

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

全域可壓縮流場計算方法之開發
應用於氣動聲學之前期研究

An investigation of computational methods
for all speed compressible flow field for an application of
the preliminary study in aeroacoustics

研究生：李崇綱
指導教授：傅武雄 博士

中華民國一百年七月

全域可壓縮流場計算方法之開發
應用於氣動聲學之前期研究
An investigation of computational methods
for all speed compressible flow field for an application of
the preliminary study in aeroacoustics

研究生：李崇綱

Student：Chung-Gang Li

指導教授：傅武雄

Advisor：Wu-Shung Fu



Submitted to Department of Mechanical Engineering College of Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Doctor of Philosophy
in
Mechanical Engineering

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年七月

全域可壓縮流場計算方法之開發應用於氣動聲學之前期研究

研究生：李崇綱

指導教授：傅武雄 博士

國立交通大學機械工程學系

摘要

隨著生活品質的提昇，噪音問題越益受到重視，其中又以流體所誘導的氣動噪音最為複雜。由於計算聲場時，需先計算流場以獲得相關的聲源資訊，因此本研究將發展全域可壓縮流場計算方法，作為將來聲場計算之流場部份的基礎。為了獲得精確度極高之聲源資訊，首先改善過去將流體區分為可壓縮與不可壓縮流的缺失，利用 Preconditioning 法使得程式適用於全域範圍。除此之外，由於邊界條件對於流場與聲場的影響甚鉅，因此計算方法需輔以非反射性邊界，此法不僅提高準確度，更可節省計算空間提昇效率。在紊流模擬方面，本研究更開發出隱式紊流模式：dissipative model，此法利用數值耗散當作紊流模式，不需要額外的方程式描述小渦流運動，計算效能大幅提昇。除此之外，也適用於曲線座標，因此實用性更加廣泛。最後，由於本程式計算過程極為複雜且需要大量的時間，因此發展 OpenMp 與 GPU(Graphics processing unit)平行化計算，大幅提昇計算效能。綜上所述，本研究所發展的流體力學計算方法相當成熟，因此可作為氣動聲學流體計算部份的基礎。

關鍵字：氣動噪音、全域流場、Preconditioning、紊流模式、平行化

**An investigation of computational methods
for all speed compressible flow field for an application of the preliminary study in
aeroacoustics**

Abstract

With the improvement of the life quality, the noise induced by aeroacoustic becomes one of the most important and complicated problems of the noise control. Before resolving the problems of the aeroacoustics, due to the necessary of defining the aeroacoustic source, the aim of this study will develop a computational method for all speed regions. In order to obtain the accurate information of the aeroacoustic source, the preconditioning method is adopted to make the program is suitable for all speed regions. Besides, due to the serious effect of the boundary conditions on fluid and acoustic fields, the computational method should be matched with the non-reflection boundary condition. With the non-reflection boundary condition, the accuracy can be increased and the efficiency can be improved. In the turbulence modeling, the dissipative model is created to generalize the computational method. The extra equations for the motions of small scales can be eliminated and the efficiency can be improved. Besides, this model is also available in the curvilinear coordinate without any modifications so it can be used more general in real applications. Finally, because the tremendous computational time is demanded, parallel computation by OpenMp and GPU are built to improve the efficiency. Therefore, the computational method developed in this study can be potentially a basement in the computational aeroacoustic.

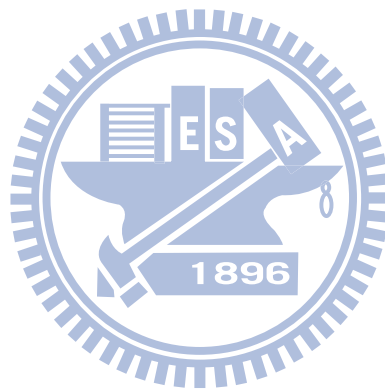
Keywords: aeroacoustic, all speed regions, preconditioning, turbulence modeling, parallel

誌 謝

在交大的七年時間，度過了非常充實且多采多姿的生活。衷心感謝指導教授傅武雄老師在這段時間的指導與幫忙。於課業上面，總是能夠不辭辛勞，不斷鼓勵我要堅持、要充滿信心、要能夠從積極面看待問題，讓我一直對自己的研究充滿熱忱，從解決問題中獲得極大的成就。在生活上，老師讓我更瞭解到，享用這麼豐富的研究資源，未來，自己對於社會，有著更重要的責任，更強烈的使命感。

除此之外，也感謝父母、家人在這段時間支持，自己是非常幸運的小孩，能夠在求學期間，完全專心在課業上而不用擔心其他的事情，因為我知道，家人總是會在背後，默默的支持著我的任何決定。

最重要的，希望本篇論文的完成，能夠讓所有幫助過我的人、投注在我身上的所有資源，都充滿驕傲，感到欣慰。



目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vi
符號表	viii
第一章 緒論	1
第二章 物理模式	6
第三章 LES 計算理論	19
第四章 數值方法	23
第五章 隱式紊流模式	51
第六章 高速運算	58
第七章 結果與討論	62
第八章 結論	135
參考文獻	137
附錄 1	143



表目錄

表 1. 方程式(4-71)與(4-72)參數數值.....	41
表 2. 平均紐塞數與 Khanafer 與 Vafai [40]的比較.....	75
表 3. 馬赫數 0.005 計算參數.....	86
表 4. 馬赫數 0.5 計算參數.....	93
表 5. Dissipative model 計算參數.....	101
表 6. 超音速流體計算參數.....	131



圖目錄

圖 1.	垂直管道物理模式.....	8
圖 2.	水平管道物理模式圖.....	12
圖 3.	三維水平管道物理模式圖.....	15
圖 4.	噴流流場與遠場噪音模式圖.....	18
圖 5.	黎曼問題特徵值結構圖.....	27
圖 6.	L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 於管道兩端的方向性示意圖.....	47
圖 7.	原始 Roe scheme 與[20]之平均速度比較圖.....	52
圖 8.	原始 Roe scheme 與[20]之 Reynolds stress 比較圖.....	53
圖 9.	原始 Roe scheme 與[20]之紊流強度比較圖.....	54
圖 10.	不同 filter 於一維時的轉換方程式.....	57
圖 11.	CUDA 平台架構圖.....	61
圖 12.	高溫壁面 local 紐塞數分佈圖.....	63
圖 13.	Ra 與平均紐塞數比較圖.....	64
圖 14.	$Ra = 10^4$ 流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形.....	67
圖 15.	關係方程式與計算結果比較圖.....	72
圖 16.	流線與等溫線圖與 Khanafer 與 Vafai [41]的比較.....	74
圖 17.	$Ra = 10^4$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖.....	77
圖 18.	Isothermal surfaces 穩態分佈圖形.....	81
圖 19.	沿 z 軸， $x = W$ 、 $x = W/2$ 與 $x = 0$ 的 local 紐塞數分佈圖.....	83
圖 20.	平均紐塞數與 Rayleigh 數關係式.....	84
圖 21.	網格分佈圖形.....	87
圖 22.	流動方向速度強度圖於 $\phi = 40\%$	89
圖 23.	LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之平均速度比較圖.....	90
圖 24.	LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之 Reynolds stress 比較圖.....	91
圖 25.	LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之紊流強度比較圖.....	92
圖 26.	LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之 Reynolds stress 比較圖.....	94
圖 27.	LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之紊流強度比較圖.....	95
圖 28.	LES 配合 Smagorinsky model 與[45]之平均溫度比較圖.....	96

圖 29	LES 配合 Smagorinsky model 與[45]之平均密度比較圖	97
圖 30	瞬時溫度強度圖(0.5 馬赫數)	98
圖 31.	ILES 配合 dissipative model 與[20]之平均速度比較圖	102
圖 32.	ILES 配合 dissipative model 與[20]之 Reynolds stress 比較圖	103
圖 33.	ILES 配合 dissipative model 與[20]之紊流強度比較圖	104
圖 34.	ILES 配合 dissipative model 與[46]之平均速度比較圖	105
圖 35.	ILES 配合 dissipative model 與[46]之 Reynolds stress 比較圖	106
圖 36.	ILES 配合 dissipative model 與[46]之紊流強度比較圖	107
圖 37.	ILES 配合 dissipative model 與[47]之平均速度比較圖	108
圖 38.	ILES 配合 dissipative model 與[47]之 Reynolds stress 比較圖	109
圖 39.	ILES 配合 dissipative model 與[47]之紊流強度比較圖	110
圖 40.	ILES 配合 dissipative model 與[47]之平均速度比較圖	111
圖 41.	ILES 配合 dissipative model 與[47]之 Reynolds stress 比較圖	112
圖 42.	ILES 配合 dissipative model 與[47]之紊流強度比較圖	113
圖 43.	ILES 配合 dissipative model 與[48]之平均速度比較圖	114
圖 44.	ILES 配合 dissipative model 與[48]之 Reynolds stress	115
圖 45.	ILES 配合 dissipative model 與[48]之紊流強度比較圖	116
圖 46.	溫度於 xy 、 xz 與 yz 面的強度圖	118
圖 47.	Isothermal surfaces 於 $Re_\tau = 180$ 、 500 與 940	119
圖 48.	瞬時紐塞數(沿著 xz 面中央)與平均紐塞數(xz 面)比較圖	121
圖 49.	紐塞數與雷諾數關係分佈圖	122
圖 50.	噴流流場速度強度圖	124
圖 51.	噴流流場渦流強度圖	125
圖 52.	遠場聲壓強度與近場速度強度圖	126
圖 53.	壓力 spectra(dB)	127
圖 54	超音速流計算物理模式	130
圖 55	超音速流場速度強度圖	132
圖 56	底板壓力分佈圖與[51]比較	133
圖 57	平板前緣壓力分佈圖與[51]比較	134

符號表

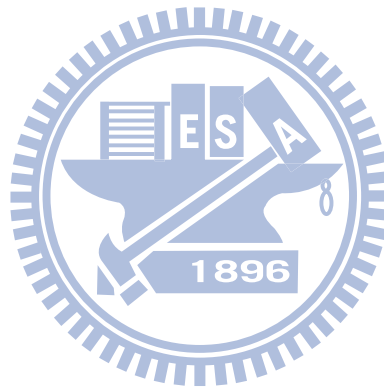
c	original acoustic wave speed (m/s)
ER	Energy ratio
F, G, H	flux vectors
g	acceleration of gravity (m/s^2)
$G(\phi)$	Filter function
i, j, k	Location index
J	Jacobian of transformation
k	Thermal conductivity ($w/m \cdot K$)
l	Length (m)
$Ma.$	Mach number
Nu	Local Nusselt numbers defined in Eq. (7-1), (7-11) and (7-18)
\overline{Nu}	Average Nusselt numbers defined in Eq. (7-3), (7-6), (7-7), (7-8), (7-19) and (7-20)
\widetilde{Nu}	Average Nusselt numbers defined in Eq. (7-13) and (7-15)
P	Pressure (Pa)
Pr	Prandtl number
rms	Root mean square
R	Gas constant ($J/kg/K$)
Ra	Rayleigh number defined in Eq. (7-2), (7-4), (7-5), (7-9) and (7-10)
\widetilde{Ra}	Rayleigh number defined in Eq. (7-14)
Ra^*	Rayleigh number defined in Eq. (7-12)
Re	Reynolds number based on characteristic velocity
Re_τ	Reynolds number based on friction velocity
S	Source term vector
t	Physical time (s)
T	Temperature(K)
U	conserved variable vector
U_p	primitive variable vector
u_τ	Friction velocity $\sqrt{\tau_w/\rho}$ (m/s)
x, y, z	Cartesian axes (m)
y^+	Non-dimensional wall distance $\rho u_\tau y / \mu$

Greek symbols

ρ	density (kg / m^3)
γ	Specific heat ratios C_p / C_v
μ	viscosity ($N \cdot s / m^2$)
τ_w	Wall shear stress (Pa)
β	Thermal expansion coefficient ($1 / K$)
Γ	Preconditioning matrix
ε	Coefficient of dissipative model
τ	Artificial time (s)

Mathematical Operators

\diamond	Ensemble average value
------------	------------------------



第一章 緒論

近年來，由於科技的進步帶動生活品質的提升，機械元件若僅有功能的增強與效率的改善已漸漸無法滿足消費者的需要。相對的，產品對環境所造成的汙染與其舒適度更是不可或缺的一環。在此領域內，又屬噪音的控制最為困難與重要。

噪音對人體的影響可分為身體與心理方面的傷害。對身體方面：不僅耳朵與聽力造成暫時性或永久性的聽覺損失，更會透過神經系統，引起身體其他器官或系統的失調與異常，產生「非聽覺性的影響」。除此之外，長期處於高噪音環境下，容易使身體胃腸蠕動增快、呼吸型態改變、血壓增高、心跳加快、需氧量增加、血清膽固醇增加、血小板凝集等現象，雖不能斷定噪音是導致這些疾病的禍首，但噪音為導致或形成這些疾病的複雜因素之一，卻是無庸置疑的。對心理影響方面：噪音會影響睡眠、妨礙交談、工作效率低落、厭惡、生氣等心理作用，久而久之，因心理反應、失眠而導致生理功能失調等現象，如頭痛、頭暈、精神無法集中等均為噪音直接與間接的影響。兒童如長時期暴露在高噪音的環境下，會採用一種使自己聽不見噪音環境的調適方法來對抗噪音，這將造成兒童在吵雜的環境下變得忽略聲音訊號的不良作用，尤其是兒童不易區分聲音的重要性，將對兒童學習及認知的發展有相當的影響。也因為噪音對日常生活的影響甚鉅，因此像歐盟國家對於噪音的控管，從大至要求所有成員國規範工作環境噪音到小至輸入歐洲的玩具均需符合歐洲委員會授權統一標準組(CEN)於 2001 年所訂立的玩具噪音標準：帶有雷管的玩具所發出的音量水準，不得超過 125 分貝。由上面的敘述中，可以清楚了解到噪音控制在未來工程應用上所扮演的重要角色。

一般而言，噪音產生的原因可概略粗分為「結構產生(structure-borne)」的「結構噪音(Structure-borne noise)」與「氣流產生(air-borne)」的「氣動噪音(Aeroacoustic)」，結構噪音是由於結構表面振動推擠鄰近介質所產生的聲波輻射，產生的機制較易預測，因此在污染控制上已獲得相當程度的改善。氣動噪音肇始於紊流流場的速度或壓力變動，所以有著不可預測性，因此難以改善。但改善氣動噪音的重要性並不亞於結構噪音，例如：個人電腦由於計算速度的日漸增快，所需的散熱風扇越益增加，跟隨而來的是風扇葉片在高轉速之下造成氣動噪音提高的問題。因此如何改進扇葉外型以降低氣動噪音，讓使用者感到舒適，將會是

該產業接下來所面臨到的最大難題；汽車除了在低耗油的設計下，如何降低高速行駛下所造成的氣動噪音以免影響乘客與駕駛者的舒適度更是現今市場中，決定該產品優劣的關鍵之處。

而要改善氣動噪音，必須先了解氣動聲學，該學問由於 Lighthill 於 [1] 所提出的理論而有著開創性的貢獻，Lighthill 將聲源部份利用實驗或計算流體力學方法求得，在利用波動方程式計算其傳遞過程，此即為 Lighthill's analogy。接著，Williams 等人[2]根據 Lighthill's analogy 的方法，重新整理 Lighthill 方程式，由於推導過程是根據 Navier-Stokes 方程式而來且未有任何簡化，所以 Ffowcs Williams-Hawkings 方程式(簡稱 FW-H 方程式)的適用範圍比原始的 Lighthill 方程式更加廣泛。但受限於電腦運算速度的限制，直到 1992 年，William 在[3]中才將氣動噪音與計算流體力學的結合做出合理的預測與整理，其中包括有定義 CAA(Computational AeroAcoustic)的適用範圍與方法、找出適合 CFD 應用的求解方程式、CAA 中邊界條件的定義。此後，隨著運算速度的增快，便有越來越多的文獻是利用 Lighthill's analogy 的方法，結合 CFD 對氣動噪音做出合理的預測與改善。例如：Ohnishi 等人在[4]中，以實用為目的，將 Lighthill's analogy 的方法對三維圓柱體、旋轉的正方體與車輛作出與實驗值接近的氣動噪音預測；Kenji 等人再[5]中，也利用同樣的方法先計算出車子於高速行駛下，照後鏡所產生的氣動噪音，再用其結果與風洞的實驗值做比較，發現兩者吻合。最後在重新設計照後鏡外型，成功降低了氣動噪音。而除了在實際應用方面之外，也有文獻是闡述 Lighthill 方程式下，不同的解所適用的不同範圍，Prieur 等人在[6]中，詳細的解釋了 FW-H 方程式與 Kirchhoff 方程式的適用範圍與相異之處，其指出：FW-H [2]方程式若在一控制表面的範圍內，適用性將不會受到限制；而 Kirchhoff 方程式只適用於相同介質中，線性傳遞的聲波，並且只能計算控制表面與控制表面外的聲場分布。然而氣動聲學的模擬中，除了用 Lighthill's analogy 的方法外，也可使用 Liner Euler Equation(LEE)計算聲場，Addad 等人在[7]以 Star-CD 先計算暫態流場之後，在以 LEE 去對渦流(vortex)產生的機制與聲源(acoustic source)的關係做比較，發現流場中渦流所產生的位置與聲源所產生的位置幾乎相同。除此之外，國內則有梁勝明等人[8]以 Euler Equation 預測排氣管內震波所產生的噪音並且予以改善。但是 Bogy 等人在[9]中，非常明白的指出，在低馬赫數的情況下，選擇 Lighthill 方程式來分析聲場是比較快速且準確的。

由上述的原理得知，由於聲源是由流場中的壓力與速度變動所引起，因此要計算聲場必先得到紊流場中速度與壓力的變化，因此需先計算可壓縮流之紊流暫態流場。然而依照目前大部分的計算方式，在計算流場部份多依照流體速度將其區分為可壓縮流(大於 0.3 馬赫)與不可壓縮流(小於 0.3 馬赫)，此種區隔卻嚴重的影響其應用範圍：如引擎內部的流場，雖然為低速流場但卻因為伴隨高溫的燃燒而產生可壓縮的效應；噴流所產生的噪音，需考慮聲源部分的密度變化與壓力變化，因此需要求解完整的 Navier-Stokes 方程式以得到可壓縮流中密度的變化；高溫下的熱傳與熱對流效應，需同時考慮密度與壓力變化的效應以符合實際物理現象。

為了解上述氣動噪音問題，需先發產可壓縮流黏性流體適用於全域的方法，期以獲得計算聲場時所需的聲源資訊。此種方法最大的困難處在於計算低速流場時，聲波傳遞的速度與流場的速度差異過大，使得計算效率極差。若使用於顯示法中，將會因為受限於 CFL 條件而使得時階過小，收斂不易；若使用於隱示法中，又會造成矩陣的 stiff 現象，使得程式效率過低。為了克服此困難，就筆者所知，Briley 等人[10]最早利用 preconditioning 法改善低馬赫數下，使用隱式法去解決 Navier-Stokes 方程式的收斂問題。Turkel[11]發展了 preconditioning 矩陣，並且討論此法於可壓縮流與不可壓縮流上的應用。Choi 等人[12]討論低馬赫數下，非黏性流利用隱示法解決時，由於 stiff 現象與 factorization error 的收斂問題。並且將 preconditioning 矩陣放置於尤拉方程式中，成功改善了馬赫數為 0.05 時的收斂問題。Choi 等人延續 [12]的研究，於[13]中提出適合黏性流體的 preconditioning 矩陣，解決黏性流體於低馬赫數下的收斂問題。Roe[14]利用其所發展的 averaged variables 解決可縮流中的網格介面不連續問題，Roe 法目前被廣泛的應用於解決可縮流體上。Weiss 等人[15]則延續 Choi 的人的研究，將 Roe 法配合 preconditioning 法應用於三維的 N-S 方程式中，並且加入 dual time stepping 計算低馬數下的暫態流體問題。上述文獻皆屬於以 density based 為主的計算方法，而除了此法之外，pressure based 為主的方法，在低速不可壓縮流的應用也相當廣泛，Patankar 與 Spalding[16]等人所提出 SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations)法，即是以 pressure based 為基礎所發展，目前被廣泛應用於不可壓縮流的流場問題。但由於 pressure based 為主的計算方法於可壓縮流的計算時需要較多的修正，因此本研究選擇以 density based 的計算方法。

除了發展全域黏性流場的計算方法外，由於聲場極易被邊界條件所影響而造成較大的誤差，因此本研究也將發展適合於計算聲場的邊界條件，以解決上述問題。為了解析可壓縮流進出口邊界的問題，Rudy 等人[17]提出非反射性邊界條件，此方法簡單且容易應用。Poinsot 等人[18]則提出 Navier-Stokes characteristics boundary conditions(NSCBC)，除了出口條件外，亦包含如何解決進口以及有無滑移壁面條件等問題。除了非反射性邊界條件外，Freund [19]提出吸收性邊界條件，由於程式撰寫容易、精度較非反射性邊界條件高，僅需增加些許的計算空間即可得到良好的計算結果，因此應用範圍極廣。但上述文章所討論的流場大都大於 0.3 馬赫。是否適用於較低速的可壓縮流狀態，則未見詳細討論。

至於紊流流場的計算中，目前而言，有 DNS(Direct Numerical Simulation)、RANS(Reynolds Averaged Navier-Stokes)與 LES(Large Eddy Simulation)三種方法。其中 DNS，除了需耗費大量的計算時間外，更有著雷諾數不可過高的缺點，造成其應用層面上受到限制。但是由於 DNS 的準確度高，並且可模擬紊流流場中的小尺度渦流特性，因此其模擬結果常被作為 Benchmark 解比較，如 Kim 等人 [20]。RANS 雖然有著計算過程簡便，運算時間較快等優點，但由於其計算為時均化的結果，無法有效表現紊流流場中流體性質隨時間變動等特性，使得應用範圍受到限制。LES 則介於 DNS 與 RANS 之間，有著計算時間較 DNS 迅速且暫態結果較 RANS 吻合實際物理情況等優點。LES 的基本架構建立於只計算大尺度(large scale)物理量對於流場的影響，小尺度(small scale)部份的物理量由於對流場的影響甚微於是予以模組化以大幅降低計算時間。

為了讓 LES 能夠適用於聲場的計算，本研究選擇隱式 LES 法(ILES)模式模擬流場。比起傳統的顯式 LES 模式如 Smagorinsky 模式或 dynamic 模式等，由於不需要額外的方程式描述小渦流運動，因此應用範圍較廣且程式撰寫容易。此法的概念首先由 Boris [21]提出，接著 Grinstein 等人 [22]加以整理並發展出隱式紊流模式。此法的基礎建立於顯式紊流模式的作用與數值耗散作用相似，因此可利用數值耗散作為紊流模式而不需要多餘的方程式描述小渦流運動。

由於可壓縮紊流(compressible turbulent flow)的現象複雜且低馬赫數下收斂不易的問題，在探討 LES 結合 preconditioning 法計算低馬赫數的文獻並不多。Lessani 等人[23]利用 LES 模擬管道流與空穴流，並且加入 preconditioning 法配合 multigrid 法加速收斂。其結果顯示此種方式將比單純的顯示法提昇約 4-7 倍效率。

Xu 等人[24]利用有限體積法與 LES 模擬 pipe 流，其結果與實驗值或 DNS 模擬的結果相比較，皆非常準確。Alkishriwi 等人[25]利用 LES 配合上 preconditioning 法與 multigrid 法模擬不同馬赫數與不同時階下， $Re_r = 590$ 的管道流與 $Re = 3900$ 的圓柱流。結果顯示此方法不但極有效率而且大幅改善低馬赫數下的收斂問題，比五階的 Runge-Kutta 顯示法快上約 4-60 倍。

綜上所述，本研究將發展全域可壓縮流場計算方法，作為將來聲場計算之流場部份的基礎。為了完成上述目標，需先發展層流全域速度場之計算方法輔以精確度較高之邊界。為了驗證該計算方法的準確性與延伸其應用性，因此將此計算方法應用於管道內高溫自然對流現象，成功改善 Bossinesq 假設只能容許約 30 度溫差[26]自然對流之缺點。除此之外，也發展出應用於管道兩端的低速非反射性邊界，因為不需增加大空間，所以大幅提昇計算效率。在完成層流計算方法開發後，也發展出可壓縮之隱式大渦流模擬法，藉由計算紊流流場中的 correlation 並且與 DNS 資料比較，驗證紊流模式之準確度。由上述內容可知，本研究所發展之流場計算方法應用性極廣，包含高速流場、低速流場、紊流流場與層流流場皆可利用本計算方法而得到精確的結果，作為聲場計算之流場部份的基礎。



第二章 物理模式

2.1 垂直管道物理模式：

垂直管道所採用的物理模式如圖 1 所示，主要為一個高 l_0 與寬 w 的二維垂直管道。其中高溫壁面高度為 l_2 且位於左側壁面，高溫壁面距離上方與下方開口面高度分別為 l_1 與 l_3 ，又該一高溫壁面的溫度固定為 T_h 。在垂直管道中除了高溫壁面外，其餘兩側的壁面皆為絕熱狀態。而外面的環境溫度與壓力分別為 $T_c = 298.06K$ 與 $P_0 = 1atm$ ($101300Pa$)

在計算時所採取的基本假設如下：

- (1) 流場為二維且層流流場。
- (2) 工作流體為空氣，假設其為理想氣體。
- (3) 進出口條件皆為完全非反射條件。

求解的方程式為考慮黏滯性、流體可壓縮性與重力影響的二維 N-S 方程式與理想氣體方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (2-1)$$

與

$$P = \rho RT \quad (2-2)$$

其中， U 、 F 、 G 與 S 的值如下所示：



$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \\
 F &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho Eu + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} \end{pmatrix} \\
 G &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} \end{pmatrix} \\
 S &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gu \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-3}$$

此處 $E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ 。

空氣的黏滯係數與熱傳導係數則根據 Sutherland's law 求得：

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \tag{2-4}$$

$$k(T) = \frac{\mu(T)\gamma R}{(\gamma-1)\text{Pr}} \tag{2-5}$$

此處的 $\rho_0 = 1.18 \text{kg}/\text{m}^3$ 、 $g = 9.81 \text{m}/\text{s}^2$ 、 $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 、 $T_0 = 298.06 \text{K}$ ， $\gamma = 1.4$ ， $R = 287 \text{J}/\text{kg}/\text{K}$ 與 $\text{Pr} = 0.72$ 。

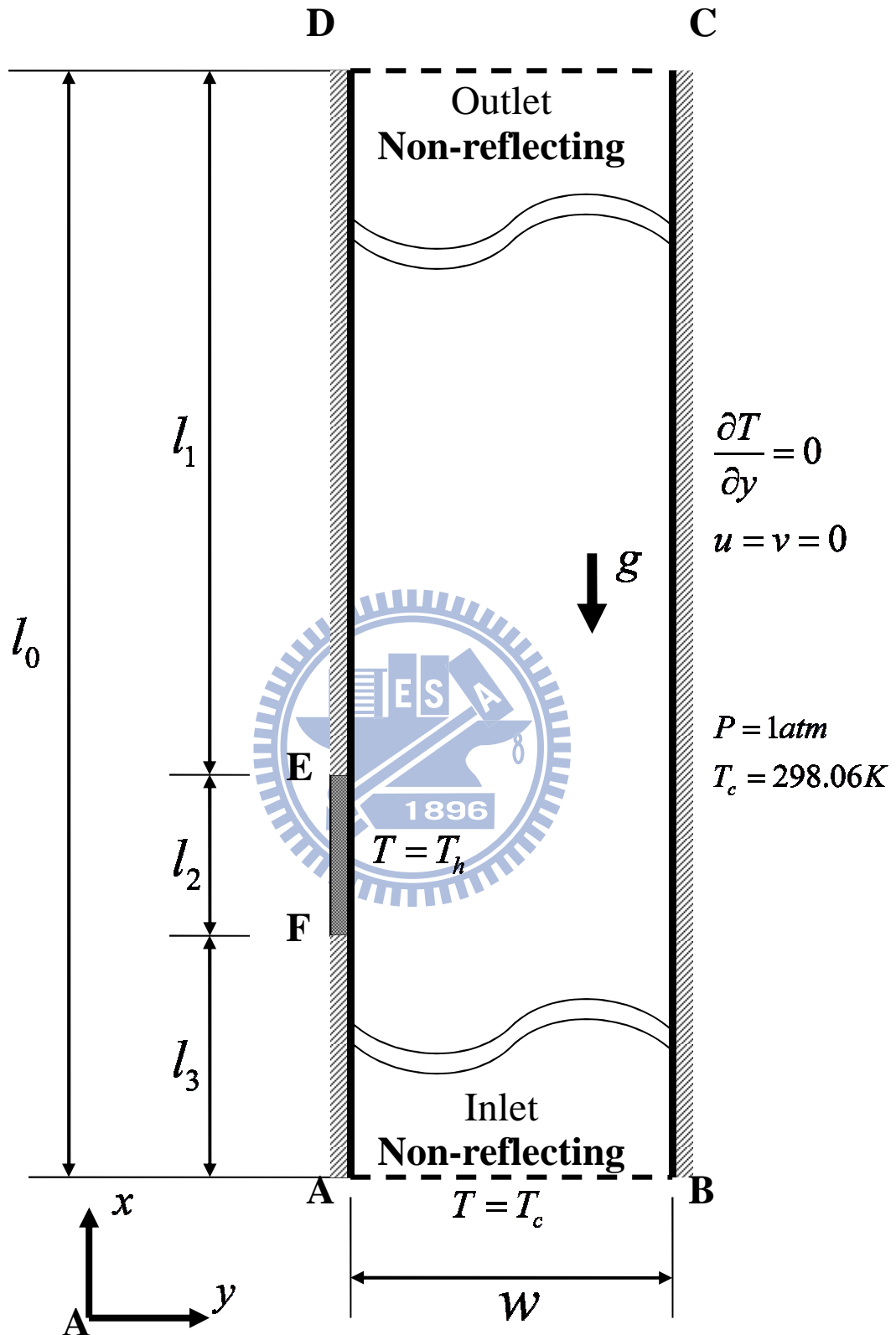


圖 1. 垂直管道物理模式

2.2 水平管道物理模式：

水平管道所採用的物理模式圖如圖 2 所示，為三維水平放置之管道。其長、寬與高分別為 $11W$ 、 $2W$ 與 W 。加熱面則放置於管道下方，長度與寬度分別為 $2W$ 與 $2W$ 。除此之外，加熱面的溫度為 T_h ，除了加熱面外，其餘壁面皆為絕熱條件。而外面的環境溫度與壓力分別為 $T_c = 298.06K$ 與 $P_0 = 1atm$ 。

由於壁面加熱的關係，管道內將會產生自然對流現象。首先，於管道內，加熱面上方的氣體上升至管道上方壁面。接著開始延著管道上方壁面的兩邊流出。在此時，管道兩端也開始從外界吸入溫度較低的流體。於是，再管道兩端，將會因為聲波速度與流體速度差異過大而造成上下壁面全然不同的反射現象。方便起見，在同一平面，存在著由於流動方向所造成兩種方向相異的反射現象，本研究稱之為「雙反射現象」。

在計算時所採取的基本假設如下：

- (1) 工作流體為空氣，假設其為理想氣體。
- (2) 加熱壁面與高溫壁面皆為不可滲透條件。
- (3) 層流流場。

求解的方程式為考慮黏滯性、流體可壓縮性與重力影響的三維 N-S 方程式與理想氣體方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (2-6)$$

$$P = \rho RT \quad (2-7)$$

其中， U 、 F 、 G 、 H 與 S 的值如下所示：

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \\
 F &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Eu + Pv - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{pmatrix} \\
 G &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{pmatrix} \\
 H &= \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho Ew + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{pmatrix} \\
 S &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gv \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2-8}$$

此處 $E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ 。

空氣的黏滯係數與熱傳導係數則根據 Sutherland's law 求得：

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \tag{2-9}$$

$$k(T) = \frac{\mu(T)\gamma R}{(\gamma-1)\text{Pr}} \quad (2-10)$$

此處 $\rho_0 = 1.18\text{kg}/\text{m}^3$, $g = 9.81\text{m}/\text{s}^2$, $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5}\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, $T_0 = 298.06\text{K}$, $\gamma = 1.4$,
 $R = 287\text{J}/\text{kg}/\text{K}$ and $\text{Pr} = 0.72$.



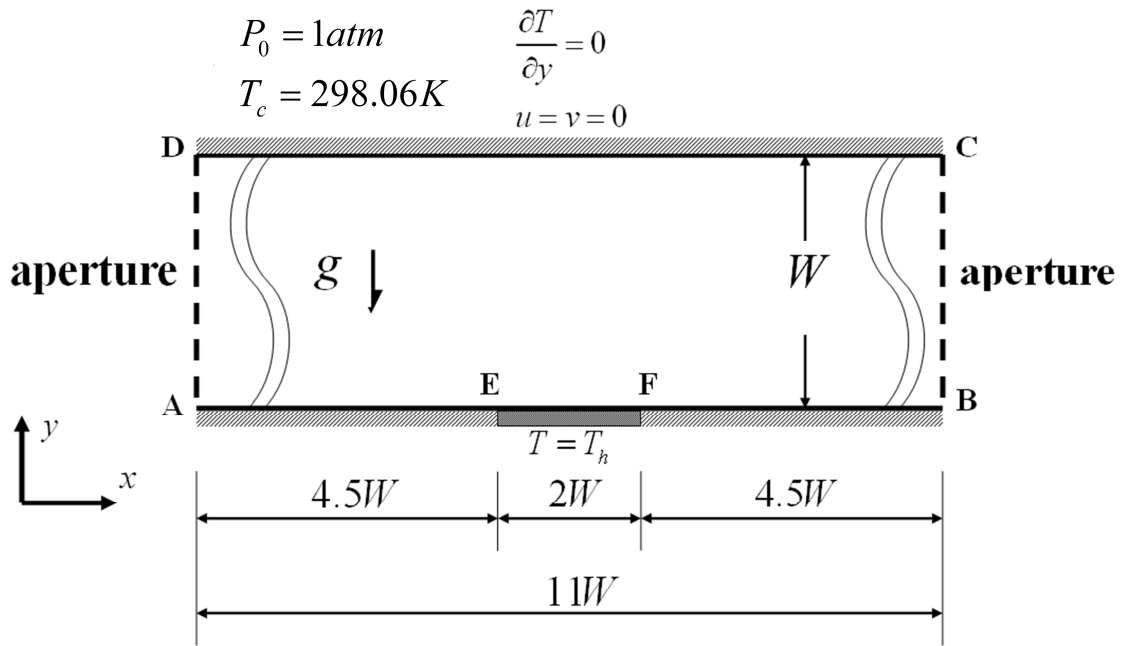


圖 2(a). 水平管道物理模式圖

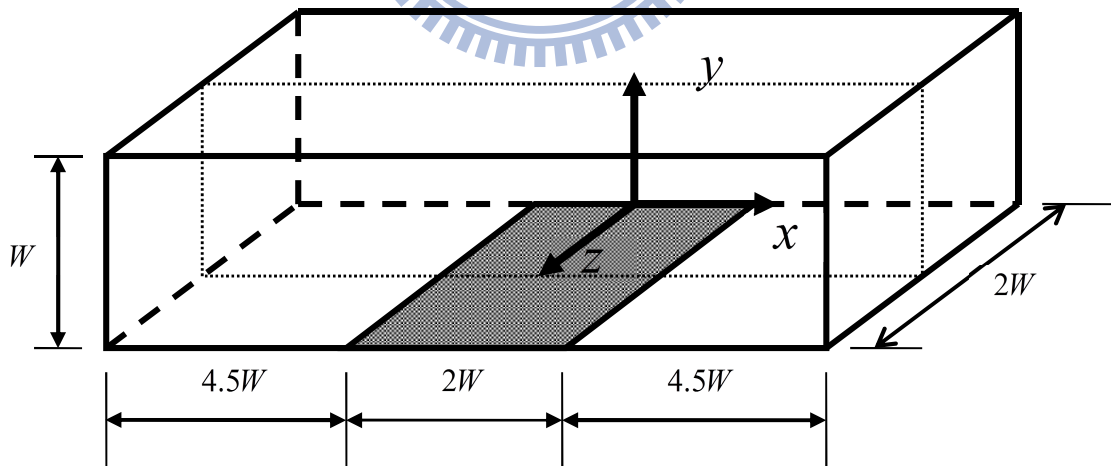


圖 2(b). 水平管道物理模式圖

圖 2. 水平管道物理模式圖

2.3 無限平板紊流流場物理模式：

為了驗證本計算方法於模擬紊流流場的準確性，將以 LES 法模擬包含可壓縮性的紊流流場。其物理模式圖如圖 3 所示，其流動方向、垂直方向與水平方向分別為 x 、 y 與 z 。其所對應速度分別為 u 、 v 與 w 。平板的長、高與寬則為 l_1 、 l_2 與 l_3 。

在計算時所採取的基本假設為以下：

- (1) 工作流體為空氣，理想氣體。
- (2) 忽略重力效應。

根據 Trong [27]，方程式可表示如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2-11)$$

其中，

$$U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{pmatrix} \quad (2-12)$$



$$F = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{P} - (\mu + 2\bar{\rho}\nu_t) \left[2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \tilde{V}) \right] \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} - (\mu + 2\bar{\rho}\nu_t) \left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right] \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} - (\mu + 2\bar{\rho}\nu_t) \left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} \right] \\ \boxed{\begin{aligned} &\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{u} + \tilde{P}\tilde{u} - k\frac{\partial T}{\partial x} - (\bar{\mu} + 2\bar{\rho}\nu_t) \\ &\{ \tilde{u} \left[2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \tilde{V}) \right] + \tilde{v} \left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right] + \tilde{w} \left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} \right] \} - \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \end{aligned}} \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

$$\tilde{P} = \bar{\rho}R\tilde{T} \quad (2-14)$$

其中上標 bar 為流場經過 filter 的形式，上標 tilde 為 filter 後的流場在經過 Favre-averaged 的形式。

空氣的黏滯係數與熱傳導係數則根據 Sutherland's law 求得：

$$\mu(\tilde{T}) = \mu_0 \left(\frac{\tilde{T}}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{\tilde{T} + 110} \quad (2-15)$$

此處 $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$, $T_0 = 298.06 \text{ K}$

根據 Smagorinsky 模型， ν_t 可表示如下

$$\nu_t = C \Delta^2 |\tilde{S}| \quad (2-16)$$

此處 $\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{\frac{1}{3}}$, $|\tilde{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}}$, $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)$

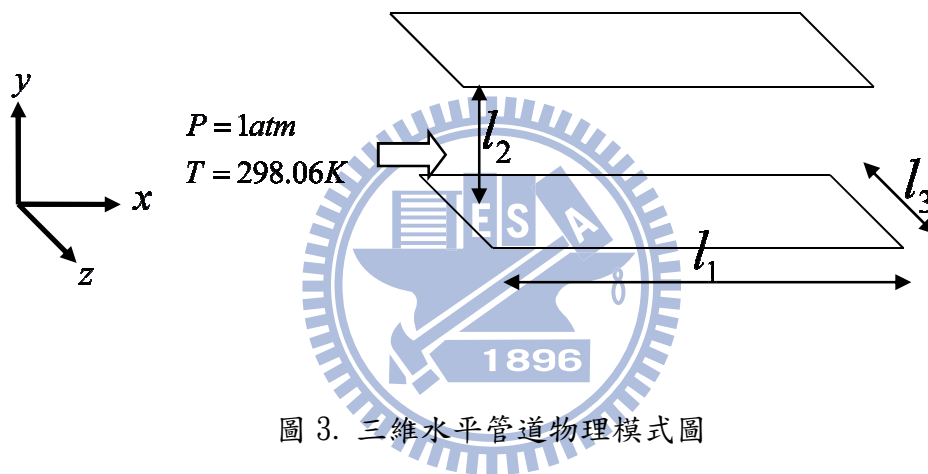
方程式(2-16)中的 C 則是根據 Van Driest damping function 來決定

$$C = 0.01 \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{d^+}{25}\right)\right] \right\} \quad (2-17)$$

此處 $d^+ = \frac{\rho u_\tau d}{\mu}$ ， u_τ 為摩擦速度，可表示成 $\sqrt{\tau_w / \rho}$ ， τ_w 為流場與壁面的剪應力，

d 則是計算網格離壁面的距離。





2.4 噴流流場：

在完成全域流場的開發之後，將利用此程式模擬噴流流場以獲得聲源資訊，接著把聲源資訊帶入 Lighthill 方程式，求得遠場的聲壓分佈。其物理模式圖如圖 4 所示，流場部份的統御方程式為 Navier-Stokes 方程式，長度與高度分別為 l_1 與 l_2 ，噴流進口寬度半高為 R ，進口速度為 $10m/s$ ，雷諾數以噴流進口半徑 R 為特徵長度約為 3000 左右，其中 $l_1/R=50$ 、 $l_2/R=120$ 。Buffer zone 為利用吸收性邊界，使得流體離開計算範圍時，不會影響到計算精度，其大小約為 $10R$ 。

在計算時所採取的基本假設如下：

- (1) 流場為二維。
- (2) 工作流體為空氣，假設其為理想氣體。
- (3) 進出口條件為吸收性邊界。

求解的方程式為考慮黏滯性、流體可壓縮性與重力影響的二維 N-S 方程式與理想氣體方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (2-18)$$

與

$$P = \rho RT \quad (2-19)$$

其中， U 、 F 、 G 與 S 的值如下所示：

$$\left. \begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \\ F &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho Eu + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

$$\text{此處 } E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)。$$

空氣的黏滯係數與熱傳導係數則根據 Sutherland's law 求得：

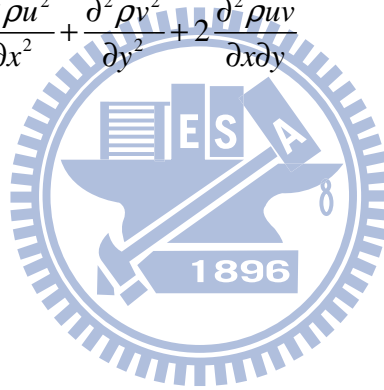
$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \quad (2-21)$$

$$k(T) = \frac{\mu(T)\gamma R}{(\gamma-1)\text{Pr}} \quad (2-22)$$

此處的 $\rho_0 = 1.18 \text{ kg/m}^3$ 、 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 、 $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ 、 $T_0 = 298.06 \text{ K}$ ， $\gamma = 1.4$ ， $R = 287 \text{ J/kg/K}$ 與 $\text{Pr} = 0.72$ 。

聲場部份的統御方程式為 Lighthill 方程式，其詳細描述與推導過程可參閱附錄 1，方程式的右邊項即為利用流場程式計算所得的聲源項，左邊為波動方程式。聲場部份計算範圍的高度為 $60R$ 、長度為 $150R$ 。

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0 \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \rho u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho v^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \rho uv}{\partial x \partial y} \quad (2-23)$$



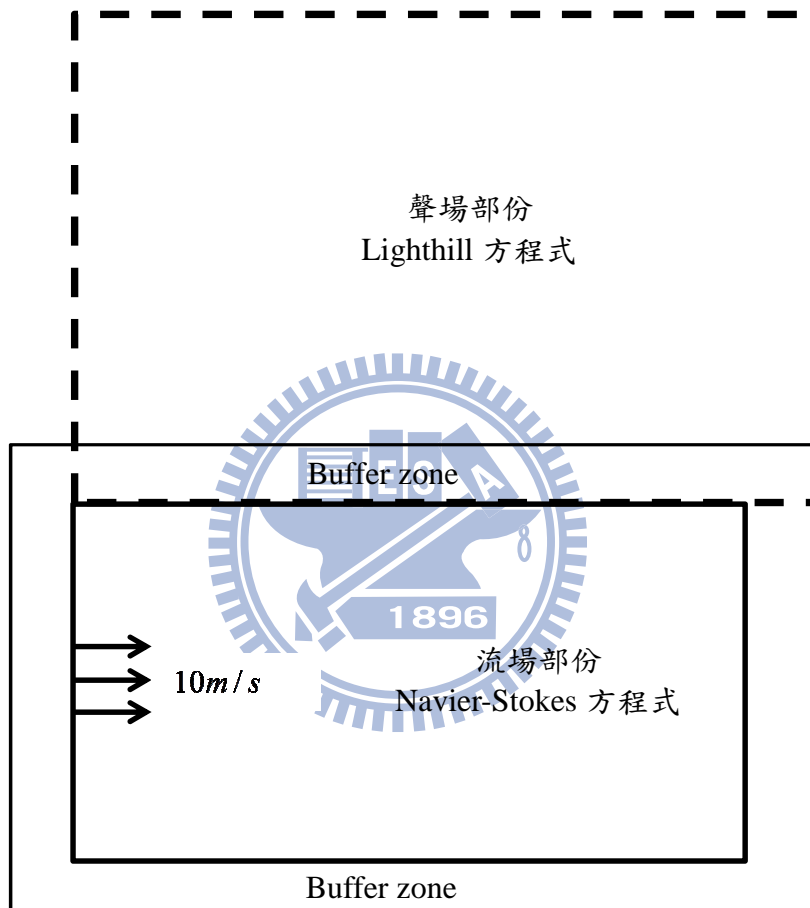


圖 4. 噴流流場與遠場噪音模式圖

第三章 LES 計算理論

再完成全域流場程式之後，在黏滯項部分再加入 LES 紊流模式。LES 紊流模式的統域方程式與其物理意義如下：

LES 將流體物理量區分為大尺度(large-scale)與次格點尺度(subgrid scale (SGS))兩部分。對於大尺度的物理量在 LES 中直接由 Navier-Stokes 方程式求解，而在次格點尺度內的物理量則需要模式化。

目前大部分的次格點尺度流體剪應力模式(subgrid-scale stress models)是以流體剪應力假設為基礎，其中最常被引用的模式為 Smagorinsky 次格點尺度流體剪應力模式。

首先應用 LES 解決紊流問題的是 Deardorff[28]。他所模擬的為管道流體運動，雷諾數相當的大。其最大貢獻在於闡述了利用 LES 方法來模擬三維流場的可能性。為了容易表示，於此章節中所使用的記號皆用 tensor 形式表示。

由 Kolmogorov 的相似法則得知，小渦流的性質和雷諾數無關，因此小渦流部分使用模式計算，而大渦流部分使用數值計算。其中窩流大小的劃分採用過濾(filter)方法，用 filter function 將計算範圍確定：

$$\bar{U}(r,t) = \bar{U}(r) + U'(r,t) \quad (3-1)$$

在波數(wave number)空間中， $U'(r,t)$ 表示某些波數的組合

$$U'(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}'(r,t) e^{ikr} dk \quad (3-2)$$

具有空間和時間性質的物理量， $f(r,t)$ 之局部空間平均 $\bar{f}(r,t)$ 為

$$\bar{f}(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r,r') f(r',t) dr' \quad G(r,r') \text{ 為 filter function} \quad (3-3)$$

其中較常見的 filter function 有下列幾種：

(1) Gaussian filter function :

$$G(x_i, x'_i) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \times \frac{1}{\Delta_i} \exp\left[-\frac{6(x_i - x'_i)^2}{\Delta_i^2}\right] \quad (3-4)$$

(2) Top hat filter function :

$$G(x_i, x'_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & x_i - \frac{\Delta_i}{2} < x'_i < x_i + \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-5)$$

(3) sharp cutoff filter function :

$$G(x_i, x'_i) = \frac{2S_{in} \left[\pi - \frac{(x_i - x'_i)}{\Delta_i} \right]}{\pi(x_i - x'_i)} \quad (3-6)$$

其中 Δ_i : filter width

$$f(r) = \bar{f}(r) + f'(r)$$

如果利用上述 filter 對 Navire-stokes 方程式過濾，並且是在不可壓縮條件可得：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \tau_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (3-8)$$

其各項所代表的物理意義分別為：

$$L_{ij} \text{ (Leonard) 項} : \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

大渦流因和小渦流之間干涉作用而承受應力，此應力擔負部分大渦流能量的耗散，使用不同之 filter function，渦流尺寸會有不同。若使用 sharp cutoff filter function，小渦流完全被過濾，無干涉作用產生，此項則為零。

$$C_{ij} \text{ (Cross 項)} : \overline{\bar{u}_i + u'_j} + \overline{\bar{u}_j + u'_i}$$

負擔相當部分之大渦流能量之散逸，需 modeling，若以體積平均作為 filtering，則 L_{ij} 和 C_{ij} 不會出現。 L_{ij} 、 C_{ij} 和 R_{ij} 大小約為同 order， $L_{ij} + C_{ij}$ 有相互抵銷的作用，若兩項同時忽略，誤差很小。

R_{ij} (Reynold 項)： $\overline{u'_i u'_j}$

SGS(subgrid scale) model 通常指 Reynolds stress 項，負擔大部分小渦流，對大渦流的干涉 s 行為，並含能量散逸

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \zeta_{ij} \frac{\overline{u'_k u'_k}}{3} = \left[-v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3-9)$$

在 R_{ij} 項內，小渦流導致之垂直應力 $\overline{u'_k u'_k}$ 的平均值，包含在大渦流的靜壓力項 \bar{P} 內，因此大渦流實際之靜壓力大小 \bar{p} 為 \bar{P} 減掉垂直應力部分。

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{1}{3} \rho \overline{u'_k u'_k} \quad (3-10)$$

$$v_t = (C_s \Delta)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-11)$$

$$P = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{3} K_G \quad K_G = \frac{v_t^2}{(C_v \Delta)^2} \quad C_v = 0.094$$

C_s ：0.1 壁面紊流；0.25 等方向性紊流；0.15 介於上述兩者之間

Δ ：網格間距

但由於本研究需計算密度變化，因此需要利用上述(3-4)至(3-6)的 filter 於未有任何簡化的 Navier-Stokes 方程式下，再利用 Favre-filtered(density-weighted)變數對其進行過濾，避開方程式無法閉合的問題，其方法如下：

假設有一方程式 f ，其 filtered 形式為 \bar{f} 且其 Favre-averaged 形式為 \tilde{f} ，於是

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \int_V G f dV \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

在上式中， G 為 filtering 方程式，利用上式對 Navier-Stokes 方程式過濾可得：

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} \tilde{u}_k = 0 \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{u}_l + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} - \frac{\partial \tilde{\tau}_{kl}}{\partial x_l} + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = 0 \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{E}_l \tilde{u}_l + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{p} u_l - \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{u}_k \tau_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{k} \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{T} \right) + \tilde{u}_k \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + C_v \frac{\partial q_l}{\partial x_l} = 0 \quad (3-14)$$

過濾後的理想氣體狀態方程式為：

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (3-15)$$

原始的 Navier-Stokes 方程式中的動量方程式經過過濾後得到(3-13)式，其次格點尺度對方程式的影響 σ_{kl} 可表示成：

$$\sigma_{kl} = \bar{\rho} (\tilde{u} \tilde{u} - \tilde{u}_k \tilde{u}_l) \quad (3-16)$$

為了讓 LES 方程式成為閉和系統(close system)，因此需對(3-16)式模式化。根據 Moin 所提出，(3-16)式可表示成：

$$\sigma_{kl} = -2C \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| \left(\tilde{S}_{kl} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{kl} \right) + \frac{1}{3} q^2 \delta_{kl} \quad (3-17)$$

其中 $q^2 = \sigma_{ii}$

$$\tilde{S}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} \right) \text{ 且 } |\tilde{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{kl} \tilde{S}_{kl}}$$

根據 Smagorinsky model

$$\nu_t = C \Delta^2 |\bar{S}| \quad (3-18)$$

$$\text{其中 } \Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}}, \quad |\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}$$

在靠近管道壁面處， C 則不為常數，為了讓 C 隨著流場變化，Germano 等人[29]發展了 dynamic SGS model，然而如同 Trong[26]所提，此法雖然可正確的決定常數 C ，但由於其需要額外的 filter 而導致計算時間增加，除此之外，dynamic model 也存在著於曲線座標中，方程式無法閉合而需修正的問題。

第四章 數值方法

在過去，計算流場時多利用流場速度將其區分為可壓縮流與不可壓縮流，此種區分法將使的流體計算方法應用範圍受到限制，因此本研究開發全域可壓縮流場計算方法解決此問題。

本研究在流場方面的計算方法可分為兩部分：第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式(Euler equation)，採用 Riemann 問題中的 Roe 方法計算通量(flux)，並且引入 preconditioning 方法，讓程式不論在計算高馬赫數的可壓縮流或低馬赫數的可壓縮流，皆可獲得良好之收斂結果；第二部份為黏滯性項的計算，以中央插分法計算速度梯度。在時間項方面則分別採用隱式法(implicit)與顯示法(explicit)兩種。

考慮完整 Navier-Stokes 方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-1)$$

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix}, \text{ 其中 } E = e + \frac{V^2}{2}, \text{ } e \text{ 為內能: } e = \frac{P}{\rho(\gamma-1)}, \quad V = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho v u - \tau_{xy} \\ \rho w u - \tau_{xz} \\ \rho E u + p u - k \frac{\partial T}{\partial x} - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} - w \tau_{xz} \end{Bmatrix},$$

$$G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho w v - \tau_{yz} \\ \rho E v + p v - k \frac{\partial T}{\partial y} - u \tau_{yx} - v \tau_{yy} - w \tau_{yz} \end{Bmatrix},$$

$$H = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho Ew + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{array} \right\}$$

上式可拆解成黏滯性項與非黏滯性項：

$$F = F_{inviscid} + F_{viscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Eu + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ +u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{array} \right\}$$

$$G = G_{inviscid} + G_{viscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Ev + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ +u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{array} \right\}$$

$$H = H_{inviscid} + H_{viscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho Ew + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ +u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{array} \right\}$$

由非黏滯項所組成的方程式，即稱為尤拉方程式，再一次整理如下，

$$\text{Euler equation : } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_{inviscid}}{\partial x} + \frac{\partial G_{inviscid}}{\partial y} + \frac{\partial H_{inviscid}}{\partial z} = 0$$

$$U = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{array} \right\},$$

$$F_{inviscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Eu + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\},$$

$$G_{inviscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Ev + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\},$$

$$H_{inviscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho Ew + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\}$$



在雙曲線(hyperbolic)的守恆形式(conservative type)方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續(piecewise)常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維的

$$\text{黎曼方程 } \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a \text{ 為 Jacobian 矩陣} \quad (4-2)$$

$$\text{初始條件: } u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

接著將方程式(4-2)重新改寫，

$$U_t + AU_x = 0 \quad (4-4)$$

再從 A 中找出特徵值與特徵矩陣

$$A = K\Lambda K^{-1}, \text{ 其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣: } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]$ 為特徵向量，所以 $AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}$

接著定義特徵變數 W (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = K^{(-1)}U \text{ 或 } U = KW,$$

所以 $U_t = KW_t$ 且 $U_x = KW_x$ ，再將此結果帶入(4-4)中，可得：

$$KW_t + AKW_x = 0, \text{ 可再繼續簡化成：}$$

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \tag{4-5}$$

方程式(4-5)稱為 Canonical form 或 Characteristic form

將其結果整理如下：

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \text{ 或 } \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_x = 0$$

方程式(4-5)可以由特徵曲線法求得其解為：

$$w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \tag{4-6}$$

其中， α_i 與 β_i 為初始值的特徵變數。由於 $U = KW$ ，可以得到

$$u(x, t) = \sum_i^m w_i^0(x - \lambda_i t) K^{(i)}$$

參照圖 5，可以進一步推導出



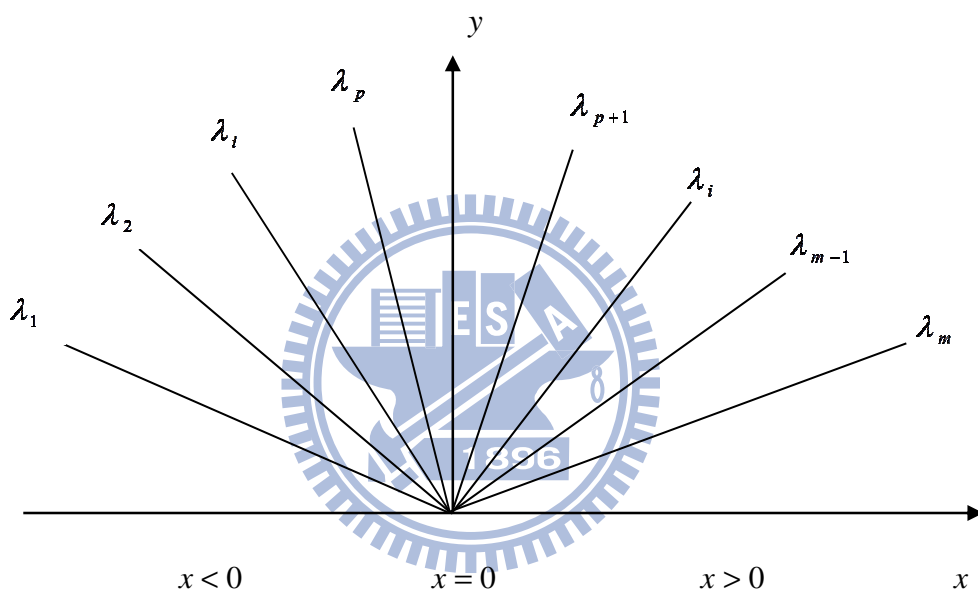


圖 5：黎曼問題特徵值結構圖

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (4-7)$$

除此之外，還可決定出 $u(x,t)$ 中的 jump Δu ：

$$\Delta u = u_R - u_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (4-8)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$

在黎曼問題中，雖然有 exact solution，但在非線性項部分需利用疊帶等方法處理，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題(approximation Riemann problem)解而不直接求其 exact solution。在近求解似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe[14]所提出，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4-9)$$

根據 chain rule，可將方程式(4-9)改寫如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{再令 } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}, \text{ 於是方程式(4-9)可以表示成：}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (4-10)$$

其中， $A(U)$ 就稱為 Jaconian 矩陣。

而 Roe 將原本的 Jaconian 矩陣 $A(U)$ 用一常數 Jaconian 矩陣(constant Jaconian matrix) $\tilde{A}(U_L, U_R)$ 代替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (4-11)$$

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases}$$

於是可得到方程式(4-11)的解析解。由上述的原理可得知：在近似黎曼問題上，Roe 利用常數 Jaconian 矩陣取代原本的 Jaconian 矩陣使方程式從非線性變成線性，但是初使條件並沒有被改變，因此可以得到方程式(4-9)的近似解。

為了要求得合理的常數 Jaconian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1. U 與 F 之間，存在著線性轉換的關係。

2. 當 $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則 $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處 $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。

3. $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。

4. 矩陣 \tilde{A} 的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jaconian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3. 則是為了符合守恆定律 (conservation law) 與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(4-6)與(4-8)式得到， $U_{i+1/2}(x/t)$ 的解可以利用下面的方程式計算：

$$U_{i+1/2}(x/t) = U_L + \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (4-12)$$

或

$$U_{i+1/2}(x/t) = U_R - \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (4-13)$$

其中 $i+1/2$ 表示網格與網格之間的交界面(face)。

而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{Q})}{\partial x} = 0, \text{ 根據(4-11)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守衡的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (4-14)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解 $U_{i+1/2}(0)$ ，可得到通量(flux)的數值公式：

$$F_{i+1/2} = \tilde{F}(U_{i+1/2}(0)) - F(U_R) - \tilde{F}(U_L) \quad (4-15)$$

再從 $\tilde{F} = \tilde{A}U$ 的關係中可進一步求得：

$$F_{i+1/2} = \tilde{A}U_{i+1/2}(0) - F(U_R) - \tilde{A}U_L \quad (4-16)$$

再根據(4-12)式與(4-13)式可以推導出：

$$F_{i+1/2} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (4-17)$$

或

$$F_{i+1/2} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (4-18)$$

(4-17)與(4-18)所指的 $\tilde{\lambda}_i^-$ 與 $\tilde{\lambda}_i^+$ 分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的方法將 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \right] \quad (4-19)$$

再由(4-7)式可再次改變 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (4-20)$$

其中 $\Delta U = U_R - U_L$ 、 $|\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}$ ，

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}(|\tilde{\lambda}_1|, |\tilde{\lambda}_2|, \dots, |\tilde{\lambda}_m|)$$

考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (4-21)$$

其中 $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}$ ； $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}$ ， a 為聲速

方程式(4-21)的 jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

特徵值： $\lambda_1 = u - a$ ， $\lambda_2 = u + a$

特徵向量： $K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}$ ， $K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$

接著選定 parameter vector

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho u} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

再將 F 與 U 利用 Q 表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

為了表示出 ΔU 與 ΔF 需在定義 averaged vector \tilde{Q} :

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

再找出 $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$ 與 $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$ 使得

$$\Delta U = \tilde{B} \Delta Q ; \Delta F = \tilde{C} \Delta Q \quad (4-27)$$

將(4-27)結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C} \tilde{B}^{-1}) \Delta U \quad (4-28)$$

再根據條件 3 求出近似 Jacobian 矩陣

$$\tilde{A} = \tilde{C} \tilde{B}^{-1} \quad (4-29)$$

為了滿足(4-29)，可以求得

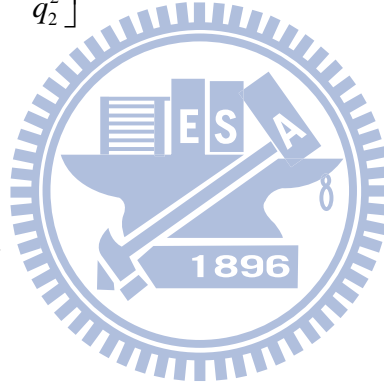
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix} ; \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2\tilde{q}_1 & \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

再帶入(4-29)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

\tilde{u} 為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (4-32)$$



為了提高程式的應用範圍，加入 preconditioning 法，讓程式不論在高速或低速流體內，皆可獲得精確的計算結果。本程式採用 Weiss 與 Smith 的 preconditioning 矩陣[15]，方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-33)$$

(4-33)為原始方程式，接著將保守形式(conserved variables)轉變成主要變數形式(primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-34)$$

其中 $U_p = [P \ u \ v \ w \ T]^T$ ， M 為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

其中 $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$; $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(4-35)式的方程式乘上矩陣 K

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

再將 K 與 M 相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

將(4-37)式帶入(4-34)式，觀察連續方程式：

$$\rho_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4-38)$$

在理想氣體中可將(4-38)在表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4-39)$$

其中 C 為聲速

由(4-39)式可以看出，在等密度條件下，由於 ρ_p 為零，(4-38)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4-40)$$

上式即為不可壓流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(4-37)式中的 ρ_p 項，利用當地流場速(local velocity)的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度冪次級數(order)相同，系統不再受到 CFL 條件的限制，提

高程式的計算效率。

利用 θ 取代 ρ_p 項：

$$\theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (4-41)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (4-42)$$

其中 ε 為一極小的值，約等於 10^{-5} ，其主要是用來防止停滯點(stagnation point)在計算時所造成的奇異點(singular point)現象。對於黏制性流體而言， U_r 必須大於流體的當地擴散速度(local diffusion velocity)，因此 U_r 還需加入下列限制：

$$U_r = \max\left(U_r, \frac{V}{\Delta x}\right)$$

將 θ 帶入(4-37)式後，可得到一新矩陣 Γ_{nc}

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

經過上述推導之後，方程式從(4-34)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-44)$$

為了讓(4-44)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上 K^{-1}

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-45)$$

根據(4-45)式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T}H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-47)$$

由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推導 Roe 所提出的近似黎曼解。在

(4-20)式中，可以觀察到 $F_{i+1/2}$ 項，是由 $\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$ 的中央差分法加上為了

解決不連續面問題的 artificial viscosity term $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$ 所組成。加入 preconditioning

的方程式只需在 artificial viscosity term 做改變即可，其推導如下：

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2}\Gamma |\Gamma^{-1}AM| (U_R + U_L) \quad (4-48)$$

$$\text{其中 } |\Gamma^{-1}AM| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$$

方程式(4-47)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，因此利用修改後的方程式來計算暫態結果並不恰當，因此本程式再加入 dual time

stepping[15]，不僅讓程式在計算暫態結果方面較準確，更提高程式的效率，縮短計算時間。

首先，先在原始 Navier-Stokes 方程式加入一虛擬時間項，稱為 artificial time term。方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-49)$$

其中 τ 即為 artificial time， t 為 physical time

接著在 artificial time term 加入 preconditioning 的方法：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (4-50)$$

最後對 artificial time term 採一階的有限差分離散，對 physical time term 採二階的後項差分離散。離散後的形式將在曲線座標上：

$$\Gamma \frac{\bar{U}_p^{k+1} - \bar{U}_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3\bar{U}^{k+1} - 4\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{k'} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k'}) + \frac{1}{\Delta \eta} (\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k'} - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{k'}) + \frac{1}{\Delta \zeta} (\bar{H}_{k+\frac{1}{2}}^{k'} - \bar{H}_{k-\frac{1}{2}}^{k'}) = 0 \quad (4-51)$$

此處上標 bar 為方程式於曲線座標的形式，詳細推導可參考附錄 2。

此處若於物理模式中的垂直管道與水平管道，則 $k' = k$ ，時間項採用顯示三階 Runge Kutta 法求得；若於無限平板紊流流場，則 $k' = k + 1$ ，採用隱式 LUSGS 法求得。其中， k' 與 n 分別為虛擬時間項中疊帶次數與真實時間的步階，當

$\Gamma \frac{\bar{U}_p^{k+1} - \bar{U}_p^k}{\Delta \tau}$ 趨近於零時，方程式(4-51)自動趨近於原始的 N-S 方程式並且包涵時

間項，因此可用於暫態計算。

當時間項時採用顯示三階 Runge Kutta 法求解時，求解方式如下：

$$\begin{aligned} \bar{U}_p^{k+\frac{1}{3}} &= \bar{U}_p^k + (\Gamma + M \frac{3\Delta \tau}{2\Delta t}) R^k \\ \bar{U}_p^{k+\frac{2}{3}} &= \frac{3}{4} \bar{U}_p^k + \frac{1}{4} \bar{U}_p^{k+\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} (\Gamma + M \frac{3\Delta \tau}{2\Delta t}) R^{k+\frac{1}{3}} \\ \bar{U}_p^{k+1} &= \frac{1}{3} \bar{U}_p^k + \frac{2}{3} \bar{U}_p^{k+\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} (\Gamma + M \frac{3\Delta \tau}{2\Delta t}) R^{k+\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (5-52)$$

其中 $M = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{U}_p}$

$$R^\Phi = -\left(\frac{3\bar{U}^\Phi - 4\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}}{2\Delta t}\right) - \left[\frac{1}{\Delta\xi}(\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^\Phi - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}^\Phi) + \frac{1}{\Delta\eta}(\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2},k}^\Phi - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2},k}^\Phi) + \frac{1}{\Delta\zeta}(\bar{H}_{k+\frac{1}{2}}^\Phi - \bar{H}_{k-\frac{1}{2}}^\Phi)\right]$$

此處 $\Phi = k, k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}$

若採用隱式 LUSGS 時，計算方法如下所述：

首先將 \bar{U}^{k+1} 與 \bar{F}^{k+1} 線性化

$$\bar{U}^{k+1} = \bar{U}^k + M\Delta\bar{U}_p \quad (4-53)$$

此處 $M = \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{U}_p}$ 且 $\Delta\bar{U}_p = \bar{U}_p^{k+1} - \bar{U}_p^k$

$$\bar{F}^{k+1} = \bar{F}^k + A_p\Delta\bar{U}_p \quad (4-54)$$

此處 $A_p = \frac{\partial\bar{F}_1^k}{\partial\bar{U}_p}$ 為通量部分的 Jacobian，同樣地， $B_p = \frac{\partial\bar{G}^k}{\partial\bar{U}_p}$ 與 $C_p = \frac{\partial\bar{H}^k}{\partial\bar{U}_p}$ 分別

使用於線性化 \bar{G}^{k+1} 與 \bar{H}^k 。

接著將方程式(4-53)與(4-54)帶入方程式(4-51)可得下列方程式：

$$\Gamma \frac{\Delta\bar{U}_p}{\Delta\tau} + \frac{3(\bar{U}^k + M\Delta\bar{U}_p) - 4\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_\xi(\bar{F}^k + A_p\Delta\bar{U}_p) + \delta_\eta(\bar{G}^k + B_p\Delta\bar{U}_p) + \delta_\zeta(\bar{H}^k + C_p\Delta\bar{U}_p) = 0 \quad (4-55)$$

其中 δ_ξ 、 δ_η 與 δ_ζ 中央差分運算子。

方程式(4-55)可整理成

$$\left[\Gamma \frac{I}{\Delta\tau} + M \frac{3}{2\Delta t} + (\delta_\xi A_p + \delta_\eta B_p + \delta_\zeta C_p)\right] \Delta U_p = R^k \quad (4-56)$$

其中 $R^k = -\left(\frac{3\bar{U}^k - 4\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}}{2\Delta t}\right) - (\delta_\xi \bar{F}^k + \delta_\eta \bar{G}^k + \delta_\zeta \bar{H}^k)$ 且 I 為單位矩陣。

接著兩邊皆除上 Γ

$$\left\{\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + [\delta_\xi(\Gamma^{-1}A_p) + \delta_\eta(\Gamma^{-1}B_p) + \delta_\zeta(\Gamma^{-1}C_p)]\right\} \Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (4-57)$$

方程式(4-57)原本使用 Yoon 與 Jameson[30]所提出的 LUSGS 解法。為了適用於低速條件，需修改如下：

首先定義

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_p &= \Gamma^{-1} A_p^k \\
\tilde{B}_p &= \Gamma^{-1} B_p^k \\
\tilde{C}_p &= \Gamma^{-1} C_p^k
\end{aligned} \tag{4-58}$$

接著將 \tilde{A}_p 、 \tilde{B}_p 與 \tilde{C}_p 分成兩部分

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_p &= \tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^- \\
\tilde{B}_p &= \tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^- \\
\tilde{C}_p &= \tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^-
\end{aligned} \tag{4-59}$$

此處

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_p^\pm &= \frac{1}{2}(\tilde{A}_p \pm |\lambda_A| I) \\
\tilde{B}_p^\pm &= \frac{1}{2}(\tilde{B}_p \pm |\lambda_B| I) \\
\tilde{C}_p^\pm &= \frac{1}{2}(\tilde{C}_p \pm |\lambda_C| I)
\end{aligned} \tag{4-60}$$

且 λ_A 、 λ_B 與 λ_C 分別為矩陣 \tilde{A}_p 、 \tilde{B}_p 與 \tilde{C}_p 的最大特徵值。再帶入方程式(4-57)可得

$$\left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \delta_\xi(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) + \delta_\eta(\tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^-) + \delta_\zeta(\tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^-) \right] \Delta \bar{U}_p = \Gamma^{-1} R^k \tag{4-61}$$

再利用高階方法處理對流項 $\delta_\xi(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-)$

$$\delta_\xi(\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) = \delta_\xi^- \tilde{A}_p^+ + \delta_\xi^+ \tilde{A}_p^- = \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^- - \tilde{A}_{p,i}^-}{\Delta\xi} \tag{4-62}$$

此處 \tilde{A}_p^+ 採用後項差分近似 δ_ξ^- 而 \tilde{A}_p^- 採用前項差分近似 δ_ξ^+

將方程式(4-62)帶入方程式(4-61)

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^- - \tilde{A}_{p,i}^-}{\Delta\xi} \right. \\
& \left. + \frac{\tilde{B}_{p,j}^+ - \tilde{B}_{p,j-1}^+}{\Delta\eta} + \frac{\tilde{B}_{p,j+1}^- - \tilde{B}_{p,j}^-}{\Delta\eta} + \frac{\tilde{C}_{p,k}^+ - \tilde{C}_{p,k-1}^+}{\Delta\zeta} + \frac{\tilde{C}_{p,k+1}^- - \tilde{C}_{p,k}^-}{\Delta\zeta} \right] \Delta \bar{U}_p = \Gamma^{-1} R^k
\end{aligned} \tag{4-63}$$

方程式(4-63)可在整理成

$$(L+D+U)\Delta\bar{U}_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (4-64)$$

此處

$$L = -\left[\frac{1}{\Delta\xi}(\tilde{A}_p^+)_{i-1,j,k} + \frac{1}{\Delta\eta}(\tilde{B}_p^+)_{i,j-1,k} + \frac{1}{\Delta\zeta}(\tilde{C}_p^+)_{i,j,k-1} \right] \quad (4-65)$$

$$D = \frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \left[\frac{1}{\Delta\xi}((\tilde{A}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{A}_p^-)_{i,j,k}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta\eta}((\tilde{B}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{B}_p^-)_{i,j,k}) + \frac{1}{\Delta\zeta}((\tilde{C}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k}) \right] \quad (4-66)$$

$$U = \left[\frac{1}{\Delta\xi}(\tilde{A}_p^-)_{i+1,j,k} + \frac{1}{\Delta\eta}(\tilde{B}_p^-)_{i,j+1,k} + \frac{1}{\Delta\zeta}(\tilde{C}_p^-)_{i,j,k+1} \right] \quad (4-67)$$

在計算方程式(4-61)的右邊項式部分

$$R^k = -\left(\frac{3\bar{U}^k - 4\bar{U}^n + \bar{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (\delta_\xi \bar{F}^k + \delta_\eta \bar{G}^k + \delta_\zeta \bar{H}^k), \text{ 其中於方程式(4-1)中, } F \text{ 非黏}$$

性項部分

$$F_{inviscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Eu + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (4-68)$$

利用 Roe scheme 即方程式(4-20)求解，但於全域可壓縮流場，需再修改如下

$$F_{inviscid,i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2}\varepsilon \left\{ \left[\Gamma^{-1} A_p \right] \Delta U_p \right\} \quad (4-67)$$

在原始的 Roe scheme 中，利用 DNS 模擬紊流時， ε 為 1 以保持數值計算的穩定。

然而於本研究中所發展的隱式紊流模式， ε 為變數，並且為空間為時間的函數，

即 $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$ ，用以控制 Roe upwinding dissipation term $\frac{1}{2}\varepsilon \left\{ \left[\Gamma^{-1} A_p \right] \Delta U_p \right\}$ 以成

為隱式紊流模式。詳細部分將於第六章討論。

Abalakin 等人[31]所發展的五階 MUSCL 法則應用於求解方程式(4-67)與其

中的 ΔU_p

$$\Delta U_p = u_{i+1/2}^L - u_{i+1/2}^R \quad (4-68)$$

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \Delta u_{i+1/2}^L \quad (4-69)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \Delta u_{i+1/2}^R \quad (4-70)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^L &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_i - u_{i-1}) \\ &\quad + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) + \theta^d(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (4-71)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^R &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_{i+2} - u_{i+1}) \\ &\quad + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) + \theta^d(-u_i + 3u_{i+1} - 3u_{i+2} + u_{i+3}) \end{aligned} \quad (4-72)$$

其中的參數 β 、 θ^c 與 θ^d 則列於表 1。

計算黏滯性項則採用四階精度的中央差分法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} + o(\Delta x^4) \quad (4-73)$$

為了將方程式延伸至曲線座標 (ξ, η, ζ)

$$\begin{aligned} \bar{F}^k &= (\xi_x F + \xi_y G + \xi_z H) / J \\ \bar{G}^k &= (\eta_x F + \eta_y G + \eta_z H) / J \\ \bar{H}^k &= (\zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z H) / J \end{aligned} \quad (4-74)$$

此處 J 為座標轉換的 Jacobian

然後可得

$$\begin{aligned} R^k &= -\left(\frac{3U^k - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t}\right) - \{\delta_\xi[(\xi_x F + \xi_y G + \xi_z H) / J] + \\ &\quad \delta_\eta[(\eta_x F + \eta_y G + \eta_z H) / J] + \delta_\zeta[(\zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z H) / J]\} \end{aligned}$$

把方程式(4-74)帶入方程式(4-64)的 R^k 中，可得

$$\begin{aligned} L_{(i-1,j,k)} \Delta U_{p,(i-1,j,k)}^k + L_{(i,j-1,k)} \Delta U_{p,(i,j-1,k)}^k + L_{(i,j,k-1)} \Delta U_{p,(i,j,k-1)}^k + D_{(i,j,k)} \Delta U_{p,(i,j,k)}^k + \\ U_{(i+1,j,k)} \Delta U_{p,(i+1,j,k)}^k + U_{(i,j+1,k)} \Delta U_{p,(i,j+1,k)}^k + U_{(i,j,k+1)} \Delta U_{p,(i,j,k+1)}^k = \Gamma^{-1} R_{(i,j,k)}^k \end{aligned} \quad (4-75)$$

根據 Yoon 與 Jameson[30]，方程式(4-64)可表示如下

$$(L+D)D^{-1}(D+U)\Delta\bar{U}_p^k = \Gamma^{-1}R^k \quad (4-76)$$

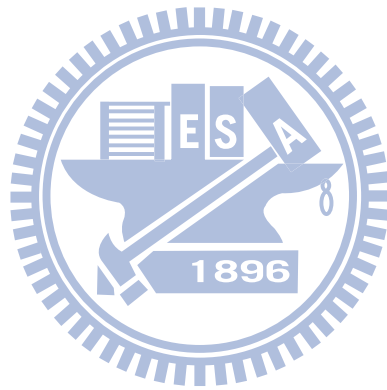


表 1. 方程式(4-71)與(4-72)參數數值

β	θ^c	θ^d	Order
1/3	0	0	3
1/3	-1/6	0	4
1/3	0	-1/6	4
1/3	-1/10	-1/15	5

為了求解方程式(4-76)，簡述如下

1. 執行 forward sweep

$$(L+D)\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k \quad (4-77)$$

此處 $\Delta U_p^* = D^{-1}(D+U)\Delta \bar{U}_p^k$

方程式(4-77)可在整理成

$$L\Delta U_p^* + D\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k \quad (4-78)$$

$$D\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k - L\Delta U_p^* \quad (4-79)$$

ΔU_p^* 定義如下

$$\Delta U_p^* = D^{-1}(\Gamma^{-1}R^k - L\Delta U_p^*). \quad (4-80)$$

方程式(4-80)可以展開如下

$$\Delta U_{p,(i,j,k)}^* = D_{(i,j,k)} [\Gamma^{-1}R_{(i,j,k)}^k - L_{(i-1,j,k)}\Delta U_{p,(i-1,j,k)}^* - L_{(i,j-1,k)}\Delta U_{p,(i,j-1,k)}^* - L_{(i,j,k-1)}\Delta U_{p,(i,j,k-1)}^*] \quad (4-81)$$

當 $i=1$ 、 $j=1$ 或 $k=1$ ，於方程式右邊的 ΔU_p^* 可從邊界條件決定。

2. 執行 backward sweep

ΔU_p^k 於方程式(4-77)可表示如下

$$(D+U)\Delta \bar{U}_p^k = D\Delta U_p^* \quad (4-82)$$

整理(4-82)得

$$\Delta \bar{U}_p^k = \Delta U_p^* - D^{-1}U\Delta \bar{U}_p^k \quad (4-83)$$

展開 $\Delta \bar{U}_p^k$

$$\Delta U_{p,(i,j,k)}^k = \Delta U_{p,(i,j,k)}^* - D_{(i,j,k)}^{-1} [U_{(i+1,j,k)}\Delta U_{p,(i+1,j,k)}^k + U_{(i,j+1,k)}\Delta U_{p,(i,j+1,k)}^k + U_{(i,j,k+1)}\Delta U_{p,(i,j,k+1)}^k] \quad (4-84)$$

當 $i=1$ 、 $j=1$ 或 $k=1$ ，於方程式右邊的 ΔU_p^* 可從邊界條件決定。

3. 求解 \bar{U}_p^{k+1} 如下：

$$\bar{U}_p^{k+1} = \bar{U}_p^k + \Delta \bar{U}_p^k \quad (4-85)$$

4. 重複步驟 1~3 至 $\frac{\bar{U}_p^{k+1} - \bar{U}_p^k}{\Delta\tau} \approx 0$ 並且利用 $\bar{U}_p^{n+1} = \bar{U}_p^{k+1}$ 定義下一個時階 \bar{U}_p^{n+1} 。

使用 LUSGS 法求解，不僅可提升計算效率也可降低數值耗散

邊界條件設定如下所示：

絕熱壁面的邊界條件：

$$\begin{aligned}
 P(i, 0, k) &= P(i, 1, k) \\
 u(i, 0, k) &= -u(i, 1, k) \\
 v(i, 0, k) &= -v(i, 1, k) \\
 w(i, 0, k) &= -w(i, 1, k) \\
 T(i, 0, k) &= T(i, 1, k)
 \end{aligned} \tag{4-86}$$

$$\begin{aligned}
 P(i, j, 0) &= P(i, j, 1) \\
 u(i, j, 0) &= -u(i, j, 1) \\
 v(i, j, 0) &= -v(i, j, 1) \\
 w(i, j, 0) &= -w(i, j, 1) \\
 T(i, j, 0) &= T(i, j, 1)
 \end{aligned} \tag{4-87}$$



加熱壁面的邊界條件如下：

$$\begin{aligned}
 P(i, 0, k) &= P(i, 1, k) \\
 u(i, 0, k) &= -u(i, 1, k) \\
 v(i, 0, k) &= -v(i, 1, k) \\
 w(i, 0, k) &= -w(i, 1, k) \\
 T(i, 0, k) &= 2T_h - T(i, 1, k)
 \end{aligned} \tag{4-88}$$

0 為虛擬網格，1 為離壁面的第一個網格。

除了壁面條件外，管道進出端的邊界條件則分為非反射性邊界與週期性邊界。再垂直與水平管道的自然對流模擬，採用非反射性邊界於管道兩端，其方法描述如下：

再高速可壓縮流的情形下，Poinsot 與 Lele [18]發展的 LODI(local one-dimensional inviscid relations)法使非反射邊界適用於管道的進出口兩端。但因未使用 preconditioning 法，因此此法並無法適用於低速可壓縮流中。為了讓非反射性邊界適用於低速可壓縮流的情形下，需重新推導 LODI 方程式於邊界上，考慮一維 Navier-Stokes 方程式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4-89)$$

接著將兩邊同乘 Γ^{-1}

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4-90)$$

其中 $\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$ 可在轉換如下：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial x} = \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (4-91)$$

將方程式(4-91)帶入方程式(4-89)，便可得到 primitive form

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = 0 \quad (4-92)$$

再將 $\Gamma^{-1} A_p$ 作相似轉換以得到特徵速度

$$\Gamma^{-1} A_p = K \lambda K^{-1} \quad (4-93)$$

此處 K 為特徵向量矩陣， λ 為 $\Gamma^{-1} A_p$ 的特徵值矩陣且表示流場中的特徵速度。根據 Dennis 等人[32]，特徵值下所示：

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u' + c' \\ u' - c' \end{pmatrix} \quad (4-94)$$

此處 $u' = \frac{(\Theta+1)u}{2}$ 、 $c' = \frac{\sqrt{u^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2}$ ，其中 $\Theta \approx 100M^2$ 。

接著讓

$$L = \lambda K^{-1} \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (4-95)$$

L 如下所示：

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u' + c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' - c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ (u' - c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{pmatrix} \quad (4-96)$$

L 矩陣的物理意義為邊界條件上為波的強度隨時間變化的方程式。

根據方程式(4-94)， L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 分別為 u 、 u 、 u 、 $u' + c'$ 與 $u' - c'$ 。

將方程式(4-95)帶入方程式(4-92)，可在表示如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + KL = 0 \quad (4-97)$$

將方程式(4-97)展開可得壓力、速度與溫度在邊界條件上的方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho c'} (L_4 - L_5) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} - L_3 &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} + L_2 &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + L_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0 \end{aligned} \quad (4-98)$$

方程式(4-98)可在離散如下：

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] \\ u^{k+1} &= u^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'} (L_4 - L_5) \\ v^{k+1} &= v^k + L_3 \Delta t \\ w^{k+1} &= w^k - L_2 \Delta t \\ T^{k+1} &= T^k - L_1 \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma + 1}{\gamma} (p^{k+1} - p^k) \end{aligned} \quad (4-99)$$

根據圖 6(a)，如果流體從管內往大氣流出時， L_1 、 L_2 、 L_3 與 L_4 方向與流體流動方向相同，因此可利用方程式(4-96)定義 L_1 、 L_2 、 L_3 與 L_4 。由於 $u' - c'$ 小於零的

關係， L_5 的方向則與流體流動方向相反。由於壓力於極遠處的變化為零，所以

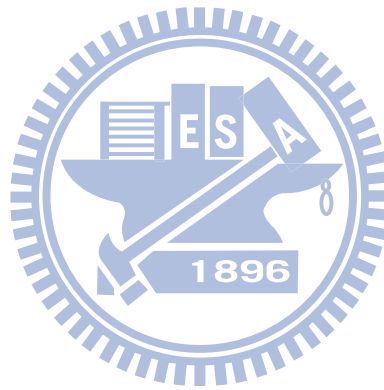
$\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ ，方程式(4-98)將如下：

$$\frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] = 0 \quad (4-100)$$

因此 L_5 可定義如下：

$$L_5 = \frac{(u' + c' - u)}{(u' - c' - u)} L_4 \quad (4-101)$$

相反地，圖 6(b)則為流體從大氣環境往管內流動。 L_4 可由方程式(4-98)直接求得，由於非反射性邊界的關係， L_1 、 L_2 與 L_3 則設定為 0。 L_5 則可由方程式(4-101)得到。



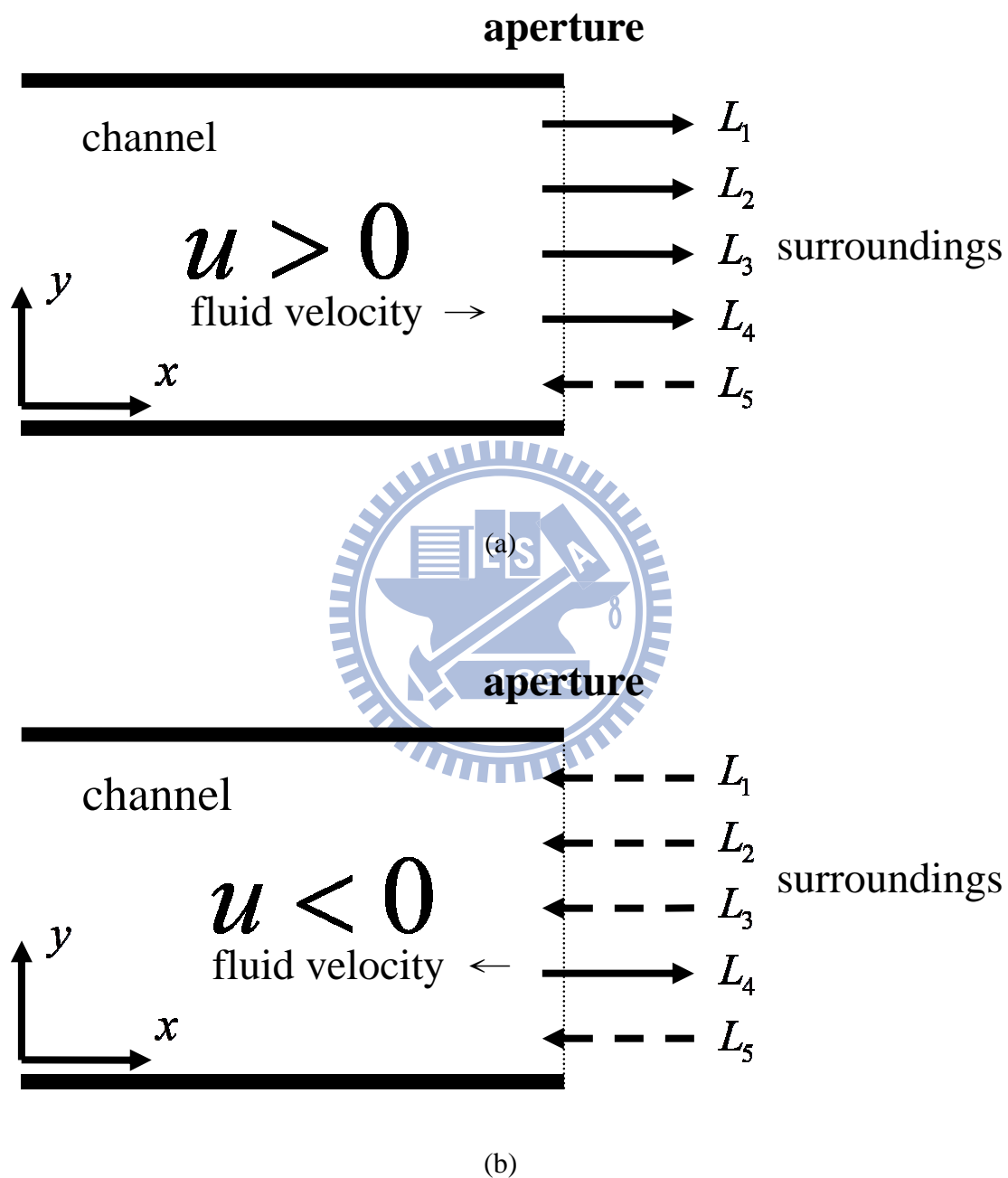


圖 6. L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 於管道兩端的方向性示意圖

而循環性邊界條件設定如下。為了讓流場計算結果達到完全發展流，通常需要設定相當長度的管長，造成計算範圍增加，時間過長。為了解決此問題，循環性邊界為一種較為簡單的邊界條件設法。其優點為快速不耗費計算時間，缺點為當計算的流場若進出口幾何形狀不相同時便無法使用。所以較常被用來計算平板流或是管流等完全發展的流場。

其進口條件設置的方法如下：

$$\begin{aligned}
 P(0, j, k) &= P(nx, j, k) \\
 u(0, j, k) &= u(nx, j, k) \\
 v(0, j, k) &= v(nx, j, k) \\
 w(0, j, k) &= w(nx, j, k) \\
 T(0, j, k) &= T(nx, j, k)
 \end{aligned} \tag{4-102}$$

出口條件設置的方法如下：

$$\begin{aligned}
 P(nx+1, j, k) &= P(1, j, k) \\
 u(nx+1, j, k) &= u(1, j, k) \\
 v(nx+1, j, k) &= v(1, j, k) \\
 w(nx+1, j, k) &= w(1, j, k) \\
 T(nx+1, j, k) &= T(1, j, k)
 \end{aligned} \tag{4-103}$$

其中 0 代表進口的邊界虛格點(ghost cell)， $nx+1$ 代表出口的邊界虛格點，1 則為進口的邊界格點， nx 則為出口的邊界格點。

然而在計算完全發展紊流時，需要以壓力梯度來當作 driving fore。因此需要一線性壓力梯度，使流場具有動力來源而不會衰減。加入的方法如下：

將壓力分解為兩部份，一為梯度項，一為循環項：

$$P(i, j, k) = \beta x + P_p(i, j, k) \tag{4-104}$$

其中 β 為線性壓力梯度， P_p 為循環性壓力。在計算時將 βx 梯度項分離出來，將它視為 source term。因此循環性壓力邊界應改變為：

$$P_p(0, j, k) = P_p(nx, j, k) \tag{4-105}$$

$$P_p(nx+1, j, k) = P_p(1, j, k) \tag{4-106}$$

但是在程式計算中，流量會因為壁面摩擦或是數值本身計算上的消散而使得流量不守恆。因此必須在每個時階下調整 β 值，利用 β 值來固定流量。其方程式利用 Xu 等人[24]如下：

$$\beta^{n+1} = \beta^n - \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\dot{m}}{Ac} \right)^0 - 2 \left(\frac{\dot{m}}{Ac} \right)^n + \left(\frac{\dot{m}}{Ac} \right)^{n-1} \right] \quad (4-107)$$

其中 Ac 為流體流動之截面， \dot{m} 為流量。 Δt 為時階大小。 $()^0$ 代表為初始狀態所算出的值，也就是所希望流場固定的流量。 $()^n$ 為第 n 時階所計算出的值，同理 $()^{n+1}$ 為 $n+1$ 所計算出的值。

接著將上述的的計算方法統整如下所述：

1. 設定溫度、壓力與速度初始條件。
2. 根據不同的物理模式，設定邊界條件。
3. 利用 MUSCL 法即方程式(4-71)與(4-72)計算 F_R 、 F_L 與 ΔU_p 。
4. 將 ΔU_p 帶入方程式(4-67)中並且使用 Roe 法計算 $F_{inviscid}$ 。
5. 計算黏滯性項。
6. 利用 LUSGS 即方程式(4-76)定義 U_p^{k+1} 。
7. 若於穩態情況下，重複步驟 2 至步驟 6，直到符合收斂條件 $\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\phi^{n+1}} < 10^{-3}$ 。

其中 $\phi = p, u, v, w, T$ 。若於暫態情況下，則收斂條件為 $\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\phi^{k+1}} < 10^{-3}$ ，則 U_p^{k+1} 為下一真實時階的 U_p 。

除了流場方面的計算，本研究還包含聲場方面的計算。聲場的統御方程式為方程式(2-23)

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0 \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \rho u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho v^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \rho uv}{\partial x \partial y} \quad (4-108)$$

此處與簡化過的 Lighthill 方程式最大不同之處在於方程式(4-108)仍考慮密度 ρ 對流場的影響，因此將更加準確。

為了利用數值方法求解，需將其離散化，於空間項中，採用二階中央插分：

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = \frac{\rho'_{i+1} - 2\rho'_i + \rho'_{i-1}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (4-109)$$

$$\frac{\partial^2 \rho uv}{\partial x \partial y} = \frac{(\rho' uv)_{i+1, j+1} - (\rho' uv)_{i+1, j-1} - (\rho' uv)_{i-1, j+1} + (\rho' uv)_{i-1, j-1}}{4\Delta x \Delta y} + o(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (4-110)$$

在時間項 $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$ 方面，則採用一階後項插分：

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\rho'_t - 2\rho'_{t-1} + \rho'_{t-2}}{\Delta t^2} + o(\Delta t) \quad (4-111)$$

接著將方程式(4-109)~(4-111)代入方程式(4-108)，由於空間插分項及方程式(4-109)、(4-110)與 ρ'_{t-1} 、 ρ'_{t-2} 為已知，因此可求得 ρ' ，此即遠場中的密度變化項。

一般而言，會接著將其轉換成聲壓

$$P' = c_0^2 \rho' \quad (4-112)$$

接著在利用聲壓位準(Sound Pressure Level, SPL)計算其 dB 值

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{P}{p_0} \quad (4-113)$$

其中 p_0 為參考聲壓 $2 \times 10^{-5} Pa$



第五章 隱式紊流模式

本研究所發展出的隱式紊流模式—dissipative model 其原理與建立方法將於此章節詳細討論。於 dissipative model 中，將利用方程式(4-67)中的 Roe upwinding dissipation term $\frac{1}{2} \varepsilon \left\{ \left| \Gamma^{-1} A_p \right| \Delta U_p \right\}$ 來建立隱式紊流模式。

在計算網格精確度不足的情況下，若使用 DNS 配合原始 Roe scheme($\varepsilon=1$) 於紊流模擬中，數值方法將會過於耗散。圖 7 至圖 9 分別為紊流平均速度、Reynolds stress 與紊流強度圖於 $Re_\tau=180$ 管流時的分佈，與 Kim 等人[20]使用精確度極高的 DNS 結果相比，由於過多的數值耗散，其分佈皆呈現較 DNS 小的情形。此種現象也曾於 Trong[27]中提出。他使用 Roe scheme 與 Smagorinsky model 配合 damping 方程式模擬管道紊流，但並未加入 preconditioning 法。在他的模擬中， ε 於整個計算範圍為一常數，需要盡量減小，但仍需使計算過程保持穩定。根據其測試，於紊流中， ε 的最佳數值為 0.1 左右。根據本研究於管道紊流的測試，在低雷諾數的情況， $\varepsilon=0.1$ 可以得到良好的結果；然而，於高雷諾數的情況下， $\varepsilon=0.1$ 並不適用。

為了發展出適用性更廣泛、雷諾數較高的紊流模式，本研究將以 Truncated Navier-Stokes 方程式(TNS)為基礎。TNS 的原理與 under resolved DNS 相同，由於小於網格尺度的能量會聚集於最小網格尺度中，因此經過長時間的計算，結果將有非常大之誤差。Domaradzki 等人[33]利用於一定時階間隔過濾(filter)流場的方式移除此種多餘的能量。Tankitil 與 Domaradzki[34] 接續[33]的研究，發展出自動判定過濾流場時間的方法。

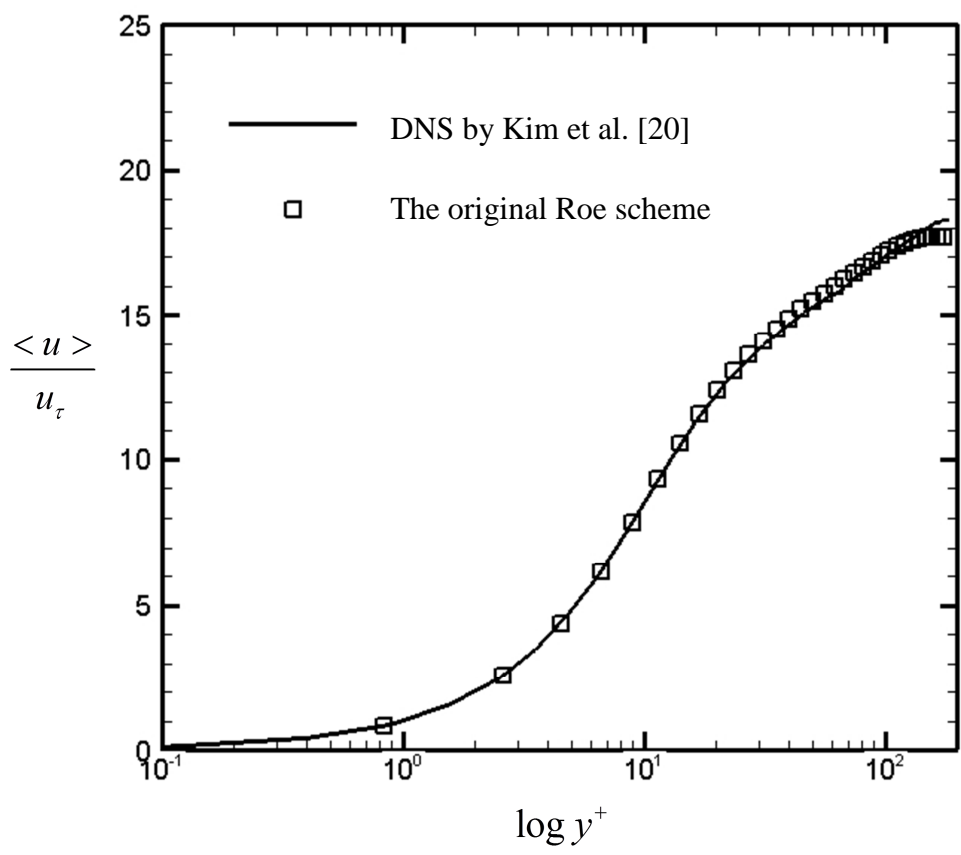


圖 7. 原始 Roe scheme 與[20]之平均速度比較圖

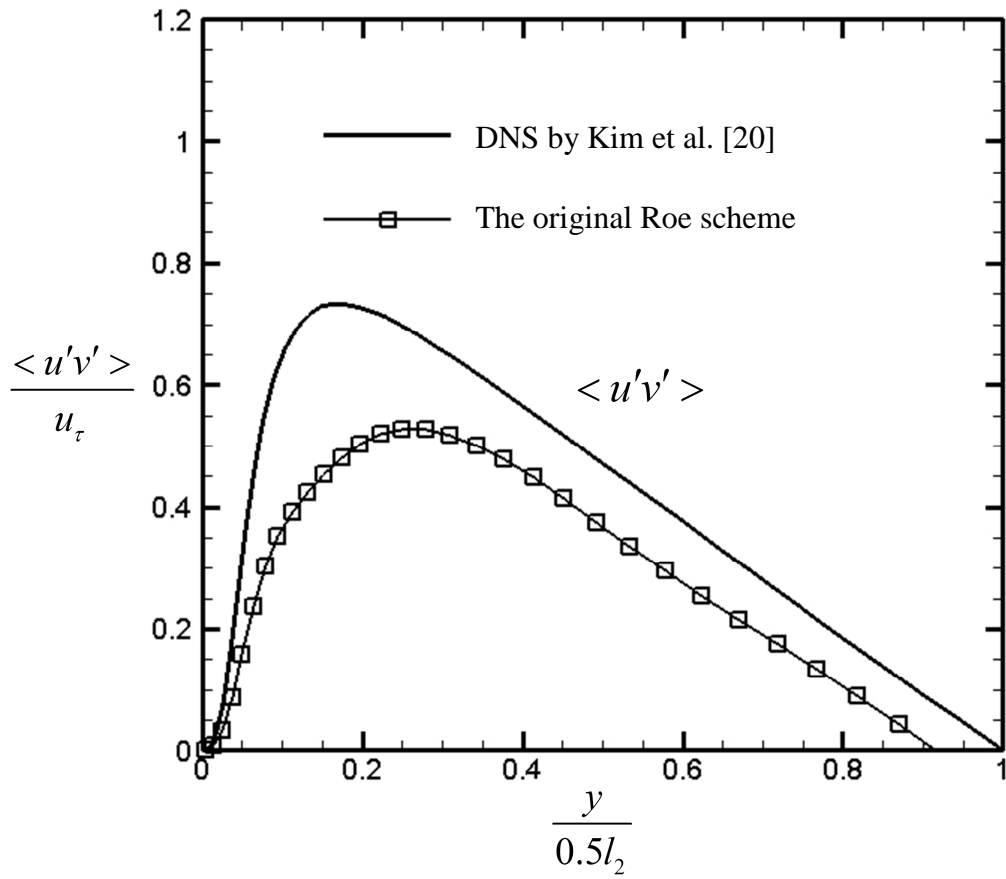


圖 8. 原始 Roe scheme 與[20]之 Reynolds stress 比較圖

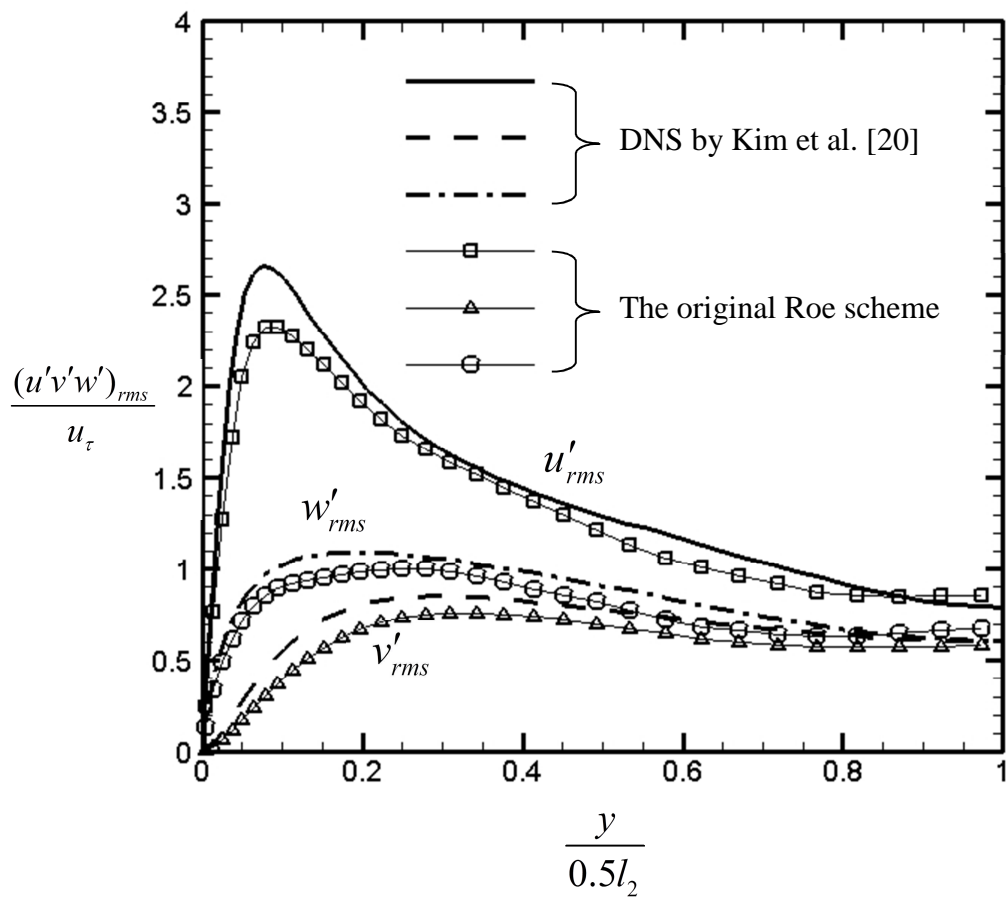


圖 9. 原始 Roe scheme 與[20]之紊流強度比較圖

由於過濾流場增加數值耗散與 Roe upwinding dissipation term $\frac{1}{2}\varepsilon\{\Gamma^{-1}A_p|\Delta U_p\}$ 的作用原理相同，因此本研究中，發展出 TNS 利用 Roe upwinding dissipation term 移除多餘小尺度能量的隱式紊流模式。其作用原理如下所述：如果聚集於小尺度的能量過多，則增加 ε 來耗散此種過多的能量；反之，若數值計算已經過於耗散的情況下，則應降低 ε 以避免抑制紊流本身的擾動。與 [34] 自動過濾流場的方式相比，dissipative model 只針對流場中過多能量的區域過濾，而非過濾整個流場。因此若某些區域已經過於耗散，將不會再增加數值耗散，以免衰退紊流本身的擾動。因此，dissipative model 比自動過濾流場的方式具有更佳的適切性。

為了能夠自動調整 ε ，需要根據文獻[34]定義每個計算網格的能量係數 ER ：

$$ER = \frac{I(\Delta)}{I(2\Delta)} = \frac{\sum_{i=1}^3 (u_i - \bar{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^3 (u_i - \hat{u}_i)^2} \quad (5-1)$$

方程式(5-1)中， u_i 為 TNS 方程式中的原始速度場， \bar{u}_i 則為過濾後的速度場，其過濾長度(filter width)為網格大小 Δ ； \hat{u}_i 則為過濾長度為網格兩倍大小 2Δ 的過濾後速度場。

方程式(5-1)中所使用的 filter 為 secondary filter，其建立方式是以 primary filter 為 box filter。根據 Jeanmart 與 Winckelmans[35]，過濾長度為 Δ 與 2Δ 的 box filter 於曲線座標的方程式如下：

$$\bar{u}(y_n) = 0.5 \left[\frac{\Delta^+}{\Delta^+ + \Delta^-} u(y_{n-1}) + u(y_n) + \frac{\Delta^-}{\Delta^+ + \Delta^-} u(y_{n+1}) \right] \quad (5-2)$$

$$\hat{u}(y_n) = \frac{\Delta^+}{\Delta^+ + \Delta^-} u(y_{n-1}) + \frac{\Delta^-}{\Delta^+ + \Delta^-} u(y_{n+1}) \quad (5-3)$$

此處 y_{n-1} 、 y_n 與 y_{n+1} 為三個相鄰的網格點， $\Delta^+ = y_{n+1} - y_n$ 與 $\Delta^- = y_n - y_{n-1}$ 。接著利用 Approximate deconvolution[36]於 primary filter，approximate deconvolution 的方程式如下：

$$Q_N \approx G^{-1} = \sum_{v=0}^N (I - G)^v \quad (5-4)$$

Q_N 為 primary filter G 的 approximate deconvolution，而 G 為 box filter。

利用上述原理，secondary filter 於不同過濾長度：

$$\bar{u}_i = (Q_N G(\Delta)) * u_i \quad (5-5)$$

$$\hat{u}_i = (Q_N G(2\Delta)) * u_i \quad (5-6)$$

圖 10 為不同 filter 的一維轉換方程式分佈圖，其中 $k_c^\Delta = \pi/\Delta$ 為物理 LES 尺度的 nominal cutoff wave number。由此圖可以發現，於 $N=5$ 時，secondary filter 可以幾乎完全保留住尺度大於 2Δ 的資訊，而且強烈抑制尺度介於 Δ 與 2Δ 的資訊。

最後，把方程式(5-5)與方程式(5-6)帶入方程式(5-1)，即可得到能量係數 ER ，其所代表的物理意義為利用不同過濾長度的 primary filter 所建立的 secondary filter，過濾於同樣的流場中所移除之能量比係數。根據[34]， ER 的範圍應落在 0.007 與 0.01 之間，因此可利用此範圍當作調整 ε 的基礎。如果 ER 大於 0.01，表示聚集於小尺度的能量過多，此時需要增加 ε 以耗散過多的能量。反之，若 ER 小於 0.007，則流場本身的數值耗散已經過大，此時需要降低 ε ，以免紊流本身的擾動被衰退。 ER 於不同範圍下所選定 ε 則根據下列原因決定：若 $0.007 \leq ER \leq 0.01$ ，則 ε 必須是最佳值以保持 ER 繼續限制於此範圍。根據本研究於低雷諾數的測試， $\varepsilon=0.1$ 為最佳值。若 ER 大於 0.01， ε 需要增大，但不可過大以免過於耗散。0.5 介於 DNS 模擬 ($\varepsilon=1$) 與最佳值 0.1 之間，因此選用 0.5 於此範圍內。若 ER 小於 0.01， ε 需要降低，但仍需保持數值計算穩定，因此推薦值為 0.05。綜上所述， ε 將根據每個位置與每個時階中的 ER 調整，即 $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$ ，其表示如下

$$\begin{cases} \varepsilon(x, y, z, t) = 0.5, & \text{if } ER > 0.01 \\ \varepsilon(x, y, z, t) = 0.1, & \text{if } 0.007 \leq ER \leq 0.01 \\ \varepsilon(x, y, z, t) = 0.05, & \text{if } ER < 0.007 \end{cases} \quad (5-7)$$

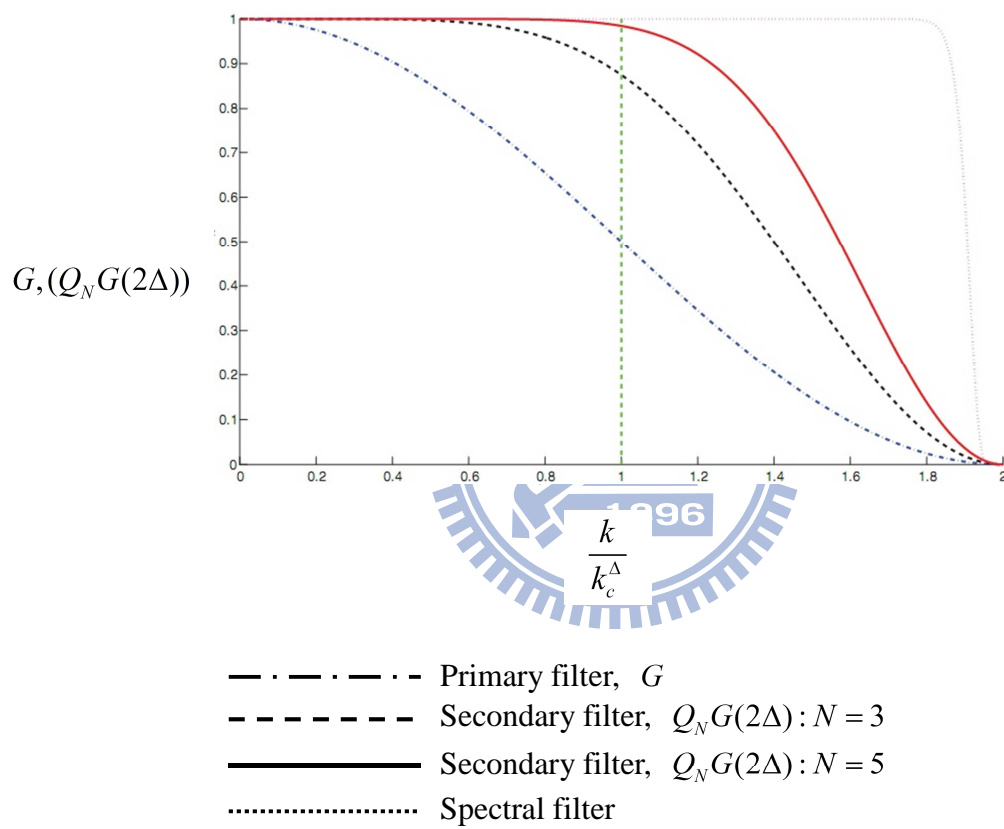


圖 10. 不同 filter 於一維時的轉換方程式

第六章 高速運算

本研究所需要的計算量極大，因此在模擬過程相當耗時。過去的研究中，多使用平行化方法做為提高計算效能的方式，最常見的兩種平行化方法為MPI (Message Passing Interface)及OpenMP (Open Multi-Processing)。前者將程式平行化於並聯的多台電腦上運行，但效率隨電腦數增加而下降，且價格與佔用空間亦十分龐大。後者則是使用具有多核中央處理器的超級電腦，佔用空間較小，但受限於目前的製程及散熱問題，計算核心數有限，效率提昇有限。

近年來，處理動畫(Animation)功能在研究與娛樂的殷切需求下，顯示卡(Video Card)內圖形處理器(Graphics processing unit, GPU)的速度越來越快，控制程式的使用方式亦越趨容易，除此之外，顯示卡之價格相對於購買高階多核中央處理器(Central Process Unit, CPU)較為低廉，因此於三維圖形顯示方面以外的應用日益增加。CUDA平台(Compute Unified Device Architecture)是由英偉達(Nvidia)公司所推出的整合技術，此技術是一種將GPU作為數據平行化運算設備的統一處理架構。利用顯示卡內GPU具有數量眾多的流處理器(Stream Processor, SP)，更適合用於平行化程式的計算特性，以達到提升數值計算速度的目的。本研究發展利用CUDA於計算流體力學上，將CUDA平台成功運用於平行化運算，以下將就CUDA平台的架構及執行模式做詳細的說明。

CUDA 平台的主要架構如圖 11，右方可見主機(Host)端，內含中央處理器(CPU)和主機記憶體。而設備(Device)端，即主機板插槽上的顯示卡。平行計算過程中，依程式語言撰寫順序執行，部分在 CPU 上運算的為串行處理程式(serial code)，部分藉自行開發在 CUDA 平台上的連結編輯程式，在 GPU 上執行的為核心函數(kernel)。每個 kernel 的執行單位為網格(Grid)，網格中包含數個區塊(Block)，區塊又由數個執行緒(Thread)所組成，當 kernel 開始執行時，這些執行緒將分別由顯示卡內的流處理器(Stream Processor, SP)來作平行化運算。待此 kernel 結束，則接續下一個串行函數(serial code)進行在 CPU 運算，依此順序執行至整個程式完成運算工作。

在 CUDA 平台上作平行化運算，為得到最佳化的計算效能，在記憶體的配置方式上極為重要。由於在 GPU 的計算單元中，包含數個多流處理器(Stream Multiprocessor, SM)，而每個 SM 中又包含 8 個單(或雙)精確浮點數的流處理器

(Stream Processor, SP), 在同 SM 中的 8 個 SP 共用同一共享記憶體(shared memory)。如前述在 CUDA 平台中的 kernel 實質上是以區塊為單位執行的, 在同一區塊的所有執行緒需共享數據, 因此會在同一個 SM 中執行, 但同一 SM 中可以存在多個區塊, 如此可在某一區塊執行同步或存取記憶體時, 讓另一個區塊占用執行資源, 用以隱藏延遲, 更好的利用執行單元的資源。然而在實際運行時, 區塊內的執行緒將以執行緒束(warp)為單位執行, 其大小由顯示卡版本決定, 如本研究所使用的 Tesla C1060, 一個 warp 由 32 個連續執行緒所組成, 且一個 SM 可以保存 32 個 warp(共 1024 個執行緒)。由於各個 warp 在 CUDA 中的執行順序並無規律, 因此需使用同步的方式, 確保同一區塊中的執行進度相同, 一個 SM 可以完成 512 個執行緒同步的動作, 且 warp 中的執行緒只與執行緒 ID 有關, 排列如 ID 0~31 為一束, 32~63 為第二束, 以此類推, 因而在下述設定的區塊中執行緒數則可是 1~512 的任意值, 並以 32 的倍數為最佳, 以避免多餘的執行緒仍占掉一個 warp。依此原則對區塊及執行緒數作配置, 以期達到平行化運算的最高性能。

在撰寫 CUDA 程式時, 主要可分為下列三個步驟; 第一步驟為配置顯示卡內 GPU 的記憶體位址及設定區塊(Block)和執行緒(Thread)的大小, 接著將本來利用中央處理器 CPU 計算的資料由主機記憶體搬移至顯示卡上的記憶體。一般使用有限差分法於三維的情形中, 多使用三維陣列(i,j,k)將格點編號, 然而若使用三維陣列時, 要將主機的資料搬移至顯示卡上的記憶體時, 將非常複雜。因此需將三維陣列轉換成一維陣列以利於資料搬移。其轉換公式如下所示:

$$\text{Device (assign numbers)} = \text{Host (} i \times ny \times nz + j \times nz + k \text{)} \quad (6-1)$$

其中 nx 、 ny 與 nz 分別為 x 、 y 與 z 方向的計算網格數目。

第二步驟為將程式平行運算。在步驟一將三維陣列轉換成一維陣列, 且把主機端的資料搬移至顯示卡的記憶體後, 接著將一維陣列的迴圈平行化, 利用流處理器做計算並儲存於顯示卡上的記憶體。

第三步驟為將 GPU 計算結果從顯示卡的記憶體搬移至主機端的記憶體, 接著將前述的一維陣列轉回原來的三維陣列, 並輸出結果。

為了使程式能編譯一次後即能在擁有不同流處理器(Stream Processor, SP)數的顯示卡上執行, CUDA 平台使用了單指令多執行緒(Single Instruction, Multiple Thread, SMIT)的執行模型, 將計算任務轉成可以大量平行執行的執行緒。實際運行時, kernel 是以區塊為單位執行的, 而網格則是用以表示一系列可以被平行

執行的區塊的集合。一個 kernel 會在一個網格中運行，但由於同一區塊中的所有執行緒在同一時刻執行的指令並不一定相同，故在 CUDA 平台中，同一區塊中的所有執行緒皆能存取共享記憶體(shared memory)，因此可以互通交換數據並能快速進行同步的動作，不同區塊中的執行緒則否，在此模式的設定下雖然能同時執行同一指令的執行緒數量有限，但通過共享記憶體和執行緒柵欄同步(Barrier)的方式，確保同一區塊內的執行緒不僅能獨立平行運算，在需要資料同步時，亦能待全部執行緒皆執行到相同指令時，程式才繼續往下運行，而不致計算錯誤。



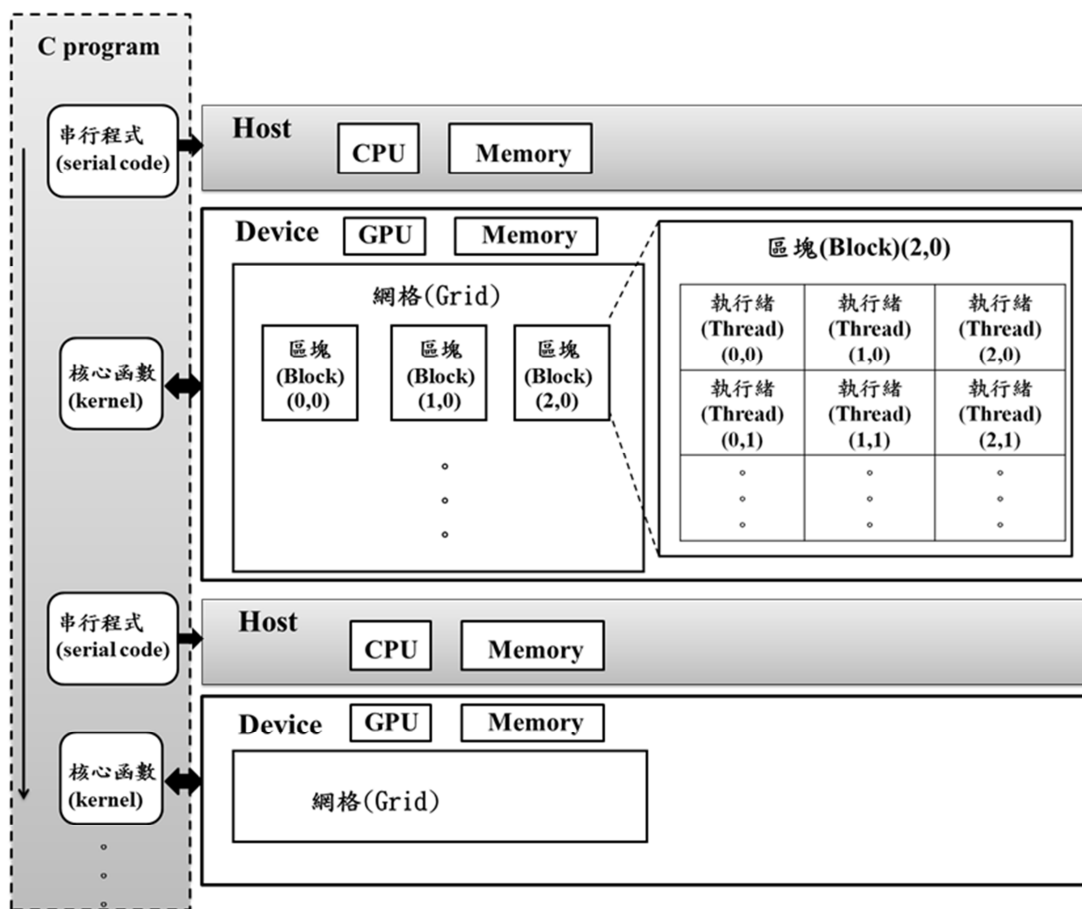


圖 11. CUDA 平台架構圖

第七章 結果與討論

7.1 垂直管道自然對流：

於此模擬中，工作流體為空氣且其 Prandtl 數為 0.72。外界壓力與溫度分別為 1atm 與 298.06 K。

首先，在本節中，將先計算 $Ra = 10^5$ 下，正方形密閉空間中的高溫差自然對流，並且與 Paillere 等人[37]的結果比較。local Nusselt number 與 Rayleigh number 定義如下：

$$Nu = \frac{L}{k_0(T_h - T_c)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]_w \quad (7-1)$$

$$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) L^3}{T_0 \mu(T)^2} \quad (7-2)$$

初始條件 $P_0 = 101325 Pa$ 、 $T_0 = 600 K$ 與 $\rho_0 = P_0 / (RT_0)$ 、 k_0 為 $T_0 = 600 K$ 空氣的熱傳導係數。邊界條件上下壁面為絕熱壁面，高溫壁面為 606K、低溫壁面為 594K、 L 為壁面長度即特徵長度。圖 12 為高溫壁面的 local Nusselt number 分佈圖，計算結果與 Paillere 等人[37]的結果相當一致，表示程式可準確模擬密閉空間的高溫狀態下自然對流並且溫度可達 606K 左右。

根據 Gray 與 Giorgini[26]，利用 Boussinesq 假設所模擬的自然對流現象，只能適用於溫差 30K 的範圍內。因此除了高溫的自然對流外，本研究也測試程式於低溫的自然對流情況，並且將結果與 Churchill 與 Chu[38]和 Fu 與 Huang[39]比較，[38]與[39]是利用 Boussinesq 假設模擬管流中自然對流現象，其物理模式圖如圖 1 所示，其中 $l_1/l_2 = 81$ ， $l_0/l_2 = 102$ 和 $w/l_2 = 2$ ，與 Fu 與 Huang[39]的物理模型相同。

由於 Boussinesq 假設的限制，因此 Fu 與 Huang[39]的無因次溫差轉換回實際溫差不應過高，故在此模擬中，本研究所採用的實際溫差約為 10K 左右，以符合 [39]所模擬的條件。

圖 13 為本研究與 Churchill 與 Chu[38]和 Fu 與 Huang[39]的平均紐塞數分佈圖，平均紐塞數與 Rayleigh number 的定義如下：

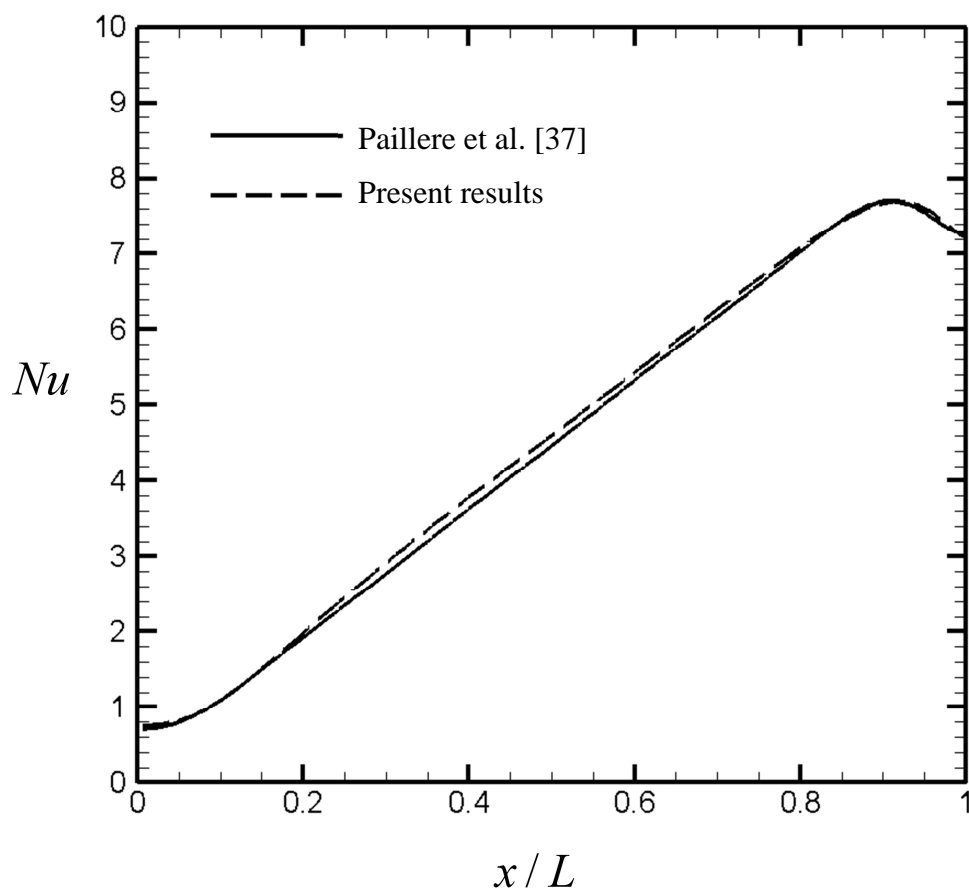


圖 12. 高溫壁面 local 紐塞數分佈圖

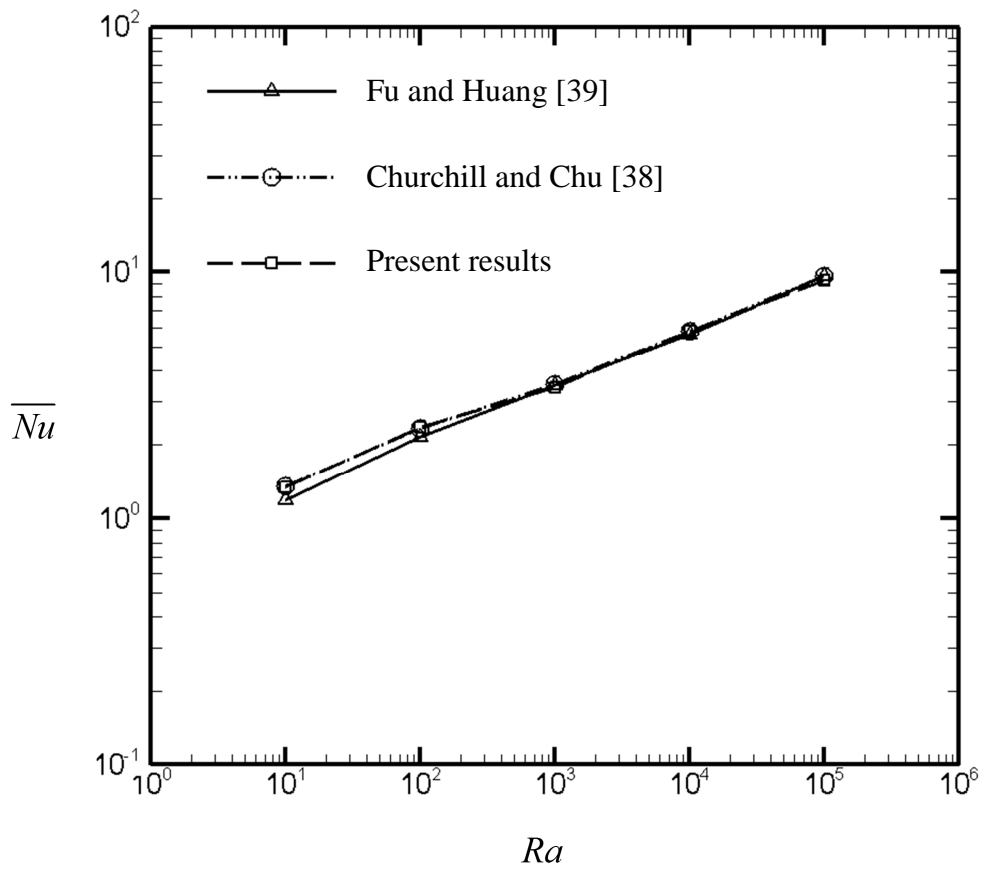


圖 13. Ra 與平均紐塞數比較圖

$$\overline{Nu} = \int_{l_2} \frac{l_2}{(T_h - T_c)} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_w dx / l_2 \quad (7-3)$$

$$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 \beta (T_h - T_c) l_2^3}{\mu^2} \quad (7-4)$$

此處 β 為熱膨脹係數。

由上述的結果可知，即使在低溫差所造成的自然對流情況下，本程式與 Bossinesq 假設所模擬的結果幾近相同。

最後，為了驗證本研究所發展的計算方法與非反射性邊界於低速可壓縮流體的適用性，將模擬垂直管道中的自然對流現象。由於過去利用 Bossinesq 假設所模擬的自然對流現象，只能適用於溫差 30K 的範圍內，因此於實際工業應用上將受到限制。而本計算方法將可解決上述缺失。

由於同時考慮可壓縮性與溫度對於流體黏度的影響，因此 Rayleigh 數重新定義如下：

$$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) l_2^3}{T_0 \mu(T)^2} \quad (7-5)$$

圖 14 為 $Ra = 10^4$ 時，流線、壓力與溫度隨著時間的變化圖形。其初始條件為溫度、壓力與大氣環境相同，並且速度為零。當 $t > 0$ 時，管道內的加熱壁面升溫至 T_h 。其他物理參數設定為 $l_1/l_2 = 19$ 、 $l_0/l_2 = 25$ 、 $w/l_2 = 2$ 與 $\Delta T = T_h - T_c = 110K$ 。圖 14(1) 為 $t = 0.0005s$ ，熱開始藉著熱傳導從壁面傳至流體，其現象如圖 14(1)c 所示。因為流體吸收了壁面的熱量，因此密度變輕，體積膨脹，造成流體分別被從管道進出口端擠出，如圖 14(1)a 所示。此現象無法利用不可壓縮流的方式模擬而觀察到，除此之外，也從未被其他文獻所提出。當 $t = 0.02s$ ，浮力對於流體影響逐漸顯現。於圖 14(2)a 可以觀察到於加熱面附近的流體逐漸改變流動方向，因此形成回流，於是在圖 14(2)b 中可明顯觀察到加熱面附近的低壓。於此同時，圖 14(2)c 顯示了溫度場受到流體往上流動的影響，逐漸往上延伸。

當時間為 $0.05s$ ，管道進口端部份的流體受到浮力影響，開始從大氣環境被吸入管道，其流線圖如圖 14(3)a 所示。此時加熱壁面附近的回流區域逐漸擴大且上升。伴隨著回流的上升，低壓部份也逐漸往上，形成的正壓與負壓的交界線。在時間為 $0.1s$ 時，流體繼續從下方進口端被吸入，上方出口端被排出，原本加熱壁面的回流區域分成較小的兩個回流區域。圖 14(4)b 所顯示的壓力則從進口端

逐漸增加至出口端。

最後於時間1s時，觀察圖 14(5)a，由於加熱壁面至於管道左方的關係，因此自然對流效應對於左方的流體加速較大的關係，在管道右方形成巨大的回流區域。在管道進口端，由於負壓的緣故，因此流體從大氣環境被吸入至管道裡。出口端由於正壓的緣故，流體從管道內被排出至大氣環境。此壓力分佈於入口端部份，與 Dyer [40]利用 Bernoulli 方程式所設置的進口條件模擬結果一致。然而出口端的壓力，由於[40]是將出口壓力設置為大氣壓，與本研究所使用的非反射性邊界不同，因此產生相異的結果。

圖 15 為不同 Rayleigh 數下，平均紐塞數與 Rayleigh 數的關係圖形。平均紐塞數定義如下：

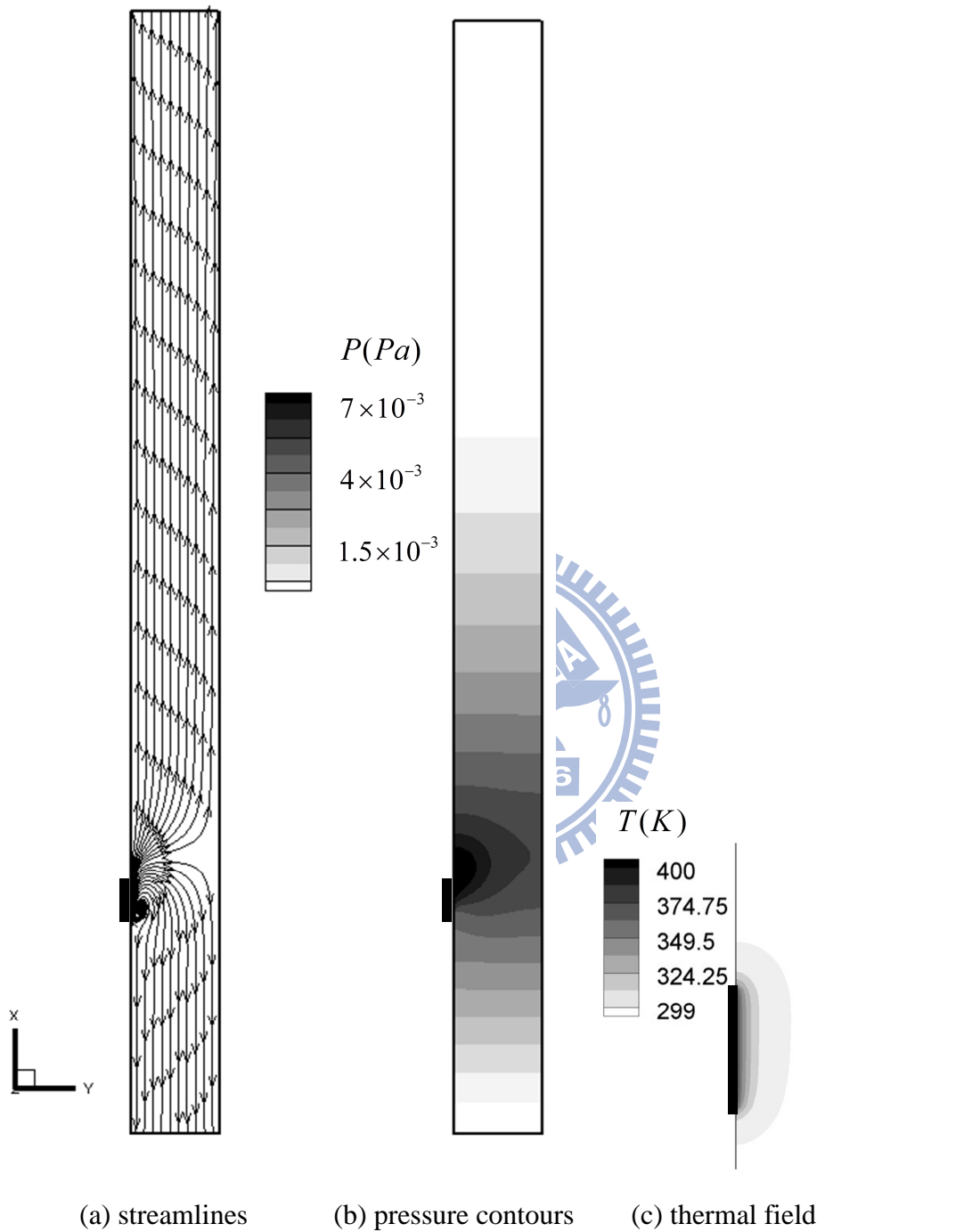
$$\overline{Nu}_{l_2} = \int_{l_3}^{l_3+l_2} \frac{L}{k_0(T_h - T_c)} [k(T) \frac{\partial T}{\partial y}]_w dx / l_2 \quad (7-6)$$

平均紐塞數與 Rayleigh 數的相關方程式如下所示：

$$\overline{Nu}_{l_2} = 0.794 \times Ra^{0.213} \quad (7-7)$$

利用方程式(7-7)，將可找到溫差較大的自然對流效應下，其平均紐塞數與 Rayleigh 數的關係，因此對於實際工業應用上將有更大的幫助。





$t = 0.005s$

圖 14(1). $Ra = 10^4$ 流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形

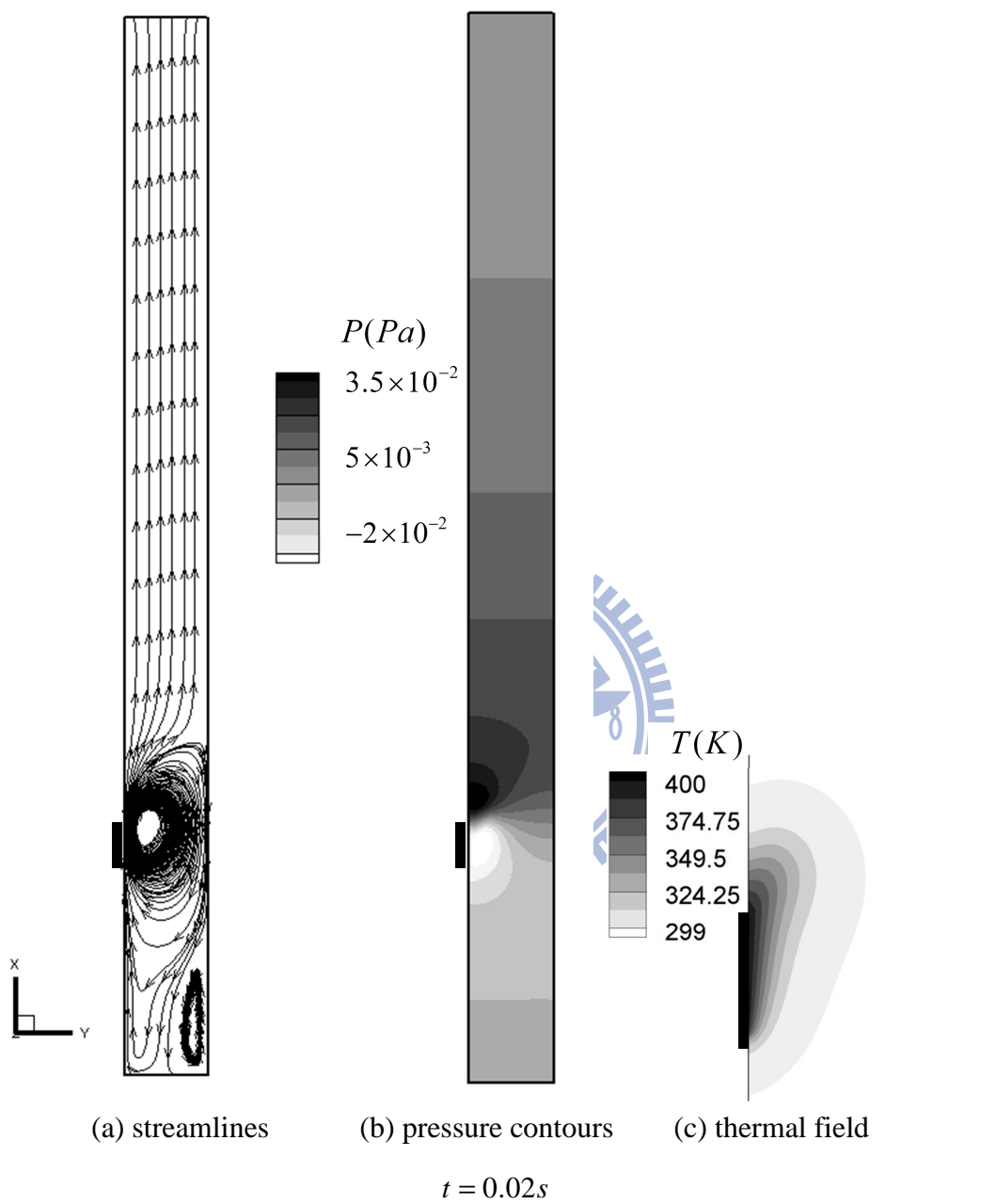


圖 14(2). $Ra = 10^4$ 流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形

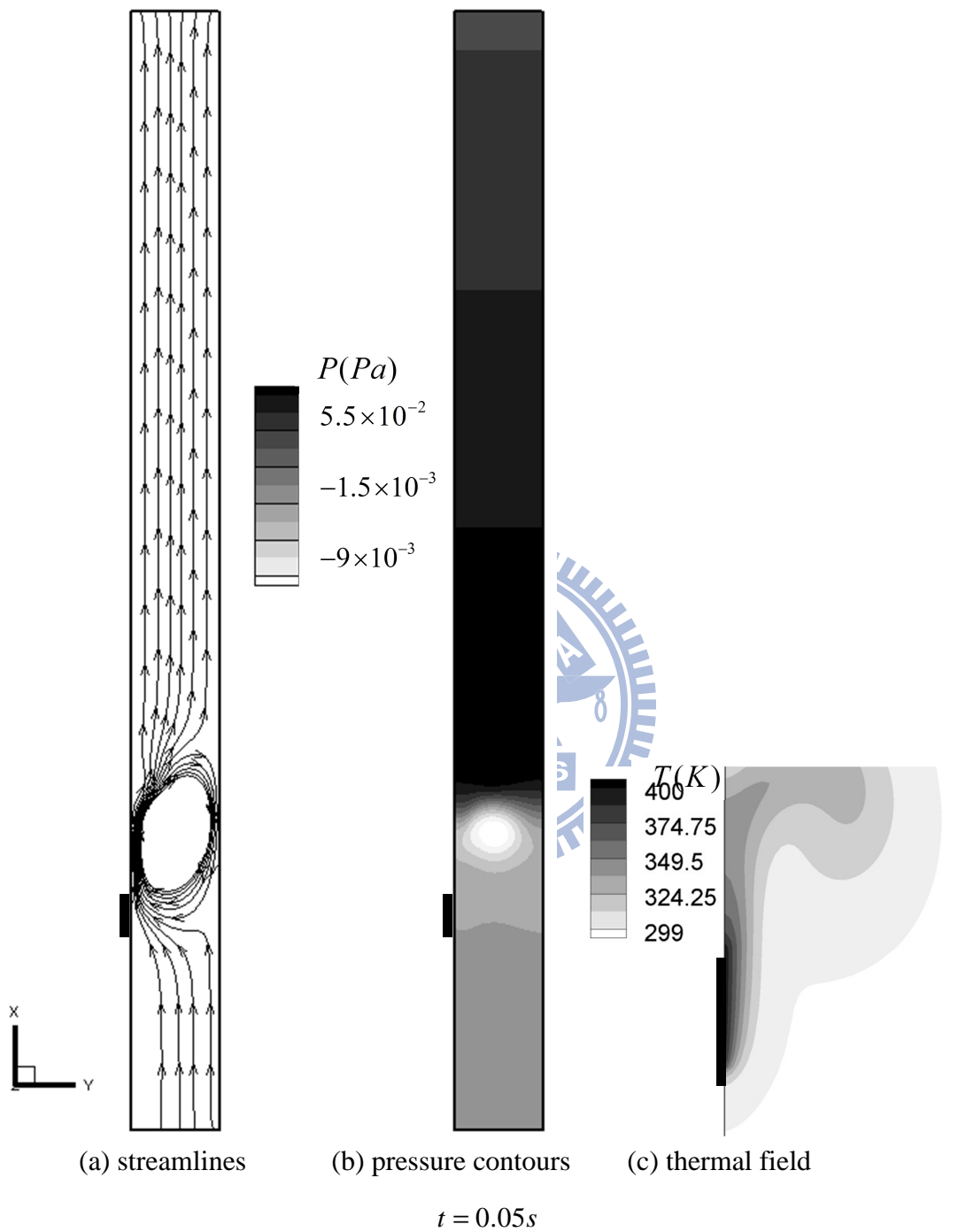


圖 14(3). $Ra = 10^4$ 流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形

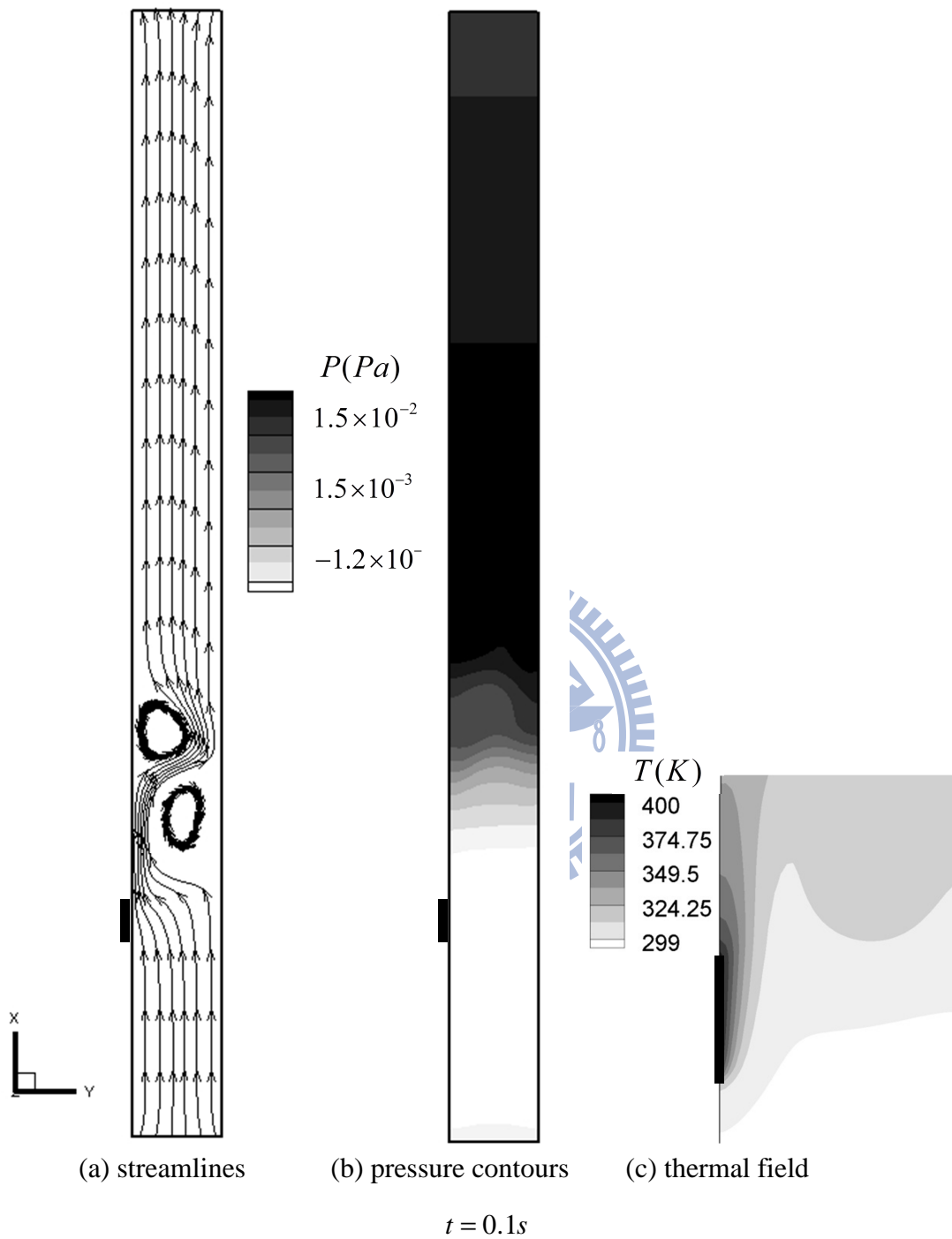


圖 14(4). $Ra = 10^4$ 流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形

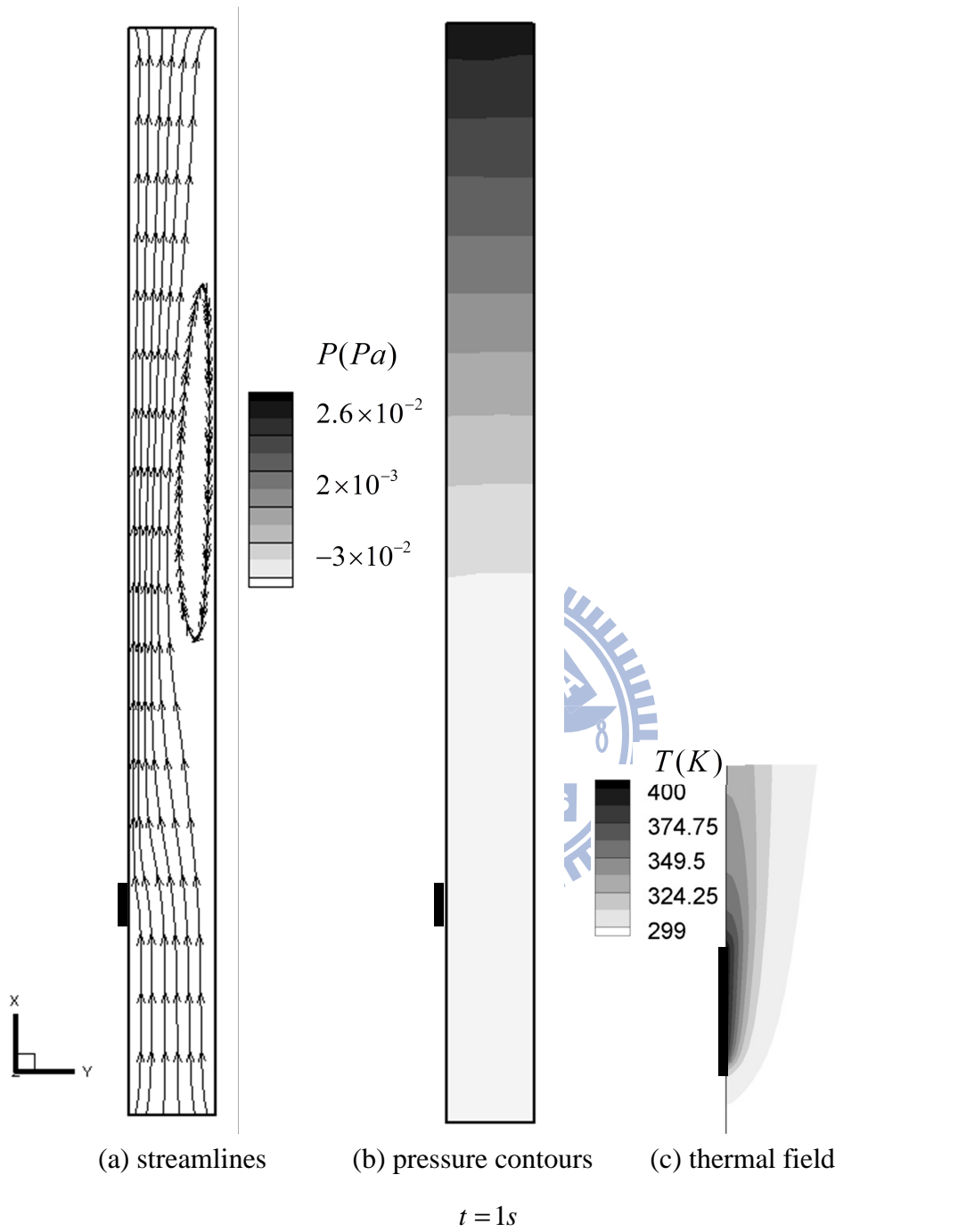


圖 14(5). $Ra = 10^4$ 流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形

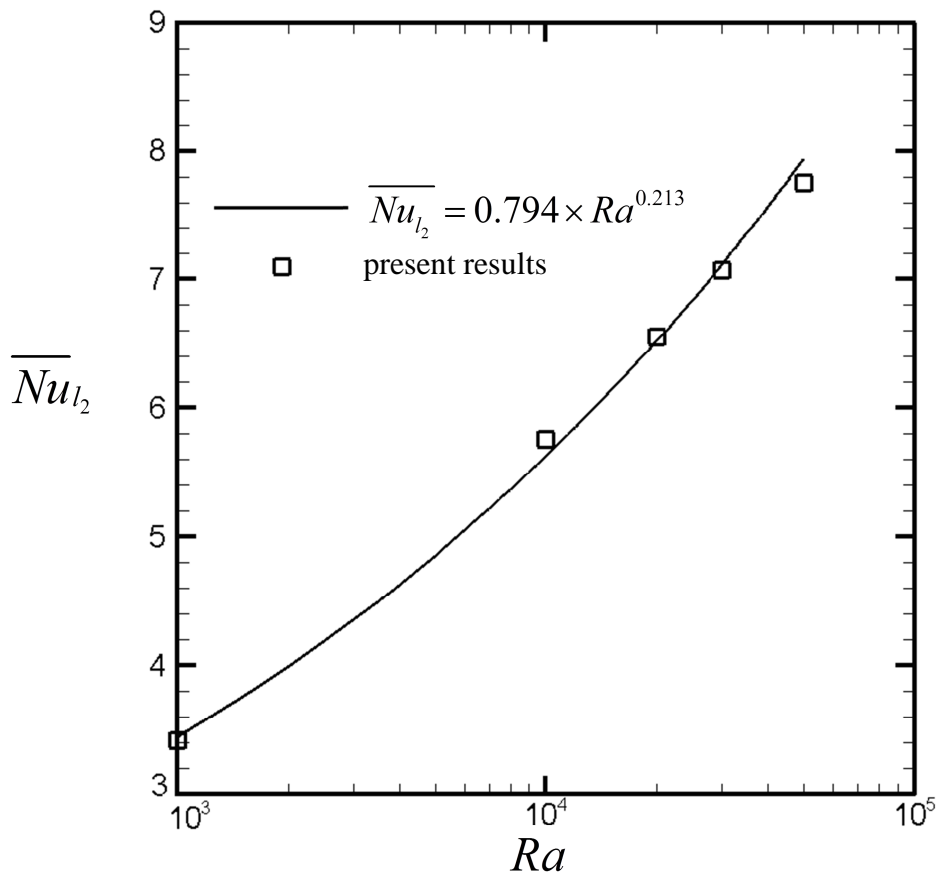


圖 15. 關係方程式與計算結果比較圖

7.2 水平管道自然對流：

在水平管道的自然對流中，由於管道的兩端邊界同時有流進跟流出管道的兩種方向，因此在傳統上，多利用延伸大空間的方法來計算。利用低速可壓縮流非反射性邊界法，則可改善延伸大空間法所耗費過多的計算時間與容量。

圖 16 為利用低速可壓縮流非反射性邊界法於水平管道中與[41]的比較結果，表 2 其平均紐塞數的比較表。其中紐塞數與 Rayleigh 數的定義如下：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2W} \int \frac{W}{(T_h - T_c)} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{wall} dx \quad (7-8)$$

$$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 \beta (T_h - T_c) W^3}{\mu^2} \quad (7-9)$$

此處 W 為管道的高度， β 為熱膨脹係數。

由圖 16 可知，利用非反射性邊界法所計算出的結果與[41]先利用大空間求得溫度、速度與壓力關係式的結果極為接近，但利用非反射性邊界法，使得物理模式更加符合實際物理現象，並不需要額外的大空間以符合無限遠處的完全發展流的條件。除此之外，也節省計算空間，提昇效能。於表 2 中，不論於 $Ra = 10^4$ 或 $Ra = 10^5$ 情況下，平均紐塞數都相當接近，其中下壁面由於是加熱壁面，流場變化較為劇烈，加上不同的計算方法與相異的邊條件設定，所以差異較大。

在完成非反射邊界的上述邊界有進出現象的驗證後，接著利用此法於圖 2 的物理模型中，根據測試，最佳的網格配置為 $220 \times 40 \times 40$ 。加熱壁面沿著 z 軸放置於管道中央上，初始溫度與壓力與大氣環境條件相同，速度為零。當加熱開始，加熱壁面的溫度為 $401.0490k$ ，並且保持此溫度。

圖 17 為 $Ra = 10^4$ 下，流線、壓力與溫度隨著時間變化圖形，其 Rayleigh 數定義如下：

$$Ra = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) W^3}{T_0 \mu(T)^2} \quad (7-10)$$

此處 W 為管道的高度

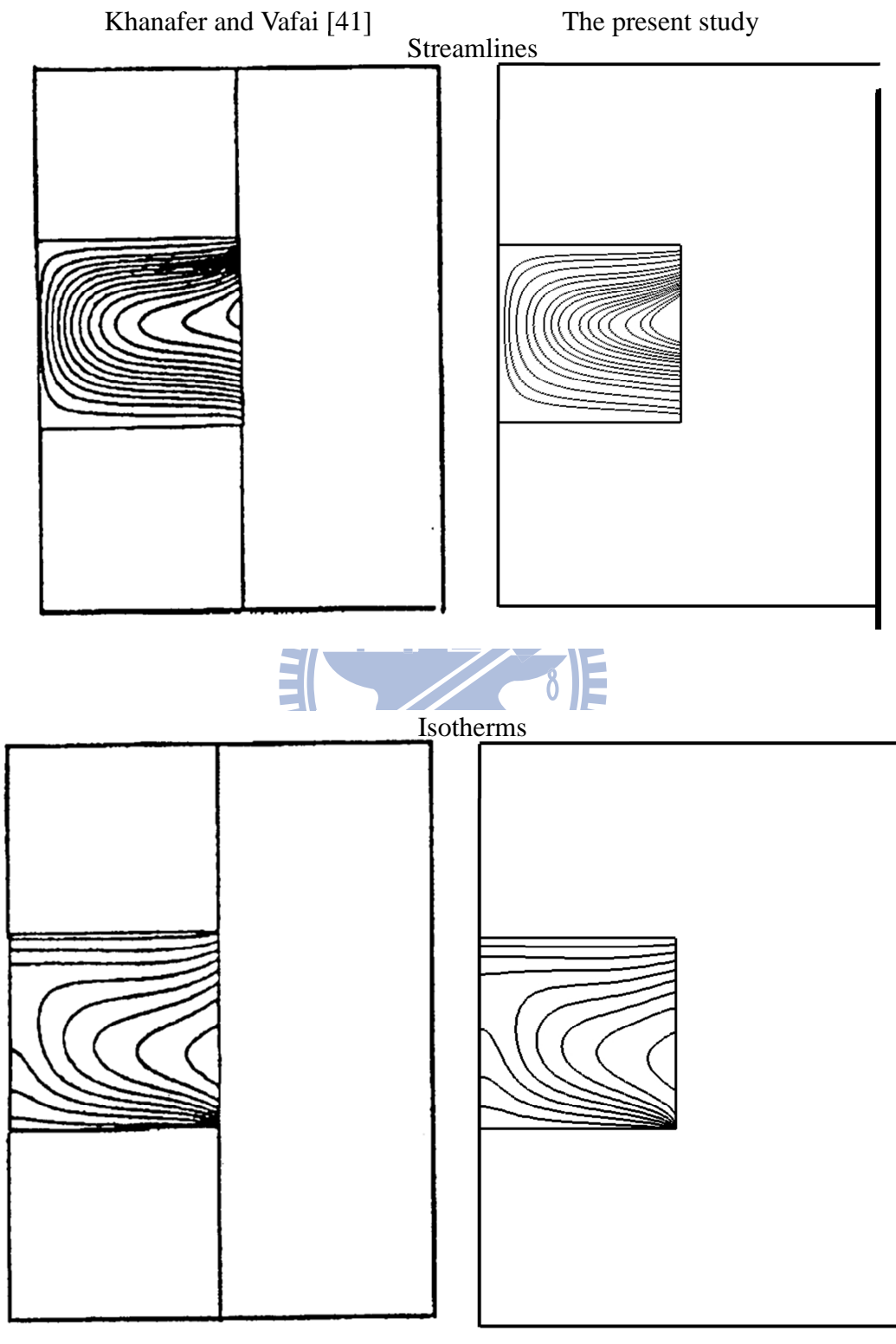


圖 16. 流線與等溫線圖與 Khanafar 與 Vafai [41]的比較

表 2. 平均紐塞數與 Khanafer 與 Vafai [41] 的比較

$Ra = 10^4$			
	Present study	Khanafer and Vafai [41]	deviation (%)
Nu (lower)	2.20	1.99	10.0
Nu (upper)	1.10	1.09	0.5
$Ra = 10^5$			
	Present study	Khanafer and Vafai [41]	Percent dif. (%)
Nu (lower)	3.50	3.15	11.2
Nu (upper)	2.69	2.90	7.2

圖 17(1)a 為 0.0001s 時，流體的溫度受到加熱，有了些微的升高。此時體積開始膨脹，因此管道兩端的流體被擠出至大氣環境。其流線如圖 17(1)b 所示。圖 17(1)c 則為壓力圖，由於位於加熱壁面附近較輕的流體膨脹的緣故，開始擠壓上方的流體，迫使上方流體往管道兩邊流出。圖 17(1)d 則為管道中沿著 y 軸分別為 0、1.8、3.6 與 5.5 不同位置的壓力分佈圖形，實線為管道內的壓力分佈，點虛線為大氣壓力。其中間的時間極為壓力差，而相對應值可參考兩者最大的間隔所標示的壓力差值。在管道右邊，由於點虛線較大氣壓力大，因此流體全部從管道內往大氣環境流出。

圖 17(2)為 $t = 0.001s$ ，由於自然對流效應的影響逐漸增大，讓溫度逐漸往管道右邊扭曲，在加熱壁面附近也開始產生回流，如圖 17(2)b 所示。由於加熱壁面的流體吸收熱量後開始膨脹，接著擠壓管道上方流體，讓流體從管道兩端溢出。由於回流的關係，造成加熱壁面附近的低壓，因此壓力如圖 17(2)d 所示。

圖 17(3)與圖 17(2)的結果相當接近，只是回流出區域逐漸往管道兩端擴大，管道下方的負壓區域也逐漸增加。

圖 17(4)為 $t = 0.01s$ 的穩態圖形，流體受到自然對流影響已發展成為穩定狀態。由圖 17(4)a 可觀察到溫度圖受到自然對流的影響，呈現扭曲的狀態。圖 17(4)b 則可觀察到，在管道中，上方流體從管道流向大氣環境，下方則從大氣環境流向管道內，此分佈一直延伸至管道兩端。而壓力分佈則如圖 17(4)d 所示，上方較大氣壓力為大，但壓差逐漸往管道兩端減少，下方則呈現相反的現象。此種發生於邊界上的現象稱之為雙反射現象(dual-reflection phenomenon)。

圖 18 為到達穩態後，isothermal surfaces 的強度圖形，由於已經到達穩態，在管道兩端下緣部份，由於冷空氣被從外界吸進，因此溫度較低，經過中間加熱壁面加熱後，在從上緣部份流出，因此上緣部份溫度較高。除此之外，除了加熱壁面外，由於其他皆設定為絕熱壁面，因此在靠近壁面處，isothermal surfaces 有著輕微的彎曲以符合絕熱條件。

圖 19 為 local 紐塞數沿著 z 軸於 $x = W$ 、 $x = W/2$ 與 $x = 0$ 的分佈圖。其 local 紐塞數與 Rayleigh 數的定義如下：

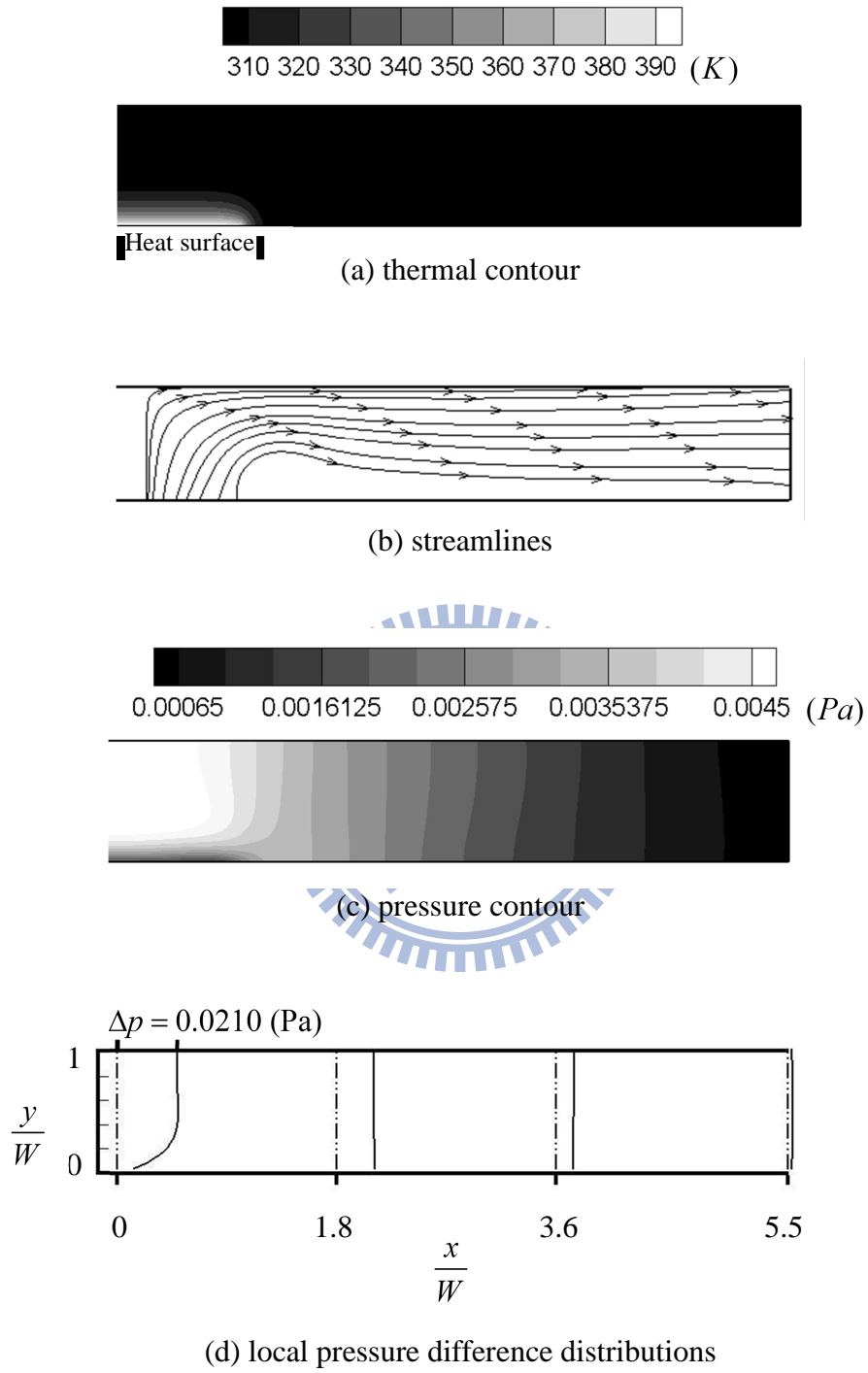
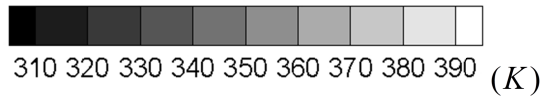
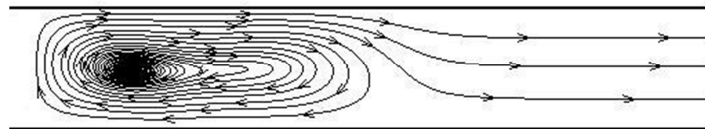


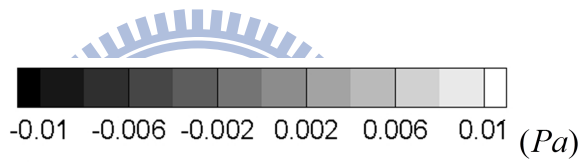
圖 17(1). $Ra = 10^4$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖



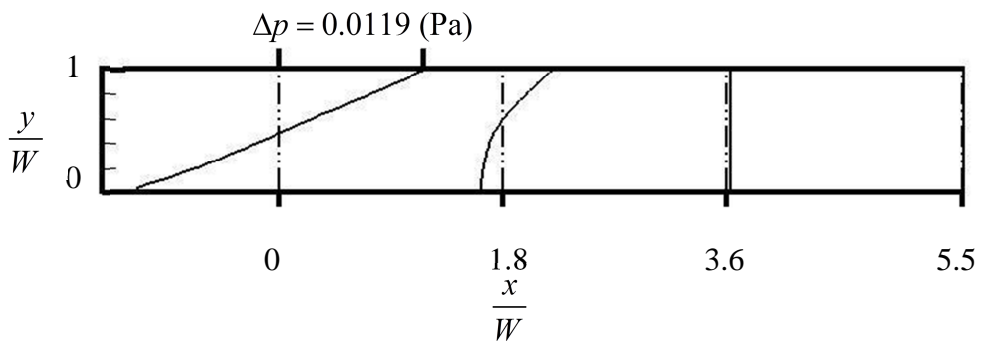
Heat surface (a) thermal contour



(b) streamlines



(c) pressure contour



(d) local pressure difference distributions

$t = 0.001\text{s}$

圖 17(2). $Ra = 10^4$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖

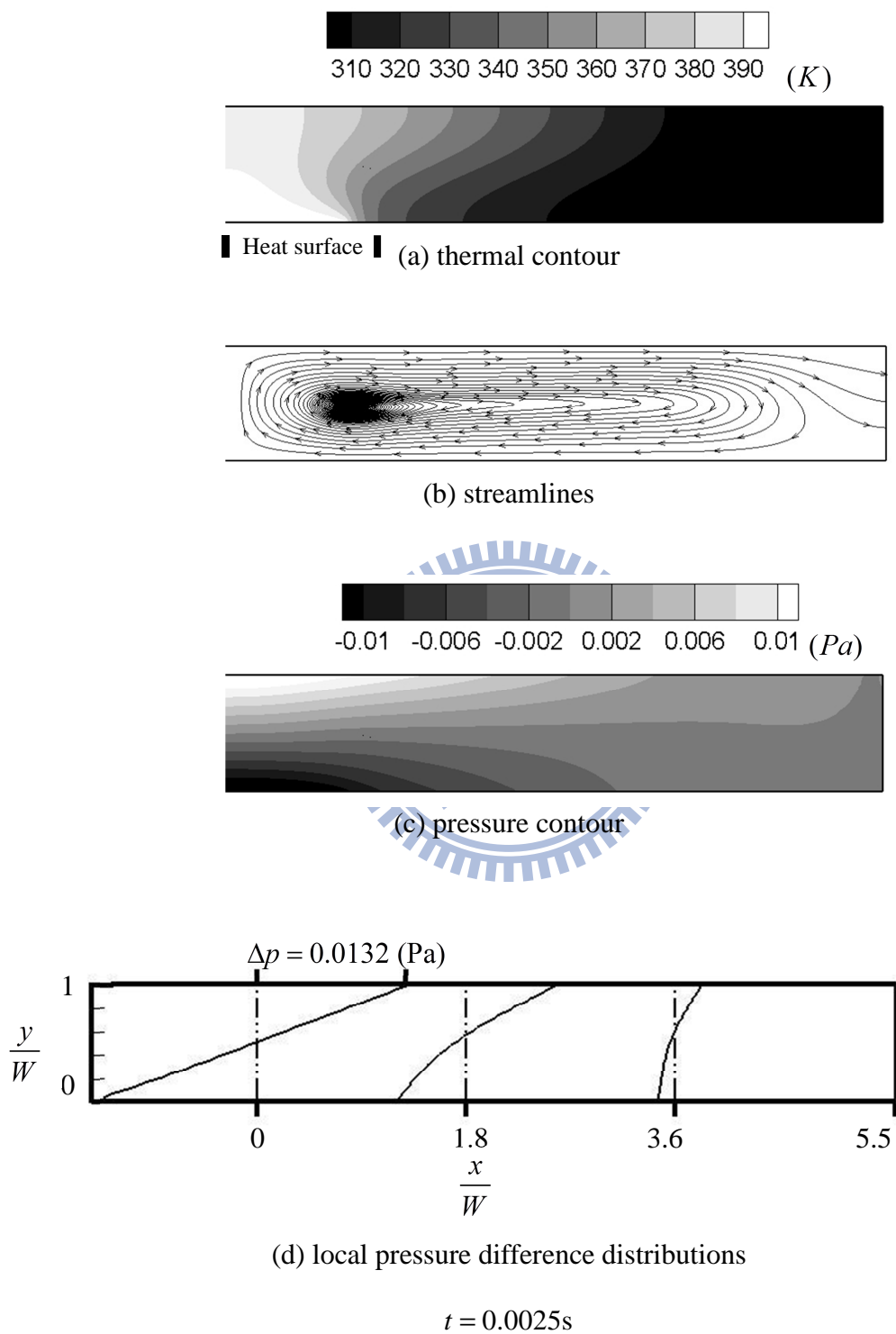


圖 17(3). $Ra = 10^4$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖

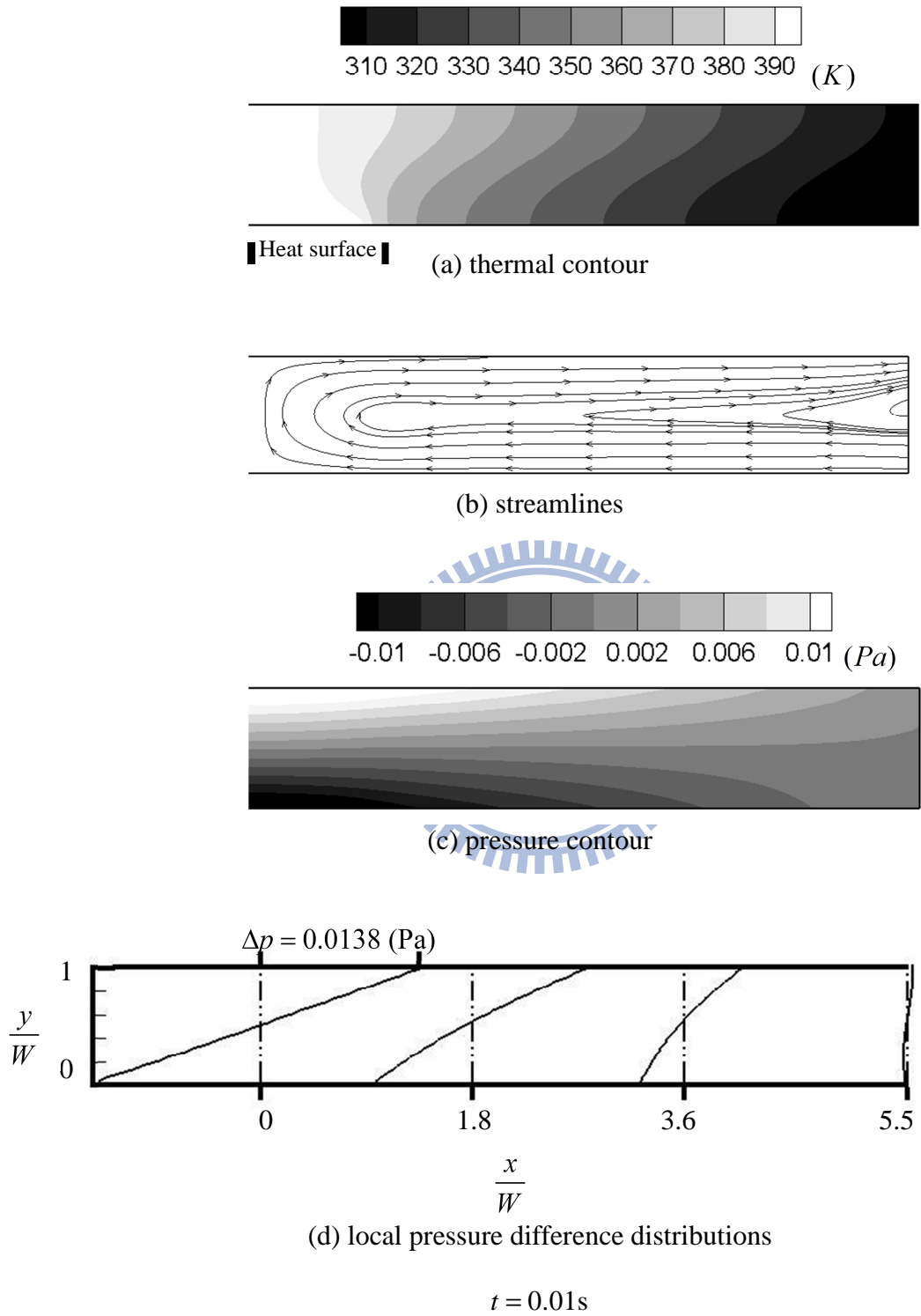


圖 17(4). $Ra = 10^4$ 下，流線、壓力與溫度隨時間變化圖

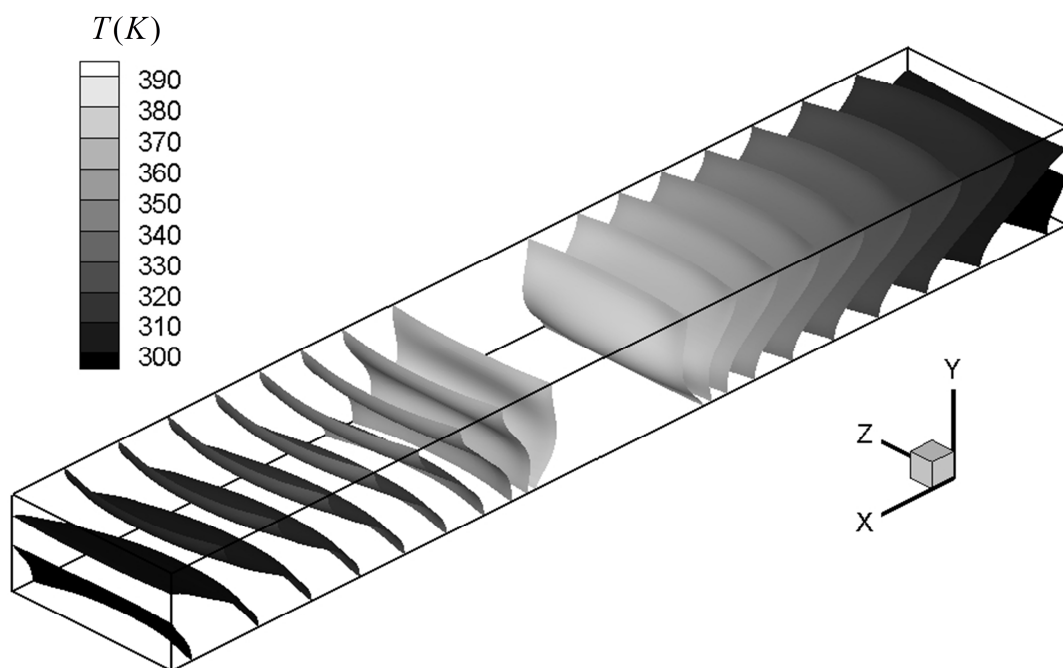


圖 18. Isothermal surfaces 穩態分佈圖形

$$Nu = \frac{W}{k_0(T_h - T_c)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{wall} \quad (7-11)$$

$$Ra^* = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) W^3}{T_0 \mu(T)^2} \quad (7-12)$$

此處 W 為管道的高度

其中加熱壁面的中央為 $x=0$ 、加熱壁面的邊緣為 $x=W$ 。冷流體從管道兩端進入時，先接觸到加熱壁面的邊緣即 $x=W$ 的位置，因此此處的熱傳效果將會顯著提昇，紐塞數較高。接著流體逐漸被加熱，所以經過 $x=W/2$ 、 $x=0$ 的加熱壁面時，紐塞數呈現明顯的下降。除此之外，由於角落部份的影響，因此在角落兩端的紐塞數會較中央的低。

為了擴展本研究的適用性，於此模擬中，另外模擬平均 \widetilde{Ra} 數為 $\widetilde{Ra}=10^3$ 、 $\widetilde{Ra}=10^4$ 、 $\widetilde{Ra}=3 \times 10^4$ 與 $\widetilde{Ra}=4 \times 10^4$ 的結果，其溫度差分別為 $10.3K$ 、 $103K$ 、 $309K$ 與 $515K$ 。最後利用上述模擬找出平均 \widetilde{Ra} 數與平均紐塞數 \widetilde{Nu} 的關係，其定義如下：

$$\widetilde{Nu} = \frac{1}{A} \iint \frac{(W/2)}{k_0(T_h - T_c)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{wall} dx dz \quad (7-13)$$

$$\widetilde{Ra} = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) \times (W/2)^3}{T_0 \mu(T)^2} \quad (7-14)$$

根據 Bejan[42]，此處 A 為加熱面面積， $W/2$ 為加熱面特徵長度。

最後在計算出平均 \widetilde{Ra} 數與平均紐塞數 \widetilde{Nu} 的關係式：

$$\widetilde{Nu} = 0.019 \times (\widetilde{Ra})^{0.373} \quad (7-15)$$

其分佈圖形如圖 20 所示，於對數座標中，兩者接近線性關係，此趨勢和 Bejan[42] 與 Martorell[43] 利用實驗方法於開放空間中所求得的關係式趨勢相當類似。

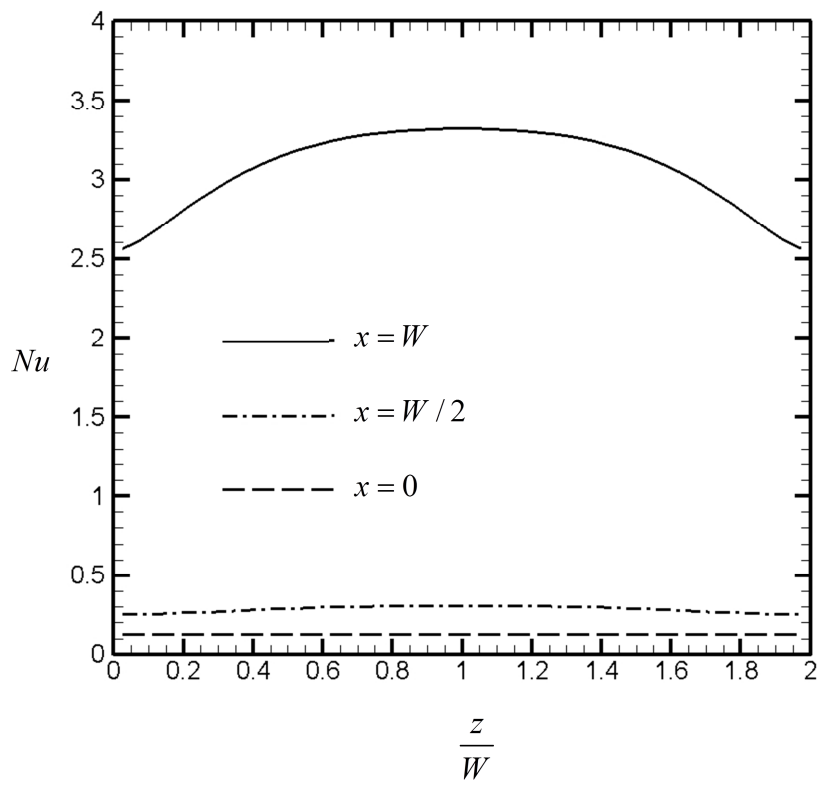


圖 19. 沿 z 軸， $x=W$ 、 $x=W/2$ 與 $x=0$ 的 local 紐塞數分佈圖

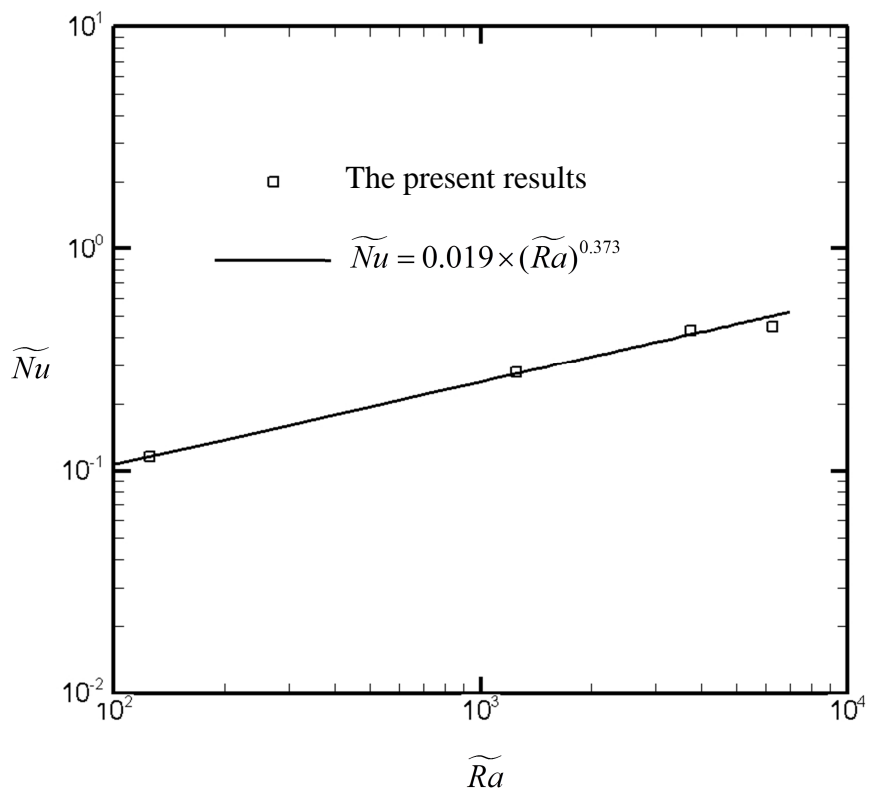


圖 20. 平均紐塞數與 Rayleigh 數關係式

7.3 LES 配合 Smagorinsky model 模擬無限平板紊流流場：

為了驗證 Roe 法配合 preconditioning 可準確的模擬出紊流的型態，將利用 LES 法模擬管道中的紊流完全發展流。首先測試馬赫數 0.005，低速幾近不可壓縮的管道流。

雷諾數根據平均流速與管道一半高度 δ 約為 2700；而雷諾數根據摩擦速度 u_τ 與管道一半高度 δ 約為 180。計算範圍的大小與上述管流流體性質，網格數與時間間隔將統整於表 3。再計算範圍的選定方面，於循環方向（ x 、 z 方向）需確認各點自身的相關性不會受到循環邊界的影響。因此，計算範圍需大於紊流的相關結構-紋線 streaks。根據[44]， x 方向的平均紋線的大小約為 $1000 \lambda^+$ ， z 方向的平均紋線的大小約為 $100 \lambda^+$ ，其中 $\lambda^+ = \frac{V}{u_\tau}$ 。於此測試中， x 方向的長度為 $1382.4 \lambda^+$ ， 3.84δ ， z 方向的長度為 $691.2 \lambda^+$ ， 1.92δ 。

由於管流中，流體受到壁面的影響甚巨，因此本程式撰寫於曲線座標以加密壁面附近的網格，提高模擬的準確度。其座標轉換方程式如下：

$$y = h \frac{(2\alpha + \beta) \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta-\alpha}{1-\alpha}} + 2\alpha - \beta}{(2\alpha+1) \left[1 + \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta-\alpha}{1-\alpha}}\right]} \quad (7-16)$$

$\alpha = 0.5$ 時，兩邊壁面加密的程度相同， β 越接近 1 時，網格的差異性越大，本研究選定 $\beta = 1.1$ 。靠近壁面的最小網格 $\Delta y^+ = 0.84$ ，網格中央最大網格 $\Delta y^+ = 9.39$ 。 x 與 z 方向則採用均勻網格， $\Delta x^+ = 21.6$ ， $\Delta z^+ = 10.8$ 。配置如圖 21 所示。

初始條件為紊流完全發展流的速度曲線加上一隨機數，其隨機分佈為 normal distribution。初始條件的方程式如下所示：

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u_{\max} \times \phi \times R \\ v &= v_{\max} \times \phi \times R \\ w &= w_{\max} \times \phi \times R \end{aligned} \quad (7-17)$$

其中 \bar{u} 紊流完全發展流的速度曲線，為 R 為分佈從 -1 至 1 的 normal distribution 隨機數， ϕ 為隨機數強度調整係數 0~100%， u_{\max} 為紊流完全發展流的速度曲線中的最大的速度。根據程式的測試結果顯示， ϕ 在小於 40% 時，流場會因為壁面剪應力的作用，使得擾動逐漸減小而衰退成層流。

表 3. 馬赫數 0.005 計算參數

parameters	magnitudes
Mean Mach number, $\frac{\bar{u}}{c}$	0.005
Mean streamwise velocity, \bar{u}	1.51 m/s
Average friction velocity, u_τ	0.11248 m/s
Grids distribution, $i \times j \times k$	64×64×64
$l_1 \times l_2 \times l_3$	0.192×0.096×0.05 m ³
Eddy turnover time, $t_e = \frac{0.5l_2}{u_\tau}$	0.222 s
Initial temperature	298.05k
Time interval, Δt	5×10 ⁻⁴ s

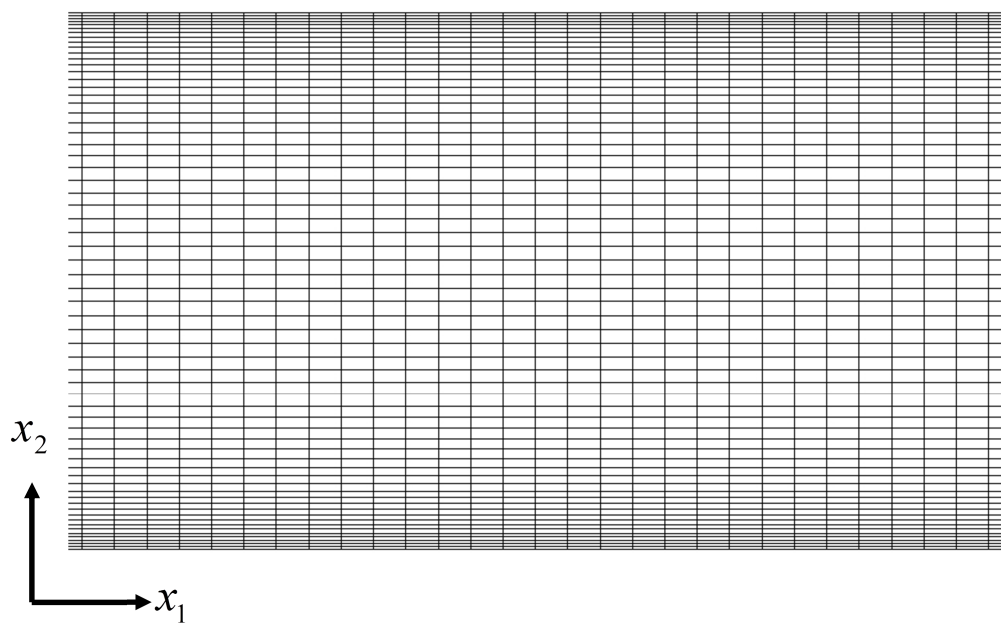


圖 21. 網格分佈圖形

圖22為三個垂直平面的流動方向速度強度圖，由此圖可以明顯觀察到靠近壁面附近的streak，其大小約為 $100\lambda^+$ ，與[44]所提到 $Re_\tau = 180$ 的管流其 x_3 方向的平均紋線的大小約為 $100\lambda^+$ 的現象與其他管流實驗所觀察到結果相吻合。

圖23至圖25分別為紊流平均速度與紊流強度圖，由圖上可以發現本研究的結果與Kim等人[20]利用DNS模擬所得到的結果相當吻合。

第二個測試中，本研究將模擬高速紊流流體於等溫壁面條件下，溫度升高的現象。雷諾數根據平均流速與管道一半高度 δ 約為2700；而雷諾數根據摩擦速度 u_τ 與管道一半高度 δ 約為180。計算範圍的大小與上述管流流體性質，網格數與時間間隔將統整於表4。初始條件部份，速度場為隨機 $\phi = 40\%$ 速度流場，溫度部份為均勻分佈 $298.0592K$ 。

根據Lenormand 等人[45]，雖然流體速度0.5馬赫為可壓縮流，但其結果與不可壓縮流非常接近。因此在此測試中，紊流速度的相關性將與上述兩個測試一樣，與[20]的DNS模擬結果比較。溫度與密度的紊流相關性則與[45]的LES模擬結果比較。

圖26與圖27為Reynolds stress與紊流強度圖，由此可觀查到其結果與[20]相當接近，再次驗證[45]中所提出的，高速可壓縮紊流與不可壓縮紊流其結果非常類似。

由於流體極為高速，因此流體將被擠壓，遠離等溫壁面的流體溫度將會明顯的升高。圖28為沿著y軸的無因次平均溫度圖，其中 $T_w = 298.06K$ 為壁面溫度。於圖28中可以明顯觀察到因為速度極快，造成管道中央流體溫度升高的現象。其分佈從壁面逐漸管道中央部份升高。密度則因為假設流體為理想氣體，因此與溫度為倒數關係，趨勢與溫度呈現相反現象，如圖29所示。越遠離壁面，流體的密度越小。上述溫度與密度的結果，皆與[45]的結果相當一致。說明本研究所發展的計算方法，同樣適用於高速流體。

圖30為三個垂直平面的瞬時溫度強度圖，與圖22中，紊流速度場的streak線比較，溫度場在靠近壁面yz平面上，同樣存在高低溫度分佈條狀化的現象，與速度場相似。除此之外，在除了靠近壁面部份因為等溫條件溫度較低外，其他部份因為高速流體而造成流體升溫也可明顯觀察到。

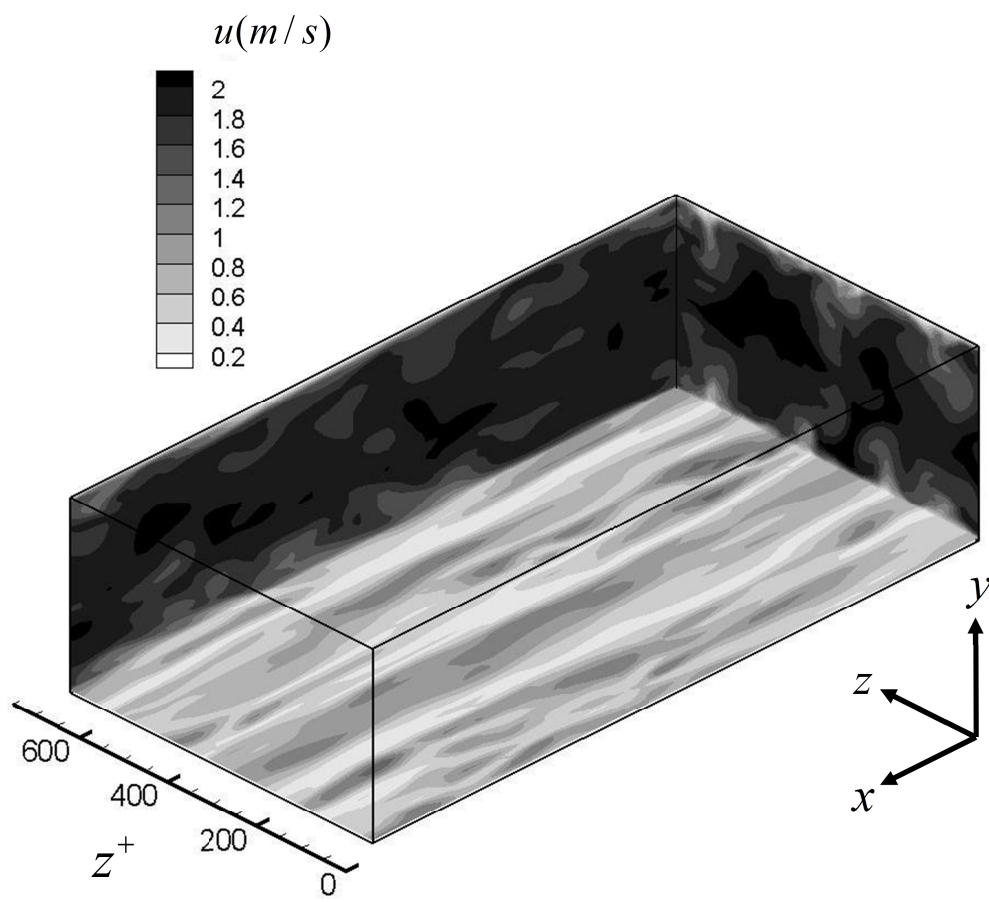


圖 22. 流動方向速度強度圖於 $\phi = 40\%$

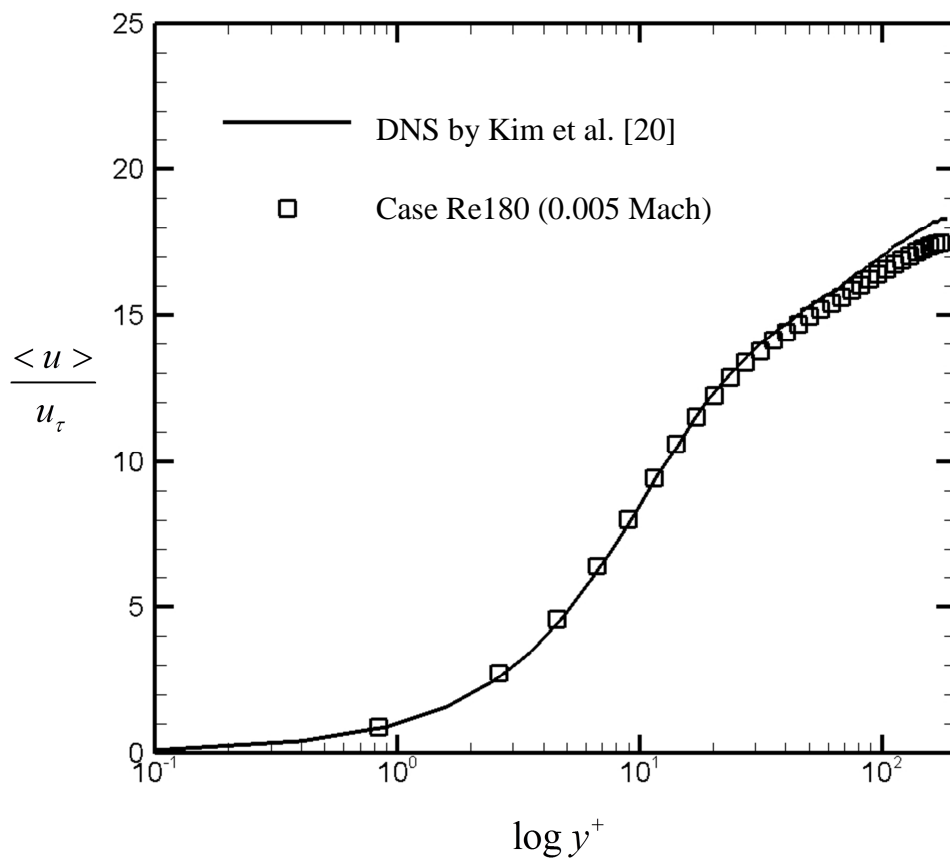


圖 23. LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之平均速度比較圖

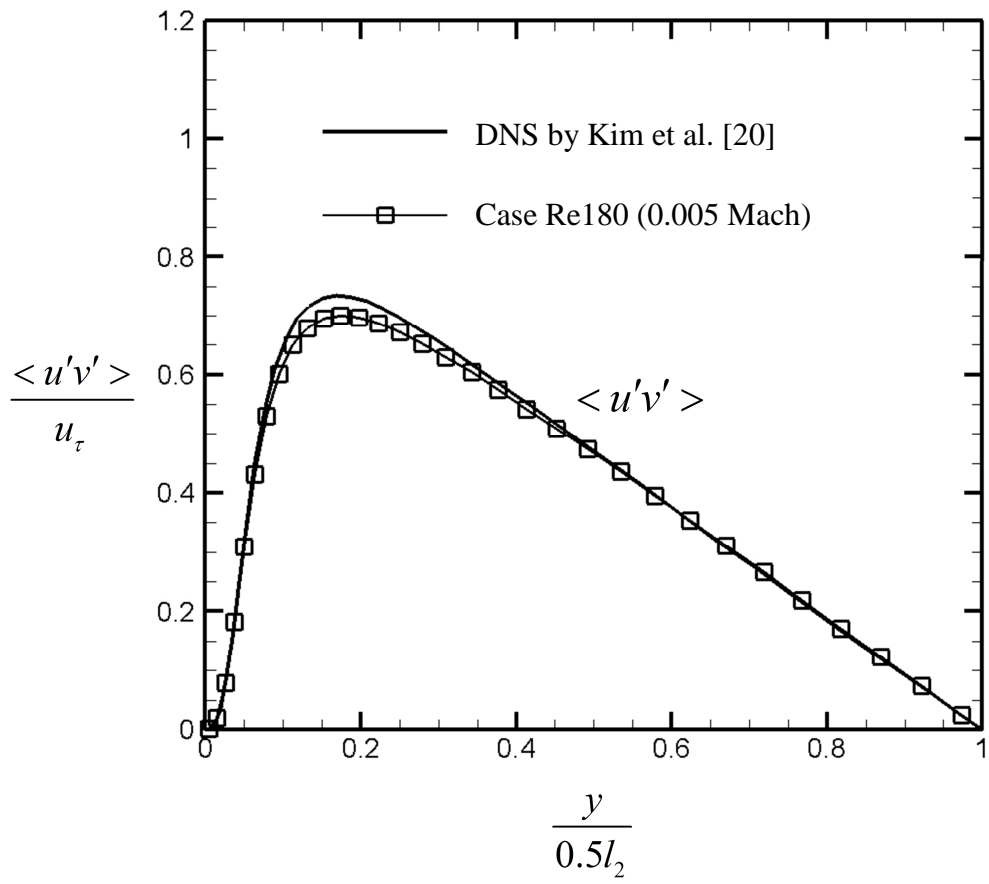


圖 24. LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之 Reynolds stress 比較圖

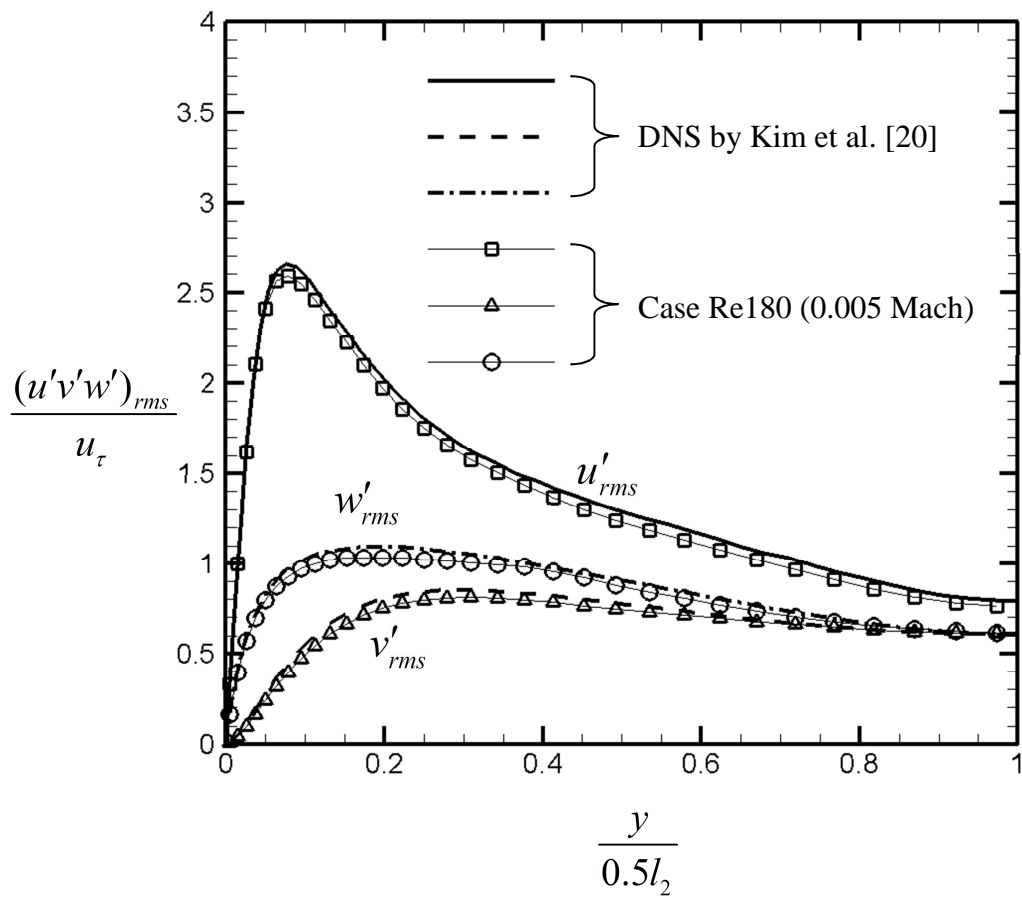


圖 25. LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之紊流強度比較圖

表 4. 馬赫數 0.5 計算參數

parameters	magnitudes
Average Mach numbers, $\frac{\bar{u}}{c}$	0.5
Average streamwise velocity, \bar{u}	157.06 m/s
Average friction velocity, u_τ	11.7412 m/s
Grid, $i \times j \times k$	64×64×64
$l_1 \times l_2 \times l_3$	0.00183936×0.000091968×0.000479 m ³
Eddy turnover time, $t_e = \frac{0.5l_2}{u_\tau}$	2.04×10 ⁻⁵ s
Initial temperature	298.05k
Time interval, Δt	1×10 ⁻⁷ s

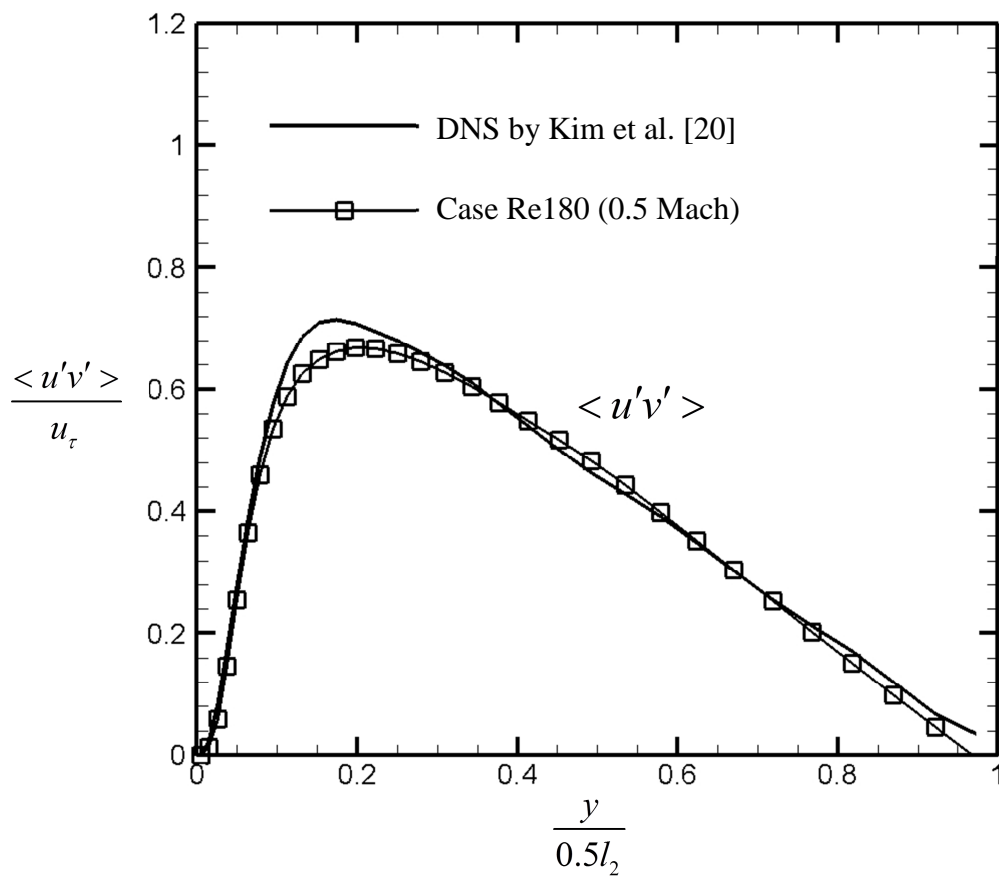


圖 26. LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之 Reynolds stress 比較圖

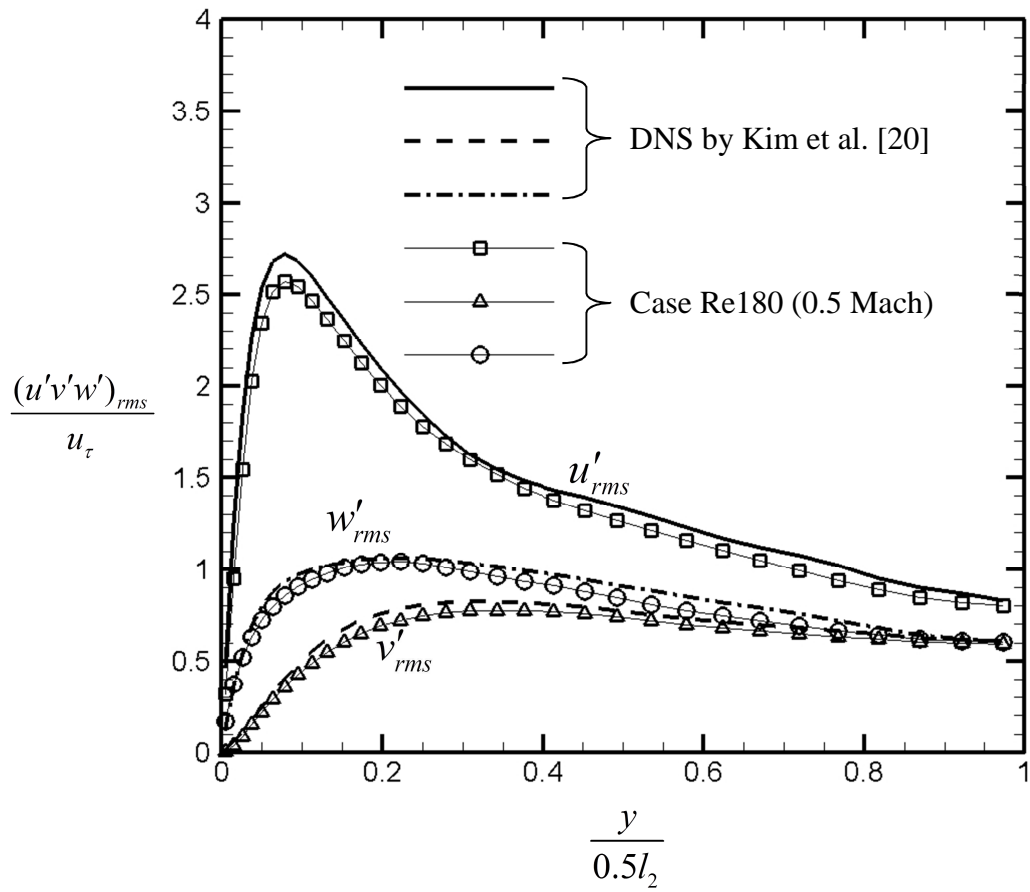


圖 27. LES 配合 Smagorinsky model 與[20]之紊流強度比較圖

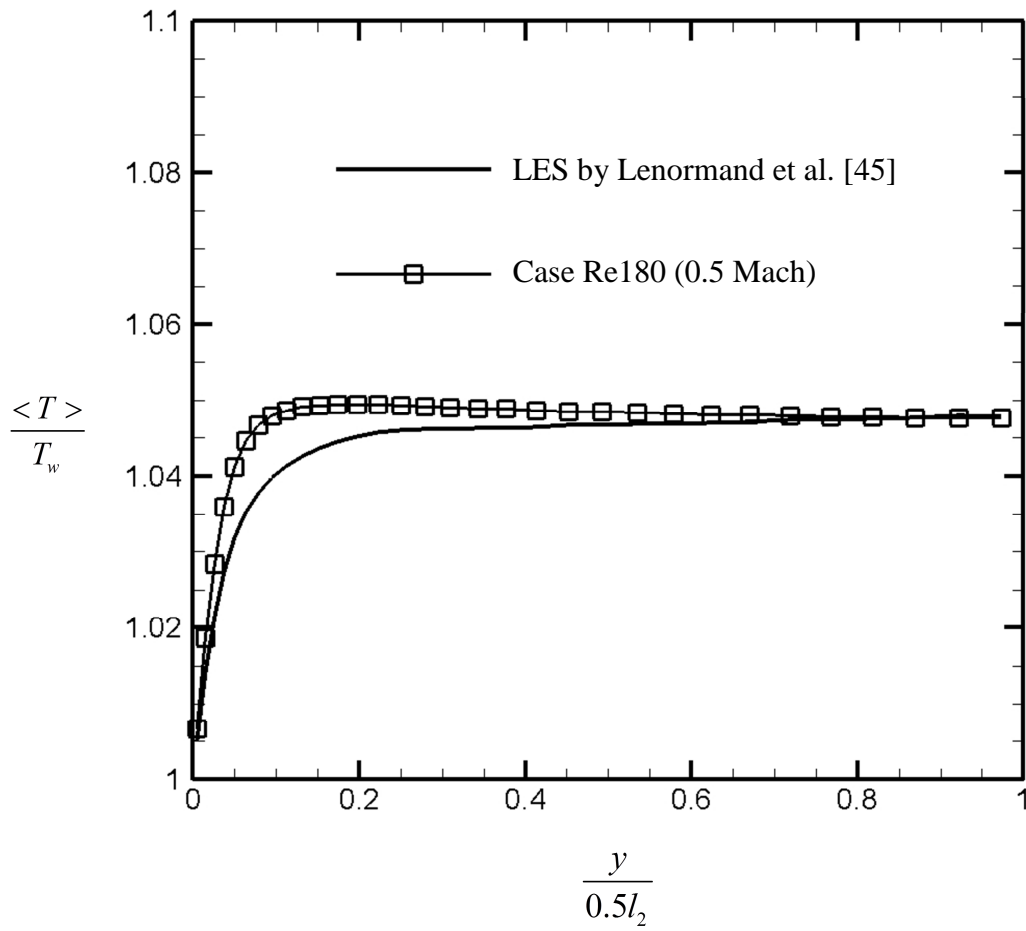


圖 28. LES 配合 Smagorinsky model 與[45]之平均溫度比較圖

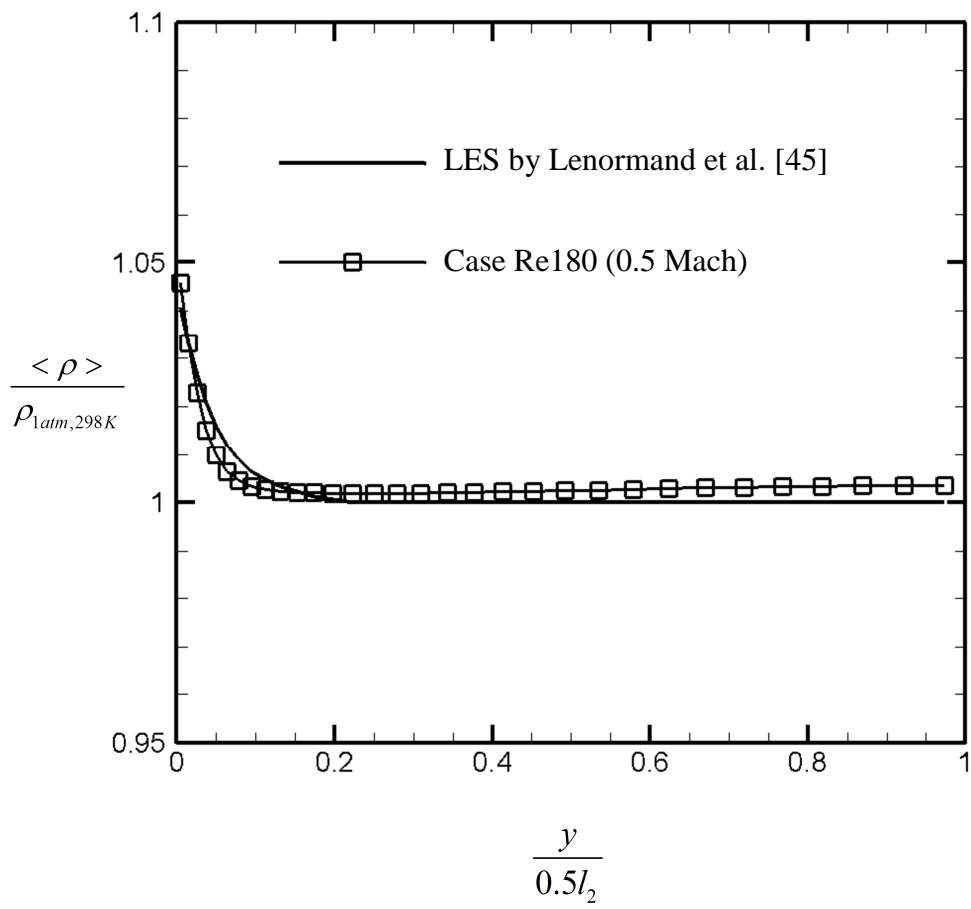


圖 29. LES 配合 Smagorinsky model 與[45]之平均密度比較圖

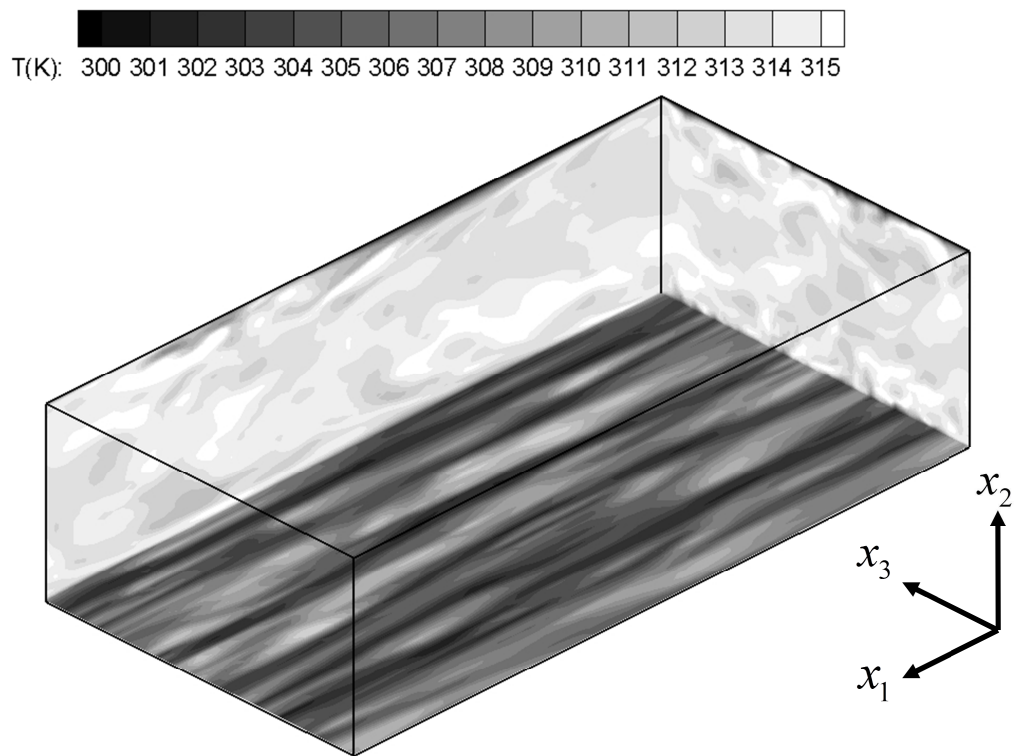


圖 30. 瞬時溫度強度圖(0.5 馬赫數)

7.4 隱式紊流模式 dissipative model :

於本節中，將利用本研究所開發的隱式紊流模式 dissipative model 於無限平板紊流，從低至高雷諾數，計算參數列於表 5。在 Re180、Re550 與 Re950 的模擬中，方程式(4-67)中的 ε 設定為常數 0.1；在 Re950ER 與 Re2000ER 的模擬中，將利用第五章所述：計算 ER 以自動調整 ε 。所有的模擬都到達 statistically steady state。為了讓網格的精確度更高，同樣在 y 的方向靠近壁面處加密，表 3 中 Δy_f^+ 為最靠壁面處的網格與壁面的距離。

為了驗證計算方法的精確，先模擬 $Re_\tau = 180$ 與 $Re_\tau = 550$ 。平均速度、Reynolds stress 與紊流強度繪製於圖 31 至圖 36。其結果與 Kim 等人[20]與 del Alamo 與 Jimenez[46]利用 DNS 所模擬的結果相當接近。由此可知，於較低雷諾數中，Roe upwindind dissipation term 中的 ε 設定為 0.1，可得到良好得結果。

接著利用同樣的 ILES 模擬於更高雷諾數的情況 $Re_\tau = 950$ 。於圖 37 中的平均速度與 DNS 的結果[47]仍然非常接近。然而，圖 37 中的紊流強度於 y 與 z 方向由於能量耗散不足的關係使得小尺度的能量聚積過多，因此較 DNS 的結果為大。同樣的情況也發生於圖 38 的 Reynolds stress 分佈圖。為了改善此問題，在 Re950ER 的模擬中，藉著調整 ε 來控制數值耗散。圖 40、圖 41 與圖 42 分別為平均速度、Reynolds stress 與紊流強度圖。平均速度與 Re950 非常接近，由此可知，調整 ε 對於平均速度影響不大。然而，於圖 42 中，由於 ε 自動調整的關係，紊流強度於 y 與 z 方向幾乎與 DNS 結果重疊，大幅改善 Re950 能量耗散不足的情形。而 x 方向的紊流強度由於數值耗散增加的關係，於管道中央部份，有著些微的下降。在圖 41 中的 Reynolds stress，則有著顯著的改善，尤其管道中央部份，幾乎與 DNS 結果重疊。根據 Re950ER 模擬結果，與 ε 設定為常數 0.1 相比，利用自動調整 ε 的方式，可大幅改善模擬的結果。

於實際工作應用上，通常需要更高的雷諾數。為了驗證 dissipative model 於極高雷諾數的適用性，將測試 $Re_\tau = 2000$ ，其為目前利用 DNS 模擬所能到達的最高雷諾數(Hoyas 與 Jimenez[48])。此模擬(Re2000ER)將配合自動調整 ε 來控制耗散，結果顯示於圖 43、圖 44 與圖 45。圖 43 平均速度與 DNS 結果相比，除了管道中央較大外，其餘部份均非常吻合。Reynolds stress(圖 44)分佈情況則與 Re950ER 相似，非常接近 DNS 的結果。 x 方向的紊流強度則較不足，與 Re950ER

的結果相似。然而於 y 與 z 方向的紊流強度，幾乎吻合 DNS 的結果。由上述內容可知，即使於極高雷諾數下，dissipative model 仍有相當的適用性。於將來的應用中，將有相當大的發展潛力。



表 5. Dissipative model 計算參數

Case	Dissipative model	Domain size	Resolution
Re180	$\varepsilon = 0.1$	$2.5\pi \times 2 \times 2\pi$	$64 \times 64 \times 64$
Re550	$\varepsilon = 0.1$	$2.5\pi \times 2 \times 0.5\pi$	$160 \times 96 \times 64$
Re950	$\varepsilon = 0.1$	$2.5\pi \times 2 \times 0.5\pi$	$160 \times 96 \times 64$
Re950ER	ε is variable	$2.5\pi \times 2 \times 0.5\pi$	$160 \times 96 \times 64$
Re2000ER	ε is variable	$2.5\pi \times 2 \times 0.5\pi$	$192 \times 128 \times 96$

Case	$\Delta x^+ \times \Delta y_f^+ \times \Delta z^+$	Re_τ	Mean $Ma.$
Re180	$21.6 \times 0.8 \times 10.8$	180	0.005
Re590	$23.3 \times 0.8 \times 11.7$	550	0.018
Re950	$46.6 \times 1.5 \times 23.3$	950	0.036
Re950ER	$46.6 \times 1.5 \times 23.3$	950	0.036
Re2000ER	$77.7 \times 1.7 \times 31.1$	2000	0.085

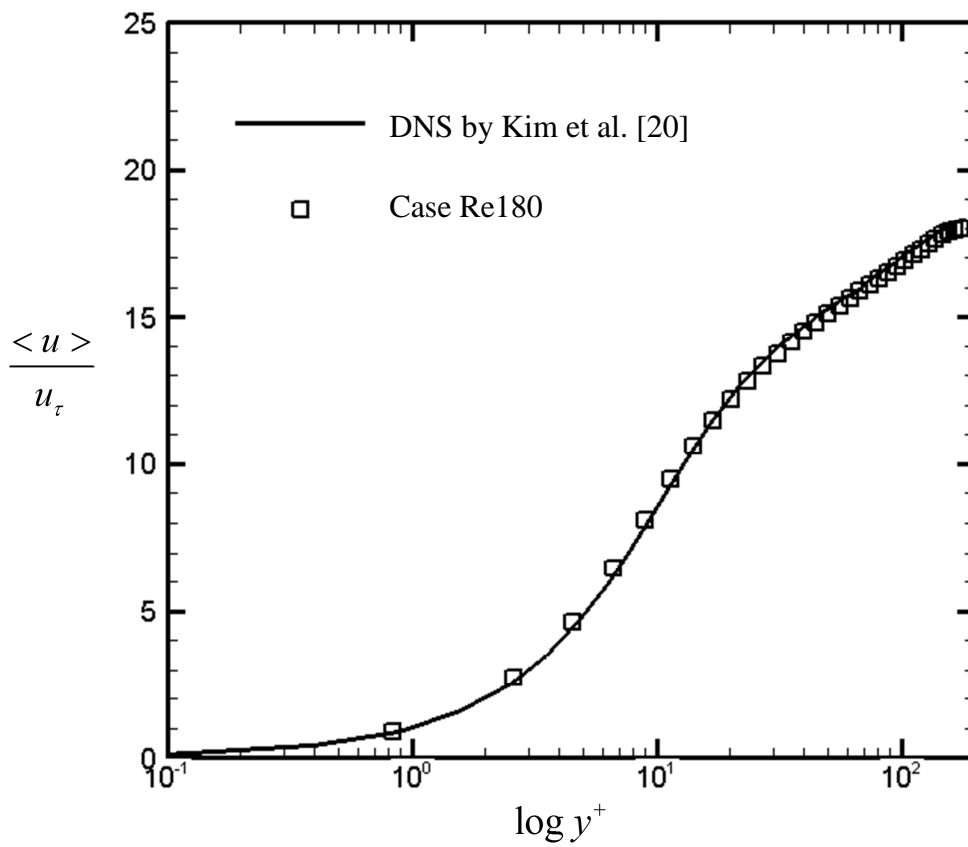


圖 31. ILES 配合 dissipative model 與[20]之平均速度比較圖

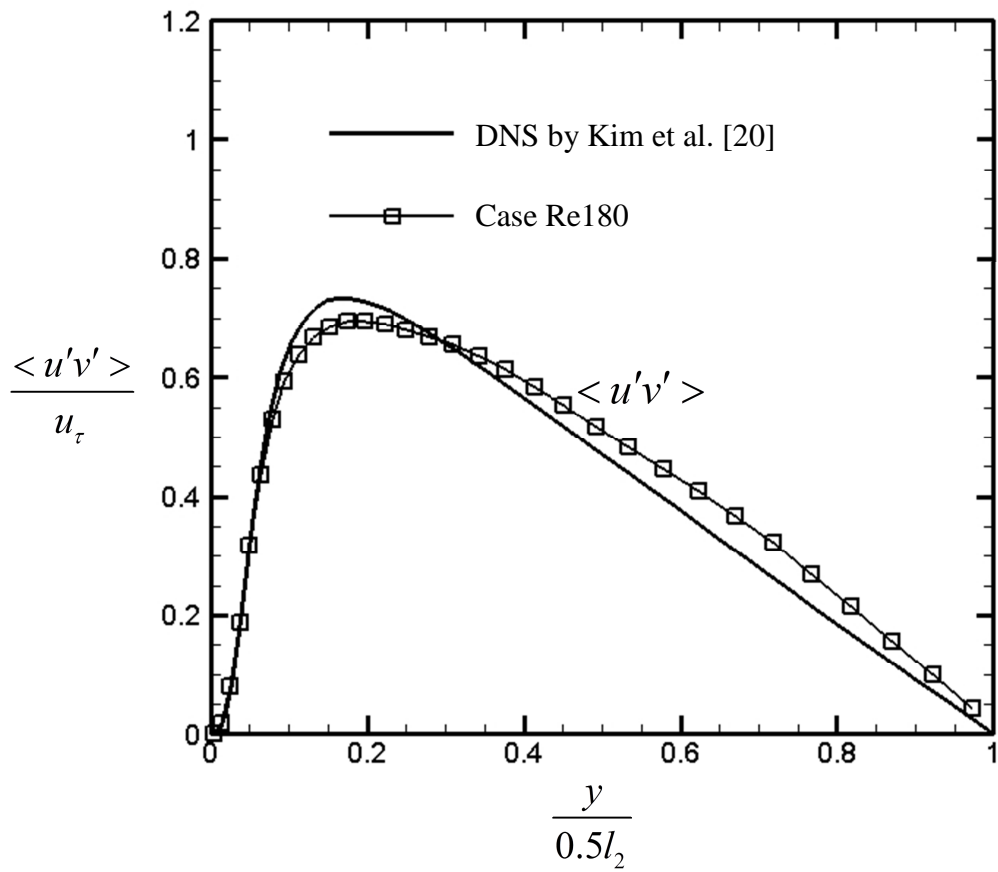


圖 32. ILES 配合 dissipative model 與[20]之 Reynolds stress 比較圖

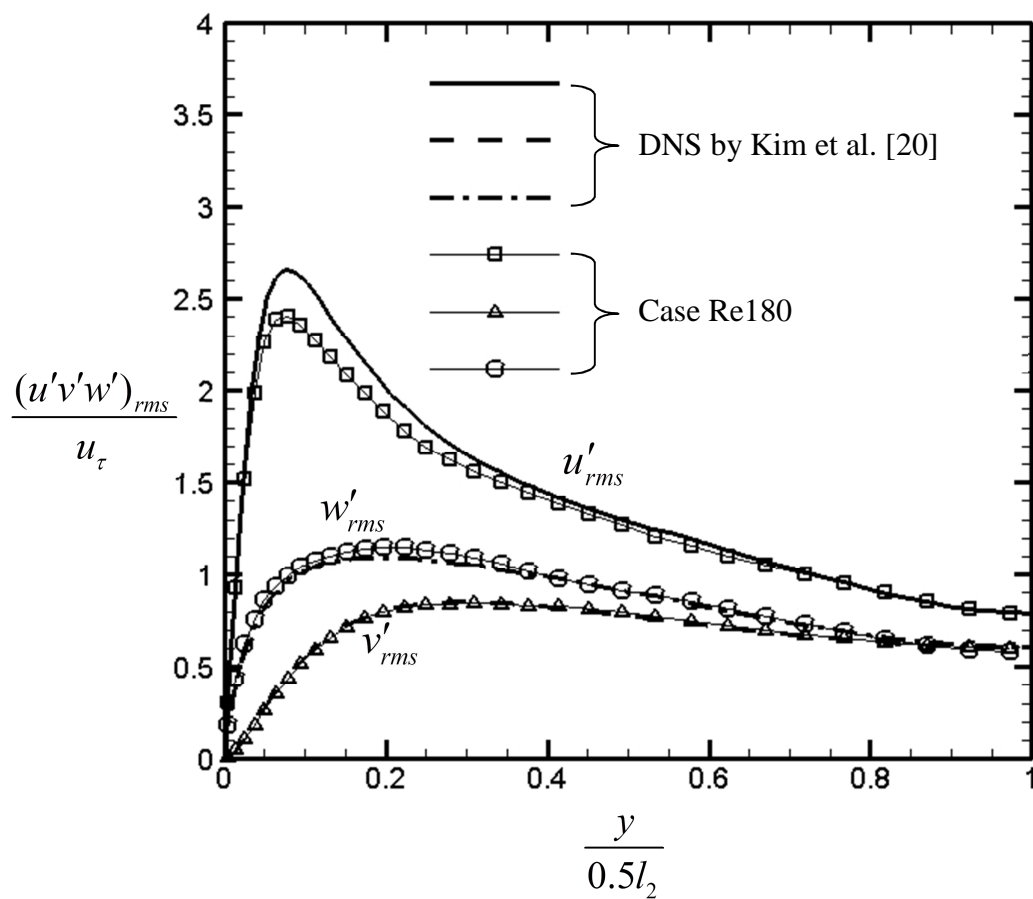


圖 33. ILES 配合 dissipative model 與[20]之紊流強度比較圖

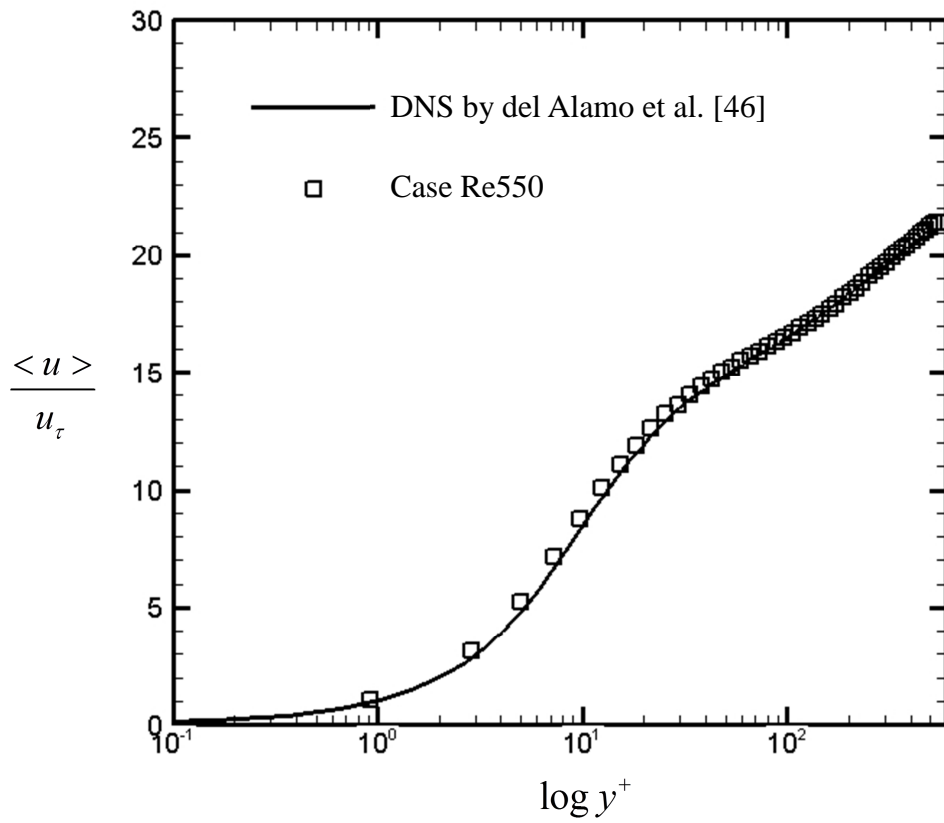


圖 34. ILES 配合 dissipative model 與[46]之平均速度比較圖

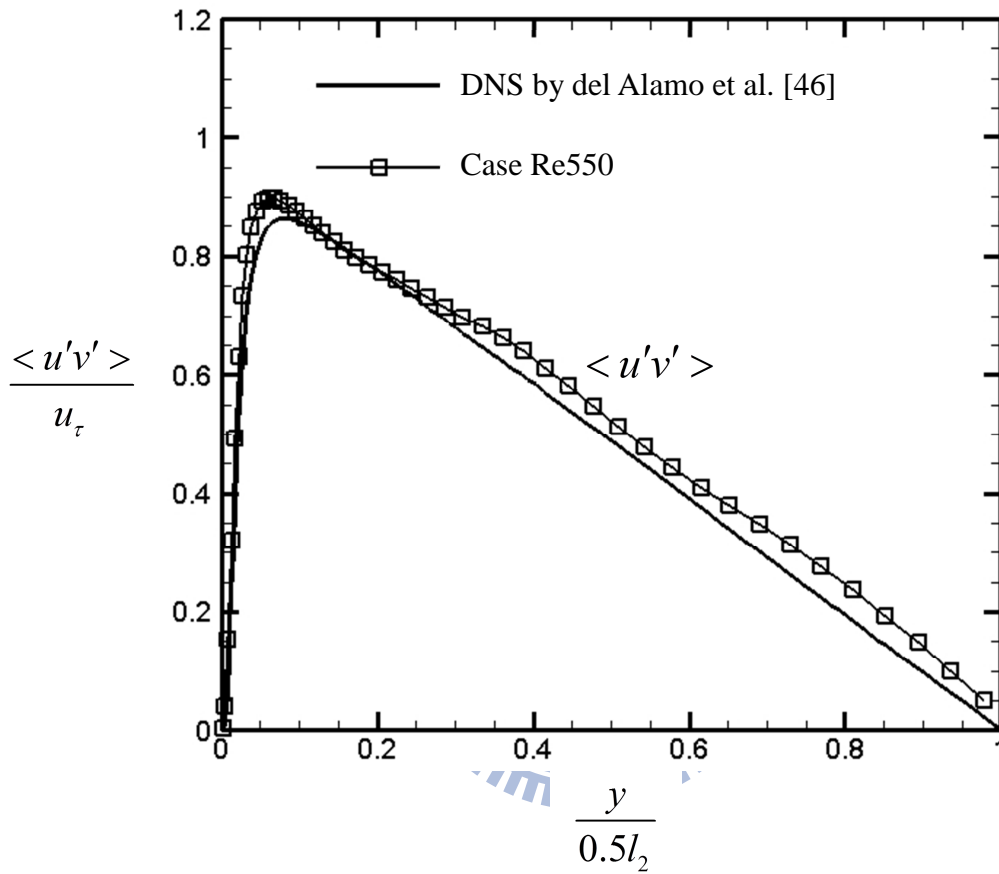


圖 35. ILES 配合 dissipative model 與[46]之 Reynolds stress 比較圖

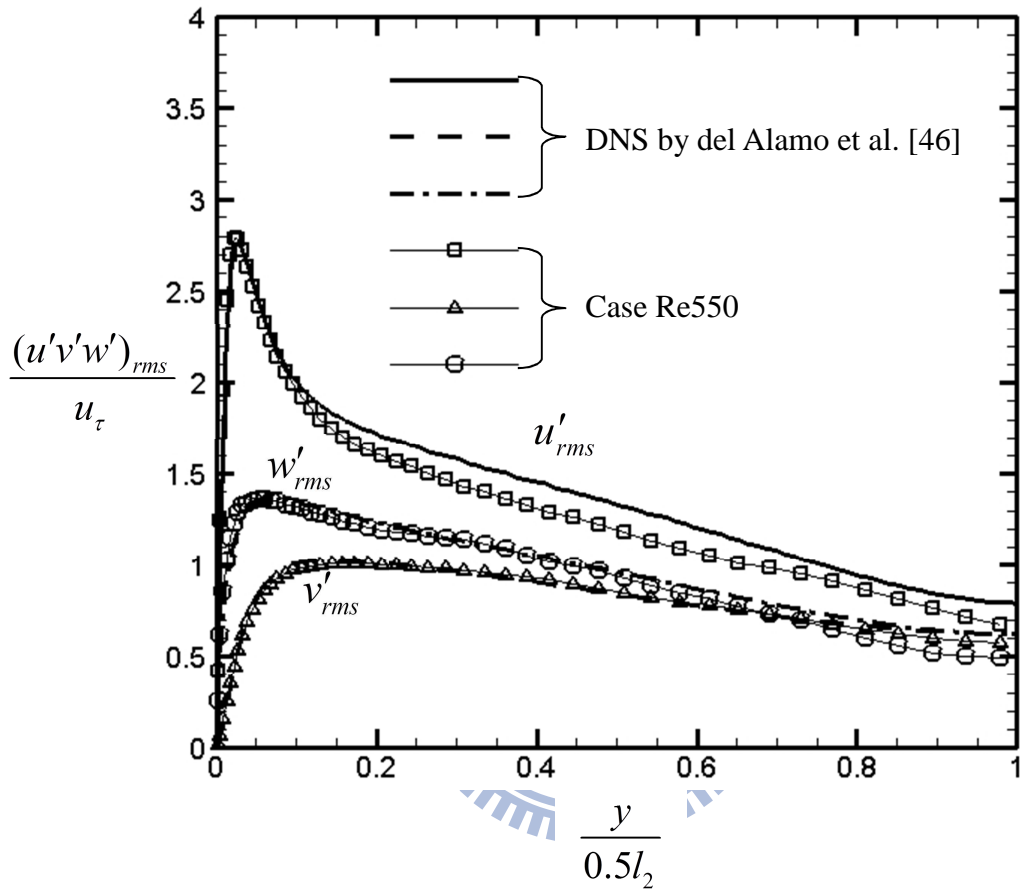


圖 36. ILES 配合 dissipative model 與[46]之紊流強度比較圖

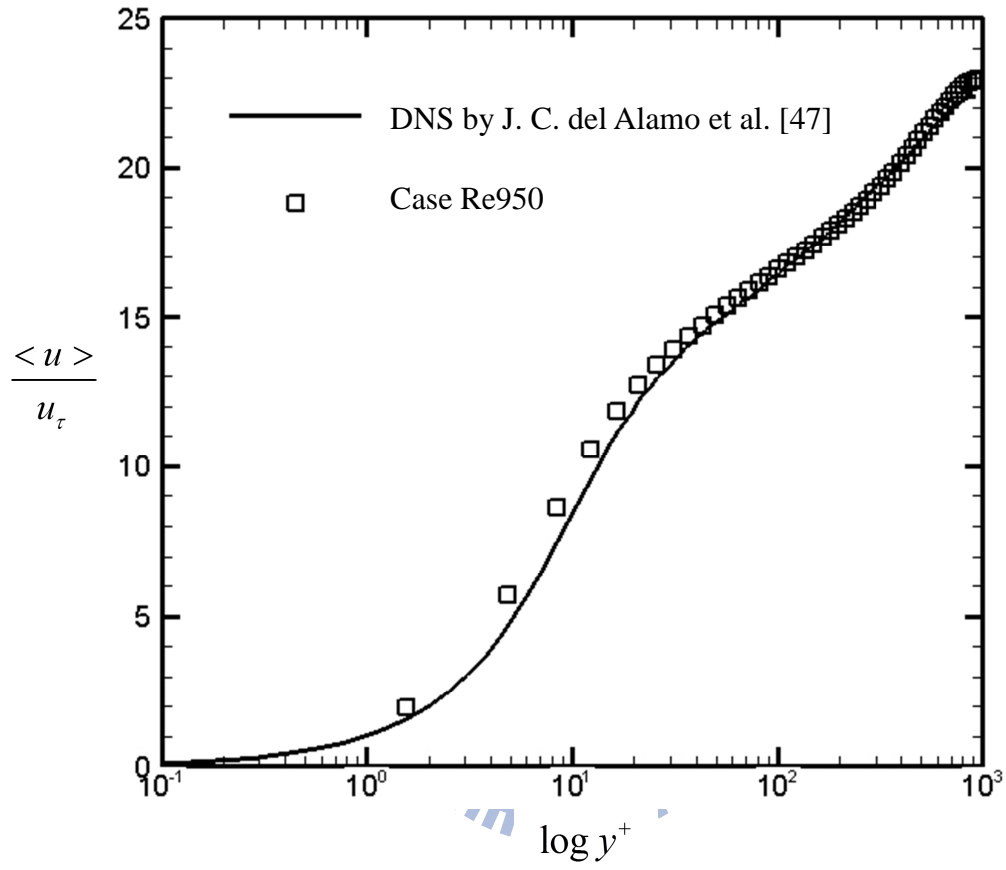


圖 37. ILES 配合 dissipative model 與[47]之平均速度比較圖

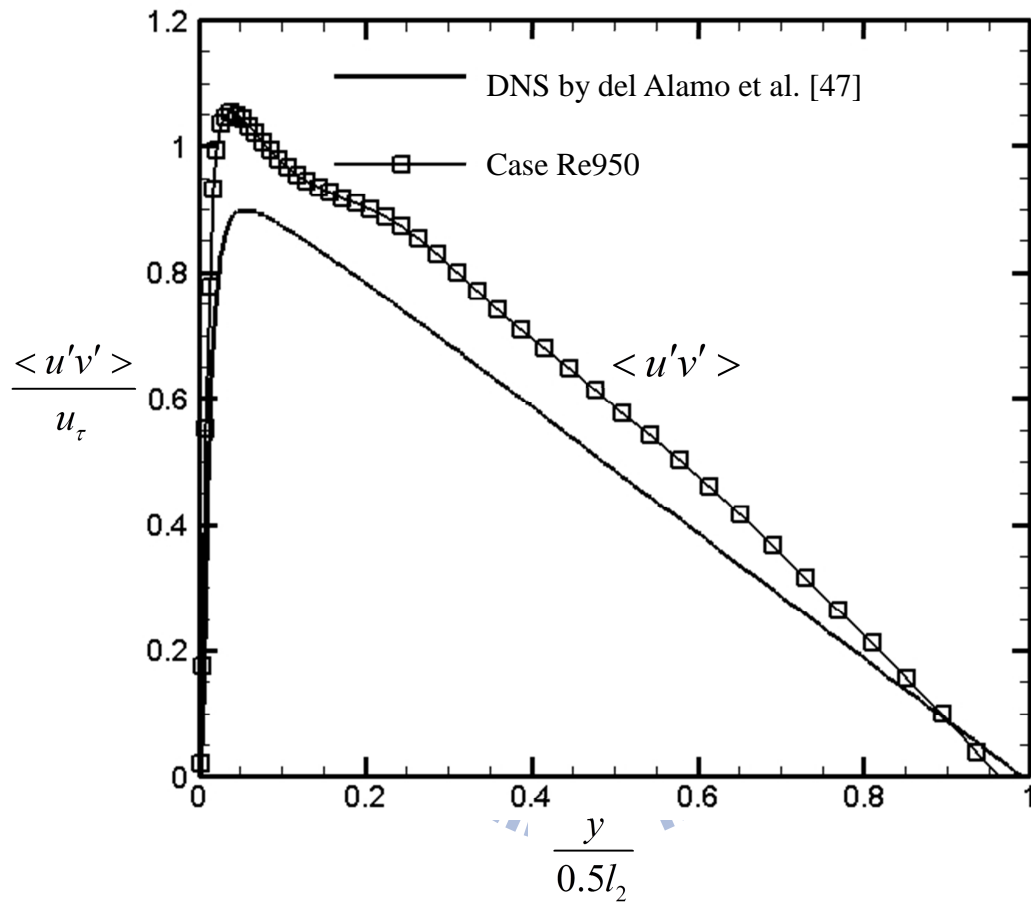


圖 38. ILES 配合 dissipative model 與[47]之 Reynolds stress 比較圖

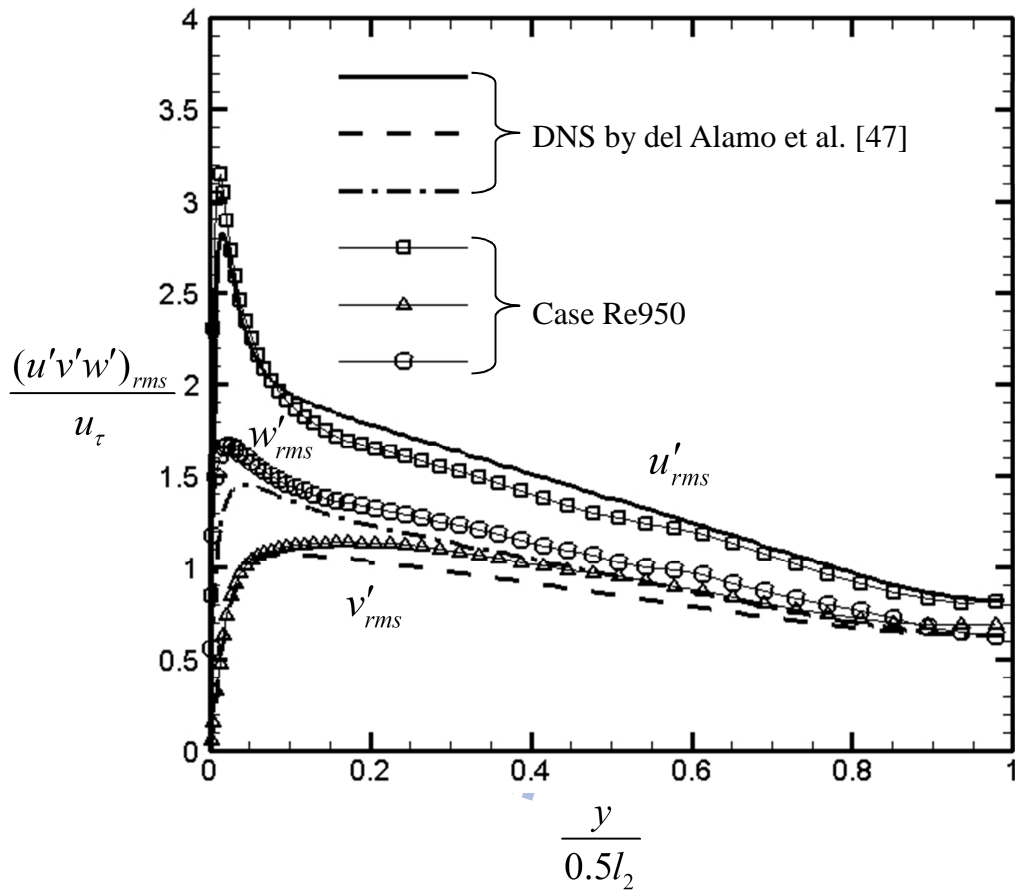


圖 39. ILES 配合 dissipative model 與[47]之紊流強度比較圖

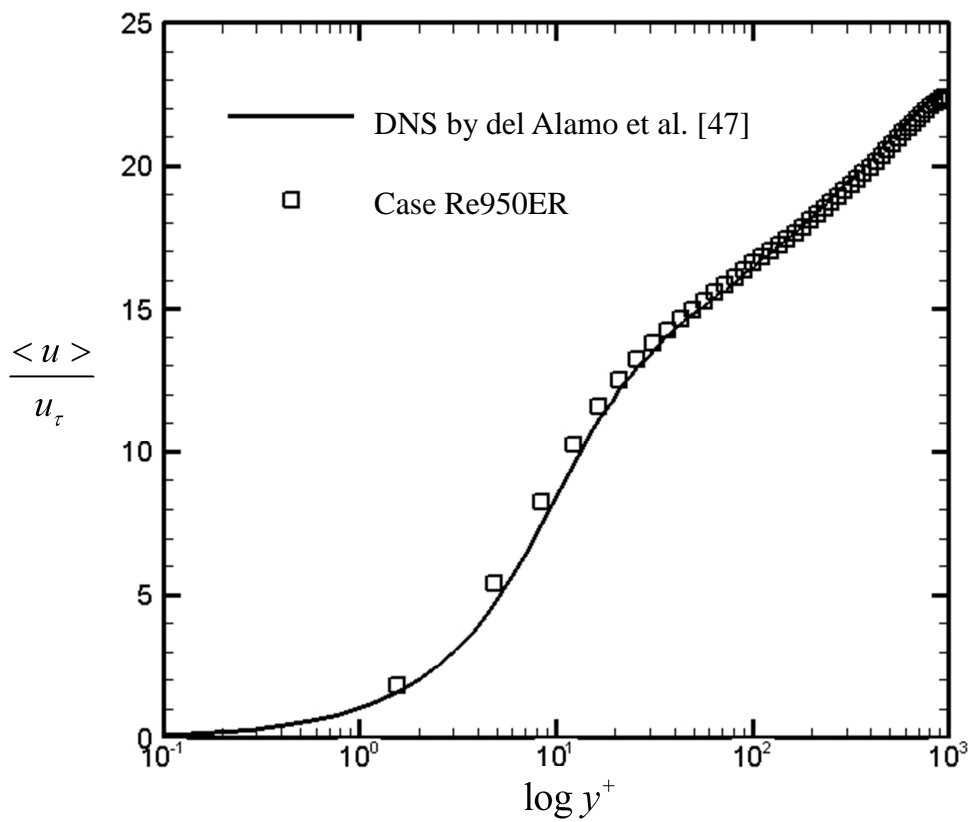


圖 40. ILES 配合 dissipative model 與[47]之平均速度比較圖

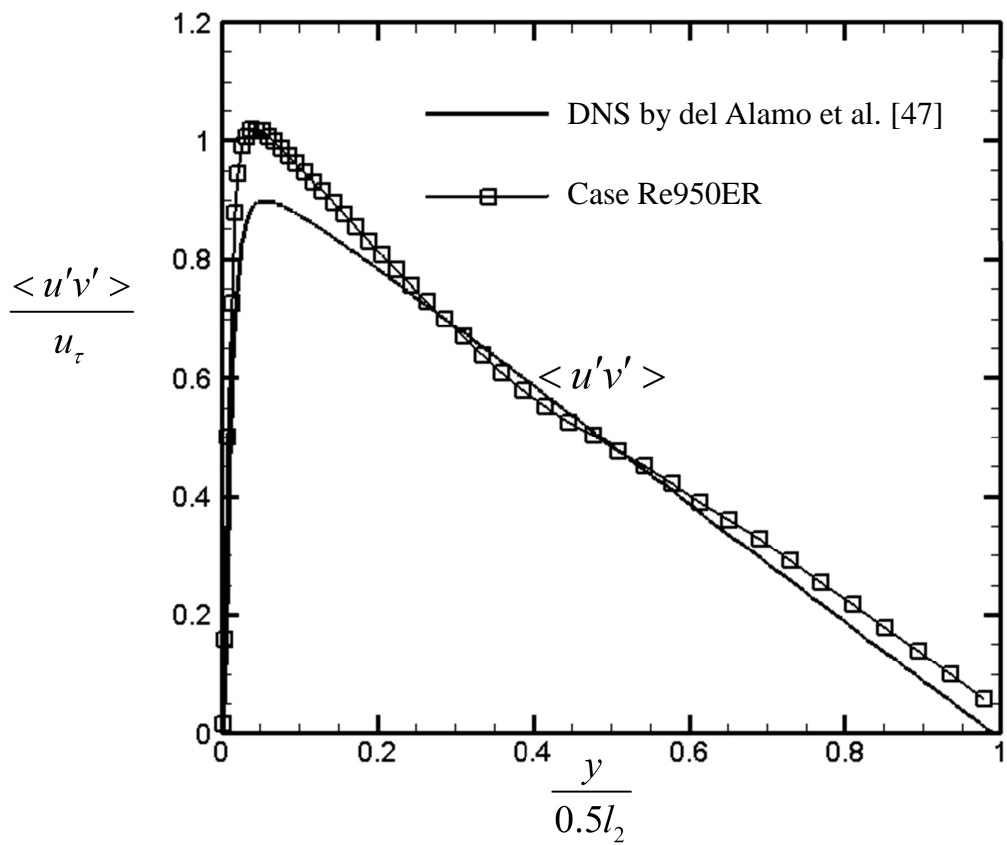


圖 41. ILES 配合 dissipative model 與[47]之 Reynolds stress 比較圖

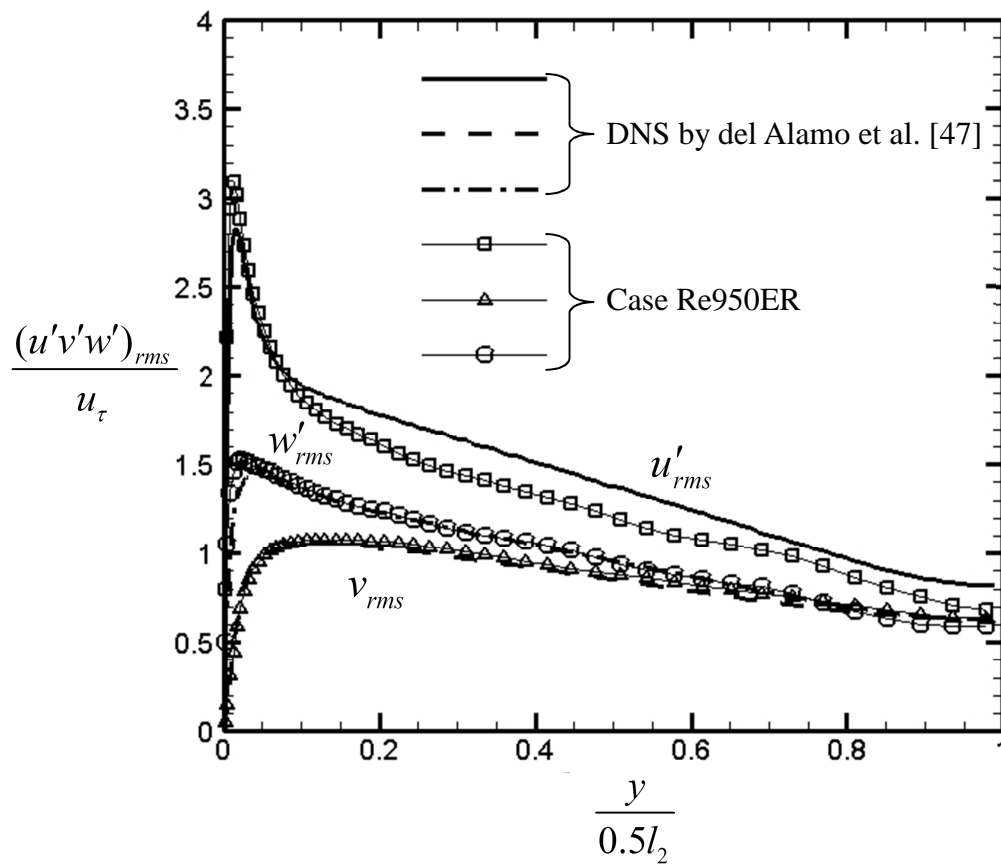


圖 42. ILES 配合 dissipative model 與[47]之紊流強度比較圖

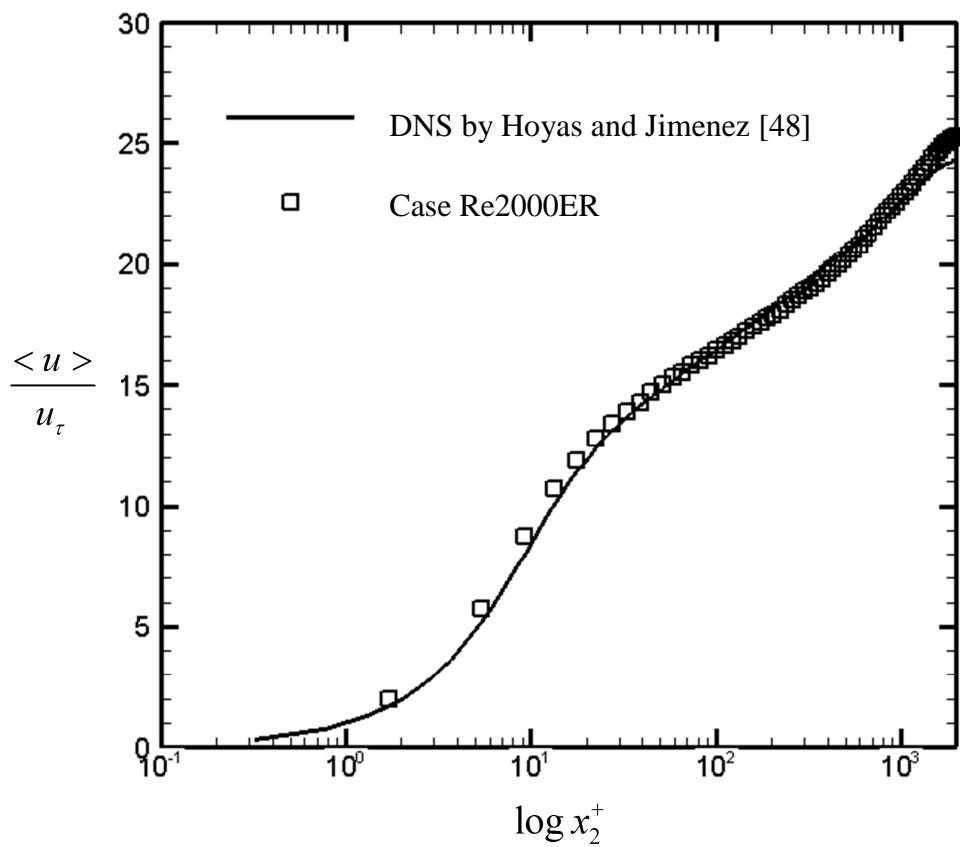


圖 43. ILES 配合 dissipative model 與[48]之平均速度比較圖

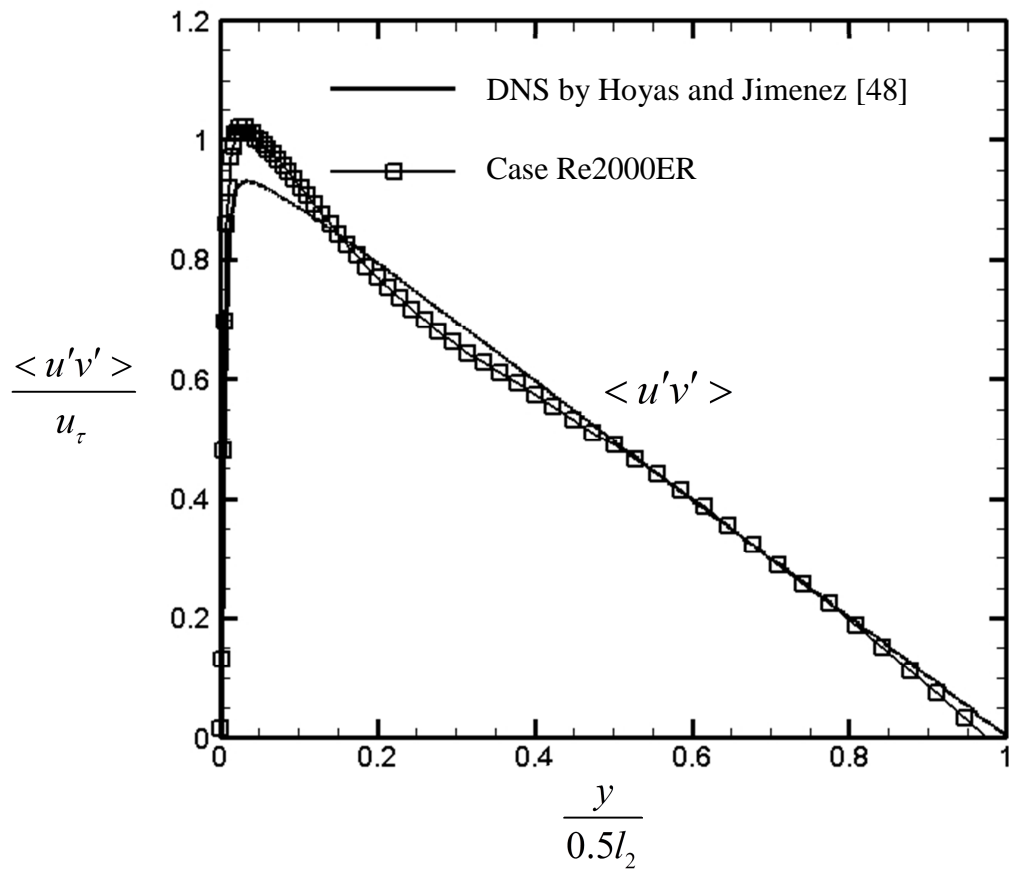


圖 44. ILES 配合 dissipative model 與[48]之 Reynolds stress 比較圖

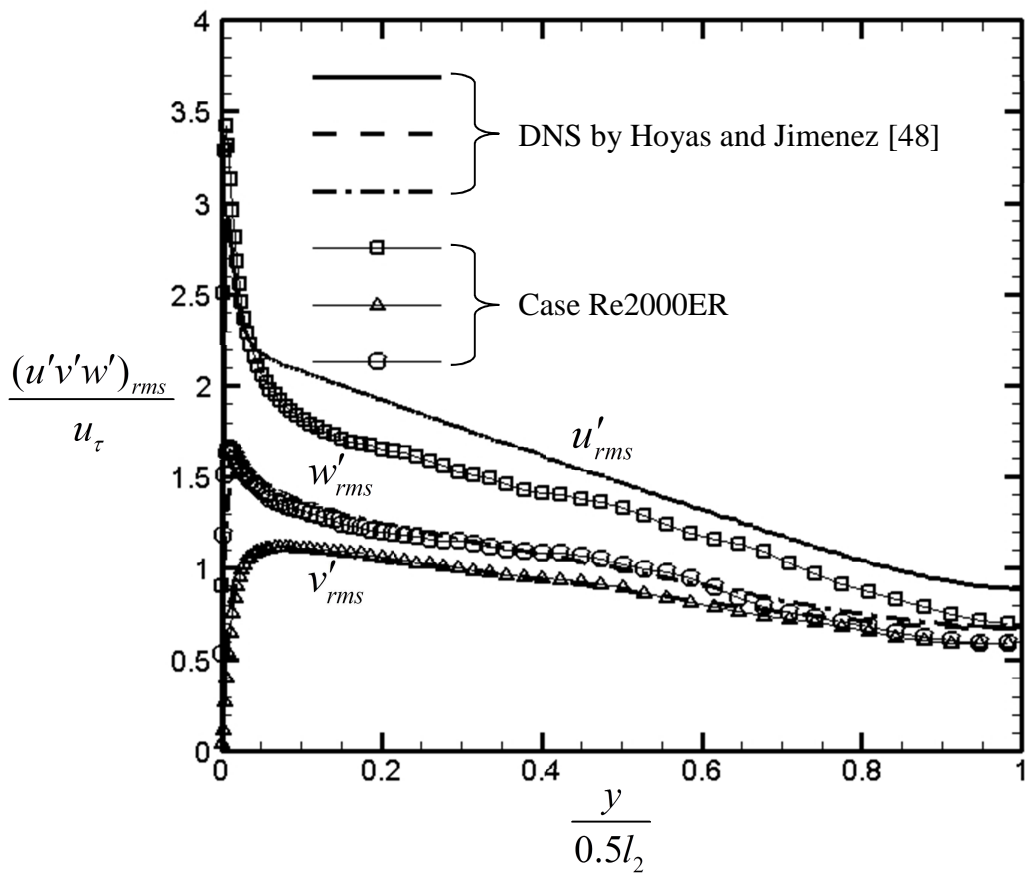


圖 45. ILES 配合 dissipative model 與[48]之紊流強度比較圖

7.5 模擬高雷諾數、高溫差之無限平板紊流：

由於高雷諾數紊流伴隨高溫差的情況發生於許多的工業應用上。因此於本節中，將利用第五章與 7.4 節所開發的隱式紊流模式模擬高溫差之平板紊流，下壁面溫度為 $500K$ ，上壁面為 $298.06K$ ，溫差約為 $200K$ 左右。

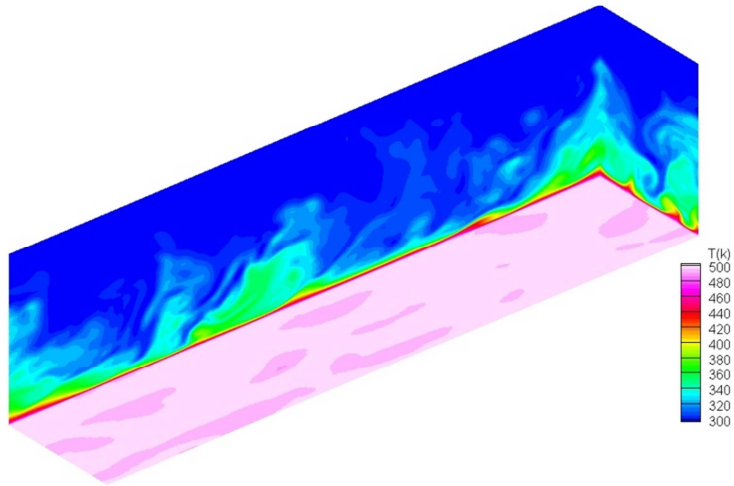
為了探討高溫紊流的現象，將模擬雷諾數根據摩擦速度 u_τ 與管道一半高度 δ 約為 180、500 與 940 左右。而以平均流速為特徵速度的雷諾數分別為 2700、10000 與 20000 左右。

圖 46 為溫度強度圖於 $Re_\tau = 180$ 、500 與 940 的情況，圖 46(a)中，強度圖於 xz 面約離壁面無因次高度 1.5 左右，由於雷諾數較低的關係，因此溫度混合現象於此靠近壁面處的 temperature layer 較不明顯。在 xy 與 yz 面上可觀察到，溫度從高溫壁面逐漸往上降溫，除此之外，也可發現沿著 y 方向，不同溫度層的分佈現象相當明顯。

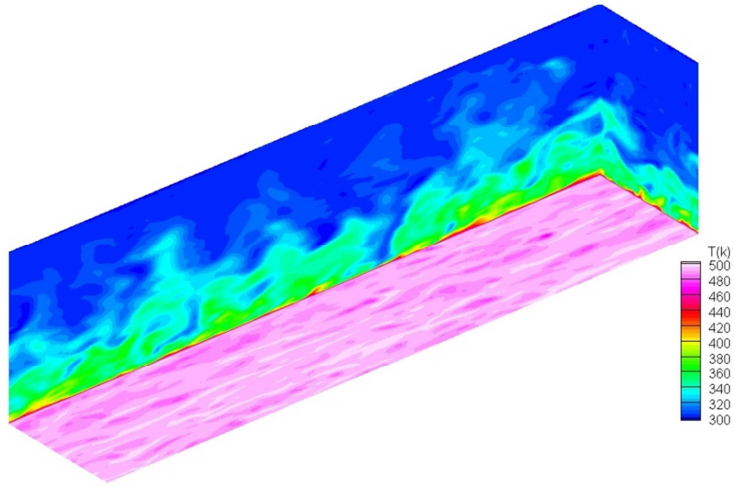
於圖 46(b)中， $Re_\tau = 500$ ，因此紊流特徵較圖 26(a)更加明顯。於 xz 面的溫度分佈與紊流中 streakline 的現象相當接近，有著層化的現象。在其他兩個面， xy 與 yz 面，伴隨著 ejection 與 swept 的紊流特徵現象，可觀察到高溫壁面有許多冷流體的衝擊，因此可推測，熱傳效能將會提高許多。

圖 46(c)的雷諾數為 940，比起 46(a)與 46(b)的圖形，紊流的特徵現象更加清楚。溫度分佈於 xz 面上，層化與溫差更加明顯，由此圖可知，熱傳現象即使在靠近壁面，同樣相當的劇烈。於 xy 與 yz 面，由於熱傳的交換相當的劇烈，因此溫度強度圖比起圖 46(a)，相當的混亂，熱傳的效果將更加的好。

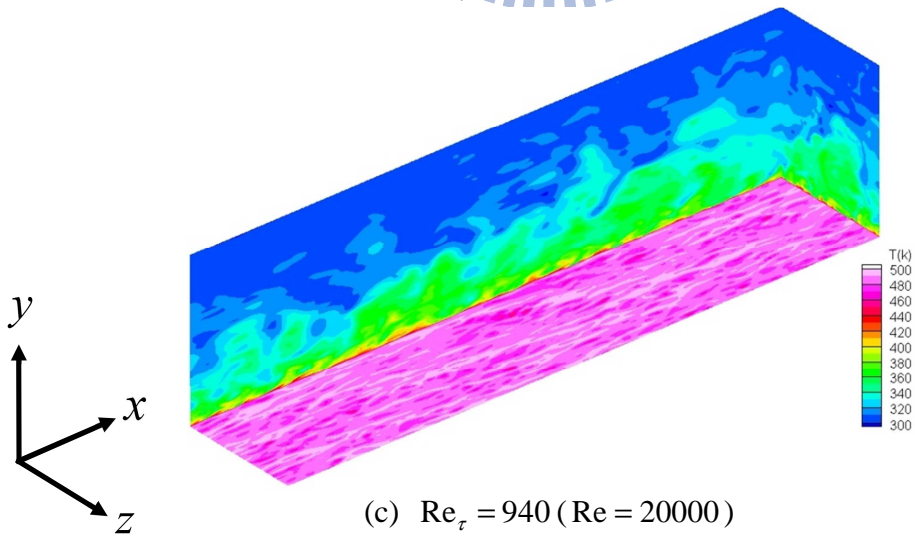
圖 47 Isothermal surfaces 於 $Re_\tau = 180$ 、500 與 940 的圖形，於雷諾數較低 $Re_\tau = 180$ 的情況下，溫度的分佈塊狀較為均勻且集中。隨著雷諾數的增加，等溫分佈的塊狀逐漸伴隨著大渦流裂解的小渦流的紊流效應所撕裂，因此裂解成越來越細的塊狀，伴隨著此效應，熱傳逐漸往中央推進且溫度較高的團塊接觸更多的低溫團塊，因此熱傳效應更加提昇。



(a) $Re_\tau = 180$ ($Re = 2700$)

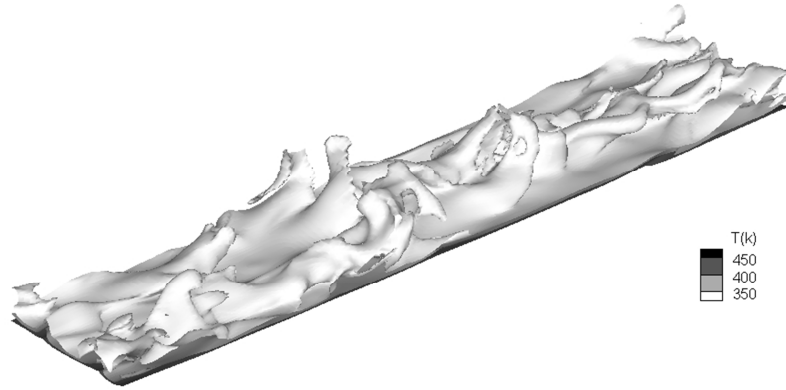


(b) $Re_\tau = 500$ ($Re = 10000$)

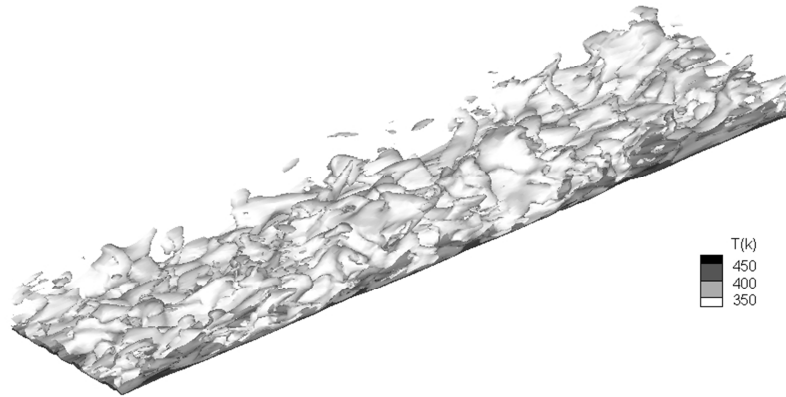


(c) $Re_\tau = 940$ ($Re = 20000$)

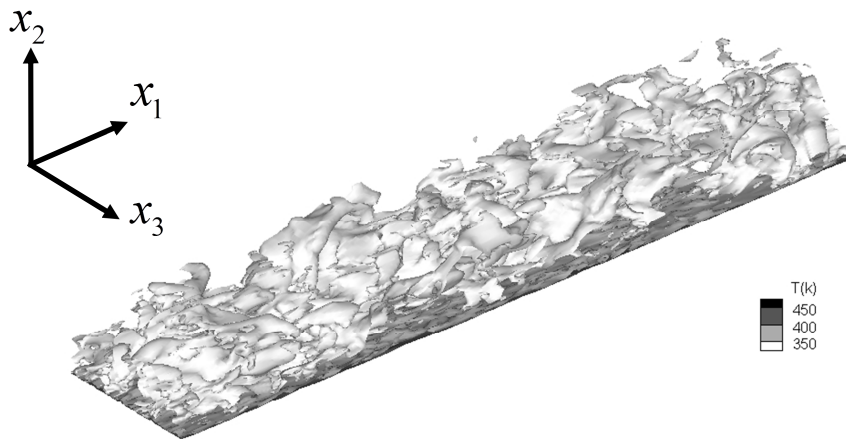
圖 46. 溫度於 xy 、 xz 與 yz 面的強度圖



(a) $Re_\tau = 180$ ($Re = 2700$)



(b) $Re_\tau = 500$ ($Re = 10000$)



(c) $Re_\tau = 940$ ($Re = 20000$)

圖 47. Isothermal surfaces 於 $Re_\tau = 180$ 、500 與 940

圖 48 為瞬時紐塞數與平均紐塞數分佈圖，瞬時紐塞數為沿著 xz 面中央的分佈，平均紐塞數則為對著 xz 面的平均值，其計算公式如下所示：

$$Nu = \frac{l_2}{k_0(T_h - T_c)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{wall} \quad (7-18)$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \iint \frac{l_2}{k_0(T_h - T_c)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{wall} dx dz \quad (7-19)$$

此處 A 為加熱壁面面積

由圖 48 可以明顯觀察到，隨著雷諾數的增加，瞬時紐塞數與平均紐塞數的差異越來越大。從實際應用觀點而言，此種現象也同時代表著，在考慮熱對產品的影響時，於高雷諾數時，thermal shock 造成的影響將會比低雷諾數時高上所許多。

圖 49 為不同 Rayleigh 數下，平均紐塞數與雷諾數的關係圖形。平均紐塞數與雷諾數的相關方程式如下所示：

$$\overline{Nu} = 0.025 \times Re^{0.8} \quad (7-20)$$

其趨勢與 Dittus-Boelter correlation[49]於平滑管流與 Gnielinski 方程式[50]於紊流管流中相仿。利用方程式(7-20)，將可找到高溫差高雷諾數的情況下，其平均紐塞數與雷諾數的對應關係，因此對於實際工業應用上將有更大的幫助。

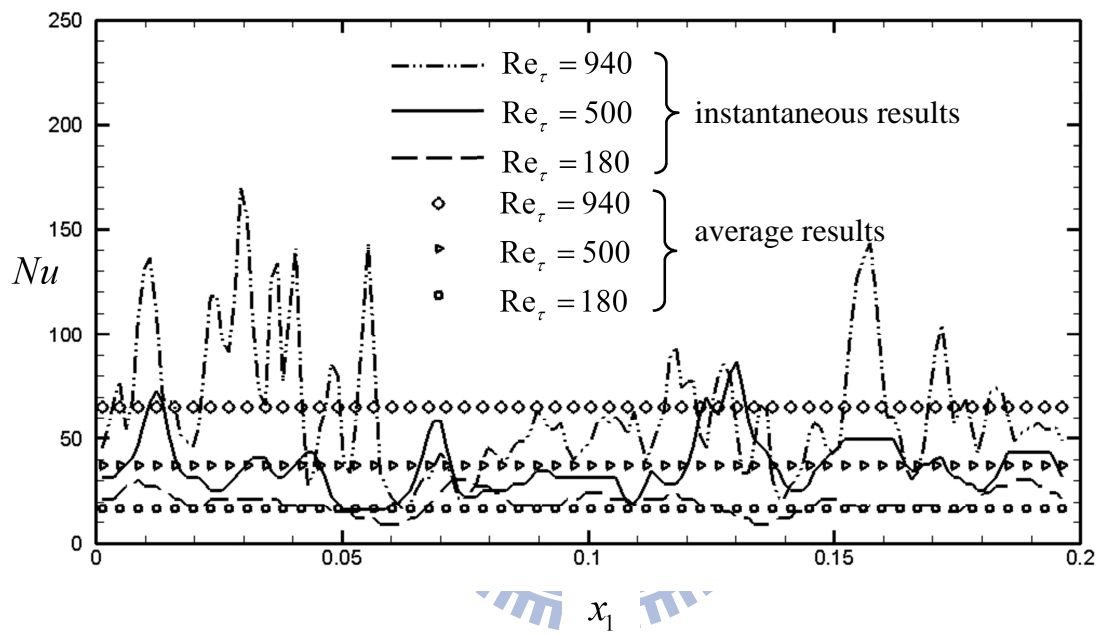


圖 48. 瞬時紐塞數(沿著 xz 面中央)與平均紐塞數(xz 面)比較圖

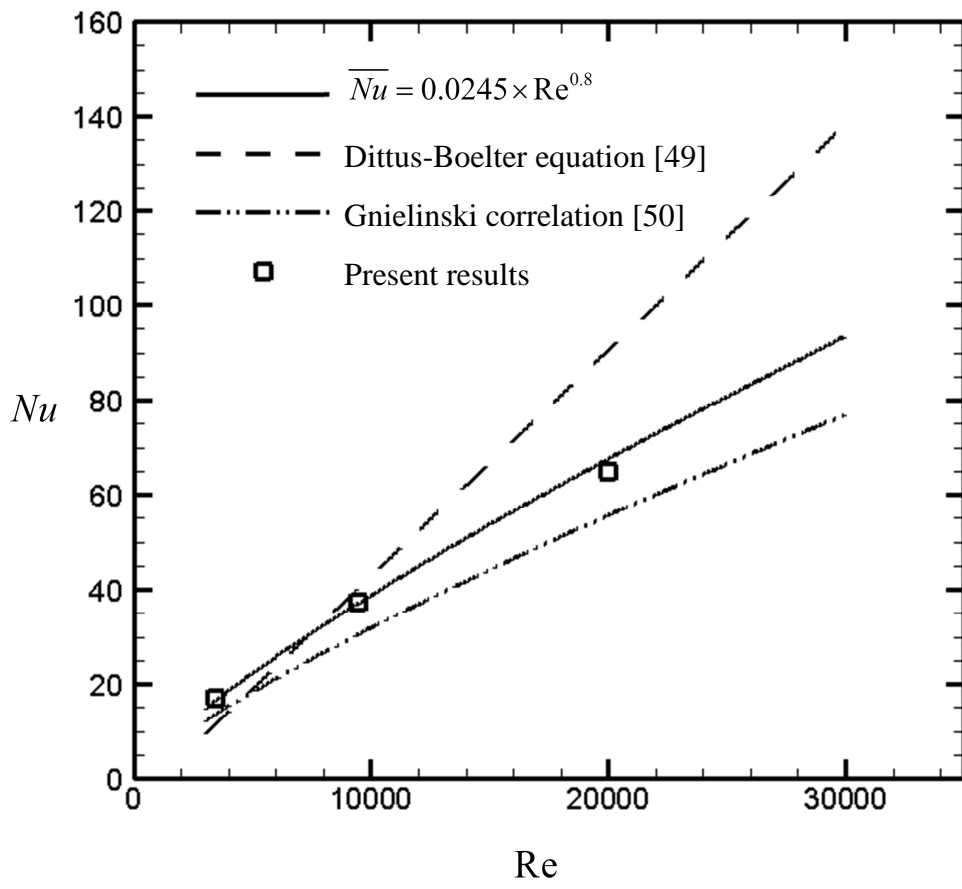


圖 49. 紐塞數與雷諾數關係分佈圖

7.6 噴流流場噪音模擬：

在完成全域流場的程式後，將利用此計算方法模擬噴流流場以獲得聲源資訊，接著把聲源資訊帶入 Lighthill 方程式，求得遠場的聲壓分佈。

圖 50 為噴流流場速度強度圖，白線後方為吸收性邊界。由此圖可以觀察到，一旦速度場接觸到吸收性邊界，會隨即被 artificial convection velocity 加速到超過 preconditioning 下的聲速而離開流場，由於離開流場時是大於聲速，因此不會影響到計算範圍的結果。除此之外，artificial damping function 會盡量使流場到達邊界時接近 target state，即接近大氣環境條件。由上述結果可知，吸收性邊界可讓流體在接觸邊界時，順利的離開計算範圍而不會影響到其精度。

圖 51 為渦流強度圖，由此圖可以觀察到噴流流場的發展過程，在進口處附近，流場呈現規則的狀態。然而隨著越來越遠離進口處，逐漸受到流體間剪應力的作用，渦流逐漸產生。到了中段部份，大渦流逐漸裂解成小渦流，接著離開流場。

圖 52 為遠場聲壓強度與近場速度強度圖的合併，下圖為流場速度強度圖，Navier-Stokes 為其統御方程式。上圖為聲壓強度圖，Lighthill 方程式為其統御方程式。在遠場部份，流場變動量的傳遞接近線性，因此不需求解完整 N-S 方程式，而是求解 Lighthill 方程式，大幅提昇計算效率。從聲壓強度圖中可觀查到，聲壓在遠場部份傳遞的過程，呈現圓形的波形，逐漸向外傳遞至遠處。

圖 53 為位置點為 $R = 17D, \theta = 45^\circ$ 的 spectra 圖，其中約在頻率 12000 赫茲部份，有最大的分貝。由流速約僅為 10 公尺左右，因此最大分貝約為 55dB，相對上來說較低。

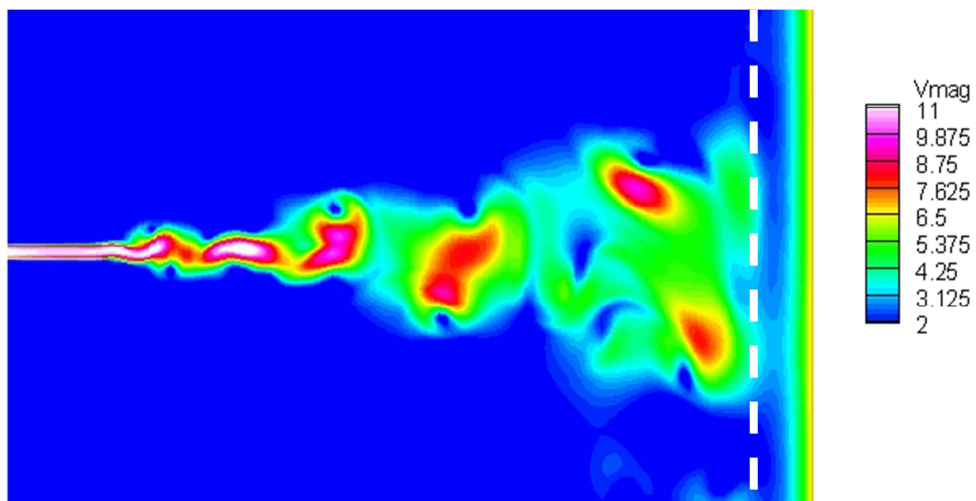


圖 50. 噴流流場速度強度圖

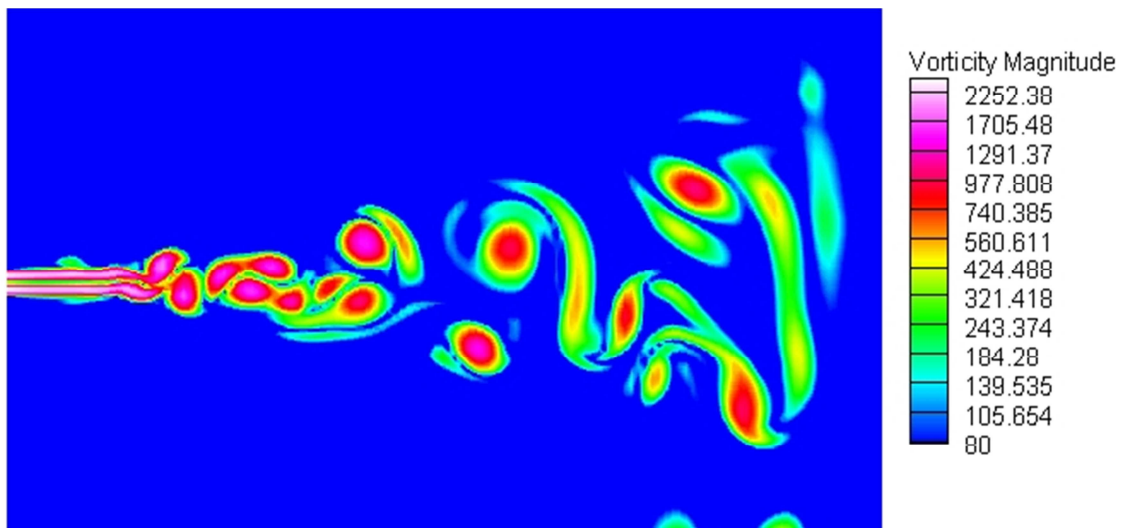


圖 51. 噴流流場渦流強度圖

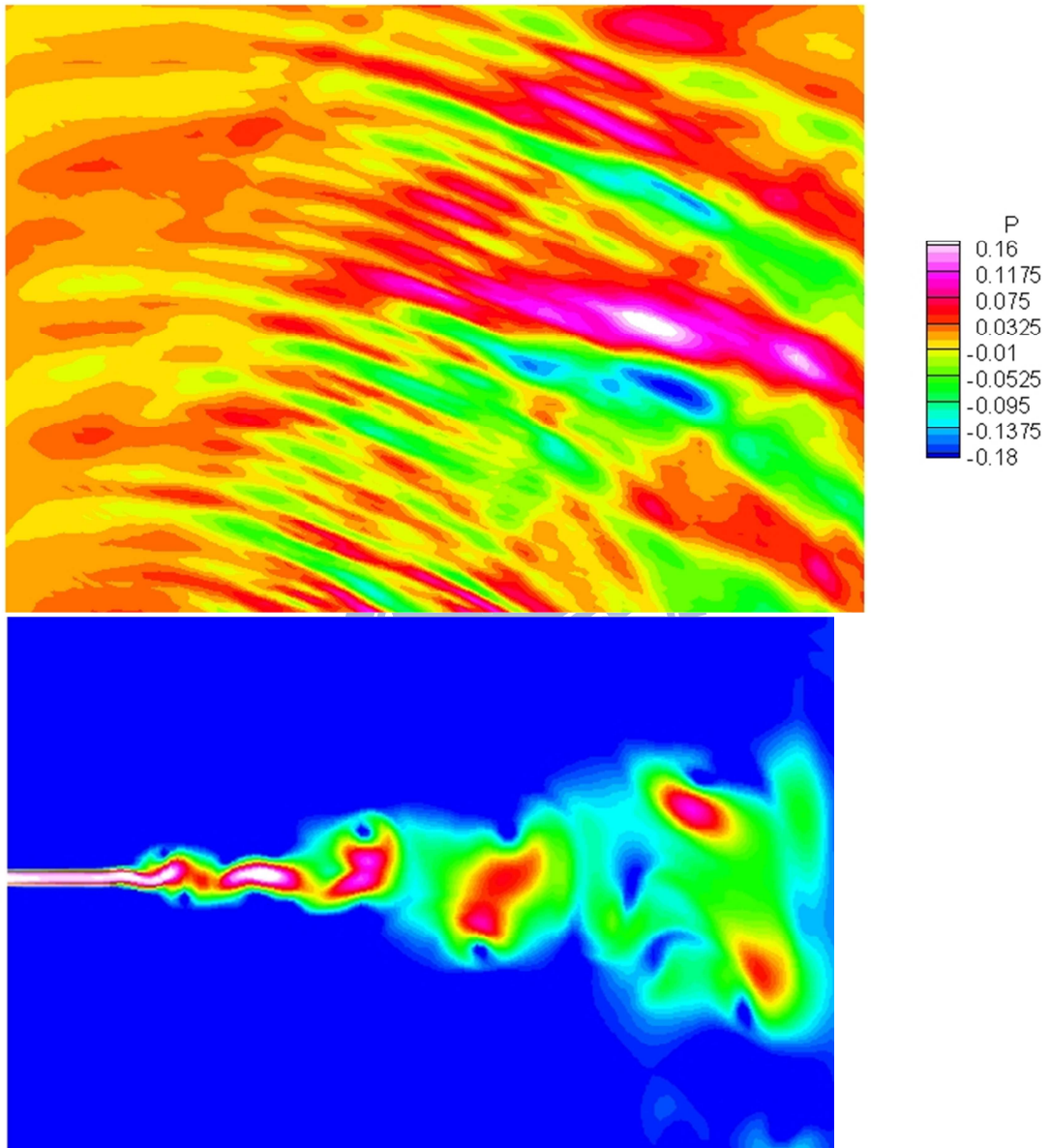


圖 52. 遠場聲壓強度與近場速度強度圖

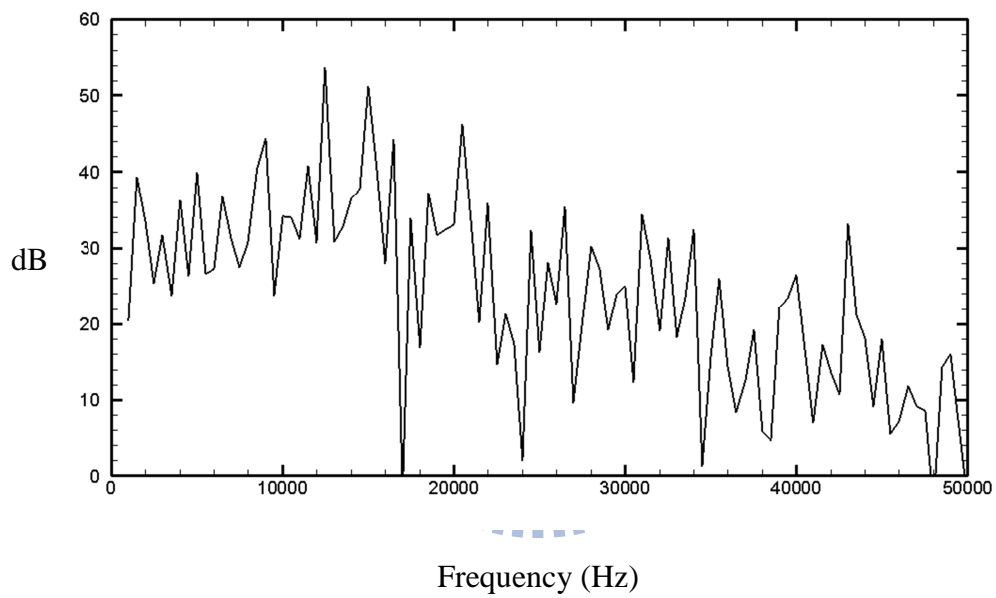


圖 53. 壓力 spectra(dB)

7.7 超音速流場：

除了次音速流場外，本研究也將模擬超音速流經過平板時所發生的物理效應。計算範圍的物理模型如圖 54 所示。

由於為超音速流場，因此其邊界條件與次音速流場並不相同，其給予的條件整理如下：

入口條件：速度 = 4 馬赫數($u = 4Ma., v = 0, w = 0$)

溫度 = 298.06K

壓力 = 1 大氣壓(101325Pa)

出口條件：壓力、溫度與速度均外插得到

平板底部：速度不可滑移條件

壓力為 Neumann 條件

溫度為絕熱條件

平板頂部：速度 = 4 馬赫數($u = 4Ma., v = 0, w = 0$)

溫度 = 298.06K

壓力 = 1 大氣壓(101325Pa)

其詳細計算範圍如表 5 所示

由上述物理量可以計算出其雷諾數約為 900，為層流。除此之外，在高馬赫數的情況下，流體內部溫度變化較大，需考慮溫度對於黏滯性的影響。為了與文獻[51]作比較，此部份本研究採用[51]的結果，黏滯係數修正如下：

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \quad \text{其中 } \mu_0 = 1.7894 \times 10^{-5}, T_0 = 288.16k$$

其結果速度強度突如圖 55 所示。由此圖可以看到，流體的邊界層隨著平板長度的增加逐漸增厚。由此可以得知此部分的結果符合物理現象。

接著是平板底部的壓力分佈圖，如圖 56 所示。平板的前緣(leading edge)產生震盪的現象，其發生的原因是因為在此不連續(noncontinuum)區域內對其做出連續(continuum)的假設所造成，因此，該震盪現象究竟是實際物理現象或是計算上的影響還不清楚。雖然此區域內的物理現象極為複雜，但根據目前的研究卻顯示，此種震盪對於平板前緣後方的物理現象並不重要。

圖 57 為平板前緣(約 $X = 1.2 \times 10^{-6}$)垂直方向的壓力分佈圖。在此區域內由於

極低的密度造成即薄的邊界層。因此當後方流體經過此類似鈍形體(blunter body)時，會馬上在平板前緣產生不連續的震波(shock wave)效應，使的壓力劇烈升高。

最後，將此結果與[51]的結果做比較，如圖 56 與圖 57 所示。圖中，黑色實線部份為此文獻之結果，紅色記號為本程式之結果。由此可以看出兩者非常接近，因此確定本程式即使在高馬赫數的情況下，可以得到正確的結果。

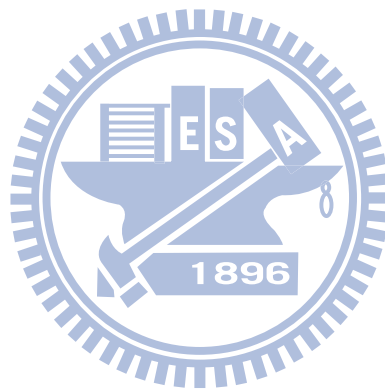
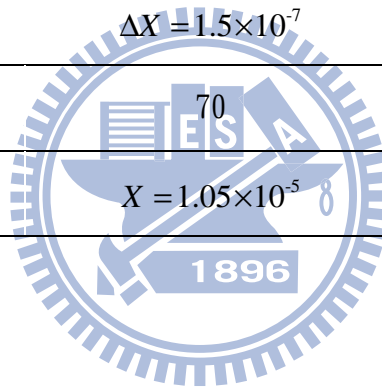




圖 54. 超音速流計算物理模式

表 6. 超音速流體計算參數

	X 方向	Y 方向
網格大小	$\Delta X = 1.5 \times 10^{-7}$	$\Delta Y = 1.1 \times 10^{-7}$
網格數	70	70
長度	$X = 1.05 \times 10^{-5}$	$Y = 0.77 \times 10^{-5}$



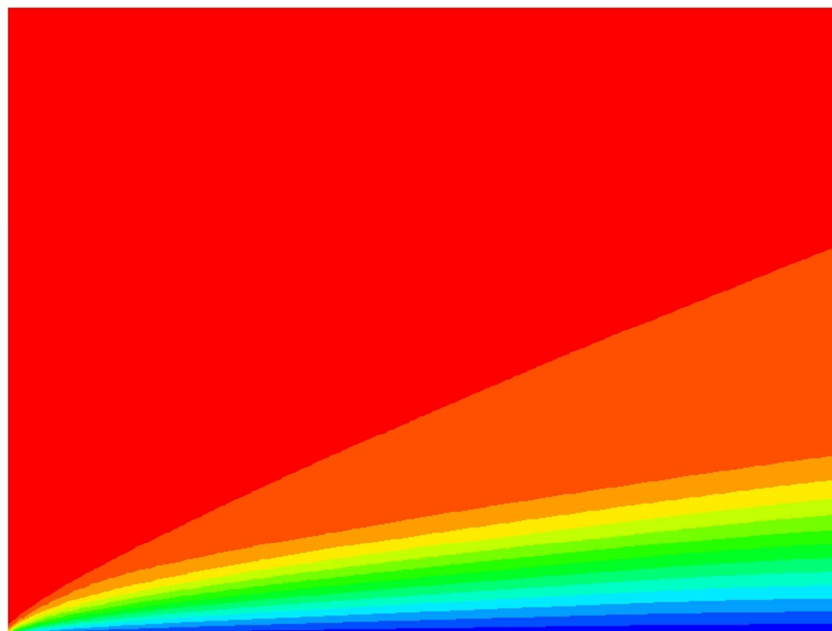
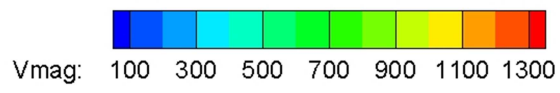


圖 55. 超音速流場速度強度圖

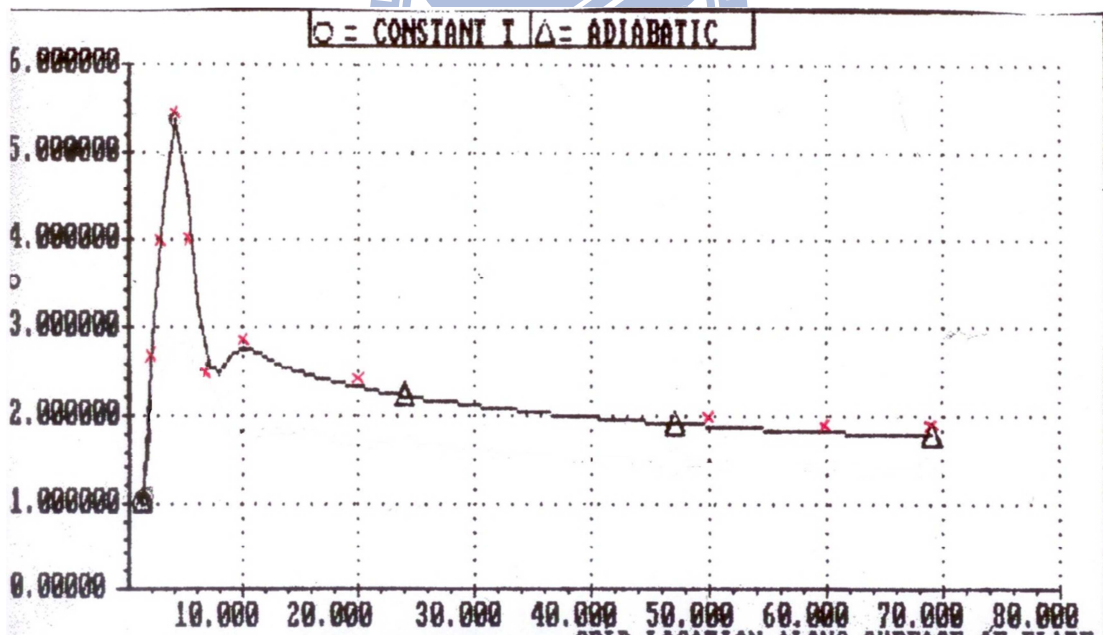
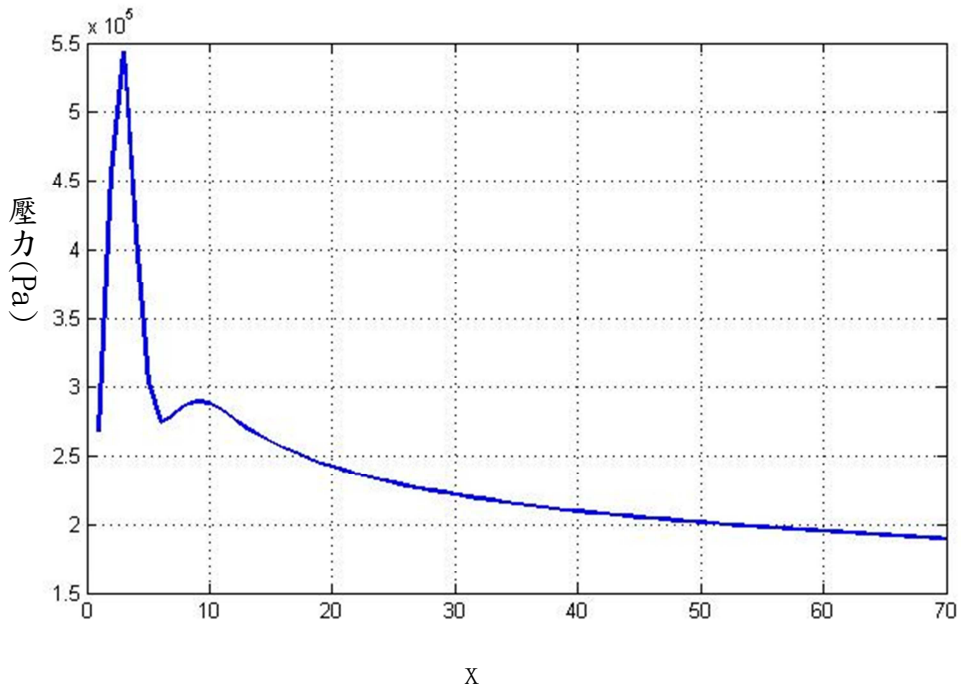


圖 56. 底板壓力分佈圖與[51]比較

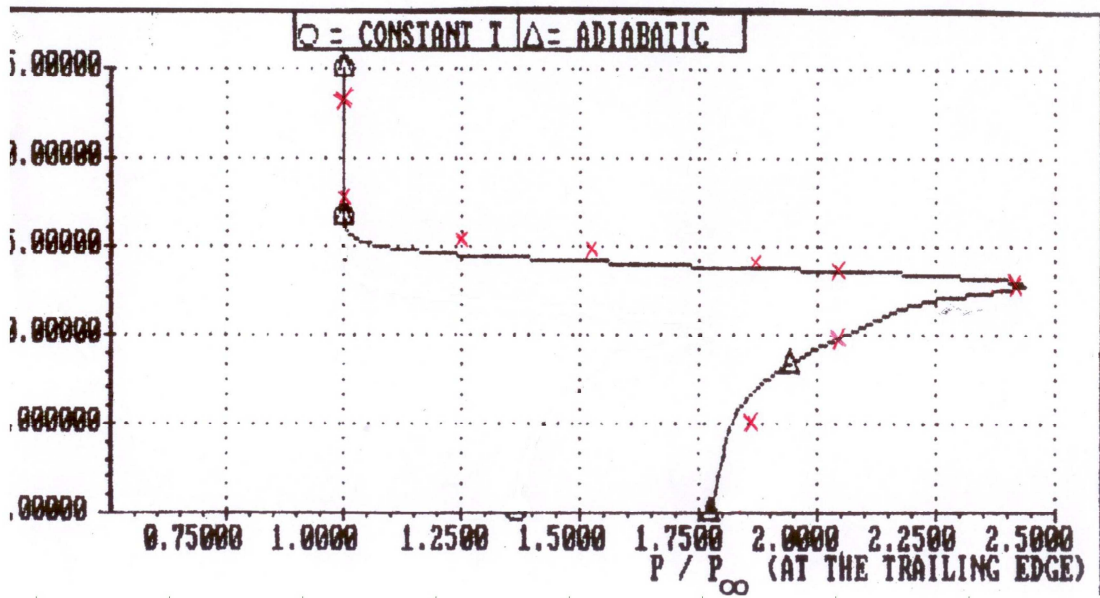
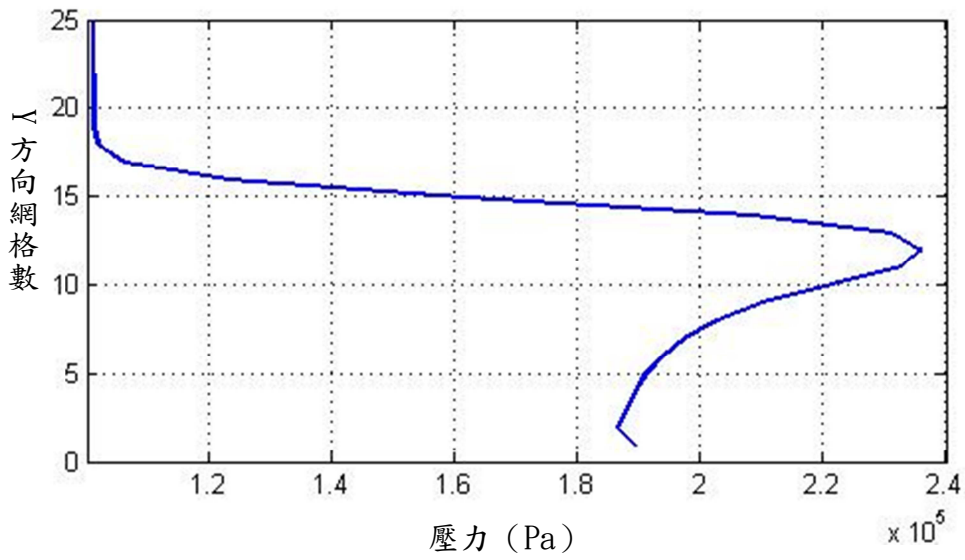


圖 57. 平板前緣壓力分佈圖與[51]比較

第九章 結論

為了計算氣動聲學的聲源，需先完成流場的計算，因此本研究成功整合流體計算方法，發展出成熟且適用性幾乎涵蓋所有流體問題的計算方法。主要的貢獻敘述如下：

1. 低速可壓縮流的計算方法開發：

過去的多利用流體速度將其區分為可壓縮與不可壓縮流，此種方法限制許多實際的應用，如高溫自然對流、引擎內部流場與聲場的計算…等。本研究利用垂直管道內的高溫自然對流驗證計算方法的適用性，觀察到於管道內自然對流初期，管內氣體因為靠近加熱部份膨脹而讓流體不論於進口或出口部份都呈現流出的情況。利用本研究開發的計算方法，此種現象首次可從模擬上表現出來。

2. 非反射性邊界的應用：

過去的非反射性邊界，多應用於高速可壓縮流。本研究推導出低速可壓縮流的公式並成功應用於高溫自然對流的水平管道模擬，利用此邊界條件，可大幅提昇計算效能，因為不需額外的計算空間作為邊界的緩衝，除此之外，於同一個邊界上，可同時讓流體流進於流出，此種現象第一次被模擬出來，稱之為雙反射現象(dual-reflection phenomenon)。

3. 高溫差之紊流管道模擬：

為了驗證計算方法於高雷諾數的精確度，利用 DNS 模擬雷諾數從 180 至 950 的高溫差之管道內現象，由此模擬可以觀察到於雷諾數較高的情況時，由於紊流流場的影響，有較多的冷流體直接衝擊在熱壁面上，因此推測此為紊流熱傳效果較層流好得原因。除此之外，高雷諾數時，紊流造成的 thermal shock 效應相當劇烈，於實際工業應用時，需要更高的安全係數。

4. 紊流模式之研究與開發：

為了提高雷諾數以符合實際應用，本研究利用大渦流模擬加入 Smagorinsky 模式配合 damping function，精確的模擬出 $Re_\tau = 180$ 的管道流場。為了讓程式的適切性更加廣泛，本研究進一步發展出隱式之大渦流模擬 dissipative model，此法因為不需外額外的方程式描述小渦流的運動，因此程式撰寫容易。除此之外，由於適用於曲線座標且雷諾數極高($Re_\tau = 2000$)的情況，應用性極為廣

泛。

5. 高速平行計算技術：

由於本研究需要大量的計算資源，為了提昇效率節省計算時間，因此需要利用平行化技術。再過去，多使用 MPI 串連多台電腦來達成提昇效能的目的，但此方法需要耗費大量的財力與空間。為了改善上述缺失，本研究使用 OpenMP 與 GPU 開發平行化計算方法以提昇計算效能，達成使用個人電腦平行化以提昇計算效率的目的。

綜上所述，本研究所發展的流體力學計算方法相當成熟，因此可作為氣動聲學流體計算部份的基礎，利用本計算方法得到精確度極佳的流場聲源資訊。



參考文獻

- [1] M. J. Lighthill, On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory, Proc. Roy. Soc. London 211 (1952) 564-587.
- [2] J. E. Ffowcs Williams and D. L. Hawkings, Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion, Philos. T. Roy. Soc. 264 (1969) 321-342.
- [3] E. Z. William, Class theoretical approaches to computational aeroacoustic, NASA Langley Research Center Hampton (1992).
- [4] K. Ohnishi, H. Zhang, T. Tomohiro, H. Kayama, M. Nawa, and N. Taniguchi, The evidence of the noise analysis technique by LES using general-purpose code FrontFlow, JSFM (2004).
- [5] O. Kenji, H. Ryutaro, and F. Tatsuya, Prediction of wind noise radiated from passenger cars and its evaluation based on auralization, J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 81, (1999) 403-419.
- [6] J. Prieru and G. Rahier, Aeroacoustic integral methods, formulations and efficient numerical implementation, Aerosp. Sci. Technol. 5 (2001) 457-468.
- [7] Y. Addad, D. Laurence, C. Talotte, and M.C. Jacob, Large eddy simulation of a forward-backward facing step for acoustic source identification, Int. J. Heat Fluid Flow 24 (2003) 562-571.
- [8] 梁勝明, 戴朝盛, 楊宗明, 平行計算用於排氣管噪音預測和降低噪音之研究 (1/3), NSC 96-2221-E-269-013- MY3 (2008).
- [9] C. Bogey, C. Bailly and C. Juve, “Noise computation using Lighthill’s equation with inclusion of mean flow-acoustic interaction”, AIAA Aeroacoustics Conference (2001).
- [10] W. R. Briley, H. McDonald, and S. J. Shamroth, At low Mach number Euler formulation and application to time iterative LBI schemes, AIAA 21(10) (1983) 1467-1469.
- [11] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, J. Comput. Phys. 72 (1987) 277-298.
- [12] D. Choi and C.L. Merkel, Application of time-iterative schemes to incompressible flow, AIAA. 25(6) (1985) 1518-1524.
- [13] D. Choi and C.L. Merkel, The Application of Preconditioning in Viscous Flows, J. Comput. Phys. 105 (1193) 207-223.

- [14] P. L. Roe, Approximation Riemann solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *J. Comput. Phys.* 43 (1981) 357-372.
- [15] J. M. Weiss and W. A. Simth, Preconditioning Applied to Variable and Constants Density Flows, *AIAA.* 33 (1995) 2050-2056.
- [16] S. V. Pantankar and D. B. Splading, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer* 15 (1972) 1787-1806.
- [17] D. H. Rudy and J. C. Strikwerda, A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations, *J. Comput. Phys.* 36 (1980) 55-70.
- [18] T. J. Poinso and S. K. Lele, Boundary conditions for Navier-Stokes, *J. Comput. Phys.* 101 (1992) 104-129.
- [19] J. B. Freund, Proposed Inflow/Outflow Boundary Condition for Direct Computation of Aerodynamic Sound, *AIAA.* 35 (1997) 740-742
- [20] J. Kim, P. Moin and R. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 177 (1987) 133-166.
- [21] J. P. Boris, F. F. Grinstein, E. S. Oran and R. L. Kolbe, New insights into large eddy simulation, *Fluid Dyn. Res.* 10 (1992) 199-228.
- [22] F. Grinstein, L. Margolin, and W. Rider, *Implicit large eddy Simulation*, Cambridge University Press (2007).
- [23] B. Lessani, J. Ramboer and C. Lacor, Efficient Large-eddy Simulations of Low Mach Number Flows Using Preconditioning and Multigrid, *J. Comput. Phys.* 18 (2002) 221-233.
- [24] X. F. Xu, J. S. Lee and R. H. Pletcher, A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low Mach number in Cartesian coordinates, *J. Comput. Phys.* 203 (2005) 22-48.
- [25] N. Alkishiwi, M. Meinke and W. Schroder, A large-eddy simulation method for low Mach number flows using precondition and multigrid, *Computers & Fluids* 35 (2005) 1126-1136.
- [26] D. D. Gray and A. Giorgini, The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer* 19 (1976) 545-551.
- [27] T. B. Trong, A parallel Finite-Volume Algorithm for Large-Eddy Simulation of Turbulence Flows, *Computers & Fluids* 29 (2000) 877-915.
- [28] J. W. Deardorff, A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 41 (1970) 453-480.

- [29] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot, A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model, *Phys. Fluids* 3 (1991) 1760-1765.
- [30] S. Yoon and S. Jameson, Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations, *AIAA* 26 (1988) 1025-1026.
- [31] I. Abalakin, A. Dervieux, and T. Kozubskaya, A vertex centered high order MUSCL scheme applying to linearized Euler acoustics, *INRIA* (2002) No4459.
- [32] J. Dennis, P. Thomas, and B. Pieter, Recent Enhancements to OVERFLOW, *Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 35th, Reno, NV, (1997).
- [33] J. A. Domaradzki, K. C. Loh and P. Yee, Large eddy simulations using the subgrid-scale estimation model and truncated Navier-Stokes Dynamics, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 15 (2002) 421-450.
- [34] T. Tantikul and J. A. Domaradzki, Large eddy simulation using truncated Navier-Stokes equations with the Automatic Filtering Criterion, *Journal of Turbulence* 11 (2010) 1-24.
- [35] H. Jeanmart and G. Winckelmans, Investigation of eddy-viscosity models modified using discrete filters: A simplified “regularized variational multiscale model” and an “enhanced field model”, *Phys. Fluids* 19 (2007) 1-16.
- [36] S. Stolz, N. A. Adams, and L. Kleiser, An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows, *Phys. Fluids* 13 (2001) 997-1015.
- [37] H. Paillere, C. Viozat, A. Kumbaro, and I. Toumi, Comparison of low Mach number models for natural convection problems, *Heat and Mass Transfer* 36 (2000) 567-573.
- [38] S. W. Churchill and H. S. Chu, Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate, *Int. J. Heat Mass Transfer* 18 (1975) 1323-1329.
- [39] W. S. Fu and C. P. Huang, Effects of a vibrational heat surface on natural convection in a vertical channel flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 49 (2006) 1340-1349.
- [40] J. R. Dyer, The development of laminar natural-convective flow in a vertical uniform heat flux duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* 18 (1975) 1455-1465.

- [41] K. Khanafer and K. Vafai, Effective boundary conditions for buoyancy-driven flows and heat transfer in fully open-ended two-dimensional enclosures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45 (2002) 2527-2538.
- [42] A. Bejan, *CONVECTION HEAT TRANSFER*, John Wiley & Sons, inc. (1995).
- [43] I. Martorell, J. Herrero, and F. X. Grau, Natural convection from narrow horizontal plates at moderate Rayleigh numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 2389-2402.
- [44] T. Kazushima, *Numerical Simulation of Turbulent Flows*, Yokendo Co., Ltd. (1999) 149-155.
- [45] E. Lenormand, P. Sagaut, and L. T. Phuoc, Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate Reynolds number, *Int. J. Nume. Meth. Fluids*, 32 (2000) 369.
- [46] J. C. del Alamo and J. Jimenez, Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels, *Phys. Fluids* 15 (2003) 41-44.
- [47] J. C. del Alamo, J. Jimenez, P. Zandonade and R. D. Moser, Scaling of the energy spectra of turbulent channels, *J. Fluid Mech.* 500 (2004) 135-144.
- [48] S. Hoyas and J. Jimenez, Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$, *Phys. Fluids* 18 (2006) 011702-011702-4
- [49] DeWitt and P. David, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (6th Edition), 490-515.
- [50] DeWitt and P. David, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (4th Edition), 493.
- [51] D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics-THE BASICS WITH APPLICATIONS*, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, (1995).
- [52] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Srpinger (1999).
- [53] P. H. Oosthuizen, A numerical study of laminar free convective flow through a vertical open partially heated plane duct, *ASME HTD* 32 (1984) 41-48.
- [54] D. Naylor, J. M. Floryan and J. D. Tarasuk, A numerical study of developing free convection between vertical parallel plates, *Transactions of the Journal of Heat Mass Transfer ASME* 113 (1991) 620-626.

- [55] D. A. Hall, G. C. Vliet and T. L. Bergman, Natural convection cooling of vertical rectangular channel in air considering radiation and wall conduction, *Journal of Electronic Packaging, Transaction of the ASME* 121 (1999) 75-84.
- [56] J. M. Floryan and M. Novak, Free convection heat transfer in multiple vertical channels, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 16 (1995) 245-253.
- [57] D. Gilles and F. Alberto, Laminar natural convection in a vertical isothermal channel with symmetric surface-mounted rectangular ribs, *Int. J. Heat Mass Transfer* 23 (2002) 519-529.
- [58] S. A. M. Said, M. A. Habib, H. M. Badr and S. Anwar, Numerical investigation of natural convection inside an inclined parallel-walled channel, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 49 (2005) 569–582.
- [59] H. Paillere, C. Viozat, A. Kumbaro and I. Toumi, Comparison of low Mach number models for natural convection problems, *Heat and Mass Transfer* 36 (2000) 567-573.
- [60] S. Yamamoto, D. Niiyama and R. S. Beyong, A numerical method for natural convection and heat conduction around and in a horizontal circular pipe, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 5781-5792.
- [61] S. W. Churchill and H. H. S. Chu, Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate, *Int. J. Heat Mass Transfer* 18 (1975) 1323-1329.
- [62] I. G. Currie and W. A. Newman, Natural convection between isothermal vertical surfaces, *Heat Transfer* 4 (1970).
- [63] E. Lenormand, P. Saguat and L. T. Phuoc, Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate Reynolds number, *Int. J. Nume. Meth. Fluids* 32 (2000) 369-406.
- [64] A. Andreozzi, Y. Jaluria, and O. Manca, Numerical investigation of transient natural convection in a horizontal channel heated from the upper wall, *Numer. Heat Transfer A* 51 (2007) 815-842.
- [65] A. Bejan, *CONVECTION HEAT TRANSFER*, John Wiley & Sons, inc. (1995).
- [66] I. Martorell, J. Herrero, and F. X. Grau, Natural convection from narrow horizontal plates at moderate Rayleigh numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 2389-2402.
- [67] S. Gavrilakis, Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct, *J. Fluid Mech.* 244 (1992) 101-129.

- [68] T.S. Lund, X. H. Wu, K. D. Squires, Generation of Turbulent Inflow Data for Spatially-Developing BoundaryLayer Simulations, J. Comput. Phys. 140 (1998)233-258.
- [69] M. Klein, A. Sadiki, and J. Janicka, A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulation, J. Comput. Phys. 186 (2003) 652-665.



附錄 1

為了得到 Lighthill 的結果，必須將連續方程式與動量方程式結合以推導出 Lighthill 方程式。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_i} \rho v_i = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j} v_i \right) = - \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j} \quad (2)$$

(1)為連續方程式，(2)為動量方程式，其中 e_{ij} 為黏滯性所造成的作用力向。對於黏性氣體而言，可以用速度梯度表示如下：

$$e_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right) \quad (3)$$

μ 為流體的黏滯係數

接著將(2)動量方程式移項整理，可得：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i = - \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p - e_{ij}) \quad (4)$$

在將(4)式的兩邊加上 $c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i}$ 該項，於是(4)式可表示成：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} = - \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p - e_{ij}) + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \quad (5)$$

等式右邊在合併整理可得出：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} = - \frac{\partial}{\partial y_j} \{ \rho v_i v_j + [\delta_{ij} (p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij} \} \quad (6)$$

$$\text{令 } T_{ij} = \rho v_i v_j + [\delta_{ij} (p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij} \quad (7)$$

方程式可再進一步表示成

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} = - \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \quad (8)$$

$$\text{或 } \frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i = - \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \quad (9)$$

其中， T_{ij} 稱為 Lighthill turbulence stress tensor

在來對(9)連續方程式的兩邊作時間的微分，可得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y_i} \rho v_i = 0 \quad (10)$$

將(10)式中的第二項式予以分解

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y_i} \rho v_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i \right) \quad (11)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i$ 可以(9)式帶入，得出：

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial p}{\partial y_i} \right) \quad (12)$$

在此結果帶入(10)式中，進一步推導出：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial p}{\partial y_i} \right) = 0 \quad (13)$$

最後將其整理，得到最後的 Lighthill 方程式：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \rho}{\partial y_i \partial y_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \quad (14)$$

Lighthill 方程式將結果在一次敘述：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \quad (15)$$

$T_{ij} = \rho v_i v_j + [\delta_{ij}(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)] - e_{ij}$ Lighthill turbulence stress tensor

(15)式中之 Lighthill 方程式與波動方程式的形式非常接近，差別只在於

$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$ 所造成的非齊性項(nonhomogeneous)。因此可將 Lighthill 方程式視為在流

場中，會產生出音源 $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$ ，此音源讓流場所產生的聲響以聲音的波動方式

$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho$ 傳遞出去。由於等號兩邊的變數是互相包含，因此可由數值方法上

獲得其解。但由於方程式中，擾動值 $\rho - \rho_0$ 與平衡值 ρ 的數量值差異太大，以致於不易獲得精確的數值解。為了解決此問題，Lighthill[1]提出，方程式右邊的非齊性項可利用實驗或流體計算方法求得，帶入(15)式中，將其視為典型的聲學波動方程式，並且可利用數值方法或聲學分析的方法，得出精確的聲場分布，此即為 Lighthill analogy。

為了讓 Lighthill analogy 更加實用，於某些情況下可對(15)式中 T_{ij} 項做出合理的假設與簡化：

1. 假設流場為紊流，忽略 e_{ij} 所造成的黏滯性作用力 $e_{ij}=0$ ，於是

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + [\delta_{ij}(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)]。$$

2. 流動過程為一等熵過程 (isentropic)，所以 $(p - p_0) = c_0^2(\rho - \rho_0)$ ， T_{ij} 可再進一步簡化成 $T_{ij} = \rho v_i v_j$ 。

3. 若流速為低馬赫數，則假設密度為定值，於是 Lighthill 方程式可以簡化成

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho' = \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial y_i \partial y_j} \quad (16)$$

$$\text{或 } \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (17)$$

在對 Lighthill analogy 做出合理的假設與簡化之後，即可利用全域可壓縮流場計算方法計算 Lighthill turbulence stress tensor 以當作流場中的聲源，並且帶入方程式(15)式計算聲波的傳遞，藉此分析氣動噪音的產生原因與改善方法。

