No. 19, pp. 10629-10632 (2008).
- [134] J. R. Friend, L. Y. Yeo, D. R. Arifin, and A. Mechler, "Evaporative self-assembly assisted synthesis of polymeric nanoparticles by surface acoustic wave atomization," *Nanotechnology*, Vol. **19**, pp. 145301 (2008).
- [135] C. D. Wood, J. E. Cunningham, R. O'Rorke, C. Waelti, E. H. Linfield, A. G. Davies, and S. D. Evans, "Formation and manipulation of two-dimensional arrays of micron-scale particles in microfluidic systems by surface acoustic waves," *Appl. Phys. Letts.*, Vol. **94**, No. 5, pp. 54101 (2009).
- [136] M. K. Tan, J. R. Friend, and L. Y. Yeo, "Surface acoustic wave driven microchannel flow," *Proceedings of 16th Australasian Fluid Mechanics Conference*, pp. 790-793 (2007).
- [137] M. K. Tan, J. R. Friend, and L. Y. Yeo, "Directly visualization of surface acoustic waves along substrates using smoke particles," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **91**, No. 22,

- pp. 224101 (2007).
- [138] R. P. Hodgson, M. K. Tan, L. Y. Yeo, and J. R. Friend, "Transmitting high power RF acoustic radiation via fluid couplants into superstrates for microfluidics," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. **94**, No. 2, pp. 024102 (2009).
- [139] D. Rabaud, P. Thibault, J.-P. Raven, O. Hugon, E. Lacot, and P. Marmottant, "Manipulation of confined bubbles in a thin microchannel: Drag and acoustic Bjerknes forces," *Phys. Fluids*, Vol. **23**, pp. 042003 (2011).
- [140] M. J. Vellekoop, "Acoustic wave sensors and their technology," *Ultrasonics*, Vol. **36**, No. 1-5, pp. 7-14 (1998).
- [141] M. S. Weinberg, C. E. Dubé, A. Petrovich, and A. M. Zapata, "Fluid damping in resonant flexural plate wave device," *J. Microelectromech. Syst.*, Vol. **12**, No. 5, pp. 567-576 (2003).
- [142] G. Lindner, "Sensors and actuators based on surface acoustic waves propagating along solid-liquid interfaces," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. **41**, pp. 123002 (2008).
- [143] M.-I. Rocha-Gaso, C. March-Iborra, Á. Montoya-Baides, and A. Arnau-Vives, "Surface generated acoustic wave biosensors for the detection of pathogens: A review," *Sensors*, Vol. **9**, No. 7, pp. 5740-5769 (2009).
- [144] D. E. Chimenti and A. H. Nayfeh, "Leaky Lamb waves in fibrous composite laminates," *J. Appl. Phys.*, Vol. **58**, No. 12, pp. 4531-4538 (1985).
- [145] Y. Bar-Cohen, S.-S. Lih, and A. K. Mal, "NDE of composites using leaky Lamb waves (LLW)," *Nondestr. Test Eval.*, Vol. **17**, No. 2, pp. 91-119 (2001).
- [146] H. Lamb, "On waves in an elastic plate," *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. **93**, No. 648, pp. 144-128 (1917).
- [147] J. G. Scholte, "On the large displacements commonly regarded as caused by Love waves and similar dispersive surface waves," *Proc. Konink. Ned. Akad. Wetensch.*, Vol. **51**, pp. 533-543 (1948).
- [148] A. H. Nayfeh, *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media: With Applications to Composites*, Elsevier, Amsterdam (1995).

- [149] V. Dayal and V. K. Kinra, "Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. I: An exact solution and experiments," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **85**, No. 6, pp. 2268-2276 (1989).
- [150] C. L. Yapura and V. K. Kinra, "Guided waves in a fluid-solid bilayer," *Wave Motion*, Vol. **21**, No.1, pp. 35-46 (1995).
- [151] J. Laperre and W. Thys, "Mode coupling in solid/liquid/solid trilayers," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **96**, No. 3, pp. 1643-1650 (1994).
- [152] W. Hassan and P. B. Nagy, "On the low-frequency oscillation of a fluid layer between two elastic plates," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **102**, No. 6, pp. 3343-3348 (1997).
- [153] J. Wu and Z. Zhu, "The propagation of Lamb waves in a plate bordered with layers of a liquid," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **91**, No. 2, pp. 861-867 (1992).
- [154] Z. Zhu and J. Wu, "The propagation of Lamb waves in a plate bordered with a viscous liquid," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **98**, No. 2, pp. 1057-1064 (1995).
- [155] A. H. Nayfeh and P. B. Nagy, "Excess attenuation of leaky Lamb waves due to viscous fluid loading," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **101**, No. 5, pp. 2649-2658 (1997).
- [156] A. H. Nayfeh and H. T. Chien, "The influence of piezoelectricity on free and reflected waves from fluid-loaded anisotropic plates," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **91**, No. 3, pp. 1250-1261 (1992).
- [157] C. H. Yang and D. E. Chimenti, "Guided plate waves in piezoelectric immersed in a dielectric fluid. I. Analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **97**, No. 4, pp. 2103-2108, (1995).
- [158] K. Motegi and K. Toda, "Interaction between two leaky Lamb wave modes propagating in a water-loaded bilayer consisting of a piezoelectric ceramic plate and a glass plate," *Ultrasonics*, Vol. **37**, No. 2, pp. 141-147 (1999).
- [159] C. H. Yang and C. J. Shue, "Guided waves propagating in a piezoelectric plate immersed in a conductive fluid," *NDT&E Int.*, Vol. **34**, No. 3, pp. 199-206 (2001).
- [160] Y.-C. Lee and S. H. Kuo, "Leaky Lamb wave of a piezoelectric plate subjected to conductive fluid loading: Theoretical analysis and numerical calculation," *J. Appl. Phys.*, Vol. **100**, 073519 (2006).

- [161] A. K. Mal, "Wave propagation in layered composite laminates under periodic surface loads," *Wave Motion*, Vol. **10**, No. 3, pp. 257-266 (1988).
- [162] M. J. S. Lowe, *Plate Waves for the NDT of Diffusion Bonded Titanium*, Ph.D. Dissertation, University of London (1993).
- [163] M. J. S. Lowe, "Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, Vol. **42**, No. 4, pp. 525-542 (1995).
- [164] T. Sanderson, C. Ume, and J. Jarzynski, "Laser generated ultrasound: A thermoelastic analysis of the source," *Ultrasonics*, Vol. **35**, No. 2, pp. 115-124 (1997).
- [165] P.-C. Xu and A. K. Mal, "An adaptive integration scheme for irregularly oscillatory functions," *Wave Motion*, Vol. **7**, No. 3, pp. 235-243 (1985).
- [166] R. Gunda, S. M. Vijayakar, R. Singh, and J. E. Farstad, "Harmonic Green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **103**, No. 2, pp. 888-899 (1998).
- [167] J. R. Davis (Ed.), *ASM Metal Handbook: Desk Edition*, 2nd Ed., ASM International Handbook Committee (1998).
- [168] R. A. H. Hamilton and J. E. Parrott, "The third-order elastic constants of quasi-isotropic materials," *J. Phys. C: Solid State Phys.*, Vol. **1**, No. 4, pp. 829-834 (1968).
- [169] K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Ohio State University Press (1975).
- [170] D. Royer and E. Dieulesaint, *Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2000).
- [171] J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [172] *MATLAB Function Reference Volume 2: F-O*, The MathWorks, Inc. (2004).
- [173] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd Edition, Cambridge University Press (2007).

(本頁空白)



## 附錄 1 等向性平板中有無熱彈耦合效應之 $\mathbb{P}^\pm$ 與 $\mathbb{Q}^\pm$ 矩陣

考慮一等向性平板，如圖 3.1 所示，忽略殘留應力的影響( $T_1^i = T_2^i = T_3^i = 0$ )並假設為沿  $X_1$  方向傳遞，參考熱彈耦合的統御方程式(3.30a-d)，令參數為

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11} = \bar{c}_{22} = \bar{c}_{33} &= \lambda + 2\mu, & \bar{c}_{12} = \bar{c}_{13} = \bar{c}_{23} &= \lambda, & \bar{c}_{44} = \bar{c}_{55} = \bar{c}_{66} &= \mu, \\ \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_3 &= k, & \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 &= \lambda, & \bar{\alpha} &= \alpha, \\ \bar{c}_{16} = \bar{c}_{26} = \bar{c}_{36} = \bar{c}_{45} &= 0, & \bar{k}_6 = \bar{\lambda}_6 &= 0, & \rho_i &= \rho_0, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

可將統御方程式(3.30a-d)式可簡化為

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) - \lambda \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial X_1} + \rho_0 b_1 = \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) - \lambda \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial X_3} + \rho_0 b_3 = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (\text{A.2b})$$

$$k \left( \frac{\partial^2(\Delta\Theta)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2(\Delta\Theta)}{\partial X_3^2} \right) - \Theta_0 \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) + \rho_0 \dot{h} = \Theta_0 \alpha \frac{\partial(\Delta\Theta)}{\partial t}, \quad (\text{A.2c})$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_3^2} \right) + \rho_0 b_2 = \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \quad (\text{A.2d})$$

我們可發現(A.2a-c)式為等向性平板中傳遞的熱彈波統御方程式，其代表在  $X_1 X_3$  平面內運動的面內波傳；此外，(A.2d)式則僅僅代表面外波傳的彈性波運動方程式。

考慮(A.2a-c)式，令  $u_1 = \varphi_{,1} - \psi_{,3}$  與  $u_3 = \varphi_{,3} + \psi_{,1}$ ， $\varphi$  與  $\psi$  皆為勢函數且分別代表縱波與橫波，經拆解後可發現對於等向性材料的熱彈聲波，縱波(L)與熱波(th)是相互耦合，改稱為準縱波(QL)與準熱波(Qth)，而橫波(S)是獨立的。再經由一連串仿效第 3.4.2 節的推導，可整理出如同(3.82)、(3.83)與(3.85)式中狀態向量  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}_x$  與  $\mathbf{V}_z$  的表示。首先，我們定義所需的參數如下列所示：

$$\zeta_S^2 = \xi^2 - \xi_S^2, \quad \xi_S^2 = \frac{\omega^2}{c_S^2} = \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu}, \quad c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_0},$$

$$\begin{aligned}
\zeta_L^2 &= \xi^2 - \xi_L^2, & \xi_L^2 &= \frac{\omega^2}{c_L^2} = \frac{\omega^2 \rho_0}{\lambda + 2\mu}, & c_L^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}, \\
\zeta_{th}^2 &= \xi^2 - \xi_{th}^2, & \xi_{th}^2 &= \frac{\omega^2}{c_{th}^2} = \frac{i\omega\alpha}{\Theta_0^{-1}k}, & c_{th}^2 &= -\frac{i\omega k}{\Theta_0\alpha}, \\
\zeta_{QL}^2 &= \xi^2 - \xi_{QL}^2, & o_{\lambda 1} &= \frac{\omega\zeta_{\lambda 1}}{\xi_L^2} = \frac{\lambda}{\rho_0\omega}, & \varsigma_{\lambda 1} &= \frac{\lambda}{\rho_0 c_L^2}, \\
\zeta_{Qth}^2 &= \xi^2 - \xi_{Qth}^2, & o_{\lambda 2} &= \frac{\omega\zeta_{\lambda 2}}{\xi_{th}^2} = \frac{\omega\lambda}{\alpha}, & \varsigma_{\lambda 2} &= \frac{i\omega\lambda}{\Theta_0^{-1}k}, \\
\zeta_{QL}^2 &= \frac{1}{2}(\xi_L^2 + \xi_{th}^2 + \varsigma_{\lambda 1}\varsigma_{\lambda 2}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\xi_L^2 + \xi_{th}^2 + \varsigma_{\lambda 1}\varsigma_{\lambda 2})^2 - \xi_L^2\xi_{th}^2}, \\
\zeta_{Qth}^2 &= \frac{1}{2}(\xi_L^2 + \xi_{th}^2 + \varsigma_{\lambda 1}\varsigma_{\lambda 2}) - \sqrt{\frac{1}{4}(\xi_L^2 + \xi_{th}^2 + \varsigma_{\lambda 1}\varsigma_{\lambda 2})^2 - \xi_L^2\xi_{th}^2}, \\
c_{QL}^2 &= \frac{1}{2}(c_L^2 + c_{th}^2 + o_{\lambda 1}o_{\lambda 2}) + \sqrt{\frac{1}{4}(c_L^2 + c_{th}^2 + o_{\lambda 1}o_{\lambda 2})^2 - c_L^2c_{th}^2}, \\
c_{Qth}^2 &= \frac{1}{2}(c_L^2 + c_{th}^2 + o_{\lambda 1}o_{\lambda 2}) - \sqrt{\frac{1}{4}(c_L^2 + c_{th}^2 + o_{\lambda 1}o_{\lambda 2})^2 - c_L^2c_{th}^2}, \\
e_{QL} &= \frac{\xi_L^2 - \xi_{QL}^2}{\varsigma_{\lambda 1}}, & e_{Qth} &= \frac{\xi_L^2 - \xi_{Qth}^2}{\varsigma_{\lambda 1}},
\end{aligned} \tag{A.3}$$

其中  $\omega$  為角頻率， $\xi$  為水平  $X_1$  方向的角波數， $\xi_{\square}$  為厚度  $X_3$  方向的角波數， $\xi_{\square}$  與  $c_{\square}$  分別為微體波的角波數與相速度，下標符號  $\square$  可代表 S、L、th、QL 與 Qth 波， $(\varsigma_{\lambda 1}, \varsigma_{\lambda 2})$  為計算角波數  $\xi_{QL}$  與  $\xi_{Qth}$  所定義的耦合項， $(o_{\lambda 1}, o_{\lambda 2})$  為計算波速  $c_{QL}$  與  $c_{Qth}$  所定義的耦合項，以及  $(e_{QL}, e_{Qth})$  為 QL 與 Qth 波的振幅比例。故可將(3.85)式中的矩陣  $\mathbf{P}'^{\pm}$ 、 $\mathbf{Q}'_{\mathbf{X}}^{\pm}$ 、 $\mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}^{\pm}$  (或  $\mathbf{Q}^{\pm}$ ) 與  $\mathbf{D}'^{\pm}(X_3)$  分別整理如下：

$$\mathbf{P}'^{\pm} = \begin{bmatrix} \mp i\zeta_S & i\xi & i\xi \\ i\xi & \pm i\zeta_{QL} & \pm i\zeta_{Qth} \\ 0 & e_{QL} & e_{Qth} \end{bmatrix}, \tag{A.4a}$$

$$\mathbf{Q}'_{\mathbf{X}}^{\pm} = \begin{bmatrix} \pm 2\mu \xi \zeta_S & -[(\lambda + 2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \zeta_{QL}^2] & -[(\lambda + 2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \zeta_{Qth}^2] \\ \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) & \mp 2\mu \xi \zeta_{QL} & \mp 2\mu \xi \zeta_{Qth} \\ 0 & k \cdot i \xi e_{QL} & k \cdot i \xi e_{Qth} \end{bmatrix}, \tag{A.4b}$$

$$\mathbf{Q}'_{\mathbf{Z}}^{\pm} = \begin{bmatrix} \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) & \mp 2\mu \xi \zeta_{QL} & \mp 2\mu \xi \zeta_{Qth} \\ \mp 2\mu \xi \zeta_S & -[(\lambda + 2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \xi^2] & -[(\lambda + 2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \xi^2] \\ 0 & \pm k \cdot i \zeta_{QL} e_{QL} & \pm k \cdot i \zeta_{Qth} e_{Qth} \end{bmatrix}, \tag{A.4c}$$

$$\mathbb{D}'^{\pm}(X_3) = \begin{bmatrix} \exp(\pm i \zeta_S X_3) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\pm i \zeta_{QL} X_3) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\pm i \zeta_{Qth} X_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4d})$$

其中列(colume)的依序分別代表 S、QL 與 Qth 波。此外，若忽略熱效應的影響，只考慮彈性變形的作用，上述(A.4a-d)式可改寫如下：

$$\mathbb{P}'^{\pm} = \begin{bmatrix} \mp i \zeta_S & i \xi \\ i \xi & \pm i \zeta_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\mathbb{Q}'^{\pm}_X = \begin{bmatrix} \pm 2\mu \xi \zeta_S & -[(\lambda+2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \zeta_L^2] \\ \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) & \mp 2\mu \xi \zeta_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\mathbb{Q}'^{\pm}_Z = \begin{bmatrix} \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) & \mp 2\mu \xi \zeta_L \\ \mp 2\mu \xi \zeta_S & -[(\lambda+2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \xi^2] \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5c})$$

$$\mathbb{D}'^{\pm}(X_3) = \begin{bmatrix} \exp(\pm i \zeta_S X_3) & 0 \\ 0 & \exp(\pm i \zeta_L X_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5d})$$

其中上述(A.4b, c)與(A.5b, c)式中有幾個元素因應需要可改寫為

$$(\lambda+2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \xi^2 = \mu(\zeta_S^2 - \xi^2), \quad (\text{A.6a})$$

$$(\lambda+2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \zeta_L^2 = \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) - 2\mu(\zeta_L^2 - \xi^2), \quad (\text{A.6b})$$

$$(\lambda+2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \zeta_{QL}^2 = \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) - 2\mu(\zeta_{QL}^2 - \xi^2), \quad (\text{A.6c})$$

$$(\lambda+2\mu)\xi_L^2 - 2\mu \zeta_{Qth}^2 = \mu(\zeta_S^2 - \xi^2) - 2\mu(\zeta_{Qth}^2 - \xi^2). \quad (\text{A.6d})$$

假設平板厚度為  $h$ ，將上述(A.4c)式代入(3.88)與(3.89a, b)式，熱彈耦合板波之對稱與反對稱運動模態的頻散特徵方程式  $\Omega_{\parallel}^{S,A}(\xi, \omega)$ ，經過整理後分別表示如下：

$$\begin{aligned} \Omega_{\parallel}^S(\xi, \omega) &= (\xi_L^2 - \xi_{Qth}^2) \zeta_{Qth} \cdot \left[ (\zeta_S^2 - \xi^2)^2 \cot(\zeta_{QL} h/2) + 4 \xi^2 \zeta_S \zeta_{QL} \cot(\zeta_S h/2) \right] \\ &\quad - (\xi_L^2 - \xi_{QL}^2) \zeta_{QL} \cdot \left[ (\zeta_S^2 - \xi^2)^2 \cot(\zeta_{Qth} h/2) + 4 \xi^2 \zeta_S \zeta_{Qth} \cot(\zeta_S h/2) \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7a})$$

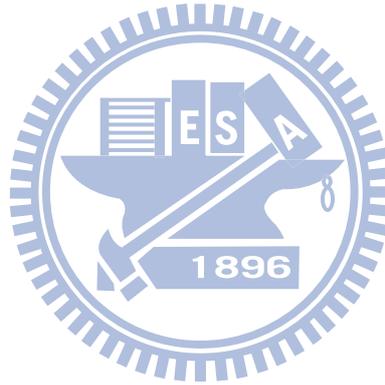
$$\begin{aligned} \Omega_{\parallel}^A(\xi, \omega) &= (\xi_L^2 - \xi_{Qth}^2) \zeta_{Qth} \cdot \left[ (\zeta_S^2 - \xi^2)^2 \tan(\zeta_{QL} h/2) + 4 \xi^2 \zeta_S \zeta_{QL} \tan(\zeta_S h/2) \right] \\ &\quad - (\xi_L^2 - \xi_{QL}^2) \zeta_{QL} \cdot \left[ (\zeta_S^2 - \xi^2)^2 \tan(\zeta_{Qth} h/2) + 4 \xi^2 \zeta_S \zeta_{Qth} \tan(\zeta_S h/2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7b})$$

此一結果與 Nowacki [72] 以及 Sharma [86] 的推導結果相同，經數值模擬後與第 3.4.2 節中(3.88)式的模擬結果是一致的。在上述特徵方程式中不難發現，第一個中括號[ ]部分屬於一般純彈性板波的特徵方程式  $\Omega_{\parallel}^{\prime S, A}(\xi, \omega)$ ，即

$$\Omega_{\parallel}^{\prime S}(\xi, \omega) = (\zeta_S^2 - \xi^2)^2 \cot(\zeta_L \frac{h}{2}) + 4\xi^2 \zeta_S \zeta_L \cot(\zeta_S \frac{h}{2}) = 0, \quad (\text{A.8a})$$

$$\Omega_{\parallel}^{\prime A}(\xi, \omega) = (\zeta_S^2 - \xi^2)^2 \tan(\zeta_L \frac{h}{2}) + 4\xi^2 \zeta_S \zeta_L \tan(\zeta_S \frac{h}{2}) = 0. \quad (\text{A.8a})$$

上述(A.8a, b)二式與文獻 169 與 170 所提供的結果相同。由(A.7a, b)與(A.8a, b)式所獲得頻散與衰減關係，如圖 4.6 至 4.9 所示，可得知在各模態上兩者頻散曲線間的差異不大，但在波數衰減曲線上兩者的表現就截然不同，主要是因(A.7a, b)式多了熱彈耦合造成的衰減。



## 附錄 2 等向性平板中傳遞之熱彈導波的 Lamé 模態

此一附錄中的推導完全依照第 3.4.2 節的流程，主要是以位移函數的假設作出發，嘗試去驗證衰減頻譜在某些特定頻率下發生最小值的現象，並說明在此特定頻率下所呈現的物理現象，即平板熱彈導波的 Lamé 模態。承續附錄 1 的簡化假設，考慮一等向性平板，其熱彈耦合的統御方程式為(A.2a-c)式。我們可根據(3.76a-c)式推導出矩陣  $\mathbf{P}^+$  之元素  $p_{1k}^+$ 、 $p_{3k}^+$  與  $p_{4k}^+$  分別為

$$u_1 \sim p_{1k}^+ = -\zeta_k \xi [(\xi_k^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}], \quad (\text{A.9a})$$

$$u_3 \sim p_{3k}^+ = (\xi_k^2 - \xi_{th}^2)[(\xi_k^2 - \xi_S^2) + \xi^2 (c_{L/S}^2 - 1)] - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} \xi^2, \quad (\text{A.9b})$$

$$\Delta\Theta \sim p_{4k}^+ = i \zeta_k \varsigma_{\lambda 2} (\xi_k^2 - \xi_S^2). \quad (\text{A.9c})$$

其中  $c_{L/S} \equiv c_L/c_S$ 。考慮一法向量為  $X_3$  方向( $\mathbf{Z}$ )之表面，根據(3.80a, c, d)式推導出矩陣  $\mathbf{Q}_Z^+$  (或  $\mathbf{Q}^+$ )之元素  $q_{Z,1k}^+$ 、 $q_{Z,3k}^+$  與  $q_{Z,4k}^+$  分別為

$$T_{31} \sim q_{1k}^+ \equiv q_{Z,1k}^+ = i \mu \xi \left\{ \begin{array}{l} (\xi_k^2 - \xi_{th}^2)[(\xi_k^2 - \xi_S^2) + (c_{L/S}^2 - 1)(\xi^2 - \xi_k^2)] \\ - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} (\xi^2 - \xi_k^2) \end{array} \right\}, \quad (\text{A.10a})$$

$$T_{33} \sim q_{3k}^+ \equiv q_{Z,3k}^+ = i \mu \zeta_k \left\{ \begin{array}{l} (\xi_k^2 - \xi_{th}^2)[c_{L/S}^2 (\xi_k^2 - \xi_S^2) + (c_{L/S}^2 - 1)(2\xi^2)] \\ - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} [(\xi_k^2 - \xi_S^2) + 2\xi^2] \end{array} \right\}, \quad (\text{A.10b})$$

$$-q_3 \sim q_{4k}^+ \equiv q_{Z,4k}^+ = -k \varsigma_{\lambda 2} \cdot \zeta_k^2 (\xi_k^2 - \xi_S^2), \quad (\text{A.10c})$$

其中下標  $\mathbf{Z}$  在此方向一般會除去不表示。此外，亦考慮一法向量為  $X_1$  方向( $\mathbf{X}$ )之表面，根據(3.78a, c, d)式推導出矩陣  $\mathbf{Q}_X^+$  之元素  $q_{X,1k}^+$ 、 $q_{X,3k}^+$  與  $q_{X,4k}^+$  分別為

$$T_{11} \sim q_{X,1k}^+ = i \mu \zeta_k \left\{ \begin{array}{l} (\xi_k^2 - \xi_{th}^2)[(c_{L/S}^2 - 2)(\xi_k^2 - \xi_S^2) - (c_{L/S}^2 - 1)(2\xi^2)] \\ - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} [(\xi_k^2 - \xi_S^2) - 2\xi^2] \end{array} \right\}, \quad (\text{A.11a})$$

$$T_{13} \sim q_{X,3k}^+ = i \mu \xi \left\{ \begin{array}{l} (\xi_k^2 - \xi_{th}^2)[(\xi_k^2 - \xi_S^2) + (c_{L/S}^2 - 1)(\xi^2 - \xi_k^2)] \\ - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} (\xi^2 - \xi_k^2) \end{array} \right\}, \quad (\text{A.11b})$$

$$-q_1 \sim q_{X,4k}^+ = -k \varsigma_{\lambda 2} \cdot \xi \zeta_k (\xi_k^2 - \xi_S^2). \quad (\text{A.11c})$$

上述(A.9a-c)、(A.10a-c)與(A.11a-c)式中，下標「 $k$ 」可給定為(1, 3, 4)，亦或(S, QL, Qth)，代表多項式所求得的根 $\zeta_S$ 、 $\zeta_{QL}$ 與 $\zeta_{Qth}$ ，細節如(A.3)式所示。因此，矩陣 $\mathbf{P}^{\pm}$ 、 $\mathbf{Q}_X^{\pm}$ 與 $\mathbf{Q}_Z^{\pm}$ 中的元素表示詳細整理如下：

$$\begin{cases} p_{11}^+ = [(\xi_S^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot (-\zeta_S \xi) \\ p_{31}^+ = [(\xi_S^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot (\xi^2) \\ p_{41}^+ = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12a})$$

$$\begin{cases} p_{13}^+, p_{14}^+ = [(\xi_{\square}^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot (-\zeta_{\square} \xi) \\ p_{33}^+, p_{34}^+ = (\xi_{\square}^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1)(\xi^2 - \xi_L^2) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} (\xi^2 - c_{L/S}^{-2} \xi_{\square}^2) \\ p_{43}^+, p_{44}^+ = i \varsigma_{\lambda 2} \cdot \zeta_{\square} (\xi_{\square}^2 - \xi_S^2) \end{cases} \quad (\text{A.12b})$$

$$\begin{cases} q_{11}^+ = i \mu \cdot [(\xi_S^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot \xi (\xi^2 - \zeta_S^2) \\ q_{31}^+ = i \mu \cdot [(\xi_S^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot \zeta_S (2\xi^2) \\ q_{41}^+ = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13a})$$

$$\begin{cases} q_{13}^+, q_{14}^+ = i \mu \cdot [(\xi_{\square}^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1)(\xi^2 - \xi_L^2) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} (\xi^2 - c_{L/S}^{-2} \xi_{\square}^2)] \cdot (2\xi) \\ q_{33}^+, q_{34}^+ = i \mu \cdot [(\xi_{\square}^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot \zeta_{\square} (\xi^2 - \zeta_S^2) \\ q_{43}^+, q_{44}^+ = -k \varsigma_{\lambda 2} \cdot \zeta_{\square}^2 (\xi_{\square}^2 - k_S^2) \end{cases} \quad (\text{A.13b})$$

$$\begin{cases} q_{X,11}^+ = i \mu \cdot [(\xi_S^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot \zeta_S (-2\xi^2) \\ q_{X,31}^+ = i \mu \cdot [(\xi_S^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2}] \cdot \xi (\xi^2 - \zeta_S^2) \\ q_{X,41}^+ = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14a})$$

$$\begin{cases} q_{X,13}^+, q_{X,14}^+ = i \mu \cdot [(\xi_{\square}^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1)(2(\xi^2 - \xi_L^2) + \xi_S^2) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} (2(\xi^2 - c_{L/S}^{-2} \xi_{\square}^2) + \xi_S^2)] \cdot (-\zeta_{\square}) \\ q_{X,33}^+, q_{X,34}^+ = i \mu \cdot [(\xi_{\square}^2 - \xi_{th}^2)(c_{L/S}^2 - 1)(\xi^2 - \xi_L^2) - c_{L/S}^2 \varsigma_{\lambda 1} \varsigma_{\lambda 2} (\xi^2 - c_{L/S}^{-2} \xi_{\square}^2)] \cdot (2\xi) \\ q_{X,43}^+, q_{X,44}^+ = -k \varsigma_{\lambda 2} \cdot \xi \zeta_{\square} (\xi_{\square}^2 - \xi_S^2) \end{cases} \quad (\text{A.14b})$$

其中 $\square$ 可定義為 QL 與 Qth。由上述諸式可發現， $p_{41}^+ = q_{41}^+ = q_{X,41}^+ = 0$ ，這與(A.4.a, b)式的結果表示一致。而且，矩陣 $\mathbf{P}^{\pm}$ 中列元素的比例結果，經數值計算後與(A.4a)式的結果相同。此外，參考 Graff [169] 以及 Royer 與 Dieulesaint [170] 的著作內容，皆指出板波各模態的頻散曲線在波數 $\xi$ 與相速度 $c_{Lame}$ 分別為

$$\xi = \zeta_S \quad \text{與} \quad c_{Lame} = \sqrt{2} c_S, \quad (\text{A.15})$$

稱之為 Lamé 模態。此一模態的特徵是運動時其單位體積的脹縮變化為零，即為等體積變化。亦可發現平板中若存在面內 SV 波且以  $45^\circ$  角作入射與反射，在此一連續入射與反射過程中則無任何能量轉換。當  $\xi = \zeta_s$  時，可得： $p_{11}^+ = -p_{31}^+$ 、 $q_{11}^+ = q_{33}^+ = q_{34}^+ = q_{x,31}^+ = 0$  與  $q_{x,11}^+ = -q_{31}^+$ ，這與(A4.b, c)式的結果表示一致。

接著，參考(3.67a, b)式的狀態向量表示，以平板的中心面為基準可將運動特性分成對稱(S)與反對稱(A)兩種模態，改寫(3.67a, b)式可得

$$\begin{Bmatrix} u_1^S \\ u_3^S \\ \Delta\Theta^S \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} U_1^S \\ U_3^S \\ U_4^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\zeta_1 X_3) p_{11}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) p_{13}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) p_{14}^+ \\ i \sin(\zeta_1 X_3) p_{31}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) p_{33}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) p_{34}^+ \\ \cos(\zeta_1 X_3) p_{41}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) p_{43}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) p_{44}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^S \\ C_3^S \\ C_4^S \end{Bmatrix} \times \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.16a})$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_3^A \\ \Delta\Theta^A \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} U_1^A \\ U_3^A \\ U_4^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i \sin(\zeta_1 X_3) p_{11}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) p_{13}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) p_{14}^+ \\ \cos(\zeta_1 X_3) p_{31}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) p_{33}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) p_{34}^+ \\ i \sin(\zeta_1 X_3) p_{41}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) p_{43}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) p_{44}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^A \\ C_3^A \\ C_4^A \end{Bmatrix} \times \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.16b})$$

針對一法向量為  $X_3$  方向( $\mathbf{Z}$ )之表面，改寫(3.70a, b)式可得

$$\begin{Bmatrix} T_{31}^S \\ T_{33}^S \\ -q_3^S \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} V_{z,1}^S \\ V_{z,3}^S \\ V_{z,4}^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i \sin(\zeta_1 X_3) q_{11}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) q_{13}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) q_{14}^+ \\ \cos(\zeta_1 X_3) q_{31}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) q_{33}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) q_{34}^+ \\ i \sin(\zeta_1 X_3) q_{41}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) q_{43}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) q_{44}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^S \\ C_3^S \\ C_4^S \end{Bmatrix} \times \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.17a})$$

$$\begin{Bmatrix} T_{31}^A \\ T_{33}^A \\ -q_3^A \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} V_{z,1}^A \\ V_{z,3}^A \\ V_{z,4}^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\zeta_1 X_3) q_{11}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) q_{13}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) q_{14}^+ \\ i \sin(\zeta_1 X_3) q_{31}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) q_{33}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) q_{34}^+ \\ \cos(\zeta_1 X_3) q_{41}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) q_{43}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) q_{44}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^A \\ C_3^A \\ C_4^A \end{Bmatrix} \times \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.17b})$$

針對一法向量為  $X_1$  方向( $\mathbf{X}$ )之表面，改寫(3.68a, b)式可得

$$\begin{Bmatrix} T_{11}^S \\ T_{13}^S \\ -q_1^S \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} V_{x,1}^S \\ V_{x,3}^S \\ V_{x,4}^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\zeta_1 X_3) q_{x,11}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) q_{x,13}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) q_{x,14}^+ \\ i \sin(\zeta_1 X_3) q_{x,31}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) q_{x,33}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) q_{x,34}^+ \\ \cos(\zeta_1 X_3) q_{x,41}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) q_{x,43}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) q_{x,44}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^S \\ C_3^S \\ C_4^S \end{Bmatrix} \times \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.18a})$$

$$\begin{Bmatrix} T_{11}^A \\ T_{13}^A \\ -q_1^A \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} V_{X,1}^A \\ V_{X,3}^A \\ V_{X,4}^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i \sin(\zeta_1 X_3) q_{X,11}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) q_{X,13}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) q_{X,14}^+ \\ \cos(\zeta_1 X_3) q_{X,31}^+ & \cos(\zeta_3 X_3) q_{X,33}^+ & \cos(\zeta_4 X_3) q_{X,34}^+ \\ i \sin(\zeta_1 X_3) q_{X,41}^+ & i \sin(\zeta_3 X_3) q_{X,43}^+ & i \sin(\zeta_4 X_3) q_{X,44}^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^A \\ C_3^A \\ C_4^A \end{Bmatrix} \times \exp[i(\xi X_1 - \omega t)]. \quad (\text{A.18b})$$

已知  $p_{41}^+ = q_{41}^+ = q_{X,41}^+ = 0$ ，利用上述(A.14a, b)式有關  $T_{31}$ 、 $T_{33}$  與  $-q_3$  之結果，配合平板的上下自由邊界條件，可推導出對稱與反對稱模態的頻散方程式  $\Omega_{\parallel}^{S,A}(\xi, \omega)$ 。再者，當  $\xi = \zeta_S$  時，已知  $q_{11}^+ = q_{33}^+ = q_{34}^+ = 0$  及  $(q_{14}^+ q_{43}^+ - q_{13}^+ q_{44}^+) \neq 0$ ，頻散方程式  $\Omega_{\parallel}^{S,A}(\xi, \omega)$  可簡化獲得 Lamé 模態的滿足條件。因此，對稱模態(S)的推導細節如下所示：

$$\begin{aligned} & + q_{44}^+ \cdot [\cot(\zeta_{QL} h/2) q_{11}^+ q_{33}^+ - \cot(\zeta_S h/2) q_{31}^+ q_{13}^+] \\ & - q_{43}^+ \cdot [\cot(\zeta_{Qth} h/2) q_{11}^+ q_{34}^+ - \cot(\zeta_S h/2) q_{31}^+ q_{14}^+] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} & [\cot(\zeta_{QL} h/2) q_{33}^+ q_{44}^+ - \cot(\zeta_{Qth} h/2) q_{34}^+ q_{43}^+] q_{11}^+ \\ & + \cot(\zeta_S h/2) (q_{14}^+ q_{43}^+ - q_{13}^+ q_{44}^+) q_{31}^+ = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19}')$$

$$\text{當 } \xi = \zeta_S : \quad \cot(\zeta_S h/2) = 0 \quad \text{或} \quad \cos(\zeta_S h/2) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\Rightarrow \quad \xi \cdot h = (n + \frac{1}{2}) \cdot 2\pi \quad \text{或} \quad k \cdot h = n + \frac{1}{2} \quad (\text{A.21})$$

$$\Rightarrow \quad \nu = h / (n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.22})$$

$$\Rightarrow \quad f \cdot h = (n + \frac{1}{2}) \cdot c_{\text{Lame}} = (n + \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{2} c_S \quad (\text{A.23})$$

同理，反對稱模態(A)的推導細節如下所示：

$$\begin{aligned} & + q_{44}^+ \cdot [\tan(\zeta_{QL} h/2) q_{11}^+ q_{33}^+ - \tan(\zeta_S h/2) q_{31}^+ q_{13}^+] \\ & - q_{43}^+ \cdot [\tan(\zeta_{Qth} h/2) q_{11}^+ q_{34}^+ - \tan(\zeta_S h/2) q_{31}^+ q_{14}^+] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} & [\tan(\zeta_{QL} h/2) q_{33}^+ q_{44}^+ - \tan(\zeta_{Qth} h/2) q_{34}^+ q_{43}^+] q_{11}^+ \\ & + \tan(\zeta_S h/2) (q_{14}^+ q_{43}^+ - q_{13}^+ q_{44}^+) q_{31}^+ = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.24}')$$

$$\text{當 } \xi = \zeta_S : \quad \tan(\zeta_S h/2) = 0 \quad \text{或} \quad \sin(\zeta_S h/2) = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\Rightarrow \quad \xi \cdot h = m \cdot 2\pi \quad \text{或} \quad k \cdot h = m \quad (\text{A.26})$$

$$\Rightarrow \quad \nu = h / m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.27})$$

$$\Rightarrow \quad f \cdot h = m \cdot c_{\text{Lame}} = m \cdot \sqrt{2} c_S \quad (\text{A.28})$$

上述(A.21)與(A.26)二式可稱為在波數( $k$ )與頻率( $f$ )之頻散關係圖中發生 Lamé 模態的滿足條件，並由此一條件可發現熱彈波會在平板厚度方向產生共振。以厚度方向來看，參考(A.22)與(A.27)二式所示，在對稱 Lamé 模態會產生波長為  $h/(n+\frac{1}{2})$  的駐波，而在反對稱 Lamé 模態會產生波長為  $h/m$  的駐波，其模態之振型分別如圖 4.10 所示。(A.23)與(A.28)二式則分別代表發生對稱與反對稱 Lamé 模態時的頻率大小。此外，根據矩陣  $\mathbb{P}^\pm$ 、 $\mathbb{Q}_X^\pm$  與  $\mathbb{Q}_Z^\pm$  的元素，此處的(A.12)、(A.13)與(14)式與附錄 1 的(A.4a-c)式，兩者的推導皆會獲得相同結果，同理，以下推導亦同。

最後，亦可利用(A.14a-b)式配合平板的邊界條件可推導出  $\{C_1^{S,A}, C_3^{S,A}, C_4^{S,A}\}^T$  的係數比例關係。假設  $\xi = \zeta_s$  時，我們可利用已知的條件，以及(A.20)與(A.25)式之結果，推導簡化(A.16a, b)、(A.17a, b)與(A.18a, b)式，對稱模態(S)的結果如下所示：

$$\begin{Bmatrix} u_1^S \\ u_3^S \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} -\cos(\zeta_1 X_3) \\ i \sin(\zeta_1 X_3) \end{Bmatrix} p_{31}^+ C_1^S \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.29a})$$

$$\begin{Bmatrix} T_{11}^S \\ T_{33}^S \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} \cos(\zeta_1 X_3) q_{31}^+ C_1^S \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.29b})$$

$$\Delta\Theta^S = T_{13}^S = q_3^S = q_1^S = 0. \quad (\text{A.29c})$$

同理，反對稱模態(S)的結果如下所示：

$$\begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_3^A \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} -i \sin(\zeta_1 X_3) \\ \cos(\zeta_1 X_3) \end{Bmatrix} p_{31}^+ C_1^A \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.30a})$$

$$\begin{Bmatrix} T_{11}^A \\ T_{33}^A \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} i \sin(\zeta_1 X_3) q_{31}^+ C_1^A \exp[i(\xi X_1 - \omega t)], \quad (\text{A.30b})$$

$$\Delta\Theta^A = T_{13}^A = q_3^A = q_1^A = 0. \quad (\text{A.30c})$$

由(A.29c)與(A.30c)式發現當 Lamé 模態發生時，平板內部的溫度變化  $\Delta\Theta$  為零，而且無熱能傳輸 ( $q_3 = q_1 = 0$ )，以及平板中各質點所受的剪應力  $T_{13}$  皆為零。由(A.29a)與(A.30a)式可知單位體積變化  $dV_0$  為零 ( $u_{1,1} + u_{3,3} = 0$ )。由(A.29b)與(A.30b)式可知只有兩個方向的軸向應力正負交互變換 ( $T_{11} = -T_{33}$ )。因此，可以說當 Lamé 模態發生時，平板內振動主要是由體積的膨脹收縮所造成，而且在這過程中體積變化為零以及能量轉換過程不會因熱的作用而消散。

在平板的  $X_1$  方向上，假設在一個有限距離(或波長)內會發生共振傳遞現象，為實現此一駐波形成之目的，須滿足的情況為：將彈性波造成「往右」與「往左」傳遞的應力疊加並令其為零。分別考慮(A.29b)與(A.30b)式的應力表示，經過推導證實了此一有限距離(或波長)與(A.22)與(A.27)式的結果一致。參考如圖 4.10 所示之模態振型，亦發現水平方向共振傳遞之駐波與厚度方向共振之駐波的波長相同，而且，可明顯地發現每一邊長為  $1/2$  波長之正方形格子在共振時的體積變化是為零，即為等體積變化。



### 附錄 3 表面受理想液體負載之平板導波的特徵方程式

回顧第 5.1 節的理論模型，將黏滯性液體設為理想液體，忽略其動態黏滯係數，即  $\eta_f = 0$ ，材料係數定義為  $c_{11}^f = c_{13}^f = \kappa_f$  與  $c_{55}^f = 0$ 。再加上在理想液體中只有體積的膨脹收縮且不會出現剪力作用，即振幅大小  $C_{5f}^\pm = 0$  以及勢函數  $\psi_f = 0$ 。根據(5.13)與(5.14)式所示，在  $(\omega, \xi)$  域的位移  $u_I^f$  與應力  $\sigma_{IJ}^f$  ( $I, J = 1, 3$ ) 可改寫為

$$u_1^f(\xi, X_3, \omega) = i\xi (C_{1f}^+ e^{i\zeta_{1f}X_3} + C_{1f}^- e^{-i\zeta_{1f}X_3}), \quad (\text{A.31a})$$

$$u_3^f(\xi, X_3, \omega) = i\zeta_{1f} (C_{1f}^+ e^{i\zeta_{1f}X_3} - C_{1f}^- e^{-i\zeta_{1f}X_3}), \quad (\text{A.31b})$$

$$T_{11}^f(\xi, X_3, \omega) = -c_{11}^f \xi^2 (C_{1f}^+ e^{i\zeta_{1f}X_3} + C_{1f}^- e^{-i\zeta_{1f}X_3}), \quad (\text{A.32a})$$

$$T_{13}^f(\xi, X_3, \omega) = 0, \quad (\text{A.32b})$$

$$T_{33}^f(\xi, X_3, \omega) = T_{11}^f(\xi, X_3, \omega). \quad (\text{A.32c})$$

因此，在(5.16)式中矩陣  $\mathbf{Q}_1^\pm$  與  $\tilde{\mathbf{Q}}_1^\pm$  內元素

$$q_{11f}^\pm = q_{31f}^\pm = q_{13f}^\pm = \tilde{q}_{11f}^\pm = \tilde{q}_{31f}^\pm = \tilde{q}_{33f}^\pm = 0, \quad (\text{A.33a})$$

$$q_{33f}^\pm = \tilde{q}_{13f}^\pm = -c_{11}^f \xi^2 = -\rho_f \omega^2. \quad (\text{A.33b})$$

接著，鑑於理想液體的特性，液體與平板兩者間的界面 ( $X_3 = 0$ ) 上，只滿足垂直於界面 (沿  $X_3$  方向上) 的正向位移與正向曳力連續，以及兩者在平行於界面 (沿  $X_1$  方向上) 的切向位移存在一位移差  $u_0$ 。加上液體上表面 ( $X_3 = -h$ ) 邊界之正向曳力為零，以及固體下表面 ( $X_3 = H$ ) 邊界之曳力為零。上述關係可整理如下：

$$\text{在 } X_3 = -h : \quad T_{33}^f(-h) = 0. \quad (\text{A.34})$$

$$\text{在 } X_3 = 0 : \quad u_1^f(0) - u_1(0) = -u_0, \quad u_3^f(0) - u_3(0) = 0, \quad (\text{A.35a, b})$$

$$T_{31}^f(0) - T_{31}(0) = 0, \quad T_{33}^f(0) - T_{33}(0) = 0. \quad (\text{A.35a, b})$$

$$\text{在 } X_3 = H : \quad T_{31}(H) = 0, \quad T_{33}(H) = 0. \quad (\text{A.36a, b})$$

配合上述邊界條件，則(5.24)式可改寫為

$$\begin{bmatrix} -q_{33f}^+ e^{-i\zeta_{Lf}h} & -q_{33f}^- e^{i\zeta_{Lf}h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{13f}^+ & p_{13f}^- & -p_{11}^+ & -p_{13}^+ & -p_{11}^- & -p_{13}^- \\ p_{33f}^+ & p_{33f}^- & -p_{31}^+ & -p_{33}^+ & -p_{31}^- & -p_{33}^- \\ 0 & 0 & -q_{11}^+ & -q_{13}^+ & -q_{11}^- & -q_{13}^- \\ q_{33f}^+ & q_{33f}^- & -q_{31}^+ & -q_{33}^+ & -q_{31}^- & -q_{33}^- \\ 0 & 0 & q_{11}^+ e^{i\zeta_s H} & q_{13}^+ e^{i\zeta_L H} & q_{11}^- e^{-i\zeta_s H} & q_{13}^- e^{-i\zeta_L H} \\ 0 & 0 & q_{31}^+ e^{i\zeta_s H} & q_{33}^+ e^{i\zeta_L H} & q_{31}^- e^{-i\zeta_s H} & q_{33}^- e^{-i\zeta_L H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{Lf}^+ \\ C_{Lf}^- \\ C_S^+ \\ C_L^+ \\ C_S^- \\ C_L^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

在上述(A.37)式中可依據待定係數不為零的條件，獲得表面受理想液體負載之平板導波的特徵方程式 $\Omega(\omega, \xi)$ 如下所示

$$\Omega(\omega, \xi) = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta_{Lf}h} & e^{+i\zeta_{Lf}h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\zeta_{Lf} & -i\zeta_{Lf} & -i\xi & -i\zeta_L & -i\xi & i\zeta_L \\ 0 & 0 & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) & 2\xi\zeta_L & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) & -2\xi\zeta_L \\ -\frac{\rho_i}{\rho} \xi_s^2 & -\frac{\rho_i}{\rho} \xi_s^2 & 2\xi\zeta_s & (\xi_s^2 - 2\xi^2) & -2\xi\zeta_s & (\xi_s^2 - 2\xi^2) \\ 0 & 0 & (\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{i\zeta_s H} & -2\xi\zeta_L e^{i\zeta_L H} & (\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{-i\zeta_s H} & 2\xi\zeta_L e^{-i\zeta_L H} \\ 0 & 0 & -2\xi\zeta_s e^{i\zeta_s H} & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{i\zeta_L H} & 2\xi\zeta_s e^{-i\zeta_s H} & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{-i\zeta_L H} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{A.38})$$

以及由不同待定係數所組成的位移差 $u_0(\omega, \xi)$ 表示為

$$u_0(\omega, \xi) = -i\zeta_s (C_S^+ - C_S^-) + i\xi (C_L^+ + C_L^-) - i\xi (C_{Lf}^+ + C_{Lf}^-). \quad (\text{A.39})$$

再者，將(A.38)式中矩陣右下方 $5 \times 4$ 部分的行列式可拆解成兩個部分，第一部分是考慮一彈性平板的上下表面( $X_3 = 0$ 與 $H$ )皆為自由(free)邊界，即 $T_{31}(0) = T_{33}(0) = T_{31}(H) = T_{33}(H) = 0$ ，其特徵方程式 $\Omega_{f-f}(\omega, \xi)$ 可寫為

$$\Omega_{f-f}(\omega, \xi) = \begin{pmatrix} -(\xi_s^2 - 2\xi^2) & 2\xi\zeta_L & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) & -2\xi\zeta_L \\ 2\xi\zeta_s & (\xi_s^2 - 2\xi^2) & -2\xi\zeta_s & (\xi_s^2 - 2\xi^2) \\ (\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{i\zeta_s H} & -2\xi\zeta_L e^{i\zeta_L H} & (\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{-i\zeta_s H} & 2\xi\zeta_L e^{-i\zeta_L H} \\ -2\xi\zeta_s e^{i\zeta_s H} & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{i\zeta_L H} & 2\xi\zeta_s e^{-i\zeta_s H} & -(\xi_s^2 - 2\xi^2) e^{-i\zeta_L H} \end{pmatrix}.$$

(A.40a)

第二部分是考慮平板的上表面( $X_3 = 0$ )為滑動(slip)邊界，下表面( $X_3 = H$ )為自由邊界，即  $u_3(0) = T_{31}(0) = T_{31}(H) = T_{33}(H) = 0$ ，其特徵方程式  $\Omega_{s-f}(\omega, \xi)$  可寫為

$$\Omega_{s-f}(\omega, \xi) = \begin{pmatrix} -i\xi & -i\zeta_L & -i\xi & i\zeta_L \\ -(\xi_S^2 - 2\xi^2) & 2\xi\zeta_L & -(\xi_S^2 - 2\xi^2) & -2\xi\zeta_L \\ \hline (\xi_S^2 - 2\xi^2)e^{i\zeta_S H} & -2\xi\zeta_L e^{i\zeta_L H} & (\xi_S^2 - 2\xi^2)e^{-i\zeta_S H} & 2\xi\zeta_L e^{-i\zeta_L H} \\ -2\xi\zeta_S e^{i\zeta_S H} & -(\xi_S^2 - 2\xi^2)e^{i\zeta_L H} & 2\xi\zeta_S e^{-i\zeta_S H} & -(\xi_S^2 - 2\xi^2)e^{-i\zeta_L H} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.40b})$$

引用上述(A.40a, b)二式，由(A.38)式所展開之特徵方程式  $\Omega(\omega, \xi) = 0$  可簡化為

$$\begin{aligned} & e^{-i\zeta_{L_f} h} (-i\zeta_{L_f} \Omega_{f-f} - \frac{\rho_f}{\rho} \xi_S^2 \Omega_{s-f}) - e^{+i\zeta_{L_f} h} (i\zeta_{L_f} \Omega_{f-f} - \frac{\rho_f}{\rho} \xi_S^2 \Omega_{s-f}) = 0 \\ \Rightarrow & \cos(\zeta_{L_f} h) \cdot i\zeta_{L_f} \Omega_{f-f} - i \sin(\zeta_{L_f} h) \cdot \frac{\rho_f}{\rho} k_S^2 \Omega_{s-f} = 0 \\ \Rightarrow & i\zeta_{L_f} \Omega_{f-f} + \frac{\rho_f}{\rho} k_S^2 \Omega_{s-f} \cdot [-i \tan(\zeta_{L_f} h)] = 0 \\ \Rightarrow & \boxed{\eta_{L_f} \Omega_{f-f} + \frac{\rho_f}{\rho} k_S^2 \Omega_{s-f} \cdot \tanh(\eta_{L_f} h) = 0}, \quad (\text{A.41}) \end{aligned}$$

其中  $\eta_{L_f} = i\zeta_{L_f}$ ，加上已知液體厚度  $h$  範圍為  $0$  至  $\infty$ ，則可得  $0 \leq \tanh(\eta_{L_f} h) \leq 1$ 。因此，當厚度  $h \rightarrow 0$ ，代表忽略了平板上表面負載之液體，可得  $\tanh(\eta_{L_f} h) = 0$ ，則(A.41)式可寫為  $\Omega_{f-f} = 0$ ，如(A.40a)式所示。反之，當厚度  $h \rightarrow \infty$ ，代表平板上表面負載之液體為一半無窮域，可得  $\tanh(\eta_{L_f} h) = 1$ ，而(A.41)式可簡化為

$$\eta_{L_f} \Omega_{f-f} + \frac{\rho_f}{\rho} k_S^2 \Omega_{s-f} = 0. \quad (\text{A.42})$$

最後，再利用複數尋根方法求得相速度頻散與波數衰減之關係，並與黏滯性液體的結果作比較討論。

另外一方面，為了瞭解平板上表面負載之液體層的厚度大小對相速度頻散曲線變化的影響，可藉由平板與液體兩者間剛性的觀點來作分析。由於液體層的材料特性相較於平板來說是比較柔軟，可將平板的上下表面皆可假設為自由邊界，並獲得其特徵方程式  $\Omega_{f-f} = 0$ ，如(A.40a)式所示。此外，液體層的上表面假設為自由邊界，而下表面可假設為沿  $X_1$  方向運動的滑動邊界，即  $T_{31}^f(-h) = T_{33}^f(-h) = u_3^f(0) = T_{31}^f(0) = 0$ 。再引用(A.31b)與(A.32b, c)式，可獲得其特徵方程式為

$$\cos(\zeta_{L_f} h) = 0 \quad \text{或} \quad \zeta_{L_f} h = (m + \frac{1}{2})\pi. \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.43})$$

根據單一平板導波的波傳特徵方程式  $\Omega_{f,f} = 0$ ，如(A.40a)式所示，藉由相速度頻散曲線可得知，除  $A_0$  與  $S_0$  模態外，其餘模態的截止頻率(cut-off frequency)  $f_{\text{cut-off}}$  會落在

$$\begin{aligned} f_{\text{cut-off}} H &= c_{\square} \cdot n, & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= c_{\square} \cdot (m + \frac{1}{2}), & (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

其中  $\square$  代表 S 與 L，其結果如表 5.4 中  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  與  $\mathbf{b}_1$  所示。再者，根據在單一液體層傳遞的波傳特徵方程式，如(A.43)式所示，可獲得其截止頻率  $f_{\text{cut-off}}$  為

$$f_{\text{cut-off}} h = c_{L_f} \cdot (m + \frac{1}{2})/2. \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.45})$$

改變液體層厚度  $h$ ，其結果如表 5.4 中  $\mathbf{c}_1$ - $\mathbf{c}_3$ 、 $\mathbf{d}_1$ - $\mathbf{d}_5$  與  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_8$  所示。因此，利用數值方法所獲得平板與液體層的相速度頻散曲線，再配合上述(A.44)與(A.45)二式的整理結果，瞭解相速度頻散曲線受到液體層厚度  $h$  改變的影響趨勢。

