國 立 交 通 大 學

應用數學系

碩 士 論 文

可減魔術三角形的研究

A Study of Subtractive Magic Triangle

研 究 生：陳俊名

指導老師：傅恆霖　教授

中 華 民 國 九 十 九 年 六 月

可減魔術三角形的研究

研究生：陳俊名　　　指導教授：傅恆霖教授

國立交通大學

應用數學系

摘要

可減魔術三角形概念源自Sunday 在1983年的一篇短文，經王湘君中譯成《數學傳播》中的一篇文章，許綺云在2009年建構了可減魔術三角形達到所求的上下界，因而確定這是魔術差的最佳上下界，但是，上下界內的所有魔術差還沒解決，此篇論文進而討論上下界中的所有魔術差，得到所有範圍內的魔術差都能建構出可減魔術三角形。

A Study of Subtractive Magic Triangle

Student :Chun-Ming Chen

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University
Hsinchu, Taiwan 30050

Advisor:Hung-Lin Fu

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University
Hsinchu, Taiwan 30050

Abstract

The idea of constructing substractive magic triangles was originated from an article of Sunday in 1983. Later, Xiangjun Wang translated this article into Chinese and published in Mathmedia. Recently, both the tight upper and lower bounds on differences are obtained by Qiyun Xu in a high school mathematical competition honors professor S. F. Yau. But, the spectrum of possible differences remains unsettled. In this thesis, we determine this spectrum.

誌　　謝

此篇論文的完成，首先感謝我的指導教授傅恆霖老師，在我撰寫論文這段時間的細心指導與諄諄教誨。尤其傅老師對學生的無比寬容，更是令我感動，除了課業上的精進，老師更是我們行為的準則，在此我由衷感謝老師。

其次我要感謝高中同學蔡佳宏，提供我程式上的協助，以及大學同學黃炫仁，教我使用編輯軟體。也要感謝以下的學長姊及學弟妹：黃明輝、陳宏賓、詹棨丰、呂惠娟、羅元勳、張惠蘭、張雁婷、連敏筠、施智懷、吳政軒、林逸軒為我提供各式各樣的協助。

最後要感謝是我的家人，在我讀書的這段時間全力支持我讓我無後顧之憂地朝著求學目標前進，謝謝我摯愛的家人。

目　　錄

圖　目　錄

1 緒論

Sunday 在1983 年5 月的 Mathematics Teacher 發表了一篇文章, 名為 Subtractive magic triangles [1], 文中提出「可減魔術三角形」的概念。王湘君將此篇文章翻譯為〈可減的魔術三角形〉[3] 登於《數學傳播》第9 卷第2 期上。傳統魔術三角形與其推廣, 皆以「和」為基礎, 在這方面的研究很多, 更多的資料請詳見 Heinz 的網站 [2]; 但重點在「差」的可減魔術三角形屬於比較少人研究的區域。許綺云在2009年建構了可減魔術三角形達到所求的上下界, 因而確定這是魔術差的最佳上下界 [4], 此篇論文進而討論上下界中的所有魔術差, 我們證明所有範圍內的魔術差都能建構出可減魔術三角形。

1.1 簡介

可減魔術三角形是由一群從1開始的連續自然數, 排列成中空正三角形的樣子, 設三角形每邊有 k 個數, 從每邊的 k 個數中, 可得到兩個部分和。令 ℓ 表較大的和, s 表較小的和, 若 k 為奇數, 則 ℓ 是 $\frac{k+1}{2}$ 個數的和, s 是 $\frac{k-1}{2}$ 個數的和; 若 k 為偶數, 則 ℓ 是 $\frac{k}{2}$ 個數的和, s是 $\frac{k}{2}$ 個數的和。令 d 表 ℓ 與 s 的差 (稱為魔術差), 若三角形每邊的 d 相等, 稱為 k 階的可減魔術三角形。由上述的概念, 我們可以把可減魔術三角形問題的想法, 描述成圖標示的問題; 以下是擴充後的形式。

定義$G_{m,n}$為一圖 (如下圖所示), 它有 m 個線段分別為 $E_1, E_2, \cdots, E_m$; 每個線段 E_j 上有 n 個點, $v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \cdots, v_n^{(j)}$, 其中 $v_1^{(j)} = v_n^{(j-1)}$, 而且 $v_i^{(j)} \sim_{G_{m,n}} v_{i+1}^{(j)}$; 因此, $G_{m,n}$ 具有 $m(n-1)$ 個點及 $m(n-1)$ 個邊。也就是說 $G_{m,n}$ 為一圈圖 (Cycle), 它分成 m 個相接的路徑。

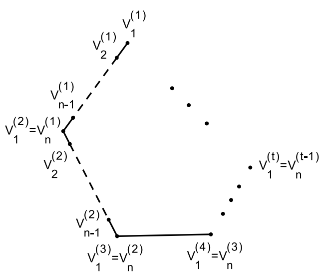

圖 1: $G_{m,n}$

一個 $G_{m,n}$ 的圖標示 (Labeling) 稱為是 $G_{m,n}$ 的可減魔術標示, 如果我們可以找到一個1-1映成的對應 $\varphi : V(G_{m,n}) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, m(n-1)\}$, 它滿足在每個線段 E_j 上, 當 $\varphi(v_{i_1}^{(j)}) < \varphi(v_{i_2}^{(j)}) < \cdots < \varphi(v_{i_n}^{(j)})$ 時

$$\sum_{k>\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \varphi(v_{i_k}^{(j)}) - \sum_{k\le\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \varphi(v_{i_k}^{(j)}) = d,$$

d 為定數。為了方便表示, 我們用 $G_{m,n}(d)$ 來表示定差為 d 的 $G_{m,n}$可減魔術標示; 同時在 d 存在的情況下, $G_{m,n}$ 稱為是可減魔術 m 邊形。

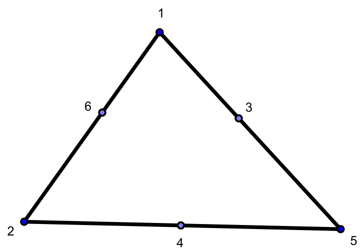

圖 2: $G_{3,3}$

1.2 預備知識

為簡化許多不同的情況, 凡是滿足以下任一條件$G_{m,n}(d)$皆視為相同:

1. 可經由旋轉、鏡射得到。
2. n邊形每邊的元素 (頂點除外) 分別相同, 只是排序不同。

為了方便呈現, 利用$m \times n$矩陣表示$G_{m,n}(d)$。矩陣的每一列代表$G_{m,n}(d)$的每一線段, 以$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_m$ 分別表示矩陣的第一、第二、第三、$\cdots$、第m列。兩端頂點上的數則置於一列的兩側。除了頂點上的數之外, 將每一列的數由左而右, 從小到大排列, 如圖所示。

$$[\varphi(v_i^{(j)})]_{m\times n} \begin{pmatrix} \varphi(v_1^{(1)}) & \varphi(v_2^{(1)}) & \cdots & \varphi(v_n^{(1)}) \\ \varphi(v_1^{(2)}) & \varphi(v_2^{(2)}) & \cdots & \varphi(v_n^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(v_1^{(m)}) & \varphi(v_2^{(m)}) & \cdots & \varphi(v_n^{(m)}) \end{pmatrix}_{m\times n}$$

所以圖2的標示可以用以下的矩陣表示:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

本論文主要討論$m=3$的情形。

引理1.1 [4] $n \geq 3$ 時才存在 $G_{3,n}(d)$。

定理1.2 [4] 在 $G_{3,n}(d)$ 中, d 的最佳上下界如下:

1. 當n是偶數, $n=4, d \in [6,9]$, $n \geq 6, d \in [\frac{n(n+2)}{4}, \frac{3}{4}n^2-2]$ 。
2. 當n是奇數, $d \in [\frac{(n-1)(n+11)}{4}, \frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{13}{4}]$ 。

引理1.3 [4] 當n是偶數, $n \geq 6, d=\frac{n(n+2)}{4}$ 時, $G_{3,n}(d)$的標示矩陣如下:

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & \frac{3}{2}n-1 \\ \frac{3}{2}n-1 & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & 2n+4 & 2n+5 & 2n+6 & \cdots & 2n-2 \\ 2n-2 & n-1 & n+1 & n+2 & \cdots & \frac{3}{2}n & \frac{3}{2}n+1 & \cdots & 2n-1 & n \end{pmatrix}$$

引理1.4 [4] 當n是偶數, $n \geq 6, d=\frac{3}{4}n^2-2$ 時, $G_{3,n}(d)$的標示矩陣如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-4 & 3n-5 \\ 3n-5 & 2 & 5 & \cdots & 3n-6 & 3n-3 \\ 3n-3 & 3 & 6 & \cdots & 3n-7 & 1 \end{pmatrix}$$

引理1.5 [4] 當n是偶數, $n \geq 6, d \in [\frac{3}{4}n^2-\frac{3}{2}n+1, \frac{3}{4}n^2-3]$時, $G_{3,n}(d)$皆可做出標示矩陣 。

引理1.6 [4] 當n是奇數, $n \geq 3, d=\frac{(n-1)(n+11)}{4}$時 , $G_{3,n}(d)$矩陣為

$$\begin{pmatrix} 2n-3 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n & 2n+1 & \cdots & 3n-3 \\ 3n-3 & n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 \end{pmatrix}$$

引理1.7 [4] 當n是奇數, $n \geq 3, d = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}$時，$G_{3,n}(d)$矩陣為

$$\begin{pmatrix} 3n-5 & 1 & 4 & \cdots & 3n-4 \\ 3n-4 & 3 & 6 & \cdots & 3n-3 \\ 3n-3 & 2 & 5 & \cdots & 3n-5 \end{pmatrix}$$

引理1.8 [4] 當n是奇數, $n \geq 3, d \in [\frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4}, \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}]$, $G_{3,n}(d)$矩陣皆可做出標示矩陣 。

為了方便主要內容的說明, 我們舉兩個例子。

例子1.9 所有的$G_{3,3}(d)$ (9種)

(1) $d = 7$, 有7種。

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) $d = 8$, 有2種。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

例子1.10 $G_{3,4}(d)$ (75種)

$G_{3,4}(6)$ 有7種, 其中一個矩陣為

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 9 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$G_{3,4}(7)$ 有16種, 其中一個矩陣為

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 9 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$G_{3,4}(8)$ 有24種, 其中一個矩陣為

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 5 & 8 \\ 8 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$G_{3,4}(9)$ 有28種, 其中一個矩陣為

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 7 \\ 7 & 1 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2 主要內容

我們先看一些點數較少的例子。

例子2.1 $G_{3,5}(d)$，$d \in [16, 23]$。

$G_{3,5}(16)$ 可用引理1.7建構。

$G_{3,5}(17)$ (利用$G_{3,4}(6)$.):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 9 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 10 & 5 \\ 5 & 7 & 9 & 12 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

$d' = 6 + (3 \times 4 - 1) = 17$

$G_{3,5}(18)$ (利用$G_{3,4}(7)$.):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 9 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 12 & 3 \\ 3 & 4 & 9 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$d' = 7 + (3 \times 4 - 1) = 18$

$G_{3,5}(19)$ (利用$G_{3,4}(8)$.):

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 5 & 8 \\ 8 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 10 & 7 \\ 7 & 2 & 5 & 11 & 8 \\ 8 & 4 & 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$d' = 8 + (3 \times 4 - 1) = 19$

$G_{3,5}(20)$ (利用$G_{3,4}(9)$.):

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 7 \\ 7 & 1 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & 12 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 10 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$d' = 9 + (3 \times 4 - 1) = 20$

由以上的例子, 我們可以發現, 當n是偶數, 可根據一$G_{3,n}(d)$經過轉換得到$G_{3,n+1}(d)$。若將$G_{3,n}(d)$任兩列各一減數作交換, 且交換後兩個減數都不變成被減數, 則一列的d增加, 另一列的d減少, 且兩列增減量相等; 同理, 將兩列各一被減數作交換也是一樣的情況。但若將$G_{3,n}(d)$一列的一個減數和另一列的被減數交換, 且原本是減數的變成被減數, 原本是被減數的變成減數, 則兩列的 d 一起等量增加或一起等量減少。要將$G_{3,n}(d)$轉換得到$G_{3,n+1}(d)$, 就等於要對$G_{3,n}(d)$作一些調整, 再將$(3n-2)$, $(3n-1)$, $3n$放入三邊, 使得三列的d相等。先找到在不同的兩列且同為 (被) 減數的兩數, 兩數要相差1, 接著將這兩數作交換, 注意交換後這兩數必須仍為 (被) 減數, 再將$(3n-2)$放入d變大的列, $3n$放入d變小的列, $(3n-1)$放入沒有調整的列, 就形成一$G_{3,n+1}(d)$。而且新的魔術差$d' = d + (3n-1)$[4]。但是目前不能說明範圍內的d, $G_{3,n+1}$都能由$G_{3,n}(d)$轉換。

$G_{3,5}(21)$, $G_{3,5}(22)$, $G_{3,5}(23)$可用引理1.8建構。

例子2.2 $G_{3,6}(d)$, $d \in [12, 25]$。

$G_{3,6}(12)$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 8 & 12 & 13 & 14 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 7 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$G_{3,6}(13)$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 8 & 11 & 13 & 14 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 6 & 9 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$G_{3,6}(14)$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 3 & 9 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

$G_{3,6}(15)$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 8 & 12 & 13 & 7 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 14 & 6 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$G_{3,6}(16)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 12 \\ 12 & 8 & 7 & 14 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 13 & 9 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$G_{3,6}(17)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 13 & 12 & 8 & 14 & 15 & 5 \\ 5 & 10 & 7 & 9 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_{3,6}(18)$, $G_{3,6}(19)$, $G_{3,6}(20)$, $G_{3,6}(21)$, 可由$G_{3,4}(d)$, $d \in [6,9]$建構。

$G_{3,6}(22)$, $G_{3,6}(23)$, $G_{3,6}(24)$, $G_{3,6}(25)$, 可由引理1.5建構。

引理2.3 當n是偶數, $n \geq 8$, 假設所有 $d \in [\frac{(n-2)n}{4}, \frac{3}{4}(n-2)^2-2]$, $G_{3,n-2}(d)$矩陣存在, 則對所有的 $d' \in [\frac{n(n+2)}{4}+(2n-6), (\frac{3}{4}n^2-2)-3]$, $G_{3,n}(d')$矩陣存在。

證明. 令

$$G_{3,n-2}(d) : \begin{pmatrix} v_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-4} & v_2 \\ v_2 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-4} & v_3 \\ v_3 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-4} & v_1 \end{pmatrix}_{3\times(n-2)}$$

l_i是$G_{3,n-2}(d)$矩陣第i列$\frac{n-2}{2}$個較大的部分和, $i=1,2,3$;
s_i是$G_{3,n-2}(d)$矩陣第i列$\frac{n-2}{2}$個較小的部分和, $i=1,2,3$。
則$l_i-s_i=d$, $i=1,2,3$。再令

$$G_{3,n}(d'):\begin{pmatrix} v_1+3 & a_1+3 & a_2+3 & \cdots & a_{n-4}+3 & 1 & 3n-5 & v_2+3 \\ v_2+3 & b_1+3 & b_2+3 & \cdots & b_{n-4}+3 & 2 & 3n-4 & v_3+3 \\ v_3+3 & c_1+3 & c_2+3 & \cdots & c_{n-4}+3 & 3 & 3n-3 & v_1+3 \end{pmatrix}_{3\times n}$$

且L_i是$G_{3,n}(d')$矩陣第i列$\frac{n}{2}$個較大的部分和, $i=1,2,3$; 於是S_i是$G_{3,n}(d')$矩陣第i列$\frac{n}{2}$個較小的部分和, $i=1,2,3$。
$L_i=l_i+(3n-6+i)+3\times\frac{n-2}{2}$, $i=1,2,3$。

$S_i=s_i+i+3\times\frac{n-2}{2}$, $i=1,2,3$。
$d'=L_i-S_i=(l_i+3n-6+i+3\times\frac{n-2}{2})-(s_i+i+3\times\frac{n-2}{2})=(l_i-s_i)+(3n-6)=d+(3n-6), i=1,2,3$。由於
$\frac{(n-2)(n-2+2)}{4}+(3n-6)=\frac{n(n+2)}{4}+(2n-6)$及$\frac{3}{4}(n-2)^2-2+(3n-6)=(\frac{3}{4}n^2-2)-3$。
所以當$d'\in[\frac{n(n+2)}{4}+(2n-6),(\frac{3}{4}n^2-2)-3]$, $G_{3,n}(d')$矩陣存在。

引理2.4 當n是奇數, $n\geq 7$, 假設對所有 $d\in[\frac{(n-3)(n+9)}{4},\frac{3}{4}(n-2)^2+\frac{3}{2}(n-2)-\frac{13}{4}]$, $G_{3,n-2}(d)$存在, 則當$d'\in[\frac{(n-1)(n+11)}{4}+(2n-7),(\frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{13}{4})-3]$, $G_{3,n}(d')$存在。

證明. 令

$$G_{3,n-2}(d)=\begin{pmatrix} v_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-4} & v_2 \\ v_2 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-4} & v_3 \\ v_3 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-4} & v_1 \end{pmatrix}_{3\times(n-2)}$$

l_i是$G_{3,n-2}(d)$矩陣第i列$\frac{n-1}{2}$個較大的部分和, $i=1,2,3$;
s_i是$G_{3,n-2}(d)$矩陣第i列$\frac{n-3}{2}$個較小的部分和, $i=1,2,3$。
則 $l_i-s_i=d$, $i=1,2,3$。再令

$$G_{3,n}(d') = \begin{pmatrix} v_1+3 & a_1+3 & a_2+3 & \cdots & a_{n-4}+3 & 1 & 3n-5 & v_2+3 \\ v_2+3 & b_1+3 & b_2+3 & \cdots & b_{n-4}+3 & 2 & 3n-4 & v_3+3 \\ v_3+3 & c_1+3 & c_2+3 & \cdots & c_{n-4}+3 & 3 & 3n-3 & v_1+3 \end{pmatrix}_{3\times n}$$

且L_i是$G_{3,n}(d')$矩陣第i列$\frac{n+1}{2}$個較大的部分和, $i=1,2,3$; 於是,
$L_i = l_i + (3n-6+i) + 3\times\frac{n+1}{2}$, $i=1,2,3$。
S_i是$G_{3,n}(d')$矩陣第i列$\frac{n-1}{2}$個較小的部分和, $i=1,2,3$。
$S_i = s_i + i + 3\times\frac{n-1}{2}$, $i=1,2,3$。
$d' = L_i - S_i = (l_i+3n-6+i+3\times\frac{n+1}{2}) - (s_i+i+3\times\frac{n-1}{2}) = (l_i-s_i)+(3n-3) = d+(3n-3), i=1,2,3$ 。

$\frac{(n-3)(n+9)}{4}+(3n-3) = \frac{(n-1)(n+11)}{4}+(2n-7)$及 $\frac{3}{4}(n-2)^2+\frac{3}{2}(n-2)-\frac{13}{4}+(3n-3) = (\frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{13}{4})-3$。
所以當$d'\in[\frac{(n-1)(n+11)}{4}+(2n-7), (\frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{13}{4})-3]$, $G_{3,n}(d')$矩陣存在。

為了定理證明方便, 我們定義幾種魔術交換矩陣, 以及其交換的方式。

定義2.5 令$G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$如下:

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 & \frac{3}{2}n-1 \\ \frac{3}{2}n-1 & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 2n+\frac{n}{2}-3 & 2n+\frac{n}{2}-2 & 2n+\frac{n}{2}-1 & \cdots & 3n-5 & 3n-4 & 3n-3 & 2n-2 \\ 2n-2 & n-1 & n+1 & n+2 & \cdots & \frac{3}{2}n-2 & \frac{3}{2}n & \frac{3}{2}n+1 & \cdots & 2n-4 & 2n-3 & 2n-1 & n \end{pmatrix}_{3\times n}$$

或此矩陣以符號表示相對位置

$$G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4}) = \begin{pmatrix} v_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & v_2 \\ v_2 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & v_3 \\ v_3 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & v_1 \end{pmatrix}_{3\times n}$$

令 $a_{i,j} = b_j - c_{\frac{n}{2}+i-1} = \frac{n}{2}+j-i, i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2, j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2$

$a_{\frac{n}{2}-1,j} = b_j - c_{n-2} = j, j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2$ 。

則可以得到一個矩陣

$$A[a_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \cdots & n-5 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 4 & 5 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 \\ 3 & 4 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2 & \cdots & \frac{n}{2}-3 & \frac{n}{2}-2 \end{pmatrix}_{(\frac{n}{2}-1)\times(\frac{n}{2}-2)}$$

我們稱 A 為第一種魔術交換矩陣。

令 $b_{1,j} = c_j - v_1$, $j = 1, 2, \cdots, n-2$
$b_{2,j} = b_j - v_2$, $j = 1, 2, \cdots, n-2$

則可以得到另外一個矩陣

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \cdots & (\frac{n}{2}-2) & (\frac{n}{2}) & (\frac{n}{2}+1) & \cdots & (n-3) & (n-1) \\ \frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2}+2 & \frac{n}{2}+3 & (n-2) & (n-1) & (n) & (n+1) & \cdots & (\frac{3}{2}n-3) & (\frac{3}{2}n-2) \end{pmatrix}$$

我們稱 B 為第二種魔術交換矩陣。

定義2.6 假設有 $G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$ 矩陣，第一種魔術交換矩陣A，第二種魔術交換矩陣為 B。為了使證明的敘述方便，我們做以下的定義($v_1, v_2, v_3, a_i, b_i, c_i$ 與定義2.5相同):

(1) 定義 "Do $A(a_{ij})$" 代表將 $G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$ 矩陣的 b_j 元素與 $c_{\frac{n}{2}+i-1}$元素交換位置，則可以得到一個新矩陣

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & n-2 & \frac{3}{2}n-1 \\ \frac{3}{2}n-1 & 2n & 2n+1 & \cdots & b_{\frac{n}{2}+i-1} & \cdots & 2n+\frac{n}{2}-3 & 2n+\frac{n}{2}-2 & \cdots & \cdots & \cdots & 3n-3 & 2n-2 \\ 2n-2 & n-1 & n+1 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{3}{2}n-2 & \frac{3}{2}n & \cdots & c_j & \cdots & 2n-1 & n \end{pmatrix}_{3\times n}$$

由$G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$矩陣可知，$c_{\frac{n}{2}+i-1} < b_j$，$b_j$原是第二列的被減數，而 $c_{\frac{n}{2}+i-1}$與b_j相換可得 $c_{\frac{n}{2}+i-1}$是新的被減數 (因為$c_{\frac{n}{2}+i-1} < b_j$)。同理,$b_j$變成第三列的減數。

所以我們知道:

第一列沒有任何改變, d 還是維持不變。

第二列其中1個被減數由 b_j 變成 $c_{\frac{n}{2}+i-1}$, d 增加了 $b_j - c_{\frac{n}{2}+i-1} = a_{ij}$。

第三列其中1個減數由 $c_{\frac{n}{2}+i-1}$ 變成 b_j, d 增加了 $b_j - c_{\frac{n}{2}+i-1} = a_{ij}$。

其中 $i = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1, j = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 2$ 。

如果只是 "Do $A(a_{ij})$" , 得到的矩陣並不是 $G_{3,n}(d)$ 矩陣。

(2) 定義 "Do $B(b_{1j})$" 代表將 $G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$ 矩陣的 v_1 元素與 c_j元素交換位置, 則可以得到一個新矩陣

$$\begin{pmatrix} c_j & 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & n-2 & \frac{3}{2}n-1 \\ \frac{3}{2}n-1 & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 2n+\frac{n}{2}-3 & 2n+\frac{n}{2}-2 & \cdots & \cdots & \cdots & 3n-3 & 2n-2 \\ 2n-2 & n-1 & n+1 & n+2 & \cdots & \frac{3}{2}n-2 & \frac{3}{2}n & \cdots & v_1 & \cdots & 2n-1 & c_j \end{pmatrix}_{3\times n}$$

由於$v_1 = n < c_j$, 當v_1與c_j交換, c_j成為第一列的減數, 其餘不變。

所以我們知道:

第一列其中1個減數由 v_1 變成 c_j , d 增加了 $c_j - v_1 = b_{1j}, j = 1, 2, \cdots, n-2$ 。

第二列沒有任何改變, d 還是維持不變。

第三列 c_j與 v_1 交換位置, 所有的減數與被減數並無改變, d維持不變。

如果只是"Do $B(b_{1j})$" , 得到的矩陣並不是 $G_{3,n}(d)$ 矩陣。

(3) 定義 "Do $B(b_{2j})$" 代表將 $G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$ 矩陣的 v_2 元素與 b_j元素交換位置, 則可以得到一個新矩陣

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \cdots & n-3 & n-2 & b_j \\ b_j & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \cdots & v_2 & \cdots & 2n+\frac{n}{2}-3 & \frac{n}{2}+\frac{n}{2}-2 & \cdots & 3n-4 & 3n-3 & 2n-2 \\ 2n-2 & n-1 & n+1 & n+2 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{3}{2}n-2 & \frac{3}{2}n & \cdots & 2n-3 & 2n-1 & n \end{pmatrix}_{3\times n}$$

由於$v_2 = \frac{3}{2}n - 1 < b_j$, 當v_2與b_j交換, b_j成為第二列的減數, 其餘不變。

所以我們知道:

第一列其中1個減數由 v_2 變成 b_j , d 增加了 $b_j - v_2 = b_{2j}, j = 1, 2, \cdots, n-2$ 。

第二列 b_j與 v_2 交換位置, 所有的減數與被減數並無改變, d維持不變。

第三列沒有任何改變, d 還是維持不變。

如果只是"Do $B(b_{2j})$" , 得到的矩陣並不是 $G_{3,n}(d)$ 矩陣。

例子2.7 "Do $A(a_{\frac{n}{2}-1,1})$" 與 "Do $B(b_{12})$"
我們可以得到 $G_{3,n}(d)$ 矩陣, $d = \frac{n(n+2)}{4} + 1$

$$\begin{pmatrix} n+1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-3 & n-2 & \frac{3}{2}n-1 \\ \frac{3}{2}n-1 & 2n-1 & 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 2n+\frac{n}{2}-3 & 2n+\frac{n}{2}-2 & 2n+\frac{n}{2}-1 & \cdots & 3n-4 & 3n-3 & 2n-2 \\ 2n-2 & n-1 & n & n+2 & \cdots & \frac{3}{2}n-2 & \frac{3}{2}n & \frac{3}{2}n+1 & \cdots & 2n-3 & 2n & n+1 \end{pmatrix}_{3\times n}$$

利用交換矩陣 A、B 去做交換, 如果元素已交換過, 則此元素不能再做第二次的交換, 因此可得到引理2.8。

引理2.8 (1) $i = k$或 $j = l$, 則 "Do $A(a_{ij})$" 與 "Do $A(a_{kl})$" 不能同時發生。
(2) "Do $A(a_{ij})$" 與 "Do $B(b_{1,(\frac{n}{2}-i+1)})$" 不能同時發生。
(3) "Do $A(a_{ij})$" 與 "Do $B(b_{2,j})$" 不能同時發生。

在證明主要定理之前, 我們先舉一例來說明如何利用 A,B 來證明範圍內的 d 值, 都可以造成 $G_{3,n}(d)$。

例子2.9 $G_{3,8}(d)$
$d = 20$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ 11 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

第一種魔術交換矩陣

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

第二種魔術交換矩陣

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

型態 (A) 當n是偶數,$d=\frac{n(n+2)}{4}+j$, $j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2$, $n\geq 8$
$d=21$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ 11 & 15 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 8 & 10 & 12 & 13 & 16 & 9 \end{pmatrix}$$

"Do $A(a_{31})$" , "Do $B(b_{12})$"
b_1 與 c_6 , v_1 與 c_2

$d=22$

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ 11 & 16 & 15 & 18 & 19 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 9 & 8 & 12 & 13 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

"Do $A(a_{32})$" , "Do $B(b_{13})$"
b_2 與 c_6 , v_1 與 c_3

型態(B) 當n是偶數,$d=\frac{n(n+2)}{4}+(\frac{n}{2}-1)$, $n\geq 8$
$d=23$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 6 & 14 \\ 14 & 13 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 11 \\ 11 & 7 & 9 & 10 & 12 & 16 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

型態 (C) 當n是偶數,$d=\frac{n(n+2)}{4}+\frac{n}{2}$, $n\geq 8$
$d=24$

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ 11 & 16 & 13 & 18 & 19 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 9 & 10 & 8 & 17 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

"Do $A(a_{22})$" , "Do $B(b_{14})$"

b_2 與 c_5，v_1 與 c_4

型態(D) 當n是偶數,$d = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{n}{2} + j$，$j = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 3$, $n \geq 8$
$d = 25$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 16 \\ 16 & 11 & 12 & 18 & 19 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 9 & 10 & 17 & 13 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

"Do $A(a_{1,2})$"，"Do $B(b_{21})$"
b_2 與 c_4，v_2 與 b_1

型態(E) $n = 8$是特例，無法利用交換矩陣，須自己找出。例子2.10再說明利用交換矩陣找出型態 (E)。

$d = 26$

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 9 & 4 & 11 & 6 & 5 \\ 5 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 3 & 10 & 8 & 13 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$d = 27$

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 10 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ 11 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 7 \\ 7 & 14 & 9 & 3 & 8 & 13 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$d = 28$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 19 \\ 19 & 12 & 13 & 18 & 11 & 20 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 9 & 10 & 16 & 17 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$d = 29$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 20 \\ 20 & 9 & 15 & 18 & 19 & 11 & 21 & 14 \\ 14 & 7 & 16 & 10 & 12 & 13 & 17 & 2 \end{pmatrix}$$

例子2.10 $G_{3,10}(d)$

第一種魔術交換矩陣

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

第二種魔術交換矩陣

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

型態 (E) $d = \frac{n(n+2)}{4} + i$, $i = (n-2), (n-1), n, \cdots, (2n-7)$, $n \geq 10$
$n = 10$, $d = \frac{n(n+2)}{4} + i, i = 8, 9, 10, \cdots, 13$
"Do $B(b_2, i - \frac{n}{2})$"
(a) $i = 8, 9, \cdots, 12$

$G_{3,10}(38)$矩陣, "Do $A(a_{21})$", "Do $A(a_{32})$"

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 22 \\ 22 & 16 & 17 & 14 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 18 \\ 18 & 9 & 11 & 12 & 13 & 15 & 20 & 21 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

$G_{3,10}(39)$矩陣, "Do $A(a_{11})$", "Do $A(a_{23})$"

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 23 \\ 23 & 15 & 17 & 22 & 14 & 24 & 25 & 26 & 27 & 18 \\ 18 & 9 & 11 & 12 & 13 & 20 & 16 & 21 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

$G_{3,10}(40)$矩陣, "Do $A(a_{21})$", "Do $A(a_{12})$"

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 24 \\ 24 & 16 & 15 & 22 & 23 & 14 & 25 & 26 & 27 & 18 \\ 18 & 9 & 11 & 12 & 13 & 21 & 20 & 17 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

$G_{3,10}(41)$矩陣,"Do $A(a_{21})$","Do $A(a_{33})$"

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 25 \\ 25 & 20 & 15 & 17 & 23 & 24 & 14 & 26 & 27 & 18 \\ 18 & 9 & 11 & 12 & 13 & 21 & 16 & 22 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

$G_{3,10}(42)$矩陣,"Do $A(a_{12})$","Do $A(a_{23})$"

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 26 \\ 26 & 20 & 15 & 16 & 23 & 24 & 25 & 14 & 27 & 18 \\ 18 & 9 & 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 17 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

(b) $i = 13$

$G_{3,10}(43)$矩陣,"Do $A(a_{21})$","Do $A(a_{12})$","Do $A(a_{43})$"

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 27 \\ 27 & 16 & 15 & 19 & 23 & 24 & 25 & 26 & 14 & 18 \\ 18 & 9 & 11 & 12 & 13 & 21 & 20 & 17 & 22 & 10 \end{pmatrix}$$

命題2.11 當n是偶數，$n \geq 6$，$d \in [\frac{n(n+2)}{4}, \frac{3}{4}n^2 - 2]$，所有範圍內的$d$, $G_{3,n}(d)$ 存在。

證明. (1) $d = \frac{n(n+2)}{4}$，$G_{3,n}(d)$ 矩陣存在。
(2) $d \in [\frac{n(n+2)}{4} + 1, \frac{n(n+2)}{4} + (2n-7)]$。

型態 (A) $d = \frac{n(n+2)}{4} + j$，$j = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 2$，$n \geq 8$
"Do $A(a_{\frac{n}{2}-1,j})$"

"Do $B(b_{1,j+1})$"

由定義2.6(1)(2) 可得新矩陣, 此矩陣由$G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4})$元素交換而來, "Do $A(a_{\frac{n}{2}-1,j})$" 使此矩陣的第二列, 第三列的 d 增加 j , 其中 $j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2$ (也就是第一種魔術交換矩陣的 $a_{\frac{n}{2}-1,j}$元素之值)。"Do $B(b_{1,j+1})$" , 使此矩陣的第一列的 d 增加 j, 其中 $j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2$ (也就是第二種魔術交換矩陣的 $b_{1,j+1}$ 元素之值) 。所以, 此矩陣為 $G_{3,n}(d'), d'=d+j$ 。

以下只要第一種魔術交換矩陣 A, 第二種魔術交換矩陣 B, 能搭配出相同的值 t , 則可得 $G_{3,n}(\frac{n(n+2)}{4}+t)$。

型態 (B) $d=\frac{n(n+2)}{4}+(\frac{n}{2}-1), n\geq 8$

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{2}+1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 & 2n-2 \\ 2n-2 & \frac{3n}{2}+1 & 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 2n+\frac{n}{2}-3 & 2n+\frac{n}{2}-2 & 2n+\frac{n}{2}-1 & \cdots & 3n-4 & 3n-3 & \frac{3}{2}n-1 \\ \frac{3}{2}n-1 & n-1 & n+1 & n+2 & \cdots & \frac{3}{2}n-2 & \frac{3}{2}n & 2n & \cdots & 2n-3 & 2n-1 & \frac{n}{2}+1 \end{pmatrix}_{3\times n}$$

型態 (C) $d=\frac{n(n+2)}{4}+\frac{n}{2}$, $n\geq 8$

"Do $A(a_{22})$"

"Do $B(b_{1,\frac{n}{2}})$"

型態(D) $d=\frac{n(n+2)}{4}+\frac{n}{2}+j$, $j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-3, n\geq 8$

"Do $A(a_{j,\frac{n}{2}-2})$"

"Do $B(b_{2,j})$"

型態 (E) $d=\frac{n(n+2)}{4}+i$, $i=(n-2),(n-1),n,\cdots,(2n-7)$, $n\geq 10$

"Do $B(b_{2,i-\frac{n}{2}})$"

(a) $i=(n-2)$, $(n-1), n$, $\cdots$, $(2n-8)$

"Do $A(a_{ij})$" 與 "Do $A(a_{kl})$" , $i\neq k, j\neq l$

使得 $a_{ij}+a_{kl}=i$

(b) $i=2n-7$

"Do $A(a_{ij})$" , "Do $A(a_{kl})$" 及 "Do $A(a_{st})$"

i,k,s 皆不同,j,l,t 皆不同

使得 $a_{ij}+a_{kl}+a_{st}$=i

(3) 由引理 2.3, 當 $d \in [\frac{n(n+2)}{4} + (2n-6), \frac{3}{4}n^2 - 2 - 3]$, $G_{3,n}(d)$矩陣存在 。
(4) 由性質 1.5 我們有$G_{3,n}(d)$矩陣當 $d \in [\frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + 1, \frac{3}{4}n^2 - 3]$ 。
所以當 $d \in [\frac{n(n+2)}{4}, \frac{3}{4}n^2 - 3]$ 時, 我們有$G_{3,n}(d)$矩陣。

命題2.12 n是奇數, $n \geq 7$, 當 $d \in [\frac{(n-1)(n+11)}{4}, \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}]$, $G_{3,n}(d)$存在。

證明.
(1) $d = \frac{(n-1)(n+11)}{4}$, $G_{3,n}(d)$矩陣存在。

$$\begin{pmatrix} 2n-3 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n-2-1}{2} & \frac{n-2+1}{2} & \cdots & n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n & 2n+1 & \cdots & \frac{5}{2}n-\frac{7}{2} & \frac{5}{2}n-\frac{5}{2} & \cdots & 3n-4 & 3n-3 \\ 3n-3 & n-1 & n & n+1 & \cdots & \frac{3}{2}n-\frac{7}{2} & \frac{3}{2}n-\frac{5}{2} & \cdots & 2n-4 & 2n-3 \end{pmatrix}_{3\times n}$$

(2) $d \in [\frac{(n-1)(n+11)}{4} + 1, \frac{(n-1)(n+11)}{4} + (2n-8)]$
令$a_{i1} = \frac{n}{2} - i + \frac{1}{2}, i = 1, 2, \cdots, \frac{n-3}{2}$
$a_{ij} = b_j - c_{\frac{n-1}{2}+i} = \frac{n}{2} + j - i + \frac{1}{2}, j = 2, 3, \cdots, \frac{n-3}{2}$,$i = 1, 2, \cdots, \frac{n-3}{2}$

第一種魔術交換矩陣

$$A = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} & \frac{n+5}{2} & \cdots & n-2 \\ \frac{n-3}{2} & \frac{n+1}{2} & \frac{n+3}{2} & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 4 & 5 & \cdots & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}$$

第二種魔術交換矩陣

$$B = \begin{pmatrix} -n+2 & -n+3 & -n+4 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 2 & \cdots & n-3 \end{pmatrix}$$

型態 (A) $d = \frac{(n-1)(n+11)}{4} + 1$

$$\begin{pmatrix} 2n-2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n & 2n+1 & \cdots & 3n-4 & 3n-3 \\ 3n-3 & n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-4 & 2n-2 \end{pmatrix}$$

型態 (B) $d = \frac{(n-1)(n+11)}{4} + i, i = 2, 3, \cdots, (n-3)$

"Do $A(a_{kl})$","Do $B(b_{2,i+1})$"
即能得到$G_{3,n}(d)$。

型態 (C) $d=\frac{(n-1)(n+11)}{4}+(n-2)$

$$\begin{pmatrix} 2n-3 & 1 & 2 & n-1 & 4 & 5 & \cdots & n-3 & n-2 & 3n-4 \\ 3n-4 & 2n-4 & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n-5 & 2n-1 & n \\ n & 3 & 3n-3 & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-5 & 2n-2 & 2n-3 \end{pmatrix}$$

型態 (D) $d=\frac{(n-1)(n+11)}{4}+(n-1)$

$$\begin{pmatrix} 3n-4 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & n-1 & 2n & 2n+1 & \cdots & 3n-5 & 2n-3 & 3n-3 \\ 3n-3 & 2n-2 & n & n+1 & \cdots & 2n-5 & 2n-4 & 3n-4 \end{pmatrix}$$

型態 (E) $d=\frac{(n-1)(n+11)}{4}+n$

$$\begin{pmatrix} 3n-4 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & 2n-1 & n-1 \\ n-1 & 2n-2 & 2n & \cdots & 3n-5 & 2n-3 & 3n-3 \\ 3n-3 & n-2 & n & \cdots & 2n-5 & 2n-4 & 3n-4 \end{pmatrix}$$

型態 (F) $d\in[\frac{(n-1)(n+11)}{4}+(n+1),\frac{(n-1)(n+11)}{4}+(2n-8)]$
當n是奇數, 須再利用第三種及第四種交換矩陣 (定義如下), 但是交換的方式還是一樣。
令$c_{ij}=c_i-a_{\frac{n-1}{2}+j}, i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$
$j=1,2,\cdots,\frac{n-3}{2}$

第三種魔術交換矩陣

$$C=\begin{pmatrix} \frac{n-3}{2} & \frac{n-5}{2} & \cdots & 1 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-3}{2} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-3 & n-4 & \cdots & \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$$

令$d_{ij}=v_2-a_{n-1-j}, j=1,2,\cdots,n-2$

第四種魔術交換矩陣

$D = (n+1, n+2, \cdots, 2n-2)$

"Do $D(d_{1,i-n})$" , $i = (n+1), (n+2), \cdots, (2n-8)$

"Do $C(c_{ij})$" , "Do $C(c_{kl})$" , $i \neq k, j \neq l$, 使得 $c_{ij} + c_{kl} = i$

(3) 由引理2.4, 當$d \in [\frac{(n-1)(n+11)}{4} + (2n-7), (\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}) - 3]$, $G_{3,n}(d)$矩陣存在。

(4) 由性質1.8, 當$n \geq 3, d \in [\frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4}, \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}]$, $G_{3,n}(d)$存在。
當$d \in [\frac{(n-1)(n+11)}{4}, \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{13}{4}]$, 我們可以找到$G_{3,n}(d)$。

由命題2.11和命題2.12可得定理2.13。

定理2.13 在所有最佳上下界的d, $G_{3,n}(d)$都存在。

參考資料

[1] A. A. Sunday, Subtractive magic triangles, Mathematics Teacher, 76(5), 1983, 346-347.

[2]Harvey Heinz, Perimeter magic triangles, 2006.
http://www.geocities.com/ harveyh/perimeter.htm.

[3]王湘君, 可減的魔術三角形, 數學傳播, 34(1985), 86-87.
http://www.math.sinica.edu.tw/math/d92/9214.pdf.

[4]許綺云, 魔術變變變, 第一屆丘成桐中學數學獎銀牌獎 (2009).