

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

挫屈梁在側向負荷下的幾何非線性分析

Geometrical nonlinear analysis of buckled beams under lateral
loadings

研究生：蔡明旭

指導教授：蕭國模 博士

中華民國一百年七月

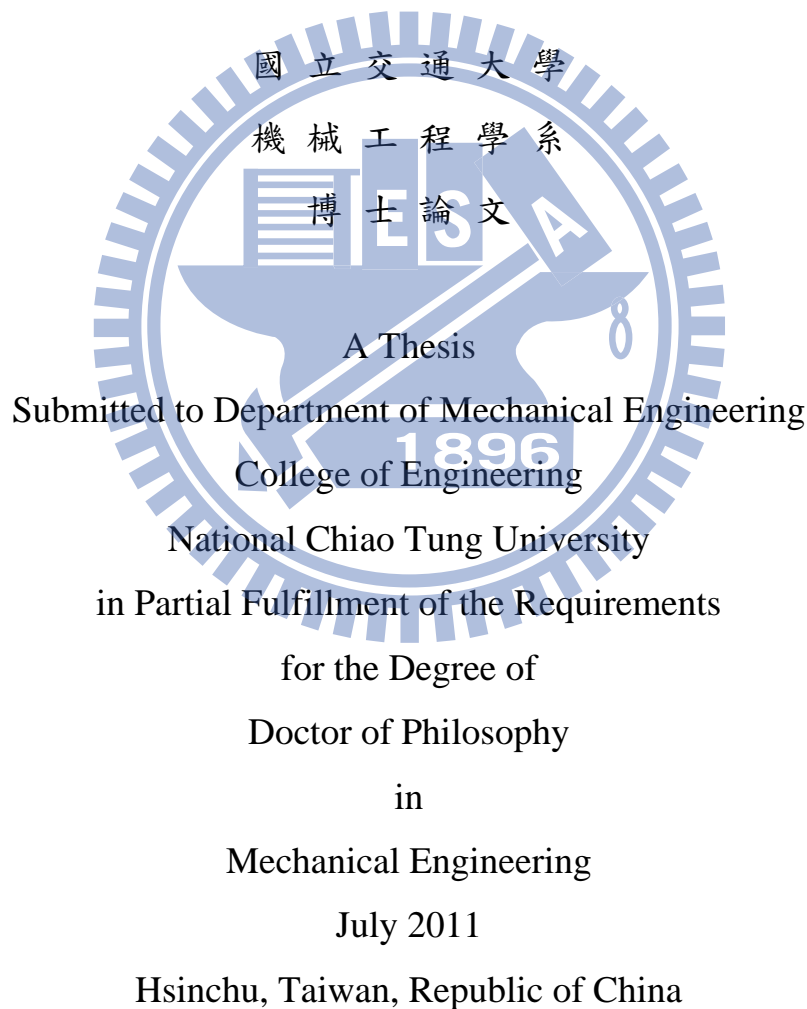
挫屈梁在側向負荷下的幾何非線性分析
Geometrical nonlinear analysis of buckled beams under lateral
loadings

研 究 生：蔡明旭

Student：Ming-hsu Tsai

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao



中華民國一百年七月

挫屈梁在側向負荷下的幾何非線性分析

Geometrical nonlinear analysis of buckled beams under lateral loadings

研究生：蔡明旭

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系博士班



挫屈梁在本文中指的是一細長直梁受到超過其臨界端點軸向壓縮位移形成，本研究的第一個目的是探討挫屈梁的初始變形與自然振動，第二個研究目的是探討雙端拱起固定角度的挫屈梁受到側向負荷時的幾何非線性行為，本文中使用方法的是共旋轉有限元素法與數值程序。

本文利用非線性梁理論的一致線性化、d'Alembert 原理和虛功原理在當前的元素座標上推導梁元素的節點變形力和節點慣性力，為了考慮軸向與側向變形間的耦合，在推導內力時保留至應變的二次項，將元素節點內力對元素節點變形參數與節點加速度微分，即可得到元素切線剛度矩陣與質量矩陣。

將挫屈梁的系統運動方程式用泰勒級數在穩態變形的位置展開，取到一次項，即為線性振動的運動方程式。

本文使用基於弧長法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性平衡方

式，探討不同細長比之挫屈梁在不同端點壓縮位移的初始變形，同時以子空間迭代法求得挫屈梁的自然振動頻率與其對應的振動模態，本文使用在平衡方程式中增加臨界條件的延伸系統來追蹤在不同軸向壓縮與不同雙端拱起角度下的挫屈梁受到側向負荷的臨界點的摺線，並以二分法求摺線的轉折點，來分析不同邊界條件下各種臨界點發生的門檻。



Geometrical nonlinear analysis of buckled beams under lateral loadings

Student : Ming-hsu Tsai

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

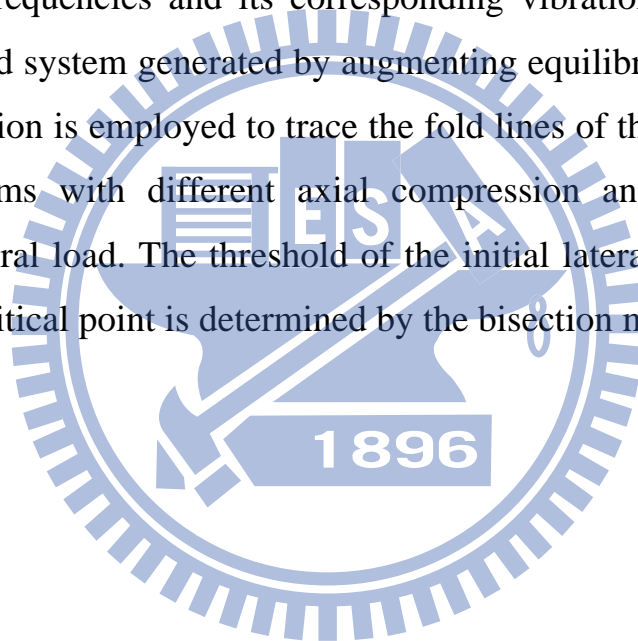
The buckled beam considered here is a slender and originally straight beam compressed axially beyond the critical buckling axial displacement. The first objective of this paper is to investigate the deformed configuration and free vibration of the buckled beam. The second objective of this paper is to investigate the geometrically nonlinear behavior of clamped buckled beams with both ends fixed at an adjustable angle subjected to lateral load. The co-rotational finite element formulation is used here. A numerical procedure is proposed here.

The element deformation nodal forces and inertia nodal forces are systematically derived by consistent linearization of the fully geometrically non-linear beam theory using the d'Alembert principle and the virtual work principle in the current rotating element coordinates. In this paper the terms up to the second order of deformation parameters and their spatial derivatives are retained in element nodal forces. The element tangent stiffness matrix and mass matrix may be obtained by differentiating the element nodal force vector with respect to the element nodal parameters and their second time derivative,

respectively.

The governing equations for linear vibration are obtained by the first order Taylor series expansion of the equation of motion at the static equilibrium position of the buckled beam.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations to investigate the post-buckling configuration of clamped beams with different slenderness ratios under different axial compression. The subspace iterative method is used here to find the natural frequencies and its corresponding vibration mod of buckling beam. An extended system generated by augmenting equilibrium equations with a criticality condition is employed to trace the fold lines of the critical points for the buckling beams with different axial compression and adjustable angle subjected to a lateral load. The threshold of the initial lateral deflection for the existence of the critical point is determined by the bisection method.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這八年期間的指導與教誨，使本論文得以順利完成，蕭老師在研究上嚴謹的態度，使我受益良多，在此致上最高的敬意及謝意。也感謝林文一老師、林世章老師、尹慶中老師、蔡佳霖老師及鄭文雅老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝實驗室陳弘虎學長及黃智麟學姐在研究上的協助與照顧，以及學弟劉峰成、李政道、陳致中、劉宗帆、楊禮龍、黃孝衡、楊水勝、林育丞、顏宏儒、周裕淳、蔡秉宏、林運融、林寬政、翁林甫、黃楚璋、盧致群及學妹許彤羽在各方面的幫助。

感謝大學同學王傳盛，社團學弟徐明頤、張嘉修、謝泓文、郭泰鈞、卓琮閔的陪伴與協助。

感謝父母親、姊姊及所有關心我的親人、朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給所有關心我的人。

目 錄

中文摘要	I
英文摘要	III
誌謝	V
目錄	VI
圖目錄	VIII
第一章 導論	1
第二章 理論推導	6
2.1 基本假設	6
2.2 座標系統描述	6
2.3 梁元素的變形描述	7
2.4 梁元素的節點內力	13
2.5 元素的剛度矩陣	19
2.6 元素的質量矩陣	20
2.7 系統平衡方程式	21
第三章 數值方法及程序	22
3.1 數值方法	23
3.2 數值程序	31
第四章 挫屈梁的初始變形及自由振動分析	37
4.1 挫屈梁的初始變形	38
4.2 挫屈梁的自然振動頻率及振態	42
第五章 挫屈梁受側向負荷之幾何非線性分析	46
5.1 挫屈梁受集中負荷之非線性分析	46
5.2 挫屈梁受集中力矩之非線性分析	49

第六章 彈性固端曲梁受中點側力的穩定性分析.....	51
6.1 曲梁之初形與其受側向負載負載的無因次化分析.....	53
6.2 受中點側力之曲梁在完整的平衡路徑上之臨界狀態.....	55
第七章 結論.....	62
參考文獻.....	64
附圖.....	69



圖 目 錄

圖 1-1	直梁一端受軸向壓縮及側向挫屈示意圖	69
圖 1-2	挫屈梁受側向集中力 P 的位移-負荷曲線圖	70
圖 2-1	元素座標系統及總體座標系統關係圖	71
圖 2-2	梁的變形圖	71
圖 4-1	固端梁的挫屈模態	72
圖 4-2	挫屈梁的 $\frac{\delta}{h} - \zeta$ 曲線	73
圖 4-3	挫屈梁的無因次側向位移 $\frac{v(x)}{\delta}$ 分佈圖	74
圖 4-4	挫屈梁的無因次軸向位移 $\frac{-u(x)}{\Delta}$ 分佈圖	75
圖 4-5	挫屈梁的無因次端點軸向反力 P/P_{CR} -中點側向位移 δ/L_T 曲線	76
圖 4-6	挫屈梁的無因次端點軸向正向力 $F(x)/P_{CR} - x/L_T$ 的分佈曲線	77
圖 4-7	固端梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 曲線	78
圖 4-8	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h \leq 3, i=1,2$)	79
圖 4-9	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h \leq 8, i=1,7$)	80
圖 4-10	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h \leq 200, i=1,6$)	81
圖 4-11	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位	

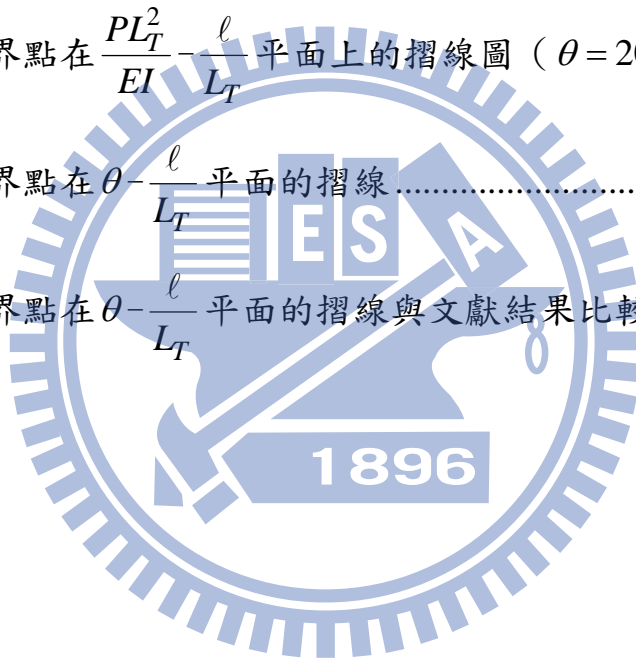
	移 δ/L_T 的曲線 ($\delta/L_T < 0.3, i=1,6$)	82
圖 4-12	挫屈梁的前六個振動模態	
	$(\delta/h=1, \frac{\delta}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1}, \eta = 5818.96)$	83
圖 4-13	挫屈梁的前六個振動模態	
	$(\delta/h=5, \frac{\delta}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1}, \eta = 5818.96)$	84
圖 4-14	挫屈梁的前八個振動模態	
	$(\eta = 500, 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 15, X_2 \text{ 分量})$	85
圖 4-15	挫屈梁的前八個振動模態	
	$(\eta = 500, 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 15, X_1 \text{ 分量})$	86
圖 4-16	挫屈梁的前八個振動模態	
	$(\eta = 10000, 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 15, X_2 \text{ 分量})$	87
圖 4-17	挫屈梁的前八個振動模態	
	$(\eta = 10000, 20 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 300, X_2 \text{ 分量})$	88
圖 4-18	挫屈梁的前八個振動模態	
	$(\eta = 10000, 20 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 300, X_1 \text{ 分量})$	89
圖 5-1	挫屈梁結構中點 C 受側向集中力 P 或集中力矩 M 的結構圖...	90
圖 5-2	挫屈梁受側向集中力 P 的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線圖 ($\zeta = 1.7, 2.2, 3$)..	91
圖 5-3	挫屈梁受側向負荷在多維度空間中平衡路徑與摺線關係圖	92
圖 5-4	挫屈梁的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線及其極限點	93

圖 5-5	挫屈梁的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \zeta$ 曲線及其極限點	94
圖 5-6	挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 10$)	95
圖 5-7	挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 10$)	96
圖 5-8	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 80$)	97
圖 5-9	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 80$)	98
圖 5-10	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)	99
圖 5-11	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)	100
圖 5-12	挫屈梁受集中力矩 M 的 $\frac{ML_T}{EI} - \frac{v_C}{h}$ 曲線圖	101
圖 5-13	挫屈梁受集中力矩 M 的結構變形圖	102
圖 5-14	挫屈梁受集中力矩 M 的 $\frac{ML_T}{EI} - \frac{u_C}{h}$ 曲線圖	103
圖 5-15	挫屈梁受集中力矩 M 的 $\frac{ML_T}{EI} - \theta_C$ 曲線圖	104
圖 6-1	跨度為 l 、兩端轉角為 θ 之曲梁的初始變形	105
圖 6-2	臨界點在 $\theta - l/L_T$ 平面的摺線(文獻[33]的實驗結果)	106
圖 6-3	臨界點在 $\theta - l/L_T$ 平面的摺線(文獻[32]的分析結果)	107

圖 6-4	挫屈梁之無因次側向位移 $\frac{v(x)}{h}$ 分佈圖 ($\delta/h = 3$ 、 $\theta = 0^\circ$).....	108
圖 6-5	曲梁之無因次側向位移 $\frac{v(x)}{h}$ 分佈圖 ($\frac{\delta}{h} = 3$ ， $\theta = 0.1^\circ$).....	109
圖 6-6	曲梁的無因次側向位移 $\frac{v(x)}{L_T}$ 分佈圖 ($\ell/(L_T - \Delta_{CR}) = 0.998945$ ， $\theta = 0.1^\circ$).....	110
圖 6-7	曲梁的無因次側向位移 $\frac{v(x)}{L_T}$ 分佈圖 ($\ell/L_T = 0.95$ ， $\theta = 20^\circ$).....	111
圖 6-8	極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{\ell}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖 ($\theta = 0.1^\circ$).....	112
圖 6-9	極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{\ell}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖 ($\theta = 5^\circ$).....	113
圖 6-10	極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{\ell}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$).....	114
圖 6-11	極限點摺線的轉折點 L^T 在 $\theta - \frac{\ell}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面上的摺線圖.....	115
圖 6-12	極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面上的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$).....	116
圖 6-13	極限點與其轉折點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面的摺線圖.....	117
圖 6-14	分歧點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面上的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$).....	118
圖 6-15	分歧點與其轉折點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面的摺線圖.....	119
圖 6-16	分歧點、極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面上的摺線與其切點、轉折點 ($\theta = 20^\circ$).....	120

圖 6-17	分歧點摺線上對稱及反對稱振態之自然振動頻率的平方 ω_S^2 與 ω_A^2 -跨度 l/L_T 的變化圖 ($\theta = 20^\circ$)	121
圖 6-18	分歧點、極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線與其切點、轉折點 ($\theta = 76^\circ$)	122
圖 6-19	轉折點 L^T 、 B_U^T 、 B_D^T 、 B^L 在 $\theta - l/L_T$ 平面的摺線	123
圖 6-20	曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.35$) ...	124
圖 6-21	曲梁的變形圖 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.35$)	125
圖 6-22	曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.44$) ...	126
圖 6-23	曲梁的變形圖 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.44$)	127
圖 6-24	曲梁中點 C 的負荷-側向高度曲線 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.35 \sim 0.45$)	128
圖 6-25	次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \delta_C/L_T$ 平面上的摺線 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.35 \sim 0.45$)	129
圖 6-26	次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.41 \sim 0.42$)	130
圖 6-27	曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{l}{L_T} = 0.417$)	131
圖 6-28	對應圖 6-26 各點的最小自然振動頻率之振態	132

圖 6-29	次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面上的摺線 ($\theta = 20^\circ$ 、 $\theta = 60^\circ$)	133
圖 6-30	轉折點 A^L 、 A^R 在 $\theta - \frac{\ell}{L_T}$ 平面上的摺線	134
圖 6-31	曲梁中點 C 的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \delta_C/L_T$ 曲線圖 ($\theta = 20^\circ$ ， $\frac{\ell}{L_T} = 0.5 \sim 0.55$)	135
圖 6-32	各種臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{\ell}{L_T}$ 平面上的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$)	136
圖 6-33	各種臨界點在 $\theta - \frac{\ell}{L_T}$ 平面的摺線	137
圖 6-34	各種臨界點在 $\theta - \frac{\ell}{L_T}$ 平面的摺線與文獻結果比較	138



第一章 導論

本文中挫屈梁，指的是如圖 1-1 (a) 所示之細長直梁受到端點軸向位移 Δ 時，若壓縮量達到挫屈臨界值時，梁會發生側向挫屈，如繼續施加軸向壓縮，則該梁會如圖 1-1 (b) 所示以第一挫屈模態朝垂直於軸方向的側方向拱起[28,34,40,43]，其大小可以用梁中點的側向位移 δ 表示， δ 的大小與 Δ 有非線性的關係，通常很小的 Δ ，即可使此挫屈梁有很大的側向位移 δ 及旋轉[40]。

如圖 1-1 (b) 所示之挫屈梁在將其軸向兩端固定 (clamped-clamped) 後，再施加側向的負荷，這時梁的行為表現與曲梁類似，文獻上有很多關於曲梁的分析，其平衡路徑會受到側向拱起高度 δ 的影響，當 δ 較小時，其位移-負荷曲線存在如圖 1-2 所示之極限點 (limit point) (點 L_1^a, L_2^a) [42]，有跳躍挫屈 (snap through buckling) 的現象，且在同一負荷下存在兩個穩定的平衡位置 (bistable) [40]，當側向拱起高度 δ 較大時，其位移-負荷曲線存在如圖 1-2 所示之極限點 (點 L_1^b, L_2^b) 及分歧點 (bifurcation point) (點 B_1^b, B_2^b) [42]，若分歧點先出現，則先有分歧挫屈 (bifurcation buckling) 的現象。如圖 1-2 所示，在梁結構發生跳躍行為後 (不論是分歧點先出現或是極限點先發生)，其位移-負荷曲線在側向力為零時存在雙穩態，即梁結構存在兩個穩定平衡位置 (點 S_1, S_2^a 及點 S_1, S_2^b)，這種機械特性很廣泛的被運用。

微機電系統 (micro electro mechanical systems, MEMS) 常利用挫屈梁的動態或靜態挫屈後行為 (post-buckling behavior)，來設計或製造機械結構部分的元件，微機電在本質上是一種整合機械結構和電子線路的跨領域加工技術，主要可以分為感測器 (sensors) 與致動器 (actuators)，前者是泛指能將物理量 (例如量測機械、熱、生物、化學、光學和磁性等現象) 轉

換成電子訊號之電子式能量轉換器 (transducer)，致動器則相反，能將電能轉換成物理量，在挫屈梁拱起高度較低 (如 $\delta/h \leq 10$ ， h 是梁的斷面高度) 時，因為它的側向挫屈都很早發生，擁有容易跳躍的特性，常被應用在微小力的感測器[35]，例如門檻加速度開關 (threshold acceleration switches)，當拱起高度較高 (如 $\delta/h > 100$) 時，因為其撓曲剛度很小，在挫屈前側方向有較大的變形 (位移及旋轉) 空間，故可當大行程致動器的重要元件 [36-38,41]，像是光學快門 (optical shutters)、光學交換器 (optical crossbar switches)、微繼電器 (micro-relays)、微閥體 (micro-valves) [20] 等。

致動器與感測器在工作時，機械結構部分需要表現移動、定位，來控制或表現一些我們所需要的結果或目的，為了能達到預期的效果，在設計與分析時，必須能精確的預測及描述挫屈梁受力時的靜態與動態行為，包含側向挫屈負荷、挫屈後行為、結構變形、挫屈模態、振動模態等。

文獻[43]中，Tseng 等人以假設模態法，假設其側向振動位移為前兩個挫屈模態的組合，分析挫屈梁受大幅度基礎振動的非線性振動，並且用實驗驗證其分析結果，所使用的梁如圖 1-1，尺寸為 $L_T = 18in$ ， $h = 0.021in$ ， $b = 0.5in$ ，不過文獻中僅分析拱起高度很小 ($\delta/h \leq 1.5$) 的範圍，而且只有探討第一模態的振動，發現挫屈梁第一模態的非線性振動有超諧運動 (super harmonic motion, SPHM) 的現象。

文獻[34]中以 Runge-Kutta (RK-4) 的數值積分法解非線性運動方程式，來分析挫屈梁受到正弦均佈力的非線性動態反應，發現第一模態的非線性振動有 1. 挫屈位置的微小振動，2. 跳躍的混沌運動 (chaotic motion)，3. 二個挫屈位置間的跳躍路徑上大幅振動，[34]考慮的拱起高度為 $\delta/h \leq 2$ 。

文獻[35]分析二個中間固定的平行曲梁受側向負荷的位移，梁的形狀為直梁受軸力壓縮後之第一挫屈模態，文中假設其側向位移為直梁受軸力之各種挫屈模態組合，用模態分析與有限元素分析來模擬不同初始拱起高度

曲梁之側向負荷與中點位移的關係與挫屈後行為，用來預測、解釋、設計這種平行梁結構的雙穩態行為，分析尺寸為 $L_T = 3000\mu m$ ， $h = 10\mu m$ ， $b = 540\mu m$ ，拱起高度 $\delta = 60\mu m$ 的曲梁，同時與實驗結果互相印證。

文獻[31]考慮了曲梁製造時的初始殘留應力，分析梁受側向分佈力時的形狀變化，因為一個挫屈梁通常是直梁受軸向壓力製造，但是之前的文獻在分析原本製造形狀為曲梁時很少考慮殘留應力，文中考慮的梁形狀尺寸為 $L_T = 2000\mu m, 3000\mu m$ ， $h = 5\mu m$ ， $b = 10\mu m$ ，拱起高度 $\delta \leq 30\mu m$ ，探討曲梁的平衡路徑、跳躍行挫屈與雙平衡位置，同時也有與實驗結果比較，結果相當吻合。

文獻[38]將 $L_T = 560\mu m$ ， $h = 0.5\mu m$ ， $b = 590\mu m$ 的直梁軸向跨度壓縮到 $500\mu m$ ，拱起高度為 $\delta = 90.5\mu m$ ，再將支撐在其上的顯微鏡片旋轉 $\pm 15^\circ$ ，文中將挫屈梁視為非線性彈簧，用實驗測量及內插法求此非線性彈簧之位移負荷曲線，但是並沒有用理論分析或數值模擬挫屈梁的非線性行為。

文獻[4]分析拱起高度較高 ($\delta/h > 100$) 時的兩端固定挫屈梁，受到大幅度振動的動態行為，並且以微結構尺寸的實驗佐證，實驗的拱起高度達到 $\delta = 200h$ ，[4]中發現當挫屈梁受到大幅度振動時可會發在兩個平衡位置間生動態的跳躍現象，並且有簡諧 (simple harmonic motion, SHM) 與超諧運動，與實驗的對照相符，不過實驗本身只針對跳躍現象的發生與振動的頻率、震幅做比對，並沒有詳細的其他更詳細的數據對照。

在拱起高度較小 ($\delta/h \leq 10$) 的時候，梁挫屈前後的變形很小，故忽略梁的軸向位移的平衡方程式，在靜態行為時的分析結果相當準確，文獻上[15,18,31,35,40]也提供了分析與實驗結果的佐證，在動態分析的部分，文獻[34,43]中假設側向振動位移為前兩個挫屈模態的組合，得到的結果與實驗大致吻合，但是文中理論的推導只有在 $\delta/h \leq 2$ 的情形下，在更高的拱起高度下並沒有提供可靠的運動方程式與實驗對照。

當拱起高度較大 ($\delta/h \geq 100$) 時，文獻在靜態分析時仍然只考慮側向位移[4-6,15,18,28,31,34,35,40,41,43]，並沒有考慮到軸向位移在大拱起高度時可能不能忽略，在動態分析上仍然引用[34,43]的假設模態法，假設其側向振動位移為直梁受軸力之挫屈模態的組合（通常假設為前兩個挫屈模態的組合），且結構的軸向力為均勻分佈，但是大拱起高度的振動頻率與振動模態與挫屈前的直梁差異性非常大，與挫屈模態可能有更大的出入，假設模態法在 δ 很大時的適用性值得進一步探討。

本研究的主要目的為考慮幾何非線性，以有限元素法探討不同拱起高度 δ 之下的軸向、側向位移、軸力分佈與變化情形和變形過程中的振動模態，同時也分析挫屈梁在結構中點受側向集中負荷或集中力矩時結構的變形，驗證文獻[4-6,15,18,28,31,34,35,40,41,43]中關於假設模態法的適用範圍。本文也分析不同邊界條件時平衡路徑上的臨界點，這些臨界點可以對應位移或負荷連成曲線（如圖 5-3[12]），被稱為摺線（fold lines）或臨界子集合路徑（critical subset paths）[12-14]，這些摺線上的轉折點（turning points）也是跳躍行為發生的門檻，本文在計算時利用 Eriksson 的廣義增量迭代法[3,12-14]，增加約束條件到原本的平衡方程式中，形成延伸系統（extended system），直接計算挫屈點的摺線，省去當邊界邊界條件改變時重複計算平衡路徑的步驟，也配合二分法來尋找這些摺線的轉折點，研究負荷改變時挫屈點發生的門檻條件（例如拱起高度 δ 或結構細長比）。

在分析自然振動部分，自然振動的頻率方程式可視為一廣義的標準特徵值問題（generalized standard eigenvalue），本文以子空間迭代法（subspace iteration method）[2]解廣義的標準特徵值問題，追蹤受負荷過程中主要與次要平衡路徑上結構自然振動頻率與振動模態的變化，並比較振態與挫屈模態在不同 δ 的差異。

本文在第二章中先以梁變形前的形心軸之長度為獨立變數推導梁元

素，利用文獻[22-26]中的梁元素為基礎，再以虛功原理與有限元素法配合非線性梁理論的一致線性化 (consistent linearization)，推導梁元素節點慣性力和節點變形力，將元素的節點力轉到總體座標後組合成系統的非線性運動方程式，為了求得在梁的大變形情形下數值解的準確性，文中將在保留應變至二次項的情形下推導梁元素的剛度矩陣與變形節點內力。

在第三章中說明了梁結構在幾何非線性分析與挫屈行為的數值計算方法與程序，利用文獻[22-26,46]提出的非線性計算程序與第二章推導的剛度矩陣與元素內力，結合 Eriksson 的延伸系統[3,12-14]建立一個多階段的程式，來分別計算不同階段受負荷情形下的變形行為，在側向的跳躍式挫屈部分，使用系統的切線剛度矩陣的行列式值是否為零作為挫屈的判斷準則，並以挫屈模態當作擾動位移去進行次要平衡路徑的迭代[7,42]，得到完整的平衡路徑，在直接計算挫屈點與摺線時，文獻[28]中必須要取得挫屈模態（特徵向量）來進行迭代，但是在平衡路徑曲線變化很大的情形下，最後迭代的結果可能會收斂到與期望中不同類型的挫屈點，本文的改善方法是首先以子空間法選取需要的模態，並在迭代過程中隨時檢查模態的正確性，配合文獻[17,29]的 eigenanalysis-free method 與特徵值直接計算法[28]來得到特徵向量，使迭代的結果為所需要的挫屈點，並加速迭代過程。

第二章 理論推導

本章採用一致性共旋轉有限元素推導法分析平面梁結構的幾何非線性靜態行為及在靜態平衡點的微小振動之自然頻率和振態。梁元素之節點變形力、節點慣性力、剛度矩陣及慣性矩陣都是在當前的元素座標上推導。

2.1 基本假設

本文推導梁元素時，做了以下的假設：

- (1) Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量 (unit extension) 為均勻的(uniform)。
- (3) 梁元素的變形位移與旋轉為小位移與小旋轉。
- (4) 梁元素的應變為小應變。

如果元素的尺寸足夠小，則基本假設(3)一定可以滿足。基於假設(4)，本文使用工程應變 (engineering strain) 與工程應力作為梁元素的應變與應力之度量，為了推導方便，本文中工程應變是由與其對應的Green strain求得。

2.2 座標系統描述

本文是使用有限元素法，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素，節點1及節點2為元素的兩個端點。為了描述系統的運動與梁元素的位移、變形，本文定義了兩組座標系統 (圖2-1)：

- (1) 總體座標系統 (Global coordinates) X_1 、 X_2

梁結構的節點座標、節點位移、節點速度、節點加速度、系統的運動方程式均在此座標系統中定義。

- (2) 元素座標系統 (Element coordinates) x_1 、 x_2

元素座標系統是建立在每一梁元素當前的變形位置上，如圖2-1所示，元素座標系統的原點是定義在節點1上， x_1 軸的方向為梁元素兩節點連線的方向， x_2 軸的方向由右手定則決定，本文中梁元素的位移、變形、速度、加速度及運動方程式，均在此座標中定義。

元素方程式首先建立在元素座標上，然後經由標準的座標轉換，轉換至對應總體座標系統，元素座標系統與總體座標系統關係可表示成

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{GE}\mathbf{x} \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{A}_{GE} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{X} = \{X_1, X_2\}$$

本文以{ }代表行矩陣， θ_e 為元素座標之 x_1 軸與總體座標之 X_1 軸的夾角。

2.3 梁元素的變形描述

本文是在元素座標上描述梁元素的變形與幾何形狀。由2.2節中的基本假設可知，梁元素的變形可由其形心軸在元素座標上的位移及其斷面的旋轉決定。本文採用梁元素變形前形心軸的長度為獨立變數。

2.3.1 梁元素的位移

圖2-2中的 Q 點為梁中的任意點， P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於梁的同一斷面上。在元素座標上， P 點在梁變形前後的位置向量可分別表示為 $\{x, 0\}$ 與 $\{x_p(x,t), v(x,t)\}$ 。其中 t 為時間， $x_p(x,t)$ 及 $v(x,t)$ 分別是 P 點在 x_1 與 x_2 軸方向的座標。 Q 點在梁變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \{x, y\} \\ \mathbf{r} &= \{x_p - y \sin \theta, y \cos \theta + v\} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

其中 x 、 y 分別為梁變形前 Q 點在 $x_i (i=1, 2)$ 軸的座標， θ 為 x_1 軸和形心軸的切線向量的夾角。 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 可表示成如下

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{,x}}{1 + \varepsilon_0} \approx (1 - \varepsilon_0) v_{,x} \quad (2.3.2)$$

$$\cos \theta = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \approx (1 - \theta^2)^{1/2} \quad (2.3.3)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial s - \partial x}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.3.4)$$

其中 s 為 o 點到 P 點間形心軸在變形後的弧長，而 ε_0 為形心軸的單位伸長量。由(2.3.3)至(2.3.4)式， $x_p(x, t)$ 可以表示成下式

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.3.5)$$

其中 u_1 為節點 1 在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零，但其變分及對時間的微分並不為零。

由小變形的假設，利用近似式 $[(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} v_{,x}^2)$ ，(2.3.5) 式可表示成

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} v_{,x}^2) dx \quad (2.3.6)$$

由 (2.3.6) 式及基本假設(2)可以得到形心軸的單位伸長量 ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{l - L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L v_{,x}^2 dx \quad (2.3.7)$$

$$l = L + u_2 - u_1$$

其中 L 為梁變形前的長度， l 為梁之形心軸變形後的弦長， u_2 為節點 2 在 x_1 方向的位移。

2.3.2 梁元素之應變

將(2.3.2)及(2.3.3)式代入(2.3.1)式在小變形的假設下，利用近似式

$(1 - \theta^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ，可以將位置向量 \mathbf{r} 重新寫成如下

$$\mathbf{r} = \left\{ x_p - y\theta, y\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) + v \right\} \quad (2.3.8)$$

本文中的應變採用工程應變。為了推導上的方便，本文中先推導出 Green strain ε_{ij} ，再由 Green strain 求得與其對應之工程應變。Euler 梁的 Green strain 非為零的應變只有 ε_{11} ，可表示成

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1) \quad (2.3.9)$$

其中

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \quad (2.3.10)$$

將 (2.3.8) 式代入 (2.3.10) 式，可得 \mathbf{g}_1 的分量 g_{11} 和 g_{12} 如下

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - y\theta_{,x} \\ g_{12} &= v_{,x} - y\theta\theta_{,x} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

(2.3.11) 式中 θ 對 x 的一次微分，可以表示成

$$\theta_{,x} \approx -\frac{1}{(1 + \varepsilon_0)^2} \varepsilon_{0,x} v_{,x} + \frac{1}{1 + \varepsilon_0} v_{,xx} \approx \frac{1}{1 + \varepsilon_0} v_{,xx} \quad (2.3.12)$$

將(2.3.1)式中 θ 及(2.3.12)式中 $\theta_{,x}$ 分別代入(2.3.11)式，可以將 g_{11} 和 g_{12} 重新寫成如下

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - y \frac{v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)} \\ g_{12} &= v_{,x} - y \frac{v_{,x} v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)^2} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

將 (2.3.13) 式代入 (2.3.9) 式，在小變形的假設下，利用近似式

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon_0)} \approx (1 - \varepsilon_0)，且保留變形參數及其微分到二次項，可將應變 ε_{11} 表示如下$$

下

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 - yv_{,xx} + \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2 \quad (2.3.14)$$

Green strain ε_{11} 與工程應變 e_{11} 間的關係如下[8]

$$e_{11} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 \quad (2.3.15)$$

當應變很小時(2.3.15)式可以用下列近似值代替

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2 \quad (2.3.16)$$

由(2.3.14)式及(2.3.16)式，且保留變形參數及其微分到二次項，可得工程應變 e_{11} 如下

$$e_{11} = \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0)yv_{,xx} \quad (2.3.17)$$

本文中假設梁元素變形後的形心軸的側向位移 $v(x)$ 為 x 的三次 Hermitian 多項式。因此(2.3.8)式之 $v(x)$ 可表示成

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v_1', v_2, v_2'\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.3.18)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi), \quad (2.3.19)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.3.20)$$

其中 $v_j (j=1,2)$ 是 v 在節點 j 的節點值， v_j' 則是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 在節點 $j (j=1,2)$ 之節點值， $N_i (i=1-4)$ 代表形狀函數(shape function)。

2.3.3 梁元素之應變變分及位置向量變分及速度和加速度

因本文用虛功原理及d'Alembert原理推導節點內力，所以需要應變的變分，位置向量的變分及速度和加速度。其推導如下：

將(2.3.17)式變分可以得到

$$\delta e_{11} = \delta \varepsilon_0 + y v_{,xx} \delta \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0) y \delta v_{,xx} \quad (2.3.21)$$

將(2.3.7)式變分可以得到 $\delta \varepsilon_0$ 表示如下；

$$\delta \varepsilon_0 = \delta \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) + \frac{1}{L} \int_0^L \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}'_b v_{,x} dx = \frac{1}{L} \left(\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b \right) \quad (2.3.22)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \{u_1, u_2\} \\ \mathbf{u}_b &= \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} \\ \mathbf{G}_a &= \{-1, 1\} \\ \mathbf{G}_b &= \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

將(2.3.22)、(2.3.23)代入(2.3.21)式，可以將 δe_{11} 重新寫成如下

$$\delta e_{11} = \frac{(1 + y v_{,xx})}{L} \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \left[\frac{(1 + y v_{,xx})}{L} \mathbf{G}_b - \mathbf{N}_b'' (1 - \varepsilon_0) y \right] \quad (2.3.26)$$

由(2.3.8)式可得位置向量 \mathbf{r} 的變分如下

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2\} = \{-y \delta \theta + \delta x_p, -y \theta \delta \theta + \delta v\} \quad (2.3.27)$$

將(2.3.6)式變分後再將(2.3.22)式代入，可以得到

$$\delta x_p = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{x}{L} \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b - \int_0^x v_{,x} \delta v_{,x} dx \quad (2.3.28)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1 - \xi}{2}, \frac{1 + \xi}{2} \right\} \quad (2.3.29)$$

其中 \mathbf{u}_a 、 \mathbf{u}_b 、 \mathbf{G}_b 和 ξ 已在(2.3.20)及(2.3.23)式中定義。

將(2.3.2)移項分別對 θ 和 v 變分可以得到

$$\cos\theta\delta\theta \approx \delta\theta = \delta((1-\varepsilon_0)v_{,x}) = -\delta\varepsilon_0 v_{,x} + (1-\varepsilon_0)\delta v_{,x} \quad (2.3.30)$$

$$\delta v_{,x} \approx (1+\varepsilon_0)\delta\theta + v_{,x}\delta\varepsilon_0 \approx (1+\varepsilon_0)\delta\theta + \frac{v_{,x}}{L}(\delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b) \quad (2.3.31)$$

將(2.3.28)、(2.3.29)及(2.3.30)式代入(2.3.27)式，位置向量的變分 $\delta\mathbf{r}$ 的分量可以寫成

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= -y(1-\varepsilon_0)\delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}'_b + \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \underline{y v_{,x} \delta\varepsilon_0} + \underline{\frac{x}{L} \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b} - \underline{\int_0^x v_{,x} \delta v_{,x} dx} \\ \delta r_2 &= \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b + \underline{y(1-\varepsilon_0)v_{,x}^2 \delta\varepsilon_0} - \underline{y(1-\varepsilon_0)^2 v_{,x} \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}'_b} \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

因為梁元素為小變形，所以 $v_{,x}$ 在元素較多時都將趨近於零，故在計算慣性力時，上式中畫底線的項可以忽略。將(2.3.25)式代入(2.3.32)式並忽略加底線的項可得

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a - y(1-\varepsilon_0)\delta v_{,x} \\ \delta r_2 &= \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

梁的速度可以由(2.3.8)式中的位置向量對時間做一次微分求得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \{\dot{r}_1, \dot{r}_2\} = \dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2 \\ \dot{r}_1 &= \dot{x}_p - y\dot{\theta} \\ \dot{r}_2 &= \dot{v} - y\theta\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

其中 $(\dot{\quad})$ 表示對 (\quad) 時間的微分。

梁的絕對加速度可由(2.3.34)式對時間微分一次求得

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2\} = \ddot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{r}_2 \mathbf{e}_2$$

其中

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \ddot{x}_p - y\ddot{\theta} \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v} - y\dot{\theta}^2 - y\theta\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

將(2.3.6)式分別對時間做微分一次及微分二次，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= \dot{u}_1 + \dot{\varepsilon}_0 x - \int_0^x v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \\ \ddot{x}_p &= \ddot{u}_1 + \ddot{\varepsilon}_0 x - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + v_{,x} \ddot{v}_{,x}) dx\end{aligned}\quad (2.3.36)$$

將(2.3.2)式 $\sin\theta \approx \theta = \frac{1}{1+\varepsilon_0} v_{,x} \approx (1-\varepsilon_0) v_{,x}$ 分別對時間做微分一次及微分

二次，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= (1-\varepsilon_0) \dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x} \\ \ddot{\theta} &= (1-\varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}\end{aligned}\quad (2.3.37)$$

將(2.3.7)式對時間做微分一次，可以得到

$$\dot{\varepsilon}_0 = \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{L} \int_0^L v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \quad (2.3.38)$$

將(2.3.2)、(2.3.36)、(2.3.37)及(2.3.38)式代入(2.3.35)式，我們可以將加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 重新寫成

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + v_{,x} \ddot{v}_{,x}) dx \\ &\quad - y \left[(1-\varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - 2 \left(\frac{1}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{L} \int_0^L v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \right) \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x} \right] \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{v} - y \left[(1-\varepsilon_0) \dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x} \right]^2 \\ &\quad - y (1-\varepsilon_0) v_{,x} \left[(1-\varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x} \right]\end{aligned}\quad (2.3.39)$$

將上式中含有 v 或 $v_{,x}$ 等位移量之加底線項忽略，可將加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 重新寫成

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - y \left[(1-\varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - \frac{2}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \dot{v}_{,x} \right] \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{v} - y \left[(1-\varepsilon_0) \dot{v}_{,x} \right]^2\end{aligned}\quad (2.3.40)$$

2.4 梁元素的節點內力

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在座標上求對應於元素節點參數的元素節點內力。若給端點 j ($j = 1, 2$) 一個虛位移 δu_j 、 δv_j 和 $\delta \theta_j$ ，則由虛功原理可知，對應於該端點的虛位移、外力所作的虛功 δW_{ext} 等於內力所作的虛功 δW_{int} 即

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (2.4.1)$$

在本推導中 δW_{ext} 為元素的節點內力 \mathbf{f}_θ 對節點虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所做的功，可表示成

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{u}_a^{\theta t} \mathbf{f}_a^\theta + \delta \mathbf{u}_b^{\theta t} \mathbf{f}_b^\theta \quad (2.4.2)$$

其中

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta \theta_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta \theta_2\} \quad (2.4.3)$$

$$\delta \mathbf{u}_a^\theta = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad (2.4.4)$$

$$\delta \mathbf{u}_b^\theta = \{\delta v_1, \delta \theta_1, \delta v_2, \delta \theta_2\} \quad (2.4.5)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{f_{11}^\theta, f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{12}^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} \quad (2.4.6)$$

$$\mathbf{f}_a^\theta = \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\} = \mathbf{f}_a^{D\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.4.7)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \{f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} = \mathbf{f}_b^{D\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (2.4.8)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_a^\theta$ 為軸方向的虛位移， $\delta \mathbf{u}_b^\theta$ 為側向的虛位移， \mathbf{f}_a^θ 、 \mathbf{f}_b^θ 為對應於 $\delta \mathbf{u}_a^\theta$ 、 $\delta \mathbf{u}_b^\theta$ 的節點力， θ_j ($j=1,2$) 為節點 j 的轉角， f_{ij}^θ ($i=1,2, j=1,2$) 為節點 j 在 x_i 方向的節點力， m_j^θ ($j=1,2$) 為節點 j 的力矩， $\mathbf{f}_a^{D\theta}$ 及 $\mathbf{f}_b^{D\theta}$ 為與變形有關的節點內力， $\mathbf{f}_a^{I\theta}$ 及 $\mathbf{f}_b^{I\theta}$ 為與慣性力有關的節點內力。

內力所作的虛功又分成虛應變所造成的虛功及將慣性力(質量與負的加速度之乘積)併入徹體力(body force)所作的虛功，故內力所作的虛功可以表示成：

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \quad (2.4.9)$$

其中

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta v_1', \delta u_2, \delta v_2, \delta v_2'\} \quad (2.4.10)$$

$$\delta \mathbf{u}_a = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad (2.4.11)$$

$$\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \delta v_1', \delta v_2, \delta v_2'\} \quad (2.4.12)$$

$$\mathbf{f} = \{f_{11}, f_{21}, m_1, f_{12}, f_{22}, m_2\} \quad (2.4.13)$$

$$\mathbf{f}_a = \{f_{11}, f_{12}\} = \mathbf{f}_a^D + \mathbf{f}_a^I \quad (2.4.14)$$

$$\mathbf{f}_b = \{f_{21}, m_1, f_{22}, m_2\} = \mathbf{f}_b^D + \mathbf{f}_b^I \quad (2.4.15)$$

其中 $\delta \mathbf{q}$ 為對應於元素虛應變 δe_{11} 和虛位移 $\delta \mathbf{r}$ 的節點虛位移， \mathbf{f} 為對應於 $\delta \mathbf{q}$ 的等效節點力， m_j ($j = 1, 2$) 為對應於虛位移 $\delta v_j'$ ($j = 1, 2$) 的廣義力矩。 E 為楊氏係數， ρ 為梁的密度， V 為梁在未變形前的體積， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為加速度。(2.4.9) 式中，右式的第一項為應力所作的虛功，第二項為慣性力所作的虛功。

由(2.3.23)、(2.3.31)式可得

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{T}_\theta \delta \mathbf{q}_\theta \quad (2.4.16)$$

$$\mathbf{T}_\theta = \mathbf{T}_\theta^1 + \mathbf{T}_\theta^2 \quad (2.4.17)$$

$$\mathbf{T}_\theta^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_1'}{L} & 0 & 1 + \varepsilon_0 & \frac{v_1'}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v_2'}{L} & 0 & 0 & \frac{v_2'}{L} & 0 & 1 + \varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

$$\mathbf{T}_\theta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1' G_{b1} & v_1' G_{b2} & 0 & v_1' G_{b3} & v_1' G_{b4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2' G_{b1} & v_2' G_{b2} & 0 & v_2' G_{b3} & v_2' G_{b4} \end{bmatrix} \quad (2.4.19)$$

將(2.4.2)、(2.4.9)及(2.4.16)式代入(2.4.1)式可得

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{T}_\theta^t \mathbf{f} \quad (2.4.20)$$

由(2.4.6-8)、(2.4.13-15)、(2.4.18-19)及(2.4.20)式可得

$$\mathbf{f}_a^\theta = \mathbf{f}_a + \mathbf{T}_{ba}^t \mathbf{f}_b \quad (2.4.21)$$

$$\mathbf{T}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{v_1'}{L} & \frac{v_1'}{L} \\ 0 & 0 \\ -\frac{v_2'}{L} & \frac{v_2'}{L} \end{bmatrix} \quad (2.4.22)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \mathbf{T}_{\theta b}^t \mathbf{f}_b \quad (2.4.23)$$

$$\mathbf{T}_{\theta b} = \mathbf{T}_{\theta b}^1 + \mathbf{T}_{\theta b}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \varepsilon_0 \end{bmatrix} + [\mathbf{0} \quad v_1' \mathbf{G}_b \quad \mathbf{0} \quad v_2' \mathbf{G}_b]^t \quad (2.4.24)$$

將(2.3.17)、(2.3.26)式代入(2.4.9)式右邊第一項，並保留變形參數到二次項，可以得到應力所做的虛功

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \mathbf{e}_{11}^t E \mathbf{e}_{11} dV \\ &= \delta \mathbf{u}_a^t [EA \varepsilon_0 - \frac{EI(1 - \varepsilon_0)}{L} \int v_{,xx}^2 dx] \mathbf{G}_a \\ &+ \delta \mathbf{u}_b^t [EA \varepsilon_0 \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx - \frac{EI(1 - \varepsilon_0)}{L} \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_b + EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx] \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

其中 $I = \int_A y^2 dA$ 為慣性矩， A 為梁的斷面積，積分的範圍是從 0 到 L 。

將(2.3.40)、(2.3.33)式代入(2.4.9)式右邊第二項，並保留變形參數對時間的微分到二次項，可以得到慣性力所做的虛功

$$\begin{aligned}
 & \int_1^2 \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \\
 &= \int [(\delta r_1) \ddot{r}_1 + (\delta r_2) \ddot{r}_2] dV \\
 &= \delta \mathbf{u}_a^t \left\{ \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,xx}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \right\} \\
 &+ \delta \mathbf{u}_b^t \left\{ \rho A \int \mathbf{N}_b \dot{v} dx + \rho I (1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2 \frac{\rho I (1-\varepsilon_0)}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \right\}
 \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

由(2.4.25)及(2.4.26)式代入(2.4.9)式可求得對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 和 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點力向量為：

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_a^D + \mathbf{f}_a^I$$

$$\mathbf{f}_a^D = EA \varepsilon_0 \mathbf{G}_a - \frac{EI(1-\varepsilon_0)}{L} \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \tag{2.4.27}$$

$$\mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,xx}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \tag{2.4.28}$$

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_b^D + \mathbf{f}_b^I$$

$$\mathbf{f}_b^D = EA \varepsilon_0 \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx - \frac{EI(1-\varepsilon_0)}{L} \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_b \tag{2.4.29}$$

$$\mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \dot{v} dx + \rho I (1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2 \frac{\rho I (1-\varepsilon_0)}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \tag{2.4.30}$$

其中 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b$) 為元素變形節點內力， \mathbf{f}_i^I ($i = a, b$) 為元素慣性節點內力節點內力。

由(2.4.13-15)、(2.4.6-8)、(2.4.18)、(2.4.19)式，(2.4.20)式的顯示可表示如下

$$f_{12}^{D\theta} = -f_{11}^{D\theta} = f_{12}^D + \frac{v'_1}{L} m_1 + \frac{v'_2}{L} m_2 = f_{12}^D + \bar{f}_{12}^D \tag{2.4.31}$$

$$f_{21}^{D\theta} = f_{21}^D + \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{L} G_{b1} = f_{21}^D + \bar{f}_{12}^D G_{b1} \quad (2.4.32)$$

$$f_{22}^{D\theta} = f_{22}^D + \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{L} G_{b3} = f_{22}^D + \bar{f}_{12}^D G_{b3} \quad (2.4.33)$$

$$m_1^{D\theta} = (1 + \varepsilon_0) m_1 + \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{L} G_{b2} = (1 + \varepsilon_0) m_1 + \bar{f}_{12}^D G_{b2} \quad (2.4.34)$$

$$m_2^{D\theta} = (1 + \varepsilon_0) m_2 + \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{L} G_{b4} = (1 + \varepsilon_0) m_2 + \bar{f}_{12}^D G_{b4} \quad (2.4.35)$$

由(2.4.27)、(2.4.29)式可以得到

$$f_{12}^D = EA\varepsilon_0 - \frac{EI(1 - \varepsilon_0)}{L^2} (4v_1'^2 + 4v_1'v_2' + 4v_2'^2) \quad (2.4.36)$$

$$m_1 \approx (1 - \varepsilon_0)^2 \frac{EI}{L} (4v_1' + 2v_2') \quad (2.4.37)$$

$$m_2 \approx (1 - \varepsilon_0)^2 \frac{EI}{L} (2v_1' + 4v_2') \quad (\text{取到一次項}) \quad (2.4.38)$$

再將(2.4.36)-(2.4.38)式代入(2.4.31)式，可以得到

$$\begin{aligned} f_{12}^{D\theta} &= EA\varepsilon_0 - \frac{4EI(1 - \varepsilon_0)}{L^2} (v_1'^2 + v_1'v_2' + v_2'^2) + (1 - \varepsilon_0)^2 \frac{EI}{L^2} (4v_1'^2 + 2v_1'v_2') \\ &\quad + (1 - \varepsilon_0)^2 \frac{EI}{L^2} (2v_1'v_2' + 4v_2'^2) \\ &\approx EA\varepsilon_0 - \frac{EI}{L} \varepsilon_0 \int v_{,xx}^2 dx \quad (\text{保留到三次項}) \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

由(2.4.21)與(2.4.39)式可以得到

$$\mathbf{f}_a^{D\theta} = EA\varepsilon_0 \mathbf{G}_a - \frac{EI}{L} \varepsilon_0 \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \quad (2.4.40)$$

由(2.4.23)、(2.4.24)及(2.4.29)式，保留部分的三次項，可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b^{D\theta} &= \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} [EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + (m_1 v_1' + m_2 v_2') \mathbf{G}_b + EA\varepsilon_0 \int \mathbf{N}_b' v_{,x} dx \\ &\quad - \frac{EI(1 - \varepsilon_0)}{L} \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_b] = \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} [EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12}^{D\theta} \int \mathbf{N}_b' v_{,x} dx] \end{aligned}$$

$$= \frac{EI(1-\varepsilon_0)}{L} \begin{Bmatrix} 6/L(v'_1 + v'_2)(1-\varepsilon_0) \\ (4v'_1 + 2v'_2) \\ -6/L(v'_1 + v'_2)(1-\varepsilon_0) \\ (2v'_1 + 4v'_2) \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_{\theta b}^{1t} f_{12}^{D\theta} \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.4.41)$$

在元素的節點慣性力推導部分，我們忽略慣性力中節點參數與其對時間微分的耦合項，故

$$\mathbf{f}^{I\theta} = \mathbf{f}^I \quad (2.4.42)$$

由(2.4.28)、(2.4.30)式可以得到

$$\mathbf{f}_a^{I\theta} = \mathbf{f}_a^I = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \quad (2.4.43)$$

$$\mathbf{f}_b^{I\theta} = \mathbf{f}_b^I = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2 \frac{\rho I}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \quad (2.4.44)$$

2.5 元素的剛度矩陣

依元素切線剛度矩陣的定義可得

$$\mathbf{k}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}^{D\theta}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.5.2)$$

其中 \mathbf{k}^θ 為元素切線剛度矩陣， $\mathbf{f}^{D\theta}$ 為元素變形節點內力， $d\mathbf{q}_\theta$ 表示節點參數

向量 \mathbf{q}_θ 之真實擾動量。 $\mathbf{f}^{D\theta}$ 可以由(2.4.40)、(2.4.41)式中的 $\mathbf{f}_a^{D\theta}$ 、 $\mathbf{f}_b^{D\theta}$ 組成，

元素切線剛度矩陣 \mathbf{k}^θ 可由下列的次矩陣組合而成。

$$\mathbf{k}_{aa}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_a^\theta} = \frac{EA}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t - \frac{EI}{L^2} \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t \quad (2.5.3)$$

$$\mathbf{k}_{ab}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b^\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b} \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{u}_b^\theta} = -2 \frac{EI\varepsilon_0}{L} \mathbf{G}_a \int v_{,xx} \mathbf{N}_b''^t dx \mathbf{T}_{\theta b}^1 \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{k}_{ba}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_a^\theta} = -2EI\varepsilon_0 \mathbf{T}_{\theta b}^{1t} \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx \mathbf{G}_a^t \quad (2.5.5)$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b^{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b} \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{u}_b^{\theta}} = \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} f_{12}^{D\theta} \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_b'^t dx \mathbf{T}_{\theta b}^1 + \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} (EI(1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx) \mathbf{T}_{\theta b}^1 \quad (2.5.6)$$

2.6 元素的質量矩陣

元素的質量矩陣 \mathbf{m}^{θ} 可表示成

$$\mathbf{m}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{\theta}} \quad (2.6.1)$$

其中 $\mathbf{f}^{I\theta}$ 可以由(2.4.43)、(2.4.44)式中的 $\mathbf{f}_a^{I\theta}$ 、 $\mathbf{f}_b^{I\theta}$ 組成， $\ddot{\mathbf{q}}_{\theta}$ 是元素的節點加速度，可以表示成

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\theta} = \{\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{u}_2, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2\} \quad (2.6.2)$$

\mathbf{m}^{θ} 為一對稱矩陣，可由下列的次矩陣，利用直接勁度法[23]組合而成

$$\mathbf{m}_{ij}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{I\theta}}{\partial \ddot{u}_j} \quad (2.6.3)$$

其中 $i, j = a, b$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_a^{\theta} = \{\ddot{u}_1, \ddot{u}_2\}$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_b^{\theta} = \{\ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2\}$

由(2.6.3)、(2.4.43)和(2.4.44)式可得

$$\mathbf{m}_{aa}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.6.4)$$

$$\mathbf{m}_{ab}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0} \quad (2.6.5)$$

$$\mathbf{m}_{ba}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{m}_{bb}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_b'^t dx = \mathbf{m}_T + \mathbf{m}_R \quad (2.6.7)$$

2.7 系統平衡方程式

本研究考慮的負荷有力負荷及位移負荷兩種，所以非線性系統的運動方程式可表示成

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \lambda_f \mathbf{P} = 0 \quad (2.7.1)$$

其中 Ψ 為系統的不平衡力， \mathbf{F} 為系統節點內力， \mathbf{Q} 為系統的節點位移， λ_d 為位移負荷參數， \mathbf{Q}_d 為參考位移負荷向量， λ_f 為力負荷參數， \mathbf{P} 為參考力負荷向量，其中 \mathbf{F} 由系統節點變形力 \mathbf{F}^D 、系統節點慣性力 \mathbf{F}^I 組成。 \mathbf{F}^D 及 \mathbf{F}^I 可由(2.4.40)–(2.4.44)式中的元素節點變形力、元素節點慣性力從當前的元素座標轉換到總體座標後組合而成。本研究在每一增量平衡迭代的過程中，將 λ_d 或是 λ_f 的值固定，(2.7.1)式中之 λ 在迭代中代表 λ_d 或是 λ_f 中可變動的負荷參數。

若不考慮慣性力，則(2.7.1)式為非線性平衡方程式。若將(2.7.1)式在靜態平衡的位置，用泰勒級數展開到一次項，則可得到系統在靜態平衡點的線性振動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{Q}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (2.7.2)$$

其中 \mathbf{M} 為系統的質量矩陣， $\ddot{\bar{\mathbf{Q}}}$ 為系統的節點加速度， \mathbf{K} 為系統的切線剛度矩陣， $\bar{\mathbf{Q}}$ 為靜態平衡點算起的系統節點位移。 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 是由元素的質量矩陣、切線剛度矩陣從當前的元素座標轉換到總體座標後組合而成。

若振動方程式(2.7.2)式存在自然振動頻率，則其解的形式可以表示如下

$$\bar{\mathbf{Q}} = \Phi e^{i\omega t} \quad (2.7.3)$$

其中 Φ 是振態， ω 是自然振動頻率。將(2.7.3)式代入(2.7.2)式可得

$$\mathbf{K}\Phi = \omega^2 \mathbf{M}\Phi \quad (2.7.4)$$

(2.7.4)式為一廣義特徵值問題，振動模態 Φ 是特徵向量，特徵值是 ω^2 。

第三章 數值計算方法與程序

本章將說明挫屈梁在不同位移負荷及/或力負荷下的幾何非線性分析及線性自由振動分析所需要用到的數值計算方法。本文的挫屈梁是指如圖 1-1 所示之直梁，受軸向壓縮 Δ 引起側向挫屈的梁，本文以梁中點拱起的高度 δ 作為挫屈梁挫屈的程度。壓縮量 Δ 與梁中點拱起的高度 δ 有一非線性關係，本文中視壓縮位移 Δ 為位移負荷求得中點拱起高度為 δ 的挫屈梁，並探討挫屈梁的自然振動頻率及振態，接著在挫屈梁的中點施加側向力負荷 P ，探討挫屈梁的幾何非線性行為，挫屈梁受側力的平衡路徑上可能有極限點、分歧點，在極限點有不穩定平衡路徑，會產生跳躍現象，在分歧點有穩定或不穩定的次要平衡路徑。本文採用牛頓-拉福森（Newton - Raphson）法配合弧長控制（arc - length control）法[9]的增量迭代法，來求得完整的平衡路徑。

在平衡路徑上的臨界點（極限點、分歧點），系統切線剛度之行列表值為零，可用來決定挫屈梁之臨界點的位置。因本文要追蹤不同 Δ （或 δ ）之挫屈梁的臨界點，即臨界點的摺線[12]，如用上述方法，需要大量的計算，為節省計算量，本文中使用 Eriksson[12-14]中延伸系統的觀念，即將挫屈時切線剛度矩陣絕對值最小的特徵值為零，當作約束條件，得到一平衡方程式的延伸系統，可以直接求得平衡路徑上的臨界點。在追蹤不同 Δ 之挫屈梁的臨界點時，為節省計算量，不再重新計算其平衡路徑，而直接由目前之臨界點對應的力/位移負荷及平衡位置，將一增量力/位移負荷加到原來的臨界力/位移負荷，當作對應於某一未知 Δ/P_{CR} 之挫屈梁的臨界力/位移負荷，將 Δ/P 當作位移/力負荷參數，使用正交軌線法[16]得到一個初始增量負荷參數與初始增量位移，然後再回到延伸系統求得新的臨界力/位移負

荷對應的 Δ / P_{CR} 。延伸系統中附加的條件可以根據計算的目的更動 [12-14]，用於弧長控制法與計算特徵值與特徵向量。

本文使用子空間法[2]，求出廣義特徵值問題(2.7.4)式的特徵值 ω^2 及對應的特徵向量 Φ 。在直接計算挫屈負荷時，若將質量矩陣取為單位矩陣，則(2.7.4)式可以寫成 $\mathbf{K}\Phi = \mathbf{g}\mathbf{I}\Phi$ ，該標準特徵值問題，在平衡路徑上的臨界點，有一特徵值為零，與其對應之特徵向量是挫屈模態。

本章將在 3.1 節中詳述本文需要的各種數值方法，在 3.2 節說明整個數值程序迭代的流程。

3.1 數值方法

本研究考慮的負荷有力負荷及位移負荷兩種，在每一增量平衡迭代的過程中，將(2.7.1)式之平衡方程式中之 λ_d 或是 λ_f 的值固定。

3.1.2 增量迭代法

增量迭代法通常用來分析結構的幾何非線性分析，若第 I 個增量的平衡位置為已知，其位移向量為 \mathbf{Q}_I ，負荷參數為 λ_I ，則可以求得這個平衡位置的系統切線剛度 \mathbf{K}_T ，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移可以用尤拉預測值 (Euler predictor) 求得

$$\Delta \mathbf{Q} = \Delta \lambda \mathbf{r}_T \quad (3.1.2)$$

其中 \mathbf{r}_T 是第 I 次增量的切線解，在力負荷時，

$$\mathbf{K}_T \mathbf{r}_T = \mathbf{P} \quad (3.1.3)$$

在位移負荷時，

$$\mathbf{K}_T \mathbf{r}_T = -\mathbf{F}_P \quad (3.1.3)$$

其中 $\mathbf{F}_P = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}$ ， $\Delta \lambda$ 是第 $I+1$ 增量初始增量負荷參數，本文配合弧長控制法

[9]，選用

$$\Delta\lambda = \pm \frac{\Delta\ell}{\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T} \quad (3.1.5)$$

其中 $\Delta\ell = \|\Delta\mathbf{Q}\|$ 是初始增量位移的弧長， $\Delta\lambda$ 之正負號則與 $\mathbf{r}_T^t \Delta\mathbf{Q}_I$ 的正負號一致， $\Delta\mathbf{Q}_I$ 為上一增量中收斂的增量位移。

迭代過程中對增量的修正，即位移改正量和負荷改正量，詳見 3.1.6 節之弧長控制法。

3.1.3 收斂準則

本文以系統的不平衡力的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，當負荷為力負荷時，收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N}\|\lambda\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (3.1.6)$$

當負荷為位移負荷時，收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\|\mathbf{F}_R\|} \leq e_{tol} \quad (3.1.7)$$

其中 N 表離散系統的自由度數， \mathbf{F}_R 為系統節點反力向量， e_{tol} 為一給定之容許誤差值。

3.1.4 延伸系統 (Extended system)

考慮一個靜態力學平衡的離散化模型，可定義一個延伸系統的控制方程式[12-14]

$$\begin{Bmatrix} \Psi(\mathbf{Z}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{Z}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.1.8)$$

其中 Ψ 是 N 個平衡方程式的集合， \mathbf{G} 是 M 個輔助條件的集合，這些條件在平衡狀態上定義的約束條件，系統的解 \mathbf{Z} 由位移 \mathbf{Q} 與控制變數 λ 組合而成，當我們改變邊界條件、材料常數或是要求得臨界情形，可以不需要重新計算平衡路徑，可由延伸系統求得新的結構行為，而延伸系統的解可以由牛頓—拉福森增量迭代法求出。

本文在求解的過程中，包括直接計算臨界直，弧長控制法，均應用延伸系統的解法，輔助條件 \mathbf{G} 都是位移 \mathbf{Q} 與負荷 λ 的函數，本文選擇以替換 \mathbf{G} 的方法，來保持計算過程中 \mathbf{G} 為一維的方程式，即 $M=1$ ，在迭代過程中所需要的微分矩陣與改正量在本文中可以用表示為

$$\begin{bmatrix} \Psi_{,Q} & \Psi_{,\lambda} \\ \mathbf{G}_{,Q} & \mathbf{G}_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{Q} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Psi \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} \quad (3.1.9)$$

其中 $\Psi_{,Q} = \mathbf{K}_T$ 為切線剛度，當負荷是力負荷時 $\Psi_{,\lambda} = \mathbf{P}$ ，負荷為位移負荷時

$$\Psi_{,\lambda} = \mathbf{F}_P = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}。$$

3.1.5 延伸系統延遲分解法 (Postponed factorization of an extended system)

如果一個矩陣可以表示成延伸系統的模式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} \quad (3.1.10)$$

在計算過程中可以不破壞子矩陣 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 的結構，將 \mathbf{e} 、 \mathbf{f} 以下列流程分開解出[12]

$$\mathbf{f} = (\mathbf{D} - \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}))^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g})) \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{e} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}) - (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{f} \quad (3.1.12)$$

本文在應用上選取 \mathbf{C} 為一維方程式，所以 \mathbf{f} 為(3.1.9)式之 $\delta\lambda$ ， \mathbf{e} 為 $\delta\mathbf{Q}$ ， $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 為 $\mathbf{K}_T^{-1}\Psi = \mathbf{r}_0$ ，是標準牛頓法的改正量， $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}$ 為 $\mathbf{K}_T^{-1}\Psi_{,\lambda} = \mathbf{r}_T$ ，是切線解。

3.1.6 弧長控制法 (Arc-length method)

弧長控制法[9]，將每一增量的增量負荷 $\Delta\lambda$ 與增量位移 $\Delta\mathbf{Q}$ 均視為未知數，以增量位移的長度 $\Delta\ell$ 當作平衡方程式的約束條件，

$$L = \Delta\mathbf{Q}^t \Delta\mathbf{Q} - \Delta\ell^2 = 0 \quad (3.1.13)$$

L 可以視為延伸系統中的輔助方程式，則由(3.1.8)式可得延伸系統

$$\begin{Bmatrix} \Psi \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1.14)$$

由(3.1.9)式，可得(3.1.14)式在迭代過程的微分矩陣與改正量

$$\begin{bmatrix} \Psi_{,Q} & \Psi_{,\lambda} \\ L_{,Q} & L_{,\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{Q} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Psi \\ L \end{Bmatrix} \quad (3.1.15)$$

其中

$$L_{,Q} = 2\Delta\mathbf{Q}^t \quad (3.1.16)$$

$$L_{,\lambda} = 0 \quad (3.1.27)$$

由(3.1.11)式，負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 可以表示成

$$\delta\lambda = - \frac{2\Delta\mathbf{Q}^t \mathbf{r}_0 + L}{2\Delta\mathbf{Q}^t \mathbf{r}_T} \quad (3.1.18)$$

其中 $\Psi_{,Q} = \mathbf{K}_T$ 是系統切線剛度矩陣，在力負荷時， $\Psi_{,\lambda}$ 為參考力負荷 \mathbf{P} ，

$\mathbf{r}_T = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}$ 是參考力負荷 \mathbf{P} 的切線解，在位移負荷時， $\Psi_{,\lambda}$ 為 $\mathbf{F}_P = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}$ ，

$\mathbf{r}_T = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}_P$ ， \mathbf{r}_0 是標準牛頓法中，不平衡力的位移改正量，可以表示如下

$$\mathbf{K}_T \mathbf{r}_0 = -\Psi = -(\mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda \mathbf{P}) \quad (3.1.19)$$

(3.1.18)式中， L 通常可以忽略不計，所以(3.1.18)式之負荷參數改正量可以

近似成

$$\delta\lambda = -\frac{\Delta\mathbf{Q}^t \mathbf{r}_0}{\Delta\mathbf{Q}^t \mathbf{r}_T} \quad (3.1.20)$$

由(3.1.12)式，位移改正量 $\delta\mathbf{Q}$ 可以表示成

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{r}_0 + \delta\lambda \mathbf{r}_T \quad (3.1.21)$$

3.1.7 特徵值直接計算法 (Direct computation of eigenvalues)

標準特徵值問題可以表示成

$$\mathbf{A}\Phi = g\Phi \quad (3.1.22)$$

其中 g 為矩陣 \mathbf{A} 的特徵值， Φ 為對應 g 的特徵向量，本節中 $\mathbf{A} = \mathbf{K}_T$ 為在平衡位置的切線剛度矩陣，因為每個平衡位置的 \mathbf{K}_T 都有對應的特徵值，所以 g 可以表示成 \mathbf{Q} 的函數 $g(\mathbf{Q})$ ，若將對應於 g 的特徵向量單位化，則

$$\Phi^t \Phi = 1 \quad (3.1.23)$$

(3.1.22)式之特徵值問題可以表示成一延伸系統[14]

$$\begin{bmatrix} g(\mathbf{Q}) - \Phi^t \mathbf{K}_T \Phi \\ \Phi^t \Phi \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.1.24)$$

(3.1.22)式之延伸系統，在迭代過程的微分矩陣與改正量可以表示成

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_T & \Phi^{(i)} \\ \Phi^{(i)t} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^{(i+1)} \\ g^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.1.25)$$

我們可由以下的迭代求出 \mathbf{K}_T 的特徵值與對應的特徵向量，令

$$\Theta = \mathbf{K}_T^{-1} \Phi^{(i)} \quad (3.1.26)$$

$$g^{(i+1)} = \frac{1}{\Phi^{(i)t} \Theta} \quad (3.1.27)$$

$$\Phi^{(i+1)} = \Theta g^{(i+1)} \quad (3.1.28)$$

當 $\|\Phi^{(i+1)} - \Phi^{(i)}\| \leq e_{gtol}$ ，其中 e_{gtol} 為一給定之特徵值容許誤差值，我們將得

到 $g = g^{(i+1)}$ 、 $\Phi = \Phi^{(i+1)}$ 。

3.1.8 臨界值直接計算法 (Direct computation of critical points)

平衡路徑的臨界點通常指極限點或分歧點，在臨界點系統切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 的行列式值為 0，所以 \mathbf{K}_T 有一個特徵值 $g=0$ ，即 $\mathbf{K}_T \Phi = 0\Phi$ ，所以 $g=0$ 可以視為臨界條件，將其加入平衡方程式可得一延伸系統[3]

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda \mathbf{P} \\ g(\mathbf{Q}) \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{0} \\ 0 \end{cases} \quad (3.1.29)$$

(3.1.29)式之延伸系統，在迭代過程的微分與改正量可以表示成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ g, \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{Q} \\ \delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda \mathbf{P} \\ g(\mathbf{Q}) \end{Bmatrix} \quad (3.1.30)$$

特徵值 g 對系統位移向量 \mathbf{Q} 的微分向量 g, \mathbf{Q} 可以近似成[3]

$$g, \mathbf{Q} \approx \frac{\Phi^t}{\gamma} [\mathbf{K}_T(\mathbf{Q} + \gamma \Phi) - \mathbf{K}_T(\mathbf{Q})] \quad (3.1.31)$$

其中 γ 是一個常數

$$\gamma = \max_{1 \leq i \leq N} |Q_i| \times 10^{-6} \quad (3.1.32)$$

Q_i 是整體位移的第 i 個分量， N 表離散系統的自由度數， γ 大小限制在在 $[10^{-8}, 10^{-3}]$ 間。

由 3.1.5 節中延伸系統的延遲解法之(3.1.11)式可以得到負荷參數的改正量

$$\delta \lambda = - \frac{g, \mathbf{Q} \mathbf{r}_0 + g}{g, \mathbf{Q} \mathbf{r}_T} \quad (3.1.33)$$

以及由(3.1.12)式，得到增量位移改正量

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.1.34)$$

\mathbf{r}_0 是(3.1.19)式中標準牛頓法中，不平衡力的位移修正量。

3.1.9 正交軌線法 (Orthogonal trajectory accession)

增量迭代過程中的負荷參數修正量 $\delta\lambda$ ，也可以使用文獻[16]所提的正交軌線法得到，其方法是在由 N 維的位移向量與負荷參數所組成的 $N+1$ 維空間中，令

$$\mathbf{t} = \{\mathbf{r}_T, 1\}^t \quad (3.1.35)$$

$$\mathbf{n}^t = \{\delta\mathbf{Q}, \delta\lambda\} \quad (3.1.36)$$

$$\mathbf{n}^t \mathbf{t} = 0 \quad (3.1.37)$$

其中 \mathbf{n}^t 為包含負荷參數修正量 $\delta\mathbf{Q}$ 與增量位移修正量 $\delta\lambda$ 的 $N+1$ 維修正量， \mathbf{t} 是將參考負荷 \mathbf{P} 或 \mathbf{F}_P 的切線解向量 \mathbf{r}_T 放大一維，將(3.1.34)式帶入(3.1.37)式整理，可以得到負荷參數修正量

$$\delta\lambda = -\frac{\mathbf{r}_0^t \mathbf{r}_T}{1 + \mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T} \quad (3.1.38)$$

將 $\delta\lambda$ 再帶回(3.1.34)式則可以得到增量位移修正量 $\delta\mathbf{Q} = \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T$ 。

3.1.10 免特徵值分析法 (Eigenanalysis-free method)

文獻[17,29]中提出一個的方法，可以不需要進行特徵值的計算，直接在剛度矩陣的 \mathbf{LDL}^t 分解 (\mathbf{LDL}^t -decomposed stiffness matrix) 運算中得到一個最接近 0 的近似特徵值，當特徵值靠近 0 ($g \rightarrow 0.0, g \neq 0.0$) 時，它對應的近似特徵向量

$$\mathbf{s}_j = (\mathbf{L}^t)^{-1} \mathbf{e}_j \quad (3.1.39)$$

其中 j 是對角矩陣 \mathbf{D} 中絕對值最小的位置， \mathbf{e}_j 是第 j 維純量等於 1，其他部

分為 0 的 N 維單位向量。

這個方法同時可以得到近似特徵值

$$g = \frac{D_j}{\|\mathbf{S}_j\|^2} \quad (3.1.40)$$

其中 D_j 是對角矩陣 \mathbf{D} 中第 j 個分量，當我們的平衡位置越靠近臨界負荷，即特徵值越靠近 0，所求得的近似特徵值與特徵向量也越靠近真正的值。

這個方法所花費的計算時間非常少，因為剛度矩陣的分解 $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t$ 在進行平衡路徑的迭代的過程中會一直被重複計算， \mathbf{L}^t 矩陣有上三角結構特性，所以解 $\mathbf{L}^t\mathbf{S}_j = \mathbf{e}_j$ 得到 \mathbf{S}_j 。

3.1.11 子空間法 (Subspace method)

分析結構振動的自然振動頻率 ω ，要求解方程組 $\mathbf{K}\Phi = \omega^2\mathbf{M}\Phi$ ，其中 \mathbf{K} 是系統剛度矩陣， \mathbf{M} 是系統質量矩陣，可以把他當作廣義特徵值問題

$$\mathbf{A}\Phi = g\mathbf{B}\Phi \quad (3.1.41)$$

來求解，本文採用子空間法 [2]，求出特徵值 g 及對應的特徵向量 Φ ，而在程式中當我們需要計算標準特徵值 (standard eigenvalue problem) 問題 $\mathbf{A}\Phi = g\Phi$ 時，令 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 單位矩陣 (Identity matrix)。

子空間法以將 N 維的大型特徵值問題近似的轉化為一個 P 維向量空間的小型特徵值問題，從而使求解的問題縮小，節省計算時間，但是當遇到特徵值為負的，無法求出答案，所以本文在計算之前首先利用 3.1.10 的免特徵值分析法 [17,29]，這個方法會提供一個切線剛度的近似特徵值 (3.1.40) 式，雖然這個近似值在它距離 0 越遠時越不準確，但是它的正負號與真正的特徵值解是相同的，所以一旦發現它是負號時，在運算中給一常數 c ，讓方程組 (3.1.41) 成為

$$(\mathbf{K} + c\mathbf{M})\Phi = g'\mathbf{M}\Phi \quad (3.1.42)$$

其中 $g' = g + c > 0$ ，如此可以順利迭代求出特徵值 g 。

3.1.12 臨界點種類的判別

臨界負荷在系統剛度中是特徵值為 0 時，即 $\mathbf{K}\Phi = 0$ 的負荷，但是臨界負荷有可能是極限點或是分歧點，它們在平衡路徑上的意義是不同的，極限點是一個區域的極端值，而分歧點存在次要平衡路徑，當本文利用文獻[30]中的方法，以切線剛度 \mathbf{K} 的特徵向量 Φ 與參考負荷向量 \mathbf{P} 的正交性來判別：

$$\begin{cases} \Phi^t \mathbf{P} \neq 0, & \Rightarrow \text{limit point.} \\ \Phi^t \mathbf{P} = 0, & \Rightarrow \text{bifurcation point.} \end{cases} \quad (3.1.43)$$

在數值計算上，我們採取一個誤差容許量 e_{cri} 來當作判別條件，

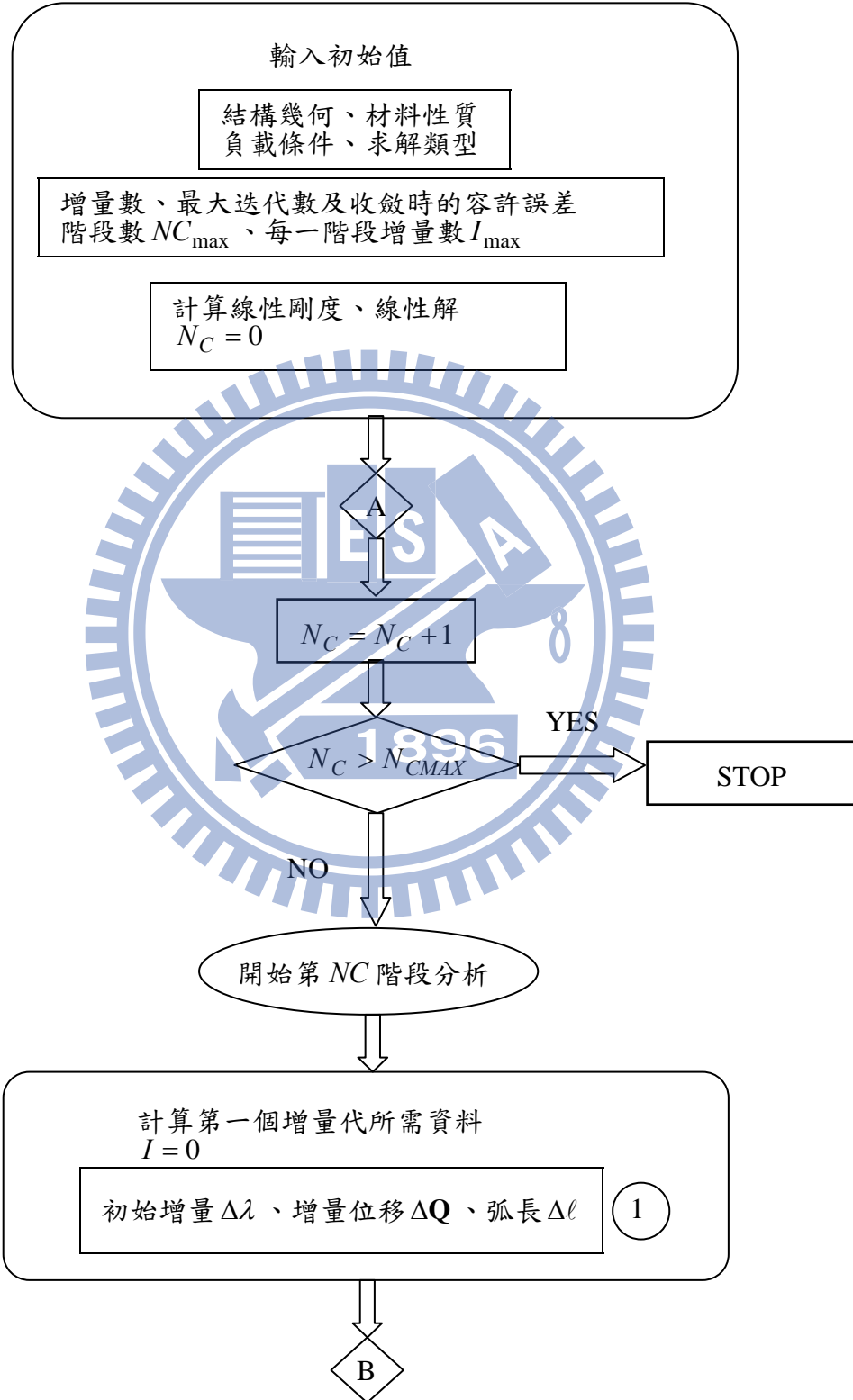
$$\frac{\Phi^t \mathbf{P}}{\|\Phi\| \|\mathbf{P}\|} \begin{cases} > e_{cri} & \Rightarrow \text{limit point.} \\ \leq e_{cri} & \Rightarrow \text{bifurcation point.} \end{cases} \quad (3.1.44)$$

其中[30]建議 e_{cri} 可以視結構條件決定，取在 $[10^{-7}, 10^{-3}]$ 區間中。

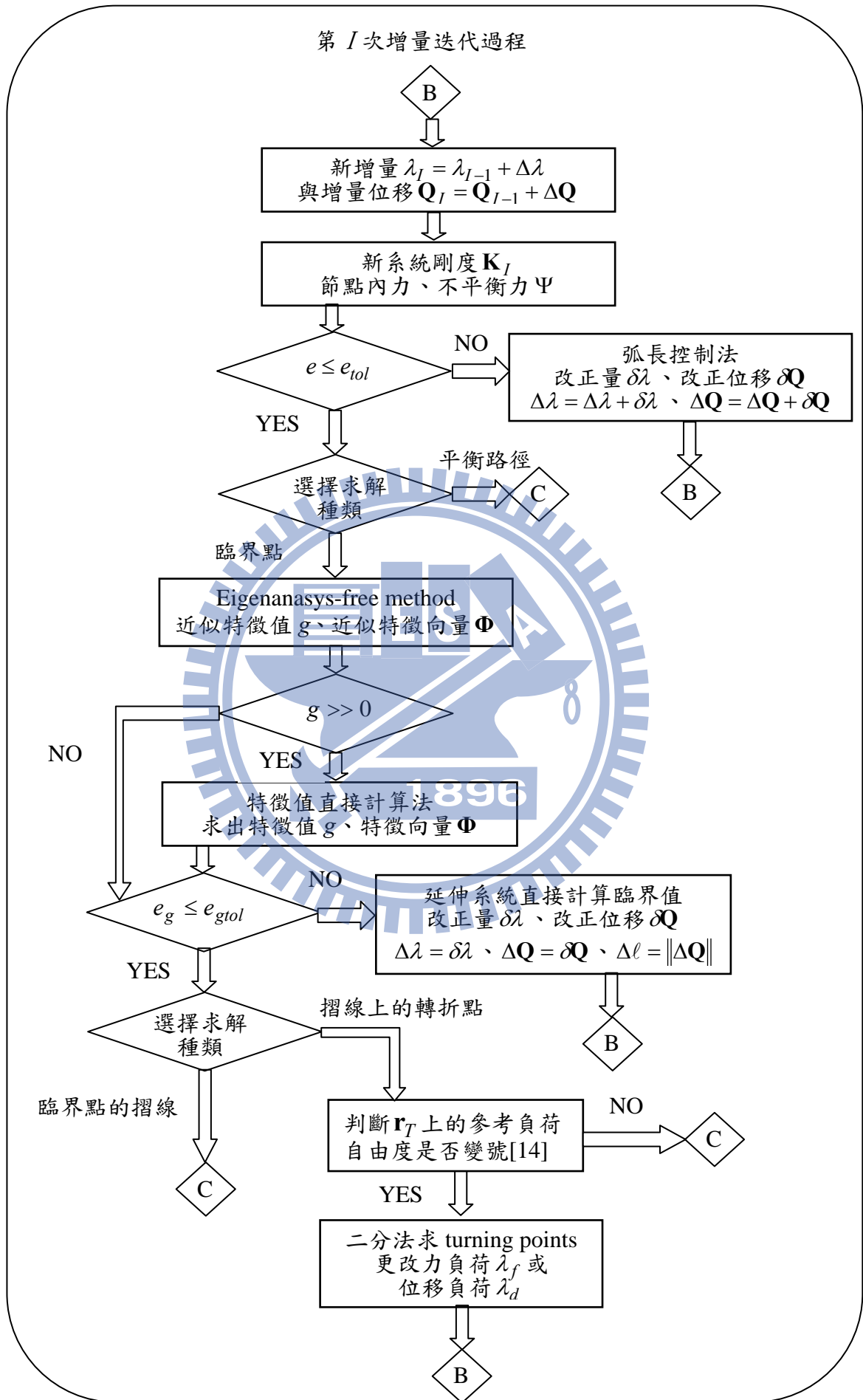
3.2 數值程序

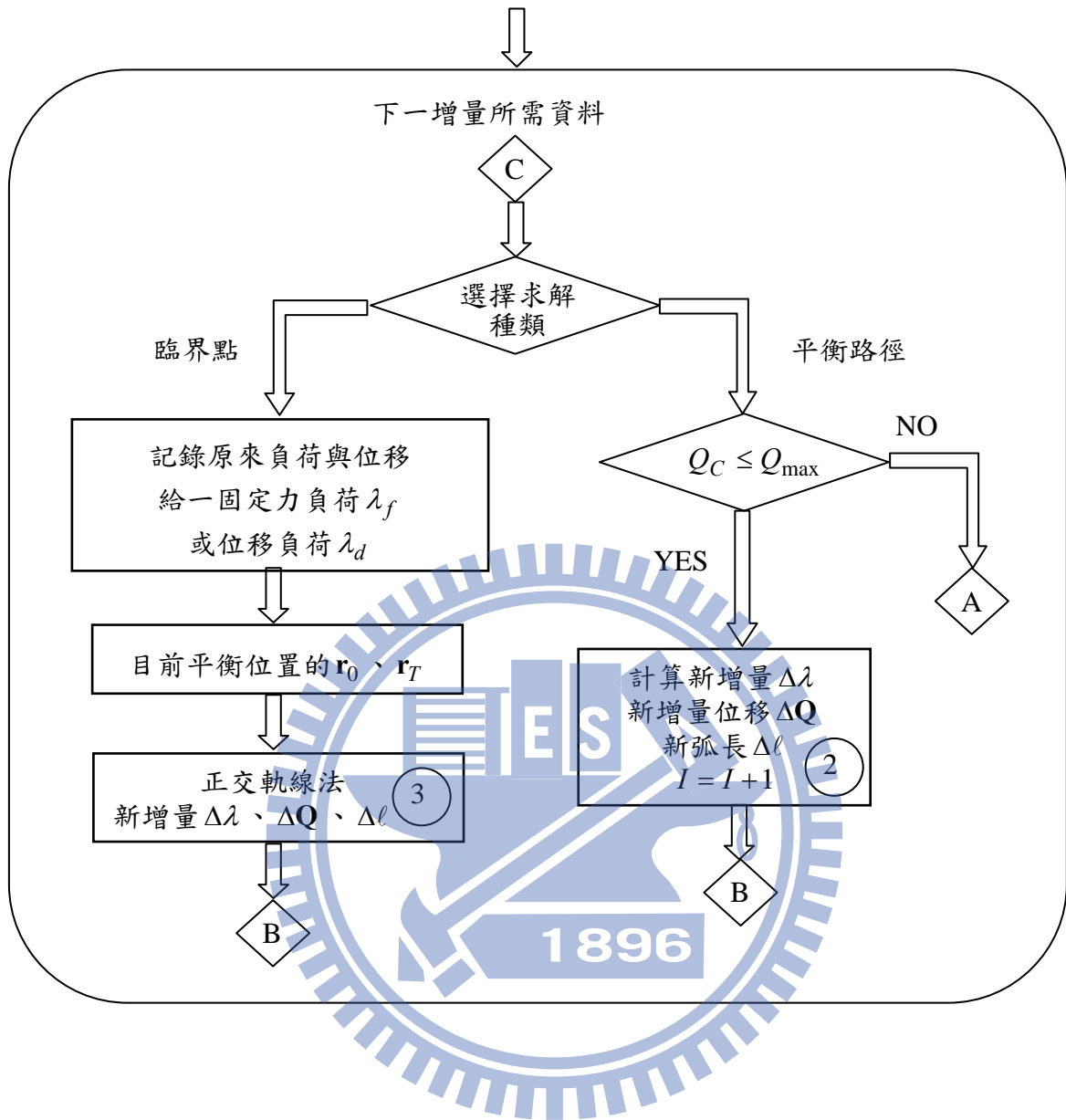
本文數值程序分成多階段進行，在每個階段我們會分別決定邊界條件與負荷參數，以及求解的目標（求得平衡路徑、臨界點或振動分析），其流程圖如下：

數值程序流程圖：



第 I 次增量迭代過程





① 計算平衡路徑、臨界點與動態分析有不同程序：

一、計算平衡路徑

$$\Delta\lambda = \frac{PINIT \times \|Q_{\max}\|}{I_{\max} \times \|Q_C\|} \quad (3.1.45)$$

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda \times \mathbf{r}_T$$

$$\Delta l = \Delta\lambda \times \sqrt{\|\mathbf{r}_T\|^2}$$

其中 $PINIT$ 是給定的初始增量倍率， Q_{\max} 是參考自由度的期望最大位移， Q_C 是參考自由度的位移解， I_{\max} 是每一增量內更新有效剛度矩陣的最大次數。

二、計算臨界點

解(3.1.40)式，由(3.1.44)式選擇適合的 g, Φ ，代入(3.1.33)式，得到

$$\Delta\lambda = -\frac{g, \mathbf{Q} \mathbf{r}_0 + g}{g, \mathbf{Q} \mathbf{r}_T} \quad (3.1.46)$$

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{r}_0 + \Delta\lambda \times \mathbf{r}_T$$

$$\Delta l = \|\Delta\mathbf{Q}\|$$

② 計算下一次增量的初始猜值 Δl 、 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\mathbf{Q}$

$$\Delta l = \Delta l_I \sqrt{\frac{K_{\max}}{K_I}} \quad (3.1.47)$$

$$\Delta\lambda = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T}}$$

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda \times \mathbf{r}_T$$

其中 $\Delta\ell_I$ 是第 I 個增量所使的弧長， K_{\max} 是給定的每一增量最大迭代數， K_I 是第 I 個增量迭代至平衡所使用的迭代數。

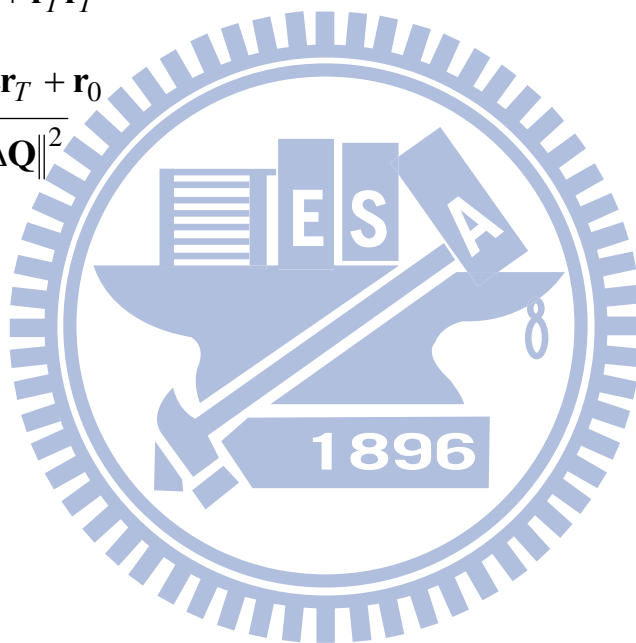
$\Delta\lambda$ 正負號之決定方法如下：若 $\Delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_T > 0$ ，則 $\Delta\lambda$ 的正負號與第 I 個增量相同，反之則相反。

③ 因為參考自由度改變，利用正交軌線法求新增量猜值 $\Delta\ell$ 、 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\mathbf{Q}$

$$\Delta\lambda = -\frac{\mathbf{r}_0^t \mathbf{r}_T}{1 + \mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T} \quad (3.1.48)$$

$$\Delta\mathbf{Q} = \delta\lambda \mathbf{r}_T + \mathbf{r}_0$$

$$\Delta\ell = \sqrt{\|\Delta\mathbf{Q}\|^2}$$



第四章 挫屈梁的初始變形及自由振動分析

圖 1-1 (a) 所示為一長方形斷面的細長直梁，其長為 L_T ，寬為 b ，高為 h ，該梁兩端受到側向夾持，一端受軸向壓縮 Δ ，當壓縮量到達挫屈臨界值，會造成側向挫屈，如繼續施加軸向壓縮，則該梁會如圖 1-1 (b) 所示朝側向拱起，文獻上通常稱其為挫屈梁，稱該變形為挫屈梁的初始變形，並用 δ/h 表示挫屈的程度，其中 δ 為梁中點的側向位移，文獻上通常假設其形狀為該梁的第一挫屈模態[1,4-6,28,34,36-38,40,43]。文獻上有不少挫屈梁振動的研究[1,4-6,11,18,19,27,28,31,34-38,40,41,43-45]，其中大都是 δ/h 較小（例如 $\delta/h < 10$ ）的淺挫屈梁，文獻[27,28]用淺拱（shallow arch）理論探討淺挫屈梁之自然振動頻率及模態的解析解，並以實驗驗證其結果。文獻[43]中，假設挫屈梁之側向振動位移為該挫屈梁對應之直梁之前兩個挫屈模態的組合，用淺拱理論、Galerkin's method 及假設模態法，探討淺挫屈梁（ $\delta/h \leq 1.5$ ）之自然振動頻率及受基礎振動的非線性振動，並且用實驗驗證其分析結果。由文獻[11,27,28,43]的分析及實驗可以發現，當 δ/h 很小時，不同細長比 η 的挫屈梁，若 δ/h 相同，則有相同的無因次自然頻率 $\omega/(EI\rho AL_T^4)^{1/2}$ ，其中 ω 為自然頻率、 E 為彈性模數， I 為梁斷面的二次矩、 ρ 為密度、 A 為斷面積， L_T 為長度。當 δ/h 很大（例如 $\delta/h \geq 100$ ）時，文獻上一般假設不同細長比 η 的挫屈梁仍具有相同的無因次自然頻率，但缺乏理論、實驗或數值結果的驗證。文獻[4]用淺拱理論、採用文獻[11,27,28]的自然頻率及與文獻[42]幾乎一樣的方法探討非淺挫屈梁（non-shallow buckled beam）（ $\delta/h = 200$ ）受基礎振動的非線性振動，並且以微結構尺寸的實驗，驗證其分析結果，但並沒有提供可信的比較結果。文獻上在探討挫屈梁的振動時，不管梁之細長比 η 及 δ/h 的大小，都假設其初始變形該梁的第一挫屈模態，其軸向正向力（normal force）為均勻分佈

[4-6,15,18,28,31,34,35,40,41,43]，但甚少探討這些假設的適用範圍。文獻上在探討挫屈梁的非線性振動時一般都採用假設模態法，且假設振動為該挫屈梁之前幾個挫屈模態的組合，或是對應之直梁的前幾個振動模態的組合，但假設振動為該挫屈梁初始變形之振動模態的組合應較合理[11,27,28]。所以用假設模態法探討挫屈梁的非線性振動時，首先必須能精確的決定挫屈梁的初始變形、自然振動的頻率及振態，但文獻仍缺乏非淺挫屈梁之初始變形及自然振動的研究。所以本章中將採用第二章的共旋轉有限元素法，探討細長比 η 及 δ/h 對非淺挫屈梁之初始變形及自然振動的影響，本研究將以第三章中的弧長控制法求得挫屈梁之初始變形，再用 3.1.11 的子空間法求挫屈梁的自然振動頻率及振態。本章將在 4.1 節探討挫屈梁初始變形並與解析解比較，以了解解析解的準確性及適用範圍，在 4.2 節探討挫屈梁的自然振動頻率及振態並與文獻上的解析解及實驗結果比較。

本章中分析時，僅考慮長方形斷面的梁，梁的材料及幾何常數如下：彈性模數 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，密度 $\rho = 7874 \text{ kg/m}^3$ ，長度 $L_T = 0.64 \text{ m}$ ，寬度 $b = 1.95 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，高度 $h = \sqrt{12} L_T / \eta$ ，其中 η 為細長比。在分析時除另有說明外，都使用細長比 $\eta = 5818.96$ ，高度 $h = 3.81 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的梁，並將其離散為 64 個元素。

4.1 挫屈梁的初始變形

兩端受到側向夾持的固端梁，一端受軸向壓縮 Δ ，當壓縮量到達其挫屈臨界值 Δ_{CR} 時，會發生挫屈現象，此時的軸向反力稱為挫屈負載 P_{CR} ，由材料力學可以得知[21]

$$P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L_T^2} \quad (4.1)$$

$$\Delta_{CR} = \frac{P_{CR}L_T}{AE} = \varepsilon_{CR}L_T \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{CR} = \frac{4\pi^2}{\eta^2} \quad (4.3)$$

$$\eta = (AL_T^2 / I)^{1/2} \quad (4.4)$$

其中 ε_{CR} 為挫屈時的應變， η 為細長比、 A 為斷面積， I 為慣性矩。

固端梁的挫屈模態可表示成[15]

$$v(x) = \frac{\delta}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L_T}\right) \quad (4.5)$$

其中 δ 為梁中點的側向位移。

當 $\Delta > \Delta_{CR}$ 時，梁的變形主要是撓屈變形，若假設其軸向的伸長變形可以忽略不計， $\frac{\delta}{L_T} \ll 1$ ，且其側向位移為其第一個挫屈模態，則其軸向位移

可以近似成

$$u(x) = -\frac{\Delta_{CR}}{L_T} x - \frac{\pi^2 \delta^2}{4L_T^2} x + \frac{\pi \delta^2}{16L_T} \sin \frac{2\pi x}{L_T} \quad (4.6)$$

由(4.3)、(4.4)及(4.6)式，長方形斷面梁之 δ 與 Δ 的關係可表示成

$$\frac{\delta}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \quad (4.7)$$

$$\zeta = \Delta / \Delta_{cr} \quad (4.8)$$

其中 $\zeta > 1$ 。

(4.5)及(4.7)式被廣泛地使用在挫屈梁的振動研究[4-6,15,18,28,31,34,35,40,41,43]上，但甚少探討其適用範圍。當 $\frac{\delta}{L_T} \ll 1$ 時，可以發現(4.7)、(4.8)

式的無因次位移與細長比 η 無關，但由(4.4)及(4.7)式可得

$$\frac{\delta}{L_T} = \frac{\sqrt{12}}{\eta} \frac{\delta}{h} \quad (4.9)$$

所以由(4.9)式可以發現，對細長比 η 不同的梁，使 $\frac{\delta}{L_T} \ll 1$ 之 δ/h 的範圍應不一樣。

由曲率的定義、近似式 $1 + \varepsilon_{CR} \approx 1$ 及(4.5)式，可得挫屈梁的曲率

$$\kappa = \frac{1}{(1 - v'^2)^{1/2}} \frac{4\pi^2 h}{\sqrt{3}L_T^2} \sqrt{\zeta - 1} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (4.10)$$

其中 $v' = \frac{dv}{dx}$ 。由挫屈梁的邊界條件及對稱性可知

$v'(0) = v'(L_T/2) = v'(L_T) = 0$ ，所以由(4.7)及(4.10)式可知在梁兩端及中點的曲率為

$$\kappa_0 = \frac{4\pi^2 h}{\sqrt{3}L_T^2} \sqrt{\zeta - 1} = \frac{2\pi^2 \delta}{L_T^2} \quad (4.11)$$

由挫屈梁的邊界條件及對稱性可知挫屈梁兩端 Y 方向的反力及中點 Y 方向的內力為零，故以一半的挫屈梁為自由體 (free-body)，利用力矩的平衡可得挫屈梁端點軸向反力 $P = P_{CR}$ ，其中 $P = P_{CR}$ 為(4.1)式的挫屈負載。所以

在 $\frac{\delta}{L_T} \ll 1$ 及(4.5)式的假設下挫屈梁端點軸向反力為挫屈負載，此一近似解被廣泛地使用在挫屈梁的振動研究[4-6,15,18,28,31,34,35,40,41,43]上，但甚少探討其適用範圍。

梁斷面最大的撓曲應變發生在上下表面，由(4.11)式可以得到挫屈梁兩端及中點的最大撓曲應變為

$$\varepsilon_b^{\max} = \frac{h}{2} \kappa_0 = \frac{24\pi^2}{\sqrt{3}\eta^2} \sqrt{\zeta - 1} = \frac{12\pi^2}{\eta^2} \frac{\delta}{h} = \frac{\sqrt{12}\pi^2}{\eta} \frac{\delta}{L_T} \quad (4.12)$$

若挫屈梁在彈性範圍內使用，則細長比 η 較小的梁，其容許的挫屈程度 δ/h 或 δ/L_T 都較小。

本節中稱由(4.5) - (4.12)式得到的結果為解析解。本節中採用第三章中

的弧長控制法解非線性平衡方程式，用切線剛度之行列式值為零，作為判斷挫屈的準則，並用[46]的方法求挫屈模態，再以挫屈模態為擾動位移，使挫屈梁進入次要平衡路徑，求得挫屈梁之初始變形，並比較本文非線性分析的結果與解析解的結果。

圖 4-1 – 4-6 為本文的結果，圖 4-1 為梁的挫屈模態圖，圖 4-2 為挫屈梁的無因次中點側向位移 δ/h – 無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta/\Delta_{cr})$ 曲線，圖 4-3 為挫屈梁的無因次側向位移 $v(x)/\delta$ 的分佈圖，圖 4-4 為挫屈梁的無因次軸向位移 $u(x)/\Delta$ 的分佈圖，圖 4-5 為無因次端點軸向反力 P/P_{CR} – 梁中點的側向位移 δ/L_T 的曲線，圖 4-6 為無因次端點軸向正向力 $F(x)/P_{CR} - x/L_T$ 的曲線。圖 4-1 的第一挫屈模態與(4.5)式幾乎完全重合，由圖 4-2 可以發現當 $\delta/h < 30$ ，不同細長比 η 的梁之 $\delta/h - \zeta$ 曲線及解析解幾乎重合，但當 $\delta/h > 120$ 時，解析解和 $\eta \leq 3000$ 之 $\delta/h - \zeta$ 曲線的差異逐漸增加。由本文的數值結果發現，當 $\delta/h = 200$ 時， $\eta = 3000$ 的梁之撓屈應變小於 0.003，通常仍在彈性範圍內，所以 $\eta = 3000$ 左右之挫屈梁的 δ/h 可以超過 200，但解析解(4.7)式約有 4% 的誤差。由圖 4-3 及 4-4 可以發現不同細長比 η 及無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta/\Delta_{cr})$ 之挫屈梁的無因次側向及軸向位移 $v(x)/\delta$ 、 $u(x)/\Delta$ 的分佈曲線與(4.5)及(4.6)式的解析解幾乎重合。由圖 4-5 可以發現不同細長比 η 的梁之 $P/P_{CR} - \delta/L_T$ 曲線幾乎重合；當 $\delta/L_T \ll 1$ 時， $P/P_{CR} \approx 1$ ，所以解析解 $P/P_{CR} = 1$ 是一個很好的近似解；但當 δ/L_T 約為 0.19 時， $P/P_{CR} \approx 1.05$ ，但解析解不管 δ/L_T 的大小， P/P_{CR} 都等於 1，所以在挫屈程度較大時，解析解之軸向反力的誤差應不可忽略。在挫屈程度較大時，本文的結果與文獻[19]中假設梁無伸長變形之 *elastica* 的結果非常接近，所以當挫屈程度較大時，挫屈梁的軸向伸長變形可以忽略不計的假設應是恰當的。由(4.7)及(4.9)式可知，圖 4-2 中對應於無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta/\Delta_{cr})$ 之

$\frac{4}{\eta}\sqrt{\zeta-1}$ 為無因次側向位移 δ/L_T 的解析解，其值與本文非線性分析的數值解非常接近，由圖 4-6 可以發現當 δ/L_T 的值相同時，不同細長比 η 之挫屈梁的無因次端點軸向正向力 $F(x)/P_{CR}-x/L_T$ 的分佈曲線幾乎完全重合，由圖 4-7 亦可以發現隨著 δ/L_T 的增加，軸向正向力沿軸向的變化愈大，故均勻軸向正向力的假設在無因次側向位移 δ/L_T 較大時應不適用。

4.2 挫屈梁的自然振動頻率及振態

由挫屈梁在初始變形位置的切線剛度矩陣及質量矩陣，可得挫屈梁線性振動的運動方程式(2.7.2)。本節用 3.1.11 節的子空間法求挫屈梁的自然振動頻率及振態。本節中稱對應於第 i 個振態的自然振動頻率為 ω_i ，當 i 是奇數時，挫屈梁振態中的軸向和側向分量分別是反對稱和對稱的，當 i 是偶數時，挫屈梁的振態中的軸向和側向分量分別是反對稱和反對稱的。本節中探討了挫屈梁之無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 及振態，其中 $m = \rho A$ 為梁的線密度，與無因次壓縮量 $\zeta(=\Delta/\Delta_{cr})$ 、無因次側向挫屈位移 δ/h 或 δ/L_T 、及細長比 η 的關係。本文的數值分析發現， $\eta = 500$ ， $\delta/h = 24.4$ ($\delta/L_T = 0.169$)， $\varepsilon_b^{\max} = 0.0120$ ； $\eta = 1000$ ， $\delta/h = 90.3$ ($\delta/L_T = 0.313$)， $\varepsilon_b^{\max} = 0.0126$ ； $\eta = 3000$ ， $\delta/h = 271$ ($\delta/L_T = 0.313$)， $\varepsilon_b^{\max} = 4.20 \times 10^{-3}$ 。因本文中假設應變為小應變且在彈性限內，所以本節中對不同細長比 η 的挫屈梁，考慮不同的最大無因次側向挫屈位移 δ/h 或 δ/L_T 。

圖 4-7 - 4-18 為本文的結果，圖 4-7 為梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次壓縮量 $\zeta(=\Delta/\Delta_{cr})$ 曲線，圖 4-8 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h < 3, i=1, 2$)，圖 4-9 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位

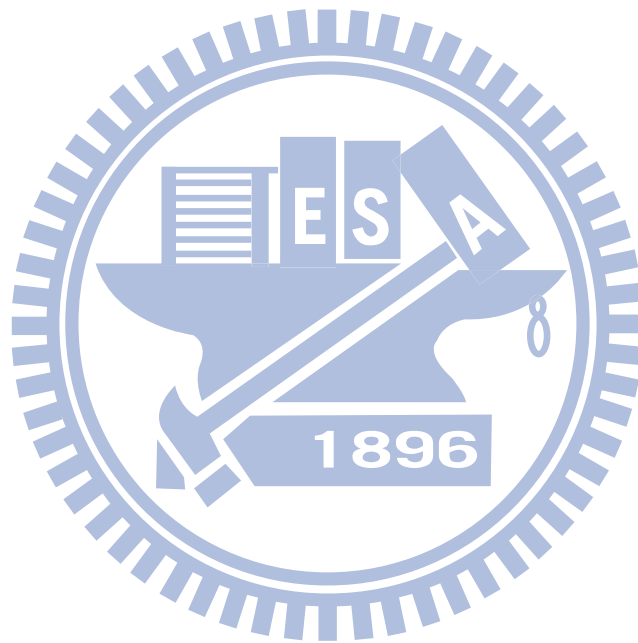
移 δ/h 的曲線 ($\delta/h < 8, i=1-7$)，圖 4-10 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h < 200, i=1-6$)，圖 4-11 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/L_T 的曲線 ($\delta/L_T < 0.3, i=1-6$)，圖 4-12 為挫屈梁的前六個振動模態 ($\delta/h = 1$)，圖 4-13 為挫屈梁的前六個振動模態 ($\delta/h = 5$)，圖 4-14 為不同無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 之挫屈梁的前八個振動模態 ($\eta = 500, 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \leq 15, X_2$ 分量)，圖 4-15 為不同無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 之挫屈梁的前八個振動模態 ($\eta = 500, 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \leq 15, X_1$ 分量)，圖 4-16 為不同無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 之挫屈梁的前八個振動模態 ($\eta = 10000, 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \leq 15, X_2$ 分量)，圖 4-17 為不同無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 之挫屈梁的前八個振動模態 ($\eta = 10000, 20 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \leq 300, X_2$ 分量)，圖 4-18 為不同無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 之挫屈梁的前八個振動模態 ($\eta = 10000, 20 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \leq 300, X_1$ 分量)。

由圖 4-8 可以發現固端梁在挫屈前後，對應於第一及第二個振態之自然振動頻率的變化，在挫屈前 ($0 \leq \zeta < 1$) 時， ω_i ($i=1,2$) 隨著 ζ 增加而減少，在挫屈時 ($\zeta = 1$)， $\omega_1 = 0$ ；在挫屈後 ($\zeta > 1$)， ω_1 隨著 ζ 增加而增加，且在 $\zeta = 3.5$ ($\delta/h < 1.8$) 左右超越 ω_2 ， ω_2 幾乎沒有改變。由圖 4-9 可以發現，當 $\delta/h < 1.5$ ，本文的 ω_1 與 [43] 的實驗及分析結果、[11,27,28] 的分析結果都很接近，當 $\delta/h > 1.5$ ，本文的 ω_1 與 [11,27,28] 的分析結果很接近，但偏離 [43] 的實驗及分析結果，[43] 提到 $\delta/h > 1.5$ 時，其實驗結果是不可靠的。本文的 ω_2 與 [11,27,28] 的分析結果很接近。由圖 4-9 可以發現，當 $\delta/h \leq 8$ ，本文的

ω_i ($i=1-7$)與[14,27,28]的分析結果很接近。在[11,27,28]中，當 i 是偶數時，不管 δ/h 及細長比 η 的大小， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 為一個常數，由圖 4-10 可以發現，當 $i=2$ ， $\delta/h \leq 200$ 時， $\omega_2/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 幾乎沒有變化，但在 $i=4,6$ 時，隨著 δ/h 增加及細長比 η 減少， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 逐漸變小；當 $i=1$ ， $20 \leq \delta/h \leq 200$ 時， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 幾乎沒有變化，但在 $i=3,5$ 時，隨著 δ/h 增加及細長比 η 減少， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 逐漸變小。由圖 4-10 亦可以發現當 $\delta/h \leq 10$ ， $\eta \geq 500$ 的挫屈梁幾乎有相同的 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ ；當 $\delta/h \leq 50$ ， $\eta \geq 3000$ 的挫屈梁幾乎有相同的 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ ；當 $\delta/h \geq 100$ ， $\eta \geq 3000$ 的挫屈梁之 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 有相當的差異。所以當 $\delta/h \leq 10$ 時，對 $\eta \geq 500$ 的挫屈梁， δ/h 是很好的無因次側向位移，所以當 $\delta/h \geq 100$ 時，對 $\eta \geq 3000$ 的挫屈梁， δ/h 仍不是一個很好的無因次側向位移。由圖 4-11 可以發現，當 $\delta/L_T < 0.02$ ， $\eta \leq 1000$ 的挫屈梁的 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 有相當的差異，所以 δ/L_T 不是很好的無因次側向位移；當 $\delta/L_T \geq 0.05$ ， $\eta \geq 3000$ 的挫屈梁幾乎有相同的 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ ，所以 δ/L_T 是很好的無因次側向位移；當 $\delta/L_T \geq 0.1$ ， $\eta \geq 1000$ 的挫屈梁幾乎有相同的 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ ，所以 δ/L_T 是很好的無因次側向位。

由圖 4-12 - 4-18 可以發現，當 $1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1}(\approx \delta/h) \leq 15$ 時，細長比 $\eta = 500$ 、 $\eta = 5818.96$ 、 $\eta = 10000$ 的挫屈梁，若有相同的 δ/h ，則其振態中的側向分量都很接近，但 $\eta = 500$ 之振態中的軸向分量遠大於 $\eta = 5818.96$ 、 $\eta = 10000$ 之振態的軸向分量，若 δ/h 不同時，振態中對稱的側向分量有很大的變化，但不對稱的側向分量幾乎沒有變化，本文的結果與[27]的結果一致。當 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1}(\approx \delta/h) \geq 20$ 時，細長比 $\eta = 10000$ 的挫屈梁，其振態的側

向分量幾乎沒有變化，但其振態的軸向分量變化很大，且和 $\frac{2}{20\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1}$ 、 $\eta = 500$ 的挫屈梁振態的軸向分量很接近。



第五章 挫屈梁受側向負荷之幾何非線性分析

本章中擬探討的挫屈梁與第四章中的挫屈梁的定義相同，但為了本章的完整性，本章中將挫屈梁的定義再簡單的說明如下：圖 5-1 所示為一長方形斷面的細長直梁，其長為 L_T ，斷面寬為 b ，斷面高為 h ，該梁兩端受到側向夾持，一端受軸向壓縮 Δ 造成側向挫屈，以第一挫屈模態的形狀朝側向拱起，本章中稱此挫屈後的梁為挫屈梁。令 δ 為挫屈梁中點 C 的初始側向高度，本章中以軸向壓縮 Δ 及 C 點的初始高度 δ 當作挫屈梁的挫屈程度。當挫屈梁受到側向負荷時，其平衡路徑之負荷-位移曲線上，通常有極限點和分歧點等臨界點，這些點對應的負載稱為臨界負載 (critical load)。挫屈梁要從第一個穩態變成第二個穩態，須克服臨界負載，所以在設計及分析挫屈梁時，精確的臨界負載是很重要的。

本章將分析不同細長比、不同軸向壓縮 Δ (拱起高度 δ) 的挫屈梁， C 點受到側向集中負荷 P 或是集中力矩 M 時 (如圖 5-1 (b)、(c))，其平衡路徑及臨界負載的變化，本章中僅考慮矩形斷面的直梁，採用的彈性模數 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，密度 $\rho = 7.874 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，長度 $L_T = 0.64 \text{ m}$ ，斷面寬度 $b = 1.95 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，高度 $h = \sqrt{12} L_T / \eta$ ，其中 η 為細長比。在分析時除另有說明外，都使用斷面高 $h = 3.81 \times 10^{-4} \text{ m}$ ，細長比 $\eta = 5818.96$ 的梁，並將其離散為 64 個元素。

5.1 挫屈梁受集中負荷之非線性分析

本節將探討不同細長比、不同軸向壓縮 Δ (拱起高度 δ) 的挫屈梁，中點 C 受到側向集中負荷 P 時的平衡路徑及臨界負載 (如圖 5-1 (b))。令 δ 為挫屈梁中點 C 的初始側向高度， δ_C 、 v_C 、 u_C 分別為為中點 C 受負荷 P 後的側向高度，側向與軸向位移。圖 5-2 為無因次軸向壓縮量 $\zeta = 1.7, 2.2, 3$ 時的側向

負荷 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -側向位移 $\frac{-v_C}{h}$ 曲線，其中 $\zeta = \Delta/\Delta_{CR}$ ， Δ_{CR} 為第一個側向挫屈模態發生時的軸向壓縮量，由圖5-2可以發現平衡路徑上的臨界點發生情形隨 ζ 不同而有變化， $\zeta = 1.7$ 、 2.2 和 3 都存在兩個極限點 $L_j^\zeta, j = u, d$ ，但是分歧點 $B_j^\zeta, j = u, d$ 只發生在 $\zeta = 2.2$ 和 3 ，而分歧點發生極限點之前，意即分歧點發生在穩定區則只有在 $\zeta = 3$ 時。在研究不同 ζ 的挫屈梁受側向負荷的非線性行為時，比較有價值的資料通常是隨著 ζ 變化的各個臨界點，例如進入次要平衡路徑的分歧點，或是發生跳躍現象的極限點，但是如果隨著邊界條件或是結構材料常數的改變，每次都重新計算平衡路徑，將花費龐大的計算量，因此本章使用第三章3.1.4節的延伸系統與3.1.5節的延伸系統延遲分解法，延伸系統為將平衡方程式加上輔助條件的廣義增量迭代法，再以3.1.8節的臨界值直接計算法當作輔助條件，直接由臨界點上取得猜值做增量迭代，計算下一個邊界條件或結構條件上的臨界點，同時以3.1.12節的(3.1.44)式來判別臨界點是極限點或是分歧點。圖5-3將不同 ζ 的挫屈梁平衡路徑視為多維度空間中的曲面，空間中臨界點的集合即為摺線 (fold lines)，廣義增量迭代法可以沿著摺線追蹤不同 ζ 的臨界點。圖5-4為圖5-3在負載與側向位移平面上的投影，圖5-5為圖5-3在負載與軸向壓縮平面上的投影，透過投影我們可以把空間中的摺線對應我們需要的參數上。

圖 5-6 為 $\zeta \leq 10$ 時挫屈梁中點 C 的初始側向高度 δ 、分歧點高度 δ_{CR}^B 與極限點高度 δ_{CR}^L 在無因次化高度 $\frac{\delta_C}{h}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面的摺線圖，圖 5-7 為 $\zeta \leq 10$ 時挫屈梁的分歧點負載 P_{CR}^B 與極限點負載 P_{CR}^L 在無因次化負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ - η -軸向壓縮位移 ζ 平面的摺線圖，圖 5-6,5-7 中 L^T 點是極限點摺線的轉折點 (turning point)，也就是極限點在軸向壓縮位移逐漸增加時開始發生

的地方，由圖 5-6,5-7 可發現挫屈發生後（ $\zeta=1$ ）後極限點就出現了， B^T 點是分歧點摺線的轉折點，即是分歧點在軸向壓縮增加時開始出現的地方，大約出現於 $\zeta=2.045$ ，該點對應的端點軸向壓力為固端受軸向壓力的第二個挫屈負荷 $\frac{80.766EI}{L^2}$ ，該點對應的 $P_{CR}^B=0$ 。 B^L 點則為分歧點和極限點相交的地方，表示這個點在平衡路徑上既是分歧點也是極限點，由這些臨界點的轉折點 B^L 、 L^T 、 B^T 可以發現在 $2.045 < \zeta < 2.55$ 時分歧點高度比極限點低，所以在結構施加往下的負載時會先碰到極限點，表示平衡路徑上分歧點會發生在極限點之後，即結構歪斜的現象會發生在平衡路徑的不穩定區內，在 $\zeta > 2.55$ 則是平衡路徑上分歧點會先發生。

圖 5-8 為 $\zeta \leq 80$ 時， $\eta=500, 10^4$ 的挫屈梁中點 C 的初始側向高度 δ 、分歧點高度 δ_{CR}^B 與極限點高度 δ_{CR}^L 在無因次化高度 $\frac{\delta_C}{h}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面的摺線圖，圖 5-9 為同情形下分歧點負載 P_{CR}^B 與極限點負載 P_{CR}^L 在無因次化負載 $\frac{PL_T^2}{EI}\eta$ -軸向壓縮位移 ζ 平面的摺線圖，在 $\zeta=80$ ($\frac{\delta}{h}=10$) 時， $\eta=500$ 的挫屈梁最大撓曲應變由 (4.12) 式可知約為 5×10^{-3} ，仍在結構的彈性範圍內，由圖 5-8,5-9 可以得知在 $\zeta \leq 80$ 時 $\eta=500$ 的臨界點的無因次化結果與 $\eta=10^4$ 的結果相當吻合，故可以得知在彈性範圍內，不同細長比的挫屈梁臨界點的負載與高度的無因次化結果很接近。

圖 5-10 為 $\eta=1000, 3000, 10^4$ 的梁結構在 $\zeta \leq 3 \times 10^4$ （拱起高度約 $\frac{\delta}{h} \leq 200$ ）時中點 C 的分歧點高度 δ_{CR}^B 與極限點高度 δ_{CR}^L 在無因次化高度 $\frac{\delta_C}{h}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面上的摺線圖，圖中也加入中點 C 初始側向高度的解析解 $\delta_{Analy.}$ 供參考比較，圖 5-11 為同情形下分歧點點負載 P_{CR}^B 與極限點負

載 P_{CR}^L 在無因次化負載 $\frac{PL_T^2}{EI}\eta$ - 軸向壓縮位移 ζ 平面上的摺線圖，由圖 5-10, 5-11 可以發現當 $\zeta \leq 2 \times 10^3$ 時，不同細長比的臨界點無因次化高度與負載幾乎重合，但是當 $\zeta > 2 \times 10^3$ 時， $\eta = 1000$ 的結果與 $\eta = 3000, 10^4$ 的結果逐漸分歧，而當 $\zeta > 1 \times 10^4$ 時， $\eta = 3000$ 的結果與 $\eta = 10^4$ 的結果差異也越來越大，故可知隨著無因次軸向壓縮距離 ζ 的增加，不同細長比的無因次化臨界點摺線差異也逐漸增加，細長比越小的，差異越大。

由圖 5-10 也可知隨著 ζ 的增加，挫屈梁的初始高度 δ 摺線與分歧點高度 δ_{CR}^B 摺線始終很接近，但是極限點高度 δ_{CR}^L 的摺線則與初始高度 δ 摺線差距越來越大，同時由圖 5-11 可以發現極限點負載 P_{CR}^L 與分歧點負載 P_{CR}^B 差異越來越大，表示隨著結構拱起高度越來越高，分歧點都還是很快就會發生，但是極限點發生的高度越來越低，負載越來越大，表示越不容易發生。即挫屈梁受側向及中負載時，在到達分歧點負載 P_{CR}^B 時，即會由分歧點進入不對稱的不穩定平衡路徑，再回到對稱的穩定平衡路徑。

5.2 挫屈梁受集中力矩之非線性分析

文獻[38]在拱起高度 $\frac{\delta}{h} = 181$ 的挫屈梁上中點上架設一顯微鏡片，接著在施加一個集中力矩將鏡片旋轉一個角度，文中將挫屈梁視為非線性彈簧，用實驗測量及內插法求此非線性彈簧之位移負荷曲線，但是並沒有數值模擬的結果，為了了解非淺挫屈梁集中力矩與旋轉位移之間的關係，本節在挫屈梁結構中點 C 上施加一個集中力矩 M (如圖 5-1 (c))，來探討挫屈梁受到力矩的結構變化， δ 為挫屈梁在未受負荷情形下中點 C 的初始側向位移，本節所分析的為無因次軸向壓縮 $\zeta = \Delta/\Delta_{CR} = 30000$ ($\eta = 5818.96$ ，初始高度 $\delta/h = 197$) 的挫屈梁， v_C 、 u_C 、 θ_C 分別為為中點 C 受集中力矩 M 後

的側向、軸向與旋轉位移，圖5-12為受集中力矩 M 的挫屈梁中點 C 之無因次化集中力矩 $\frac{ML_T}{EI}$ -側向位移 $\frac{-v_C}{h}$ 曲線圖，圖5-13為對應圖5-13上各點的結構變形圖，圖5-14為無因次化集中力矩 $\frac{ML_T}{EI}$ -軸向位移 $\frac{u_C}{h}$ 曲線圖，由圖5-12可以發現當施加集中力矩時，側向位移先增加，通過極限點之後側向位移增加但力矩減少，在d點時結構的形狀剛好跟初始形狀透過 X_1 軸上下對稱，接著平衡路徑上的側向位移又逐漸減少，回到初始位置a，圖5-15為無因次化集中力矩 $\frac{ML_T}{EI}$ -旋轉位移 θ_C 曲線圖，可以發現變形過程中集中力矩與旋轉位移非常接近線性關係。



第六章 彈性固端曲梁受中點側力的穩定性分析

Pippard [33]的實驗中，將如圖 6-1(a)所示長度為 L_T 之長方形斷面的細長直梁兩端施加軸向壓縮位移 Δ 及轉角 θ ，使其形成跨度為 ℓ 、兩端轉角為 θ 的固端曲梁（如圖 6-1(b)），然後在其中點 C 施加側向力負載 P ，在加載過程中，轉角 θ 或/及無因次跨度 ℓ/L_T 不同的固端曲梁可能有不同的非線性行為，例如：結構由穩定變成不穩定，或結構由對稱或變成不對稱，即歪斜，或結構有不同形式的的挫屈行為，如跳躍式挫屈或分歧式挫屈...等。圖 6-2 為文獻[33]由實驗在 $\theta-\ell/L_T$ 平面得到的摺線，即不同的穩定或不穩定行為發生時，轉角 θ 及跨度 ℓ/L_T 的臨界值，文獻[33]中稱其為相圖（phase diagram）。圖 6-2 中，C 區觀測到的變形為穩定的變形，沒有跳躍現象也沒有歪斜，區域 L 在變形過程中有跳躍現象，不過會保持對稱，區域 B 則存在分歧點，結構會歪斜，區域 B 又可分為 B_u 與 B_s ，其中區域 B_u 在結構歪斜後馬上變成不穩定，區域 B_s 在結構歪斜後仍然會保持穩定，在圖 6-2 左上角的虛線區域，結構歪斜後會自身互相接觸，無法繼續施加負載，圖 6-2 左上角的虛線為預估的猜測值。因文獻[33]的負載為力負載，故僅能觀察由對稱的穩定平衡狀態進入對稱的不平衡狀態、或不對稱的平衡狀態或不平衡狀態。文獻[33]的實驗採用兩種尺寸的矩形梁，其彈性模數都是 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，第一種長度 $L_T = 0.64 \text{ m}$ ，斷面寬度 $b = 1.95 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，斷面高度 $h = 3.81 \times 10^{-4} \text{ m}$ ，其細長比為 $\eta = 5818.96$ ，第二種長度 $L_T = 0.99 \text{ m}$ ，斷面寬度 $b = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，斷面高度 $h = 3.81 \times 10^{-4} \text{ m}$ 其細長比為 $\eta = 9001.2$ ，文獻[33]提到這兩種尺寸的梁在 $\theta-\ell/L_T$ 平面得到的摺線有細微的小差異，但主要行為結果與區塊是相同的，這可能是細長比不同造成的，但因其細長比都相當大，故差異不大。文獻[33]中似乎沒有探討圖 6-2 是否適用於細長比較小的梁。

文獻[32]使用線性穩定分析來探討文獻[33]的固端曲梁受中點側力時，其平衡路徑上分歧點與極限點發生的位置，同時在數值計算過程中使用打靶法 (shooting method)，尋找這些臨界點發生的臨界值，再搭配最小能量法分析彈性梁穩定狀態下的最後變形，圖 6-3 為文獻[33]合併這兩個方法，在 $\theta-\ell/L_T$ 平面得到的摺線，其中黑色實線為線性穩定分析結果，區域 I 為平衡路徑上不存在極限點與分歧點，所以變形是連續的，區域 II 為平衡路徑上極限點先發生，所以有跳躍現象，區域 III 為平衡路徑上分歧點先發生，所以結構會歪斜，菱形虛線為最小能量法的分析結果，區域 B 為結構在跳躍前後(II B)或歪斜前後(III B)都是對稱的，區域 III C 為結構會先穩定歪斜接著發生跳躍行為，最後再回到對稱，區域 III D 為構會先穩定歪斜，接著發生跳躍行為，但最後不會回到對稱，由圖 6-3 可以知道兩種方法各有限制，線性穩定分析無法區分歪斜後的區域 III B、III C、III D，最小能量無法知道跳躍行為過程中的變形，所以無法區分 II B、III B，另外區域 IV、V 在為文獻[33]的實驗中，結構在歪斜後會發生自身互相接觸，所以文獻[33]在圖 6-2 中左上角以虛線為估測值。文獻[32]使用數值分析，不考慮結構的自身互相接觸，可以得到明確的臨界值，但文獻[32]的 IV 區，在線性穩定分析與最小能量法兩種方法的計算結果是互相抵觸的，線性穩定分析預估結構會先歪斜，接著回到對稱，接著再發生跳躍行為，但是最小能量法顯示結構歪斜後便不會再回到對稱，文獻[33]在部分 IV 區中觀察到對稱結構，文獻[32]認為 IV 區可能是個亞穩態 (metastability) 的區域。

文獻[33]及[32]主要在探討細長比很大的曲梁，受中點側力時，穩定平衡路徑上各種的臨界狀態在 $\theta-\ell/L_T$ 平面的摺線，並未探討不穩定平衡路徑的臨界狀態在 $\theta-\ell/L_T$ 平面的摺線，文獻[33]及[32]亦沒有探討細長比對臨界負載及臨界狀態的影響。

本章中將在 6.1 節探討細長比對曲梁受中點側力 P 之臨界負載及臨界狀

態的影響，試圖找出適用於不同 η 的無因次位移、負載及跨度。在 6.2 節探討不同 θ 及 l/L_T 之曲梁受中點側力 P 之完整的平衡路徑上各種臨界狀態發生時對應的 θ 、 l/L_T 及負載。

本章中使用 3.1.4 節的延伸系統與 3.1.5 節的延伸系統延遲分解法，以 3.1.8 節的臨界值直接計算法當作延伸系統的輔助條件。本章中使用的數值程序可簡單說明如下（詳見第三章）：

(一)將側向力負載 P 視為變動的力負荷參數，求得在某一固定 θ 及 l/L_T 之平衡路徑上，臨界點的負載 P_{CR} 。在計算臨界值時，使用 3.1.10 節的免特徵值分析法，並搭配 3.1.11 節的子空間法，以節省計算時間，同時以 3.1.12 節的(3.1.45)式來判別臨界點是極限點或是分歧點。

(二)選一 ΔP_{CR} 。

(三)將已得到的 P_{CR} 加上 ΔP_{CR} 後，將其固定(固定力負荷參數)，視其為對應某未知跨度 l/L_T 的臨界點負載，然後將軸向壓縮位移 Δ 視為變動的位移負荷參數，可求得對應新的臨界點負載的跨度 l/L_T 。

(四)回步驟(二)，直到求得在某一固定 θ ，臨界點在 $P-l/L_T$ 平面的摺線與轉折點。

(五)將原 θ 加上某一 $\Delta\theta$ 後，取 $\Delta P_{CR}=0$ ，回步驟(三)。

臨界狀態之摺線的轉折點對應的 θ 及 l/L_T ，在 $\theta-l/L_T$ 平面的連線，即為臨界狀態在 $\theta-l/L_T$ 平面的摺線。

本章中計算時除另有說明外，皆採用文獻[33]中的第一種梁，在探討不同細長比之臨界負載及臨界狀態的分析時，梁的長度固定為 $L_T=0.64m$ ，僅改變長方形斷面高度 h ，以符合不同的細長比 $\eta=\sqrt{12}L_T/h$ 。本章中在分析時使用 64 個元素。

6.1 曲梁之初形與其受側向負載負載的無因次化分析

令 $v(x)$ 為曲梁之初形的側向位移，其中 x 為梁軸的 Lagrange 座標，即梁軸變形前的座標， $0 \leq x \leq L_T$ ，由第四章中知道 $\theta = 0^\circ$ 時，不同細長比 η 的挫屈梁在側向挫屈後，若 $\zeta = \frac{\Delta}{\Delta_{CR}}$ 相同，其中 Δ 為軸向壓縮位移， $\Delta_{CR} = \frac{4\pi^2}{\eta^2}$ 為挫屈時的軸向位移，則有相同的 δ/h 及無因次化結構初形 $v(x)/h$ ，其中 δ 為梁中點的側向位移，圖 6-4 為 $\theta = 0^\circ$ 、 $\delta/h = 3$ 時， $\eta = 500$ 與 $\eta = 5818.96$ 的初形比較。但是當 $\theta > 0^\circ$ 時，即使 θ 很小且 ℓ/L_T 接近 1 時，有相同 δ/h 但不同 η 的曲梁，也不會有相同的初形，由圖 6-5 可見 $\theta = 0.1^\circ$ 、 $\delta/h = 3$ 時， $\eta = 500$ 與 $\eta = 5818.96$ 的無因次化初形 $v(x)/h$ 有相當的差異，所以 $v(x)/h$ 不適合當做不同 η 之曲梁的無因次化初形。本章中的曲梁可視為將壓縮量為 Δ 的挫屈梁（如圖 6-1(b) 的虛線所示）施加及轉角 θ 而得到，因挫屈梁的側向位移是發生在 $\Delta > \Delta_{CR}$ 後才發生，所以曲梁的無因次跨度應表示成 $\ell/(L_T - \Delta_{CR})$ 較合理，在 θ 很小且 ℓ/L_T 接近 1 時 $\ell/(L_T - \Delta_{CR}) \approx (\ell + \Delta_{CR})/L_T$ 。由圖 6-6 及圖 6-7 可見不同 η 的曲梁，若有相同的 $\ell/(L_T - \Delta_{CR})$ ，則有相同的無因次的初形 $v(x)/L_T$ 。

第五章中可以得知在 $\theta = 0^\circ$ 時，不同 η 的挫屈梁之無因次挫屈負載 $\frac{P_{CR}L_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 曲線幾乎重合，但是當 $\theta > 0^\circ$ 時，即使 θ 很小且 ℓ/L_T 接近 1 時，有相同的 ζ ，但不同 η 的曲梁，不會有相同的 $\frac{P_{CR}L_T^2}{EI} \eta$ ， $\frac{P_{CR}L_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 曲線不適用於曲梁。圖 6-8 - 6-10 為 $\theta = 0.1^\circ$ 、 5° 、 20° 時，不同 η 的曲梁之極限點無因次挫屈負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ - 無因次跨度 $\frac{\ell}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖，圖中 L^T 為極限點發生的臨界點（轉折點），圖 6-11 為不同 η 的曲梁之極限點摺線的轉折點 L^T 在 $\theta - \ell/(L_T - \Delta_{CR})$ 平面的摺線圖。由圖 6-8 - 6-10 可見不同 η 的曲梁之

轉折點 L^T 對應的 $\ell/(L_T - \Delta_{CR})$ 之值幾乎完全一樣，但無因次極限點負載

$\frac{P_{CR}^L L_T^2}{EI} - \ell/(L_T - \Delta_{CR})$ 曲線卻不相同，不過隨著 θ 及細長比 η 的增加，不同 η

的曲梁之 $\frac{P_{CR}^L L_T^2}{EI} - \ell/(L_T - \Delta_{CR})$ 曲線的差異逐漸消失。以上的討論也許可以

說明當考慮不同 η 的曲梁時，為何文獻[33]中臨界狀態在 $\theta - \ell/L_T$ 平面的摺

線會有些微的差異。當 ℓ/L_T 的範圍不是很小時， $\ell/(L_T - \Delta_{CR})$ 和 ℓ/L_T 的

應非常接近，所以本章中以後的小節中都用 ℓ/L_T 為無因次跨度。

6.2 受中點側力之曲梁在完整的平衡路徑上之臨界狀態

6.2.1 極限點的摺線及轉折點 L^T

圖6-12為 $\theta = 20^\circ$ 的曲梁受中點側力 P 時，位移-負載曲線上的極限點在

無因次負載 $\frac{P L_T^2}{EI}$ - 無因次跨度 ℓ/L_T 平面的摺線圖，在圖中同一個 ℓ/L_T 對應

的二個負載，為位移-負載曲線上，二個極限點之無因次負載，摺線的尖端

$L^T(20^\circ)$ 稱為 $\theta = 20^\circ$ 之極限點的轉折點，在轉折點，上下二個極限點退化

成一，該點對應的跨度 ℓ/L_T 為 $\theta = 20^\circ$ 時，極限點開始發生的跨度，若跨度

大於該跨度，則位移-負載曲線上沒有極限點。文獻[14]提到當極限點摺線

上的兩點在其轉折點的兩側時，此兩點的切線解 $\mathbf{r}_T = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}$ 中，對應參考負

荷自由度的元素會變號，由本文的數值分析中發現確有此特性，所以本文

中用此特性來決定極限點摺線上的轉折點。在 $\theta = 20^\circ$ 之轉折點對應的平衡

位置，稍微改變曲梁端點轉角(例如 $\theta = 19^\circ$)，可求得 $\theta = 19^\circ$ 在 $\frac{P L_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平

面之摺線及轉折點，重複上述步驟，即可得到不同的 $L^T(\theta)$ 對應的跨度及負載。圖6-13為極限點與其轉折點 L^T 在負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -跨度 l/L_T 平面的摺線。

6.2.2 分歧點的摺線、轉折點 B^T 及分歧點在穩定區發生的臨界點 B^L

圖6-14為 $\theta = 20^\circ$ 的曲梁受中點側力 P 時，位移-負載曲線上的分歧點在 $\frac{PL_T^2}{EI}$ - l/L_T 平面的摺線圖，在圖中同一個 l/L_T 對應的二個負載，為位移-負載曲線上，二個分歧點之無因次負載，摺線的尖端 $B^T(20^\circ)$ 稱為 $\theta = 20^\circ$ 之分歧點的轉折點，在轉折點，上下二個分歧點退化成一點，該點對應的跨度 l/L_T 為 $\theta = 20^\circ$ 時，分歧點開始發生的跨度，若跨度大於該跨度，則位移-負載曲線上沒有分歧點。由本文的數值分析中發現，當分歧點摺線上的兩點在其轉折點的兩側時，此兩點的切線解 $\mathbf{r}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}$ 中，對應參考負荷自由度的元素不會變號，所以本文中以跨度為負載參數，使用二分法，求得分歧點在 $\frac{PL_T^2}{EI}$ - l/L_T 平面摺線的轉折點 B^T 。在 $\theta = 20^\circ$ 之轉折點對應的平衡位置，稍微改變曲梁端點轉角(例如 $\theta = 21^\circ$)，可求得 $\theta = 21^\circ$ 時，分歧點在 $\frac{PL_T^2}{EI}$ - l/L_T 平面的摺線及轉折點，重複上述步驟，即可得到 $B^T(\theta)$ 對應的跨度及負載。圖6-15為分歧點與其轉折點在在負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -跨度 l/L_T 平面的摺線。

圖6-16為將圖6-12及圖6-13中， $\theta = 20^\circ$ 時， $\frac{PL_T^2}{EI}$ - l/L_T 平面的極限點與分歧點的摺線畫在同一圖中，圖中可以發現兩條曲線相切在 B_U^L 、 B_D^L ，相切時的物理意義為極限點與分歧點同時發生。令 ω_S 、 ω_A 分別為結構在平衡

路徑上對稱振態及反對稱振態之最小自然振動頻率，在極限點摺線上， $\omega_S = 0$ ，在對稱變形的不穩定區， $\omega_S^2 > 0$ 在對稱變形的不穩定區， $\omega_S^2 < 0$ ，在分歧點摺線上 $\omega_A = 0$ 。圖6-17為在分歧點摺線 $\omega_S^2 - \ell/L_T$ 與最 $\omega_A^2 - \ell/L_T$ 曲線，因為在分歧點摺線上，所以 $\omega_A = 0$ ，當 ω_S 也同時為0時，即是切點 B_U^L 、 B_D^L 。由圖6-16可見，當跨度 ℓ/L_T 介於對應於切點 B_U^L 和轉折點 B^T 對應的跨度 ℓ/L_T 間時，分歧點對應的挫屈負載小於極限負載，且由圖6-17可見，在該跨度間 $\omega_S^2 < 0$ ，故當 $\theta = 20^\circ$ ，在該跨度 ℓ/L_T 間，平衡路徑上極限點會先發生，分歧點發生在不穩定區；當跨度 ℓ/L_T 小於轉折點 B^T 對應的 B_U^L 跨度 ℓ/L_T 時，分歧點對應的挫屈負載小於極限負載，且由圖6-17可見，在該跨度間 $\omega_S^2 > 0$ ，故當 $\theta = 20^\circ$ ，在跨度 ℓ/L_T 小於切點 B_U^L (B^L)對應的跨度 ℓ/L_T 時，平衡路徑上分歧點會比極限點先發生，即發生在穩定區。隨著 θ 增加，分歧點的摺線會逐漸變形，出現上下兩個轉折點 B_U^T 、 B_D^T (= B^T)，圖6-18為 $\theta = 76^\circ$ 時，極限點與分歧點的摺線，由圖6-18可以發現當跨度 ℓ/L_T 小於對應 B_U^T 與 B_D^T 的 ℓ/L_T 時，有一小區間的跨度對應兩個極限點、四個分歧點。由本文的數值分析中發現，若分歧點摺線上的兩點在切點 B_U^L 兩側時，此兩點的切線解 $\mathbf{r}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}$ 中，對應參考負荷自由度的元素會變號，因此本文中沿用與求極限點的轉折點 L^T 同樣的方法來決定 B_U^L ， B_U^L 即是分歧點在穩定區發生的臨界點 B^L 。圖6-19為極限點的轉折點 L^T 、分歧點的轉折點 B_U^T 、 B_D^T (= B^T)、及分歧點在穩定區發生臨界點，切點 B^L (= B_U^L)在 $\theta - \ell/L_T$ 平面的摺線(相圖)。由圖6-19可以發現 B_U^T 大約開始出現於 $\theta = 74^\circ$ ， B_D^T 在 θ 很小時即已出現，到 $\theta = 120^\circ$ 仍存在，但是在 $\theta = 120^\circ$ 附近，當跨度 ℓ/L_T 小於對應 B^L 、 B_U^T 、 B_D^T 的 ℓ/L_T 時，結構在到達第二分歧點前，通常已經歪斜，且不會回到對稱的主平衡路徑(詳見6.2.3節)，所以在實驗上很難被觀測到。

6.2.3 曲梁由分歧點進入不對稱狀態後，再回到對稱狀態的臨界點 A^R 、 A^L

曲梁由分歧點進入次要平衡路徑後，會從對稱狀態變成不對稱的歪斜狀態，若持續施加負荷，曲梁可能由歪斜回到對稱狀態，也可能一直歪斜，無法再回到對稱狀態。圖6-20為 $\theta = 20^\circ$ 、 $\ell/L_T = 0.35$ 時，曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖，圖6-21為對應圖6-20的曲梁的變形圖，圖6-20中， B^1 為主平衡路徑上第一個分歧點， L^1 為次要平衡路徑上第一個極限點，由圖6-21

可以發現曲梁在歪斜後不會回到對稱。圖6-22為 $\theta = 20^\circ$ 、 $\frac{\ell}{L_T} = 0.44$ 時，曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖，圖中 B^1 為主平衡路徑上第一個分歧點， L^1 為次要平衡路徑上第一個極限點，曲梁的變形在通過極限點後，會由不對稱變形漸漸的回到對稱的變形。圖6-23為對應圖6-22各點的曲梁的變形圖。

圖6-24為 $\theta = 20^\circ$ 時的負荷-側向高度曲線圖，由圖6-24可以發現在 $0.35 \leq \ell/L_T \leq 0.415$ 時平衡路徑將不會回到對稱， $0.416 \leq \ell/L_T \leq 0.45$ 時平衡路徑會回到對稱，圖6-25為圖6-24中次要平衡路徑上第一個極限點(平衡路徑上第二個臨界點)的摺線，圖6-26是次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -

跨度 $\frac{\ell}{L_T}$ 的摺線，摺線的轉折點 A^R 為平衡路徑是否回到對稱的臨界點，但是由圖6-26可以發現 $0.415 \leq \ell/L_T \leq 0.418$ 時會有三個臨界點，例如點 B 、 D 、 F 為 $\frac{\ell}{L_T} = 0.417$ 的三個臨界點。圖中虛線部分的臨界點中，下面的部分(曲線 CDE) 為分歧點，上面的部分(曲線 EFG) 為極限點。圖6-27為 $\theta = 20^\circ$ 、 $\frac{\ell}{L_T} = 0.417$ 時，曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖，圖中 B^1 為主平衡路徑

上第一個分歧點， L^1 為次要平衡路徑上第一個極限點，曲梁的變形在通過極限點後，會由不對稱變形漸漸的回到對稱的變形， L^2 為次要平衡路徑第二個極限點， L^2 、 B^2 是經由延伸矩陣針對極限值所求出，其中 B^2 為次要平衡路徑上第二個分歧點，實際計算不同 $\frac{l}{L_T}$ 之梁的平衡路徑時，結構是否回到對稱的臨界點發生在 A^L ，圖6-26中，虛線部分為經由延伸矩陣針對極限值所求出，不過這些點上結構繼續施加負載，依然會產生平衡路徑，圖6-28為對應圖6-26的最小自然振動頻率模態，可以發現在 A^L 時參考負荷自由度剛好會為0，故可以使用振動模態取代切線解當作收斂判別條件，而摺線上的尖點 A^R 則使用二分法求出。圖6-29為 $\theta = 20^\circ$ 、 60° 時平衡路徑上第二個臨界點負載的摺線，與摺線的兩個臨界點 A^R 、 A^L 的負載-跨度摺線，圖6-30為 A^R 、 A^L 的角度-跨度摺線。

6.2.4 由分歧點進入次要平衡路徑後結構是否穩定的臨界點S

曲梁在第一個分歧點進入次要平衡路徑後如果是穩定的，則歪斜的現象在實驗中將被觀測到，圖6-31為曲梁在 $\theta = 20^\circ$ 時進入次要平衡路徑的負荷-側向高度曲線圖，可以發現 $l/L_T \geq 0.55$ 時第二個極限點消失，表示平衡路徑在分歧點之後斜率是負的，即曲梁的結構為不穩定，圖6-32為曲梁在 $\theta = 20^\circ$ 時各種臨界點在負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -跨度 l/L_T 平面上的摺線圖，由圖可以發現點S是第平衡路徑上二個極限點出現的地方，同時也是由分歧點進入次要平衡路徑後結構是否穩定的臨界點，這個負載-跨度的相圖中同時也反映出 L^T 、 B^T 、 B^L 、 A^R 、 A^L 各個轉折點。

圖6-33為全部臨界值轉折點在角度 θ -跨度 l/L_T 平面上的摺線圖，圖6-34為本文結果與文獻[32]、[33]結果比較圖，黑色方塊為文獻[33]的結果，

空心圓形為文獻[32]的結果，黑色實線點為本文的結果，可以發現本文分析結果與文獻[32]、[33]大部分的情形相當接近，將每一種物理行為的區塊都區隔出來，但是也與與文獻上結果存在一些差異，本文將會在下面解釋這些細節。

在文獻中[33]提到的B區，即本文中 L^T 左側、 B_U^T 右側、S右側所包括的區域，在最小能量法的計算中平衡路徑會有一個有跳躍現象，但是跳躍前後都保持對稱，在線性穩定分析中B區包含II、III區，II區是對稱的特徵值先變號，表示結構跳躍行為開始後仍保持對稱，III區則是反對稱的特徵值先變號，表示結構開始跳躍行為時也同時歪斜，本文的點 B^L 為極限點與分歧點同時發生的點，區隔II、III區，由圖6-16與圖6-18可以發現在固定角度時，分歧點的轉折點 B^T 會發生在 B^L 與 L^T 中間，當 l/L_T 介於 B^T 與 B^L 間時，表是結構在不穩定的跳躍過程中，先是保持對稱，接著會變成不對稱，這個現象在實驗中不會被觀測到，故文獻[33]和[32]都沒有 B_D^T 這條摺線。

當 B_U^T 出現後，當角度中 B_D^T 同時存在時，表示對稱結構的平衡路徑中會有二個分歧點，通常第二個分歧點會發生在不穩定區，即平衡路徑會先歪斜再回到對稱，接著發生跳躍現象，然後在不穩定的跳躍過程中又遇到分歧點變成歪斜，最後又回到對稱的穩定狀態，但實際分析平衡路徑後，結構在歪斜後是否回到對稱會先受到轉折點 A^L 影響，若結構在歪斜後不會回到對稱，則第二個分歧點便不會在主要平衡路徑上發生，同時在約 $\theta=140^\circ$ 時， A^L 與 B_U^T 會重合。

文獻[32]的IV區在線性穩定分析與最小能量法兩種方法的計算結果是互相抵觸的，線性穩定分析預估結構會先歪斜，接著回到對稱，接著再發生跳躍行為，但是最小能量法顯示結構歪斜後便不會再回到對稱，文獻[32]認為可能是個亞穩態的區域，IV區在本文中分成二個區塊，右下角為 B_U^T 左

側、 B^L 右側、 A^L 右側圍成的小型狹長區域，因為在 A^L 的右邊，所以結構會回到對稱，又因為在 B_U^T 左側，所以本區域中的結構平衡路徑即同文獻[32]以線性穩定分析的結果，在IV區的左上角，以 B^L 右側、 A^L 左側、 L^T 左側圍成的區塊，則因為在 A^L 的左邊，則平衡路徑歪斜後便不會回復對稱，與最小能量法的分析相同，本文的結果解釋了文獻[32]兩種方法互相抵觸的部分，同時對照文獻[33]的結果，實驗觀測到的行為與 B_U^T 左側、 B^L 右側、 A^L 右側圍成的區域相符，文獻[33]中左上角由虛線圍成的區域為猜想，並非實際結果，故也與本文結果相符。

文獻[32]的V區，與IV區一樣出現兩種方法的結果抵觸的情形，線性穩定分析顯示結構沒有極限點但有分歧點，預估結構會歪斜後在第二個臨界點回到對稱，但是最小能量法卻顯示結構歪斜後便不會再回到對稱，在本文中V區即是圖6-33左上角 A^L 左側、 L^T 右側所包圍的區域，在 L^T 的右邊顯示結構保持對稱的平衡路徑上沒有極限點，在 A^L 的左邊顯示結構歪斜後不會回到對稱，由文獻[32]的IV、V區可以知道，結構歪斜後的變化無法由線性穩定分析預估，不過在結構保持對稱時線性穩定分析可以提供一個可靠的結果。

第七章 結論

本文採用一致性共旋轉有限元素法，探討不同細長比、不同壓縮位移的非淺挫屈梁之初始變形及自然振動頻率及振態、挫屈梁受中點側力的非線性反應及平衡路徑上的各種臨界點在負荷—跨度(壓縮位移)平面的褶線，還有探討不同跨度及固端轉角的曲梁受中點側力的非線性反應及平衡路徑上的各種臨界點在固端轉角—跨度平面的褶線。

本文在當前的元素座標上，以尤拉梁正確的變形機制、非線性梁理論的一致線性化及虛功原理推導梁元素節點慣性力和節點變形力。本文用牛頓—拉福森法配合弧長控制法的增量迭代法解非線性平衡方程式，求得完整的平衡路徑，並用延伸系統法，求得平衡路徑上臨界點的褶線與褶線的轉折點，探討不同跨度的挫屈梁與不同跨度及固端轉角的曲梁之各種臨界狀態及負載。

由本研究可以得到以下結論：

1. 本文非淺挫屈梁之初始變形的結果與文獻上假設梁無伸長變形之結果非常接近，所以非淺挫屈梁的變形主要應是撓曲變形。
2. 非淺挫屈梁之軸向正向力的分佈有相當的變化，所以非淺挫屈梁之振動分析，不應假設其分佈是均勻的。
3. 淺挫屈梁之無因次化自然振動頻率，僅與挫屈梁的拱起高度和梁斷面厚度的比值(δ/h)有關，與梁的細長比(η)無關，這與文獻上的結論相同。但非淺挫屈梁，即 δ/h 較大的挫屈梁， δ/h 相同但 η 不同時，其無因次化自然振動頻率不同；當挫屈梁的拱起高度和梁長度的比值(δ/L_T)較大時，非淺挫屈梁之無因次化自然振動頻率，僅與挫屈梁之 δ/L_T 的比值有關，與梁的細長比(η)無關。所以淺挫屈梁與非淺挫屈梁應採用不同的無因次化側向變形，不同細長比的挫屈

梁才有相同的無因次化自然振動。

4. 不同細長比的挫屈梁受側力時，其平衡路徑上之臨界點對應的無因次化負載與無因次化高度很接近。臨界點摺線的轉折點對應的壓縮位移，為挫屈梁之平衡路徑上出現臨界點的門檻。
5. 本文分析不同跨度及固端轉角的曲梁受中點側力的非線性反應，及平衡路徑上的各種臨界點在固端轉角—跨度平面的褶線，由本文的結果可以解釋文獻上實驗的各種結果，及檢驗文獻上不同分析方法得到的結果之正確性。同時本文非線性分析的結果亦提供了文獻上實驗沒有或很難觀測到的現象，及線性穩定分析或最小能量法無法得到的結果，如在不穩定區及不對稱區的行為。

本文只有由挫屈梁之初始變形與自然振動分析，去檢驗文獻上用假設模態法探討挫屈梁之非線性振動行為時，挫屈梁的初形、假設模態、軸力變化與自然振動頻率等基本假設是否恰當，若要檢驗動態分析的結果，則需進行挫屈梁的動態歷時分析及穩態分析。

參 考 文 獻

- [1] Addressi, D., Lacarbonara, and W., Paolone, A., “Free in-plane vibrations of highly buckled beams carrying a lumped mass” *Acta Mechanica - ACTA MECH*, Vol. 180, No. 1-4, pp. 133– 156, 2005.
- [2] Bathe, K. J., “Finite element procedures” Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [3] Battini, J.-M., Pacoste, C., and Eriksson, A., “Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 16-18, pp. 2169–2185, 2003.
- [4] Buchaillet, L., Millet, O., Quevy, E., and Collard, D., “Post-buckling dynamic behavior of self-assembled 3D microstructures” *Microsystem Technologies*, Vol. 14, No. 1, pp. 69-78, 2007.
- [5] Casals-Terre, J., and Shkel, A. M., “Snap-action bistable micromechanism actuated by nonlinear resonance” *IEEE Sensors (IEEE Cat. No.05CH37665C)*, pp. 893–896, 2005.
- [6] Casals-Terre, J., Fargas-Marques, A., and Shkel, A. M., “Snap-action bistable micromechanisms actuated by nonlinear resonance” *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 17, No. 5, pp. 1082– 1093, 2008.
- [7] Chen, H. H., Lin, W. Y., and Hsiao, K. M., “Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with generic open section” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 2334-2370, 2006.
- [8] Chung, T. J., “Continuous Mechanics” Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1988.
- [9] Crisfield, M. A., “A consistent corotational formulation for nonlinear, 3-dimensional, beam-elements” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, No. 2, pp. 131–150, 1990.

- [10] Dawe, D. J., "Matrix and finite element displacement analysis of structures" Oxford University, New York, 1984.
- [11] Emam, S. A., "A Theoretical and Experimental Study of Nonlinear Dynamics of Buckled Beams" PhD dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2002.
- [12] Eriksson, A., "Fold lines for sensitivity analyses in structural instability" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 114, No. 1-2, pp. 77–101, 1994.
- [13] Eriksson, A., "Structural instability analyses based on generalised path-following" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 156, No. 1-4, pp. 45–74, 1998.
- [14] Eriksson, A., Pacoste, C., and Zdunek, A., "Numerical analysis of complex instability behaviour using incremental-iterative strategies" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 179, No. 3-4, pp. 265–305, 1999.
- [15] Fang, W., and Wickert, J. A., "Post buckling of micromachined beams" Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 4, No. 3, pp. 116–122, 1994.
- [16] Fried, I., "Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, pp. 283-297, 1984.
- [17] Fujii, F., and Noguchi, H., "The buckling mode extracted from The LDLT-decomposed large-order stiffness matrix" Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, No. 7, pp. 459–467, 2002.
- [18] Gerson, Y., Krylov, S., Ilic, B., and Schreiber, D., "Large displacement low voltage multistable micro actuator" 21st IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS 2008), pp. 463 – 466, 2008.
- [19] Heijden, G. H. M., Neukirch, S., Goss, V. G. A., and Thompson, J. M. T., "Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods."

- International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 45, pp. 161-191, 2003.
- [20] Helvajian, H., “Microengineering Aerospace Systems” chapter 1 in Microengineering for Aerospace Systems, ed. ISBN 1-884989-03-9, Aerospace Press, El Segundo, CA, and AIAA, Reston, VA, 1999.
- [21] Hibbeler, R. C., “Mechanics of Material” Prentice Hall, Eighth edition, 2011.
- [22] Hsiao, K. M. and Hou, F. Y., “Nonlinear finite-element analysis of elastic frames” Computers & Structures, Vol. 26, No. 4, pp. 693–701, 1987.
- [23] Hsiao, K. M., and Jang, J. Y., “Nonlinear dynamic analysis of elastic frames” Computers & Structures, Vol. 33, No. 4, pp. 1057–1063, 1989.
- [24] Hsiao, K. M., and Jang, J. Y., “Dynamic analysis of planar flexible mechanisms by corotational formulation” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 87, No. 1, pp. 1–14, 1991.
- [25] Hsiao, K. M., “Corotational total lagrangian formulation for 3-dimensional beam element” AIAA Journal, Vol. 30, No. 3, pp. 797–804, 1992.
- [26] Hsiao, K. M., Yang, R. T., and Lee, A. C., “A consistent finite element formulation for non-linear dynamic analysis of planar beam” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, No. 1, pp. 75–89, 1994.
- [27] Nayfeh, A. H., Kreider, W., and Anderson, T. J., “Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams.” AIAA Journal, Vol. 33, No. 6, pp. 1121–1126, 1995.
- [28] Nayfeh, A. H., and Emam, S. A., “Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams” Nonlinear Dynamics, Vol. 54, No. 4, pp. 395–408 , 2008.
- [29] Noguchi, H., and Fujii, F., “Eigenvector-free indicator, pinpointing and branch-switching for bifurcation” Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, No. 6, pp. 445–457, 2003.
- [30] Parente, E., de Holanda, A. S., and Afonso da Silva, S. M. B., “Tracing

- nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading” *Computational Mechanics*, Vol. 38, No. 6, pp. 505–520, 2006.
- [31] Park, S., and Hah, D., “Pre-shaped buckled-beam actuators: Theory and experiments” *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 148, No. 1, pp. 186–192, 2008.
- [32] Patricio, P., Adda-Bedia, M., and Ben Amar, M., “An elastica problem: instabilities of an elastic arch” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 124, pp. 285–295, 1998.
- [33] Pippard, A. B., “The elastic arch and its modes of instability” *European Journal of Physics*, Vol. 11, pp. 359–365, 1990.
- [34] Poon, W. Y., Ng, C. F., and Lee, Y. Y., “Dynamic stability of a curved beam under sinusoidal loading” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 216, No. G4, pp. 209-217, 2002.
- [35] Qiu, J., Lang, J. H., and Slocum, A. H., “A curved-beam bistable mechanism” *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 137–146, 2004.
- [36] Quévy, E., Buchaillet, L., Bigotte, P., and Collard, D., “self-assembling and actuation of electrostatic micro-mirrors”, *European Solid-State Device Research Conference (ESSDERC 2000)*, pp. 412–415, 2000.
- [37] Quévy, E., Buchaillet, L., and Collard, D., “3-D self-assembling and actuation of electrostatic microstructures” *Electron Devices, IEEE Transactions on*, Vol. 48, No. 8, 34pp. 1833–1839, Aug. 2001.
- [38] Quévy, E., Buchaillet, L., Bigotte, P., and Collard, D., “Large stroke actuation of continuous membrane for adaptive optics by 3D self-assembled microplates” *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 95, No. 2, pp. 183-195, 2002.
- [39] Rao, S. S., “*Mechanical Vibrations, Third Edition*” Addison-Wesley, 1995.

- [40] Rossiter, J., Stoimenov, B., and Mukai, T., “A bistable artificial muscle actuator” 2006 IEEE International Symposium on Micro-NanoMechatronics and Human Science (IEEE Cat. No. 06TH8922C) pp. 35-40, 2006.
- [41] Samuel, B. A., Desai, A. V., and Haque, M. A., “Design and modeling of a MEMS pico-Newton loading/sensing device” Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 127, No. 1, pp. 155-162, 2006.
- [42] Tsai, M. H., Chang, C. W., and Hsiao, K. M., “Nonlinear analysis of planar beams under displacement loading” The First South-East European Conference on Computational Mechanics, SECCM-06, Kragujevac, Serbia and Montenegro, 2006.
- [43] Tseng, W. Y., and Dugundji, J., “Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation” ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, No. 2, pp. 467-476, 1971.
- [44] Younis, M.I., Ouakad, H.M., Alsaleem, F.M., Miles, R., and Cui, W., “Nonlinear dynamics of mems arches under harmonic electrostatic actuation” Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 19, No. 3, pp. 647–656, 2010.
- [45] Yuh, J., and Young, T., “Dynamic modeling of an axially moving beam in rotation: simulation and experiment”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 113, pp. 34-40, 1991.
- [46] 黃智傑, “旋轉三維 Timoshenko 梁之振動分析” 國立交通大學機械工程學系, 碩士論文, 台灣, 新竹, 2001

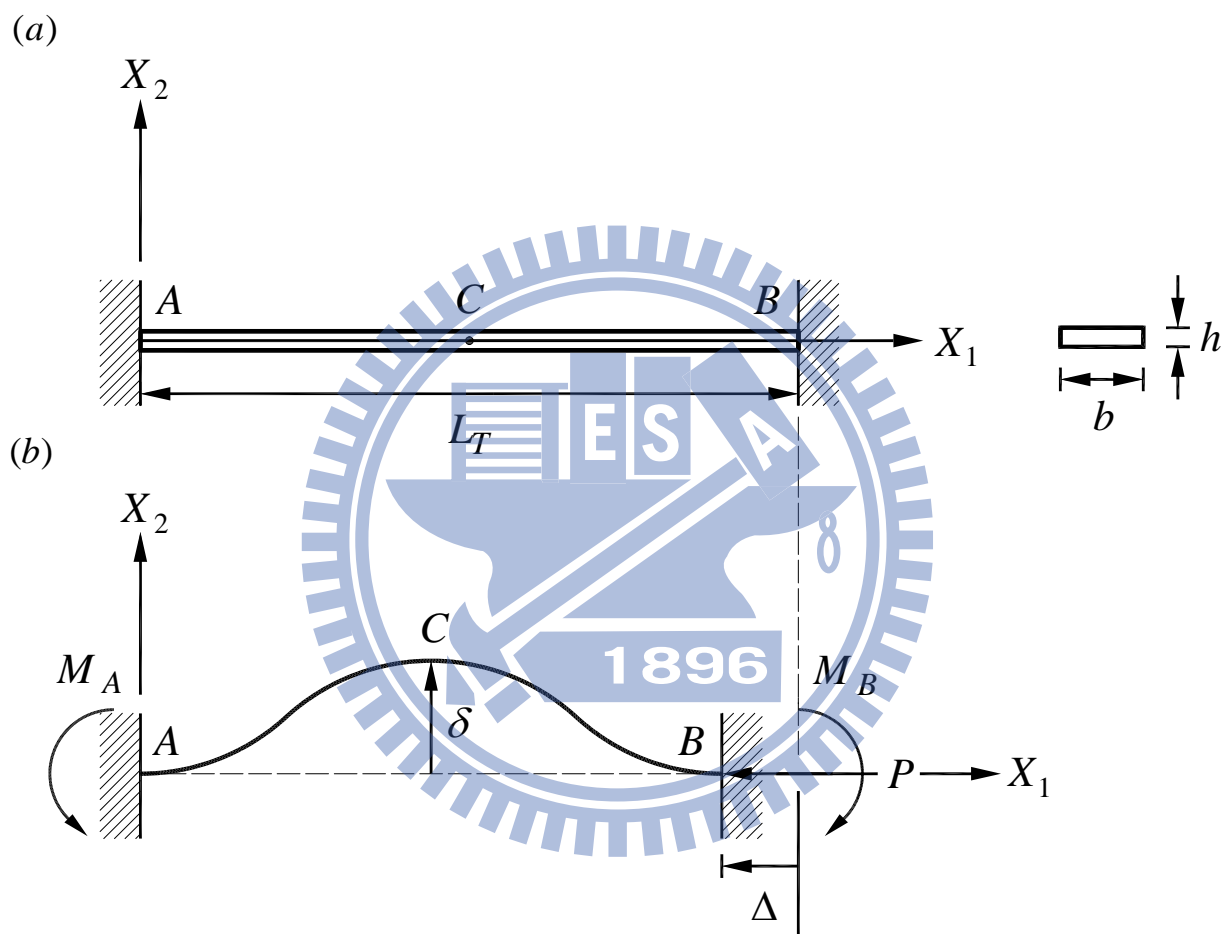


圖 1-1 直梁一端受軸向壓縮及側向挫屈示意圖

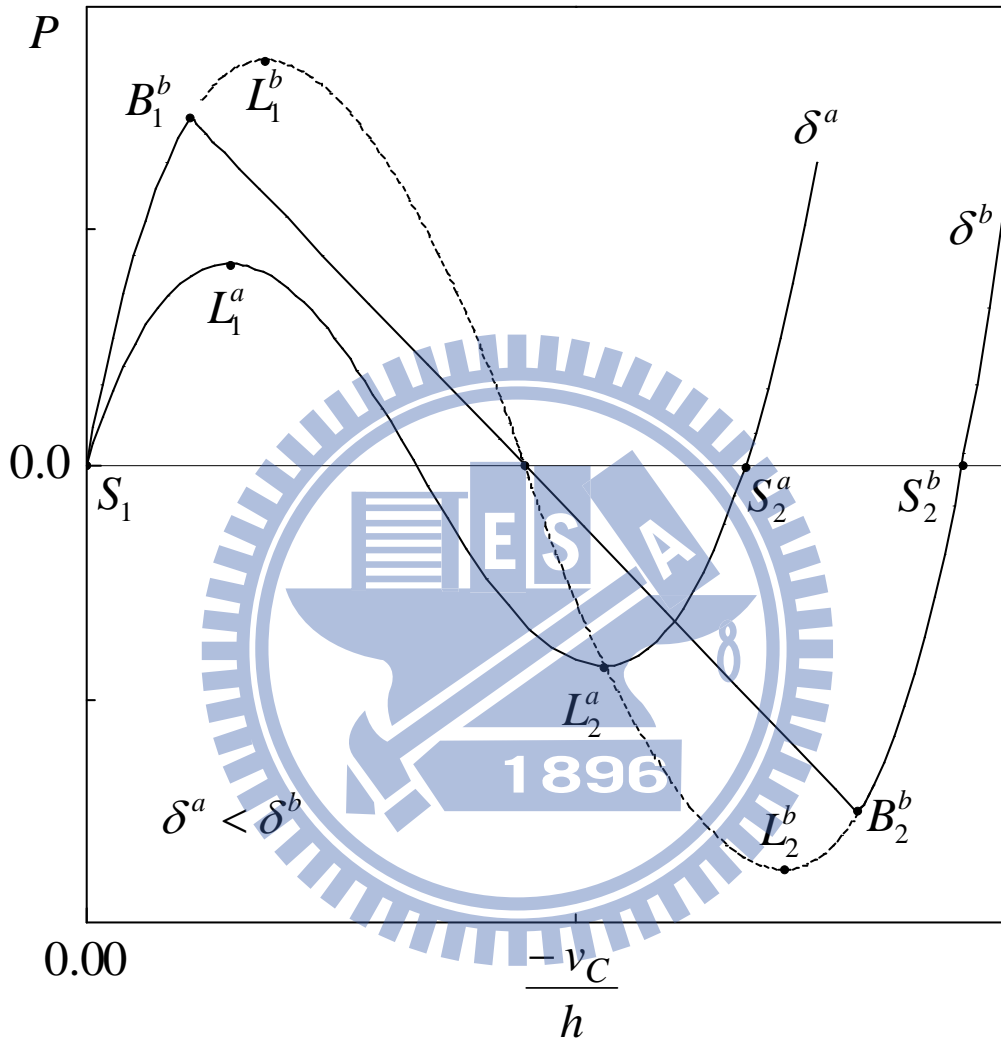


圖 1-2 挫屈梁受側向集中力 P 的位移-負荷曲線圖

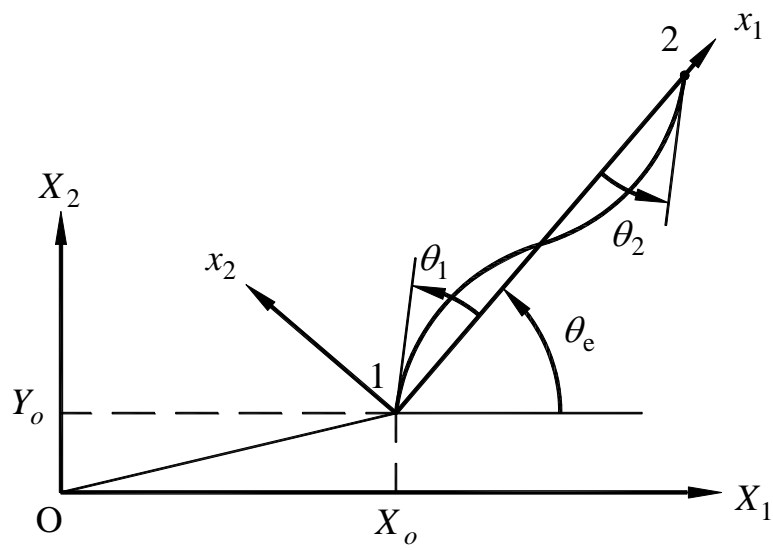


圖 2-1 元素座標系統及總體座標系統關係圖

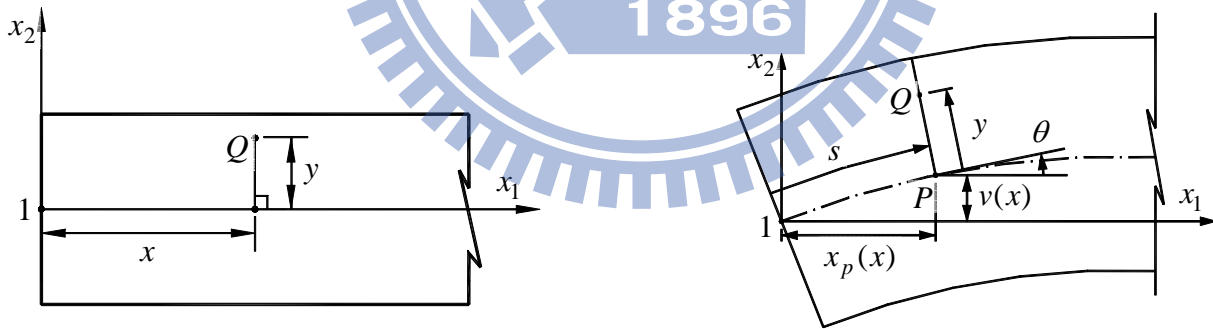


圖 2-2 梁的變形圖

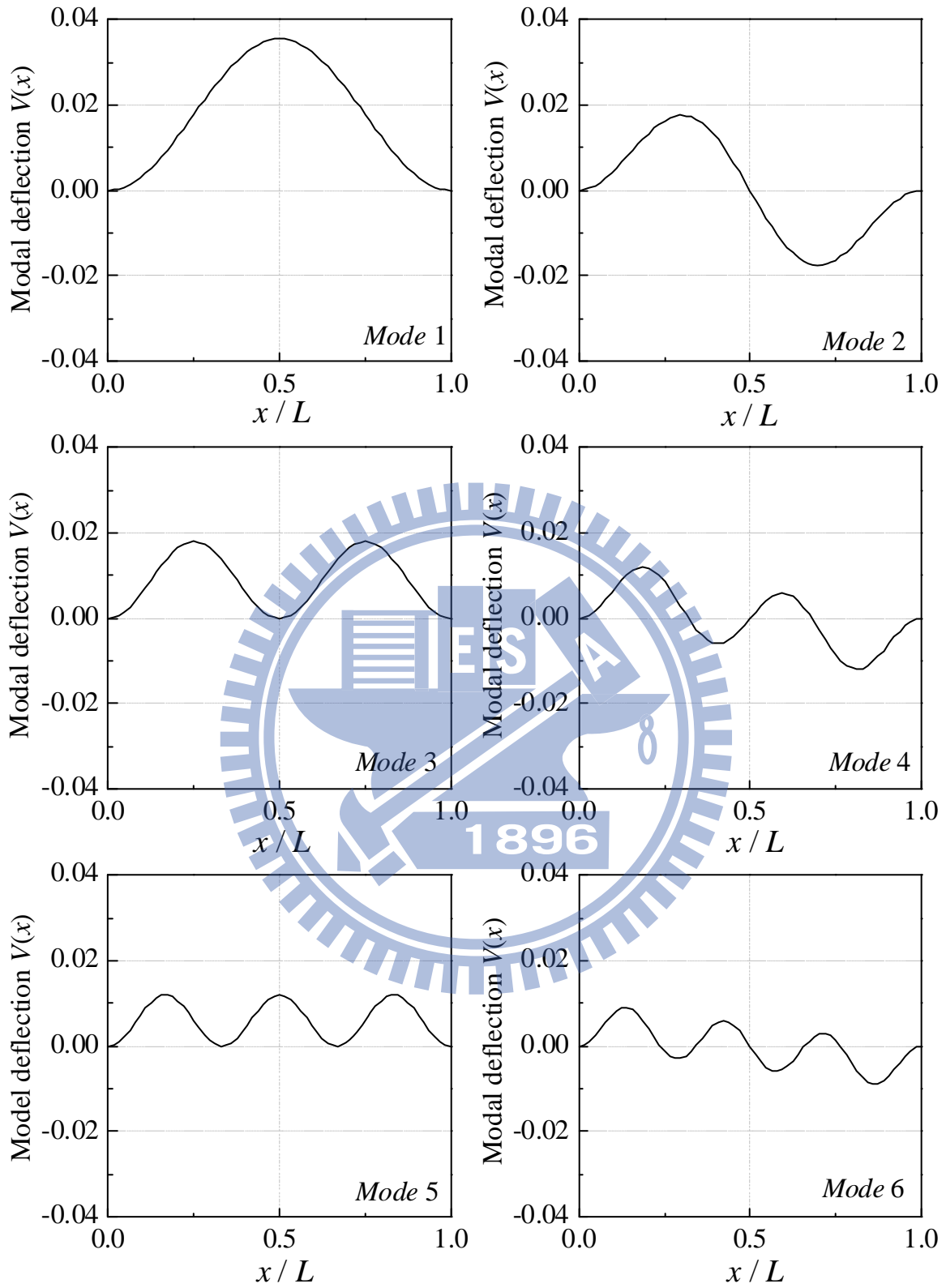


圖 4-1 固端梁的挫屈模態

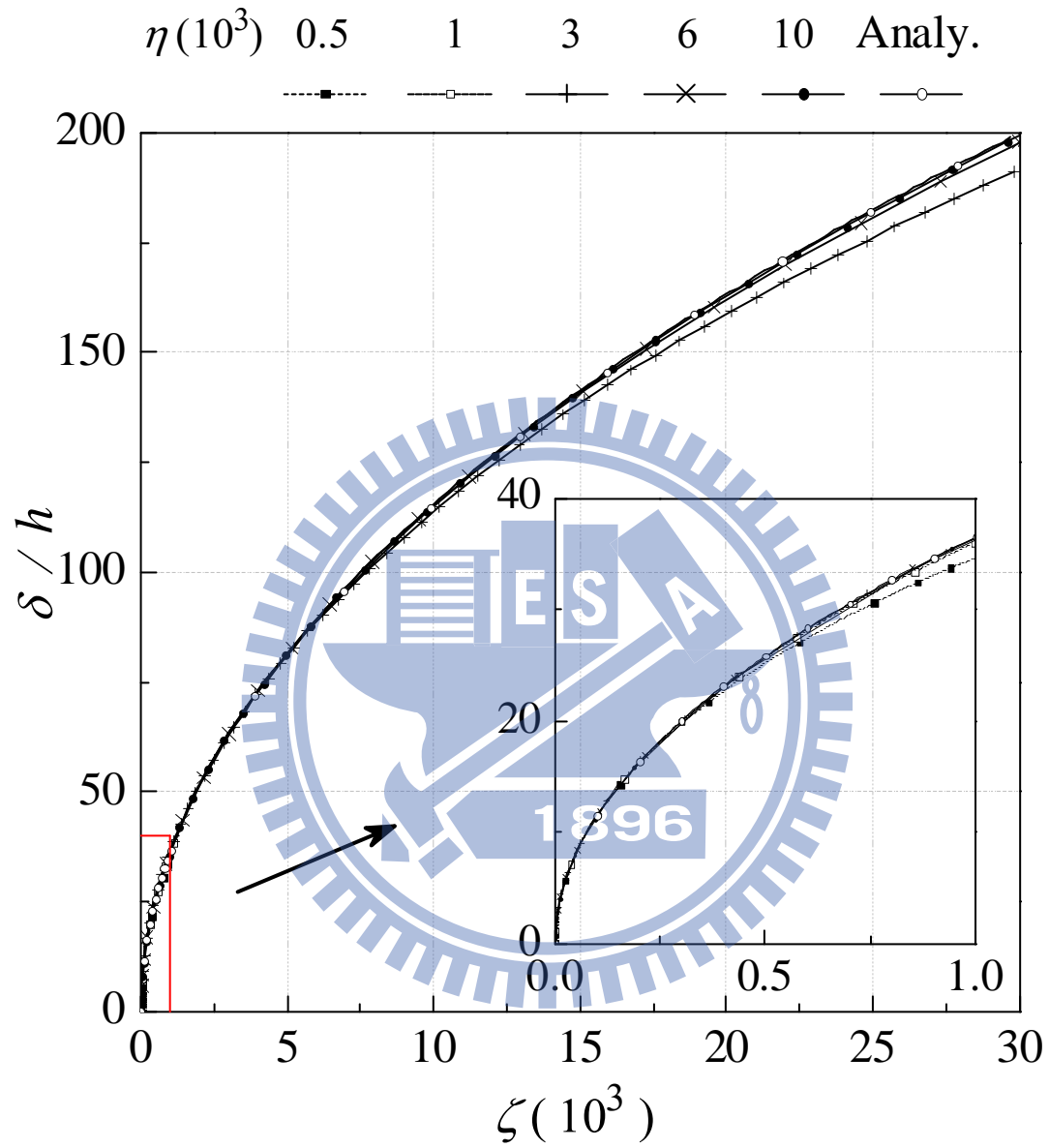


圖 4-2 挫屈梁的 $\frac{\delta}{h}-\zeta$ 曲線

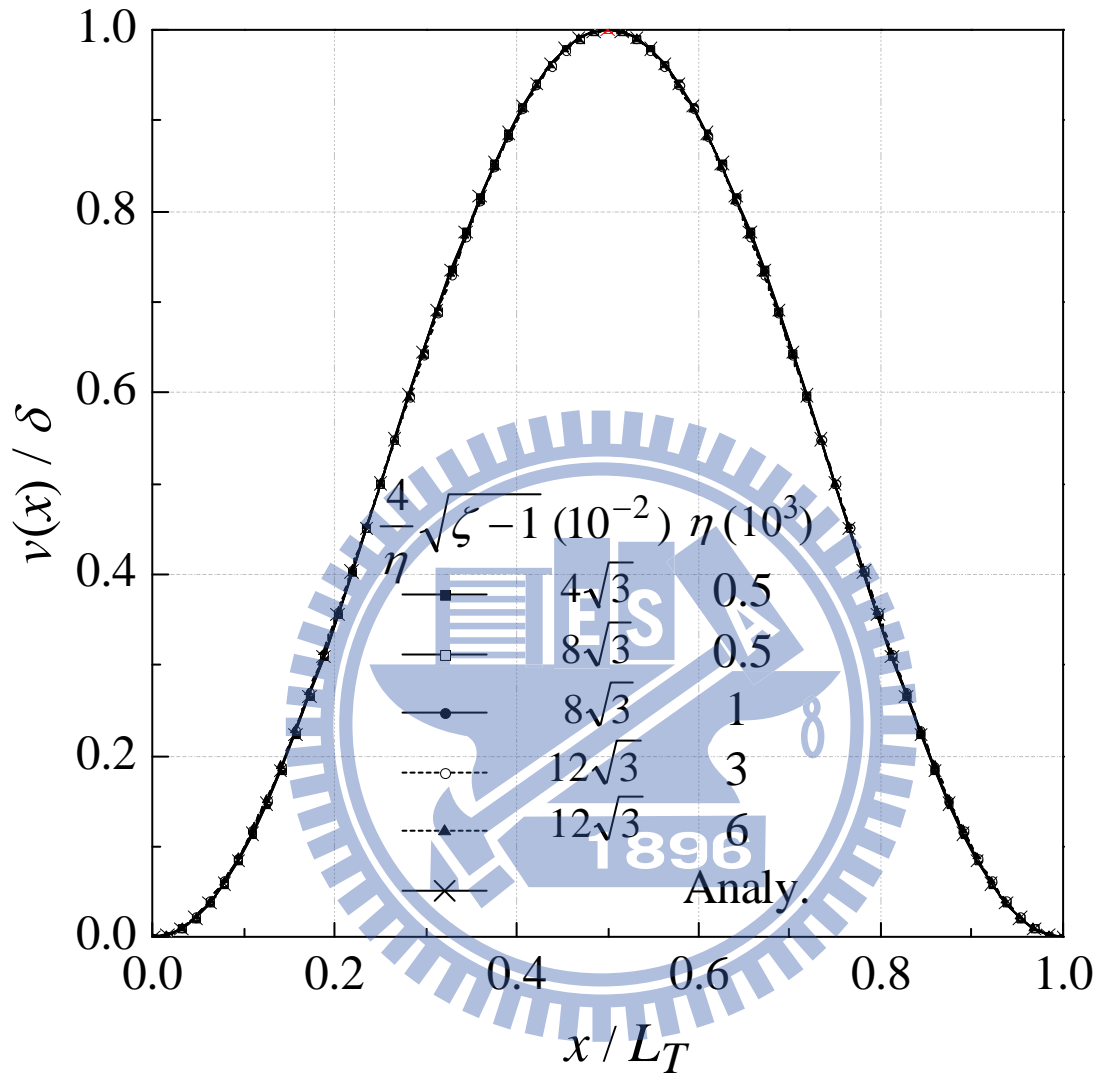


圖 4-3 挫屈梁的無因次側向位移 $\frac{v(x)}{\delta}$ 分佈圖

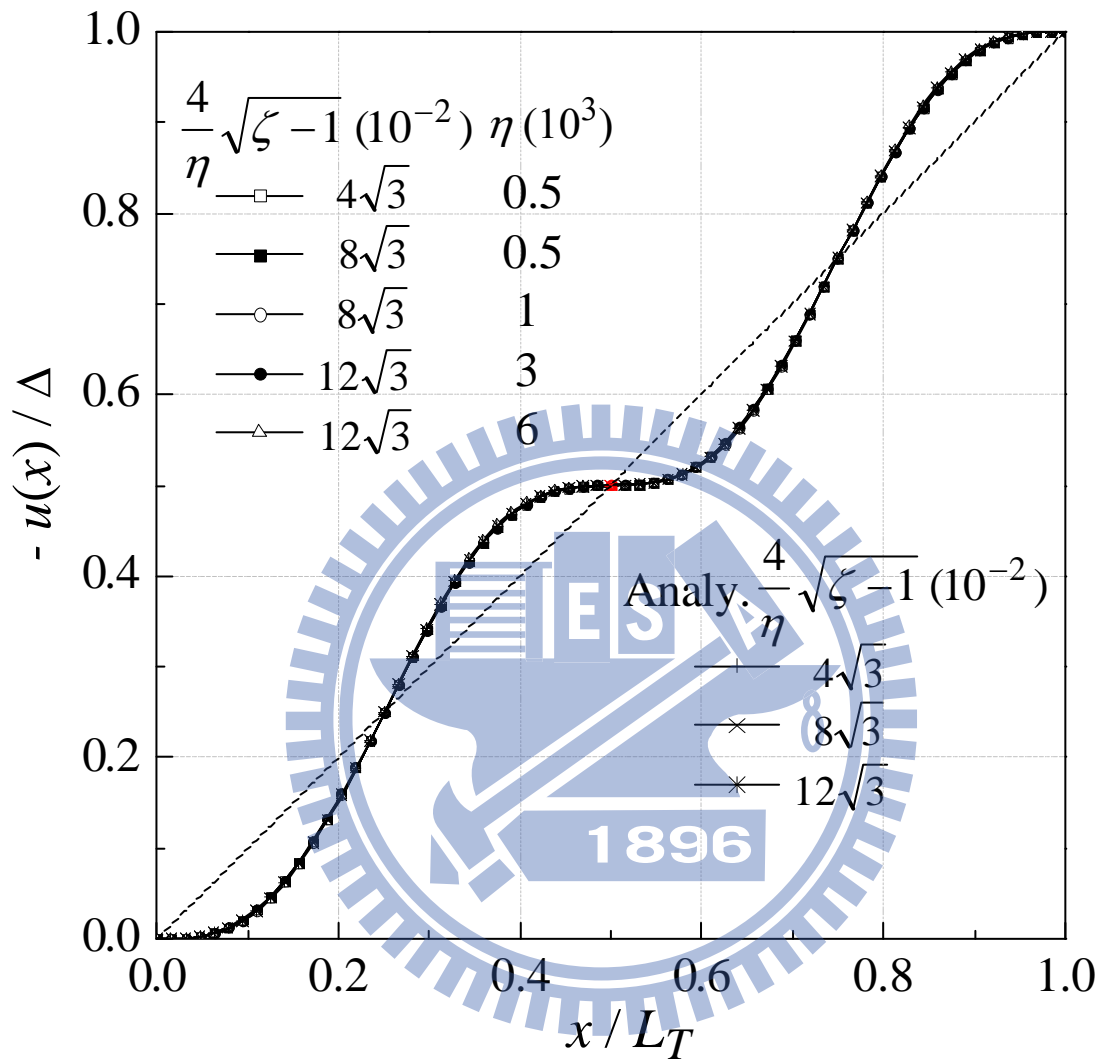


圖 4-4 挫屈梁的無因次軸向位移 $\frac{-u(x)}{\Delta}$ 分佈圖

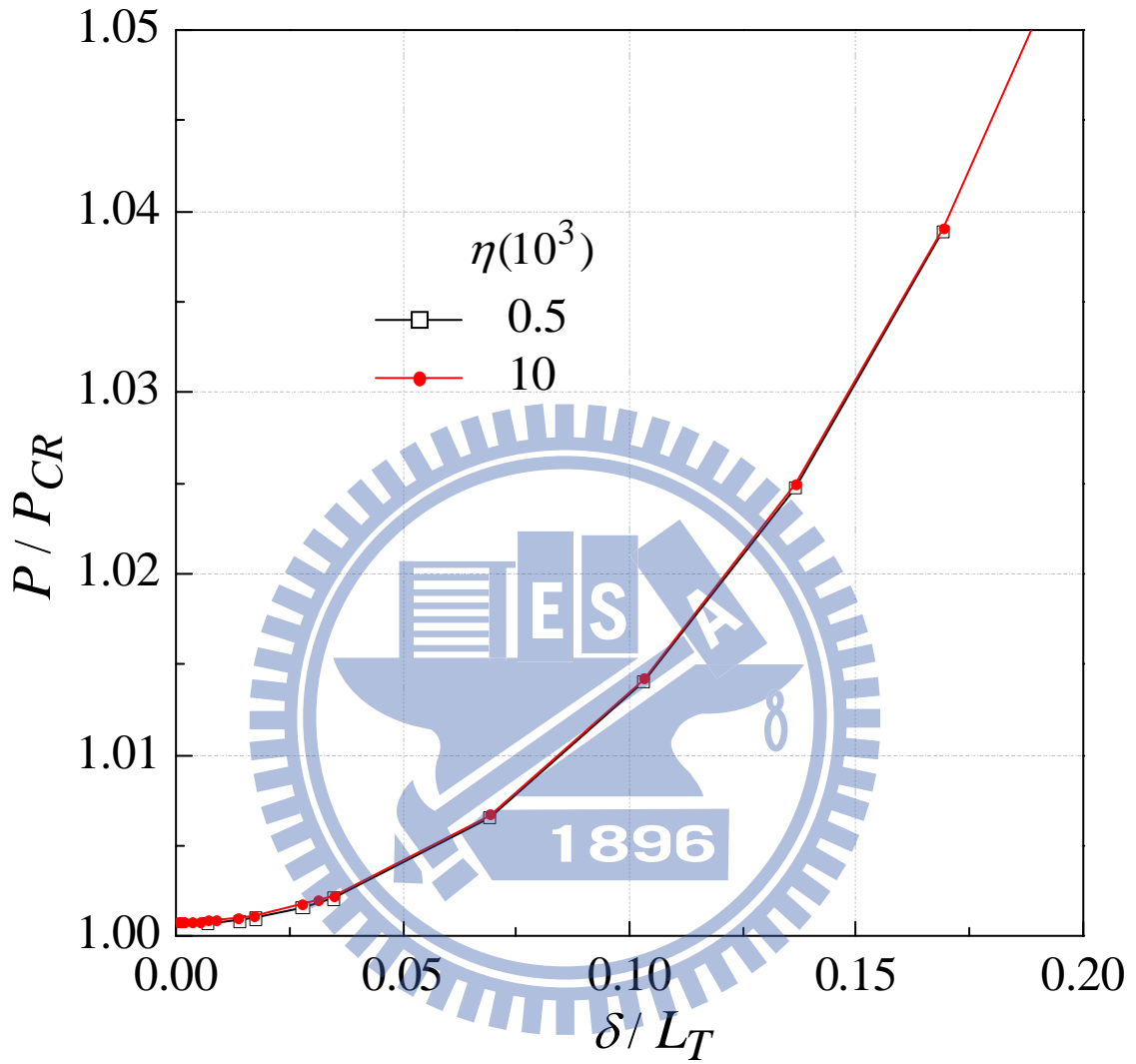


圖 4-5 挫屈梁的無因次端點軸向反力 P/P_{CR} -中點側向位移 δ/L_T 曲線

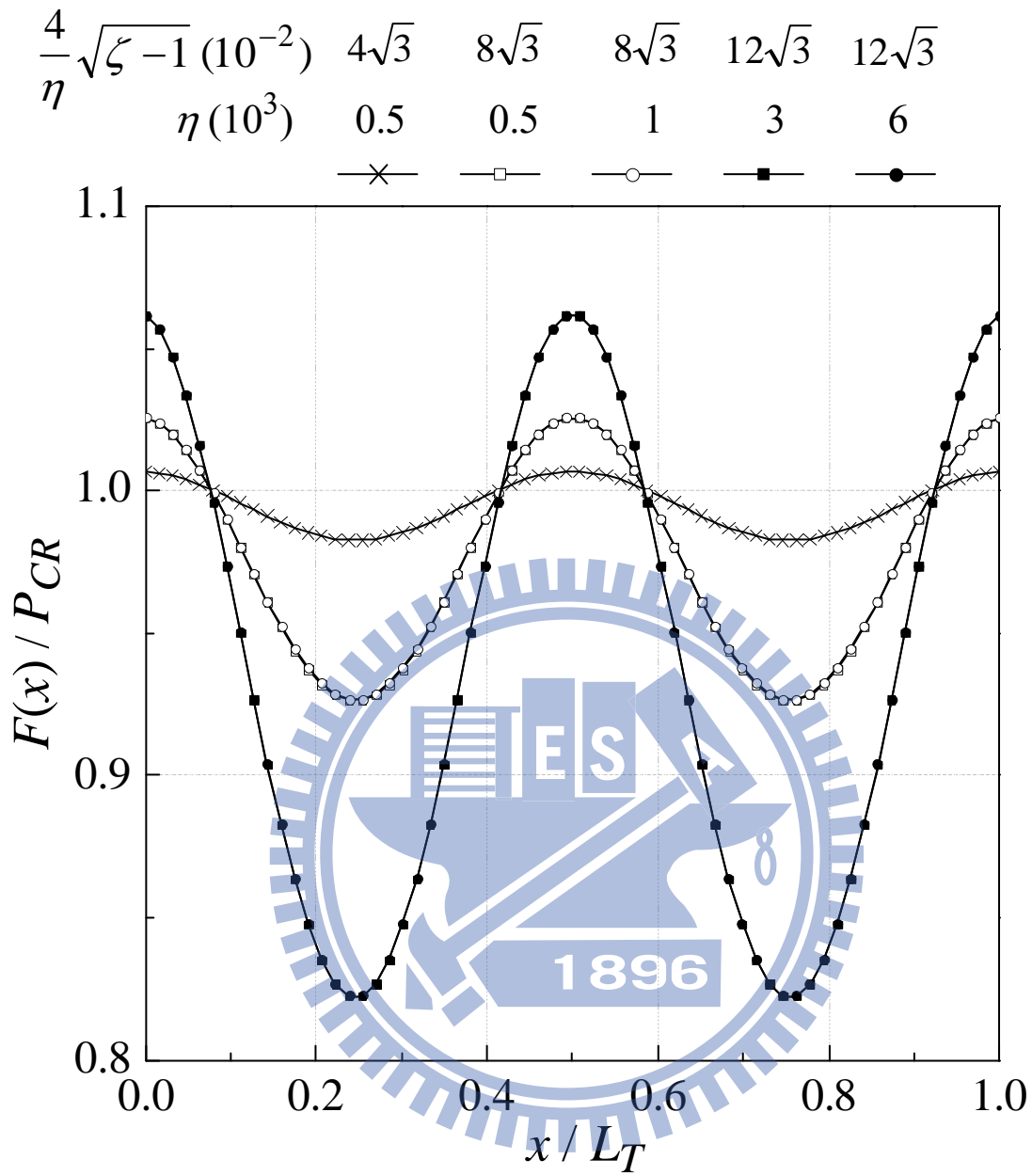


圖 4-6 挫屈梁的無因次端點軸向正向力 $F(x)/P_{CR} - x/L_T$ 的分佈曲線

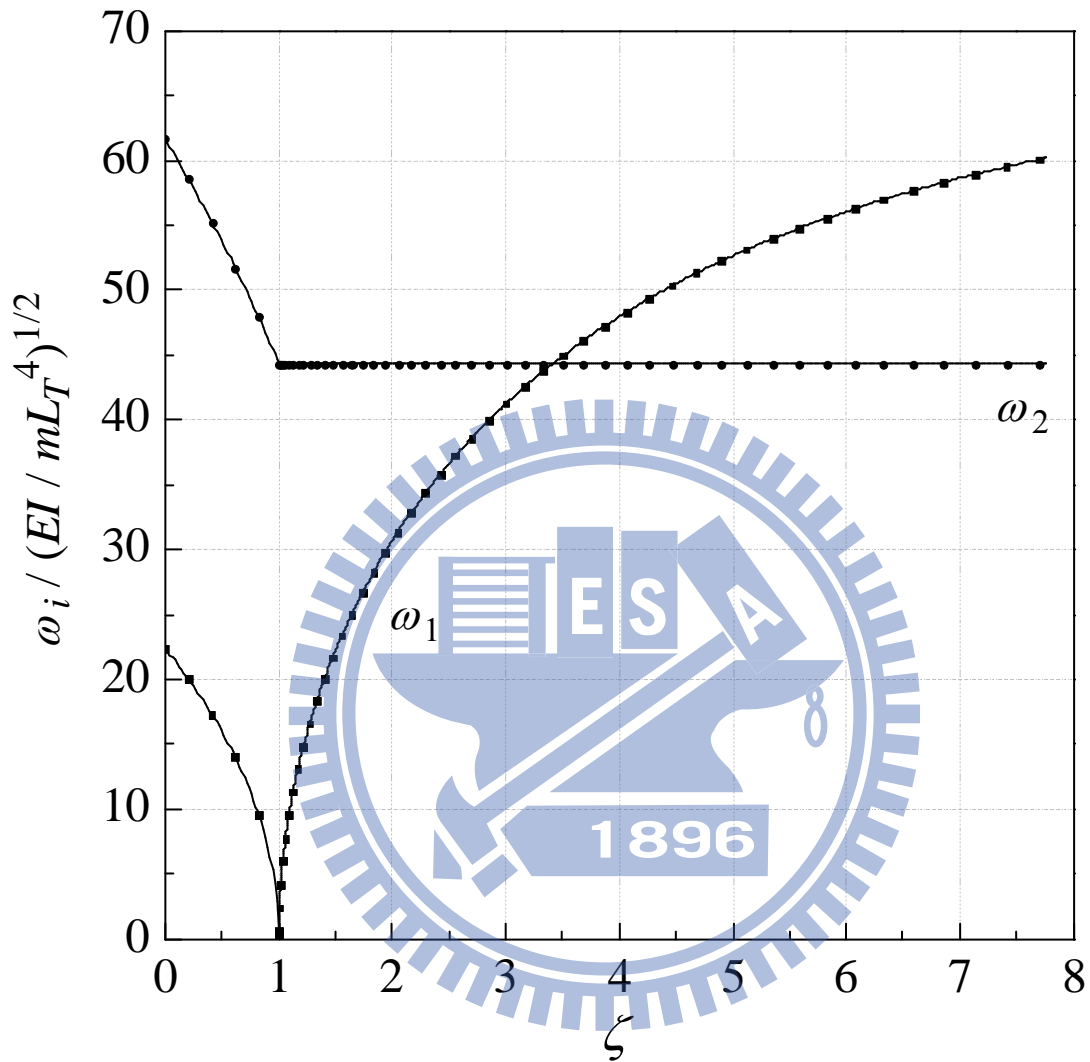


圖 4-7 固端梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次壓縮量

$\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 曲線

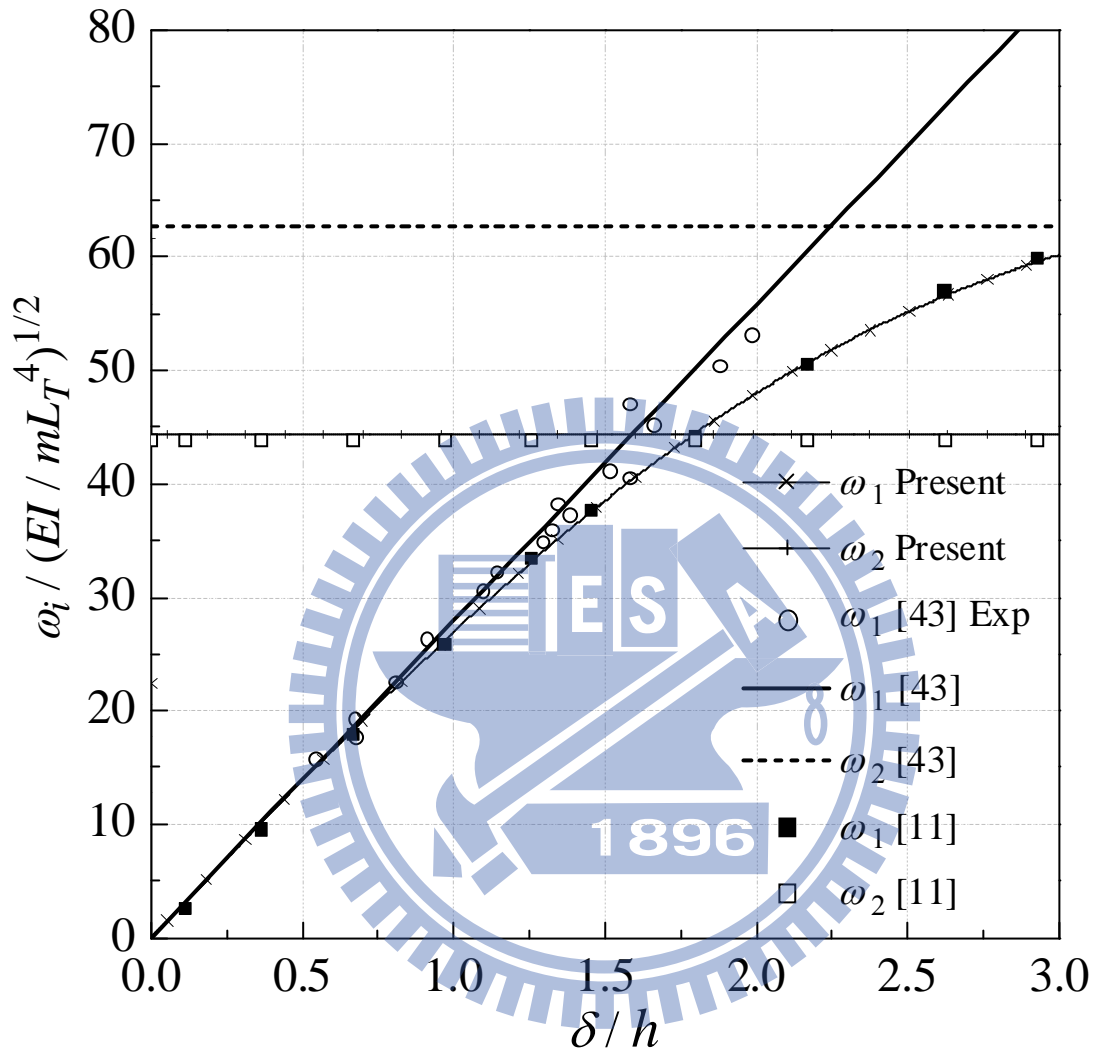


圖 4-8 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h

的曲線 ($\delta/h \leq 3, i=1,2$)

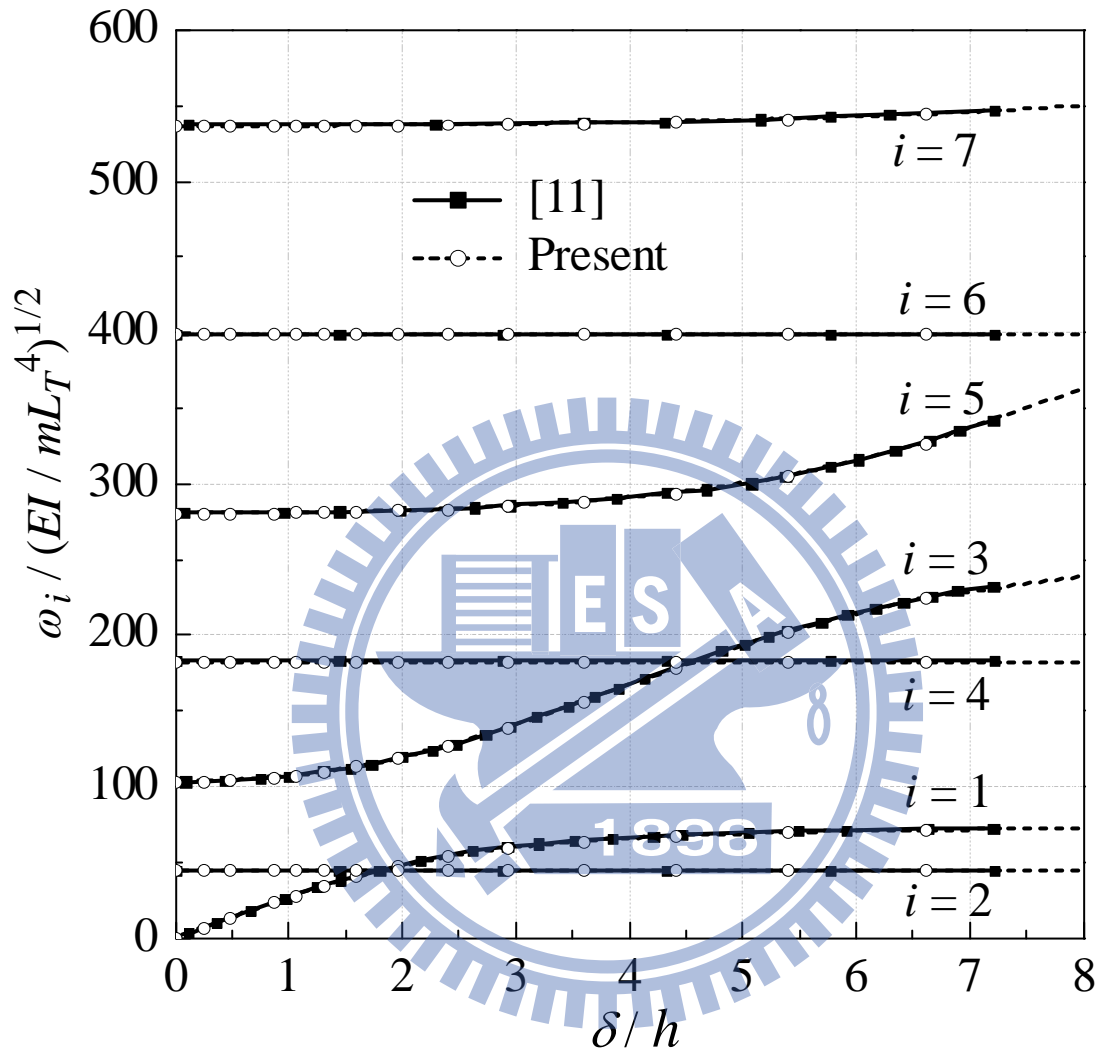


圖 4-9 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h

的曲線 ($\delta/h \leq 8, i=1,7$)

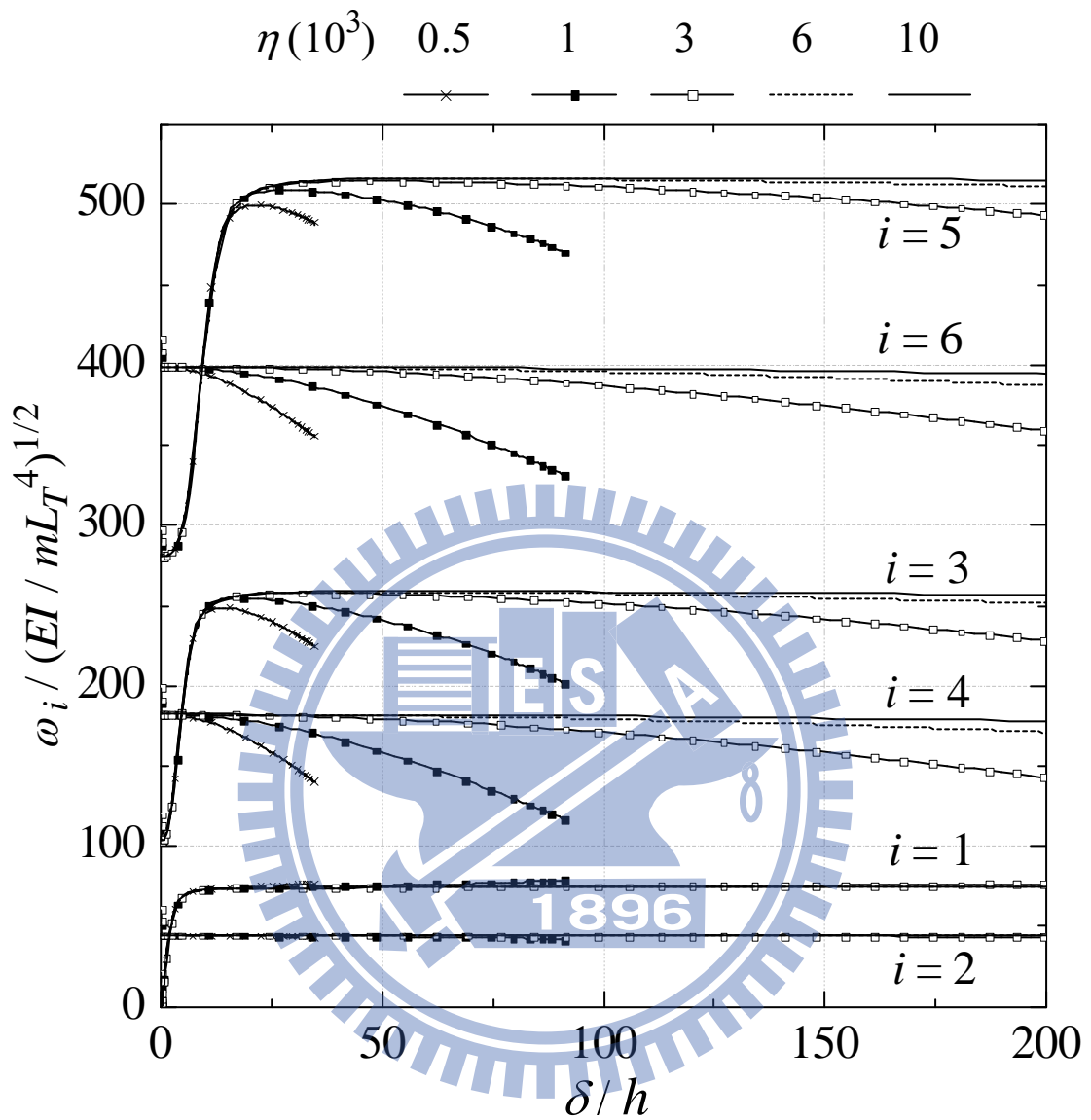


圖 4-10 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移

δ/h 的曲線 ($\delta/h \leq 200, i=1,6$)

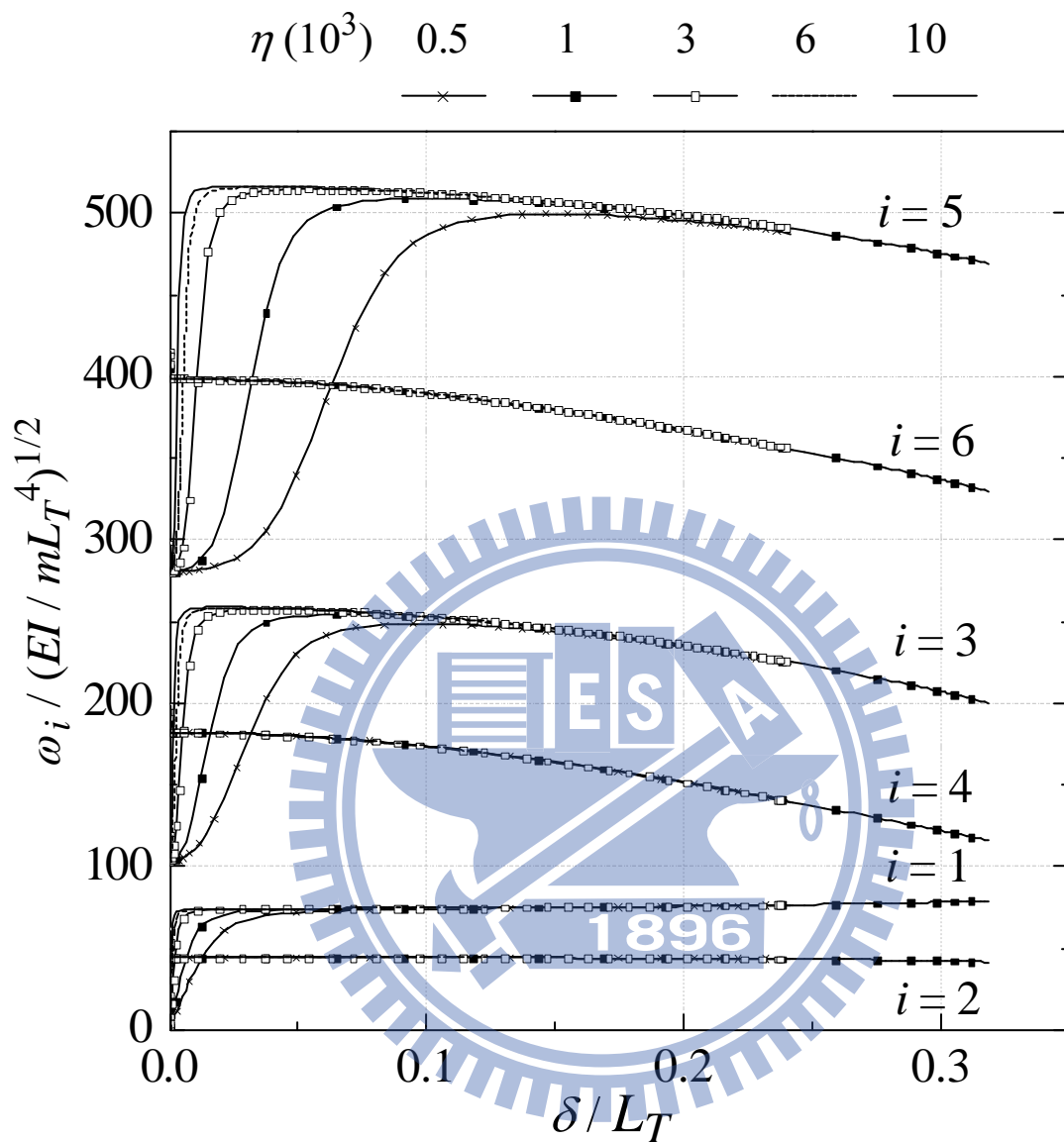


圖 4-11 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移

δ / L_T 的曲線 ($\delta / L_T < 0.3, i = 1, 6$)

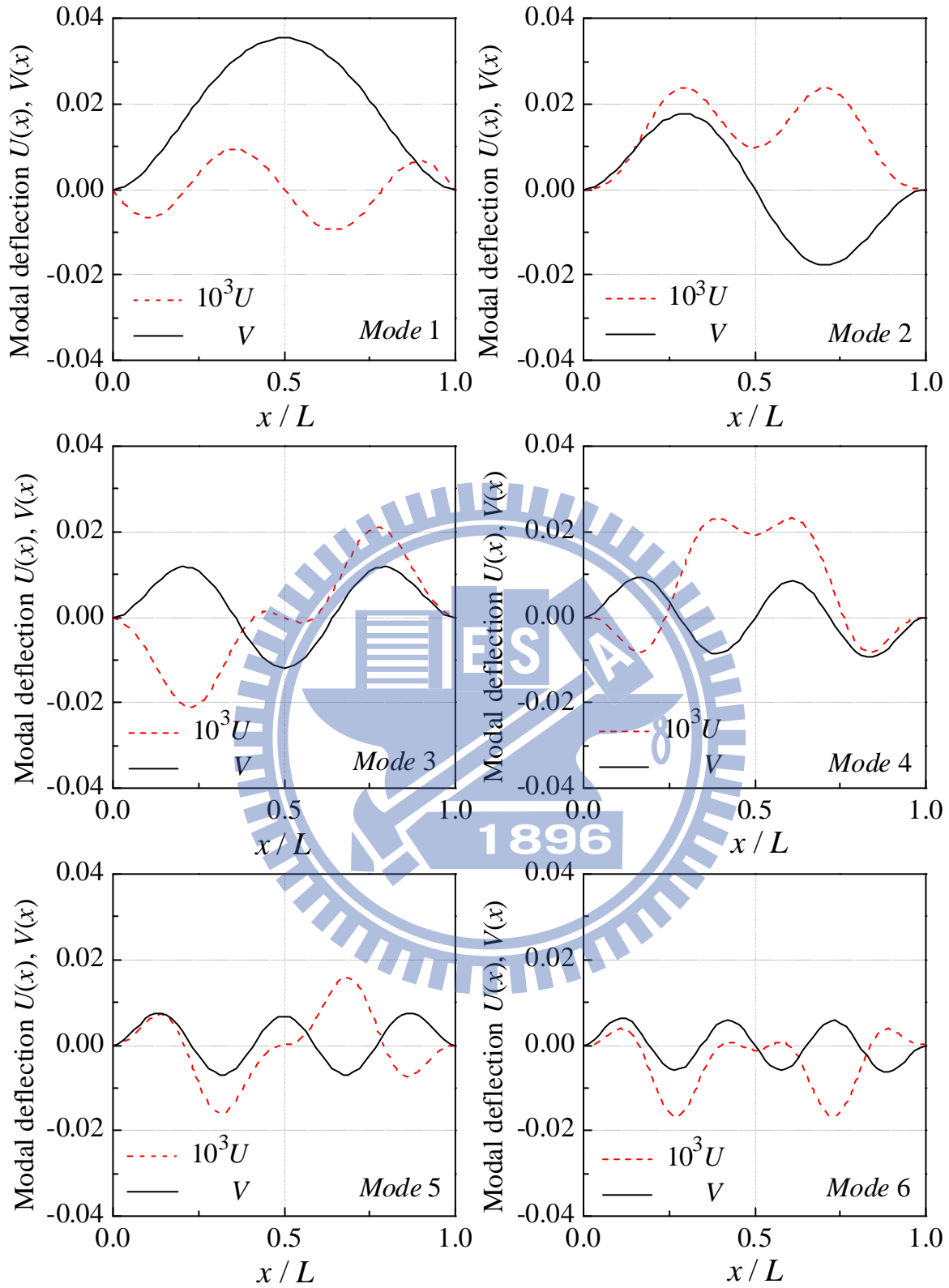


圖 4-12 挫屈梁的前六個振動模態($\delta/h=1$, $\frac{\delta}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1}$, $\eta=5818.96$)

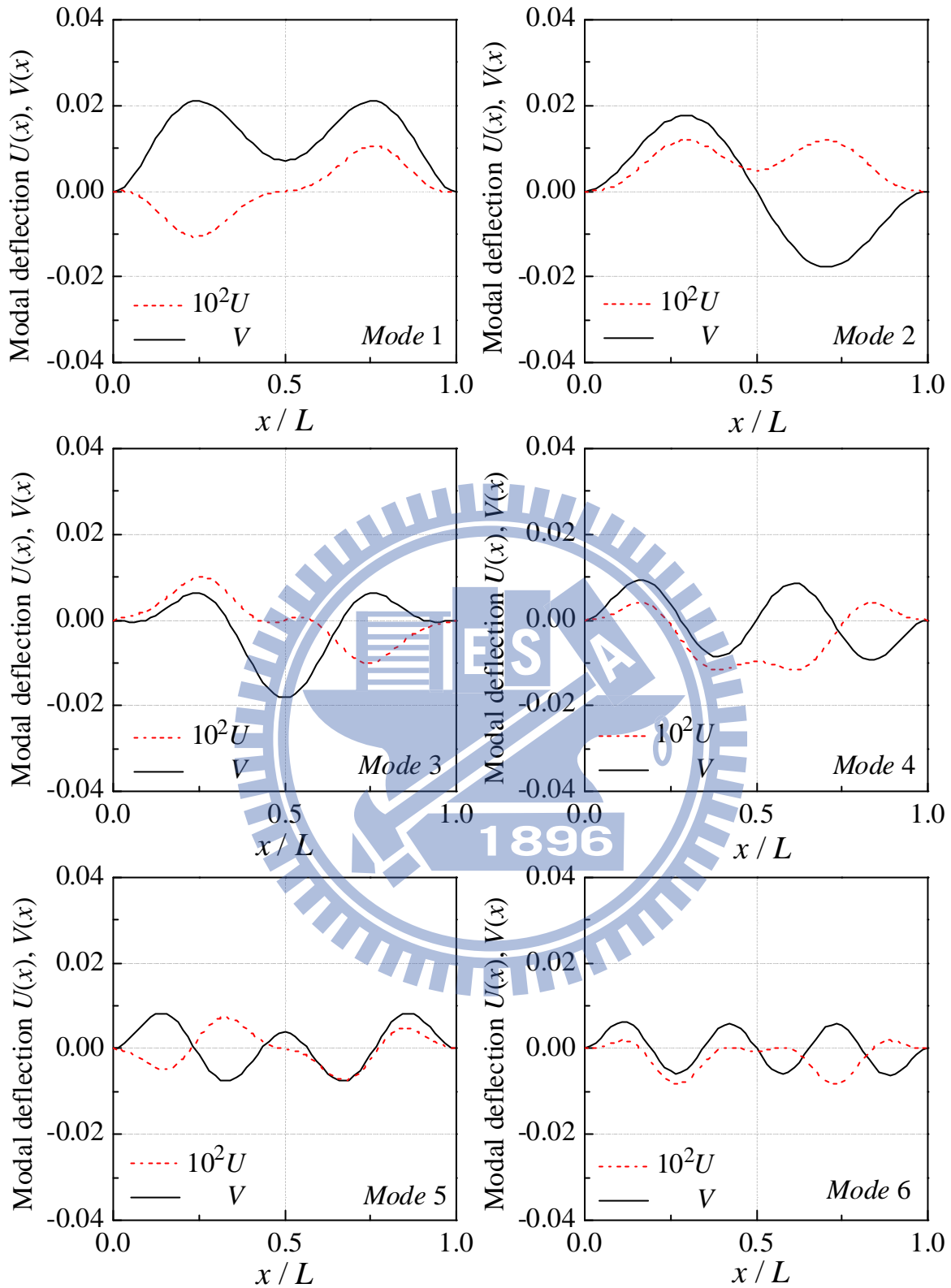


圖 4-13 挫屈梁的前六個振動模態 ($\delta/h = 5$, $\frac{\delta}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta - 1}$, $\eta = 5818.96$)

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \quad \text{---}\blacksquare\text{---} 1 \quad \text{---}\square\text{---} 2 \quad \text{---}\text{+}\text{---} 5 \quad \text{---}\times\text{---} 10 \quad \text{---}\circ\text{---} 15 \quad \eta = 500$$

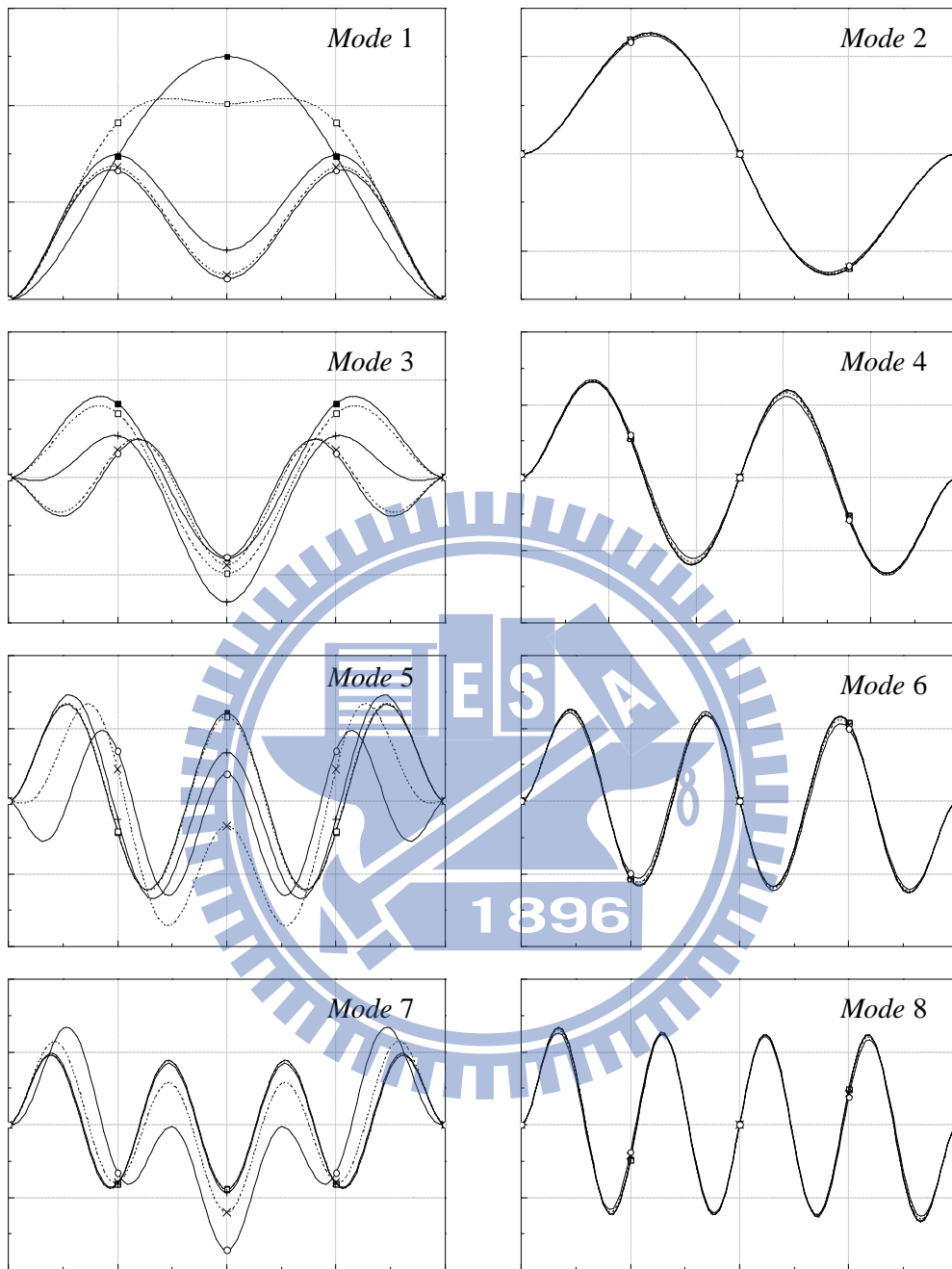


圖 4-14 挫屈梁的前八個振動模態($\eta = 500$, $1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 15$, X_2 分量)

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \quad \blacksquare \quad 1 \quad \cdots \square \cdots \quad 2 \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad 5 \quad \cdots \times \cdots \quad 10 \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad 15 \quad \eta = 500$$

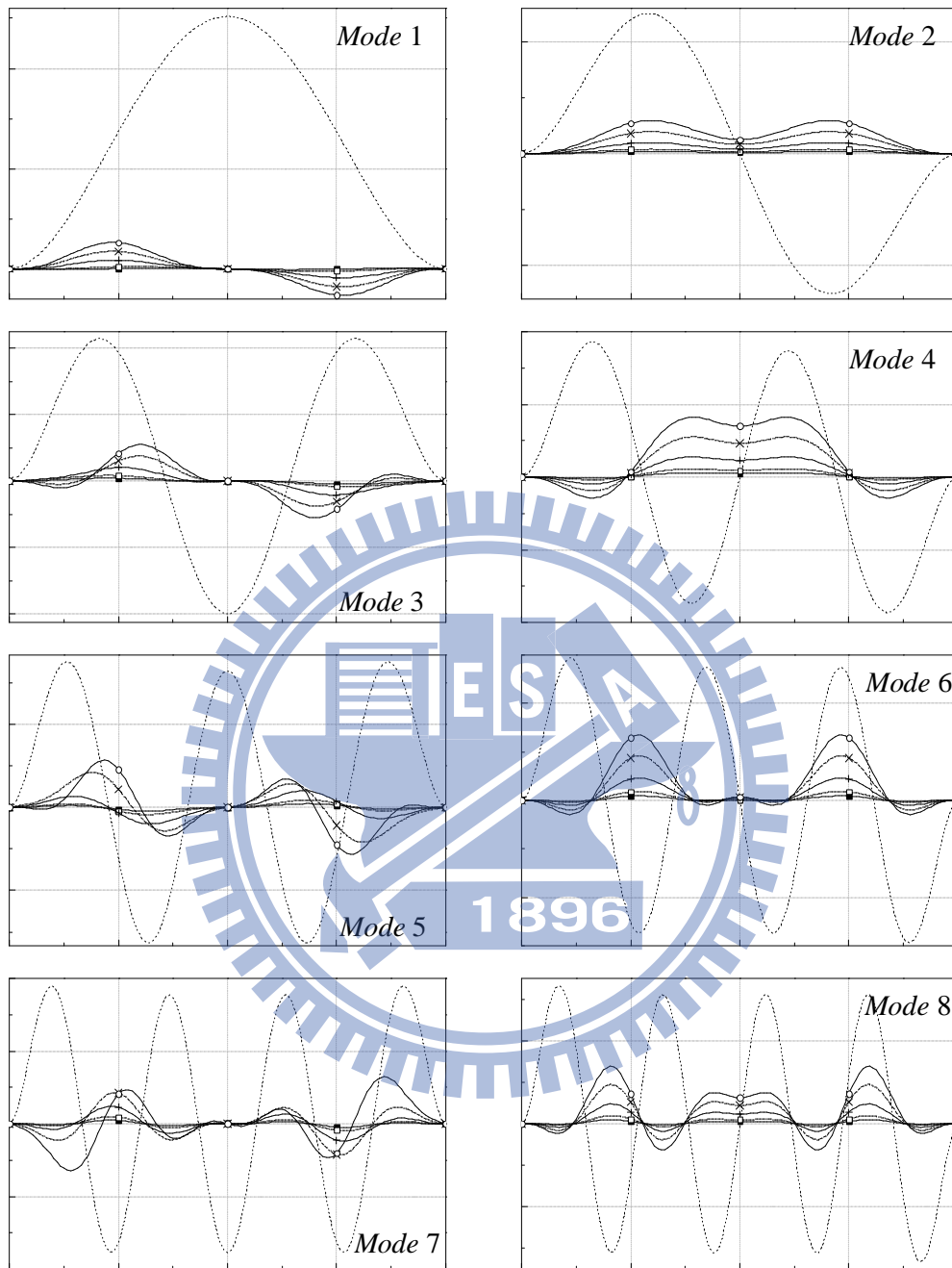


圖 4-15 挫屈梁的前八個振動模態($\eta = 500$, $1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 15$, X_1 分量)

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \quad \text{---■---} \quad 1 \quad \text{---□---} \quad 2 \quad \text{---+---} \quad 5 \quad \text{---×---} \quad 10 \quad \text{---○---} \quad 15 \quad \eta = 10^4$$

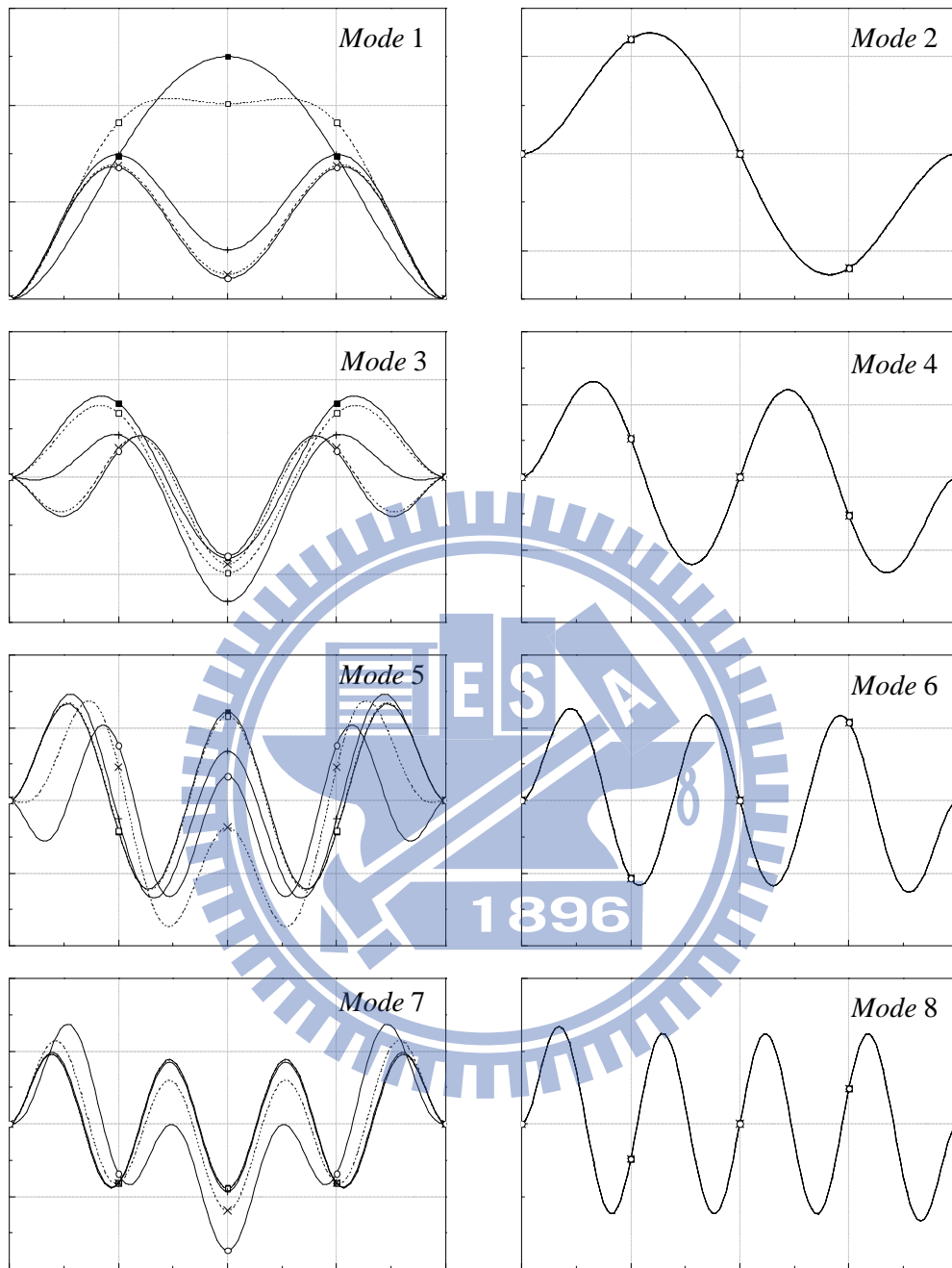


圖 4-16 挫屈梁的前八個振動模態($\eta = 10000$, $1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 15$, X_2 分量)

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \quad \blacksquare \quad 20 \quad \square \quad 40 \quad \text{---} \quad 100 \quad \times \quad 200 \quad \circ \quad 300 \quad \eta = 10^4$$

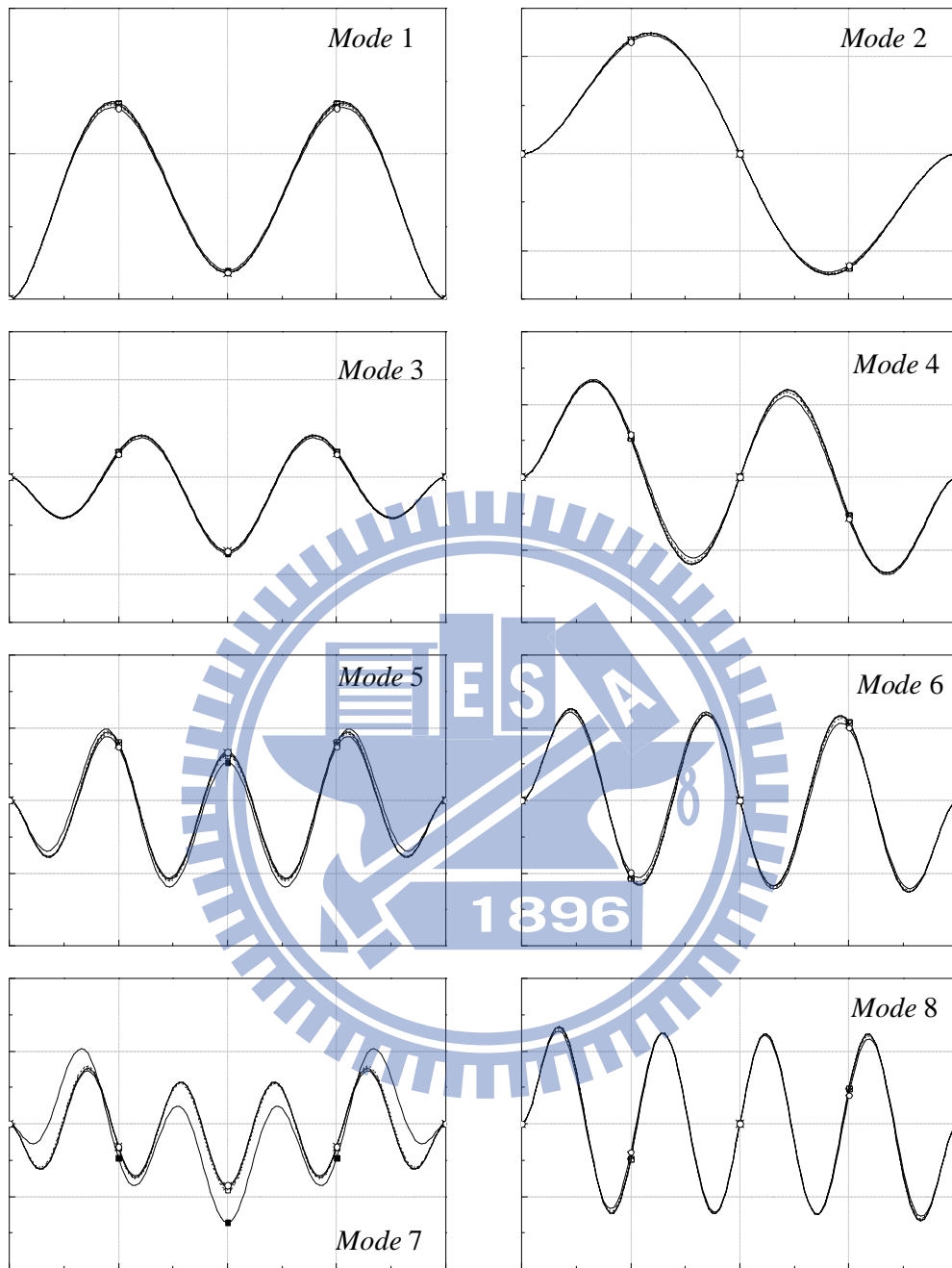


圖 4-17 挫屈梁的前八個振動模態($\eta = 10000$, $20 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta-1} \leq 300$, X_2 分

量)

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \quad \text{---■---} 20 \quad \text{---□---} 40 \quad \text{---+---} 100 \quad \text{---x---} 200 \quad \text{---○---} 300 \quad \eta = 10^4$$

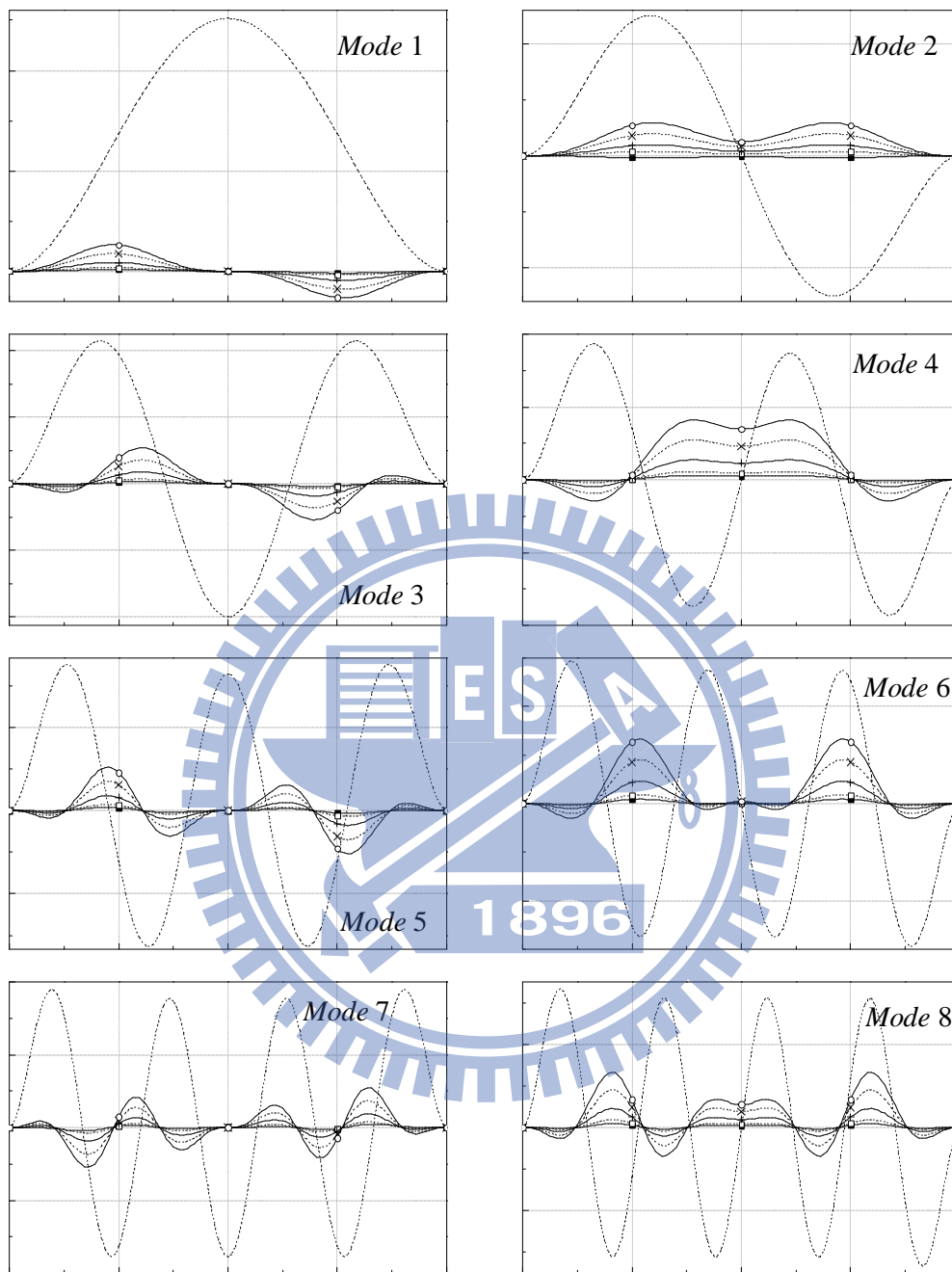


圖 4-18 挫屈梁的前八個振動模態($\eta = 10000$, $20 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1} \leq 300$, X_1 分

量)

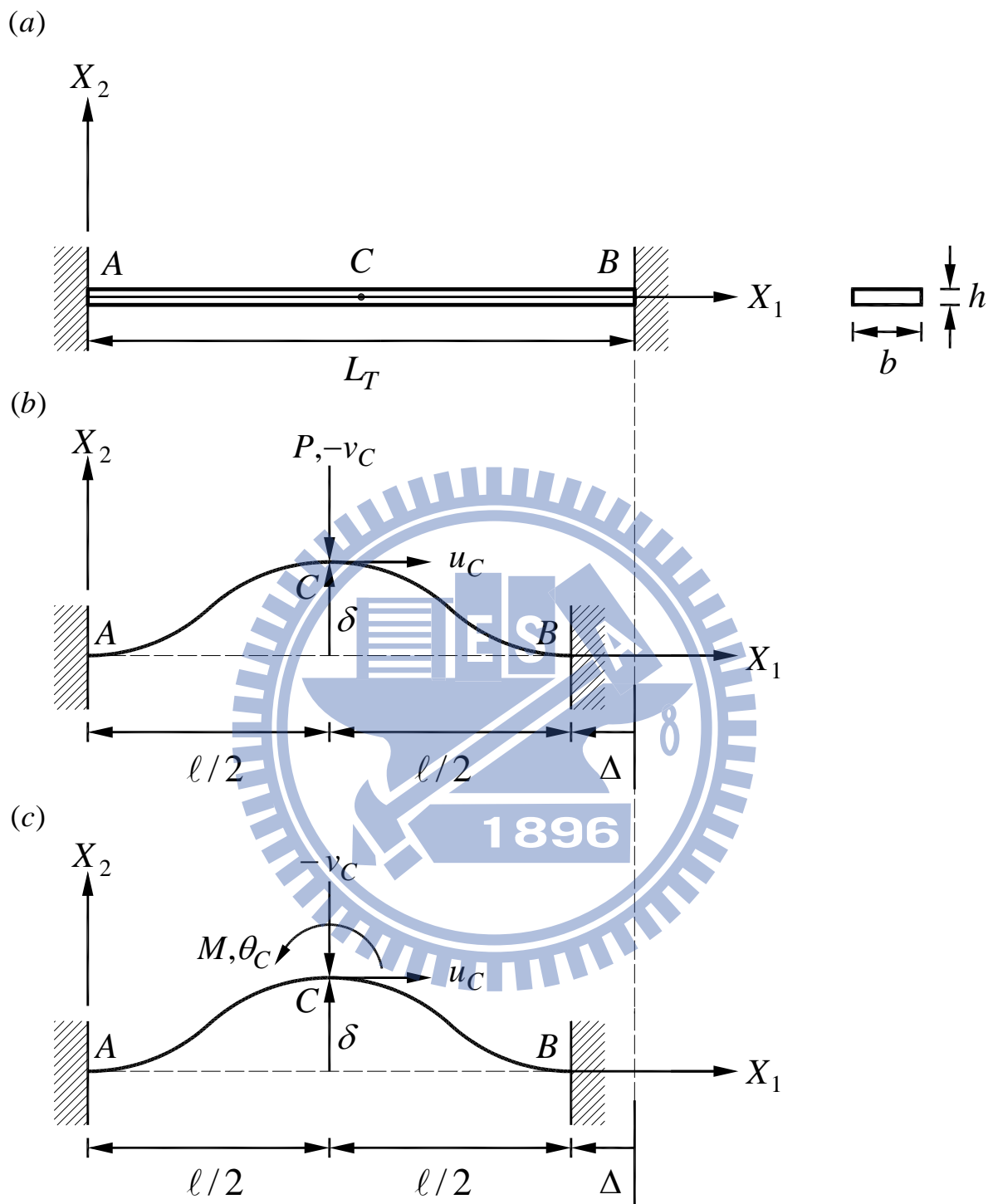


圖 5-1 挫屈梁結構中點 C 受側向集中力 P 或集中力矩 M 的結構圖

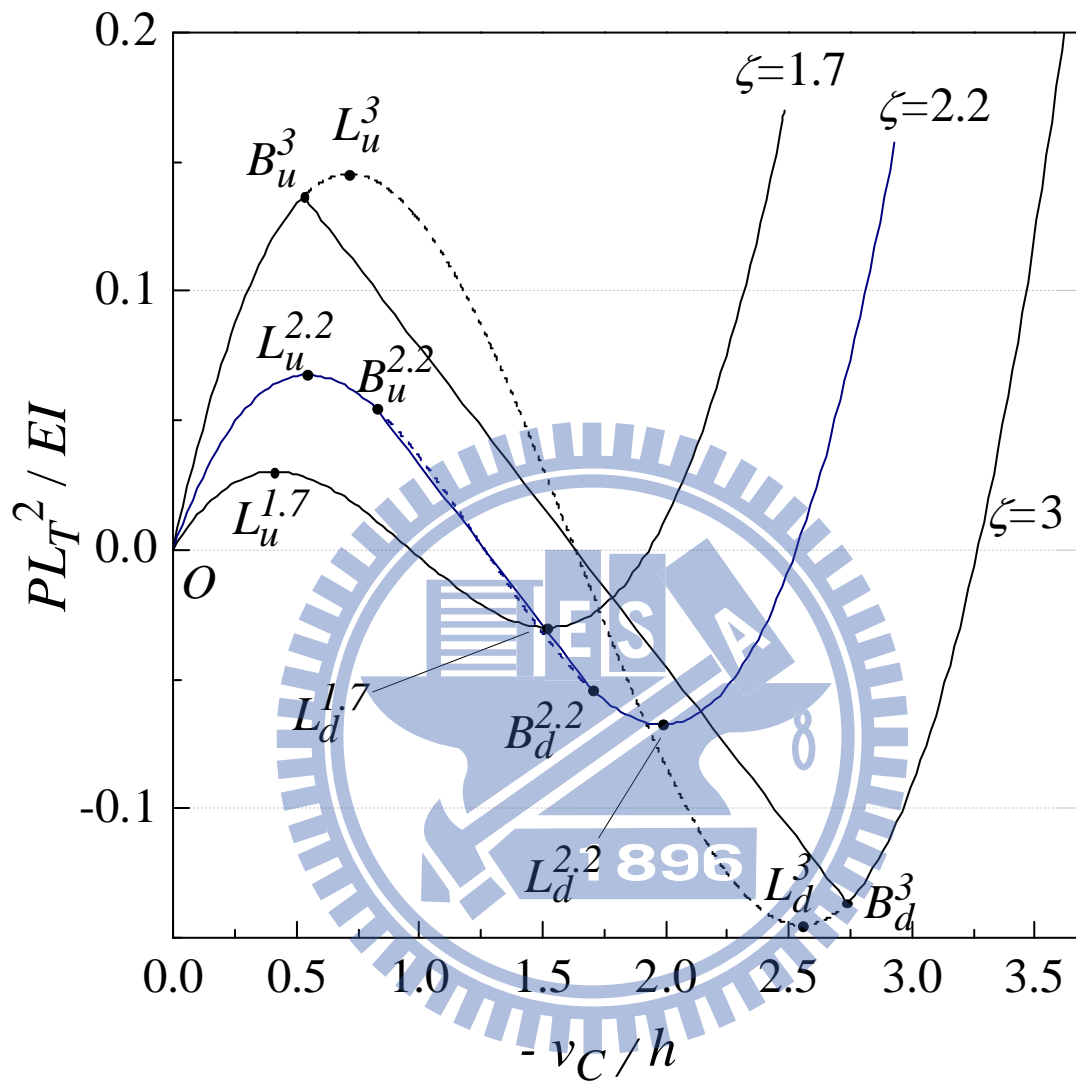


圖 5-2 挫屈梁受側向集中力 P 的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線圖 ($\zeta = 1.7, 2.2, 3$)

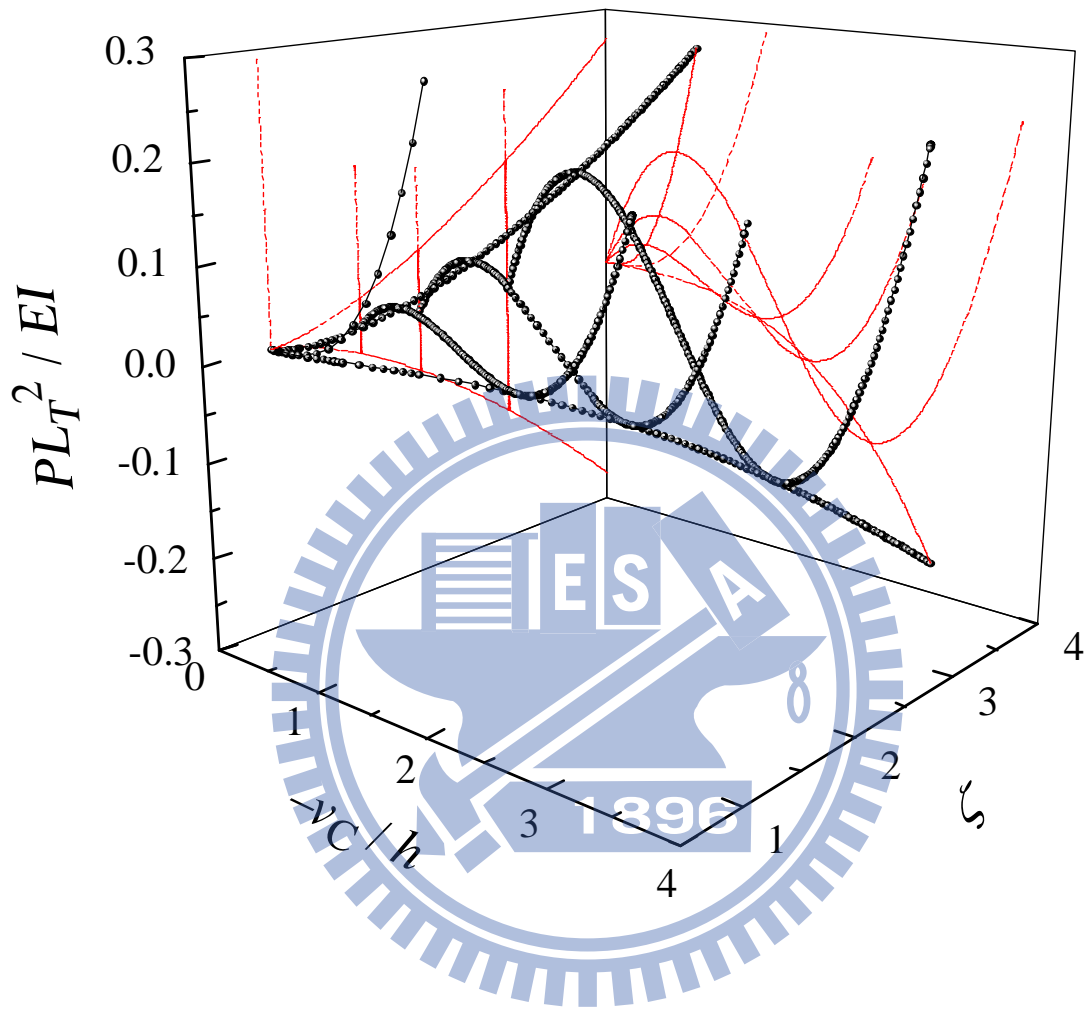


圖 5-3 挫屈梁受側向負荷在多維度空間中平衡路徑與摺線關係圖

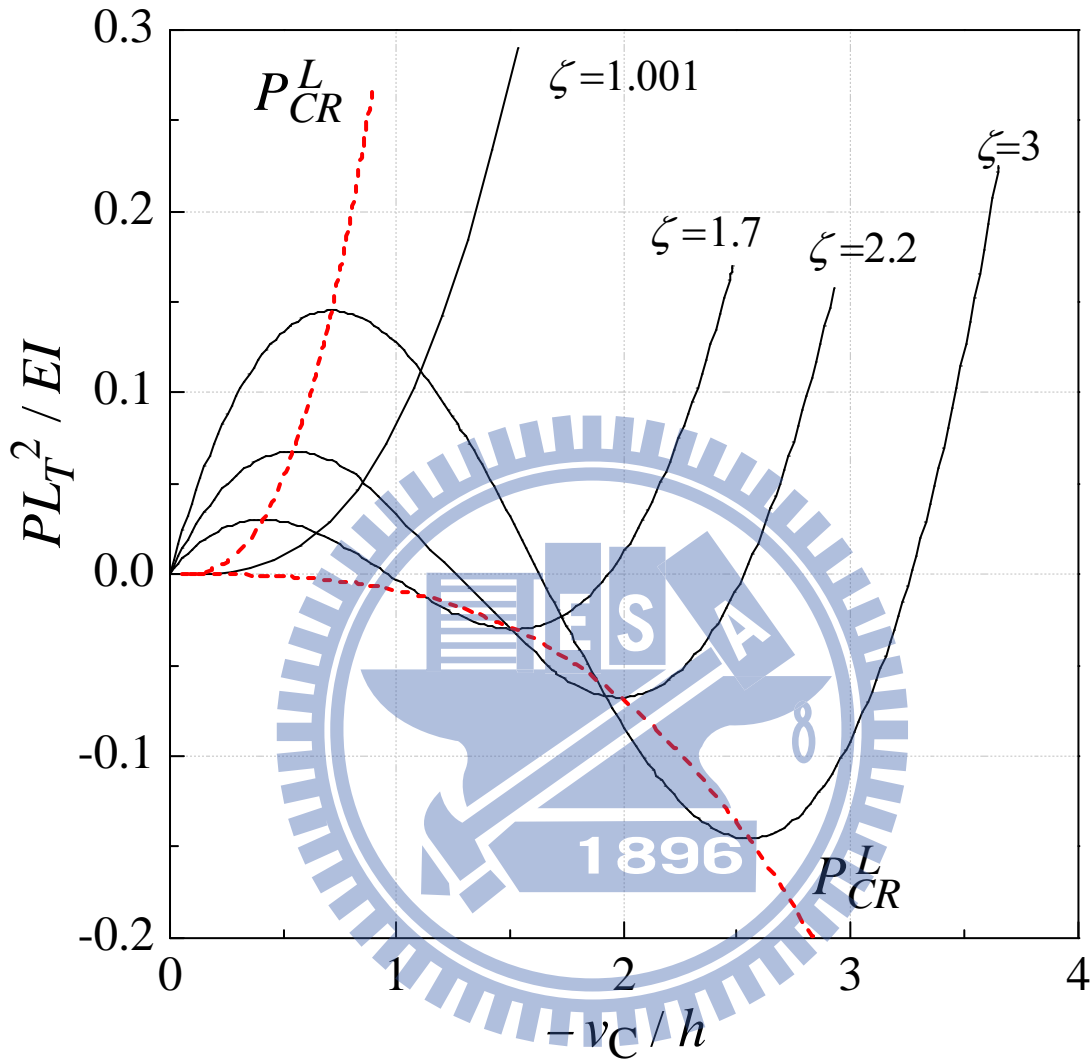


圖 5-4 挫屈梁的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線及其極限點

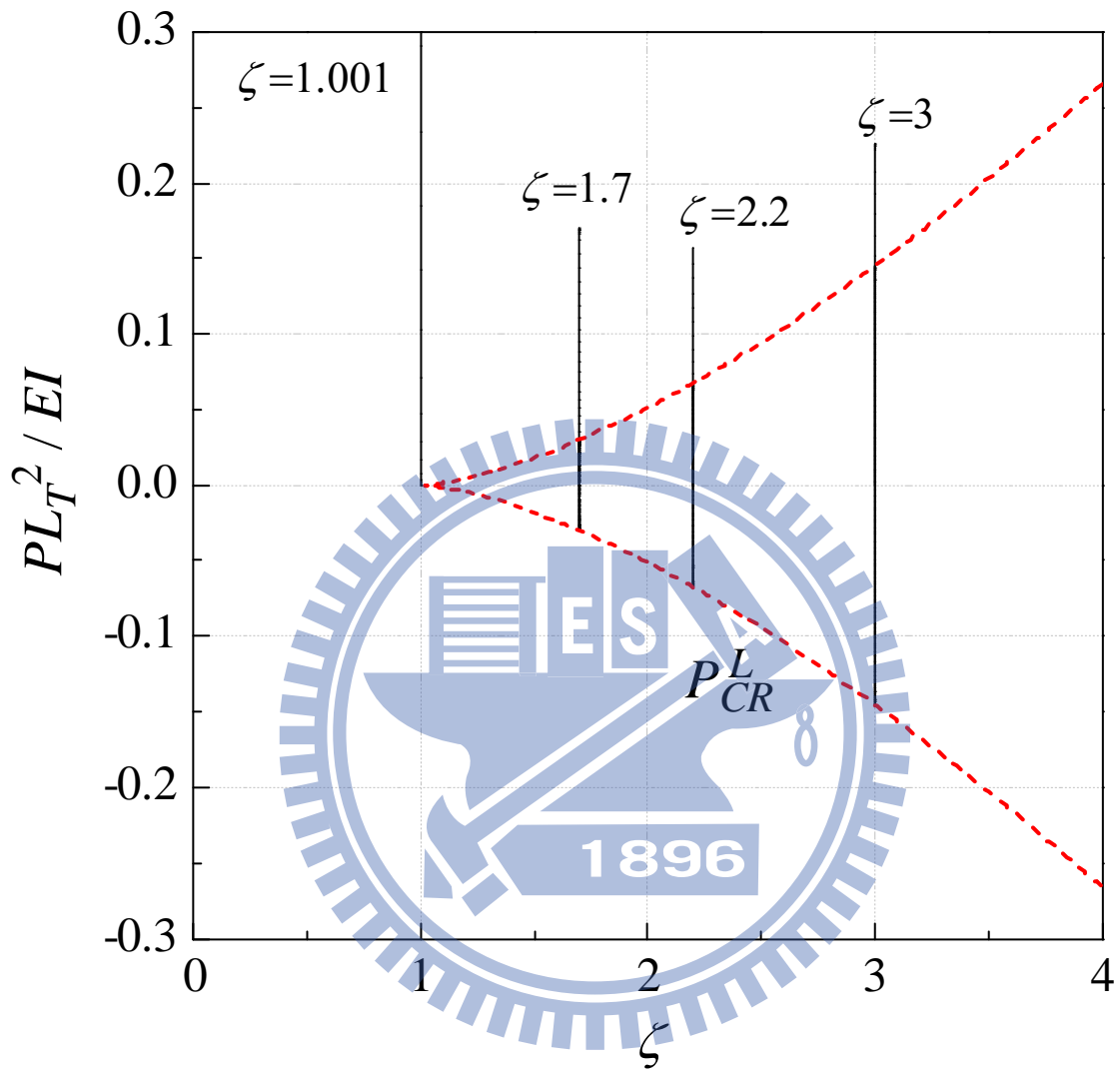


圖 5-5 挫屈梁的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \zeta$ 曲線及其極限點

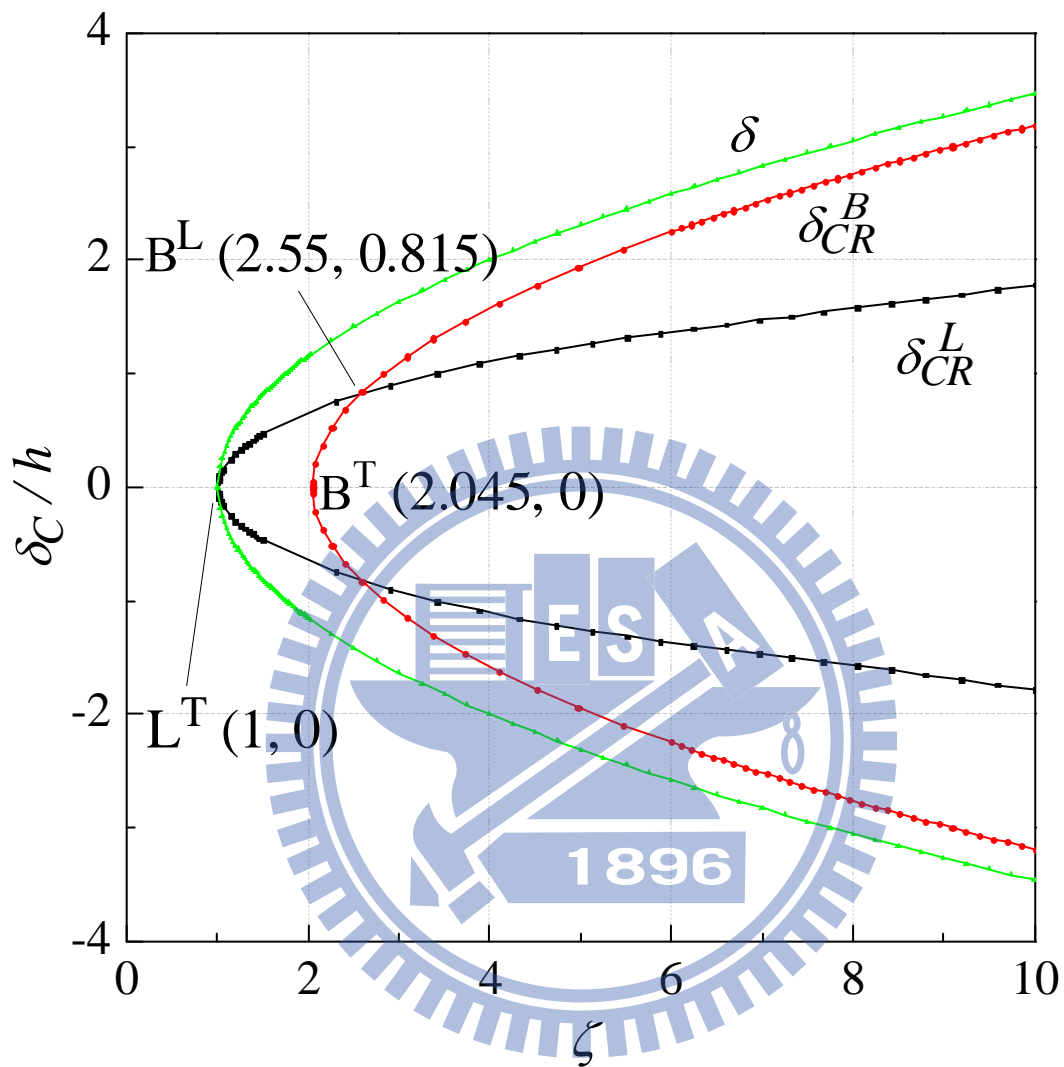


圖 5-6 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 10$)

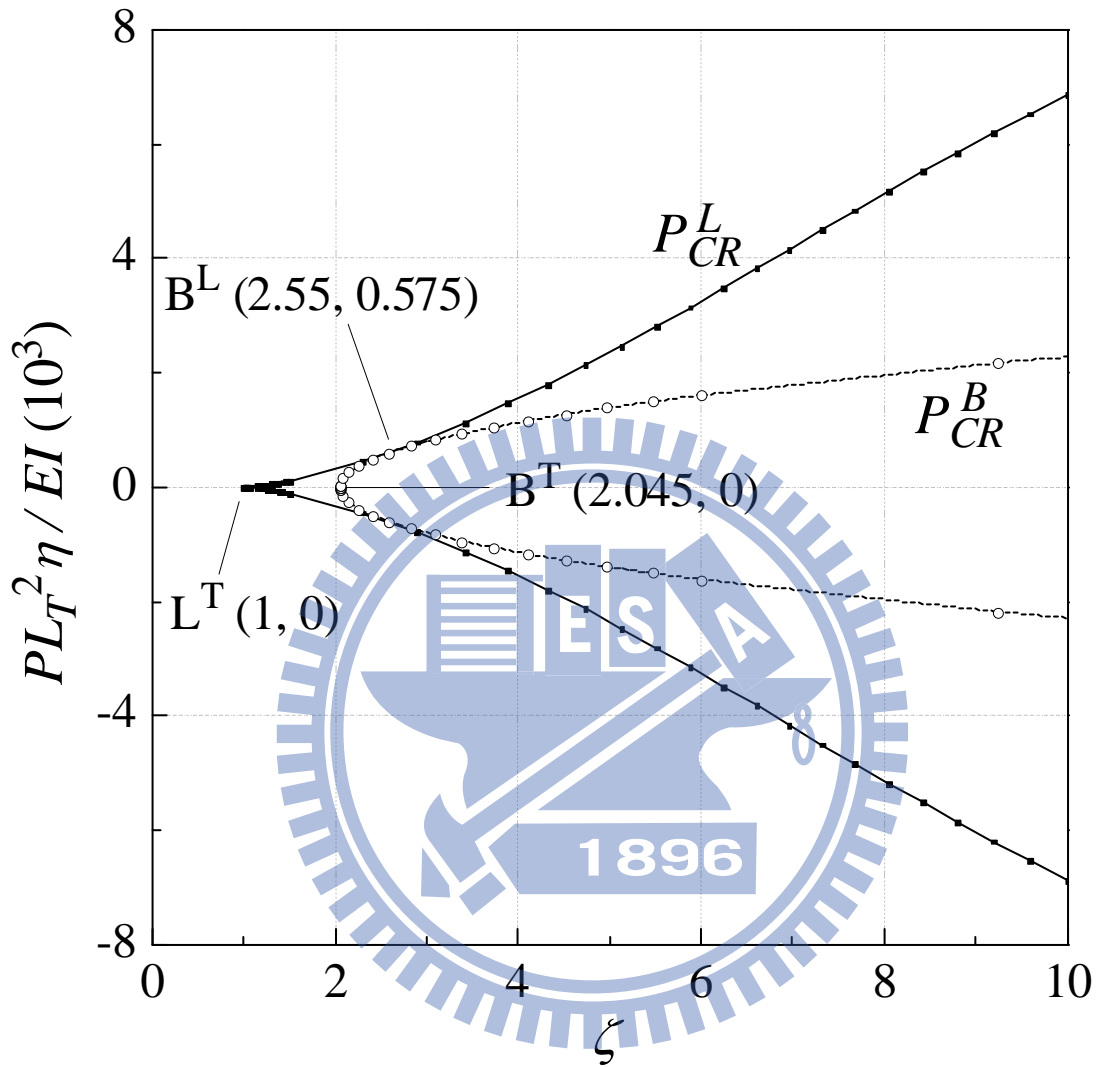


圖 5-7 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 10$)

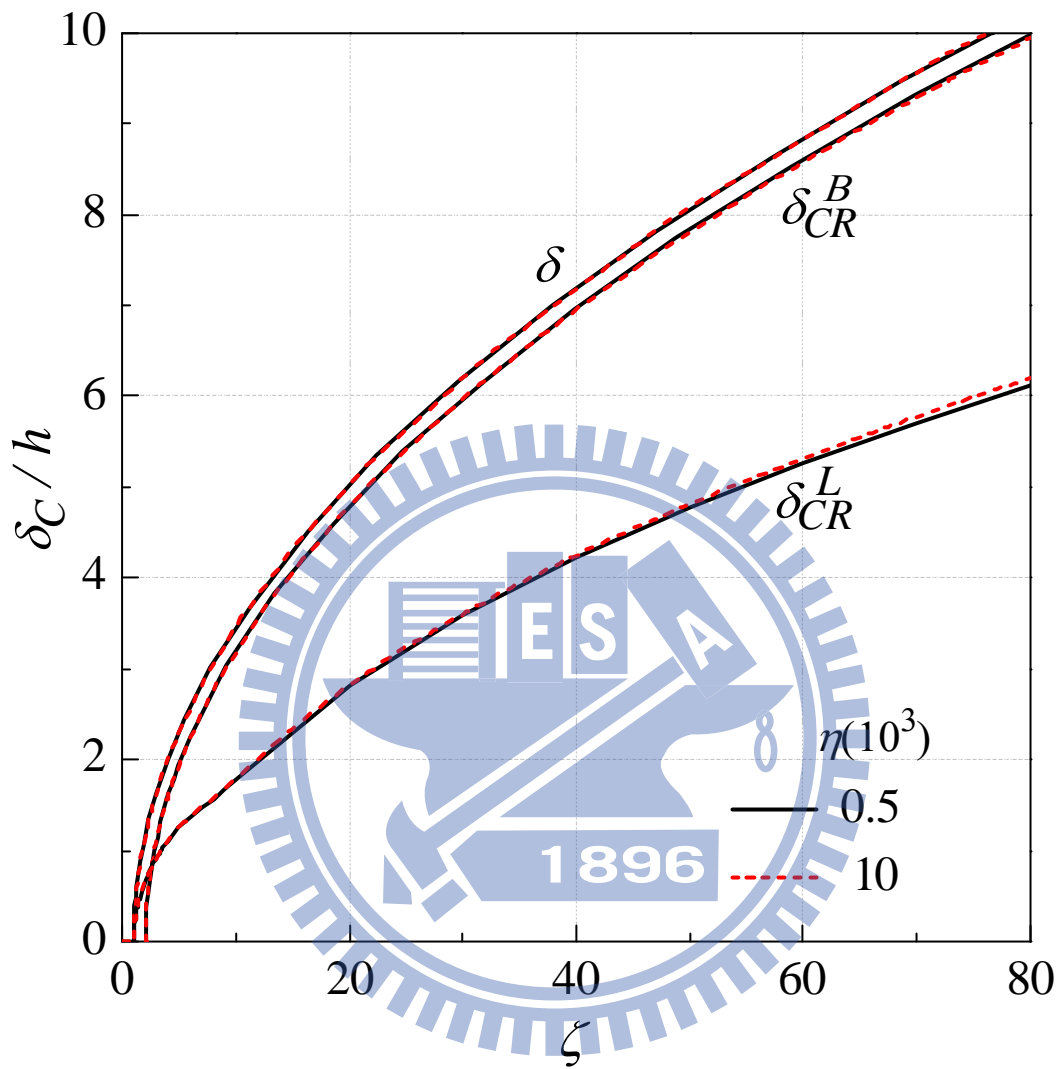


圖 5-8 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_c}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 80$)

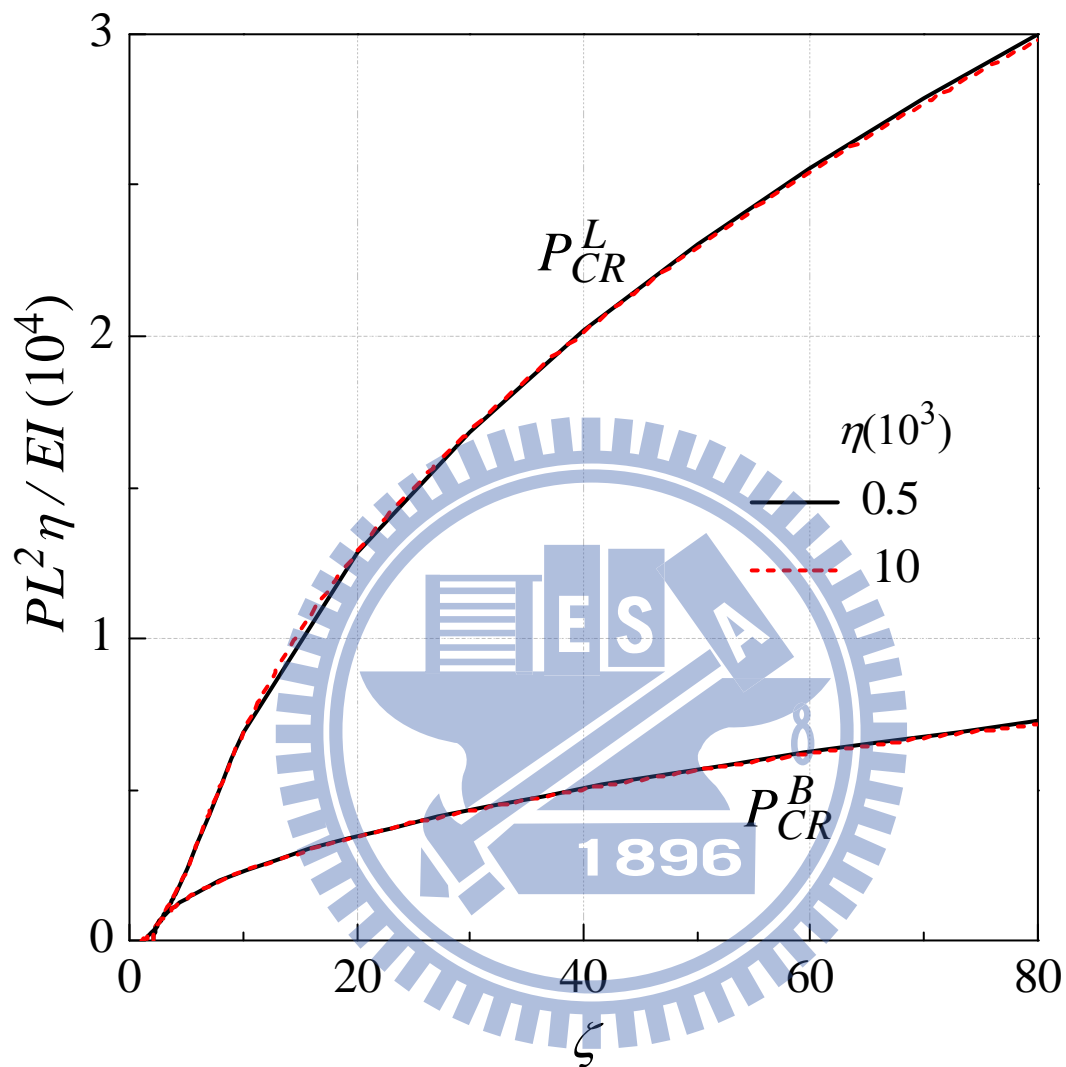


圖 5-9 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖($\zeta \leq 80$)

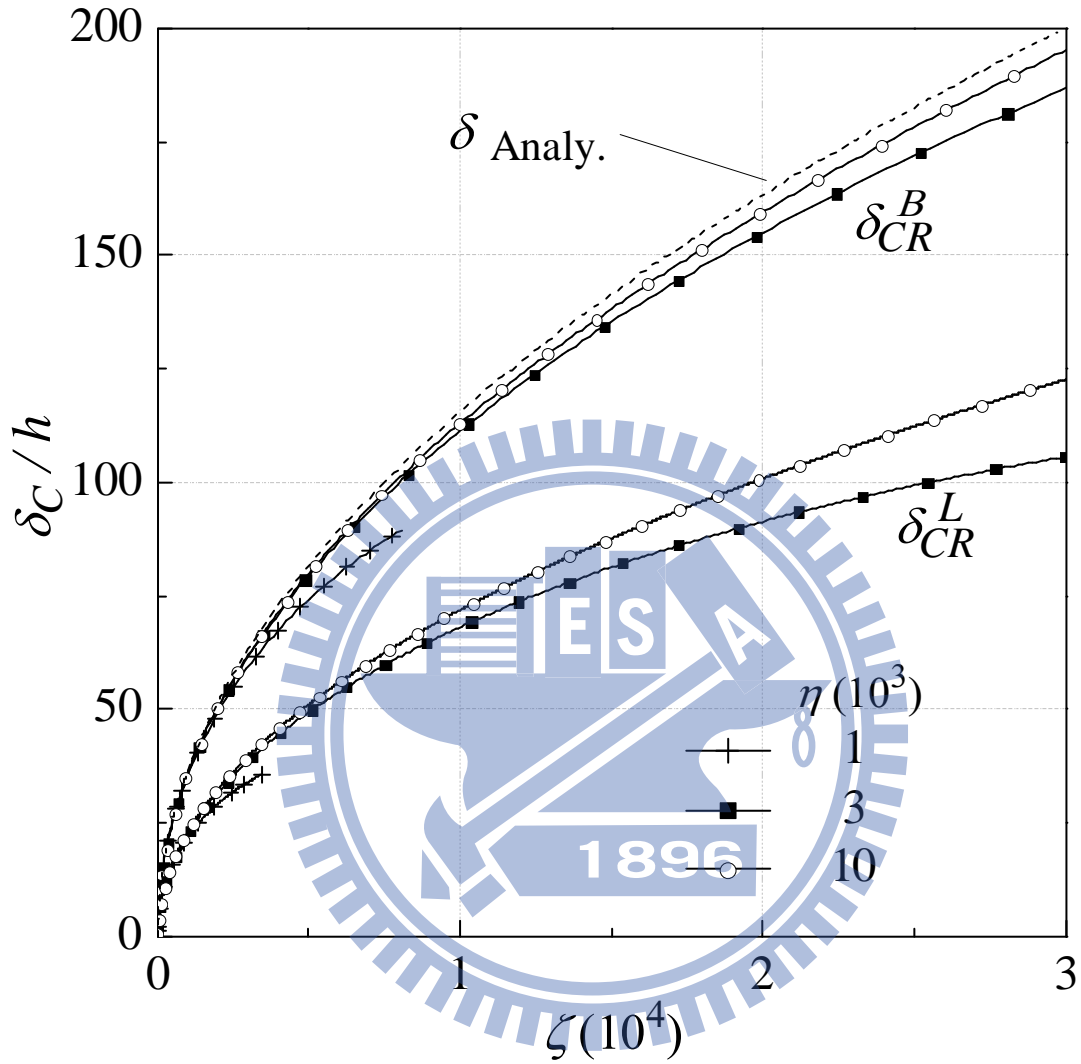


圖 5-10 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)

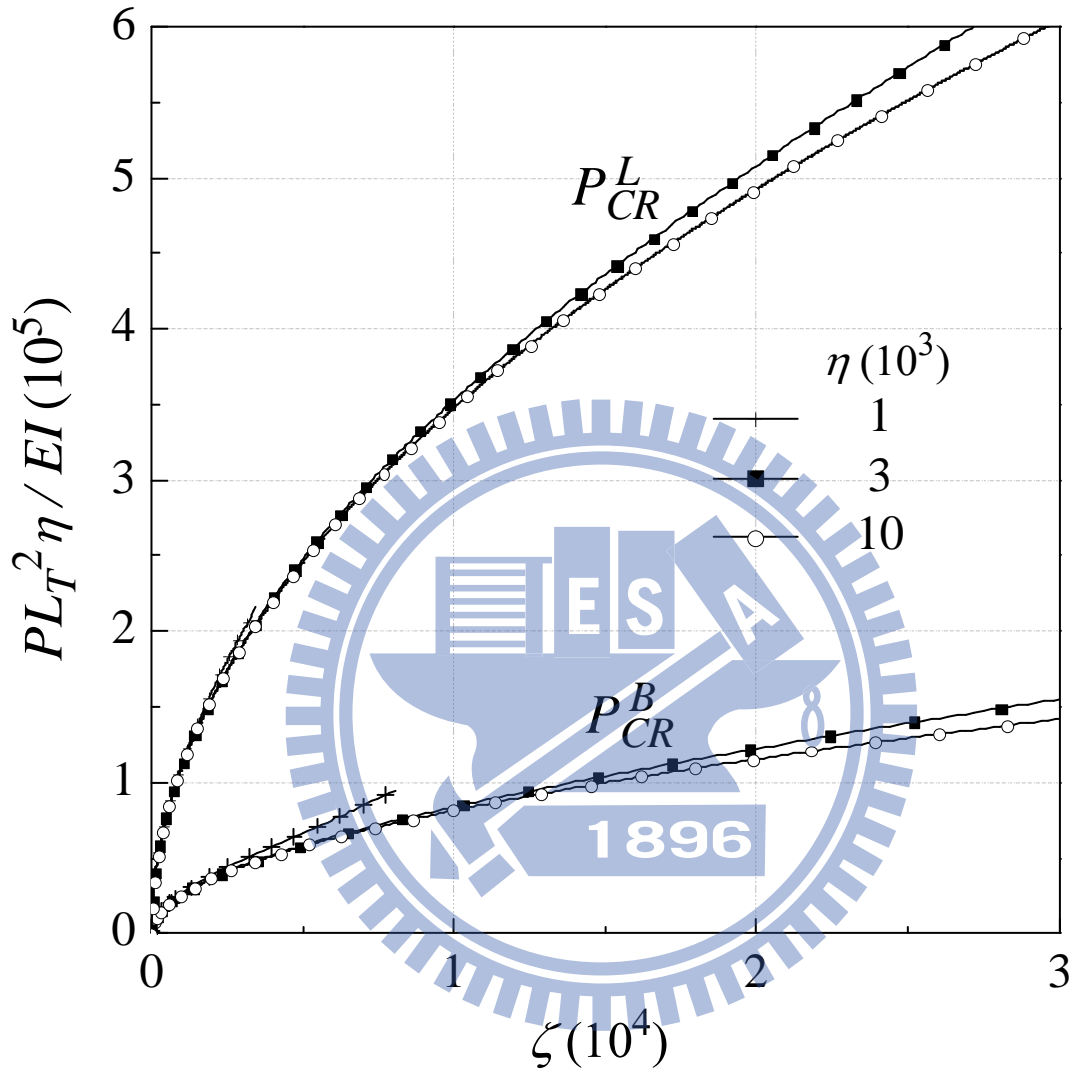


圖 5-11 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)

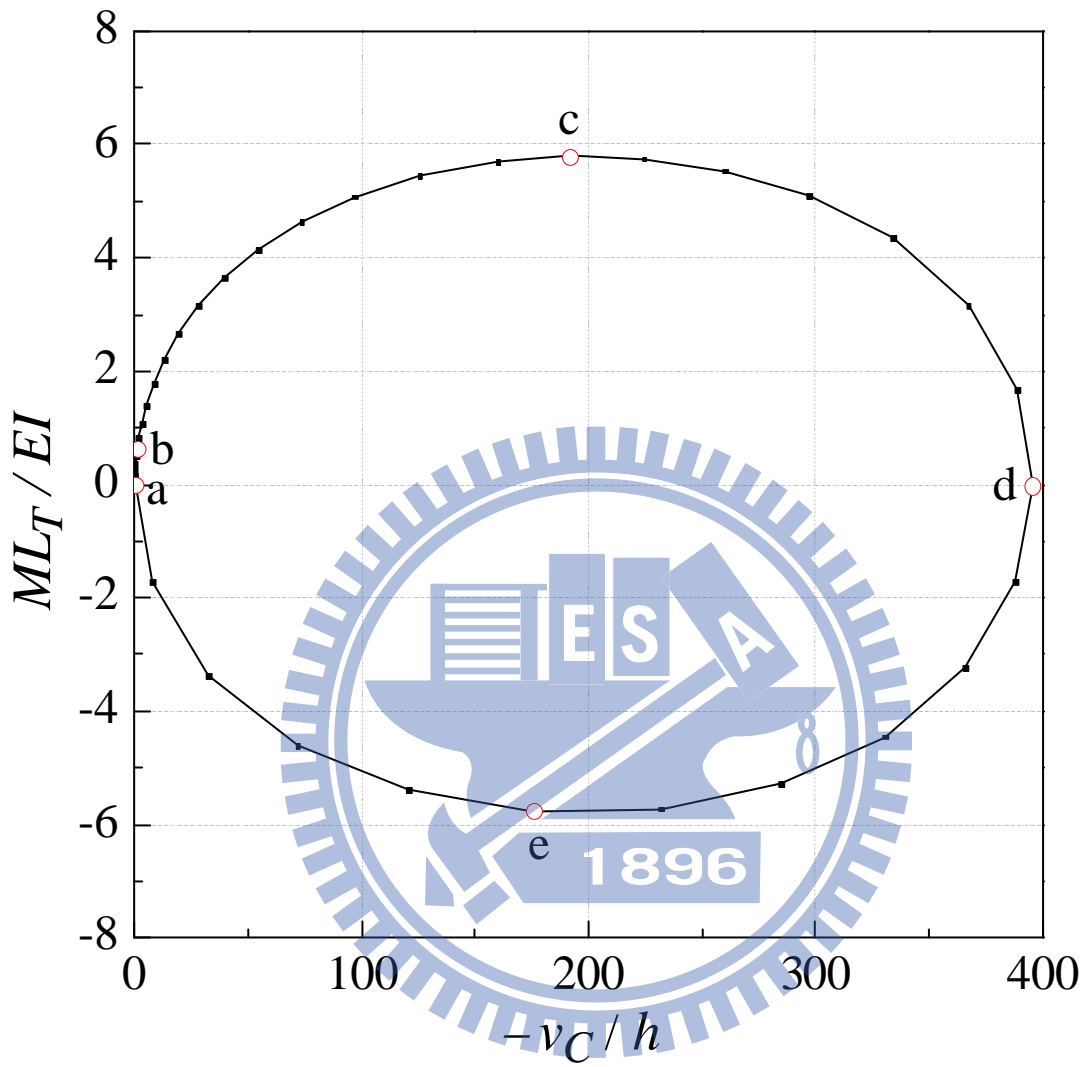


圖 5-12 挫屈梁受集中力矩 M 的 $\frac{ML_T}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線圖

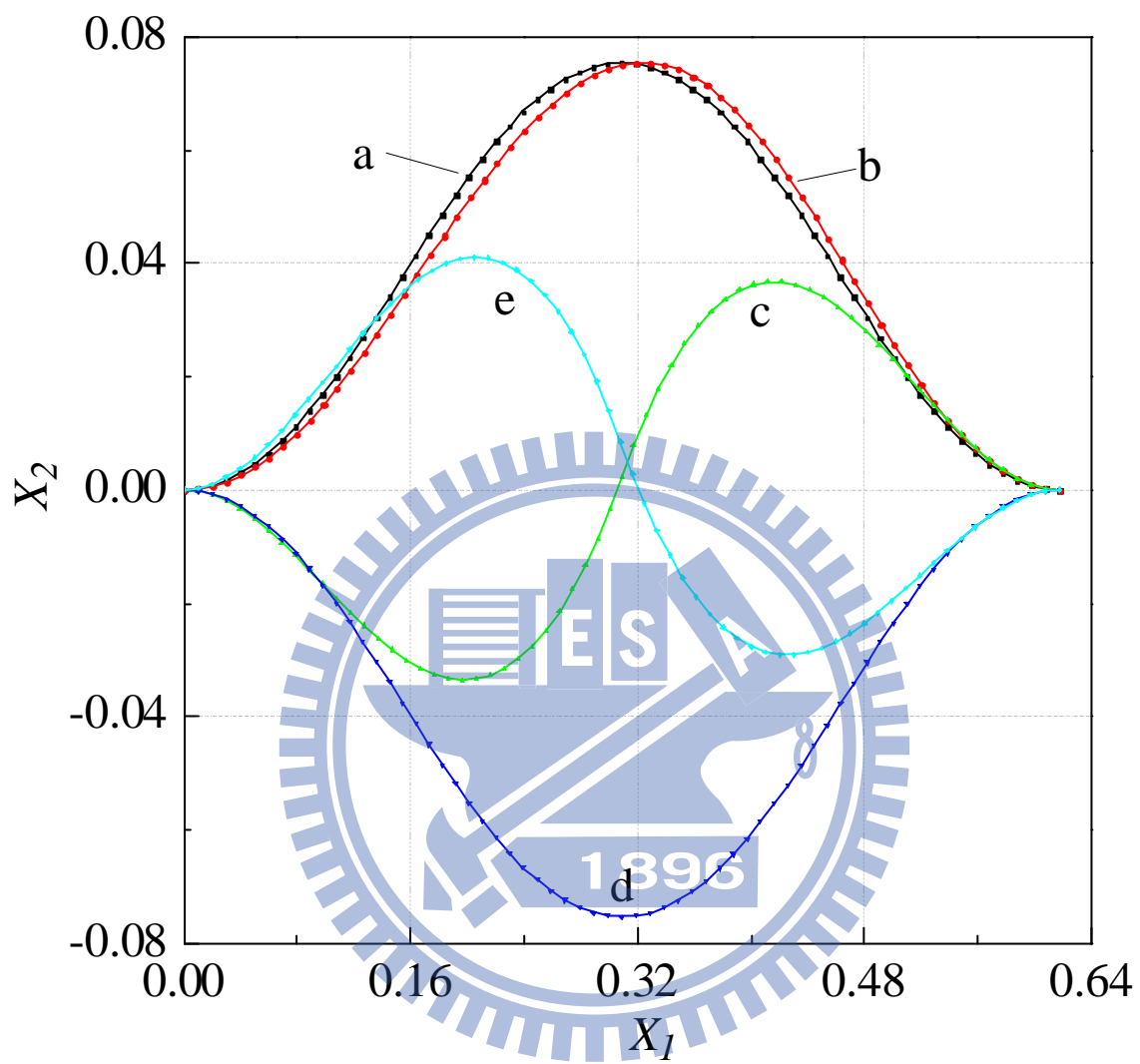


圖 5-13 挫屈梁受集中力矩 M 的結構變形圖

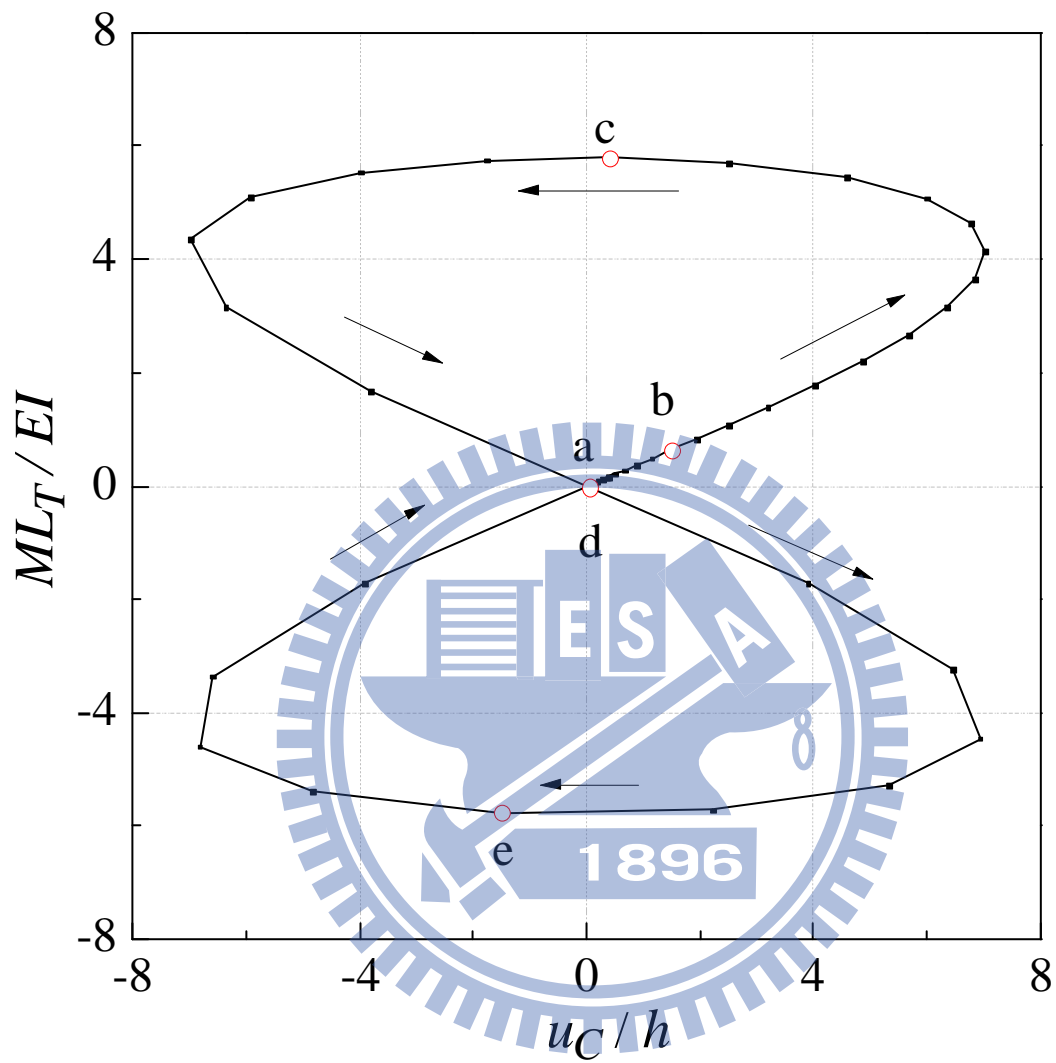


圖 5-14 挫屈梁受集中力矩 M 的 $\frac{ML_T}{EI} - \frac{u_C}{h}$ 曲線圖

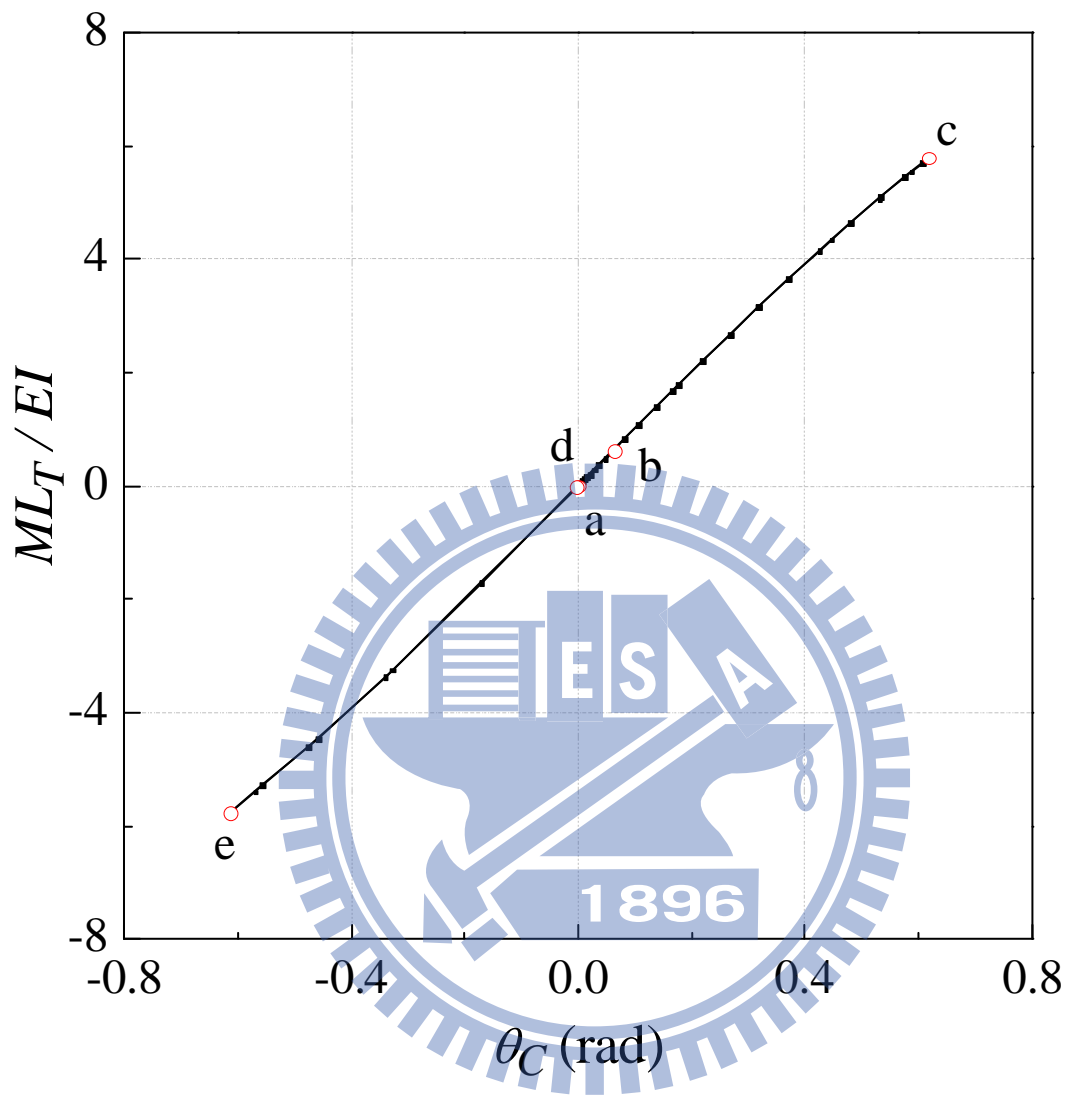


圖 5-15 挫屈梁受集中力矩 M 的 $\frac{ML_T}{EI} - \theta_C$ 曲線圖

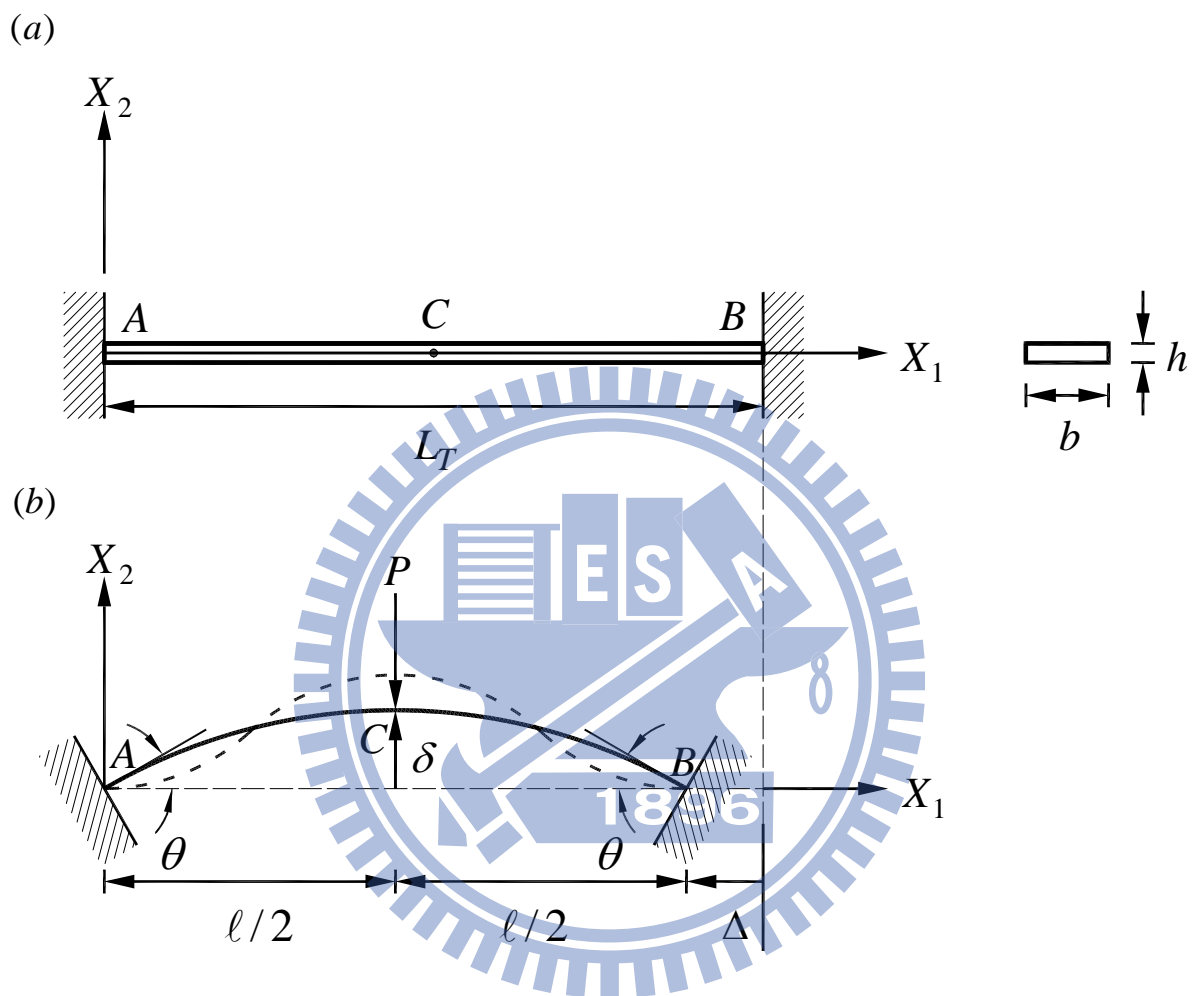


圖 6-1 跨度為 l 、兩端轉角為 θ 之曲梁的初始變形

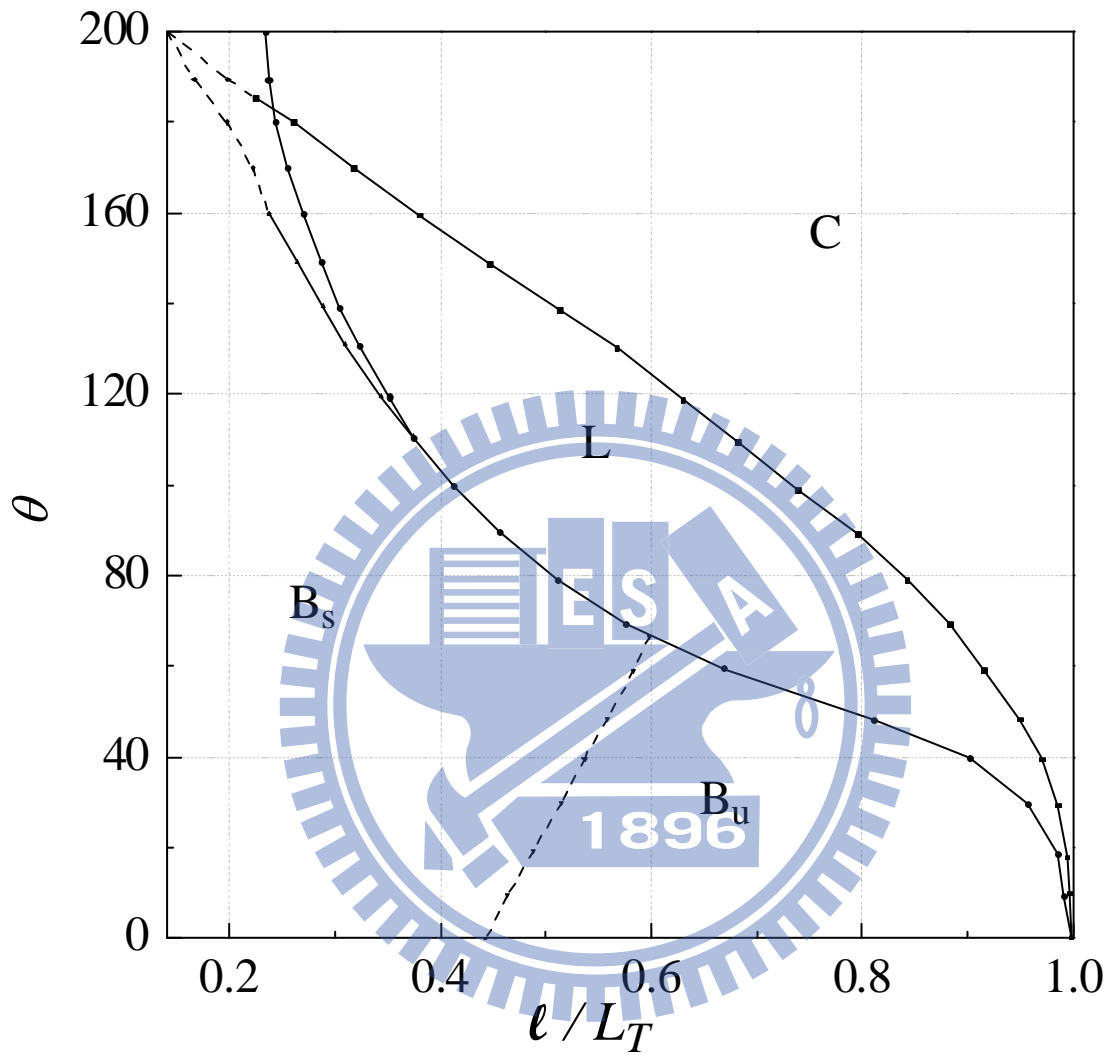


圖 6-2 臨界點在 $\theta-l/L_T$ 平面的摺線([33]的實驗結果)

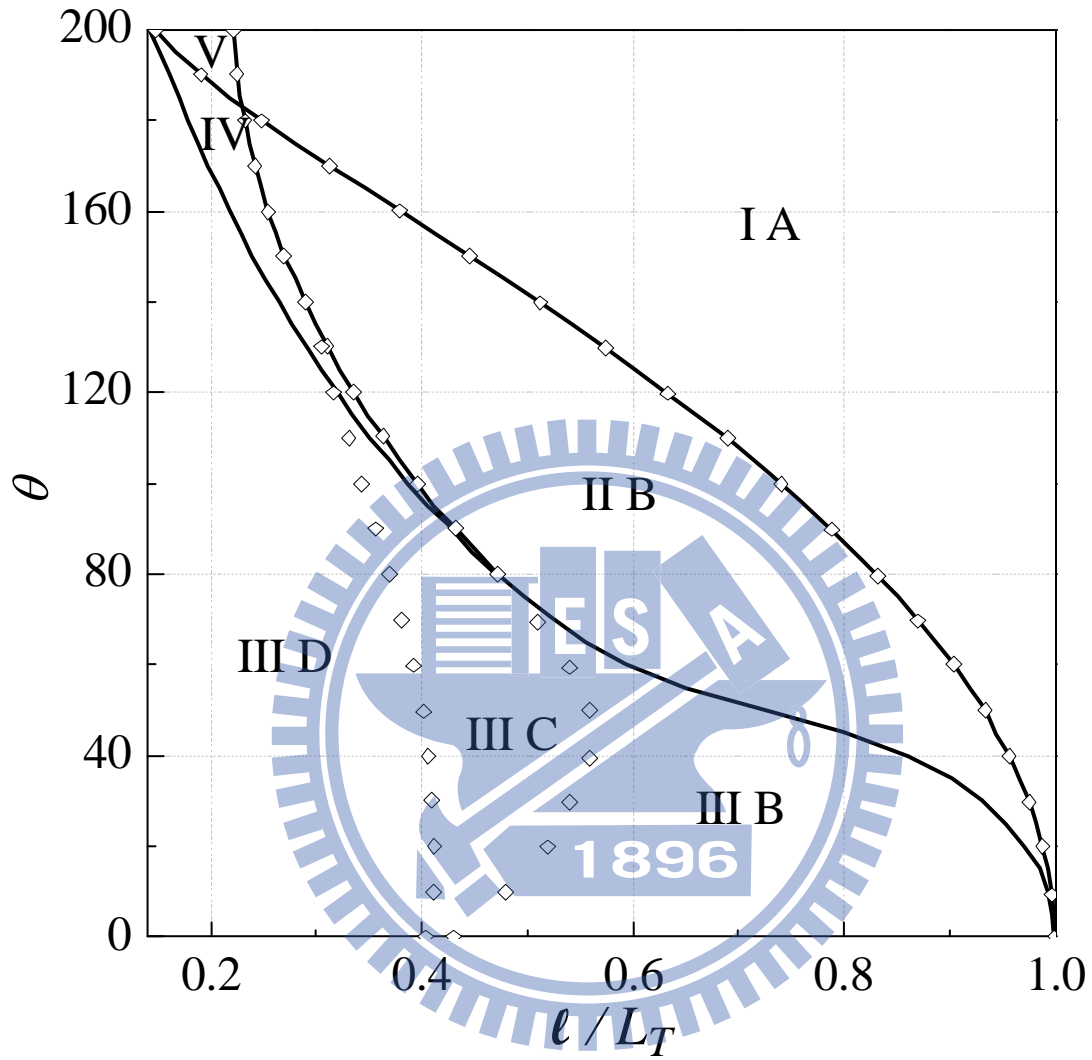


圖 6-3 臨界點在 $\theta-l/L_T$ 平面的摺線(文獻[32]的分析結果)

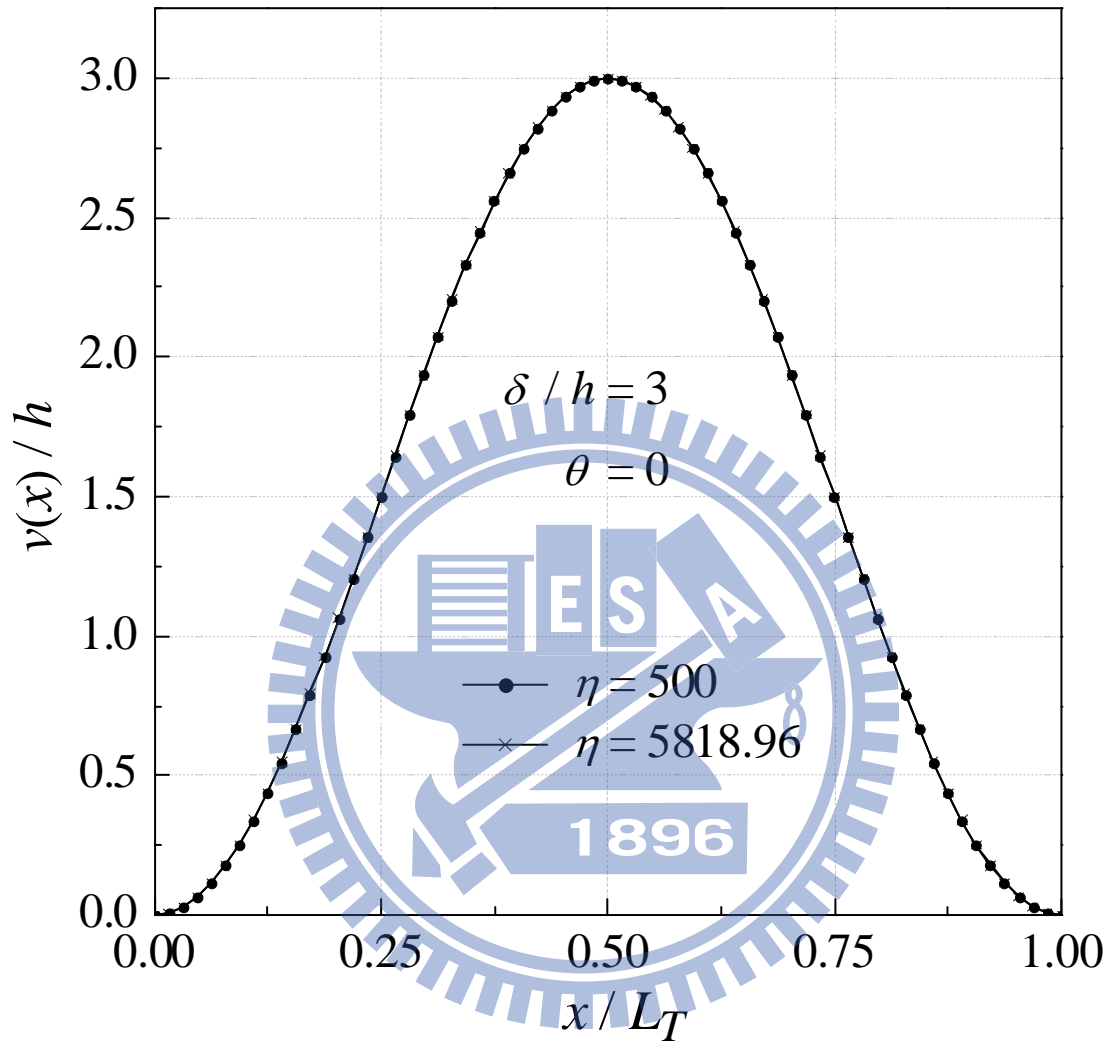


圖 6-4 挫屈梁之無因次側向位移 $\frac{v(x)}{h}$ 分佈圖 ($\delta/h=3$ 、 $\theta=0^\circ$)

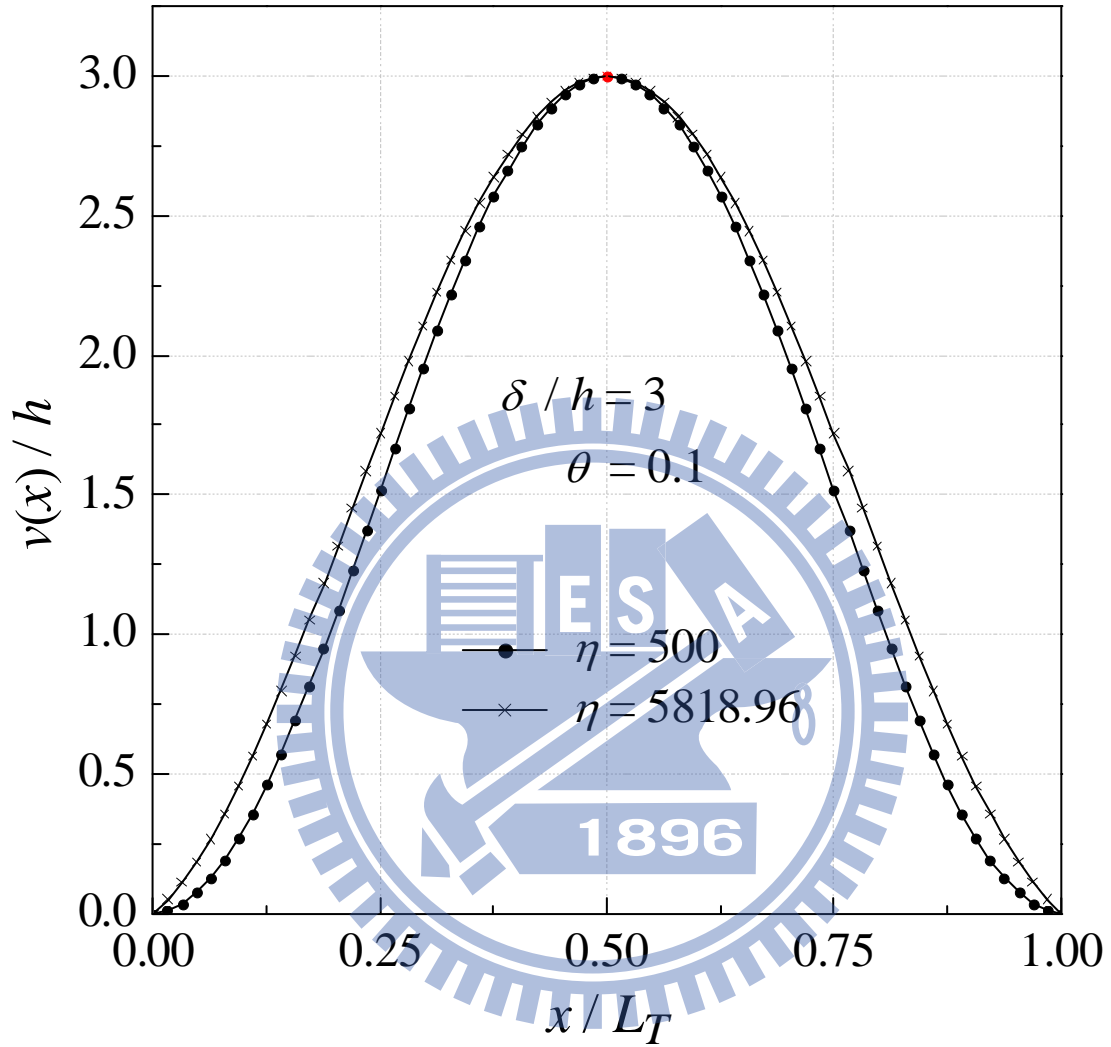


圖 6-5 曲梁之無因次側向位移 $\frac{v(x)}{h}$ 分佈圖 ($\frac{\delta}{h} = 3$, $\theta = 0.1^\circ$)

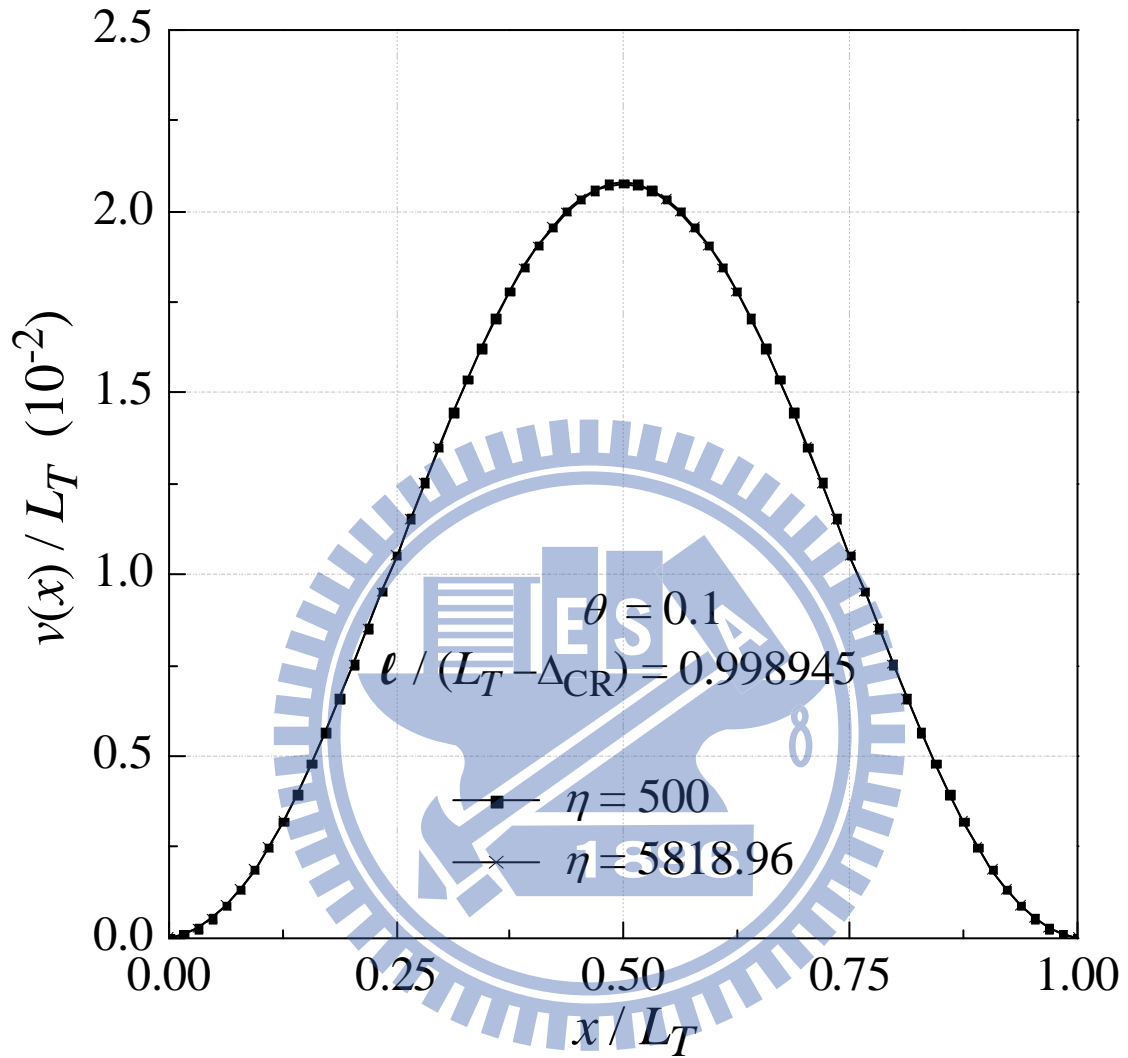


圖 6-6 曲梁的無因次側向位移 $\frac{v(x)}{L_T}$ 分佈圖 ($l/(L_T - \Delta_{CR}) = 0.998945$,

$\theta = 0.1^\circ$)

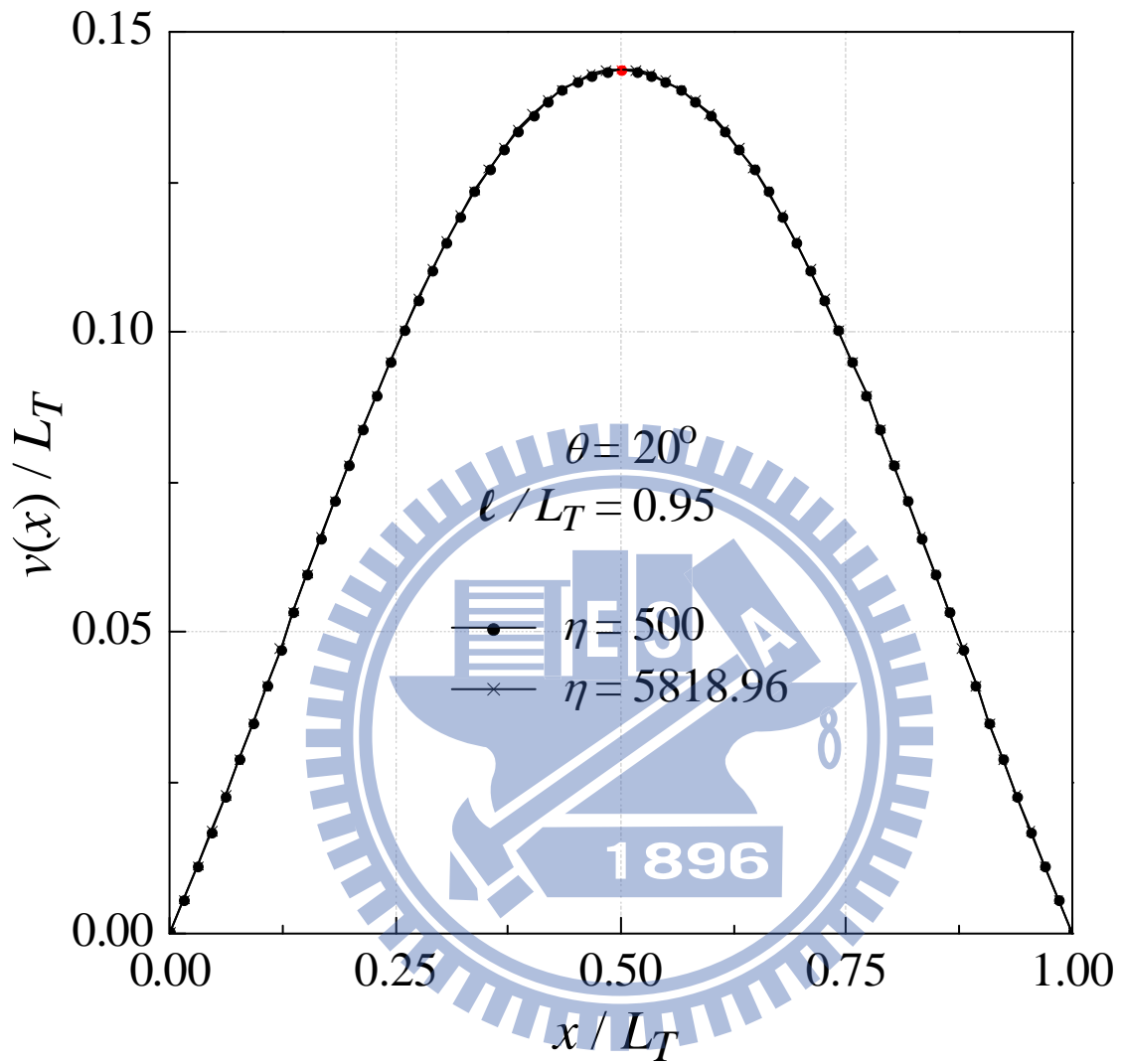


圖 6-7 曲梁的無因次側向位移 $\frac{v(x)}{L_T}$ 分佈圖 ($l/L_T = 0.95$, $\theta = 20^\circ$)

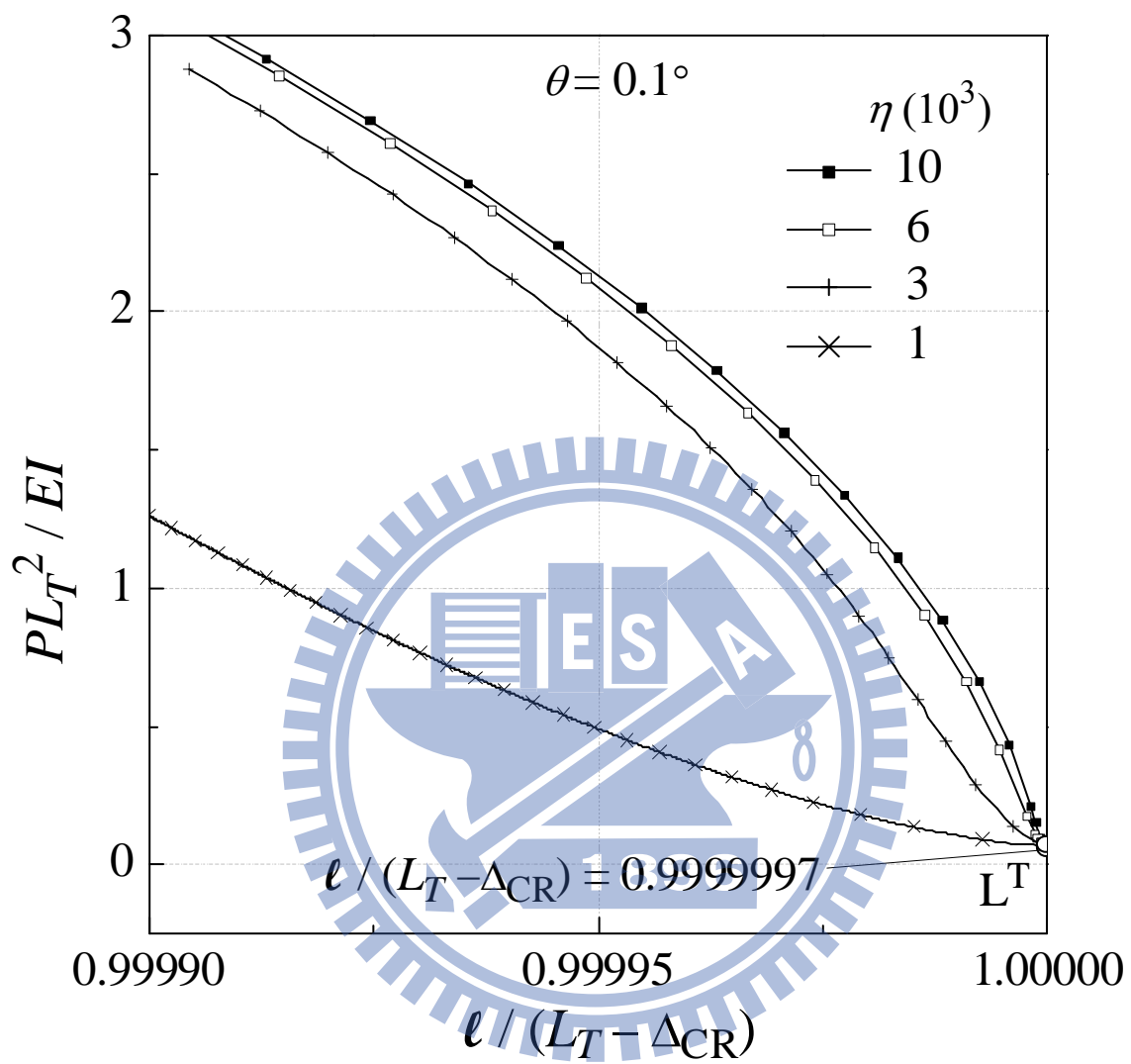


圖 6-8 極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{l}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖 ($\theta = 0.1^\circ$)

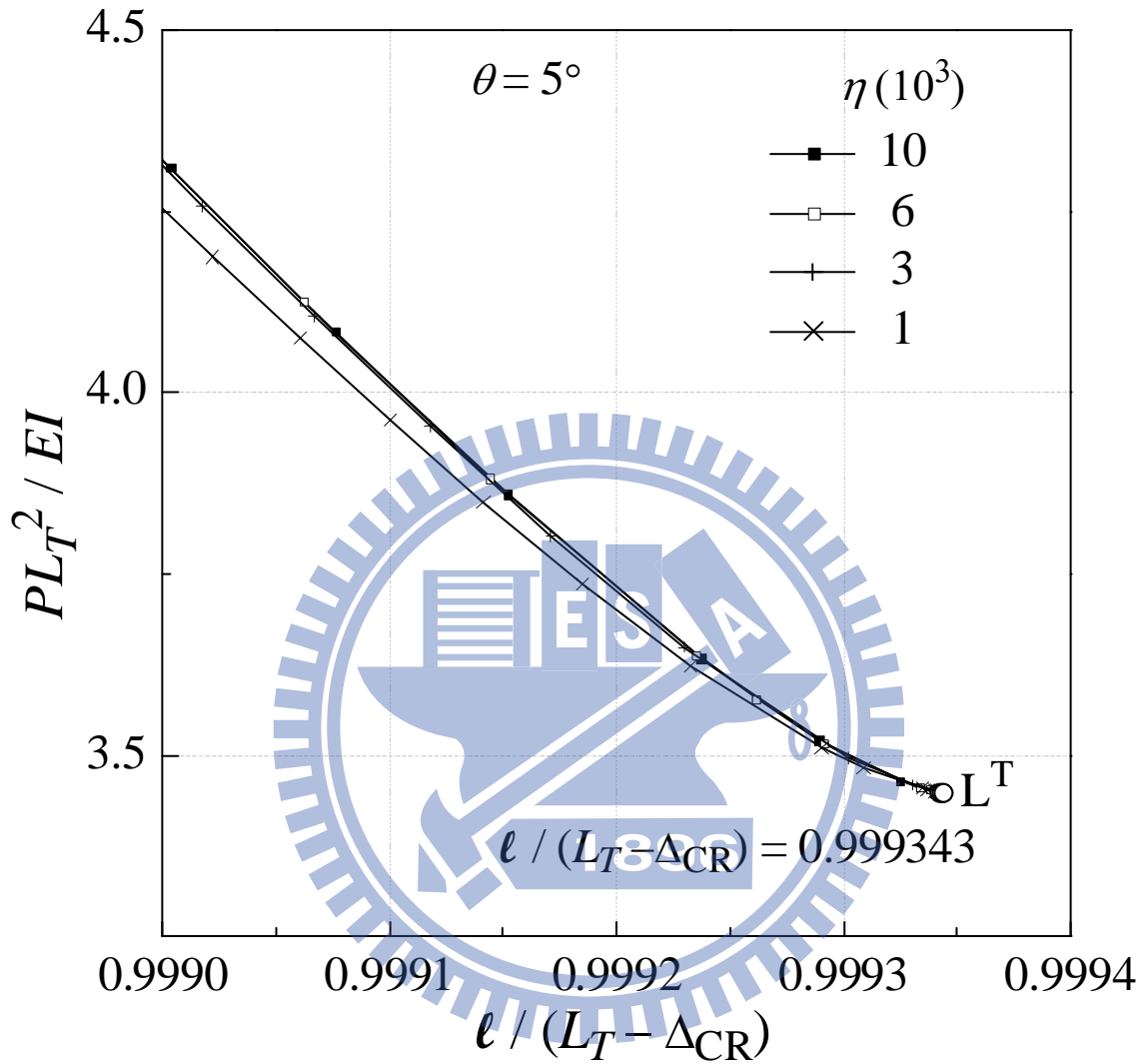


圖 6-9 極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{l}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖 ($\theta = 5^\circ$)

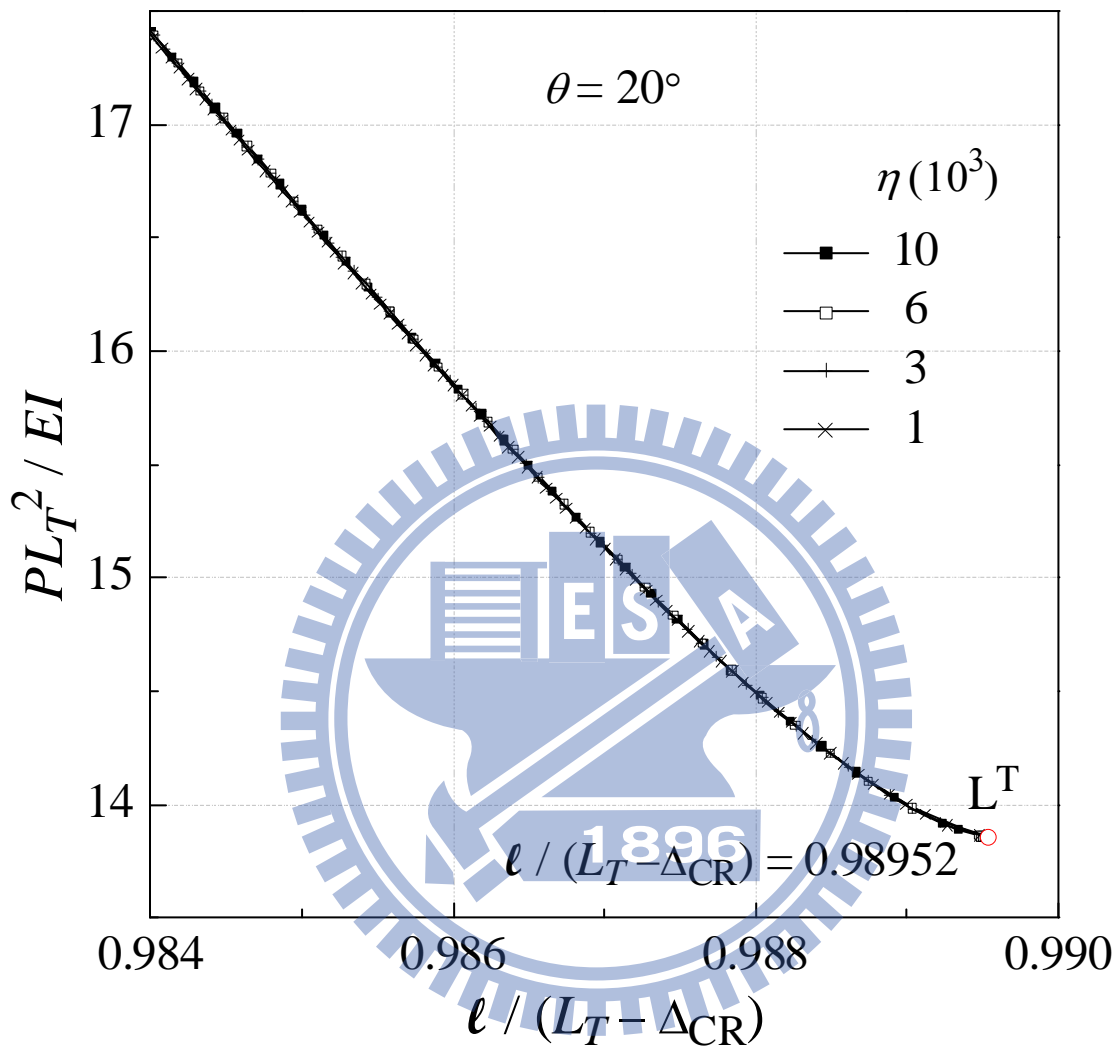


圖 6-10 極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{l}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面的摺線圖($\theta = 20^\circ$)

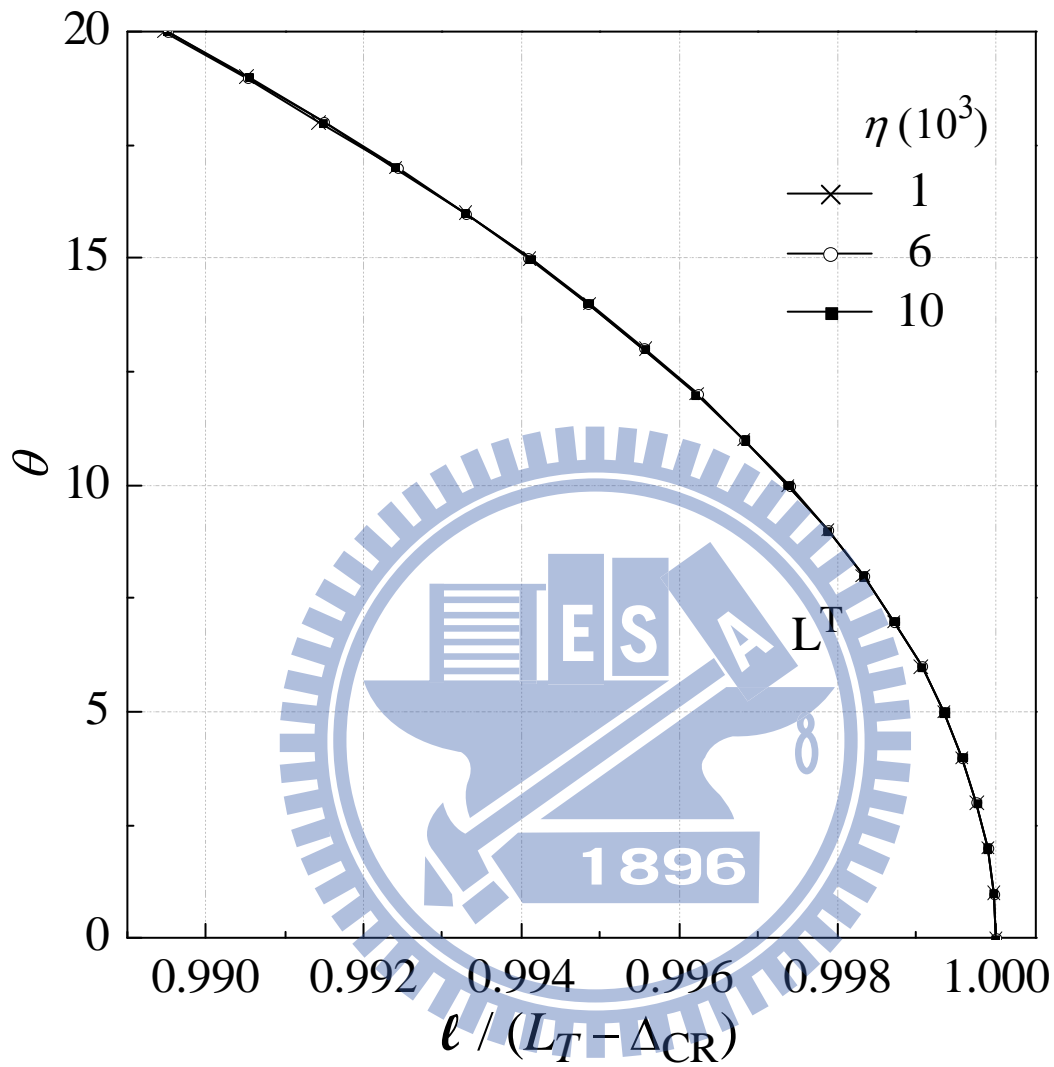


圖 6-11 極限點摺線的轉折點 L^T 在 $\theta - \frac{\ell}{L_T - \Delta_{CR}}$ 平面上的摺線圖

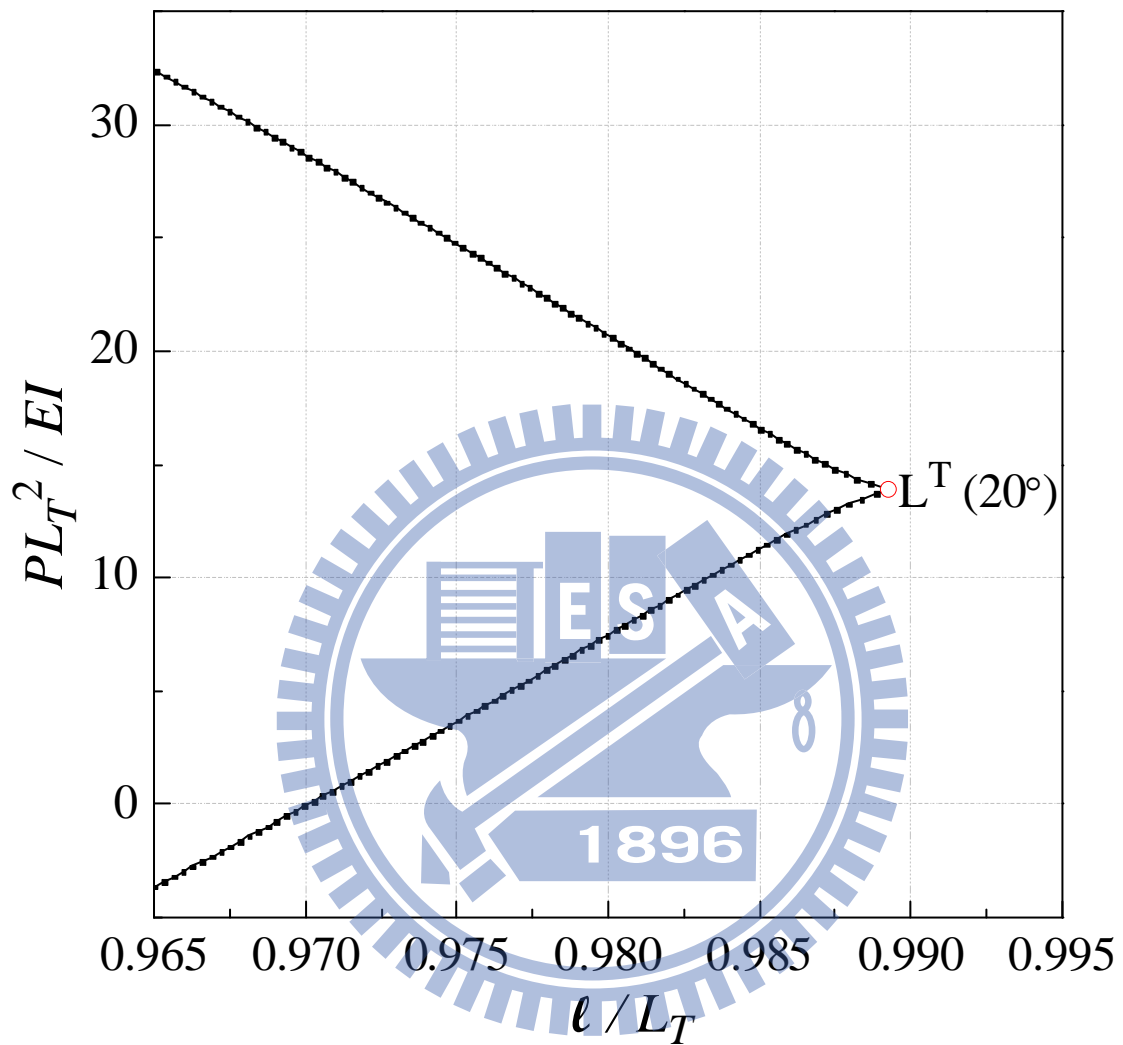


圖 6-12 極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$)

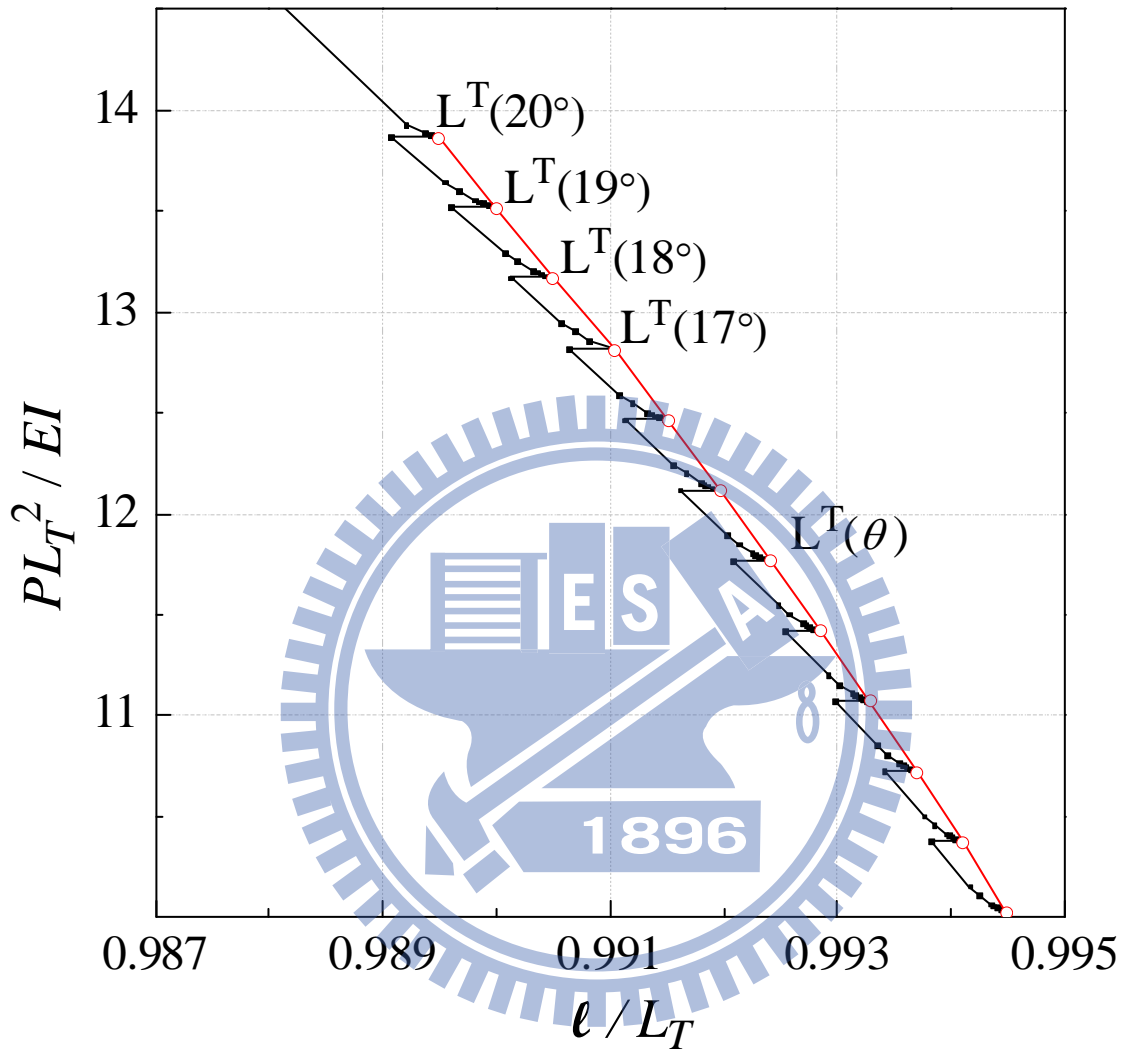


圖 6-13 極限點與其轉折點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面的摺線圖

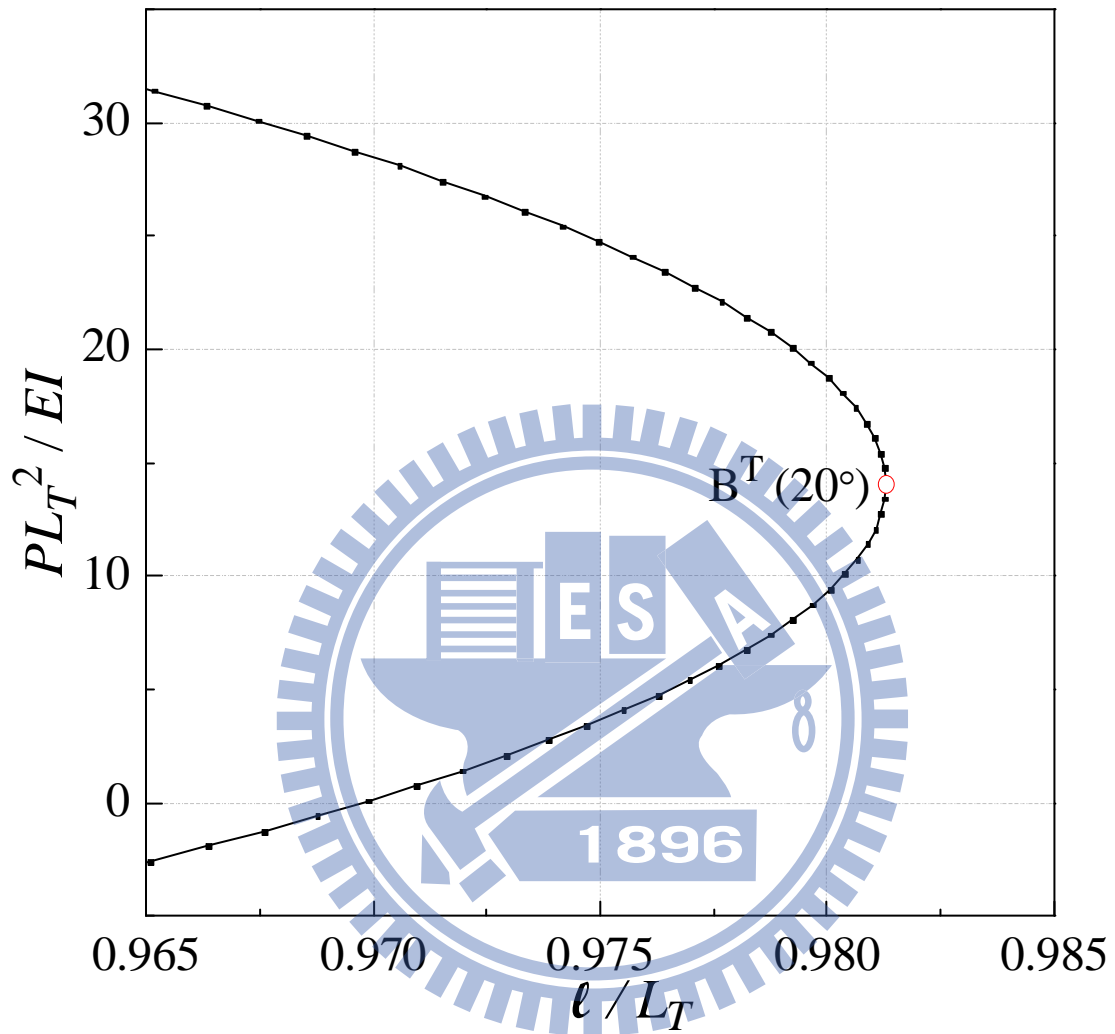


圖 6-14 分歧點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$)

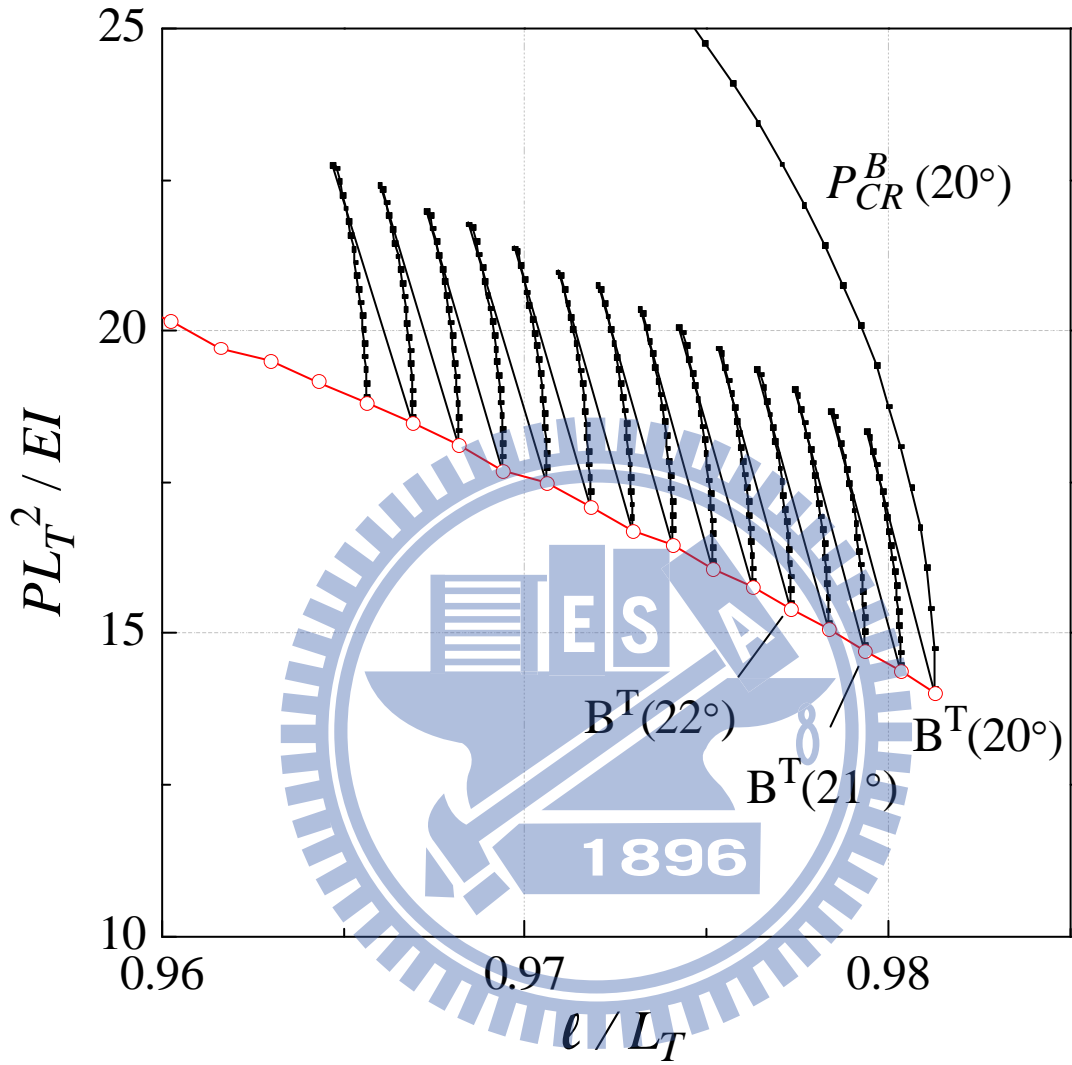


圖 6-15 分歧點與其轉折點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面的摺線圖

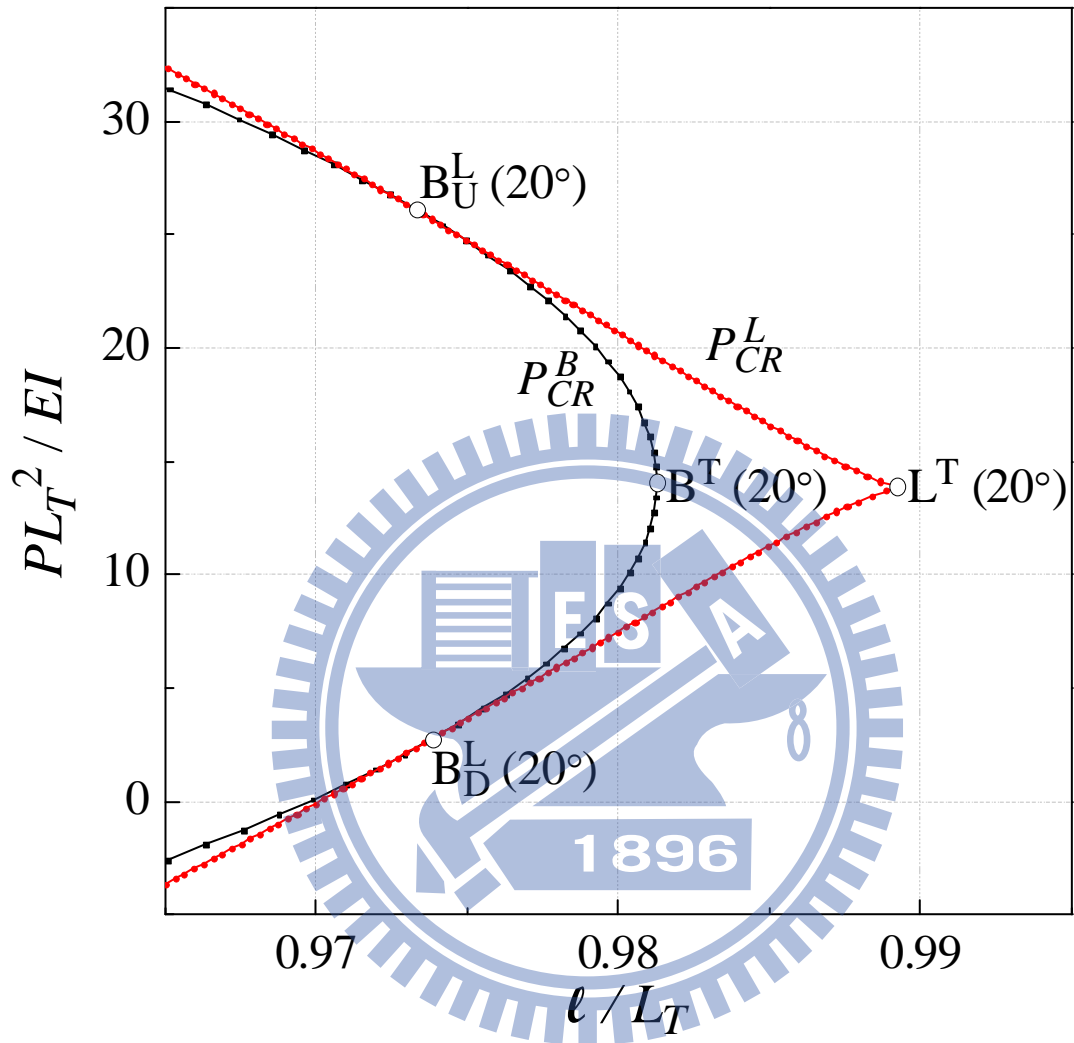


圖 6-16 分歧點、極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線與其切點、轉折點

($\theta = 20^\circ$)

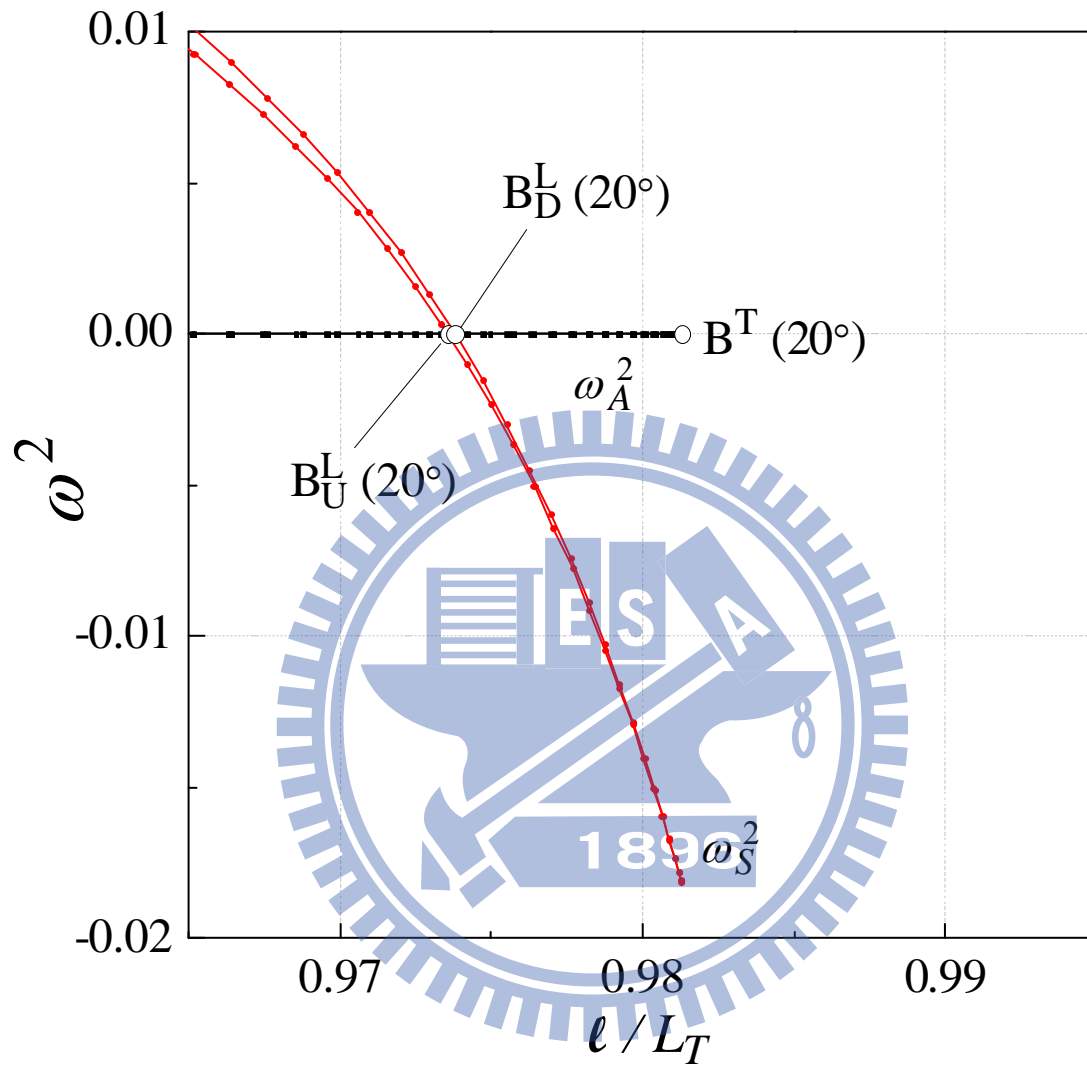


圖 6-17 分歧點摺線上對稱及反對稱振態之自然振動頻率的平方 ω_S^2 與 ω_A^2 - 跨度 ℓ/L_T 的變化圖 ($\theta = 20^\circ$)

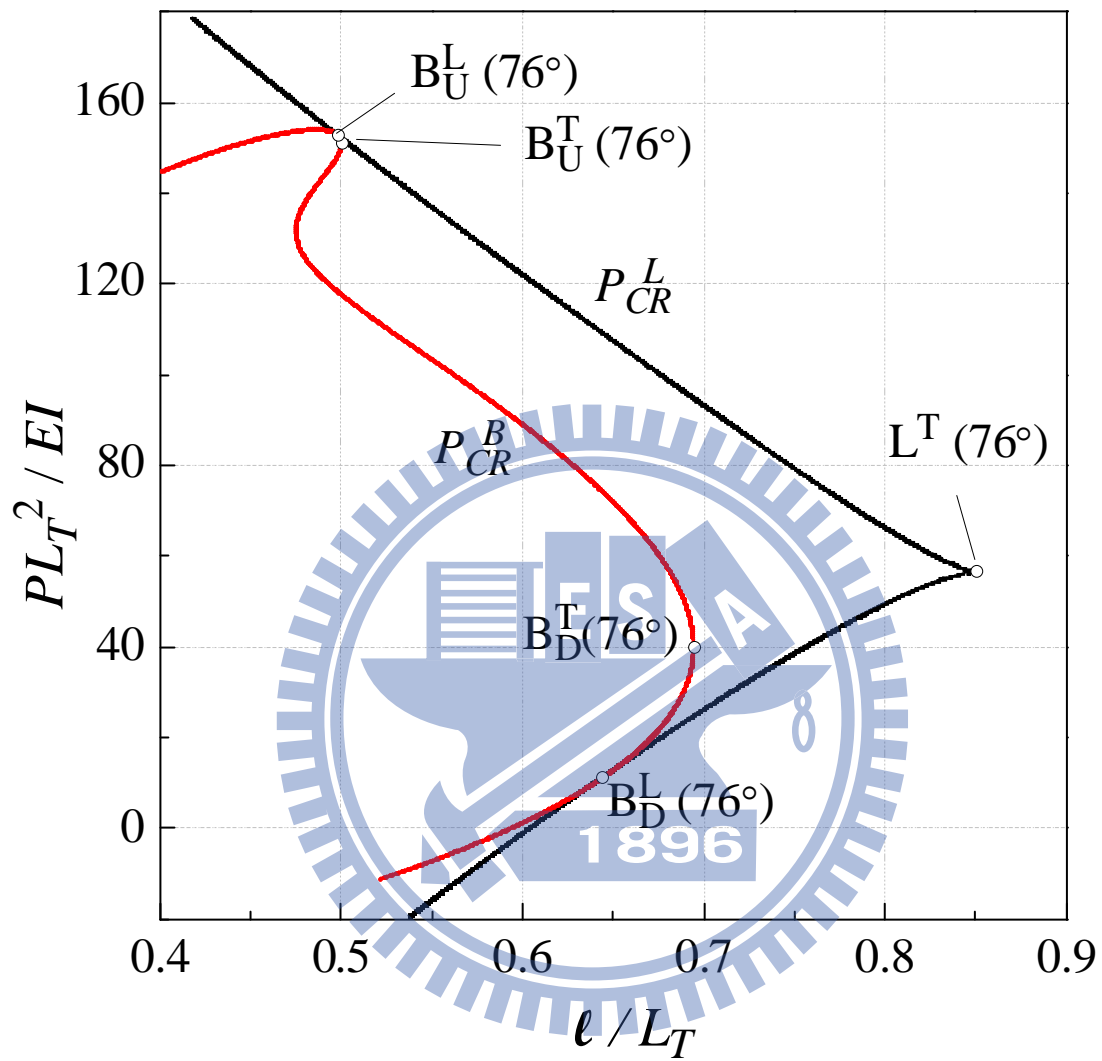


圖 6-18 分歧點、極限點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線與其切點、轉折點

($\theta = 76^\circ$)

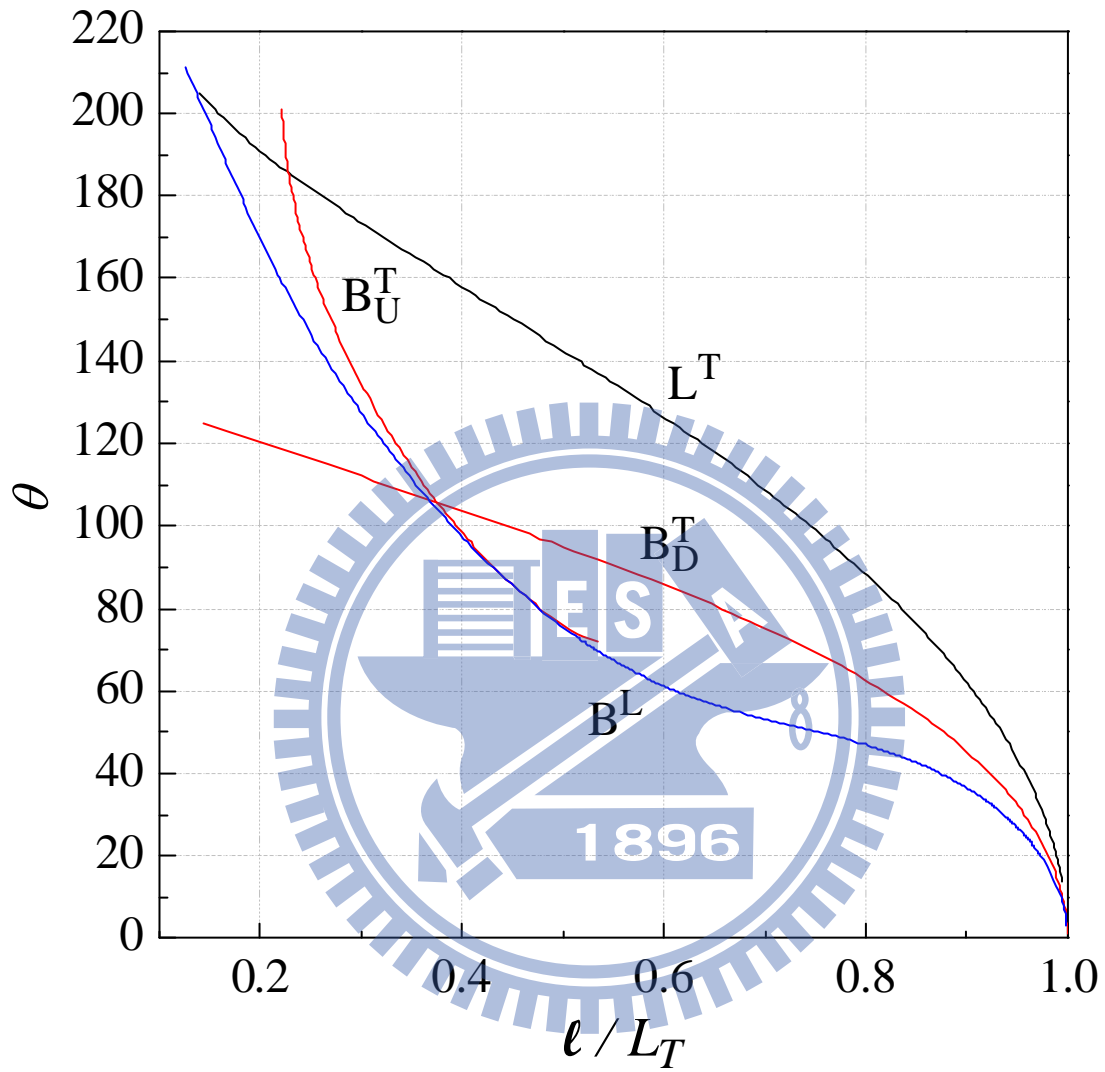


圖 6-19 轉折點 L^T 、 B_U^T 、 B_D^T 、 B^L 在 $\theta - \ell/L_T$ 平面的摺線

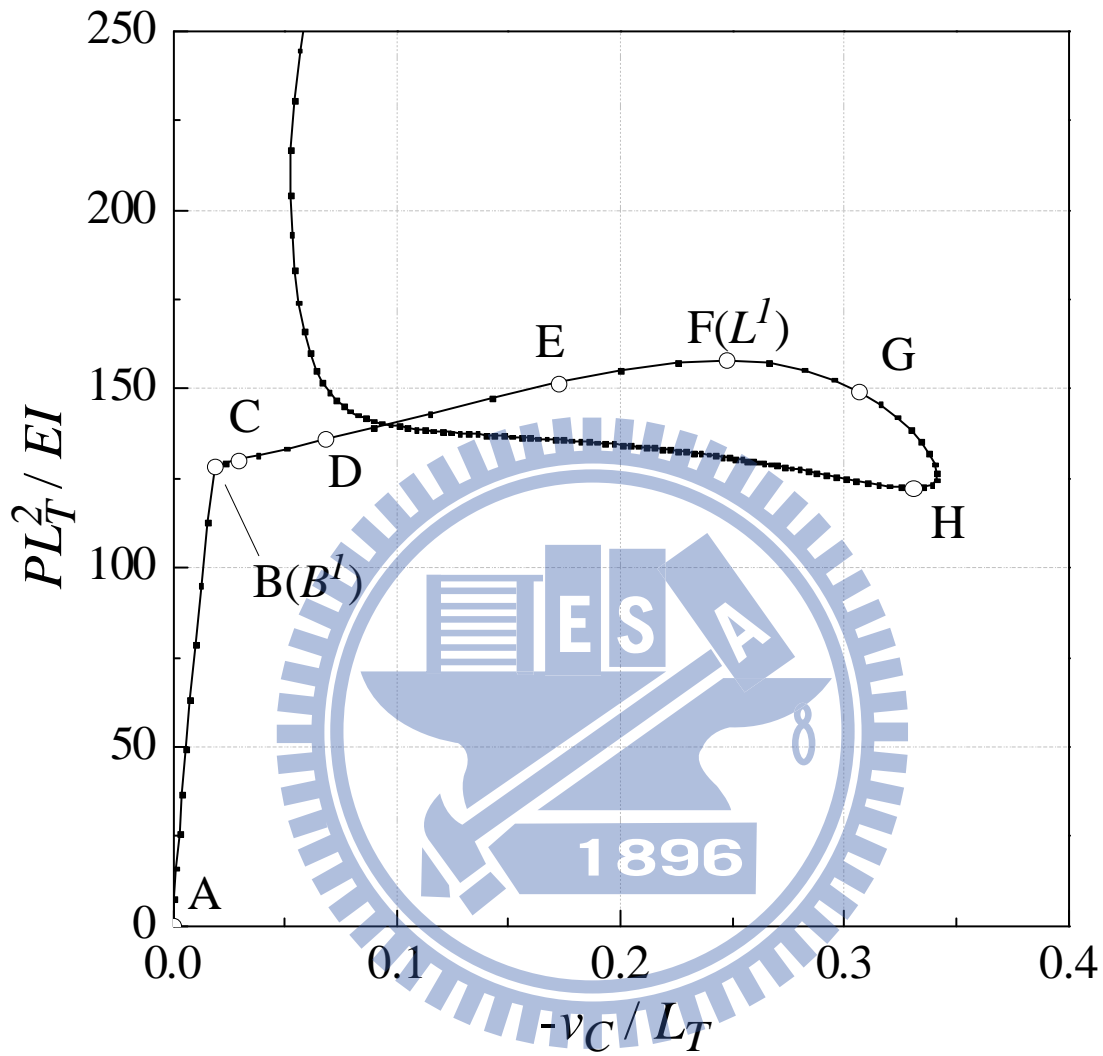


圖 6-20 曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖 ($\theta = 20^\circ$, $\frac{\ell}{L_T} = 0.35$)

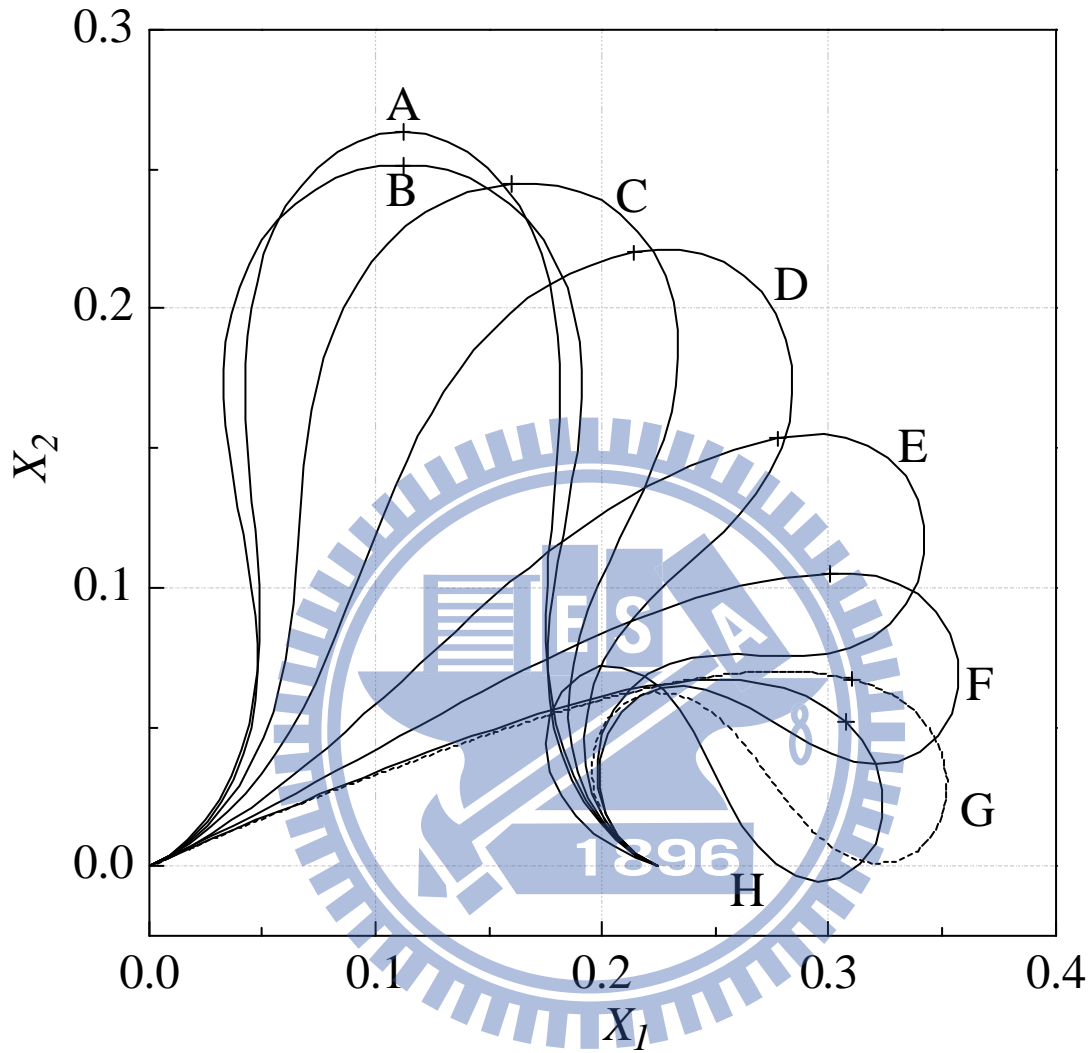


圖 6-21 曲梁的變形圖($\theta = 20^\circ$, $\frac{\ell}{L_T} = 0.35$)

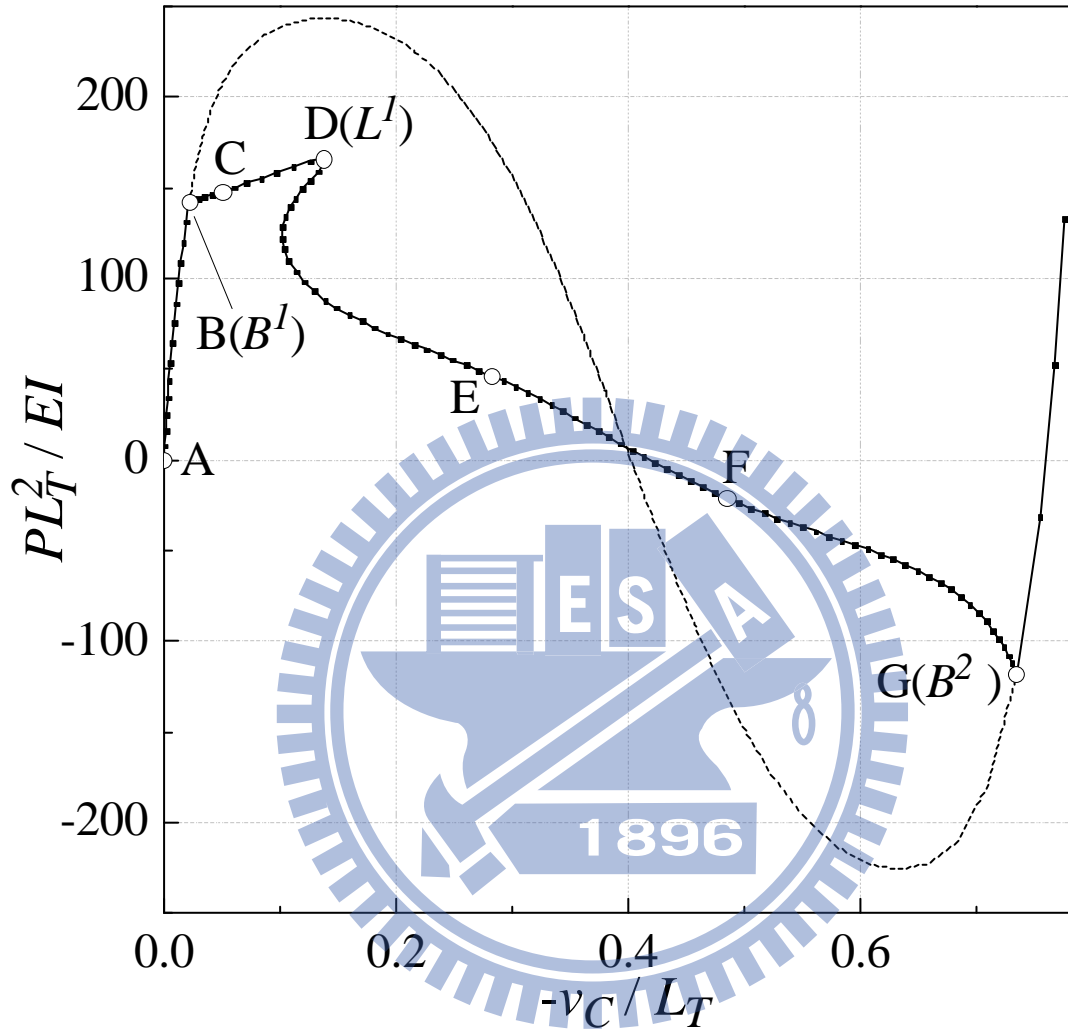


圖 6-22 曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線圖 ($\theta = 20^\circ$, $\frac{\ell}{L_T} = 0.44$)

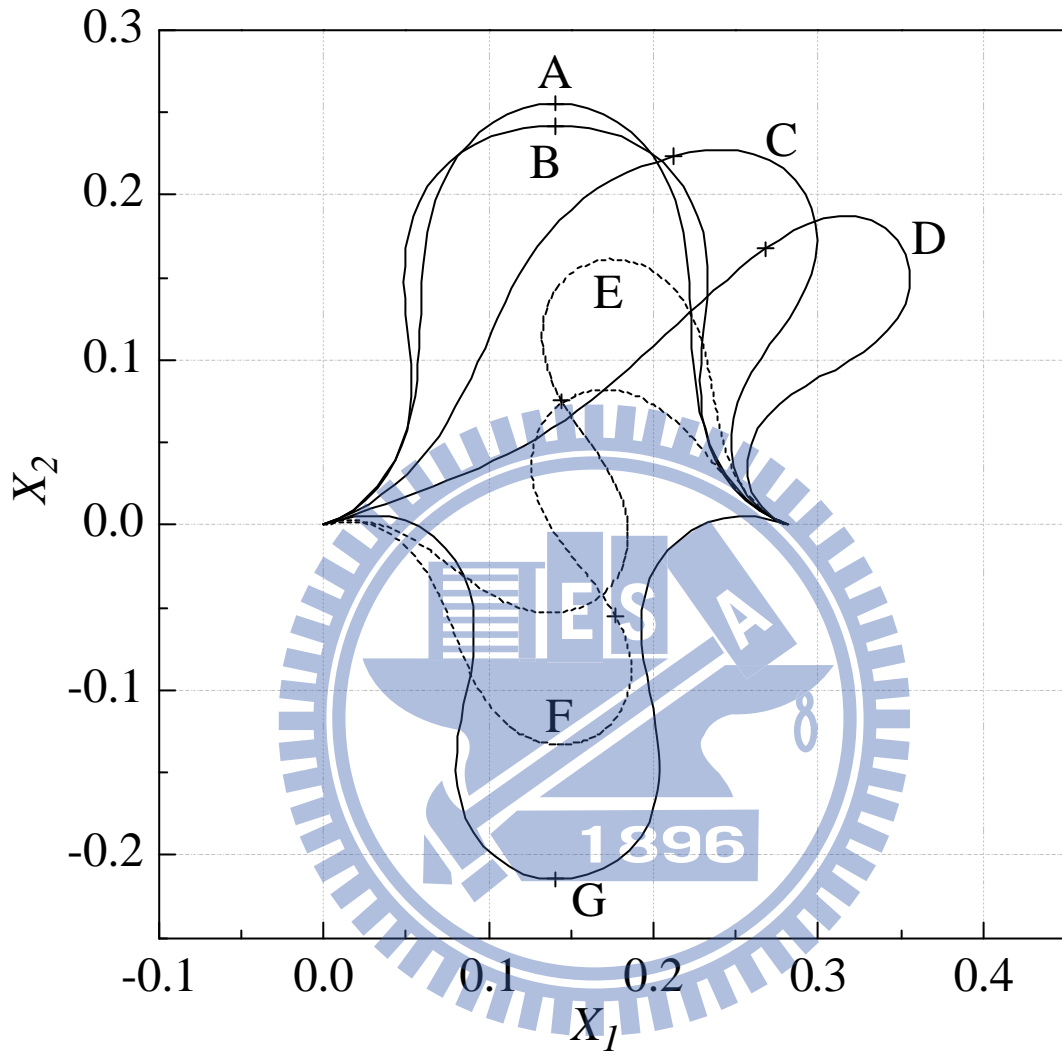


圖 6-23 曲梁的變形圖($\theta = 20^\circ$, $\frac{\ell}{L_T} = 0.44$)

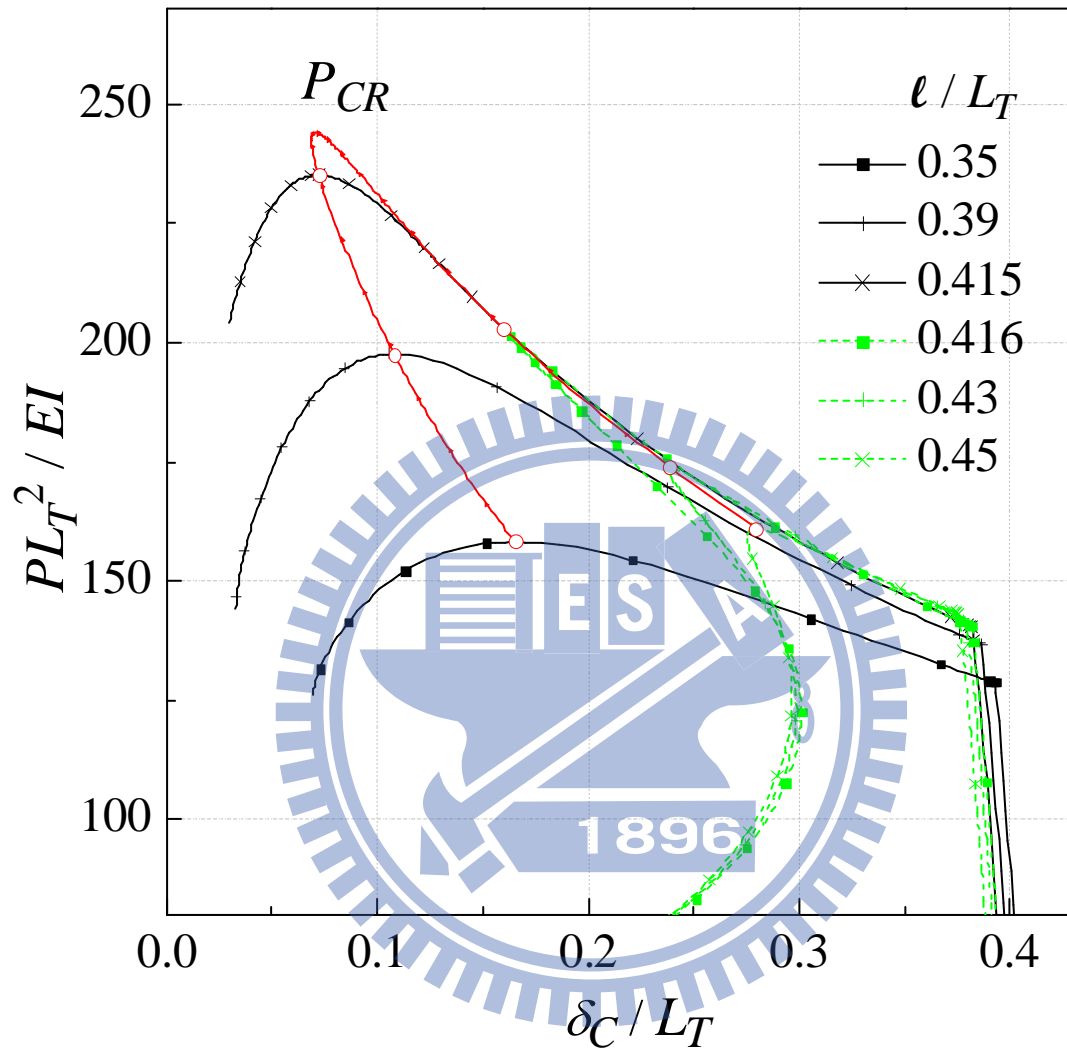


圖 6-24 曲梁中點 C 的負荷-側向高度曲線 ($\theta = 20^\circ$, $\frac{l}{L_T} = 0.35 \sim 0.45$)

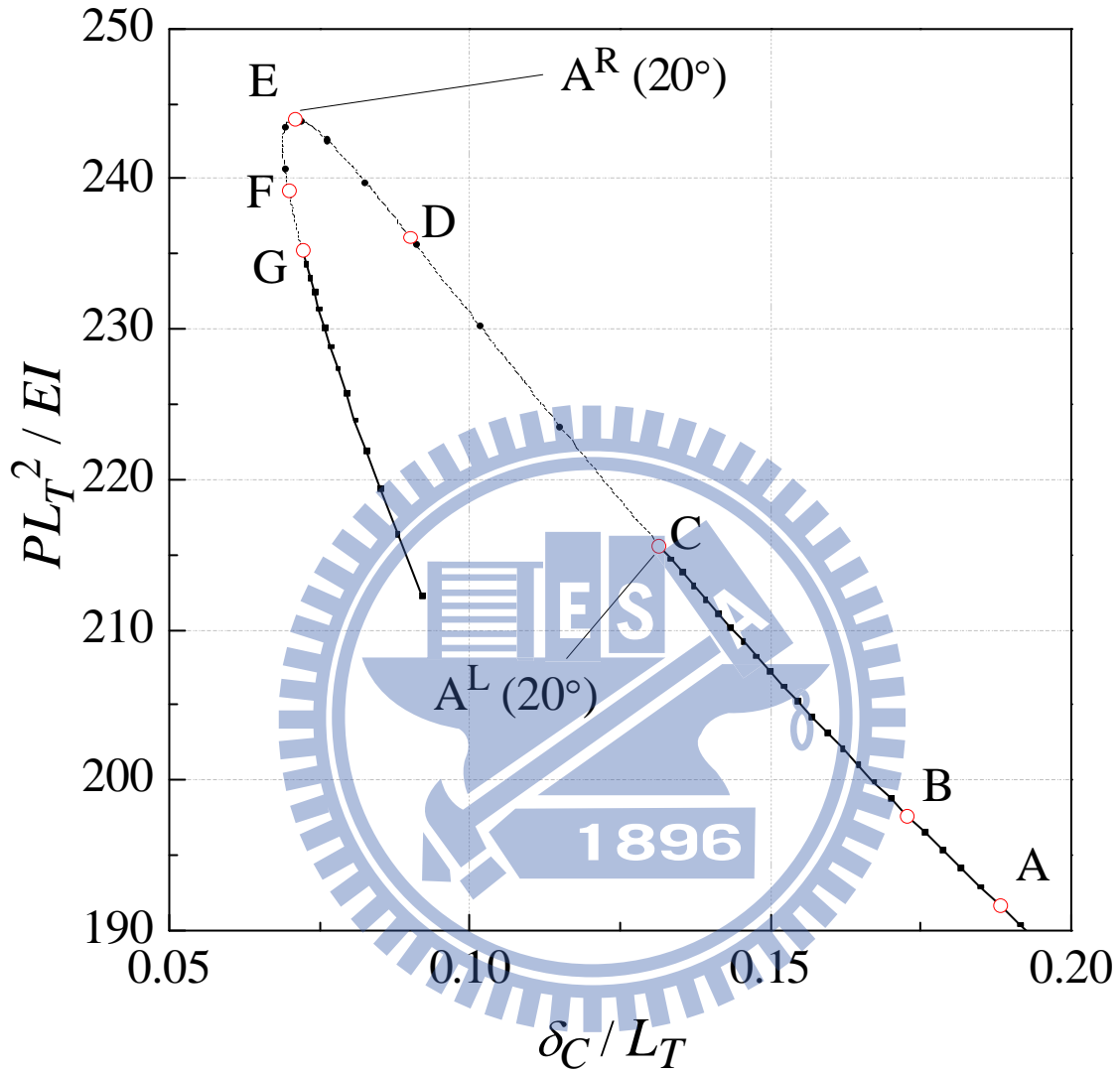


圖 6-25 次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \delta_C / L_T$ 平面上的摺線

$$\left(\theta = 20^\circ, \frac{\ell}{L_T} = 0.35 \sim 0.45 \right)$$

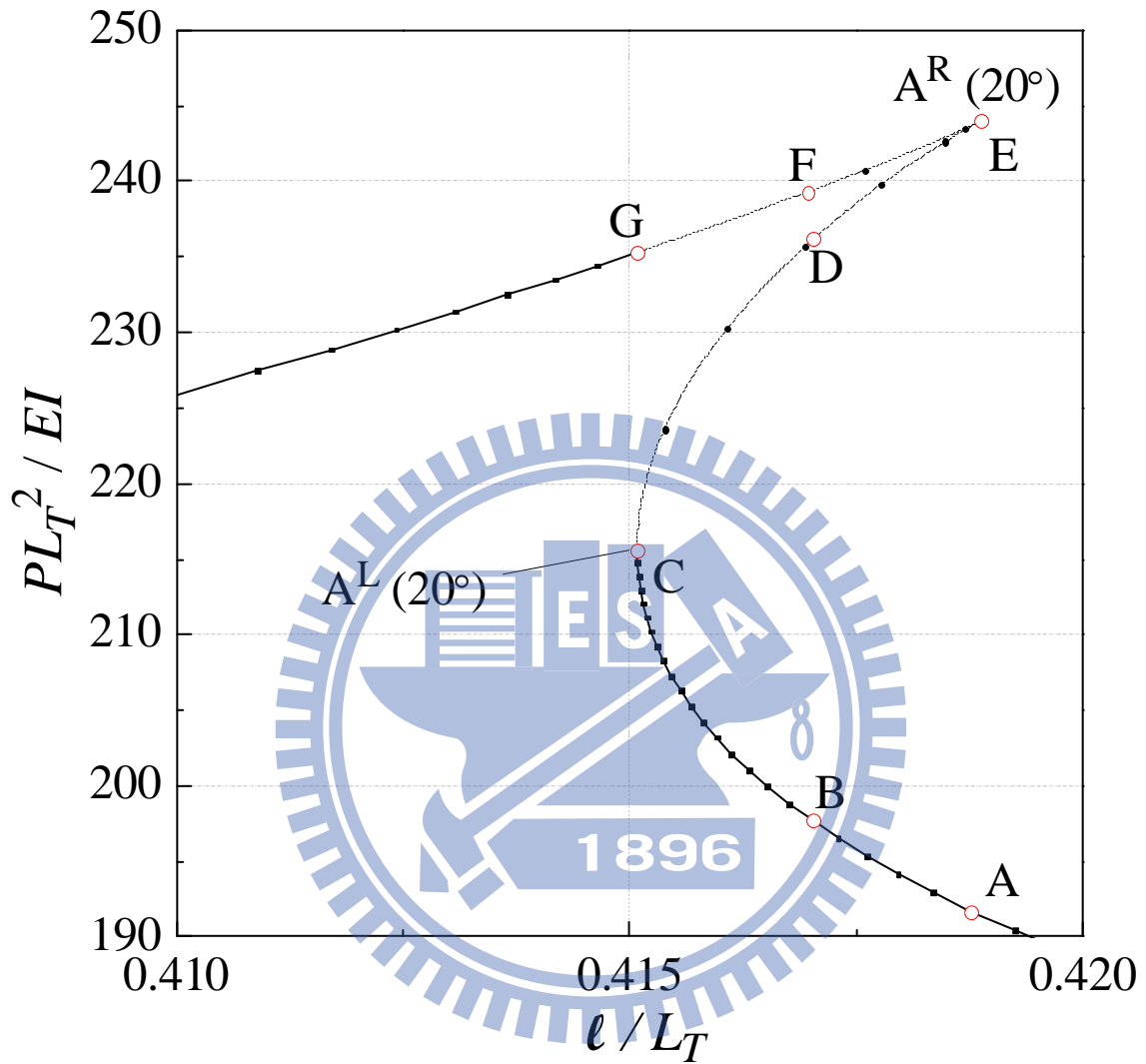


圖 6-26 次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \ell/L_T$ 平面上的摺線

$$\left(\theta = 20^\circ, \frac{\ell}{L_T} = 0.41 \sim 0.42 \right)$$

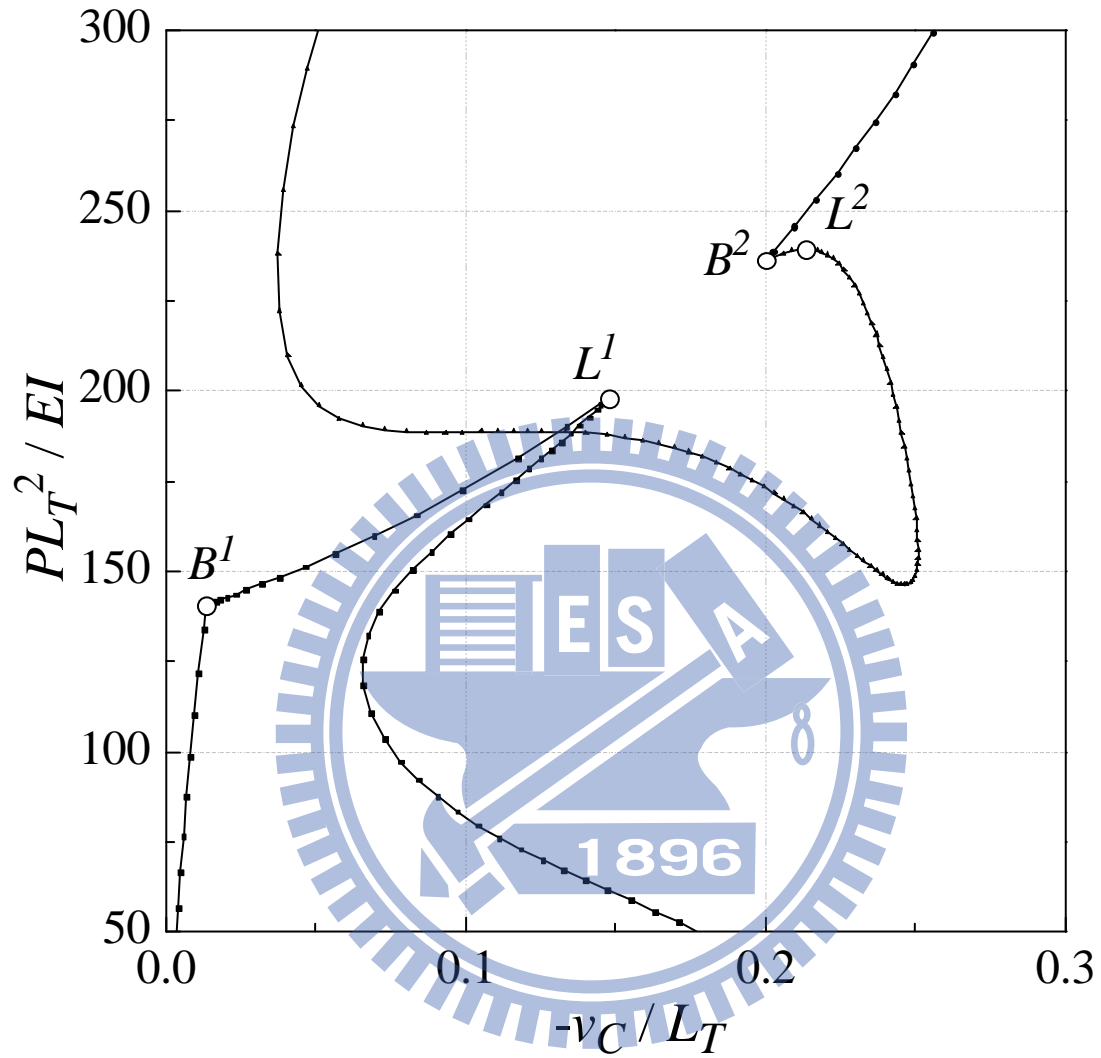


圖 6-27 曲梁中點 C 的負荷-側向位移曲線 ($\theta = 20^\circ$, $\frac{\ell}{L_T} = 0.417$)

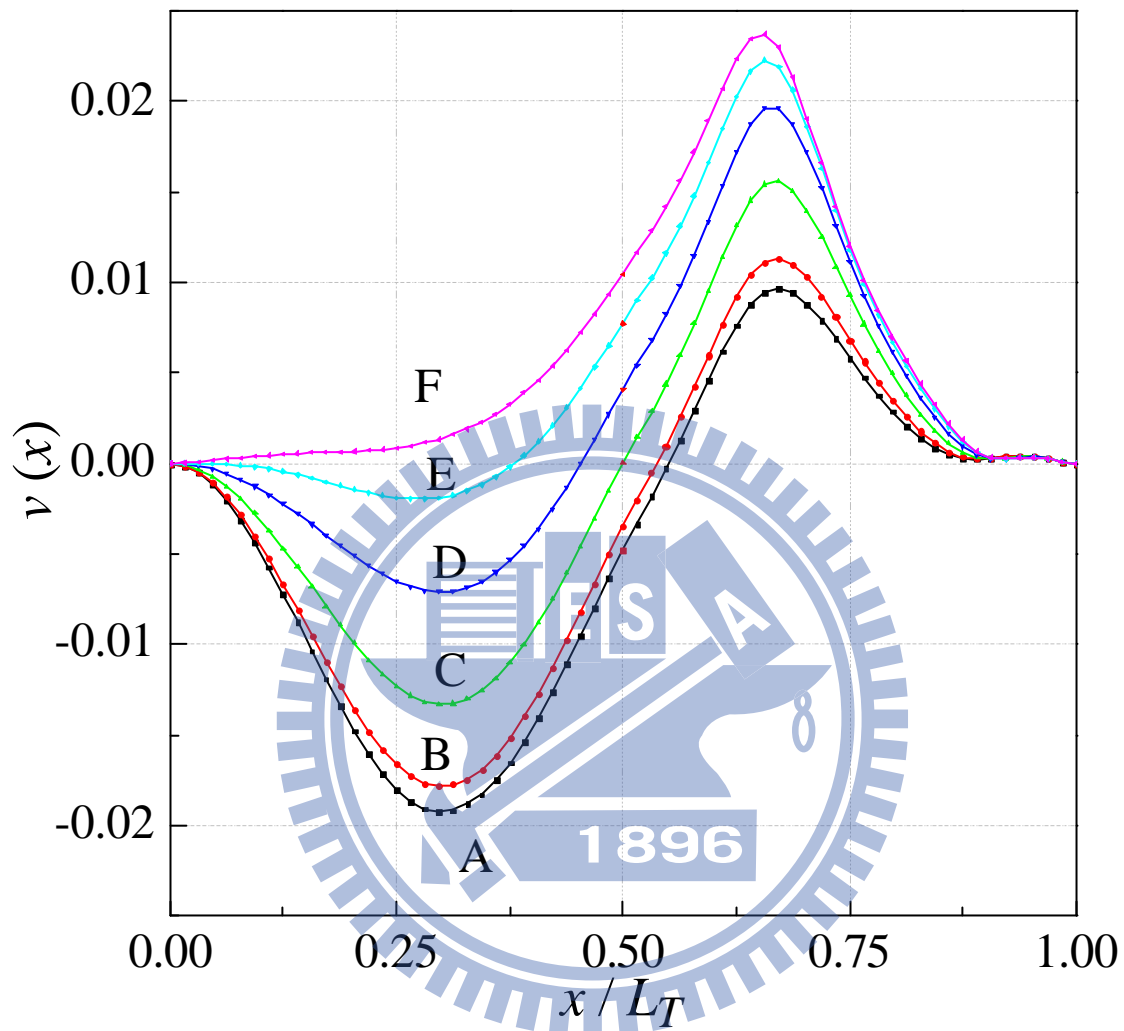


圖 6-28 對應圖 6-26 中 A~F 各點的最小自然振動頻率之振態

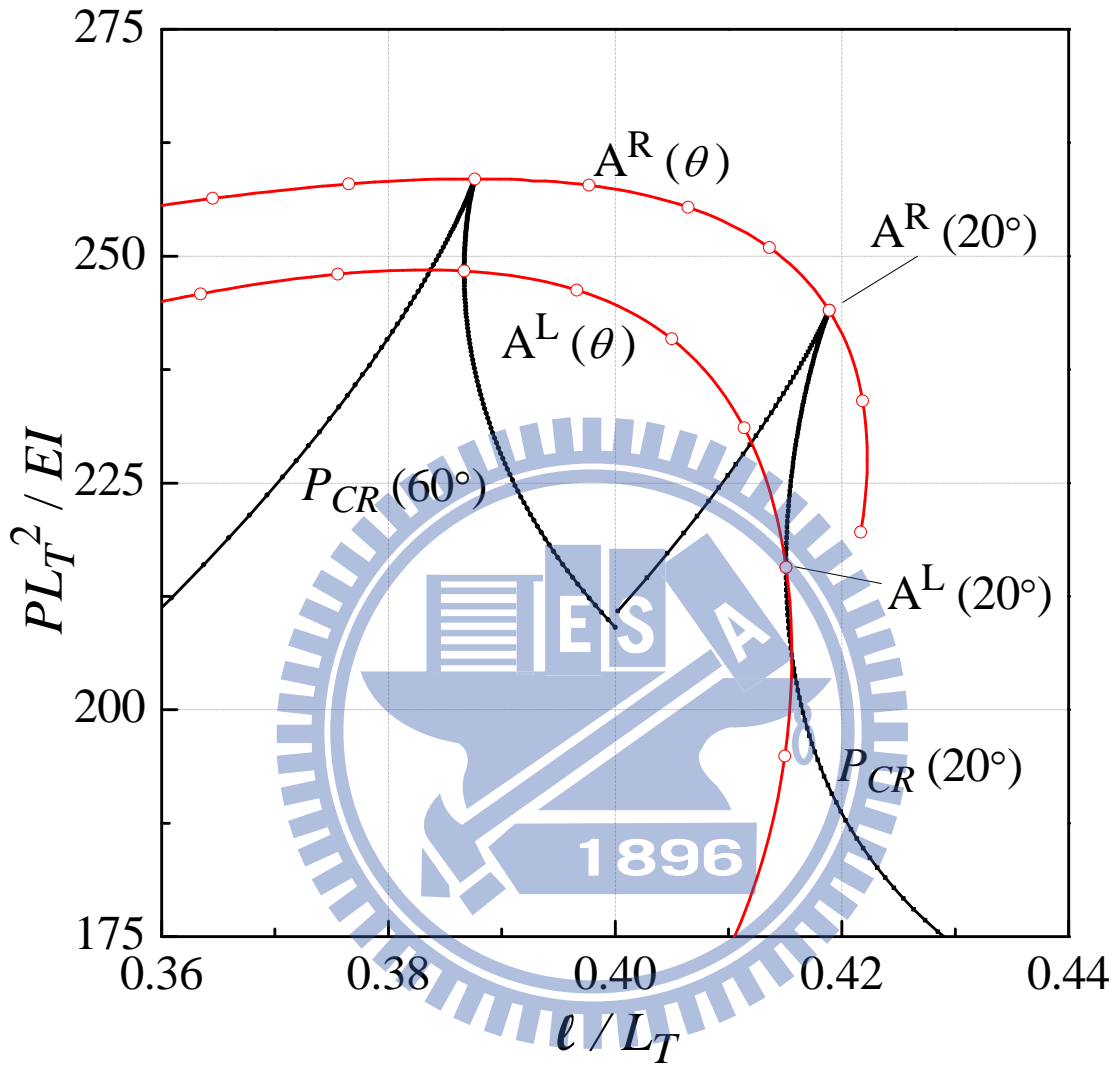


圖 6-29 次要平衡路徑上第一個臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - l/L_T$ 平面上的摺線

($\theta = 20^\circ$ 、 $\theta = 60^\circ$)

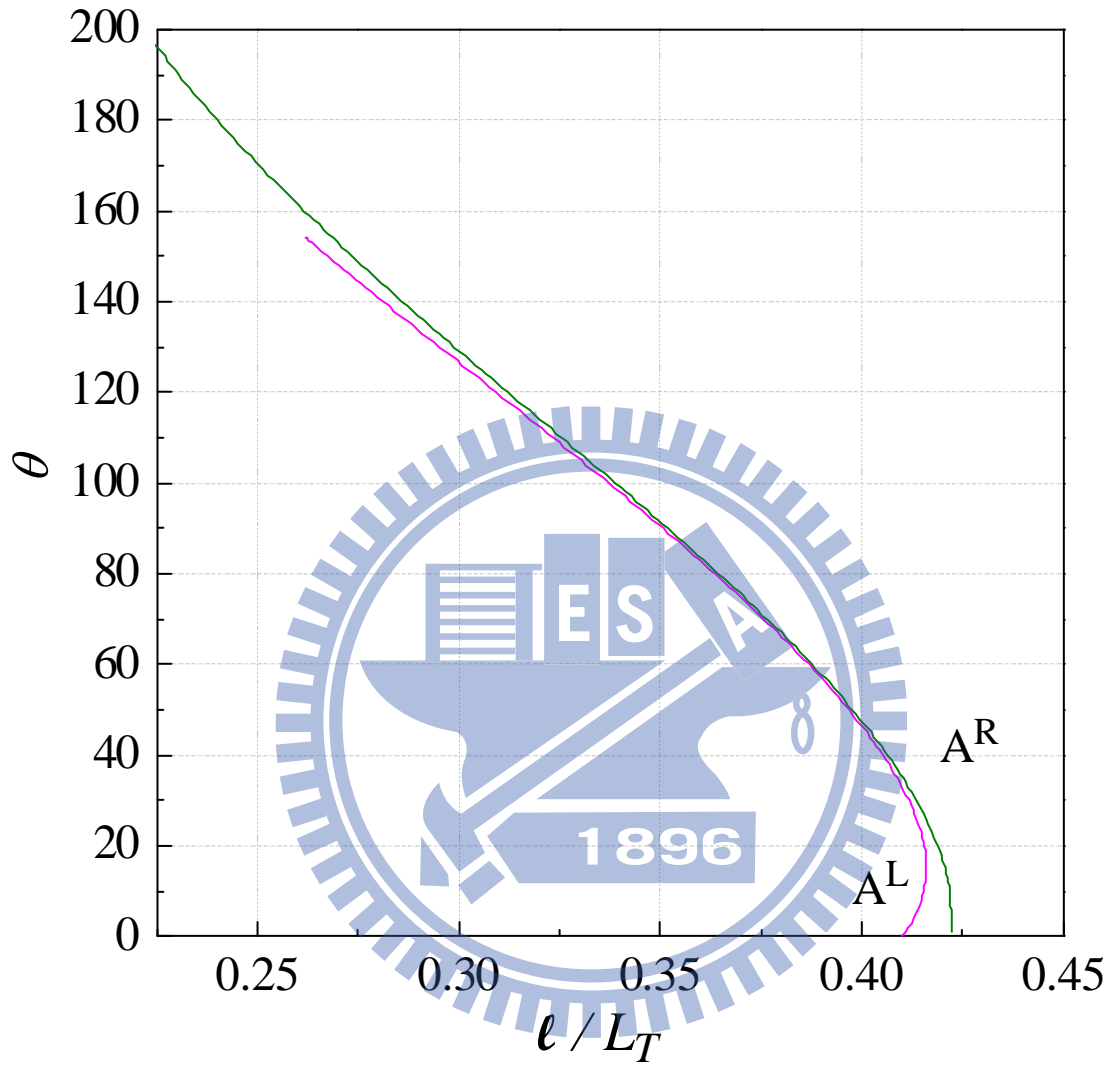


圖 6-30 轉折點 A^L 、 A^R 在 $\theta - \frac{\ell}{L_T}$ 平面上的摺線

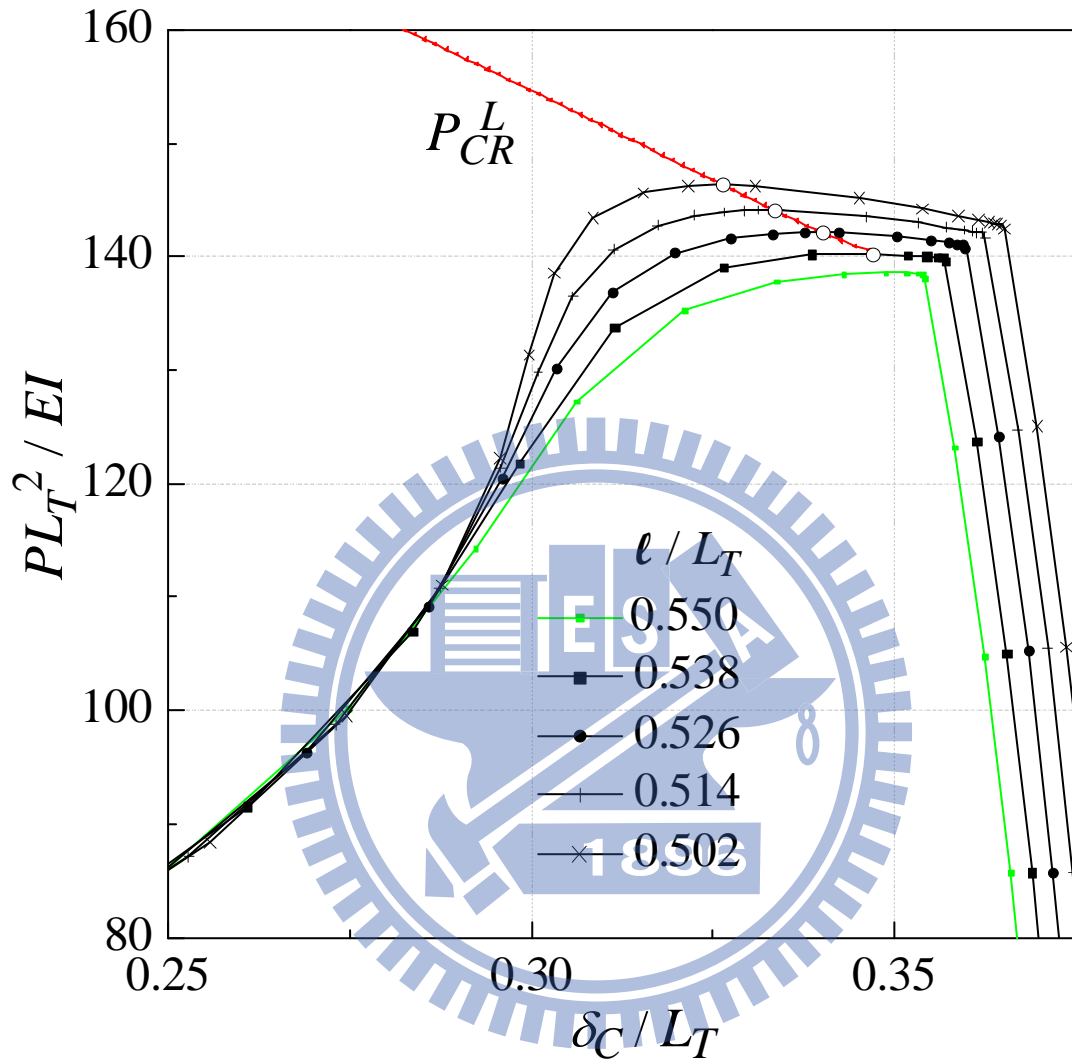


圖 6-31 曲梁中點 C 的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \delta_C/L_T$ 曲線圖 ($\theta = 20^\circ$, $\frac{l}{L_T} = 0.5 \sim 0.55$)

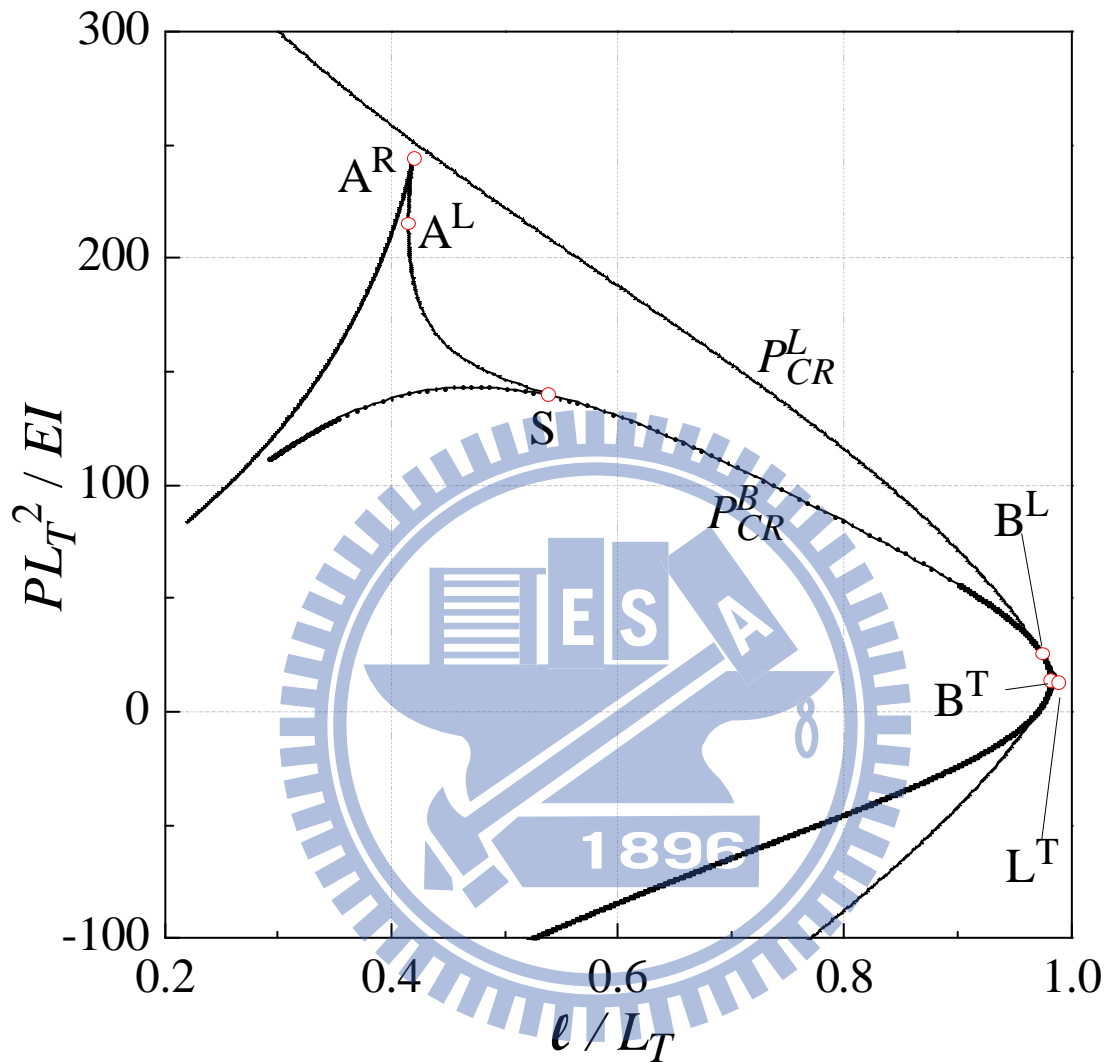


圖 6-32 各種臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{l}{L_T}$ 平面上的摺線圖 ($\theta = 20^\circ$)

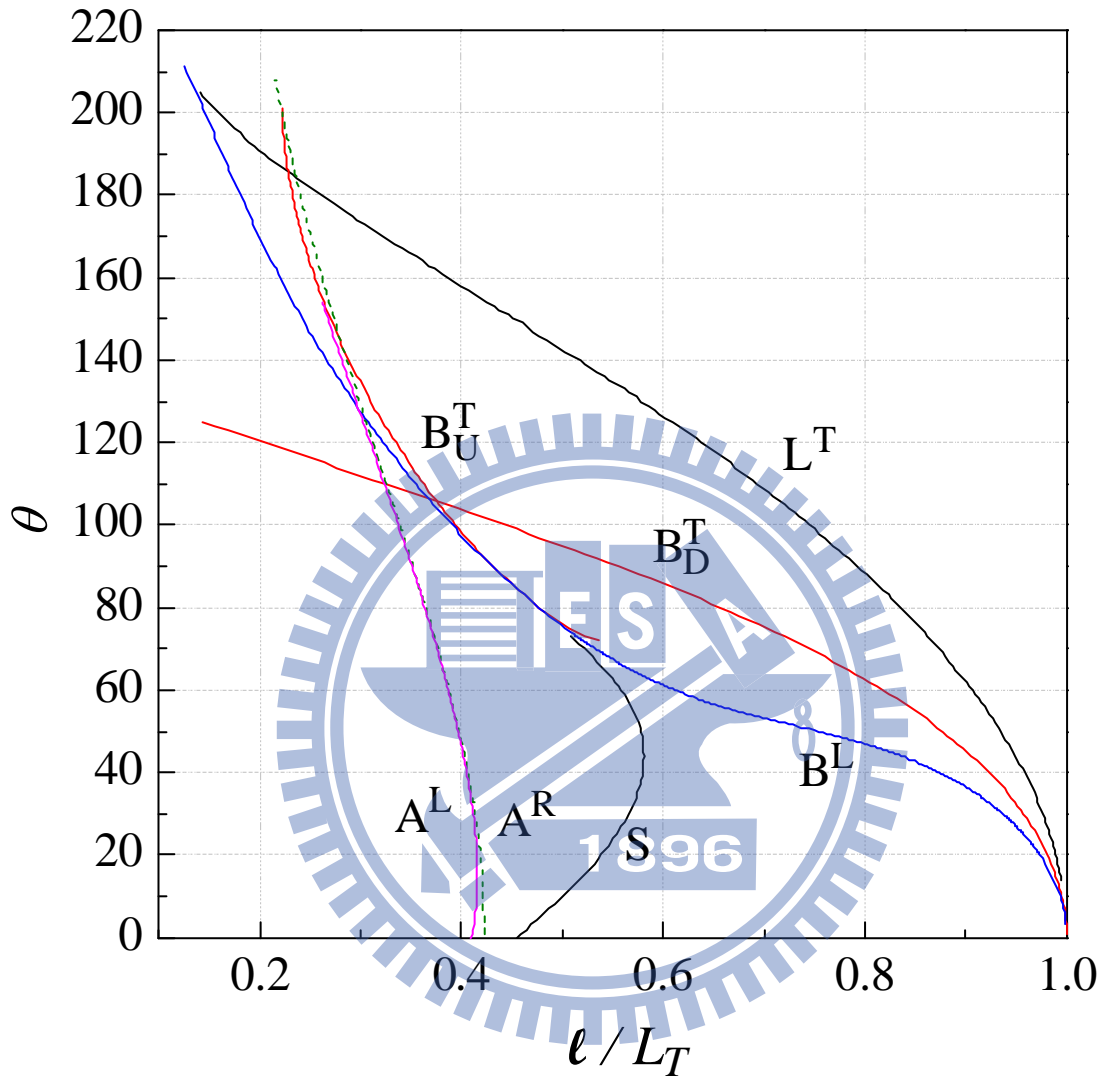


圖 6-33 各種臨界點在 $\theta - \frac{\ell}{L_T}$ 平面的摺線

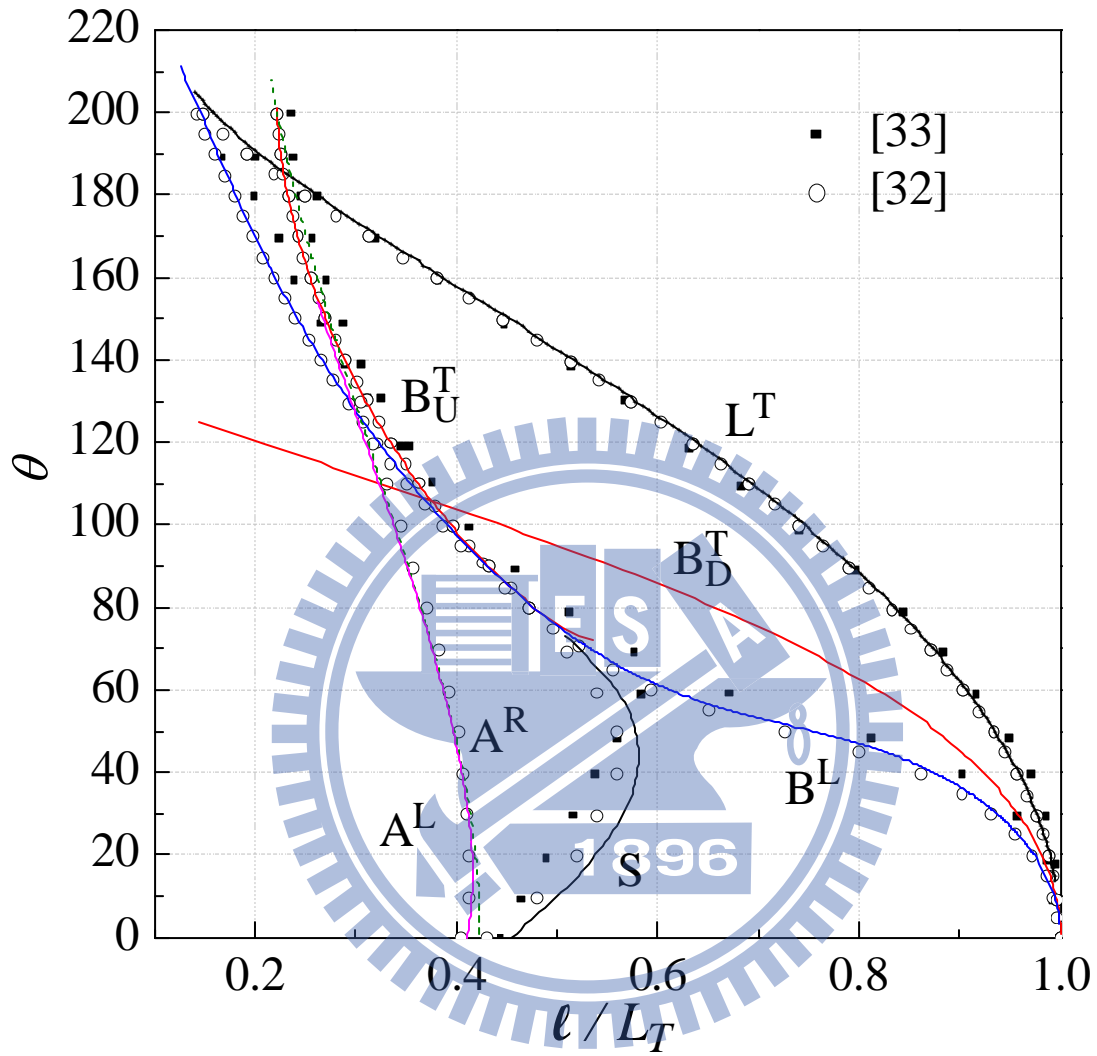


圖 6-34 各種臨界點在 $\theta - \frac{l}{L_T}$ 平面的摺線與文獻結果比較