

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

應用順滑模控制技術於 μ -split 煞車控制

Study of μ -split Braking Control via Sliding Mode
Control Technique

研究生：鄭旭志

指導教授：梁耀文 博士

中華民國一百年二月

應用順滑模控制技術於 μ -split 煞車控制

**Study of μ -split Braking Control via Sliding Mode
Control Technique**

研究生：鄭旭志

Student : Hsu-Chi Cheng

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang



A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electrical and Control Engineering

February 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年二月

應用順滑模控制技術於 μ -split 煞車控制

學生：鄭旭志

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電控工程研究所碩士班



本論文探討應用順滑模控制(Sliding Mode Control)技術於 μ -split 煞車控制。當車子左右兩側輪胎行駛的路面摩擦力有顯著的差別時，我們稱該路面為 μ -split 路面。車子在 μ -split 路面上煞車時，因為左右兩側摩擦力不同，車子會開始在 μ -split 路面上打轉或者偏駛到其他車道去。因此，我們應用順滑模控制對於外在干擾和系統不確定項有著穩健性的優點，使車子在 μ -split 路面上仍有穩健的煞車控制。為了使順滑模控制技術能應用在各種 μ -split 路面上，我們進而設計出一個路面觀測器，觀測器能判斷車子在何種路面下煞車，並告知順滑模控制器切換適合的控制律。

Study of μ -split Braking Control via Sliding Mode Control Technique

Student : Hsu-Chi Cheng

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University



This thesis studies the μ -split braking control issues. When a vehicle performs braking on a μ -split road, it usually starts to spin, deviates from its desired path and, even worse, might rollover because of the different friction between the tire and the road of the two sides. Due to the remarkable benefits of the Sliding Mode Control (SMC) design, including rapid response, robustness to disturbances and/or uncertainties and ease of implementation, this thesis investigates the robust μ -split braking control through the SMC design by appropriately adjusting the four wheel slip ratios. Besides, an observer which is able to effectively detect the road information is also presented to realize the slip ratio adjustment. Simulation results demonstrate the benefits of the proposed scheme.

誌謝

感謝許多人的關心與協助，使本論文能夠順利完成。首先特別要感謝指導教授梁耀文博士，感謝老師兩年來細心與耐心的指導及對我孜孜不倦的教誨，使我不僅在研究過程中受益良多，且在待人處世各方面有許多的成長。同時也要感謝口試委員廖德誠博士、鄭治中博士和徐聖棟博士給予建設性的建議與指導，使得本論文更臻完備。

接下來，要感謝實驗室的學長立岡、源廷，以及學弟智強、榮人、君豪，在我兩年的研究生涯中，給予適時的意見與幫助。謝謝學長學弟、同學及室友們，因為你們使我的研究生涯變得更多采多姿充滿回憶，謝謝你們的關懷與照顧，沒有你們的幫忙論文不可能順利完成。

最後要感謝我最愛的家人，父親、母親、姊姊與弟弟，由於你們的大力支持與鼓勵，使我在求學過程中無後顧之憂，使我能更能專心在學業上衝刺，謝謝你們，謹將此論文獻給你們。

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	viii
符號表.....	ix
第1章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 論文架構.....	4
第2章 預備知識.....	5
2.1 順滑模控制器之設計.....	5
2.2 布克哈特輪胎模型.....	8
2.3 四輪車輛動態介紹.....	11
第3章 μ -split 路面觀測器的設計.....	14
3.1 利用最小二乘方法估測車輛兩側的輪胎-路面摩擦係數.....	15
3.2 利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 偵測煞車路面是否變換.....	17
3.3 利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 判斷新的煞車路面.....	19
3.3.1 利用 $\hat{\mu}'_l$ 、 $\hat{\mu}'_r$ 、 λ_l 、 λ_r 判斷路面 A 的種類.....	20
3.3.2 利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 、 λ_l 、 λ_r 判斷路面 B 的種類.....	25
3.3.2.1 路面 A 為一般路面.....	25
3.3.2.2 路面 A 為 μ -split 路面.....	27
第4章 應用順滑模控制技術於 μ -split 的煞車控制.....	33
4.1 問題描述.....	33

4.2 控制律設計.....	34
4.3 應用順滑模控制技術於 μ -split 的煞車控制.....	37
4.3.1 μ -split 路面煞車模擬.....	38
4.3.2 三段式路面煞車模擬.....	43
第 5 章 結論與未來研究方向.....	49
5.1 結論.....	49
5.2 未來研究方向.....	50
參考文獻.....	51
附錄.....	53



圖目錄

圖 1.1 控制流程方塊圖.....	3
圖 2.1 順滑模式示意圖.....	5
圖 2.2 μ 與 λ 的關係曲線.....	9
圖 2.3 乾地下路面摩擦力為 μ_{ww} 的對應滑移率.....	9
圖 2.4 乾地、濕地下路面摩擦力為 μ_{ss} 的對應滑移率.....	10
圖 2.5 四輪車輛模型.....	11
圖 3.1 煞車路面為[乾地,乾地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力.....	18
圖 3.2 煞車路面由[乾地,乾地]變成[溼地,乾地]瞬間左側的輪胎-路面摩 擦力.....	19
圖 3.3 路面 A 為[乾地,乾地]、[乾地,溼地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力.....	20
圖 3.4 路面 A 為[乾地,溼地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力.....	22
圖 3.5 路面 A 的右側為雪地,左側為乾地或濕地.....	22
圖 3.6 路面 A 的右側為雪地,左側為乾地或濕地(紅框放大).....	23
圖 3.7 判斷路面 A 的演算法流程圖.....	24
圖 3.8 路面 A 為[乾地,乾地]路面，左右兩側輪胎-路面摩擦力.....	26
圖 3.9 路面 A 為[乾地,乾地]，路面 B 兩側路面的判斷法.....	26
圖 3.10 路面 A 為[溼地,乾地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力.....	29
圖 3.11 路面 A 為[溼地,乾地]，路面 B 的左側路面判斷法.....	29
圖 3.12 路面 A 為[溼地,乾地]，路面 B 的右側路面判斷法.....	29
圖 3.13 判斷路面 B 的演算法流程圖 1.....	30
圖 3.14 判斷路面 B 的演算法流程圖 2.....	31
圖 3.15 判斷路面 B 的演算法流程圖 3.....	32
圖 4.1 μ -split 路面下煞車.....	33
圖 4.2 μ -split 煞車路面.....	39

圖 4.3 μ -split 路面模擬中， $\lambda_l = \lambda_r = \lambda_{dd}$ 時左右兩側的輪胎-路面摩擦力.....	39
圖 4.4 μ -split 路面煞車模擬的系統狀態變數(1).....	41
圖 4.5 μ -split 路面煞車模擬的系統狀態變數(2).....	41
圖 4.6 μ -split 路面煞車模擬的系統控制輸入.....	42
圖 4.7 μ -split 路面煞車模擬的順滑變數.....	42
圖 4.8 μ -split 路面煞車模擬的煞車軌跡路線.....	43
圖 4.9 μ -split 路面煞車模擬的煞車路面.....	44
圖 4.10 三段式路面煞車模擬的系統的狀態變數(1).....	46
圖 4.11 三段式路面煞車模擬的系統的狀態變數(2).....	46
圖 4.12 三段式路面煞車模擬的系統的控制輸入.....	47
圖 4.13 三段式路面煞車模擬的順滑變數.....	47
圖 4.14 三段式路面煞車模擬的煞車軌跡路線.....	48



表目錄

表 2.1 布克哈特輪胎模型在不同路面下的參數.....	8
表 2.2 λ_{dd} 、 λ_{ww} 、 λ_{ss} 、 λ_{dw} 、 λ_{ds} 、 λ_{ws} 、 μ_{dd} 、 μ_{ww} 、 μ_{ss} 在不同縱向速度下的 數值.....	10
表 3.1 煞車路面的種類.....	19
表 4.1 各種路面狀況下的參考輸出.....	44



符號表

μ_α	實際左右兩側摩擦係數
$\hat{\mu}_\alpha$	左右兩側摩擦係數的估測值
$\hat{\mu}'_\alpha$	車子在路面 A 下的左右兩側摩擦係數的估測值
μ_{dd}	輪胎在乾地下的最大輪胎-路面摩擦係數
μ_{ww}	輪胎在溼地下的最大輪胎-路面摩擦係數
μ_{ss}	輪胎在雪地下的最大輪胎-路面摩擦係數
λ	輪胎滑移率
λ_l	左側輪胎滑移率
λ_r	右側輪胎滑移率
λ_{dd}	輪胎在乾地下欲獲得 μ_{dd} 所對應的滑移率
λ_{ww}	輪胎在溼地下欲獲得 μ_{ww} 所對應的滑移率
λ_{ss}	輪胎在雪地下欲獲得 μ_{ss} 所對應的滑移率
λ_{dw}	輪胎在乾地下欲獲得 μ_{ww} 所對應的滑移率
λ_{ds}	輪胎在乾地下欲獲得 μ_{ss} 所對應的滑移率
λ_{ws}	輪胎在溼地下欲獲得 μ_{ss} 所對應的滑移率
ω_α	四個輪胎的轉速
r_w	輪胎半徑
V_x	車子的縱向速度
Ω	車子的偏移率
δ	車子的操控輪胎角度
δ_{sat}	車子的操控輪胎角度實際輸出
λ_α	四個輪胎的滑移率
F_x	外力在 x 座標上的分量

T_α 四個輪胎的煞車力道

R_α 輪胎的縱向力

L_α 輪胎的側向力

τ 時間常數

m 車子的質量

I_{zz} 車子的轉動慣量

J_w 輪胎的轉動慣量

l_1 車子質量中心點到前輪的垂直距離

l_2 車子質量中心點到後輪的垂直距離

l_3 車子質量中心點到左右兩輪的垂直距離

C_α 輪胎的過彎剛性

N_α 輪胎的正向力

$\alpha = fl, fr, rl, rr$ 分別代表車子左前、右前、左後、右後的位置。



第 1 章

緒論

1.1 研究背景與動機

車輛行駛的安全性和穩定性一直是很重要的一塊研究領域，大多數車輛事故發生的原因皆是駕駛無法對前方突然出現的障礙物或突發狀況做出正確的操控動作而發生意外事故。正確操控動作的判斷依據包含車輛與障礙物之間的距離，其他車道的狀況以及路面的狀況…等等。駕駛通常會因為缺乏處理危機狀況的經驗而做出不恰當的操控行為，因此需要控制系統輔助駕駛渡過車輛危安狀況。本篇在討論一個特殊的路面安全問題—車子在 μ -split 路面上煞車。當車輛行駛的輪胎路徑上，左右兩側的輪胎-路面摩擦係數有顯著的不同時，我們稱這樣的路面為 μ -split。車子在 μ -split 路面下定速通過或輕微煞車時，對其操控影響並不大，而且 μ -split 路面很難用肉眼去察覺，因此駕駛很難發覺自己已經身處在不利的駕駛環境下；但若車輛在 μ -split 路面上有急煞的動作，因為左右兩邊輪胎-路面摩擦係數顯著的不同，車子兩邊的抓地力不一樣，將會產生偏離角度 (yaw angle) 以及側向速度 (lateral velocity)，使得車子開始打轉甚至偏離到其他車道去，若車子後方或者左右有貼近的车辆，將會造成嚴重的車輛危安事故；因此，我們需要額外的控制器來輔助車輛能在煞車中安全的通過 μ -split 路面。

現今已有許多文獻探討如何在 μ -split 路面上達到安全的煞車控制，如：內部模組控制 (Internal Model Control) [1]，回路內含硬體之類比控制 (Hardware-In-the-Loop Control) [2]，後輪差動器控制輔助[3]，[4]，PID 控制法[5]…等等。根據[6]我們知道車子在 μ -split 路面上煞車時，若將車子的偏

移率 (yaw rate) 控制於零，車子將不會產生打轉或者偏離到其他車道，並能使車子有安全的煞車控制；接著，我們期望在偏移率為零的情況下，車子的煞車距離最短，因此我們藉由調整反鎖死煞車系統 (Anti Brake System) 的滑移率達到上述的控制目的。反鎖死煞車系統被設計在防止輪胎鎖死的狀況下，使輪胎產生最大的煞車力道，根據布克哈特輪胎模型 (Burckhardt tire model) [7]，我們知道輪胎在不同的路面下—乾地、溼地、雪地，適當的調整輪胎滑移率可使輪胎獲得最大的煞車力道，因此，我們希望設計出一個控制器，當車子在 μ -split 路面上煞車時，藉由控制器調整車子左右兩側的輪胎滑移率，使得車子左右兩側的輪胎-路面摩擦力相等並且達到最短煞車距離的效果，意即我們需將兩側的輪胎-路面摩擦數皆調至抓地效果較差一側所能獲得的最大輪胎-路面摩擦係數；當車子左右兩側的胎-路面摩擦數時，意即抓地力相等，此時車子的旋轉動能為零，也將不會產生偏移率。

[8]和[1]分別嘗試著用模糊控制 (Fuzzy Control) 以及內部模組控制解決 μ -split 路面上煞車問題，但皆無法藉由調整控制器內部的參數改變系統輸出的收斂速度，設計上比較缺乏彈性。[6]則是利用 PID 控制器，調整車輛過彎時的前輪內胎煞車力矩，但因車子左右兩側的車輛-輪胎摩擦係數仍有顯著的差距，車子的滑移率和側向速度收斂效果不佳，也因為 PID 控制器內部的微分項，使得外在干擾對 PID 控制器的影響極大。順滑模控制技術 (Sliding Mode Control, 簡稱 SMC) 擁有響應速度快，設計簡單，以及對於外在干擾和系統不確定項有著穩健性的優點，並且藉由調整控制器的參數，我們可以改變系統輸出的收斂速度，設計上較為彈性；因此，我們希望藉由順滑模控制技術達到 μ -split 路面上安全的煞車控制。現今已有文獻利用順滑模控制技術來解決 μ -split 路面上的煞車問題[9]，[10]。[10]將車輛的非線性動態系統簡化成線性動態系統的問題，但只在特定平衡點下的解決 μ -split 路面上的煞車控制問題；在[9]中，控制輸入有八個：四個輪胎的操控角 (steering angle) 以及煞車力矩，系統輸出追蹤 (output tracking) 也為八個：四個輪胎滑移率 (slip ratio) 以及煞車力矩

(braking torque)。本篇論文考慮的車輛動態系統為非線性系統，同樣地利用順滑模控制技術，但只需適當的調整車子左右兩側的輪胎滑移率，也能達到 μ -split 路面上安全的煞車控制。

實際駕駛情況中，車子在 μ -split 路面上煞車前，可能會先在一般路面上(路面左右兩側摩擦係數相等)煞車一段距離後，才進入 μ -split 路面，在上述的研究中[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，[9]，都是將控制器帶入已經進入 μ -split 路面的車子，並無交代任何機制去判斷車子是否從一般路面(路面左右兩側摩擦係數相等)進入 μ -split 路面。在本篇論文中，我們設計出一個路面觀測器，路面觀測器能在車子煞車過程中偵測煞車路面是否有變換，並判斷新的煞車路面為何種路面，進而告知控制器切換至合適的控制律，達到 μ -split 路面上安全的煞車控制目的。車輛控制流程方塊圖如圖 1.1 所示。

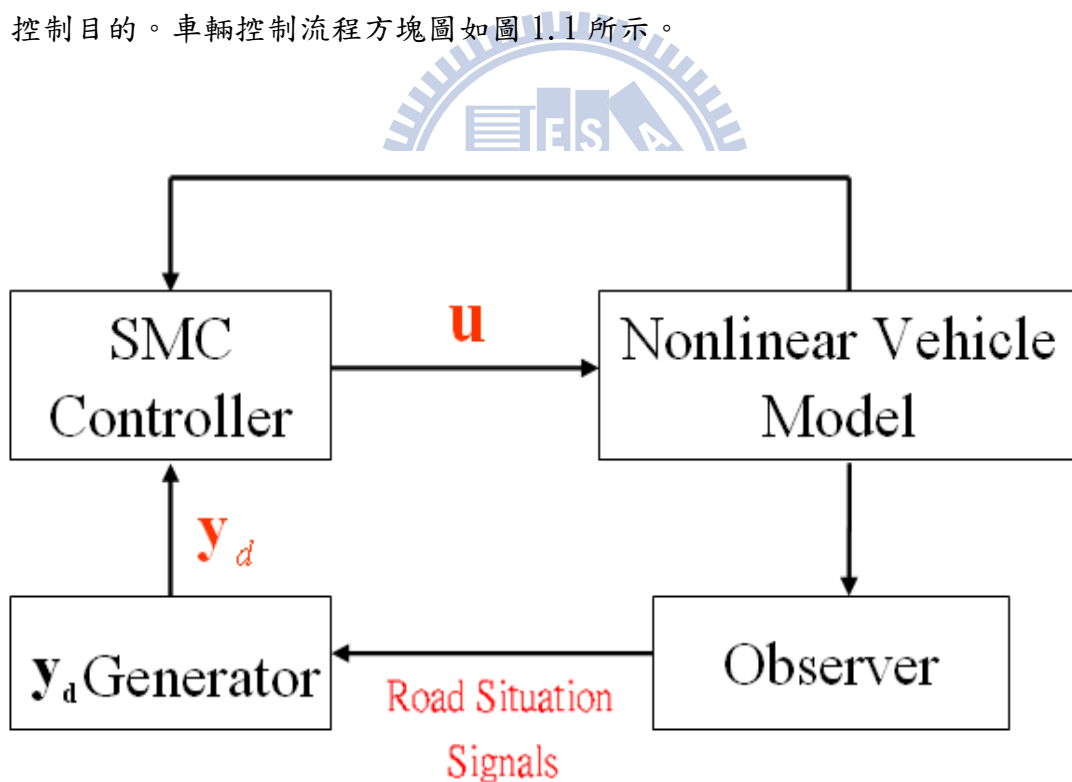


圖 1.1 控制流程方塊圖

1.2 論文架構

本論文架構如下：第二章為預備知識，在此章節我們會介紹順滑模控制理論，布克哈特輪胎模型以及四輪車輛動態模型。第三章我們會利用四輪車輛動態方程式以及最小二乘方法 (Least squares method)，估算出車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ ，並利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 的數值設計出一套路面演算法來判斷車子是否進入新的煞車路面並判斷车子在何種路面下煞車。第四章為應用順滑模控制技術於 μ -split 煞車控制，我們在此章節介紹 SMC 控制律的設計，並模擬车子在 μ -split 路面的煞車。我們的模擬分 μ -split 路面煞車模擬與三段式路面煞車模擬兩部分，在 μ -split 路面煞車模擬中我們藉由 SMC 調整车子左右兩側的滑移率，模擬 μ -split 路面煞車中 $\mu_l = \mu_r$ ，另外為了有個比較對象，我們模擬 μ -split 路面煞車中 $\mu_l \neq \mu_r$ ，並將兩種模擬結果進行分析比較；接著，為了證明第三章我們設計出來的路面觀測器能在车子煞車過程中即時判斷路面的變換並且判斷新煞車路面的種類，我們結合 SMC 與路面觀測器，並模擬车子在一條三段式的路段上煞車，我們從模擬結果觀察路面觀測器能否即時判斷车子進入新的煞車路面和判斷车子在何種路面下煞車。第五章提出結論與未來研究方向。

第 2 章

預備知識

2.1 順滑模控制器之設計

順滑模控制(sliding mode control, SMC)的特點在於利用不連續的控制輸入，使系統最後會被限制在一個預先決定的順滑面(sliding surface)上，而受控系統的行為則是由順滑面來規範。當順滑函數為 0，狀態軌跡沿著順滑面滑行的運動方式稱為順滑模式(sliding mode)，示意圖如圖 2.：

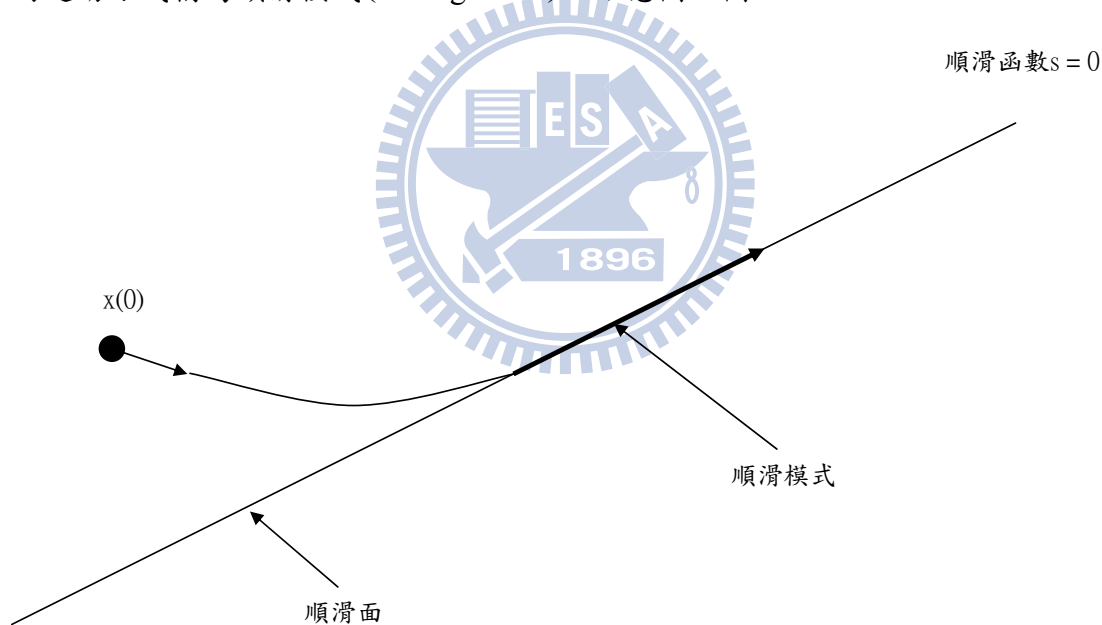


圖 2.1 順滑模式示意圖

一般來說，順滑模控制的順滑面多半設計成線性的順滑函數，而系統在順滑面上時的動態階數則會比原始系統階數要少，因此也減輕了設計的複雜度。總而言之，順滑模控制器的設計主要分成二個步驟[11]-[14]；首先是選取適當的順滑面，當系統狀態維持在此順滑面上時會產生我們所要的表現；第二個是

決定控制律使系統能在有限時間內到達順滑面並且維持在順滑面上，下面主要就是說明此控制律的設計。我們考慮一非線性動態系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_o(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_o(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 為狀態變數， $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 為控制輸入， $\mathbf{f}_o(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ 以及 $\mathbf{G}_o(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 為平滑函數， \mathbf{d} 為系統不確定性(uncertainty)或外在干擾(external disturbance)所造成的擾動(perturbation)。接著我們定義系統輸出以及輸入-輸出關係等式(input-output relation equation)如下：

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(k_p)} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ 為系統輸出， (k_1, \dots, k_p) 為相對階數(relative degree)， $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ 以及 $\mathbf{G} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{p \times m}$ 。在這裡我們考慮 $m = p$ ，並假設 $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 情況下為一個非奇異(Nonsingular)矩陣。設計控制律的目的為使系統輸出追蹤參考輸出(reference output)，意即 $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_d$ ， \mathbf{y}_d 為參考輸出軌跡。另外定義輸出誤差及順滑模面為：

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \quad (2.3)$$

$$s_i(t) = e_i^{(k_i-1)}(t) + a_{i(k_i-1)} e_i^{(k_i-2)}(t) + \dots + a_{i2} \dot{e}_i(t) + a_{i1} e_i(t) = 0 \quad (2.4)$$

在這裡 a_{ij} ， $i=1, \dots, p$ ， $j=1, \dots, k_i-1$ ，且對應的特徵多項式 $P(\lambda) = \lambda^{k_i-1} + a_{i(k_i-1)} \lambda^{k_i-2} + \dots + a_{i2} \lambda + a_{i1}$ 為赫威茲多項式(Hurwitz polynomials)。

然後我們考慮設計控制律 \mathbf{u}^{eq} 和 \mathbf{u}^{re} [15]，其功用分別為使系統狀態維持在順滑平面以及在有限時間內使系統狀態到達順滑面，而其對應的條件則分別為 $\dot{\mathbf{s}}(t)=0$ 和 $s_i(t) \cdot \dot{s}_i(t) < -\eta_i \cdot |s_i|$ ， $\eta > 0$ 。設計 \mathbf{u}^{eq} 時先令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq}$ ，將 \mathbf{u} 帶入 (2.2) 及 (2.4) 求得令 $\dot{\mathbf{s}}(t)=0$ 的解，可得到

$$\begin{pmatrix} u_1^{eq} \\ \vdots \\ u_m^{eq} \end{pmatrix} = -\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) - y_{1d}^{(k_1)} + a_{1(k_1-1)} e_1^{(k_1-1)}(t) + \dots + a_{11} \dot{e}_1(t) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) - y_{pd}^{(k_p)} + a_{p(k_p-1)} e_p^{(k_p-1)}(t) + \dots + a_{p1} \dot{e}_p(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

為了保證順滑模為一個不變集合 (invariant set)，我們定義

$$\dot{s}_i(t) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(\mathbf{x}) u_j^{re} + d_i \quad (2.6)$$

然後我們假設 $|d_i| \leq \rho_i(\mathbf{x}, t)$ ， $\rho_i(\mathbf{x}, t) > 0$ 。令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re}$ ，從 (2.6) 我們可得

$$s_i(t) \cdot \dot{s}_i(t) = s_i(t) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^m g_{ij}(\mathbf{x}) u_j^{re} + d_i \right\} \quad (2.7)$$

$g_{ij}(\mathbf{x})$ 為 $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 的 (i, j) -位元，我們選擇 \mathbf{u}^{re} 如下

$$\begin{pmatrix} u_1^{re} \\ \vdots \\ u_p^{re} \end{pmatrix} = -\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (\rho_1 + \eta_1) \cdot \mathbf{sgn}(s_1) \\ \vdots \\ (\rho_p + \eta_p) \cdot \mathbf{sgn}(s_p) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

代入 (2.7) 可得到 $s_i(t) \cdot \dot{s}_i(t) \leq -s_i(t) \cdot (\eta_i + \rho_i) \cdot \mathbf{sgn}(s_i) + \rho_i \cdot |s_i(t)| \leq -\eta_i \cdot |s_i(t)|$ ，

因此最後完整的控制律為 (2.5) 和 (2.8) 的總和。

2.2 布克哈特輪胎模型 (Burckhardt tire model)

車輛在煞車時，輪胎產生的牽引力 F_{trac} 與地面施加在輪胎上的正向力 F_N 成正比[16]：

$$F_{trac} = \mu \cdot F_N \quad (2.9)$$

μ 稱之為路面摩擦係數，其數值會隨著路面的變化有所不同。煞車中的滑移率 λ 定義為：

$$\lambda = \frac{V - r_w \cdot \omega}{V} \quad (2.10)$$

V 為車輛的縱向速度， r_w 為輪胎半徑， ω 為輪胎轉速。布克哈特輪胎模型提供路面摩擦係數 μ 與滑移率 λ 之間的非線性關係等式[16]：

$$\mu = [c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \lambda}) - c_3 \cdot \lambda] \cdot e^{-c_4 \lambda \cdot V} \quad (2.11)$$

c_1, c_2, c_3, c_4 的數值隨著路面的不同而改變，如表 2.1：

表 2.1 布克哈特輪胎模型在不同路面下的參數

	c_1	c_2	c_3	c_4
乾地	1.2801	23.99	0.52	0.02
溼地	0.857	33.822	0.347	0.02
雪地	0.1946	94.129	0.0646	0.02

路面摩擦係數 μ 與滑移率 λ 的關係曲線如圖 2.2 所示，我們可以觀察出，輪胎在乾地、濕地、雪地路面下的最大路面摩擦係數以及對應的滑移率分別為 (μ_{dd}, λ_{dd}) 、 (μ_{ww}, λ_{ww}) 、 (μ_{ss}, λ_{ss}) 。若我們希望在乾地路面下路面摩擦係數為 μ_{ww} ，則因將滑移率調至 λ_{dw} ，如圖 2.3 所示；若我們希望在乾地路面下路面摩擦係數為 μ_{ss} ，則因將滑移率調至 λ_{ds} ，如圖 2.4 所示；若我們希望在溼地

路面下路面摩擦係數為 μ_{ss} ，則因將滑移率調至 λ_{ws} ，如圖 2.4 所示。

再來，路面摩擦係數 μ 與滑移率 λ 的關係曲線會隨著縱向速度 V 而有些微的變化，連帶的影響 λ_{dd} 、 λ_{ww} 、 λ_{ss} 、 λ_{dw} 、 λ_{ds} 、 λ_{ws} 、 μ_{dd} 、 μ_{ww} 、 μ_{ss} 的數值，我們在這裡整理出 λ_{dd} 、 λ_{ww} 、 λ_{ss} 、 λ_{dw} 、 λ_{ds} 、 λ_{ws} 、 μ_{dd} 、 μ_{ww} 、 μ_{ss} 在不同縱向速度下的數值，如表 2.2 所示：

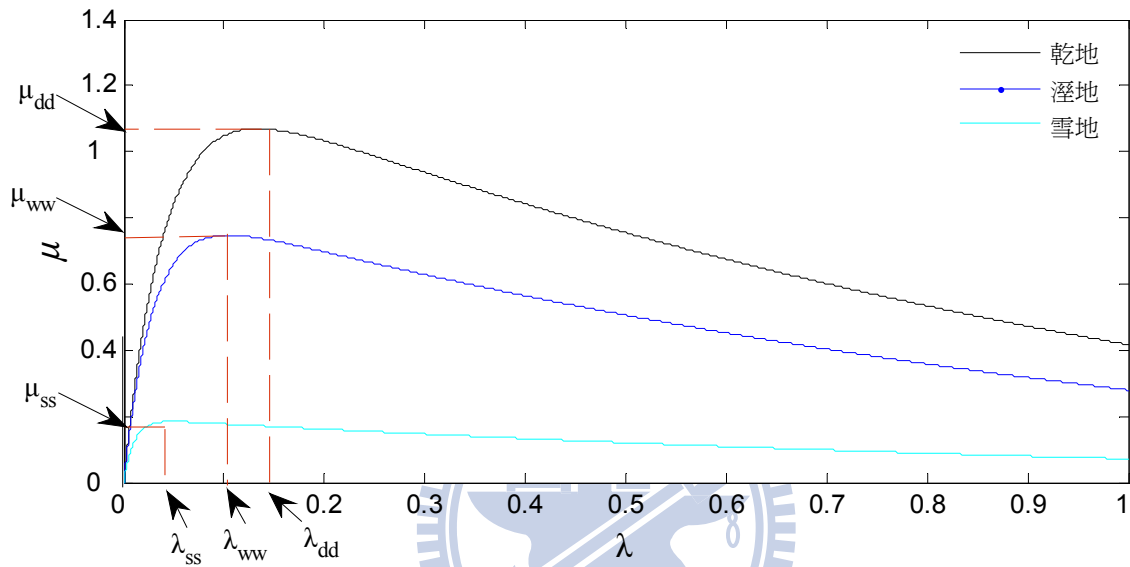


圖 2.2 μ 與 λ 的關係曲線

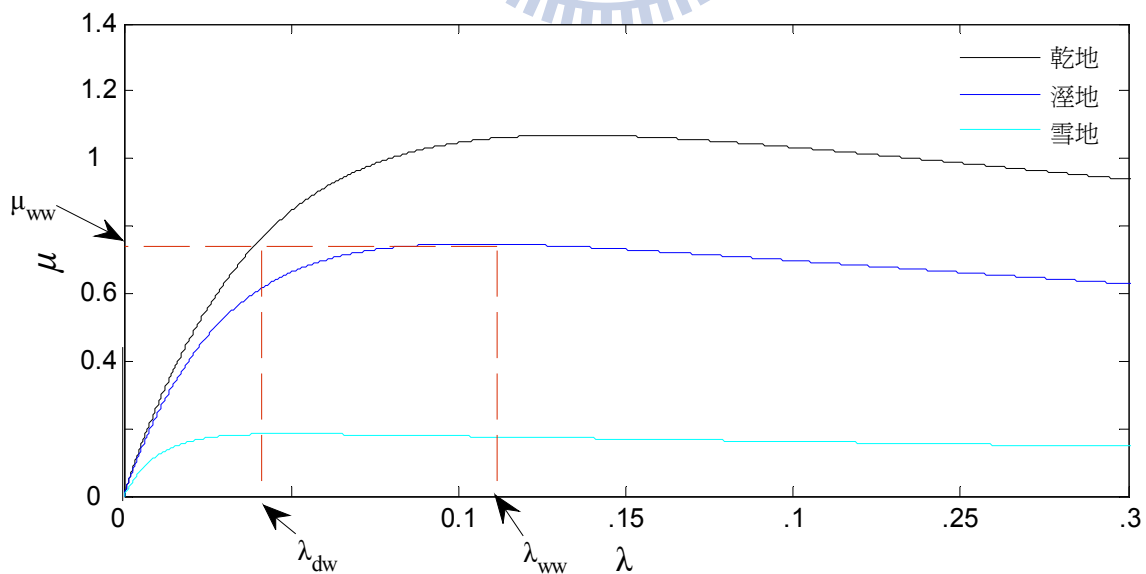


圖 2.3 乾地下路面摩擦力為 μ_{ww} 的對應滑移率

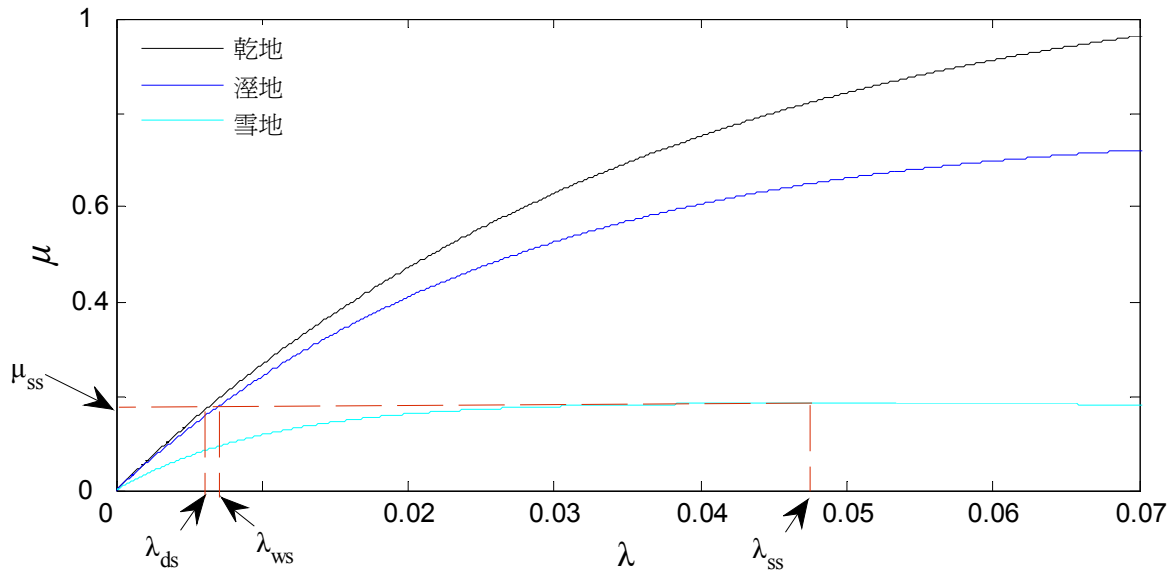


圖 2.4 乾地、濕地下路面摩擦力為 μ_{ss} 的對應滑移率

表 2.2 λ_{dd} 、 λ_{ww} 、 λ_{ss} 、 λ_{dw} 、 λ_{ds} 、 λ_{ws} 、 μ_{dd} 、 μ_{ww} 、 μ_{ss}
在不同縱向速度下的數值

	$V = 30\text{ m/s}$	$V = 20\text{ m/s}$	$V = 10\text{ m/s}$	$V = 1\text{ m/s}$
λ_{dd}	0.1267	0.1419	0.15	0.1608
λ_{ww}	0.1041	0.1118	0.1188	0.1301
λ_{ss}	0.0505	0.0518	0.0542	0.0588
λ_{dw}	0.0397	0.0407	0.0418	0.0429
λ_{ds}	0.0066	0.0067	0.0067	0.0068
λ_{ws}	0.0073	0.0074	0.0075	0.0075
μ_{dd}	1.069	1.1	1.133	1.166
μ_{ww}	0.7474	0.7637	0.7815	0.7993
μ_{ss}	0.184	0.1859	0.1879	0.1898

2.3 四輪車輛動態介紹

我們參考[17]的四輪車輛動態模型，為了簡化問題，我們一樣只考慮偏航平面（yaw plane）的動態。四輪車輛模型以及動態方程式如下所示：

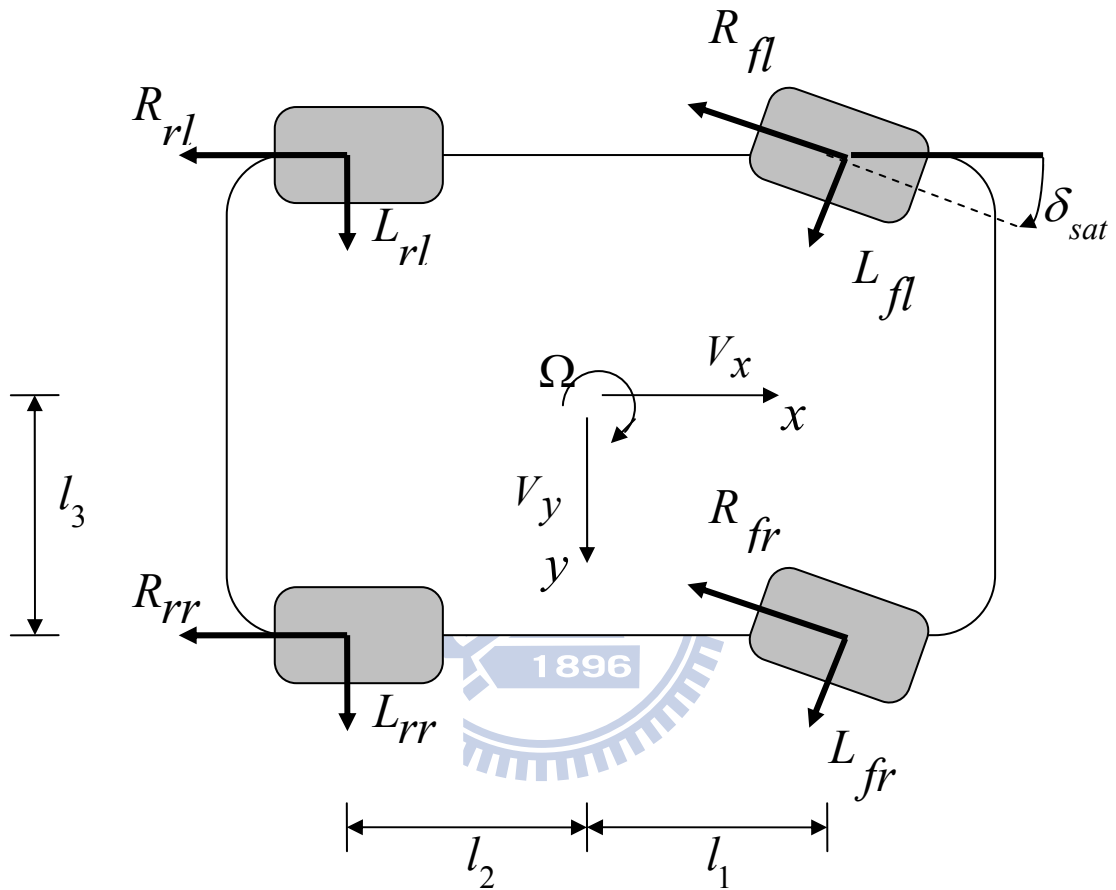


圖 2.5 四輪車輛模型

$$\dot{V}_x = F_x/m + \Omega \cdot V_y \quad (2.11)$$

$$\dot{V}_y = F_y/m - \Omega \cdot V_x \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
I_{zz} \cdot \dot{\Omega} = & (-R_{fl} \cdot s\delta_{sat} + L_{fl} \cdot c\delta_{sat}) \cdot l_1 + (-R_{fr} \cdot s\delta_{sat} + L_{fr} \cdot c\delta_{sat}) \cdot l_1 \\
& + (-R_{fl} \cdot c\delta_{sat} - L_{fl} \cdot s\delta_{sat}) \cdot l_3 + (R_{fr} \cdot c\delta_{sat} + L_{fr} \cdot s\delta_{sat}) \cdot l_3 \\
& + (-R_{rl} \cdot l_3 - L_{rl} \cdot l_2) + (R_{rr} \cdot l_3 - L_{rr} \cdot l_2)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\tau \cdot \dot{\delta} = -\delta + \delta_s \tag{2.14}$$

$$F_x = (-R_{fl} \cdot c\delta_{sat} - L_{fl} \cdot s\delta_{sat}) + (-R_{fr} \cdot c\delta_{sat} - L_{fr} \cdot s\delta_{sat}) - R_{rl} - R_{rr} \tag{2.15}$$

$$F_y = (-R_{fl} \cdot s\delta_{sat} + L_{fl} \cdot c\delta_{sat}) + (-R_{fr} \cdot s\delta_{sat} - L_{fr} \cdot c\delta_{sat}) + L_{rl} + L_{rr} \tag{2.16}$$

$$L_{fl} = C_{fl} \cdot \left(\delta_{sat} - \frac{V_y + \Omega \cdot l_1}{V_x + \Omega \cdot l_3} \right) \tag{2.17}$$

$$L_{fr} = C_{fr} \cdot \left(\delta_{sat} - \frac{V_y + \Omega \cdot l_1}{V_x - \Omega \cdot l_3} \right) \tag{2.18}$$

$$L_{rl} = C_{rl} \cdot \left(\frac{l_2 \Omega - V_y}{V_x + l_3 \Omega} \right) \tag{2.19}$$

$$L_{rr} = C_{rr} \cdot \left(\frac{l_2 \Omega - V_y}{V_x - l_3 \Omega} \right) \tag{2.20}$$

$$R_\alpha = \mu_\alpha \cdot N_\alpha, \quad \alpha = fl, fr, rl, rr. \tag{2.21}$$

$$N_{fl} = \frac{m \cdot g \cdot l_2}{2 \cdot (l_1 + l_2)}, \quad N_{fr} = \frac{m \cdot g \cdot l_2}{2 \cdot (l_1 + l_2)}, \tag{2.22}$$

$$N_{rr} = \frac{m \cdot g \cdot l_1}{2 \cdot (l_1 + l_2)}, \quad N_{rl} = \frac{m \cdot g \cdot l_1}{2 \cdot (l_1 + l_2)} \tag{2.23}$$

$$\mu_\alpha = [c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \lambda_\alpha}) - c_3 \cdot \lambda_\alpha] \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \tag{2.24}$$

$$\lambda_\alpha = \frac{V_x - r_w \cdot \dot{\omega}}{V_x}, \quad \alpha = fl, fr, rl, rr \quad (2.25)$$

$$\dot{\omega}_\alpha = \frac{\mu_\alpha \cdot r_w \cdot N_\alpha - T_\alpha}{J_w}, \quad \alpha = fl, fr, rl, rr \quad (2.26)$$

$$\dot{\lambda}_\alpha = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_\alpha)}{V_x} + \frac{r_w \cdot T_\alpha - \mu_\alpha \cdot r_w^2 \cdot N_\alpha}{V_x \cdot J_w}, \quad \alpha = fl, fr, rl, rr \quad (2.27)$$

四輪車輛的中心點為車子的重心點 (CG: center of gravity)；以中心點為起點，朝車頭方向為正向的 x 座標，朝車子右手邊方向為正向的 y 座標； m 為四輪車的總質量； V_x 和 V_y 分別為車子速度在 x 座標以及 y 座標上的分量； F_x 和 F_y 分別為外力施加在 x 座標以及 y 座標上的分量； Ω 為 z 座標上 (與 yaw plane 垂直) 的旋轉角速度； I_{zz} 為車體垂直方向上的轉動慣能 (moment of inertia)； C_α 為輪胎的過彎剛性 (cornering stiffness)， $\alpha = fl, fr, rl, rr$ ， fl, fr, rl, rr 分別代表車子的左前、右前、左後以及右後位置； l_1 、 l_2 分別為車子中心點到前輪、後輪的垂直距離， l_3 為車子中心點到左右輪胎座標的垂直距離； δ_{sat} 為車子操控輪胎角度 (steering wheel angle) δ 的實際輸出，定義為： $\delta_{sat} = \frac{\pi}{16}$ if $\delta > \frac{\pi}{16}$ ； $\delta_{sat} = -\frac{\pi}{16}$ if $\delta < -\frac{\pi}{16}$ ； $\delta_{sat} = \frac{\pi}{16} \sin(\delta)$ if $-\frac{\pi}{16} < \delta < \frac{\pi}{16}$ ， δ_s 為 SMC 產生了操控角度， τ 為時間常數；和 s 分別為 \cos 和 \sin 的運算式； R_α 與 L_α 為輪胎-路面之間的縱向與側向力， $\alpha = fl, fr, rl, rr$ ；在這裡我們採用布克哈特輪胎模型[16]模擬輪胎-路面的縱向力，如 (2.21) - (2.23) 所示， g 為重力加速度； μ_α 為輪胎-路面的摩擦力， c_1, c_2, c_3, c_4 的數值可由[5]得知； λ_α 為輪胎的滑移率，在本論文我們只考慮煞車動作，因此滑移率的公式如 (2.25) 所示；接著我們利用公式 (2.26)，對 (2.25) 進行微分，得到滑移率的動態公式為 (2.27) 式， $\dot{\omega}_\alpha$ 為輪胎轉速， r_w 為輪胎半徑， J_w 為輪胎轉動慣量 (inertia moment of wheel)， T_α 為煞車力矩。

第 3 章

μ -split 路面觀測器的設計

車子在 μ -split 路面上煞車前，可能會先在一般路面上(路面左右兩側摩擦係數相等)煞車一段距離後，才進入 μ -split 路面，現今已有許多文獻探討如何在 μ -split 路面上達到安全的煞車控制[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，[9]，這些參考文獻都是將控制器帶入已經進入 μ -split 路面的車子，並無交代任何機制去判斷車子是否從一般路面進入 μ -split 路面，若無任何機制告知控制器在路面切換的瞬間切換控制律，車子會因為左右兩邊輪胎-路面摩擦係數不一樣而產生偏移角度 (yaw angle)，車子可能因此開始打轉，或者在駕駛無法控制的情況下偏離到其他車道去，產生危安事故。因此如何偵測 μ -split 路面是一個很重要的問題。已經有許多文獻提出用影像處理技術觀測路面狀況[18]，[19]，但這樣一來開發成本相對會提高。因此，我們將利用系統狀態及動態估測出車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係，並根據估測值以及車子左右兩側的滑移率設計出一個路面觀測器，路面觀測器的主要功能有兩種：

1. 車子煞車過程中，偵測煞車路面是否有變換。
2. 車子煞車過程中煞車路面變換時，判斷新的煞車路面為何種路面。

在 3.1 裡我們利用 2.3 裡的車輛動態方程式以及最小二乘方法(Least squares method)，估測出車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係，在 3.2 裡我們會解說如何從估測值偵測煞車路面是否有變換。另外在 3.3，我們設計出一套路面歸納法，藉由路面演算法，在煞車路面變換時，路面觀測器能立即判斷煞車路面的變換並且判斷新的煞車路面為何種路面，進而告知控制器切換控制律，使車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數恢復一致。

3.1 利用最小二乘方法估測車輛兩側的輪胎-路面摩擦係數

我們首先用車輛動態的三個方程式 (2.13)、(2.15)、(2.16) 推導出一個超定的 (Overdetermined) 線性等式，推導過程如下：

$$\begin{aligned}
 I_{zz} \cdot \dot{\Omega} &= (-R_{fl} \cdot s\delta_{sat} + L_{fl} \cdot c\delta_{sat}) \cdot l_1 + (-R_{fr} \cdot s\delta_{sat} + L_{fr} \cdot c\delta_{sat}) \cdot l_1 + \\
 &\quad (-R_{fl} \cdot c\delta_{sat} - L_{fl} \cdot s\delta_{sat}) \cdot l_3 + (R_{fr} \cdot c\delta_{sat} + L_{fr} \cdot s\delta_{sat}) \cdot l_3 + \\
 &\quad (-R_{rl} \cdot l_3 - L_{rl} \cdot l_2) + (R_{rr} \cdot l_3 - L_{rr} \cdot l_2) \\
 &= (L_{fl} + L_{fr}) \cdot c\delta_{sat} \cdot l_1 + (-L_{fl} + L_{fr}) \cdot s\delta_{sat} \cdot l_3 - (L_{rl} + L_{rr}) \cdot l_2 - \\
 &\quad (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot R_{fl} + (c\delta_{sat} \cdot l_3 - s\delta_{sat} \cdot l_1) \cdot R_{fr} - R_{rl} \cdot l_3 + R_{rr} \cdot l_3
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 F_x &= (-R_{fl} \cdot c\delta_{sat} - L_{fl} \cdot s\delta_{sat}) + (-R_{fr} \cdot c\delta_{sat} - L_{fr} \cdot s\delta_{sat}) - R_{rl} - R_{rr} \\
 &= -(L_{fl} + L_{fr}) \cdot s\delta_{sat} - R_{fl} \cdot c\delta_{sat} - R_{fr} \cdot s\delta_{sat} - R_{rl} - R_{rr}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 F_y &= (-R_{fl} \cdot s\delta_{sat} + L_{fl} \cdot c\delta_{sat}) + (-R_{fr} \cdot s\delta_{sat} - L_{fr} \cdot c\delta_{sat}) + L_{rl} + L_{rr} \\
 &= (L_{fl} - L_{fr}) \cdot c\delta_{sat} + L_{rl} + L_{rr} - R_{fl} \cdot s\delta_{sat} - R_{fr} \cdot s\delta_{sat}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

因為 $R_\alpha = \mu_\alpha N_\alpha$, $\alpha = fl, fr, rr, rl$ ，並且車子同一側的前後輪胎-路面摩擦係數相等 $\mu_{fl} = \mu_{rl} = \mu_l$, $\mu_{fr} = \mu_{rr} = \mu_r$ ，因此我們可再將上面的三個等式化簡如下：

$$\begin{aligned}
 I_{zz} \cdot \dot{\Omega} &= (L_{fl} + L_{fr}) \cdot c\delta_{sat} \cdot l_1 + (-L_{fl} + L_{fr}) \cdot s\delta_{sat} \cdot l_3 - (L_{rl} + L_{rr}) \cdot l_2 \\
 &\quad + [(s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot N_{fl} - l_3 \cdot N_{rl}] \cdot \mu_l + [(c\delta_{sat} \cdot l_3 - s\delta_{sat} \cdot l_1) \cdot N_{fr} + l_3 \cdot N_{rr}] \cdot \mu_r
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$F_x = -(L_{fl} + L_{fr}) \cdot s\delta_{sat} - (c\delta_{sat} \cdot N_{fl} + N_{rl}) \cdot \mu_l - (s\delta_{sat} \cdot N_{fr} + N_{rr}) \cdot \mu_r \tag{3.5}$$

$$F_y = (L_{fl} - L_{fr}) \cdot c\delta_{sat} + L_{rl} + L_{rr} - s\delta_{sat} \cdot N_{fl} \cdot \mu_l - s\delta_{sat} \cdot N_{fr} \cdot \mu_r \tag{3.6}$$

我們再將 (3.4)、(3.5)、(3.6) 整理成一個矩陣等式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_1(\mathbf{x}) \\ J_2(\mathbf{x}) \\ J_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}(\mathbf{x}) & K_{12}(\mathbf{x}) \\ K_{21}(\mathbf{x}) & K_{22}(\mathbf{x}) \\ K_{31}(\mathbf{x}) & K_{32}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_l \\ \mu_r \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} \mu_l \\ \mu_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$J_1(\mathbf{x}) = \left[(L_{fl} + L_{fr}) \cdot c\delta_{sat} \cdot l_1 + (-L_{fl} + L_{fr}) \cdot s\delta_{sat} \cdot l_3 - (L_{rl} + L_{rr}) \cdot l_2 \right] / I_{zz} \quad (3.8)$$

$$J_2(\mathbf{x}) = -(L_{fl} + L_{fr}) \cdot s\delta_{sat} \quad (3.9)$$

$$J_3(\mathbf{x}) = (L_{fl} - L_{fr}) \cdot c\delta_{sat} + L_{rl} + L_{rr} \quad (3.10)$$

$$K_{11}(\mathbf{x}) = \left[-(s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot N_{fl} - l_3 \cdot N_{rl} \right] / I_{zz} \quad (3.11)$$

$$K_{12}(\mathbf{x}) = \left[(c\delta_{sat} \cdot l_3 - s\delta_{sat} \cdot l_1) \cdot N_{fr} + l_3 \cdot N_{rr} \right] / I_{zz} \quad (3.12)$$

$$K_{21}(\mathbf{x}) = -c\delta_{sat} \cdot N_{fl} - N_{rl} \quad (3.13)$$

$$K_{22}(\mathbf{x}) = -s\delta_{sat} \cdot N_{fr} - N_{rr} \quad (3.14)$$

$$K_{31}(\mathbf{x}) = -s\delta_{sat} \cdot N_{fl} \quad (3.15)$$

$$K_{32}(\mathbf{x}) = -s\delta_{sat} \cdot N_{fr} \quad (3.16)$$

矩陣等式 (3.7) 可轉成如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} - J_1(\mathbf{x}) \\ F_x - J_2(\mathbf{x}) \\ F_y - J_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(\mathbf{x}) & K_{12}(\mathbf{x}) \\ K_{21}(\mathbf{x}) & K_{22}(\mathbf{x}) \\ K_{31}(\mathbf{x}) & K_{32}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_l \\ \mu_r \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

矩陣 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ 的每個矩陣位元可從車輛的狀態 \mathbf{x} 求得， $\dot{\Omega}$ 的數值可以從陀螺儀得知[20]；從 (3.18)、(3.19) 裡，我們可由加速感測器得知 \dot{V}_x 以及 \dot{V}_y [21]，[22]，進而得知 F_x 及 F_y 的數值。

$$\dot{V}_x = F_x/m + \Omega \cdot V_y \Rightarrow F_x = m \cdot (\dot{V}_x - \Omega \cdot V_y) \quad (3.18)$$

$$\dot{V}_y = F_y/m - \Omega \cdot V_x \Rightarrow F_y = m \cdot (\dot{V}_y + \Omega \cdot V_x) \quad (3.19)$$

公式 (3.17) 即為一個超定的線性等式，我們用最小二乘方法求得近似 μ_l 及 μ_r 的估測值 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ ，公式如下：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}_l \\ \hat{\mu}_r \end{bmatrix} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \begin{bmatrix} \dot{\Omega} - J_1(\mathbf{x}) \\ F_x - J_2(\mathbf{x}) \\ F_y - J_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

我們用 Matlab 模擬，比較實際摩擦係數 μ_l 、 μ_r 與估測的摩擦係數 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ ，誤差值約在 0.001 以內。

3.2 利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 偵測煞車路面是否變換

接下來我們利用 (3.20) 求得的 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ ，偵測煞車路面是否變換。為了閱讀的方便，在後面的內容中，我們有以下的定義：

- 煞車路面變換前的路面定義為路面 A，變換後的路面定義為路面 B。
- 以[左側,右側]表示煞車路面的左右側路面狀況 (舉例：[乾地,乾地]表示路面左右兩側皆為乾地，[濕地,乾地]表示左側為溼地，右側為乾地的 μ -split 路面)。

首先我們假設車子在控制器的調整下，在路面 A 的煞車中左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等，意即 $\mu_l = \mu_r$ 。我們以煞車路面從[乾地,乾地]變換為[濕地,乾地]為例，介紹如何利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 偵測煞車路面是否變換。在[乾地,乾地]路面下

煞車，我們利用控制器調整輪胎轉速，將車身左右兩側滑移率調整到 λ_{dd} ，意即 $\lambda_l = \lambda_r = \lambda_{dd}$ ，此時左右兩側的輪胎-路面摩擦係數為 μ_{dd} ，也代表車子獲得最大煞車效果，如圖 3.1 所示。當車子從[乾地,乾地]進入[濕地,乾地]的瞬間，因為左側輪胎滑移率仍維持在 λ_{dd} ，但此時左側路面為溼地，因此左側輪胎-路面摩擦係數從原本的 μ_{dd} 下降到 μ_{wd} ，用布克哈特輪胎模型解釋則如圖 3.2 所示。因為 $\mu_l = \mu_{wd} = 0.7364$ ， $\mu_r = \mu_{dd} = 1.069$ ，左右兩側輪胎-路面摩擦係數有一明顯的誤差值 $\mu_r - \mu_l = 0.3326$ ，這個誤差值使得車身左右兩側的抓地力不同，將會使得車身產生順時針的打轉，並往車道的右邊偏移。因此，當左右兩側輪胎-路面摩擦係數不一樣，意即 $\mu_l \neq \mu_r$ ，我們可以判斷煞車路面已經變換。我們可以用 3.1 節的方法，求得近似 μ_l 和 μ_r 的數值， $\hat{\mu}_l = \mu_l$ 、 $\hat{\mu}_r = \mu_r$ ，來判斷煞車路面是否變換。

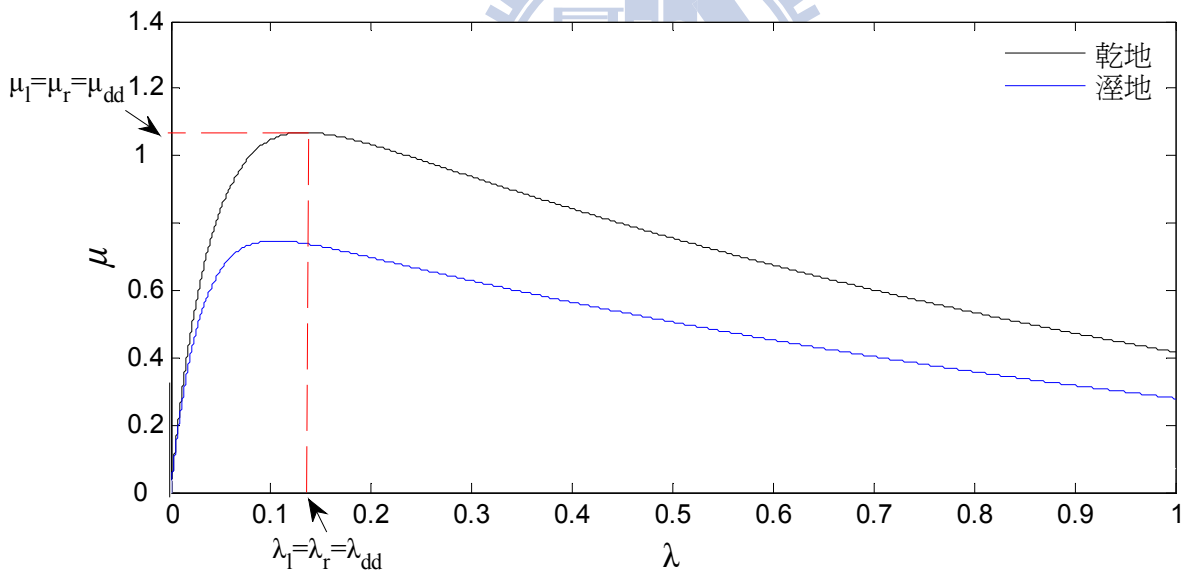


圖 3.1 煞車路面為[乾地,乾地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力

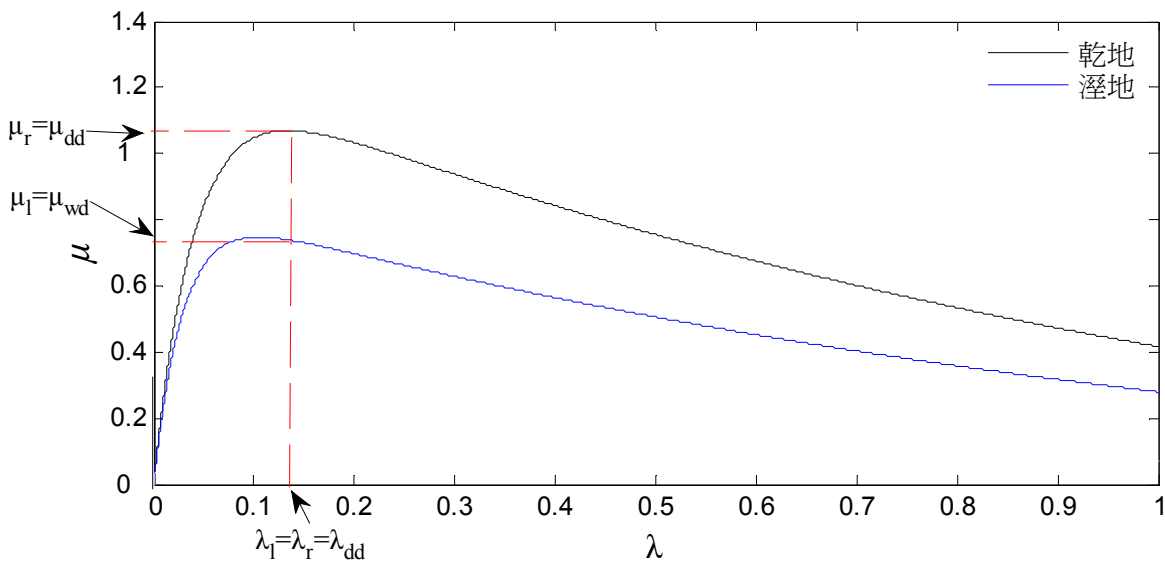


圖 3.2 煞車路面由[乾地,乾地]變成[溼地,乾地]的瞬間，左側的輪胎-路面摩擦力

3.3 利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 判斷新的煞車路面

在得知煞車路面變換後，接下來必須判斷新的煞車路面為何種路面。在這裡我們設計一套演算法，藉由演算法，我們能在煞車路面變換時立即判斷新煞車路面的種類。我們考慮的路面有乾地、溼地以及雪地，加上車身左右兩側的因素，路面的組合共有 9 種，如表 3.1 所示：

表 3.1 煞車路面的種類

		右側		
		乾地	溼地	雪地
左側	乾地	[乾地,乾地]	[乾地,溼地]	[乾地,雪地]
	溼地	[溼地,乾地]	[溼地,溼地]	[溼地,雪地]
	雪地	[雪地,乾地]	[雪地,溼地]	[雪地,雪地]

演算法的判斷依據有六個數值，分別是車子進入路面 B 瞬間的兩側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ ，車子進入路面 B 前的兩側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}'_l$ 、 $\hat{\mu}'_r$ ，以及車子左右兩側的滑移率 λ_l 、 λ_r 。

演算法分為兩個步驟，步驟如下，步驟一、二分別會在 3.3.1 及 3.3.2 裡討論。

步驟一：藉由 $\hat{\mu}'_l$ 、 $\hat{\mu}'_r$ 、 λ_l 、 λ_r 來判斷路面 A 為何種路面

步驟二：得知路面 A 的種類後，藉由 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 、 $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l}$ 、 $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r}$ 判斷路面 B 為何種路面。

3.3.1 利用 $\hat{\mu}'_l$ 、 $\hat{\mu}'_r$ 、 λ_l 、 λ_r 判斷路面 A 的種類

路面 A 的種類如表 3.1 所示共有 9 種，我們假設在控制器的調整下，車子在路面 A 的煞車中左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等。倘若路面 A 為一般路面，控制目的為煞車中獲得最大煞車效果，以[乾地,乾地]為例，我們將兩側的滑移率調至 λ_{dd} ，此時左右兩側的輪胎-路面摩擦係數為 μ_{dd} 並獲得最大煞車效果，如圖 3.3 所示；若路面 A 為 μ -split 路面，煞車控制首要目的為左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等，再求最大煞車效果，以[乾地,溼地]為例，在溼地一側的滑移率需調至 λ_{ww} ，而乾地一側為了得到相同的輪胎-路面摩擦係數，必須將滑移率降至 λ_{dw} ，此時車身兩側的摩擦係數皆為 μ_{ww} ，如圖 3.3 所示。

從上述我們可知，當路面 A 為 μ -split 路面時，兩側的輪胎-路面摩擦係數皆需調整至抓地力較差那一側能獲得的最大輪胎-路面摩擦係數，因為此時左右兩側輪胎-路面摩擦係數相等，我們定義 $\hat{\mu}'_\alpha = \hat{\mu}'_l = \hat{\mu}'_r$ 。我們可以從 $\hat{\mu}'_\alpha$ 的數值大致推測出路面 A 的種類，我們首先歸納出 3 個可能性群組：

$$\hat{\mu}'_\alpha = \mu_{dd} \Rightarrow [\text{乾地,乾地}]$$

$$\hat{\mu}'_\alpha = \mu_{ww} \Rightarrow [\text{溼地,溼地}], [\text{溼地,乾地}], [\text{乾地,溼地}]$$

$$\hat{\mu}'_\alpha = \mu_{ss} \Rightarrow [\text{雪地,雪地}], [\text{乾地,雪地}], [\text{溼地,雪地}], [\text{雪地,乾地}], [\text{雪地,溼地}]$$

在 2.2 節裡我們介紹到，隨著縱向速度 V_x 的變化， μ_{dd} 、 μ_{ww} 、 μ_{ss} 的數值會有微小的變化，因此我們將條件設的更為彈性，上面的歸納法可整理如下：

$$\hat{\mu}'_\alpha = 1 \sim 1.2 \Rightarrow [\text{乾地,乾地}]$$

$$\hat{\mu}'_\alpha = 0.6 \sim 0.8 \Rightarrow [\text{溼地,溼地}], [\text{溼地,乾地}], [\text{乾地,溼地}]$$

$$\hat{\mu}'_\alpha = 0.1 \sim 0.2 \Rightarrow [\text{雪地,雪地}], [\text{乾地,雪地}], [\text{溼地,雪地}], [\text{雪地,乾地}], [\text{雪地,溼地}]$$

當 $\hat{\mu}'_{\alpha}$ 介於 1~1.2 時，路面 A 只有[乾地,乾地]的可能性。而當 $\hat{\mu}'_{\alpha}$ 介於 0.6~0.8 時，路面 A 的可能性為[溼地,溼地]，[溼地,乾地]，[乾地,溼地]三種，若 $\lambda_l = \lambda_r$ ，則路面 A 為[溼地,溼地]；若 $\lambda_l \neq \lambda_r$ ，則路面 A 為[溼地,乾地]或者[乾地,溼地]，而滑移率數值較小的一側為乾地。以[乾地,溼地]為例，為了使左右兩側輪胎-路面摩擦係數相等，左側滑移率需低於右側滑移率，如圖 3.4 所示。

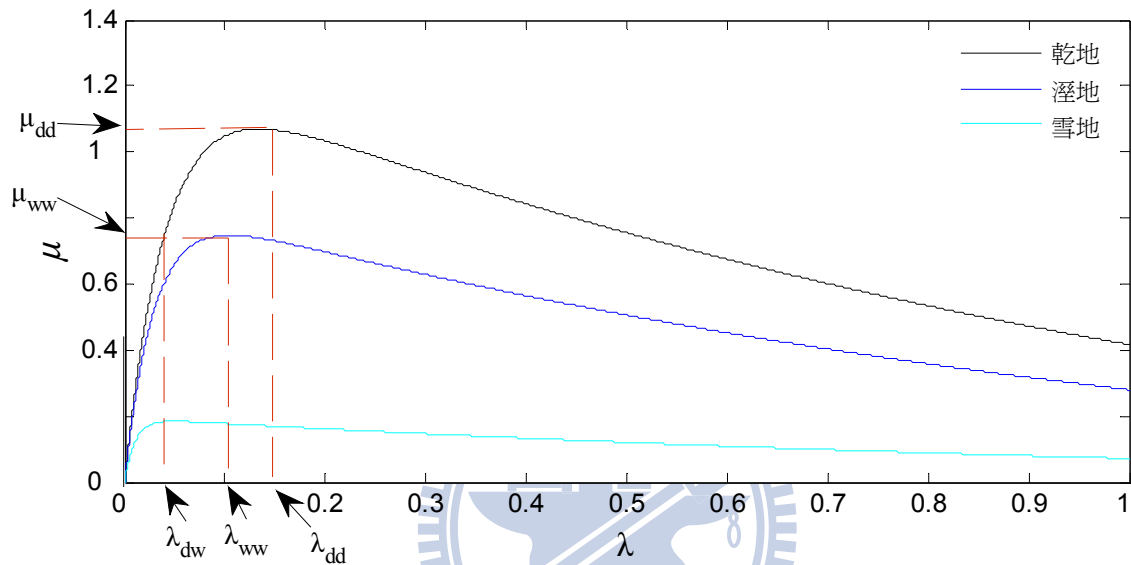


圖 3.3 路面 A 為[乾地,乾地]、[乾地,溼地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力

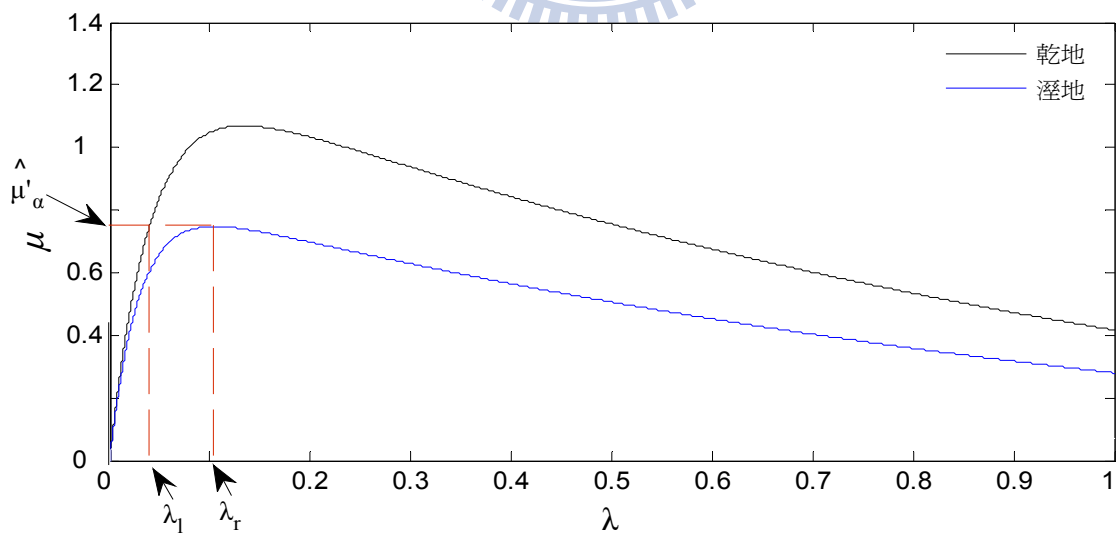


圖 3.4 路面 A 為[乾地,溼地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力

當 $\hat{\mu}'_{\alpha}$ 介於 0.1~0.2 時，路段 A 的可能性為[雪地,雪地]，[雪地,乾地]，[雪地,溼地]，[乾地,雪地]，[溼地,雪地]五種。在此條件下，若 $\lambda_l = \lambda_r$ ，則路段 A 為[雪地,雪地]；若 $\lambda_l \neq \lambda_r$ ，我們由 $\hat{\mu}'_{\alpha}$ 與 $Min(\lambda_l, \lambda_r)$ 的比率來判斷路段 A 的種類。以圖 3.5 舉例，首先我們假設右側為雪地，因此 $Min(\lambda_l, \lambda_r) = \lambda_l$ ，我們利用 $\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l}$ 判斷左側為溼地或乾地。為了更清楚的解說如何從 $\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l}$ 的斜率判斷路面 A 的種類，我們放大圖 3.5 中的灰色粗框部份，如圖 3.6 所示。當右側為雪地，左側在乾地的路面下需將滑移率調至 $\lambda_l = 0.0066$ ， $\hat{\mu}'_l$ 才能最近似 μ_{ss} ；左側若為溼地的話滑移率則要調至 $\lambda_l = 0.0073$ ， $\hat{\mu}'_l$ 才能最近似 μ_{ss} 。因為 λ_l 的數值很小，拿來當判斷的依據略嫌粗略，我們選擇 $\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l}$ 斜率值做為評斷依據，以圖 3.6 為例，當左

側為乾地時， $\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l} = \frac{0.1833}{0.0066} = 27.77$ ；當左側為溼地時， $\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l} = \frac{0.1842}{0.0073} = 25.23$ 。

我們以 $\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l}$ 的斜率作為判斷左側為乾地或溼地的依據。

考慮 μ_{ss} 隨 V_x 不同會有微小變化值，我們做出以下結論：

$\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l} = 27 \sim 28$ ，左側為乾地。

$\frac{\hat{\mu}'_{\alpha}}{\lambda_l} = 25 \sim 26$ ，左側為溼地。

因此，藉由 $\hat{\mu}'_l$ 、 $\hat{\mu}'_r$ 、 λ_l 、 λ_r 我們可判斷路面 A 的種類，我們將其整理成一個演算法流程圖，如圖 3.7 所示。

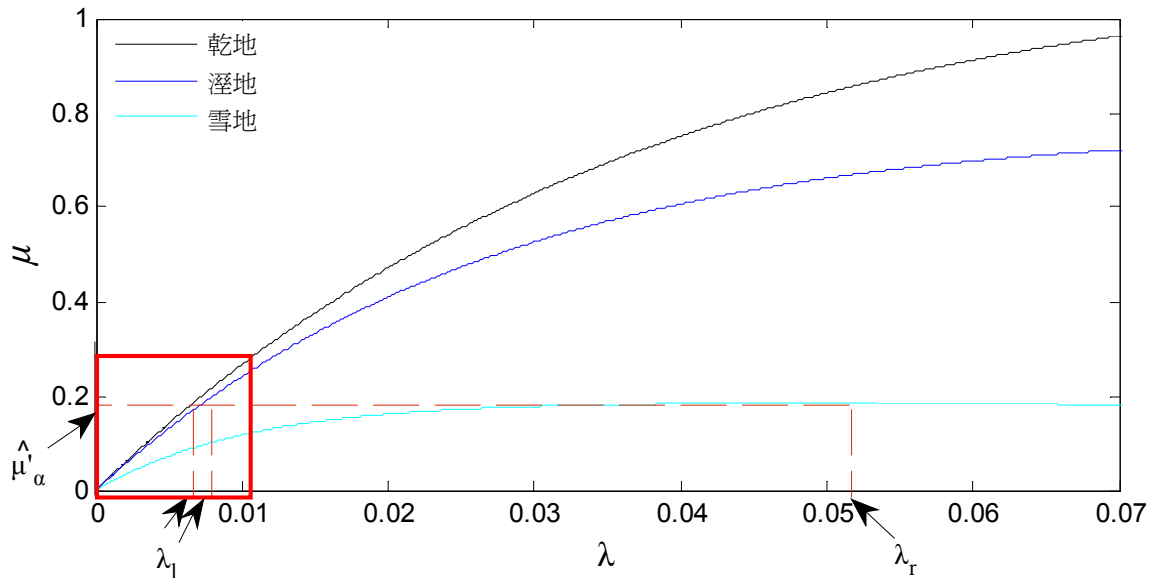


圖 3.5 路面 A 的右側為雪地,左側為乾地或濕地

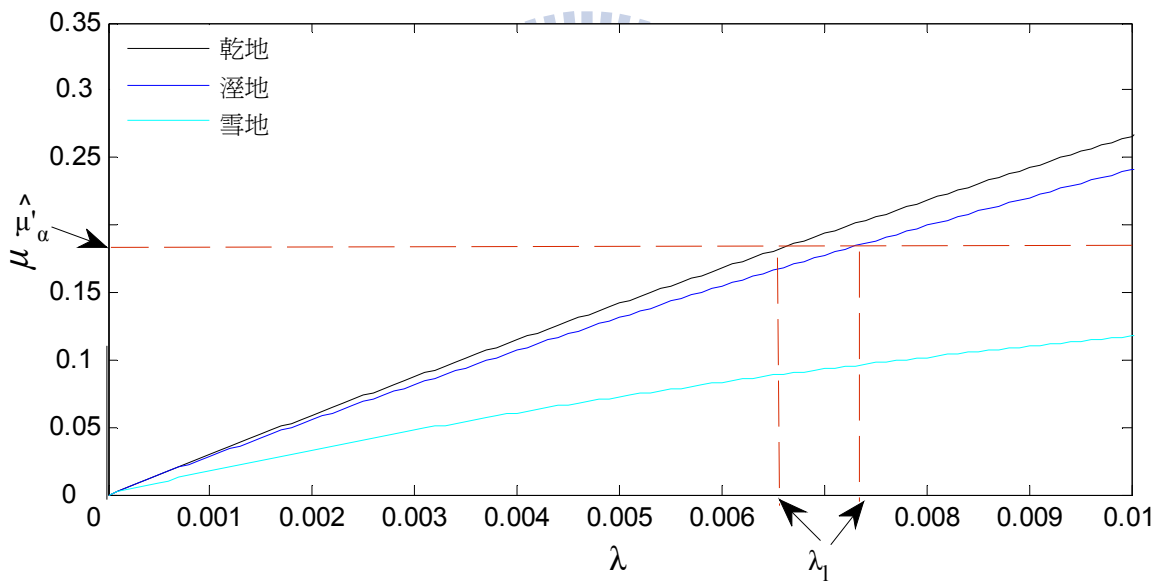


圖 3.6 路面 A 的右側為雪地,左側為乾地或濕地 (紅框放大)

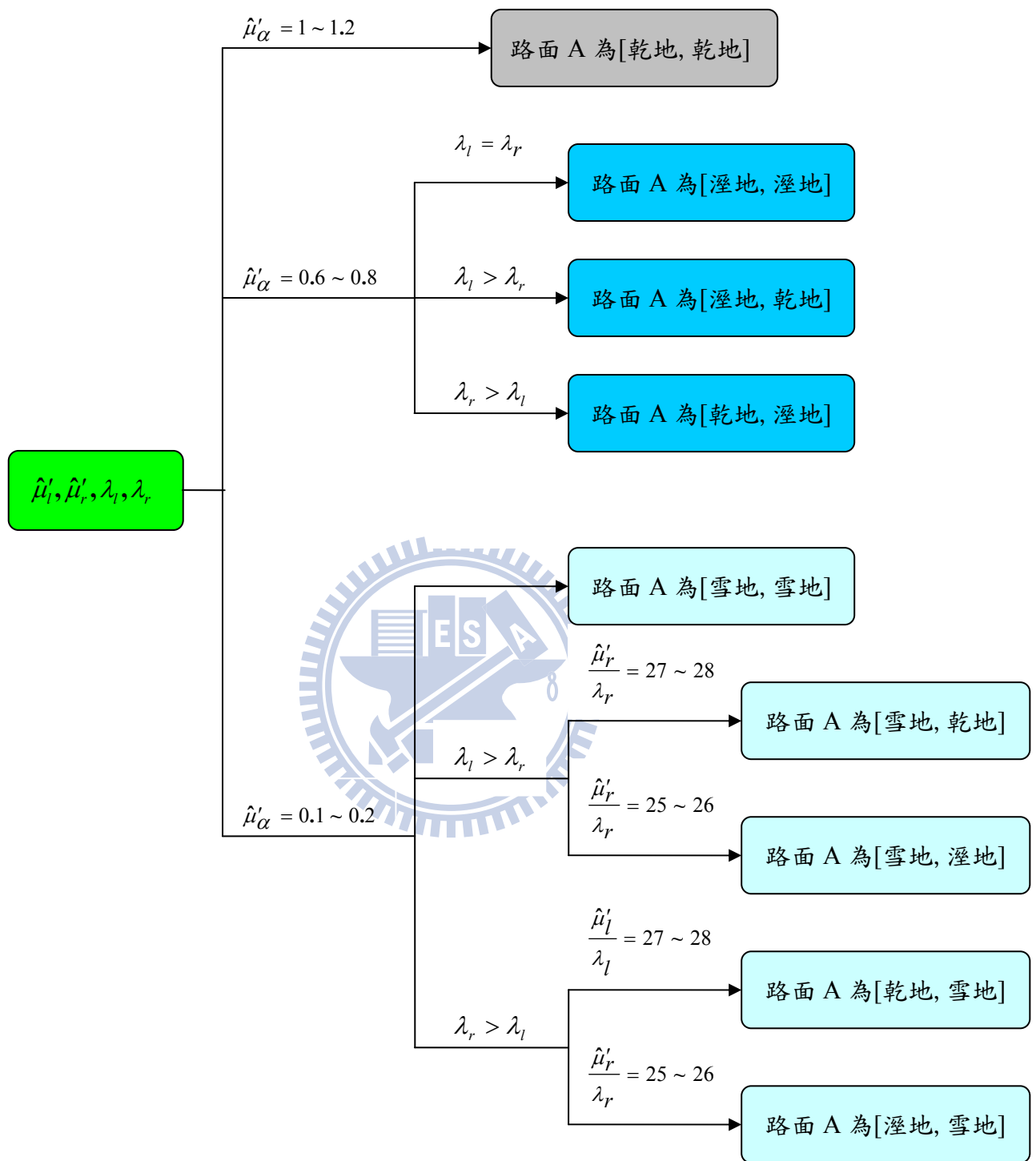


圖 3.7 判斷路面 A 的演算流程圖

3.3.2 利用 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 、 λ_l 、 λ_r 判斷路面 B 的種類

在得知路面 A 的種類後，我們用進入路面 B 瞬間的兩側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 和 $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l}$ 、 $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r}$ 的斜率值判斷路面 B 的種類，路面 B 的種類一樣有 9 種，如表 3.1 所示。根據 3.3.1 的演算法結果，路面 A 的種類可分為一般路面或 μ -split 路面兩類，接下來，我們分別介紹如何在路面 A 為一般路面或 μ -split 路面的時候判斷路面 B。

3.3.2.1 路面 A 為一般路面

我們先考慮路面 A 為一般路面，以[乾地,乾地]的路面來舉例，藉由 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 和 $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l}$ 、 $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r}$ 來判斷路面 B 的種類。車子在進入路面 B 之前，為了在路面 A 達到最大煞車效果，兩側的滑移率調整到 λ_{dd} ，此時車子能得到最大輪胎-路面摩擦係數 μ_{dd} ，如圖 3.8 所示。當車子進入路面 B 的瞬間，兩側的滑移率仍維持在 λ_{dd} ，但輪胎-路面摩擦力會隨著路面變換，藉由 $\mu_l \neq \mu_r$ 可得知車子進入了新的煞車路面。我們觀察 $\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\lambda_\alpha}$ 的斜率值來判斷路面 B 兩側的路面，如圖 3.9 所示。

首先我們來判斷路面 B 的左側路面，若路面 B 的左側為乾地，車子進入路面 B 的瞬間，左側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l = \mu_{dd}$ ， $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} = \frac{\mu_{dd}}{\lambda_{dd}} = \frac{1.069}{0.14} = 7.635$ ；若路面 B 的左側為溼地，車子進入路面 B 的瞬間，左側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l = \mu_{wd}$ ， $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} = \frac{\mu_{wd}}{\lambda_{dd}} = \frac{0.7364}{0.14} = 5.26$ ；若路面 B 的左側為雪地，車子進入路面 B 的瞬間，左側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l = \mu_{sd}$ ， $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} = \frac{\mu_{sd}}{\lambda_{dd}} = \frac{0.1706}{0.14} = 1.217$ 。同樣的方法可用來判斷路面 B 的右側路面。考慮到 $\frac{\mu_{dd}}{\lambda_{dd}}$ 、 $\frac{\mu_{wd}}{\lambda_{dd}}$ 、 $\frac{\mu_{sd}}{\lambda_{dd}}$ 的數值會隨著 V_x 而有些微的變化，我們將判斷的標準設的更為彈性，並得到以下的演算法：

路面 A 為 [乾地,乾地]時，

$$\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} > 7 \Rightarrow \text{路面 B 的左側為乾地}$$

$$7 > \frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} > 5 \Rightarrow \text{路面 B 的左側為溼地}$$

$$2 > \frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} > 1 \Rightarrow \text{路面 B 的左側為雪地}$$

上述的演算法同樣地可判斷路面 B 的右側。當路面 A 為[溼地,溼地]和[雪地,雪地]時，利用上述的斜率判斷法即可得知路面 B 的種類，我們在圖 3.13 會做個總結。

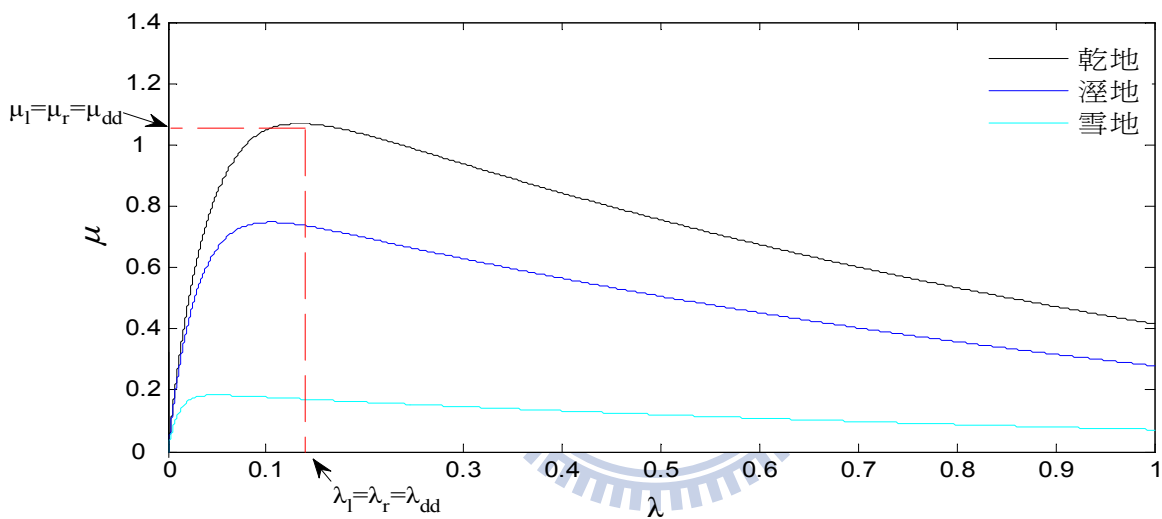


圖 3.8 路面 A 為[乾地,乾地]路面，左右兩側輪胎-路面摩擦力

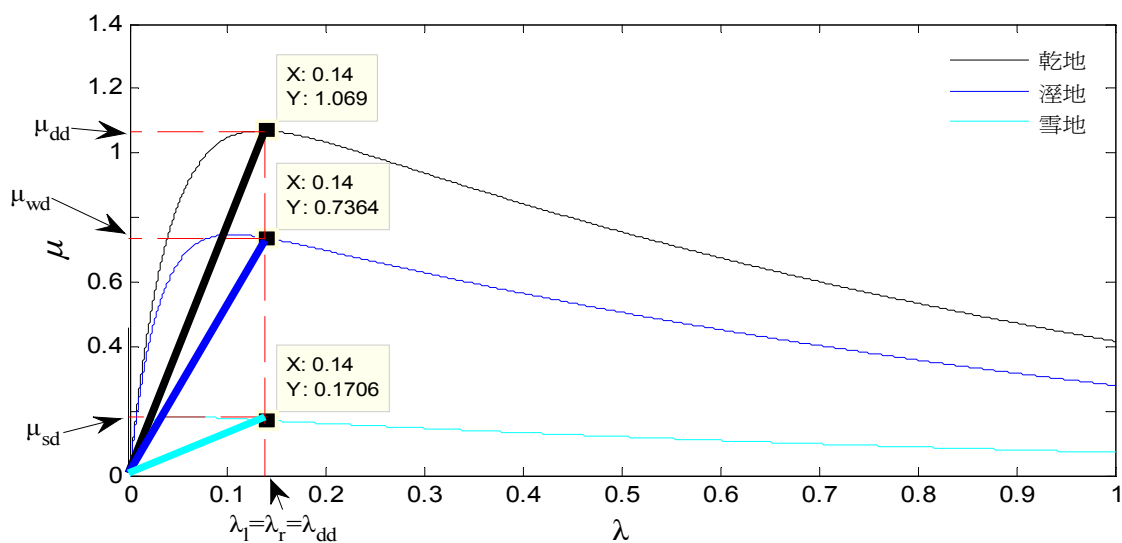


圖 3.9 路面 A 為[乾地,乾地]，路面 B 兩側路面的判斷法

3.3.2.2 路面 A 為 μ -split 路面

現在考慮路面 A 為 μ -split 路面，我們以[溼地,乾地]為例，藉由 $\hat{\mu}_l$ 、 $\hat{\mu}_r$ 和 $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l}$ 、 $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r}$ 來判斷路面 B 的種類。車子進入路面 B 的之前，因車子在路面 A 的左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等 $\mu_l = \mu_r = \mu_{ww}$ ，所以兩側的滑移率分別為 $\lambda_r = \lambda_{dw}$ ， $\lambda_l = \lambda_{ww}$ ，如圖 3.10 所示。

首先我們判斷路面 B 的左側路面。車子再進入路面 B 的瞬間，左側的滑移率仍維持在 λ_{ww} ，但輪胎-路面摩擦力會隨著路面變換，因此 $\mu_l \neq \mu_r$ ，由此可得知車子進入了新的煞車路面。我們觀察 $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l}$ 的斜率值來判斷路段 B 的左側路面，

如圖 3.11 所示。若路面 B 左側為乾地，車子進入路面 B 的瞬間，左側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l = \mu_1$ ， $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} = \frac{\mu_1}{\lambda_{ww}} = \frac{1.054}{0.1047} = 10.066$ ；若路面 B 左側為溼地，車子進入

路面 B 的瞬間，左側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_l = \mu_{ww}$ ， $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} = \frac{\mu_{ww}}{\lambda_{ww}} = \frac{0.7474}{0.1047} = 7.13$ ；

若路面 B 左側為雪地，車子進入路面 B 的瞬間，左側 $\hat{\mu}_l = \mu_2$ ， $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} = \frac{\mu_2}{\lambda_{ww}} = \frac{0.1764}{0.1047} = 1.684$ 。

再來我們判斷路面 B 的右側路面。車子再進入路面 B 的瞬間，右側的滑移率仍維持在 λ_{dw} ，但輪胎-路面摩擦力會隨著路面變換，我們一樣觀察 $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r}$ 的斜率

值來判斷路面 B 右側的路面，如圖 3.12 所示。若路面 B 右側為乾地，車子進入路面 B 的瞬間，右側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_r = \mu_{ww}$ ， $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r} = \frac{\mu_{ww}}{\lambda_{dw}} = \frac{0.7476}{0.0397} = 18.83$ ；

若路面 B 右側為溼地，車子進入路面 B 的瞬間，右側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_r = \mu_3$ ， $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r} = \frac{\mu_3}{\lambda_{dw}} = \frac{0.6049}{0.0397} = 15.236$ ；若路面 B 右側為雪地，車子進入路面 B 的瞬間，右

側輪胎-路面摩擦係數 $\hat{\mu}_r = \mu_4$ ， $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r} = \frac{\mu_4}{\lambda_{dw}} = \frac{0.183}{0.0397} = 4.609$

考慮到 $\frac{\mu_1}{\lambda_{ww}}$ 、 $\frac{\mu_{ww}}{\lambda_{ww}}$ 、 $\frac{\mu_2}{\lambda_{ww}}$ 、 $\frac{\mu_{ww}}{\lambda_{dw}}$ 、 $\frac{\mu_3}{\lambda_{dw}}$ 、 $\frac{\mu_4}{\lambda_{dw}}$ 的數值會隨著 V_x 而有些微的變化，

我們將判斷的標準設的更為彈性，並做出以下的演算法：

當路面 A 為[溼地,乾地]的路面時，

$$\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} > 8.5, \text{ 路面 B 的左側路面為乾地}$$

$$8 > \frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} > 6, \text{ 路面 B 的左側路面為溼地}$$

$$2 > \frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l} > 1, \text{ 路面 B 的左側路面為乾地}$$

$$\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r} > 18, \text{ 路面 B 的右側路面為乾地}$$

$$15.5 > \frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r} > 14.5, \text{ 路面 B 的右側路面為溼地}$$

$$5 > \frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r} > 4, \text{ 路面 B 的右側路面為雪地}$$

上述的演算法，可套用在路面 A 為任意 μ -split 路面上。由 3.3.2 的兩個小節，

我們可整理出一個完整的演算法，此歸納法在得知路面 A 的種類後，藉由 $\hat{\mu}_l$ 、

$\hat{\mu}_r$ 、 $\frac{\hat{\mu}_l}{\lambda_l}$ 、 $\frac{\hat{\mu}_r}{\lambda_r}$ 即可判斷路面 B 的路面，演算法流程圖如圖 3.13、圖 3.14、圖

3.15 所示。



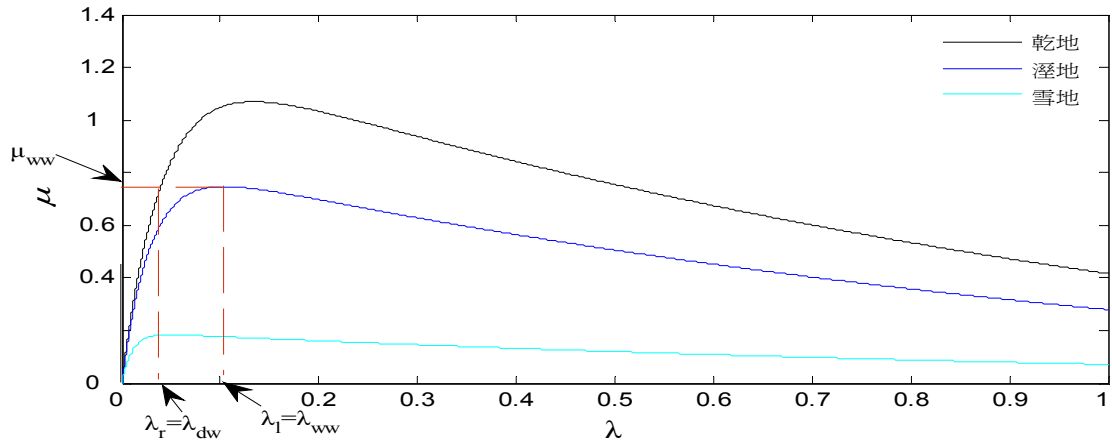


圖 3.10 路面 A 為[溼地,乾地]，左右兩側的輪胎-路面摩擦力

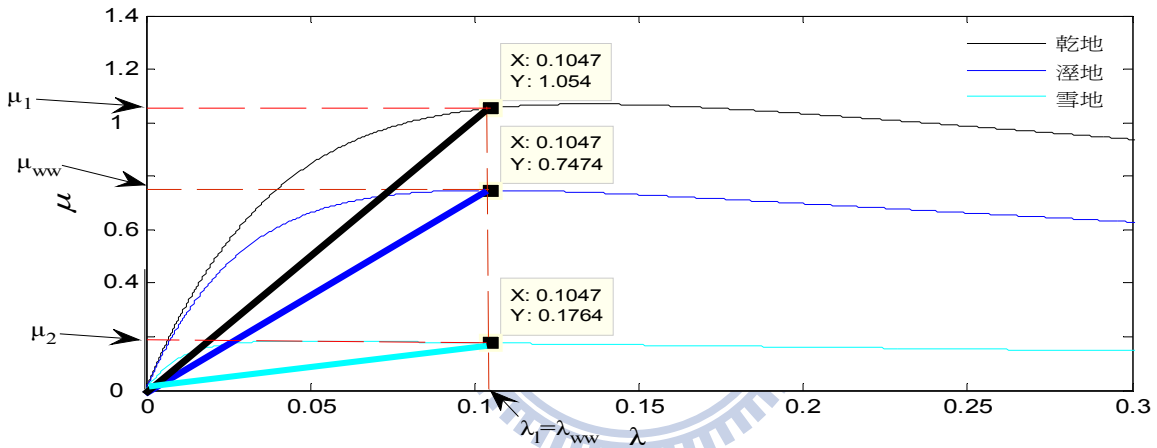


圖 3.11 路面 A 為[溼地,乾地]，路面 B 的左側路面判斷法

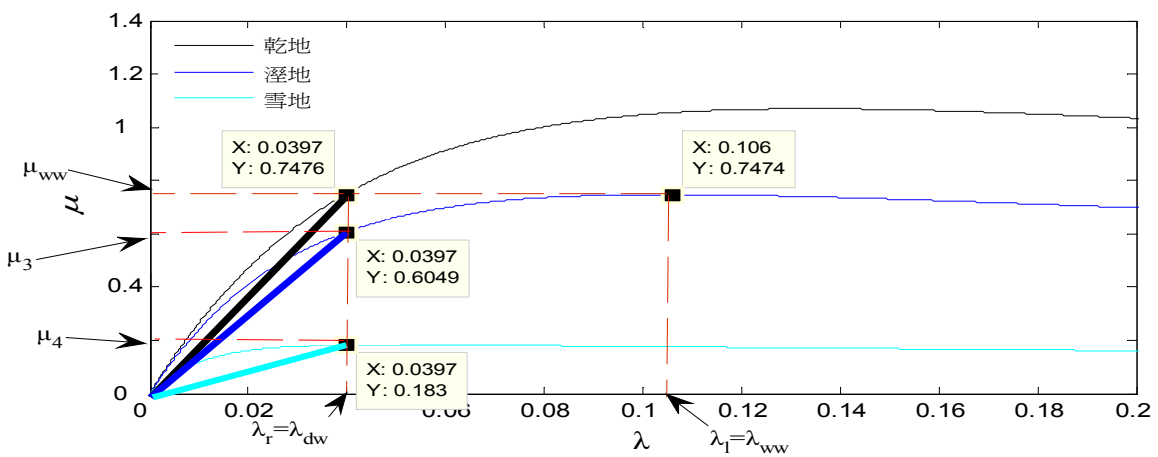


圖 3.12 路面 A 為[溼地,乾地]，路面 B 的右側路面判斷法

路面 A 為一般路面

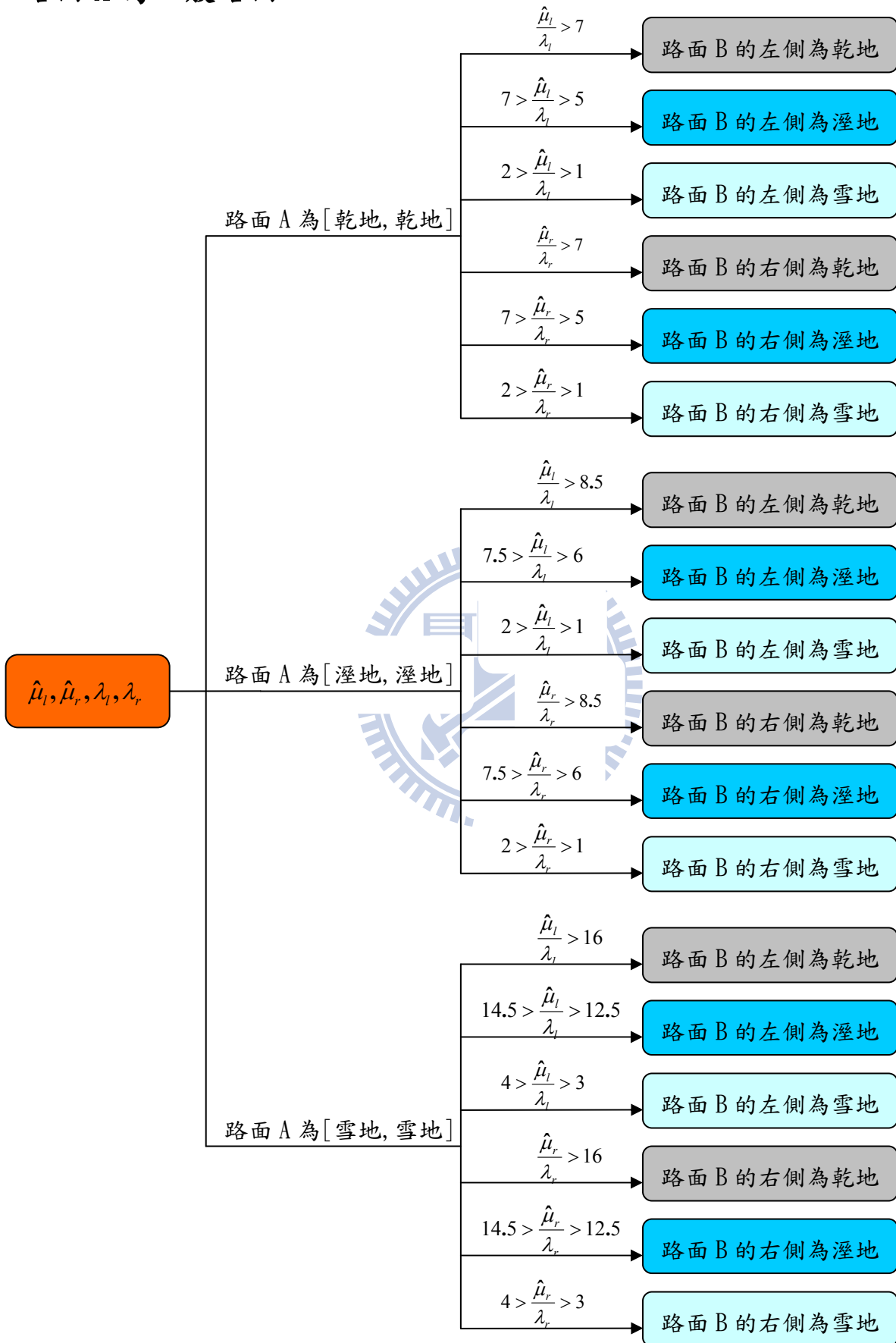


圖 3.13 判斷路面 B 的演算法流程圖 1

路面 A 為 μ -split 路面

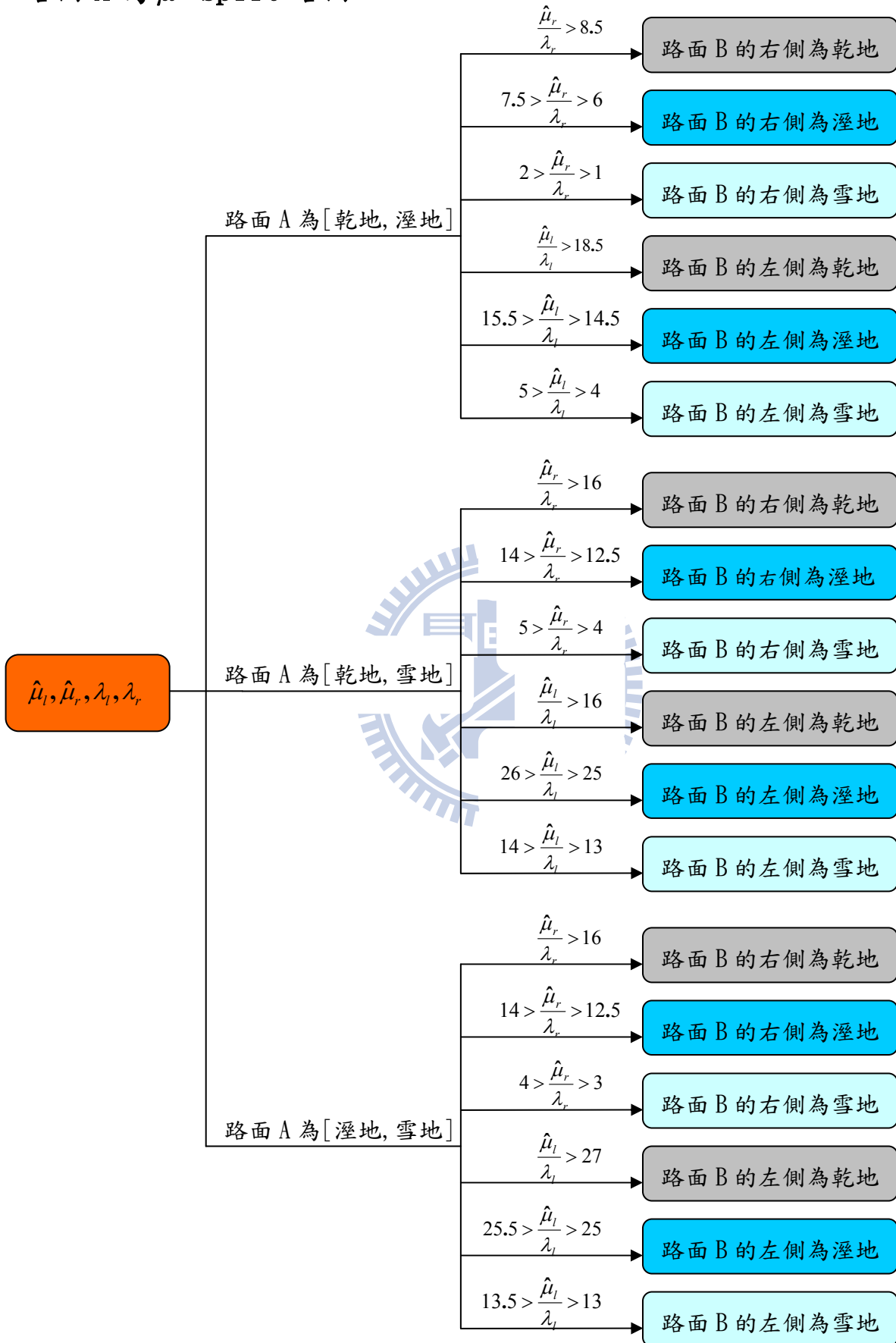


圖 3.14 判斷路面 B 的演算法流程圖 2

路面 A 為 μ -split 路面

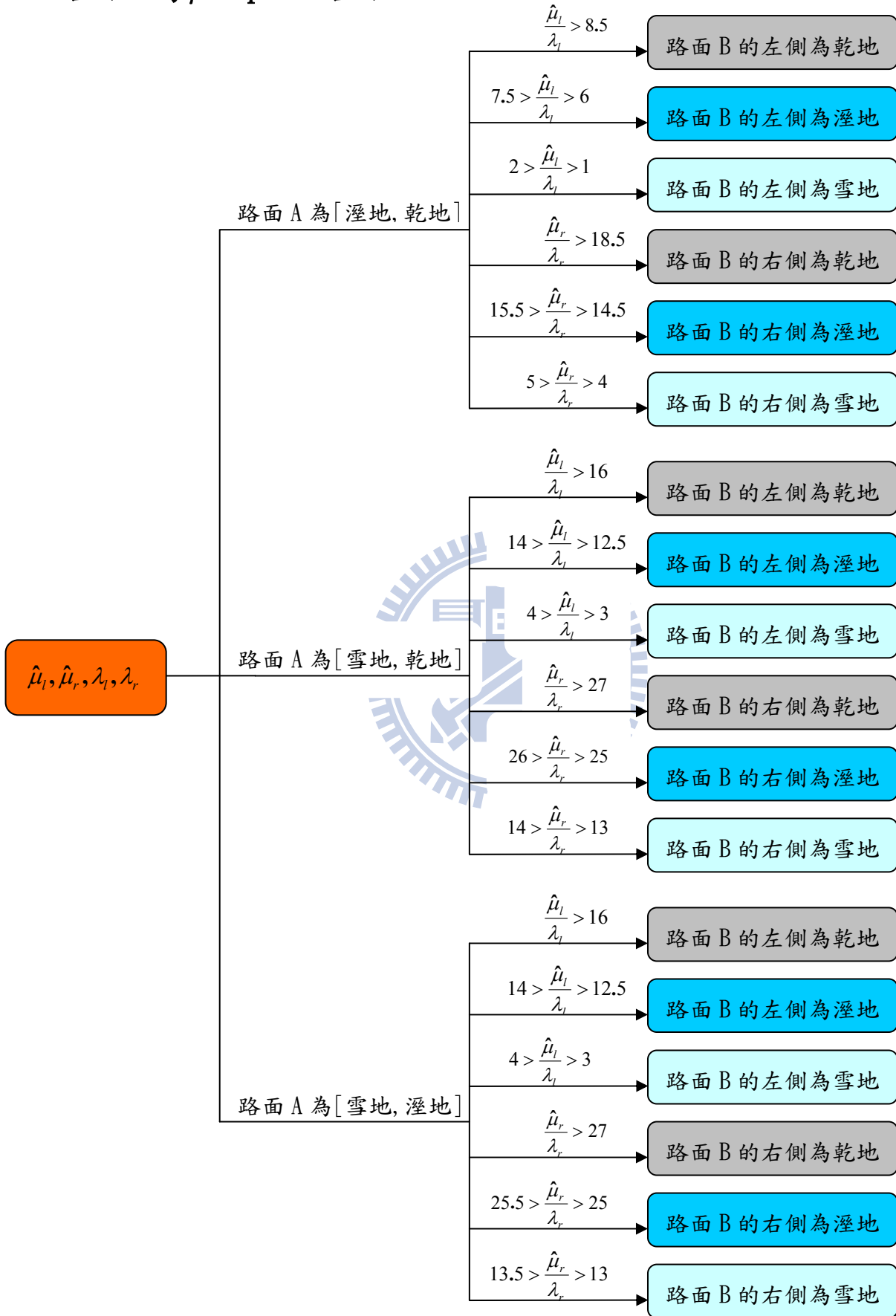


圖 3.15 判斷路面 B 的演算法流程圖 3

第 4 章

應用順滑模控制技術於 μ -split 的煞車控制

4.1 問題描述

車子在 μ -split 路面上煞車時，以[溼地,乾地]為例，如圖 4.1 所示，若車子兩側輪胎轉速一樣，意即滑移率一樣 $\lambda_l = \lambda_r$ ，因為輪胎在溼地的抓地效果較差，位於溼地的左側輪胎-路面摩擦係數 μ_l 會低於右側輪胎-路面摩擦係數，而當 $\mu_l \neq \mu_r$ 時，車子會有順時針方向的偏移率和側向加速度產生，並因此產生打轉或者偏移到其他車道。我們知道在 μ -split 路面下煞車， $\Omega = 0$ 才能防止車子產生打轉或者偏移到其他車道[6]，而當兩側的輪胎-路面摩擦係數一致時 $\mu_l = \mu_r$ ，兩側輪胎-路面的縱向力相等 $R_l = R_r$ ，此時車子的旋轉動能（yaw rotation moment）為零，也將不會產生偏移率，意即 $\Omega = 0$ 。因此，我們嘗試用順滑模控制技術調整車子左右兩側的滑移率 λ_l, λ_r ，使車子在 μ -split 路面煞車中左右兩側輪胎-路面摩擦係數相等，並在此條件下達到煞車距離最短的控制目的。



圖 4.1 μ -split 路面下煞車

4.2 控制律設計

首先我們將 (2.11) – (2.14) 和 (2.27) 的 8 個車輛動態整理成如 (4.1)：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_o(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_o(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (4.1)$$

\mathbf{x} 為車輛狀態變數， $\mathbf{x} = [V_x, V_y, \Omega, \delta, \lambda_{fl}, \lambda_{fr}, \lambda_{rl}, \lambda_{rr}]^T$ ； \mathbf{u} 為控制輸入

$\mathbf{u} = [\delta_s, T_{fl}, T_{fr}, T_{rl}, T_{rr}]^T$ ； $\mathbf{f}_o(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^8$ 以及 $\mathbf{G}_o(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{8 \times 5}$ 為平滑函數且 $\mathbf{f}_o(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，

$(\cdot)^T$ 代表矩陣或向量的轉置。我們選擇偏移率及四個輪胎滑移率為系統輸出

$\mathbf{y} = [\Omega, \lambda_{fl}, \lambda_{fr}, \lambda_{rl}, \lambda_{rr}]^T$ ，並推導出輸入-輸出關係等式 (input-output relation

equation)，推導過程如下：

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{\Omega} = \frac{1}{I_{zz}} & \left[(-R_{fl} \cdot s\delta_{sat} + L_{fl} \cdot c\delta_{sat}) \cdot l_1 + (-R_{fr} \cdot s\delta_{sat} + L_{fr} \cdot c\delta_{sat}) \cdot l_1 \right. \\ & + (-R_{fl} \cdot c\delta_{sat} - L_{fl} \cdot s\delta_{sat}) \cdot l_3 + (R_{fr} \cdot c\delta_{sat} + L_{fr} \cdot s\delta_{sat}) \cdot l_3 \\ & \left. + (-R_{rl} \cdot l_3 - L_{rl} \cdot l_2) + (R_{rr} \cdot l_3 - L_{rr} \cdot l_2) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{\Omega} = f_1(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_s \\ T_{fl} \\ T_{fr} \\ T_{rl} \\ T_{rr} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\lambda}_{fl} = f_2(\mathbf{x}) + g_{22}(\mathbf{x}) \cdot T_{fl} \quad (4.4)$$

$$\dot{y}_3 = \dot{\lambda}_{fr} = f_3(\mathbf{x}) + g_{33}(\mathbf{x}) \cdot T_{fr} \quad (4.5)$$

$$\dot{y}_4 = \dot{\lambda}_{rl} = f_4(\mathbf{x}) + g_{44}(\mathbf{x}) \cdot T_{rl} \quad (4.6)$$

$$\dot{y}_5 = \dot{\lambda}_{rr} = f_5(\mathbf{x}) + g_{55}(\mathbf{x}) \cdot T_{rr} \quad (4.7)$$

$f_1(\mathbf{x}), \dots, f_5(\mathbf{x})$ 以及 $g_{11}(\mathbf{x}), \dots, g_{55}(\mathbf{x})$ 的推導過於冗長，在本篇論文裡我們不贅述，詳細推導過程請參閱後面附錄。

我們再將 (4.3) - (4.7) 式整理成下面的矩陣等式：

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_s \\ T_{fl} \\ T_{fr} \\ T_{rl} \\ T_{rr} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (4.8)$$

(4.8) 為系統輸入-輸出關係等式， $\mathbf{f}: \mathbf{R}^8 \rightarrow \mathbf{R}^5$ 以及 $\mathbf{G}: \mathbf{R}^8 \rightarrow \mathbf{R}^{5 \times 5}$ ，相對階數為 $[2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ 。這裡我們假設 $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 情況下為一個非奇異矩陣。為了達到 $\Omega \rightarrow 0$ 的控制目的，我們可由第三章介紹的路面觀測器得知車子在何種路面下煞車，並根據路面的種類，適當調整四個輪胎的滑移率，使車身兩側輪胎-路面摩擦係數一致，因此我們定義參考輸出 (Reference output) 為 $\mathbf{y}_d = [0 \ \lambda_{fl}^* \ \lambda_{fr}^* \ \lambda_{rl}^* \ \lambda_{rr}^*]^T$ 。接著我們定義輸出誤差為：

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d = \begin{pmatrix} y_1 - y_{1d} \\ y_2 - y_{2d} \\ y_3 - y_{3d} \\ y_4 - y_{4d} \\ y_5 - y_{5d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \lambda_{fl} - \lambda_{fl}^* \\ \lambda_{fr} - \lambda_{fr}^* \\ \lambda_{rl} - \lambda_{rl}^* \\ \lambda_{rr} - \lambda_{rr}^* \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

根據第 2 章順滑模控制設計方式，我們首先需要選取適當的順滑面，使得在順滑平面上的系統輸出最終能達到穩定。在這裡我們選取順滑平面為

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 + a_{11} \cdot e_1 \\ a_{21} \cdot e_2 \\ a_{31} \cdot e_3 \\ a_{41} \cdot e_4 \\ a_{51} \cdot e_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

$a_{11}, \dots, a_{51} > 0$ 。接著我們要設計控制律，使得系統狀態在有限時間內會到達順滑平面而且會持續維持在順滑平面上。根據傳統順滑模控制設計程序，我們選擇

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re} \quad (4.11)$$

\mathbf{u}^{eq} 是為了使系統狀態能持續維持在順滑平面上，即設計控制律使 $\dot{s}_i = 0$ 。因此我們可以得到

$$\mathbf{u}^{eq} = \begin{pmatrix} \delta^{eq} \\ T_{fl}^{eq} \\ T_{fr}^{eq} \\ T_{rl}^{eq} \\ T_{rr}^{eq} \end{pmatrix} = -\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) + a_{11} \cdot \dot{e}_1 \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ f_4(\mathbf{x}) \\ f_5(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

另外一部分的控制律 \mathbf{u}^{re} 是為了讓系統狀態在有限時間內到達順滑平面，參考傳統順滑模控制設計程序，我們可以設計 \mathbf{u}^{re} 為

$$\mathbf{u}^{re} = \begin{pmatrix} \delta^{re} \\ T_{fl}^{re} \\ T_{fr}^{re} \\ T_{rl}^{re} \\ T_{rr}^{re} \end{pmatrix} = -\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \cdot \text{sgn}(s_1) \\ \eta_2 \cdot \text{sgn}(s_2) \\ \eta_3 \cdot \text{sgn}(s_3) \\ \eta_4 \cdot \text{sgn}(s_4) \\ \eta_5 \cdot \text{sgn}(s_5) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$s_i^T \dot{s}_i \leq -\eta_i |s_i| \quad (4.14)$$

η_i 為大於零的常數，根據 (4.14) 我們可以保證系統狀態在有限時間內會到達
 順滑平面 [15]。為防止切跳現象 (chatter)，當 $|s_i| \leq \varepsilon$ ，我們將 (4.13) 裡的 $\mathbf{sgn}(s_i)$
 替換成 $\frac{s_i}{\varepsilon}$ 。 $\varepsilon > 0$ 為邊界層寬度 (boundary layer width)。將 (4.12)、(4.13)
 帶入 (4.11)，得到最後完整的控制律為：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re} = -\mathbf{G}(\mathbf{x})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) + a_{11} \cdot \dot{e}_1 + \eta_1 \cdot \mathbf{sgn}(s_1) \\ f_2(\mathbf{x}) + \eta_2 \cdot \mathbf{sgn}(s_2) \\ f_3(\mathbf{x}) + \eta_3 \cdot \mathbf{sgn}(s_3) \\ f_4(\mathbf{x}) + \eta_4 \cdot \mathbf{sgn}(s_4) \\ f_5(\mathbf{x}) + \eta_5 \cdot \mathbf{sgn}(s_5) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

4.3 應用順滑模控制技術於 μ -split 煞車控制

在得到 (4.15) 的控制律後，接下來我們應用 SMC 於 μ -split 的煞車控制模
 擬，本篇的模擬分為 μ -split 路面煞車模擬和三段式路面煞車模擬兩部分。

首先，為了證明在 μ -split 路面下煞車中，車子的左右兩側的輪胎-路面摩
 擦係數一致時， $\Omega \rightarrow 0$ ，在 μ -split 路面煞車模擬中，我們模擬車子在 [溼地, 乾
 地] 的 μ -split 路面下煞車，並利用 4.2 節裡介紹的 SMC，調整左右兩側的滑移
 率，使車子在煞車過程中 $\mu_l = \mu_r$ ，並觀察模擬結果；接著，我們同樣利用 SMC
 調整車子左右兩側的滑移率，使車子在煞車過程中 $\lambda_l = \lambda_r$ 但 $\mu_l \neq \mu_r$ ，並將模擬
 結果與上述的模擬結果進行比較。

在三段式路面煞車模擬中，為了驗證第三章我們設計出來的路面觀測器能
 在車子煞車過程中即時判斷路面的變換並且判斷新煞車路面的種類，我們結合
 SMC 與路面觀測器，模擬車子在一條三段式的路面上煞車，路段的種類依序為

[乾地, 乾地], [溼地, 乾地], [雪地, 溼地]。我們從模擬結果觀察路面觀測器是否能立刻判斷煞車路面的變換以及判斷新煞車路面的種類，並告知控制器切換至適合控制律，以達到 μ -split 路面下安全的煞車控制目的。

4.3.1 μ -split 路面煞車模擬

在 μ -split 路面煞車模擬中，我們的模擬環境為 [溼地, 乾地] 的煞車路面，如圖 4.2 所示。為了使車子在煞車過程中左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等，並在此條件下煞車距離最短，我們必須將左右兩側的輪胎-路面摩擦係數調整至抓地效果較差那一側所能獲得的最大輪胎-路面摩擦係數，在此模擬環境中，溼地為抓地效果較差的一側，根據 2.2 節裡的介紹，輪胎在溼地路面煞車下能獲得的最大輪胎-路面摩擦係數為 μ_{ww} ，而此時的滑移率為 λ_{ww} ，而如果輪胎在乾地路面下想獲得同樣的輪胎-路面摩擦係數，則滑移率需調整至 λ_{dw} 。因此，我們利用 SMC 將左右兩側的滑移率分別調整至 $\lambda_l = \lambda_{ww}$ ， $\lambda_r = \lambda_{dw}$ ，此時兩側的輪胎-路面摩擦係數皆為 μ_{ww} ，而為了達到此目的，我們將參考輸出設定成 $\mathbf{y}_d = [0 \ \lambda_{fl}^* \ \lambda_{fr}^* \ \lambda_{rl}^* \ \lambda_{rr}^*]^T = [0 \ \lambda_{ww} \ \lambda_{dw} \ \lambda_{ww} \ \lambda_{dw}]^T$ ，進行煞車中 $\mu_l = \mu_r$ 的模擬，並觀察模擬結果。接著，為了進行比較，在同樣的模擬環境中，我們將車子左右兩側的滑移率調整至 $\lambda_l = \lambda_r = \lambda_{dd}$ ，此時乾地一側的輪胎-路面摩擦係數可獲得最大輪胎-路面摩擦係數 μ_{dd} ，但溼地一側的輪胎-路面摩擦係數則為 μ_{wd} ，且 $\mu_{dd} \neq \mu_{wd}$ ，如圖 4.3 所示。我們同樣利用 SMC 將左右兩側的滑移率皆調整至 λ_{dd} ，進行煞車中 $\mu_l \neq \mu_r$ 的模擬，參考輸出設定為 $\mathbf{y}_d = [0 \ \lambda_{fl}^* \ \lambda_{fr}^* \ \lambda_{rl}^* \ \lambda_{rr}^*]^T = [0 \ \lambda_{dd} \ \lambda_{dd} \ \lambda_{dd} \ \lambda_{dd}]^T$ ，我們將模擬結果並與上述的模擬結果進行分析比較。



圖 4.2 μ -split 煞車路面

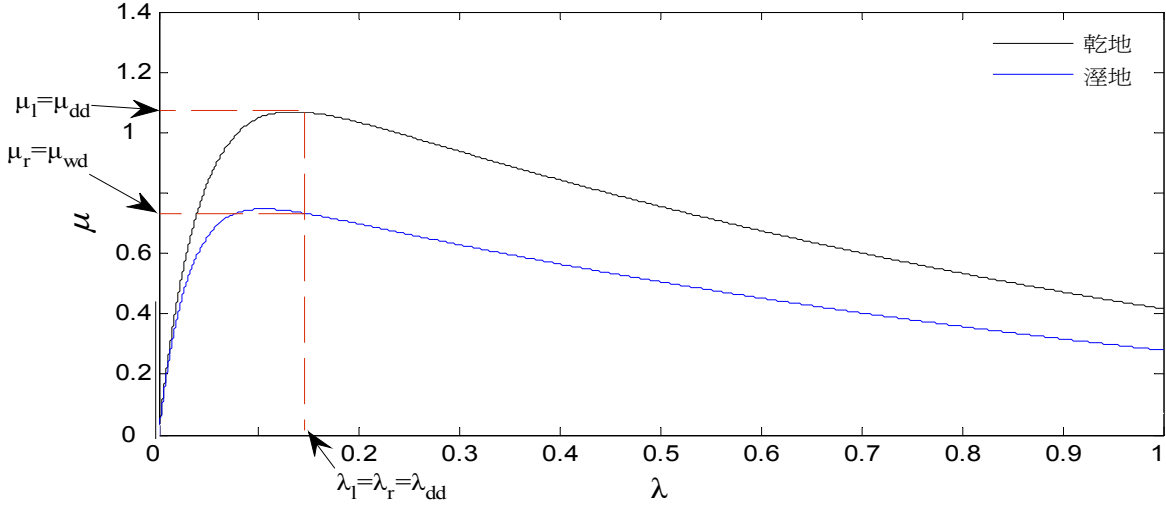


圖 4.3 μ -split 路面煞車模擬中， $\lambda_l = \lambda_r = \lambda_{dd}$ 時左右兩側的輪胎-路面摩擦力

在本節模擬，車輛狀態變數 $\mathbf{x} = [V_x, V_y, \Omega, \delta, \lambda_{fl}, \lambda_{fr}, \lambda_{rl}, \lambda_{rr}]^T$ ，系統輸出

$\mathbf{y} = [\Omega, \lambda_{fl}, \lambda_{fr}, \lambda_{rl}, \lambda_{rr}]^T$ ，參考輸出 $\mathbf{y}_d = [0, \lambda_{fl}^*, \lambda_{fr}^*, \lambda_{rl}^*, \lambda_{rr}^*]^T$ ，輸出誤差

$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d = [\Omega, \lambda_{fl} - \lambda_{fl}^*, \lambda_{fr} - \lambda_{fr}^*, \lambda_{rl} - \lambda_{rl}^*, \lambda_{rr} - \lambda_{rr}^*]^T$ ，控制輸入 $\mathbf{u} = [\delta_s, T_{fl}, T_{fr}, T_{rl}, T_{rr}]^T$ 。

車輛模型參數來自 [3] 和 [16]，分別為 $m = 1300\text{kg}$ ， $g = 9.8\text{N/kg}$ ，

$I_{zz} = 1620\text{kgm}^2$ ， $l_1 = 1\text{m}$ ， $l_2 = 1.45\text{m}$ ， $l_3 = 0.725\text{m}$ ，

$C_{fl} = C_{fr} = C_{rl} = C_{rr} = 3850\text{N/rad}$ ， $R_w = 0.33\text{m}$ ， $J_w = 2.03\text{kgm}^2$ ；控制律的參

數，我們設定 $\tau = 10^{-3}$ ， $\varepsilon = 10^{-3}$ ， $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 1$ ，

$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = 1$ ；布克哈特輪胎模型的參數有三組：

乾地— $c_1 = 1.2801$ ， $c_2 = 23.99$ ， $c_3 = 0.52$ ， $c_4 = 0.02$

溼地— $c_1 = 0.857$ ， $c_2 = 33.822$ ， $c_3 = 0.347$ ， $c_4 = 0.02$

雪地— $c_1 = 0.1946$ ， $c_2 = 94.129$ ， $c_3 = 0.0646$ ， $c_4 = 0.02$

在本節模擬中， $\mathbf{x}(0) = [27.7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ 。圖 4.4 至圖 4.8 為我們的模擬結果，藍色曲線為煞車中 $\mu_l \neq \mu_r$ 的模擬結果，紅色曲線為煞車中 $\mu_l = \mu_r$ 的模擬結果。圖 4.4 及圖 4.5 為系統的狀態變數，從圖 4.4 中出我們可看當車子煞車過程中 $\mu_l \neq \mu_r$ 時，車子的縱向速度下降的比較快，在 SMC 的控制下，偏移率及滑移率雖然最後收斂於零，但車子已經因偏移率及滑移率的產生而不在安全的煞車控制內了；相對的，當車子煞車過程中 $\mu_l = \mu_r$ 時，車子的縱向速度雖然下降的比較慢，但偏移率以及側向速度皆趨近於零。圖 4.5 為車子四個輪胎的滑移率，從圖中可觀察出车子在 SMC 的控制下，當煞車中 $\mu_l = \mu_r$ 時，兩側滑移率分別為 $\lambda_l = \lambda_{ww}$ ， $\lambda_r = \lambda_{dw}$ ；煞車中 $\mu_l \neq \mu_r$ 時，兩側滑移率皆為 λ_{dd} 。圖 4.6 為系統控制輸出，在 $\mu_l = \mu_r$ 的煞車模擬中，因為溼地的抓地效果較差，為了防止左側輪胎在瞬間急煞的過程中產生打滑，左側煞車力道的上升速度會低於右側的煞車力道。圖 4.7 為順滑變數，我們可觀察當煞車過程中 $\mu_l = \mu_r$ 時， $s_2 - s_5$ 能在極短的時間內收斂於零， s_1 也達到漸近穩定的控制；但是當煞車過程中 $\mu_l \neq \mu_r$ 時，即使用 SMC 去控制， s_1 也無法有效抑制下來。接著，我們模擬煞車過程中的軌跡路線，如圖 4.8 所示，從圖可看出，當煞車過程中 $\mu_l = \mu_r$ 時，雖然煞車距離較長，但車子的偏移距離極小，車子不至於偏移到其他車道去；反之當煞車過程中 $\mu_l \neq \mu_r$ 時，煞車的距離雖然縮短，但因為偏移率和側向速度的產生，車子開始打轉並往右側車道偏移，從模擬結果可看出車子偏移了 70 公分左右，要是車子右側有貼近的车辆，將會造成車輛碰撞事故。

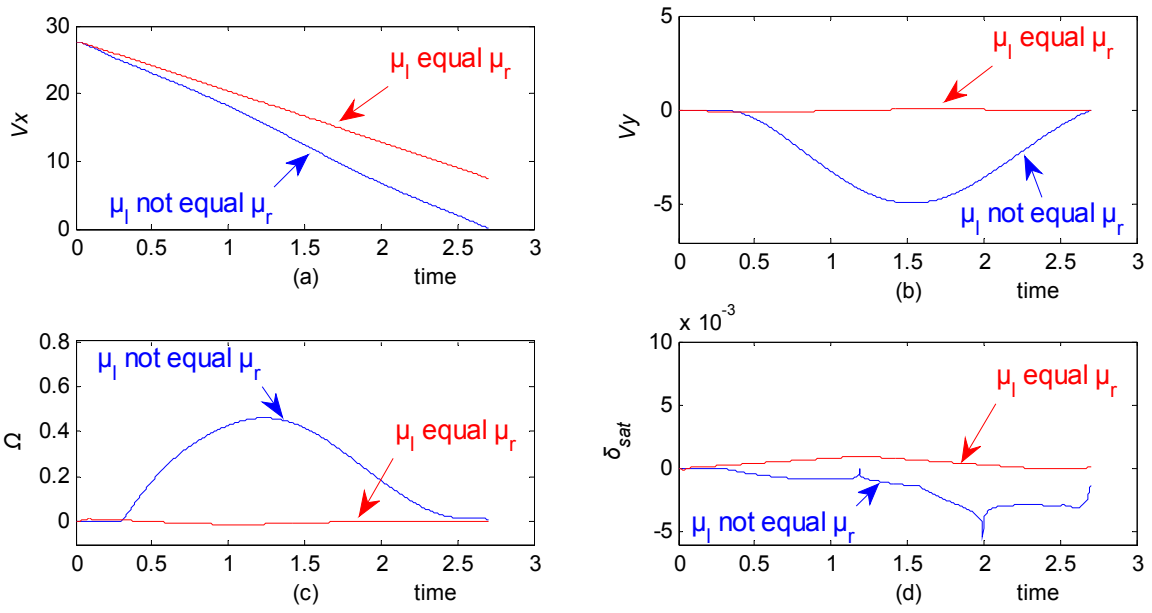


圖 4.4 μ -split 路面煞車模擬的系統狀態變數 (1)

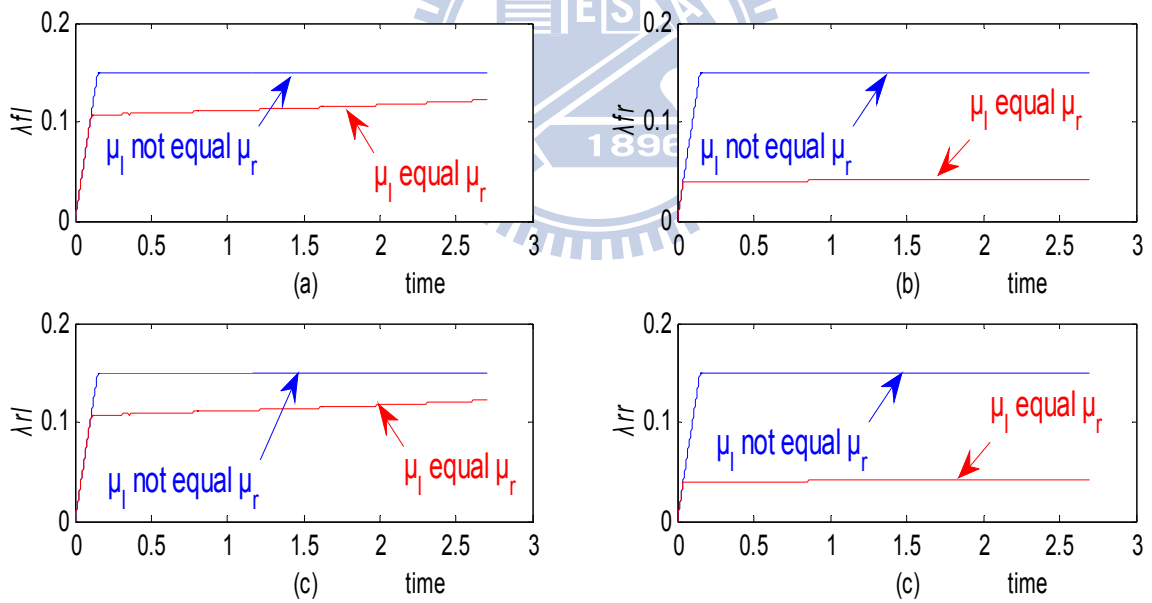


圖 4.5 μ -split 路面煞車模擬的系統狀態變數 (2)

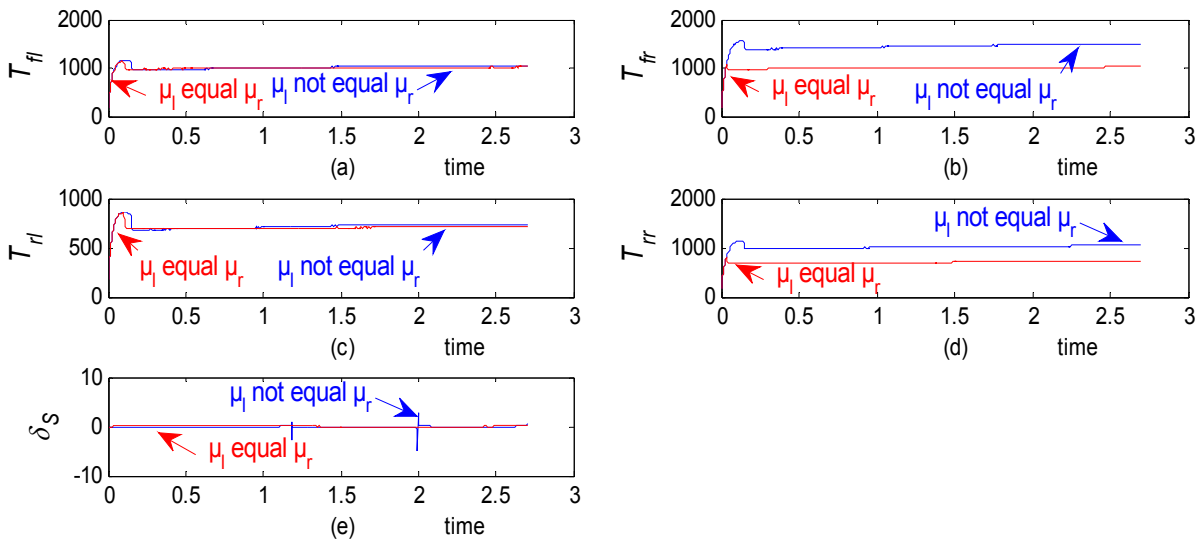


圖 4.6 μ -split 路面煞車模擬的系統控制輸入

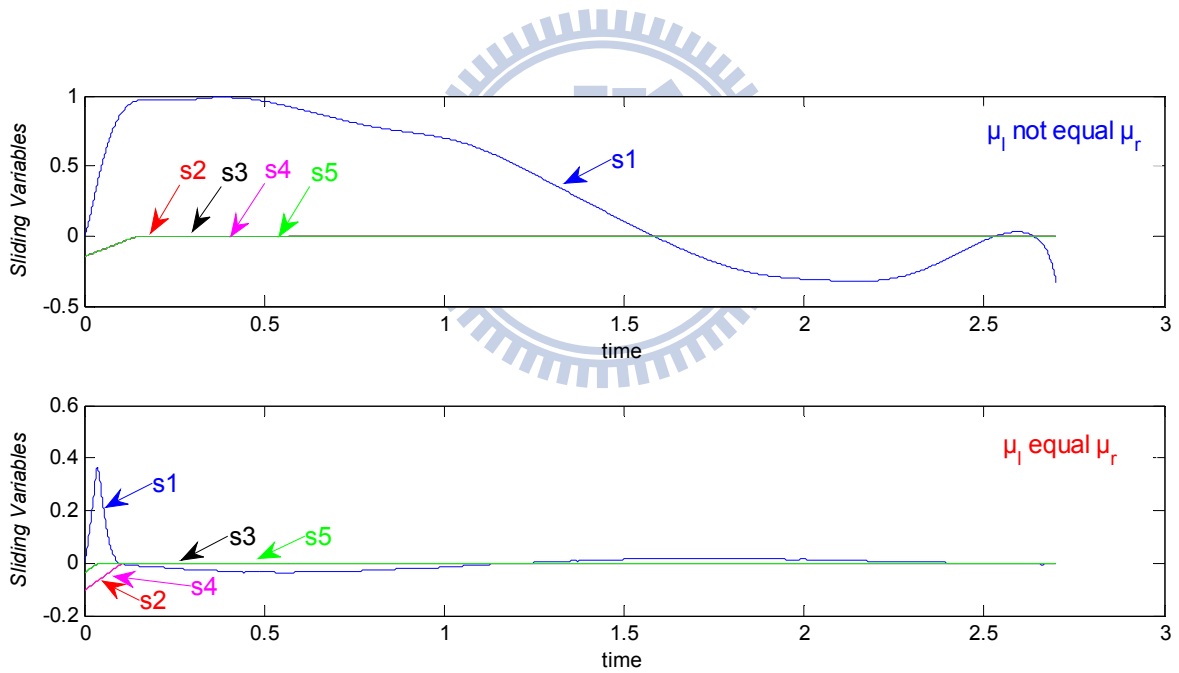


圖 4.7 μ -split 路面煞車模擬的順滑變數

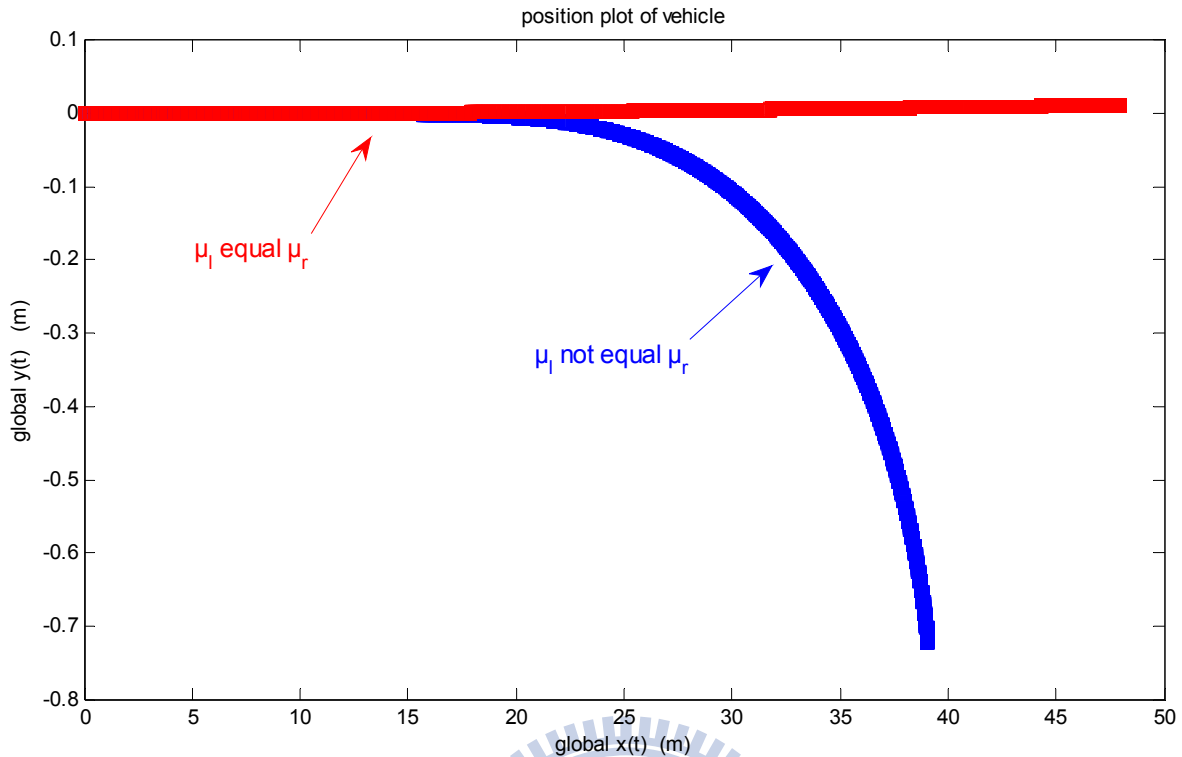


圖 4.8 μ -split 路面煞車模擬的煞車軌跡路線

4.3.2 三段式路面煞車模擬

在三段式路面煞車模擬中，我們模擬車子在一條三段式的路面上進行煞車，路段的種類依序為[乾地, 乾地]，[溼地, 乾地]，[雪地, 溼地]，如圖 4.9 所示。為了在各個路段都能達到安全的煞車控制，车子在每個路段下兩側的輪胎-路面摩擦係數都需要相等，我們同時希望在此條件下煞車的距離最短，為達到上述的控制目的，车子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數需要調整至抓地效果較差那一側所能獲得的最大輪胎-路面摩擦係數。我們藉由 SMC 調整兩側的滑移率使车子兩側能獲得上述的摩擦係數，接著根據 2.2 節的布克哈特輪胎模型，我們整理出车子在各種路面煞車中，為了使左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等並且在此條件下煞車距離最短，SMC 參考輸出所對應的數值，如表 4.1 所示。我們將 SMC 與路面觀測器結合後進行煞車模擬，我們設定的模擬情況為，車

子首先在乾地路面下煞車，經過 $t_1 = 1$ 秒後車子進入了[溼地, 乾地]的 μ -split 路面；經過 $t_2 = 2.5$ 秒後車子進入[雪地, 溼地]的 μ -split 路面。從模擬結果觀察路面觀測器是否能立刻判斷煞車路面的變換以及判斷新煞車路面的種類，並告知控制器切換至適合控制律，以達到安全煞車的控制目的。



圖 4.9 三段式路面

表 4.1 各種路面狀況下的參考輸出

路面種類 [左側, 右側]	參考輸出
[乾地, 乾地]	$\mathbf{y}_{DD} = [0 \quad \lambda_{dd} \quad \lambda_{dd} \quad \lambda_{dd} \quad \lambda_{dd}]^T$
[乾地, 溼地]	$\mathbf{y}_{DW} = [0 \quad \lambda_{dw} \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{dw} \quad \lambda_{ww}]^T$
[乾地, 雪地]	$\mathbf{y}_{DS} = [0 \quad \lambda_{ds} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ds} \quad \lambda_{ss}]^T$
[溼地, 溼地]	$\mathbf{y}_{WW} = [0 \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{ww}]^T$
[溼地, 乾地]	$\mathbf{y}_{WD} = [0 \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{dw} \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{dw}]^T$
[溼地, 雪地]	$\mathbf{y}_{WS} = [0 \quad \lambda_{ws} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ws} \quad \lambda_{ss}]^T$
[雪地, 雪地]	$\mathbf{y}_{SS} = [0 \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ss}]^T$
[雪地, 乾地]	$\mathbf{y}_{SD} = [0 \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ds} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ds}]^T$
[雪地, 溼地]	$\mathbf{y}_{SW} = [0 \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ws} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ws}]^T$

在本節模擬中，車輛狀態變數、系統輸出、參考輸出、輸出誤差、控制輸入、車輛模型參數、控制律的參數、布克哈特輪胎模型的參數皆與 4.3.2 小節的設定相同。圖 4.10 至圖 4.14 為我們的模擬結果圖。圖 4.10 及圖 4.11 為系統的狀態變數，我們從圖 4.11 中可觀察出，在 $t_1 = 1$ 及 $t_1 = 2.5$ 的瞬間，路面觀測器皆能判斷新的煞車路面的種類，並告知控制器切換參考輸出，參考輸出在煞車過程中的切換順序為

$$\mathbf{y}_{DD} = [0 \quad \lambda_{dd} \quad \lambda_{dd} \quad \lambda_{dd} \quad \lambda_{dd}]^T \rightarrow \mathbf{y}_{WD} = [0 \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{dw} \quad \lambda_{ww} \quad \lambda_{dw}]^T \rightarrow \mathbf{y}_{SW} = [0 \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ws} \quad \lambda_{ss} \quad \lambda_{ws}]^T$$

，使得車身左右兩側的輪胎-摩擦係數恢復一致，車子的偏移率也因此收斂於零，並將側向力也控制於零。圖 4.12 為系統控制輸入，車子的煞車力道在 $t_1 = 1$ 及 $t_1 = 2.5$ 的時候各降低了一次，原因是為了使滑移率降低，轉速必須升高的關係。圖 4.13 是順滑變數， $s_1 - s_5$ 在 $t_1 = 1$ 及 $t_1 = 2.5$ 分別有兩次的震盪，但皆能再順滑膜控制下歸於零。我們同樣模擬車子的軌跡路線，如圖 4.14 所示，從中我們可以看出，為了使車子左右輪胎-路面摩擦係數恢復一致，最後車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數皆為 μ_{ss} ，輪胎-路面摩擦力因此變得很小，車子煞車到停止所需要的煞車距離也跟著拉長。

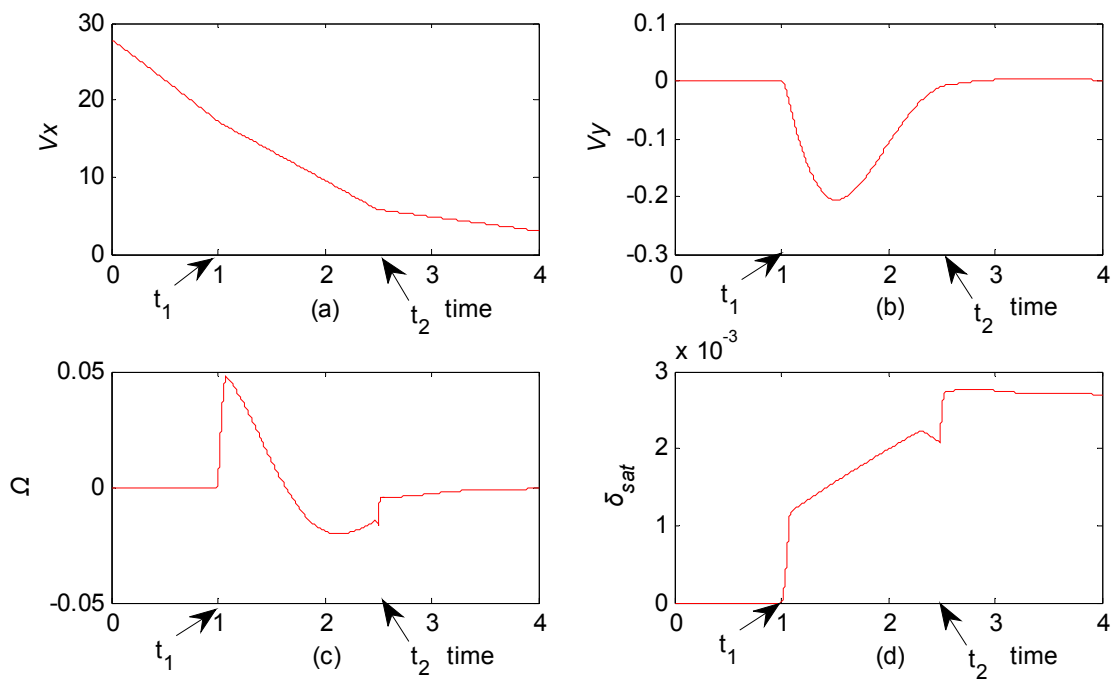


圖 4.10 三段式路面煞車模擬系統的狀態變數 (1)

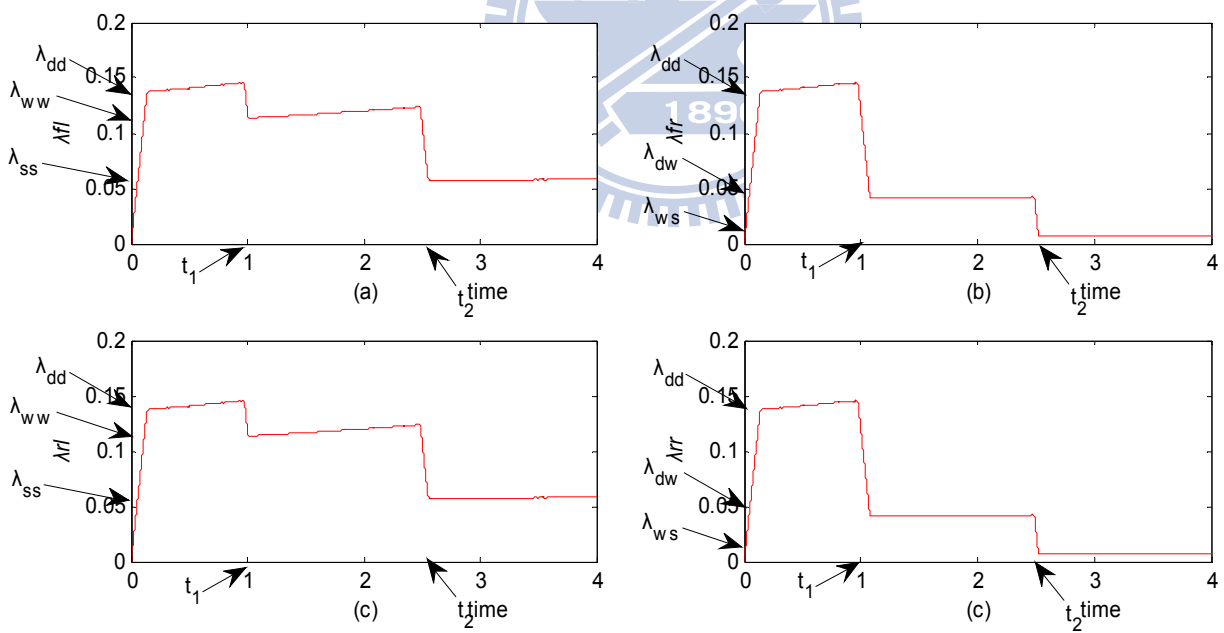


圖 4.11 三段式路面煞車模擬的系統的狀態變數 (2)

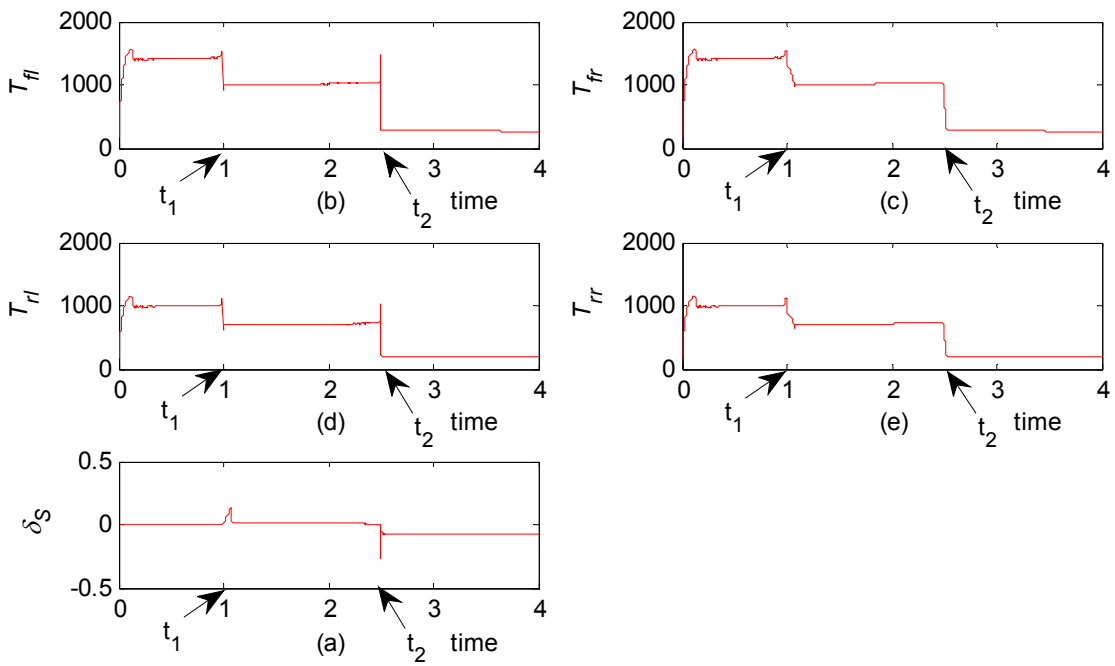


圖 4.12 三段式路面煞車模擬的系統的控制輸入

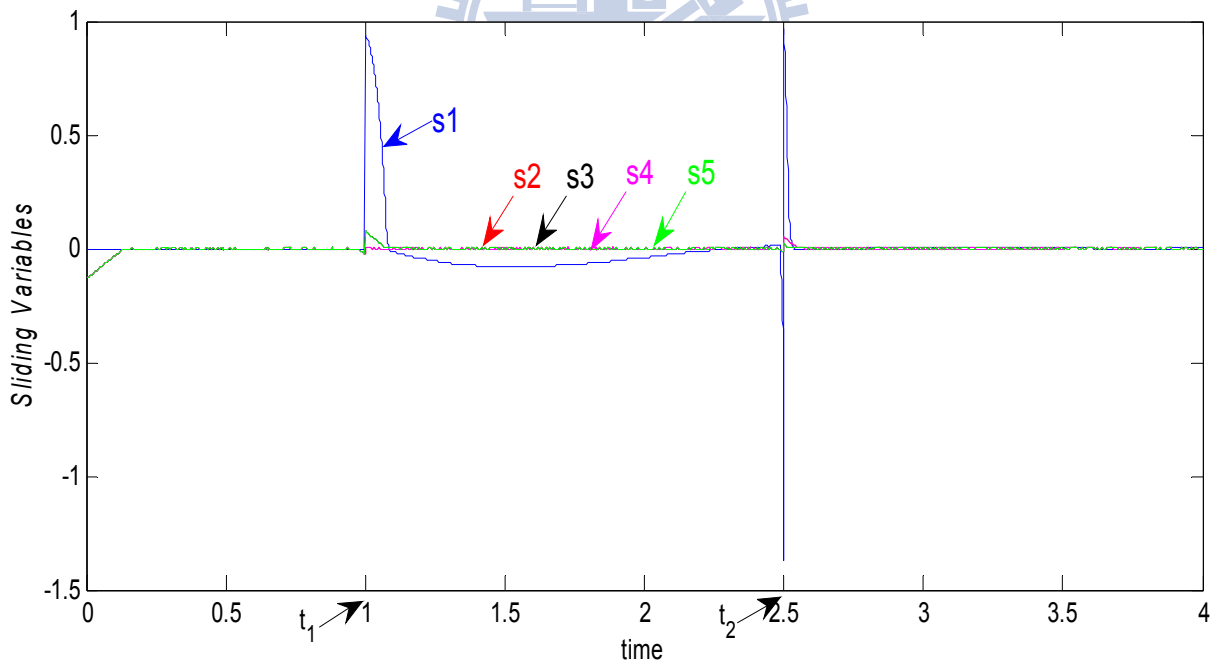


圖 4.13 三段式路面煞車模擬的順滑變數

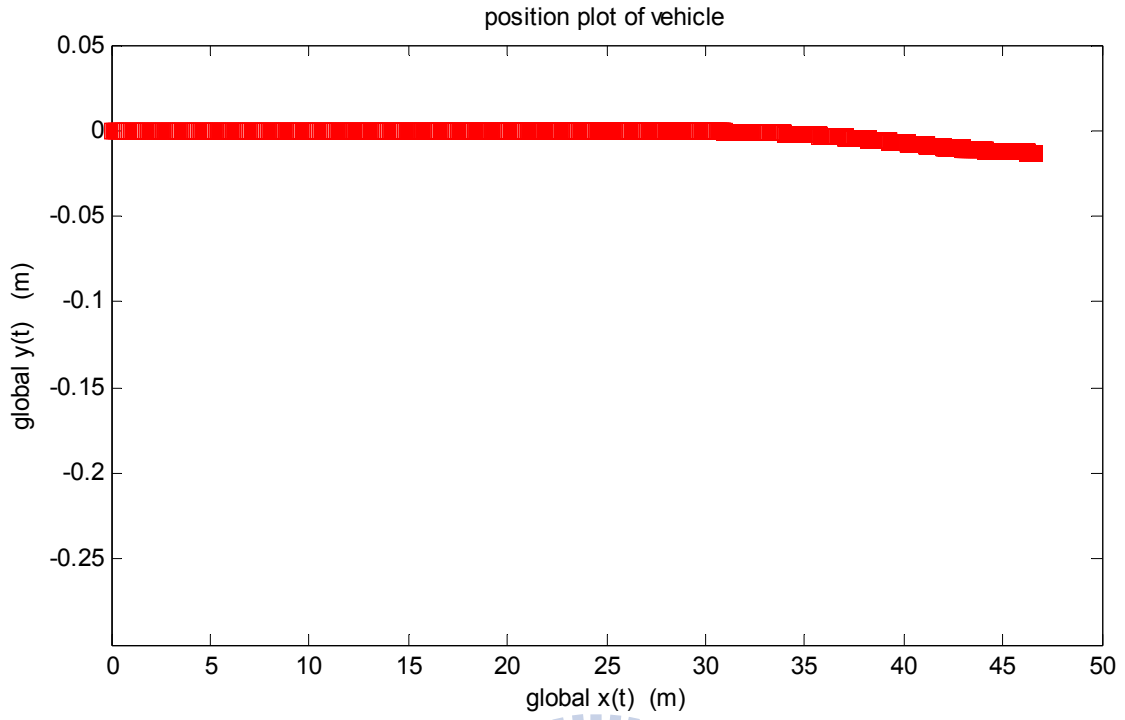


圖 4.14 三段式路面煞車模擬的煞車軌跡路線



第 5 章

結論與未來研究方向

5.1 結論

在本篇論文中，我們將 SMC 應用在 μ -split 路面的煞車控制，當車子在 μ -split 路面下煞車的時候，車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數會不同，我們利用 SMC 使車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數恢復成一致，在第四章的模擬結果中，我們可看出當車子在 μ -split 路面下煞車時，若左右兩側的輪胎-路面摩擦係數相等，偏移率以及側向速度幾乎為零，車子此時擁有安全的煞車控制。再來，車子可能會先在一般路面上煞車一段距離後才進入 μ -split 路面，因此我們在第三章設計出一個路面觀測器，路面觀測器能判斷車子是否進入煞車路面以及判斷新煞車路面的種類，在第四章的模擬結果中，路面觀測器能判斷車子進入煞車路面以及判斷新煞車路面的種類，並將路面的種類告知 SMC，進而切換參考輸出，使車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數恢復成一致。

5.2 未來研究方向

1. 系統中的擾動以及煞車促動器 (actuator) 的退化，都會影響車子的煞車控制，可以嘗試利用 SMC 對於外在干擾和系統不確定項有著穩健性的優點來解決。
2. 輪胎-路面的摩擦係數會隨著路面的吸水程度以及路面材質的不同而有細微的變化，得到更精準的輪胎-路面的摩擦係數可使 SMC 的煞車控制效果更好。
3. 本篇只考慮直線的 μ -split 路面下煞車，在彎道的 μ -split 路面下煞車時，車子左右兩側的輪胎-路面摩擦係數同樣地必須相等，但參考輸出中的偏移率需要有所調整，如何決定過彎中的參考輸出為另一個研究議題。



參考文獻

- [1] M. Canale, L. Fagiano, M. Milanese, and P. Borodani, “Robust vehicle yaw control using active differential and internal model control techniques,” in *American Control Conference, 2006*, p. 6, 2006.
- [2] B. A. Guvenc, L. Guvenc, and S. Karaman, “Robust Yaw Stability Controller Design and Hardware-in-the-Loop Testing for a Road Vehicle,” *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 58, pp. 555-571, 2009.
- [3] S. Kharrazi, M. Lidberg, P. Lingman, J.-I. Svensson, and N. Delab, “The effectiveness of rear axle steering on the yaw stability and responsiveness of a heavy truck,” Berkeley, CA, United states, pp. 365-372, 2008.
- [4] M. Canale and L. Fagiano, “A robust IMC approach for stability control of 4WS vehicles,” in *American Control Conference, 2007. ACC '07*, pp. 2283-2288, 2007.
- [5] R. Marino, S. Scalzi, G. Orlando, and M. Netto, “A nested PID steering control for lane keeping in vision based autonomous vehicles,” in *American Control Conference, 2009. ACC '09.*, pp. 2885-2890, 2009.
- [6] J. Song and W. S. Che, “Comparison and evaluation of brake yaw motion controllers with an antilock brake system,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D-Journal of Automobile Engineering*, vol. 222, pp. 1273-U4, Jul., 2008.
- [7] A. Harifi, A. Aghagolzadeh, G. Alizadeh, and M. Sadeghi, “Designing a sliding mode controller for slip control of antilock brake systems,” *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*, vol. 48, pp.731-741, Dec.,2008.
- [8] Y. Yazicioglu and Y. S. Unlusoy, “A fuzzy logic controlled Anti-lock Braking System (ABS) for improved braking performance and directional stability,” *International Journal of Vehicle Design*, vol. 48, pp. 299-315, 2008.
- [9] W. Junmin and R. G. Longoria, “Combined Tire Slip and Slip Angle Tracking Control for Advanced Vehicle Dynamics Control Systems,” in *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pp. 1733-1738, 2006.
- [10] R. G. Hebden, C. Edwards, and S. K. Spurgeon, “An application of sliding mode control to vehicle steering in a split-mu maneuver,” in *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, vol. 5, pp. 4359-4364, 2003.

- [11] V. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [12] V. I. Utkin, *Sliding modes in control and optimization*, Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [13] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [14] D.-C. Liaw, Y.-W. Liang, and C.-C. Cheng, "Nonlinear control for missile terminal guidance," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 122, p. 663, 2000.
- [15] Y. W. Liang, S. D. Xu, T. C. Chu, and C. C. Cheng, "Reliable output tracking control for a class of nonlinear systems," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, vol. E87A, pp. 2314-2321, Sep., 2004.
- [16] T. R. Gawade, S. Mukherjee, and D. Mohan, "Six-degree-of-freedom three-wheeled-vehicle model validation," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D-Journal of Automobile Engineering*, vol. 219, pp. 487-498, Apr., 2005.
- [17] T. Acarman, "Nonlinear optimal integrated vehicle control using individual braking torque and steering angle with on-line control allocation by using state-dependent Riccati equation technique," *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, vol. 47, pp. 155 - 177, 2009.
- [18] J. Lu and J. Wang, "Road surface condition detection based on road surface temperature and solar radiation," in *Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering (CMCE), 2010 International Conference on*, pp. 4-7.
- [19] A. Troiano, E. Pasero, and L. Mesin, "An innovative water and ice detection system for monitoring road and runway surfaces," in *Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics (PRIME) Conference*, pp. 1-4, 2010.
- [20] S. K. Hong and S. Park, "Minimal-Drift Heading Measurement using a MEMS Gyro for Indoor Mobile Robots," *Sensors*, vol. 8, pp. 7287-7299, Nov., 2008.
- [21] P. Handel, B. Enstedt, and M. Ohlsson, "Combating the effect of chassis squat in vehicle performance calculations by accelerometer measurements," *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, vol. 43, pp. 483-488, 2010.
- [22] A. Chu, "Specialized sensors for railroad applications," *Sound and Vibration*, vol. 41, p. 12, 2007.

附錄

在這裡我們介紹 $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_5(\mathbf{x})$ 以及 $g_{11}(\mathbf{x}), \dots, g_{55}(\mathbf{x})$ 的推導。

首先我們由 (4.2) 式推導出 $f_1(\mathbf{x})$ 和 $g_{11}(\mathbf{x}), g_{12}(\mathbf{x}), g_{13}(\mathbf{x}), g_{14}(\mathbf{x}), g_{15}(\mathbf{x})$ ，我們

將 (4.2) 做微分，得到下列的等式：

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1 &= \ddot{\Omega} \\
 &= \frac{1}{I_{zz}} \left[-\dot{R}_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - \dot{R}_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) + (\dot{R}_{rr} - \dot{R}_{rl}) \cdot l_3 \right. \\
 &\quad + \dot{\delta}_{sat} \cdot \left[-R_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) - R_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) \right. \\
 &\quad \quad \left. - L_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - L_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \right] \\
 &\quad \left. + \dot{L}_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + \dot{L}_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) - (\dot{L}_{rr} + \dot{L}_{rl}) \cdot l_3 \right] \\
 &= \ddot{y}_{1_1} + \ddot{y}_{1_2} + \ddot{y}_{1_3}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

再將 (A.1) 細分為 (A.2)、(A.3)、(A.4) 三部份以方便計算

$$\ddot{y}_{1_1} = \frac{1}{I_{zz}} \left[-\dot{R}_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - \dot{R}_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) + (\dot{R}_{rr} - \dot{R}_{rl}) \cdot l_3 \right] \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_{1_2} &= \frac{1}{I_{zz}} \cdot \dot{\delta}_{sat} \cdot \left[-R_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) - R_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) \right. \\
 &\quad \left. - L_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - L_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \right]
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\ddot{y}_{1_3} = \frac{1}{I_{zz}} \left[-\dot{L}_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + \dot{L}_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) - (\dot{L}_{rr} + \dot{L}_{rl}) \cdot l_3 \right] \tag{A.4}$$

我們先計算 \dot{R}_α 、 \dot{L}_α 、 $\dot{\delta}_{sat}$ ， $\alpha = fl, fr, rl, rr$ ，首先為了求得 \dot{R}_α ，我們對 (2.21)

進行微分

$$\begin{aligned}
\dot{R}_\alpha &= N_\alpha \cdot \dot{\mu}_\alpha \\
&= N_\alpha \cdot \left[c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \lambda_\alpha}) - c_3 \cdot \lambda_\alpha \right] \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \\
&= N_\alpha \cdot \left[c_1 c_2 \dot{\lambda}_\alpha e^{-c_2 \lambda_\alpha} - c_3 \dot{\lambda}_\alpha \right] + (-c_1 c_4 + c_1 c_4 e^{-c_2 \lambda_\alpha} + c_3 c_4 \lambda_\alpha) \cdot (\dot{\lambda}_\alpha V_x + \lambda_\alpha \dot{V}_x) e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \\
&= N_\alpha \cdot \left[c_1 c_2 e^{-c_2 \lambda_\alpha} - c_3 + c_1 c_4 e^{-c_2 \lambda_\alpha} V_x + c_3 c_4 \lambda_\alpha V_x - c_1 c_4 V_x \right] \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \cdot \dot{\lambda}_\alpha \\
&\quad + \left[c_1 c_4 \lambda_\alpha \dot{V}_x e^{-c_2 \lambda_\alpha} + c_3 c_4 \lambda_\alpha^2 \dot{V}_x - c_1 c_4 \lambda_\alpha \dot{V}_x \right] \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \\
&= N_\alpha \cdot (c_1 c_2 e^{-c_2 \lambda_\alpha} - c_3 + c_1 c_4 e^{-c_2 \lambda_\alpha} V_x + c_3 c_4 \lambda_\alpha V_x - c_1 c_4 V_x) \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \cdot \left(\frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_\alpha)}{V_x} - \frac{\mu_\alpha \cdot r_w^2 \cdot N_\alpha}{V_x \cdot J_w} \right) \\
&\quad + N_\alpha \cdot (c_1 c_4 \lambda_\alpha \dot{V}_x e^{-c_2 \lambda_\alpha} + c_3 c_4 \lambda_\alpha^2 \dot{V}_x - c_1 c_4 \lambda_\alpha \dot{V}_x) \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \\
&\quad + N_\alpha \cdot (c_1 c_2 e^{-c_2 \lambda_\alpha} - c_3 + c_1 c_4 e^{-c_2 \lambda_\alpha} V_x + c_3 c_4 \lambda_\alpha V_x - c_1 c_4 V_x) \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \cdot \frac{r_w}{V_x \cdot J_w} \cdot T_\alpha
\end{aligned} \tag{A.5}$$

我們定義

$$\begin{aligned}
k_{R1\alpha} &= N_\alpha \cdot (c_1 c_2 e^{-c_2 \lambda_\alpha} - c_3 + c_1 c_4 e^{-c_2 \lambda_\alpha} V_x + c_3 c_4 \lambda_\alpha V_x - c_1 c_4 V_x) \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \cdot \left(\frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_\alpha)}{V_x} - \frac{\mu_\alpha \cdot r_w^2 \cdot N_\alpha}{V_x \cdot J_w} \right) \\
&\quad + N_\alpha \cdot (c_1 c_4 \lambda_\alpha \dot{V}_x e^{-c_2 \lambda_\alpha} + c_3 c_4 \lambda_\alpha^2 \dot{V}_x - c_1 c_4 \lambda_\alpha \dot{V}_x) \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \\
k_{R2\alpha} &= N_\alpha \cdot (c_1 c_2 e^{-c_2 \lambda_\alpha} - c_3 + c_1 c_4 e^{-c_2 \lambda_\alpha} V_x + c_3 c_4 \lambda_\alpha V_x - c_1 c_4 V_x) \cdot e^{-c_4 \lambda_\alpha V_x} \cdot \frac{r_w}{V_x \cdot J_w}
\end{aligned}$$

最後可得到

$$\dot{R}_\alpha = k_{R1\alpha} + k_{R2\alpha} \cdot T_\alpha \quad \alpha = fl, fr, rl, rr \tag{A.6}$$

再來我們計算 \dot{L}_α ，對 (2.17) - (2.20) 進行微分

$$\dot{L}_{fl} = C_{fl} \cdot \left(\dot{\delta}_{sat} - \frac{(\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_1) \cdot (V_x + \Omega \cdot l_3) - (V_y + \Omega \cdot l_1) \cdot (\dot{V}_x + \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x + \Omega \cdot l_3)^2} \right) \tag{A.7}$$

$$\dot{L}_{fr} = C_{fr} \cdot \left(\dot{\delta}_{sat} - \frac{(\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_1) \cdot (V_x - \Omega \cdot l_3) - (V_y + \Omega \cdot l_1) \cdot (\dot{V}_x - \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x - \Omega \cdot l_3)^2} \right) \tag{A.8}$$

$$\dot{L}_{rl} = C_{rl} \cdot \left(\frac{(-\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_2) \cdot (V_x + \Omega \cdot l_3) - (-V_y + \Omega \cdot l_2) \cdot (\dot{V}_x + \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x + \Omega \cdot l_3)^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{L}_{rr} = C_{rr} \cdot \left(\frac{(-\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_2) \cdot (V_x - \Omega \cdot l_3) - (-V_y + \Omega \cdot l_2) \cdot (\dot{V}_x - \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x - \Omega \cdot l_3)^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{定義 } k_{Lfl} = \frac{(\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_1) \cdot (V_x + \Omega \cdot l_3) - (V_y + \Omega \cdot l_1) \cdot (\dot{V}_x + \Omega \cdot l_3)}{(V_x + \Omega \cdot l_3)^2},$$

$$k_{Lfr} = \frac{(\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_1) \cdot (V_x - \Omega \cdot l_3) - (V_y + \Omega \cdot l_1) \cdot (\dot{V}_x - \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x - \Omega \cdot l_3)^2}$$

$$k_{Lrl} = \frac{(-\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_2) \cdot (V_x + \Omega \cdot l_3) - (-V_y + \Omega \cdot l_2) \cdot (\dot{V}_x + \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x + \Omega \cdot l_3)^2}$$

$$k_{Lrr} = \frac{(-\dot{V}_y + \dot{\Omega} \cdot l_2) \cdot (V_x - \Omega \cdot l_3) - (-V_y + \Omega \cdot l_2) \cdot (\dot{V}_x - \dot{\Omega} \cdot l_3)}{(V_x - \Omega \cdot l_3)^2}$$

(A.7) – (A.10) 即可轉換為 (A.11) – (A.14)

$$\dot{L}_{fl} = C_{fl} \cdot (\dot{\delta}_{sat} - k_{Lfl}) \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{L}_{fr} = C_{fr} \cdot (\dot{\delta}_{sat} - k_{Lfr}) \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{L}_{rl} = C_{rl} \cdot k_{Lrl} \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{L}_{rr} = C_{rr} \cdot k_{Lrr} \quad (\text{A.14})$$

接著我們計算 $\dot{\delta}_{sat}$ ， $\delta_{sat} = \frac{\pi}{16} \sin(\delta)$ ，微分之後可得到 $\dot{\delta}_{sat} = \frac{\pi}{16} \cos(\delta) \cdot \dot{\delta}$ ，帶入

(2.14) 式可得到下式

$$\dot{\delta}_{sat} = \frac{\pi}{16} \cos(\delta) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot (\delta_s - \delta) \quad (\text{A.15})$$

定義 $k_\delta = \frac{\pi}{16} \cos(\delta) \cdot \frac{1}{\tau}$ ，(A.15) 即可轉換為

$$\dot{\delta}_{sat} = k_\delta \cdot (\delta_s - \delta) \quad (\text{A.16})$$

接下來我們分別計算 \ddot{y}_{1_1} 、 \ddot{y}_{1_2} 、 \ddot{y}_{1_3} ，首先我們將 (A.6) 帶進 (A.2)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1_1} = \frac{1}{I_{zz}} & \left[-k_{R1fl} (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - k_{R1fr} (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) + (k_{R1rr} - k_{R1rl}) \cdot l_3 \right. \\ & - k_{R2fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot T_{fl} \\ & - k_{R2fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot T_{fr} \\ & + k_{R2rr} \cdot l_3 \cdot T_{rr} \\ & \left. - k_{R2rl} \cdot l_3 \cdot T_{rl} \right] \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

定義 $k_{\Omega_1} = -k_{R1fl} (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - k_{R1fr} (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) + (k_{R1rr} - k_{R1rl}) \cdot l_3$ ，(A.17) 即可

轉換成 (A.18) 式

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1_1} = \frac{1}{I_{zz}} & \left[k_{\Omega_1} - k_{R2fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot T_{fl} \right. \\ & - k_{R2fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot T_{fr} \\ & + k_{R2rr} \cdot l_3 \cdot T_{rr} \\ & \left. - k_{R2rl} \cdot l_3 \cdot T_{rl} \right] \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

接下來我們將 (A.16) 帶進 (A.3) 式裡

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1_2} = \frac{1}{I_{zz}} & \left[k_\delta \cdot \delta \cdot \left[R_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + R_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) \right. \right. \\ & \left. \left. + L_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) + L_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \right] \right. \\ & + k_\delta \cdot \delta_s \cdot \left[-R_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) - R_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) \right. \\ & \left. \left. - L_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) - L_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \right] \right] \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

定義

$$k_{\Omega_2} = \left[R_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + R_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) + L_{fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) + L_{fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \right]$$

，(A.19) 即可轉換為

$$\ddot{y}_{1_2} = \frac{1}{I_{zz}} [k_{\delta} \cdot \delta_s \cdot k_{\Omega_2} - k_{\delta} \cdot \delta \cdot k_{\Omega_2}] \quad (\text{A.20})$$

接下來我們將 (A.11) – (A.14) 帶進 (A.4) 裡

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1_3} = & \frac{1}{I_{zz}} [C_{fl} \cdot (-k_{\delta} \cdot \delta - k_{Lfl}) \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + C_{fr} \cdot (-k_{\delta} \cdot \delta - k_{Lfr}) \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) - (\dot{L}_{rr} + \dot{L}_{rl}) \cdot l_3 \\ & - (C_{rl} \cdot k_{Lrl} + C_{rr} \cdot k_{Lrr}) \cdot l_2 \\ & + k_{\delta} \cdot \delta_s \cdot [C_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + C_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3)]] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} k_{\Omega_3} = & C_{fl} \cdot (-k_{\delta} \cdot \delta - k_{Lfl}) \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) \\ & + C_{fr} \cdot (-k_{\delta} \cdot \delta - k_{Lfr}) \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3) - (\dot{L}_{rr} + \dot{L}_{rl}) \cdot l_3 - (C_{rl} \cdot k_{Lrl} + C_{rr} \cdot k_{Lrr}) \cdot l_2 \end{aligned}$$

$k_{\Omega_4} = C_{fl} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 - s\delta_{sat} \cdot l_3) + C_{fr} \cdot (c\delta_{sat} \cdot l_1 + s\delta_{sat} \cdot l_3)$ ，(A.21) 式即可轉換為

$$\ddot{y}_{1_3} = \frac{1}{I_{zz}} [k_{\Omega_3} - k_{\delta} \cdot \delta_s \cdot k_{\Omega_4}] \quad (\text{A.22})$$

最後我們將 (A.18)、(A.20)、(A.22) 帶回 (A.1) 裡

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 = & \ddot{y}_{1_1} + \ddot{y}_{1_2} + \ddot{y}_{1_3} \\ = & \frac{1}{I_{zz}} \cdot [k_{\Omega_1} - k_{\delta} \cdot \delta \cdot k_{\Omega_2} + k_{\Omega_3} + k_{\delta} \cdot (k_{\Omega_2} + k_{\Omega_4}) \cdot \delta_s \\ & - k_{R2fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot T_{fl} \\ & - k_{R2fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \cdot T_{fr} \\ & - k_{R2rl} \cdot l_3 \cdot T_{rl} \\ & + k_{R2rr} \cdot l_3 \cdot T_{rr}] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

我們定義

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_{zz}} \cdot [k_{\Omega_1} - k_{\delta} \cdot \delta \cdot k_{\Omega_2} + k_{\Omega_3}] \quad (\text{A.24})$$

$$g_{11}(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_{zz}} \cdot k_{\delta} \cdot (k_{\Omega_2} + k_{\Omega_4}) \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{I_{zz}} \cdot k_{R2fl} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 + c\delta_{sat} \cdot l_3) \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{g}_{13}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{I_{zz}} \cdot k_{R2fr} \cdot (s\delta_{sat} \cdot l_1 - c\delta_{sat} \cdot l_3) \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{g}_{14}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{I_{zz}} \cdot k_{R2rl} \cdot l_3 \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{g}_{15}(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_{zz}} \cdot k_{R2rr} \cdot l_3 \quad (\text{A.29})$$

$$\dot{\lambda}_{fl} = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{fl})}{V_x} - \frac{\mu_{fl} \cdot r_w^2 \cdot N_{fl}}{V_x \cdot J_w} + \frac{r_w}{V_x \cdot J_w} \cdot T_{fl} = f_2(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{22}(\mathbf{x}) \cdot T_{fl}$$

$$\dot{\lambda}_{fr} = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{fr})}{V_x} - \frac{\mu_{fr} \cdot r_w^2 \cdot N_{fr}}{V_x \cdot J_w} + \frac{r_w}{V_x \cdot J_w} \cdot T_{fr} = f_3(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{33}(\mathbf{x}) \cdot T_{fr}$$

$$\dot{\lambda}_{rl} = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{rl})}{V_x} - \frac{\mu_{rl} \cdot r_w^2 \cdot N_{rl}}{V_x \cdot J_w} + \frac{r_w}{V_x \cdot J_w} \cdot T_{rl} = f_4(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{44}(\mathbf{x}) \cdot T_{rl}$$

$$\dot{\lambda}_{rr} = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{rr})}{V_x} - \frac{\mu_{rr} \cdot r_w^2 \cdot N_{rr}}{V_x \cdot J_w} + \frac{r_w}{V_x \cdot J_w} \cdot T_{rr} = f_5(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{55}(\mathbf{x}) \cdot T_{rr}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{fl})}{V_x} - \frac{\mu_{fl} \cdot r_w^2 \cdot N_{fl}}{V_x \cdot J_w} \quad (\text{A.30})$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{fr})}{V_x} - \frac{\mu_{fr} \cdot r_w^2 \cdot N_{fr}}{V_x \cdot J_w} \quad (\text{A.31})$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{rl})}{V_x} - \frac{\mu_{rl} \cdot r_w^2 \cdot N_{rl}}{V_x \cdot J_w} \quad (\text{A.32})$$

$$f_5(\mathbf{x}) = \frac{\dot{V}_x \cdot (1 - \lambda_{rr})}{V_x} - \frac{\mu_{rr} \cdot r_w^2 \cdot N_{rr}}{V_x \cdot J_w} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{g}_{22}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{33}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{44}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{55}(\mathbf{x}) = \frac{r_w}{V_x \cdot J_w} \quad (\text{A.34})$$