國 立 交 通 大 學

應用數學系

碩 士 論 文

微積分試題分析之實徵性研究－以交通大學九十六學年度第二學期會考為例

Item Analysis － the Empirical Study of a Calculus Assessment

研 究 生：蔡佩純

指導教授：白啟光 教授

中 華 民 國 九 十 九 年 七 月

微積分試題分析之實徵性研究－以交通大學九十六學年度第二學期會考為例

Item Analysis － the Empirical Study of a Calculus Assessment

研 究 生：蔡佩純　　Student: Pei-Chucn Tsai

指導教授：白啟光　　Advisor: Chi-kaung Pai

A Thesis
Submitted to Department of Applied Mathematics
College of Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Applied Mathematics
July 2008

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 九 年 七 月

微積分試題分析之實徵性研究－以交通大學九十六學年度第二學期會考為例

研究生：蔡佩純　　　　　　　　　指導教授：白啟光 教授

國立交通大學應用數學系

摘　要

交通大學的微積分為大一大多數科系必修之科目，並於每學期課程結束後舉行會考。為建立一穩定的試卷品質以有效反應學生的學習成效，本研究以九十六學年度第二學期微積分會考試題為例進行分析，評估其是否適宜，並從效度、難易度、鑑別度三個角度探討之。

由於會考目的為評量學生是否具備基本能力，本研究先建立微積分課程的學習目標以回答第一個問題。再由學習目標與試題內容分析等質性角度與從古典測驗理論而得之統計數據的量化角度進行個別試題分析，並依結果建立試題的雙向細目表，最後從單元配置、難易度分布、鑑別度、質性比較等角度來評估整份試卷。

根據研究結果，在效度方面，若微積分教學小組公告之共同習題是基本能力的指標，則在試題內容方面，本卷大部分的題目都與共同習題一致，符合會考之定位；在試題配置方面，若與授課時數比例相比，本卷在多重積分單元佔分比重過重。在難易度方面，平均成績61.75分，考生成績分布圖為右偏，標準差16.46，成績分布非常分散；就內容而言，整份試卷難度不算困難。而從試題比較可發現，空間概念是學生較需加強的部份。在鑑別度方面，有一半以上的題目鑑別度為非常優良，且各單元均包含至少一題鑑別度非常優良之試題，整體來說，是份鑑別度分布還不錯且合乎會考需求的試卷。最後，本研究提出建議與未來研究方向，希望此研究成果能作為相關研究之參考。

關鍵字：古典測驗理論、試題分析、難度、鑑別度、質性分析

Item Analysis － the Empirical Study of a Calculus Assessment

Student：Pei-Chucn Tsai **Advisor：Dr. Chi-kaung Pai**

Department(Institute) of Applied Mathematics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The research is mainly analyzing about item analysis of “National Chiao Tung University Calculus Assessment” for the Spring Semester in 2007. Providing a set of the efficient item analysis models to the item checklist for avoiding some mistakes made in the process of setting items.

First, set up two-way specification table, in order to understand the content contained of this discipline.

Second, item analysis , such as the relevance and the difficulty of examination question.

Third, indication analysis , such as the research of validity and reliability

At last, therefore were more advises for teaching staff, the test designer, and suggestions to further researches

Keyword: Classical Test Theory、Item Analysis、Item Difficulty、Item Discrimination、Qualitative Analysis

誌　　謝

時光飛逝，不知不覺已在交大渡過四年的研究生生涯，這四年來，發生很多事情，不論在研究、課業、情感、工作、個人、生活等各方面，都有許多的經歷與成長。今日終於能順利畢業，最要感謝的就是我的指導教授－白啟光老師，感謝老師如嚴師如慈母，不論在研究上的專研究精神或是生活上的教諱，都讓我學習到許多，與增進認知。尤其感謝老師不斷地包容我的缺失，與提醒我該注意或可改善的地方。讓我有成長的機會，也終於順利完成這階段的旅途，

此外，感謝系上所有的老師與助理，豐富了我專業學識上的知能與給許許多的幫助；另外，感謝碩班生涯的所有學長姐、同學、與學弟妹，感謝妳們豐富了我的生活，認識了這麼多的好朋友。

最後，要感謝我的家人，感謝您們一直是我心裡最大支柱，今日的這份榮耀，獻給您們

目　　錄

表 目 錄

圖 目 錄

第一章　緒論

1.1　研究背景與動機

交通大學為一理工科為主的學校，微積分為大一大多數科系必修之科目。大部分的微積分教學是由應用數學系的教師來擔任，為了要提升教學品質，而成立微積分教學小組，負責微積分課程之教材選擇、課程安排規劃，與微積分教學改進等工作。

微積分課程依上課時段分成 A、B 兩組，A 組包括電資、電工、電機、資工、光電等學系；B 組則包括機械、土木、材料、電物、應數、應化、生科、工管、運管、奈米學程與管科等學系。學生共同選課，但可以在組內自由選班，為協助學生了解不同教師之要求與教學風格，微積分教學小組會於選課前在網站上公佈各教授班之詳細資料，以提供學生參考。學生可以依自己的興趣、學習能力、學習習慣來選擇適合自己的老師，教師亦可適時發揮本身教材教法的最佳性。而採取混班上課也使得各班學生程度差異不大。

依據微積分教學小組公布在網站上的資料，本校微積分均為四小時四學分之課程，全校共同採用 James Stewart 編寫的 Calculus(Early Transcendental)(6th Ed)為課程參考用書。課程內容相同，如表1-1所列，上學期課程（或稱微積分（一））內容為第一章至第十章，包含函數、微分、積分及其應用等課程內容；下學期課程（或稱微積分（二））為第十一章至第十五章，包含無窮數列與級數、空間幾何與向量函數、多變數微分、與多重積分等內容，課程大綱（含授課時數）請見附錄1，並於微積分教學小組網站公布共同習題。

表1-1、微積分課程內容

微積分（一）	微積分（二）
函數（Functions and Model） 極限與導數（Limits and Derivatives）	無窮數列與級數（Infinite Sequences and Series）

微分法則（Differentiation Rules）	向量與幾何空間（Vectors and the Geometry of Space）
微分的應用（Applications of Differentiation）	向量函數（Vector Functions）
積分（Integrals）	多變數微分（Partial Derivatives）
積分的應用（Applications of Integration）	多重積分（Multiple Integrals）
積分技巧（Techniques of Integration）	
積分的其他應用（Further Applications of Integration）	
參數方程與極座標（Parametric Equations and Polar Coordinates）	

資料來源：交通大學微積分教學小組、本研究整理

但為避免不同老師評分標準不同而造成成績不公平之現象，勢必需要有一個統一的標準去評量學生，故為了公平性需要，每學期課程結束後統一於學期初即訂定之時間舉行微積分會考，測驗成績將佔學生學期成績百分之三十，除了對學生有再督促其瀏覽全部課程之功能，對學習有很大的幫助外；會考成績為一客觀的評分標準，讓系所主任、家長、學生等不會有評分不公之疑慮。

表1-2、近幾年微積分會考平均成績

會考試卷	上學期	下學期
93	48.16	50.60
94	58.68	48.38
95	45.97	61.78
96	58.99	61.75
97	60.70	59.34
98	63.97	52.97

資料來源：交通大學微積分教學小組、本研究整理

然而，由表 1-2 可發現會考的平均成績很不穩定，有時成績僅四十幾分造成需要調

分的困擾，有時成績在提升後隔年又降低，平均分數起起伏伏很不一致。造成此現象的可能原因有兩種，一種是學生學習情形有問題，一種是題目不恰當，難度過高。因此，微積分小組希望有較好的命題方式，希望藉由試卷建立題庫，以過去試題為出發點，答對率做難易度的參考；且希望能由會考的分析結果看出學生的學習情況與學習成效，所以開始有題庫計畫。

故微積分小組自九十四學年度開始記錄每年會考試題的答對率與標準差等答題資訊，藉由微積分會考為大型測驗，樣本夠大，希望透過這些會考的答對率做為試題難易度的參考，當老師們出一個類似題時，可依此去猜測與判斷學生的答對率大概會是多少，以作為選題或命題之依據。由表 1-2 可看出近幾年來的微積分會考平均成績有較為提升與穩定。

此外，微積分小組在九十六學年度與台中教育大學合作，以現代試題理論（IRT）分析試題欲建立題庫，但礙於 IRT 過於複雜不易解讀與等化之過程仍有些問題，本研究擬回歸傳統古典測驗理論（CTT）來分析量化之數據，並結合微積分學科的質性角度，嘗試以九十六學年度第二學期微積分會考試題進行分析，希望對整份試卷有更進一步的了解，能評估試卷是否適宜。

1.2 研究目的與待答問題

本研究目的為分析「九十六學年度第二學期微積分會考試題」是否適宜，利用會考試題與考生的測驗資料，作為評估試卷的依據。提出的待答問題為：

「九十六學年度第二學期微積分會考試題」是否為一份適宜的試卷？

而為探討試題是否適宜，本研究將從三個角度討論：第一，「這份試卷是否達到所設定的測驗目的？」；第二，「這份試卷的難易度是否適宜？」；第三，「這份試卷的鑑別

情形為何？」。

其中，由於微積分會考的測驗目的是要鑑別學生是已否備基本能力。為回答第一個問題，本研究將建立微積分課程的學習目標。而為了更清楚整份試卷的質性分析，本研究將建立雙向細目表，從質與量的角度評估本試卷是否適宜。

1.3 研究情境

九十六學年度第二學期修習微積分（二）的修課學生共1,082人，會考缺考32人，本研究有效樣本為1,050人。測驗時間110分鐘，不分組，所有學生皆採相同試題，考試範圍為微積分（二）之課程內容，包含無窮數列與級數、空間幾何與向量函數、多變數微分、與多重積分等單元。

九十六學年度第二學期微積分會考試題分甲、乙兩卷，(自九十八學年度取消乙卷)，甲卷為一般試卷，題型為選擇及填充題。單選題共十題，佔50分；複選題五題，佔25分。每題的四個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的；四個選項全部答對者得5分，只錯一個選項可得3分，錯兩個或兩個以上選項不給分；填充題五題，佔25分。總題數二十題，總分為100分，每題皆不倒扣，佔學期成績百分之三十；乙卷為挑戰題試卷，採延時加考之方向進行，於測驗時間110分鐘結束並回收甲卷後，再額外提供30分鐘時間作答乙卷，學生可自行決定是否作答，計40分，不佔學期成績。甲乙兩卷成績合併後，將作為微積分獎給獎依據或教師加分參考。本研究僅針對九十六學年度第二學期微積分會考試題甲卷的部份做分析。

1.4 研究方法與架構

一般而言，一份試題需經由質與量的分析，才能形成可靠的測驗，發揮測驗應有的功能。所謂試題的質性分析是指試題在內容和形式的方面所做的邏輯分析（logical analysis)；而以各試題的難易度和鑑別度評估試題的切合性，即為量的分析（顧介梅，民91）。

本研究針對「九十六學年度第二學期微積分會考試題」，分別由雙項細目表、效度、難易度與鑑別度等方面探討試卷的適宜性，兼具質性與量化分析，現分述如下。

在質性分析方面，本研究將依交通大學微積分下學期課程的學習目標，利用單元配置與類型分布等檢核試題結構，以三角校正法（triangulation），建立其專家效度。其中三角校正法，是指使用多種方法來研究同一現象（Robson，1993）。此外，吳芝儀、李奉儒（民84）亦指出，三角校正法是由 Denzin 所提出，分為資料三角校正、研究者三角校正、理論三角校正、及方法論三角校正等四種。其使用目的在於利用各種不同的方法以蒐集不同來源和型態的資料，以在減低研究者的偏見。

在量化分析方面，本研究擬先建立以學習目標為縱軸，試題類型為橫軸的空白雙項細目表。另一方面，將依據古典測驗理論的難度、鑑別度、統計圖表等量化角度進行個別試題分析。之後將此個別試題分析填入空白雙項細目表，即可完成試題之雙項細目表。

茲將本研究的研究方法與工具整理如表1-3；架構與章節配置整理如圖1-1。

表 1-3、研究方法與研究工具

研究目的	研究內容	研究方法與工具
分析96學年度第二學期微積分會考試題	建立雙向細目表	學習目標、試題類型、文獻探討、研究者三角校正、理論三角校正、訪談
	個別試題分析	（量）難易度、鑑別度、統計圖表（各等級答對率折線圖、鑑別度總表、五等分組考生各選項選答情形表、全體暨高低分組考生各選項選答情形表、與各等級作答情形直條圖等）
		（質）學習目標、內容分析
	完成雙向細目表	個別試題分析、研究者三角校正

效度分析	會考各題的單元配置、試題類型分布
難易度	（量）古典測驗理論、文獻探討、統計圖表（整份試卷成績分佈圖、難度分布答對率與鑑別度的散佈圖、答對率與鑑別度的雙軸折線圖等）
	（質）個別試題分析
鑑別度	古典測驗理論、文獻探討、分組資訊、統計圖表（答對率與鑑別度的散佈圖、答對率與鑑別度的雙軸折線圖等）
質性比較	試題內容概念分布表、多重積分單元試題比較表

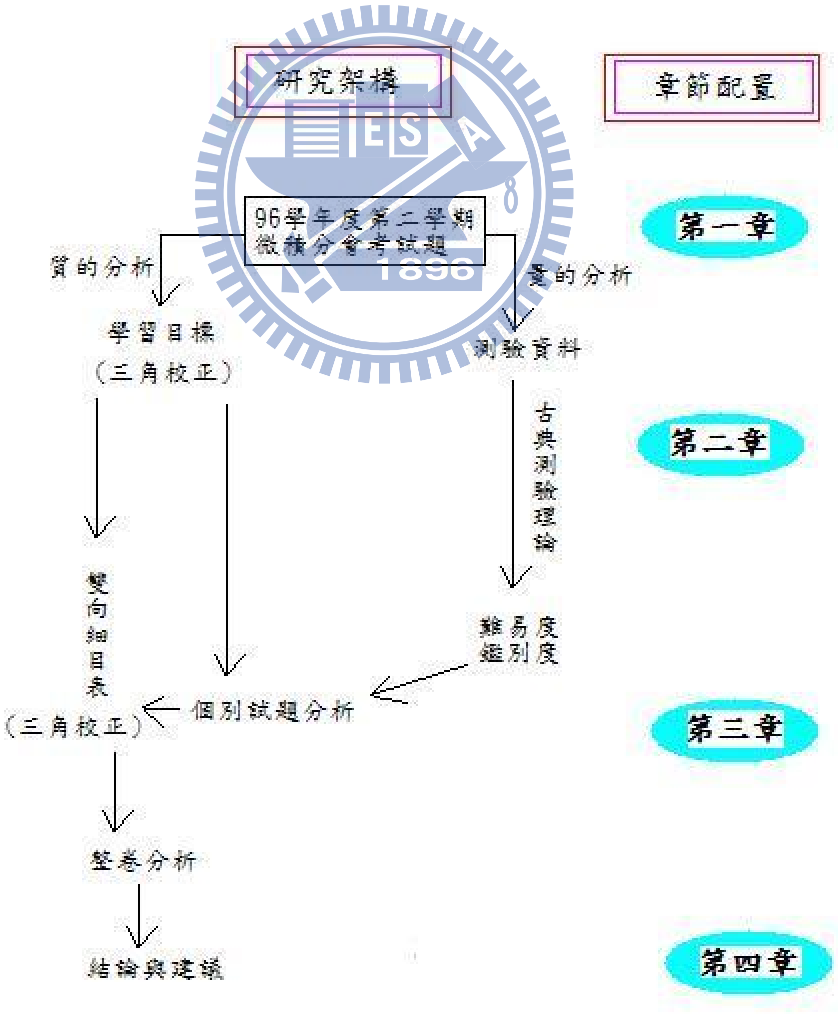


圖 1-1、研究架構與章節配置圖

1.5 研究限制

本研究採古典測驗理論分析試題，所以難以逃脫古典測驗理論本身的限制，現說明如下。

第一、余民寧（民91）表示難度指標與鑑別度指標，都是屬於樣本依賴（sample dependent）。簡言之，這些指標都會隨著樣本不同而獲得不同的分析結果。

第二、古典測驗理論認為原始得分相同的受試者，其能力亦同，然實際上並非如此。顧介梅（民91）表示，在古典測驗理論中，分數的高低代表能力的高低，並未考慮受試者的試題反應組型（item response pattern）。

此外，基於時間之限制，本研究未再找學生進行進一步的訪談與施測，故在個別試題分析中，有部份選項的作答情形，因無實際上的數據驗證所以無法確切得知學生的解題原因。

第二章　文獻探討與名詞釋義

2.1　測驗理論

由於古典測驗理論（**classical test theory；簡稱 CTT**）是目前測驗學界使用與流通最廣的理論依據，其公式簡單明瞭、淺顯易懂，且已發展很久並具相當規模，（余民寧，民 80），故本研究採取其難易度、鑑別度以作為試題分析的指標。

以下將先介紹古典測驗理論的難易度與鑑別度，再提出本研究根據定義所做的假設與圖表解讀說明。

2.1.1 難易度（item difficulty）

一般來說，試題的難度即為受試者的通過百分比或答對百分比，其公式為

$$P = \frac{R}{N}$$

其中，P代表試題難度，N為受試者人數，R為答對該題的人數。當題目越容易，通過的百分比會越高。由此可知，古典測驗理論的難易度即為試題的答對率。根據陳英豪與吳裕益（民81）表示：「一個測驗各個試題的難度水準，不但決定整個測驗的平均難度，而且也決定了測驗分數的分布情形」。

九十六學年度第二學期微積分會考試題包含了單選題、複選題與填充題三種題型，以下一一說明此三種題型之答對率的計算方式。單選題只有一個選項正確，所以正確選項的選答率就代表該題的答對率。填充題有答對、答錯、與未作答三種作答情形，而答對率就是答對該題的學生比例。在複選題方面，雖然不倒扣，但因有部份給分的情形，若以該題得到全對的學生比例當答對率，將會低估該題的答對率而影響其難度與鑑別度的判斷。以下將說明本研究對複選題答對率的計算方式。

根據微積分會考試卷上的說明，每題複選題共有四個選項，每個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確選項。四個選項全部答對的學生可在該題得到五分，只錯一個

選項可得三分，錯兩個或兩個以上選項不給分。即每位學生的每題複選題可得分數僅有得五分（當該題全對)、得三分（當該題得部分分數)、與得零分（未作答或錯兩個以上的選項）三種結果。所以，每題複選題的分數來源為每位全對的學生提供了五分，與得部分分數的學生提供了三分這兩種來源。

先以實例來思考複選題的答對率意涵，若現在共有十位學生，其中六人全對，三人得部分分數，一人得零分，則此十位學生總得分為39分（因 $6\times5+3\times3=39$），且該題得分率為78%（因 $\frac{39}{50}\times100\%=78\%$），其中，全對的六位學生各提供了百分之十的得分率，得部分分的三位學生各提供百分之六的得分率，即在78%的答對率中，有百分之六十是來自全對的六人，百分之十八是來自得部分分的三位學生。故本研究以加權平均的算法來定義複選題的答對率，將全對率（全對的學生佔該組總人數的比例）乘以權數1，得部分分的學生比例乘以權數0.6，再將兩項加總即為該題的答對率。即

複選題的答對率（又稱加權平均）＝全對率＋（得部分分的學生比例）×0.6。

此外，本研究後續將會對學生分組以進行鑑別度之計算或觀察，在此先界定與解釋名詞的用法：

（1）第 n 組的答對率：以第 n 組所有學生人數為總數，計算該組答對學生人數佔該組學生的比例，答對率的算法同前述之說明；

（2）第 n 組的未答率：第 n 組未作答的學生人數佔該組總人數的比例。

（3）第 n 組的全錯率：第 n 組得全錯的學生人數佔該組總人數的比例。

（4）第 n 組的得部分分率：第 n 組得部分分的學生人數佔該組總人數的比例。

（5）第 n 組的 m 選項的選答率：第 n 組學生中，選 m 選項的學生人數佔該組總人數的比例。

在難度指標方面，為使鑑別度指標值可以達到最大，許多學者都建議挑選難易適中（難度接近 0.50）的試題。但其實很難找到先符合鑑別度也符合其難度值接近 0.50 的試

題；因此，學者 Ahmanan & Glock（1981）提出選擇題以 0.40 到 0.70 之間的難度指標值範圍作為標準；Chase（1978）提出選擇題以 0.40 到 0.80 的難度指標值範圍作為標準，是非題以 0.55 到 0.85 之間的難度指標作為標準。余民寧（民 91）指出，平均而言，整份測驗的平均難度還是以接近 0.50 為原則。但在實際應用時，試題的難度應配合測驗的目的，才能使測驗發揮最大功效（陳英豪、吳裕益，民 81）。

微積分會考是一基本能力測驗，主要的目的是在測驗學生是否具備基本能力，而非區分學生程度之高低。試題的難度水準並未訂定，而根據本研究訪談之結果，大部分老師認為難度水準宜在六十分左右以決定學生是否已具備足夠的能力。此外，一些相當容易的題目，即使鑑別力並不高，但若其所涵蓋之數學概念或技巧為學生應具備之基本能力，則仍應予以保留。

本研究參考大學入學考試－學科能力測驗、大學基礎數學與統計學基本學力測驗等大型考試數學科的難易度準則後，根據歷年微積分會考的平均成績（如表1-2），採取Ebel與Frisbie（1991）的難易度等級表（如表2-1）作為本研究試題難易度的判斷準則。

表2-1、Ebel & Frisbie的試題難易度等級表

難易度（P）	試題評鑑結果
$P \geq 0.80$	極容易
$0.60 \leq P < 0.80$	容易
$0.40 \leq P < 0.60$	難易適中
$0.20 \leq P < 0.40$	困難
$D_i < 0.20$	極困難

資料來源：教育測驗與評量：成就測驗與教學評量，余民寧，民91，臺北市：心理

2.1.2 鑑別度（item discrimination）

根據學者 Ebel &Frisbie（1991）表示，若題目的鑑別度太低，會造成學生即使不會

也容易猜對，甚至可能出現程度較差的學生其答對機會大於程度較佳的學生。因此，在一份試題中，能判定與選出具有鑑別度的題目是重要的事。下面將先介紹古典測驗理論中的鑑別度，再說明本研究的分組情形，最後提出各組間的鑑別度判斷準則。

1.鑑別度

本研究利用試題鑑別度指標（item discrimination index）的分析方法，採取「內部一致性」(internal consistency）進行鑑別度分析，即探討個別試題得分與整個測驗總分之間的一致性為主，以瞭解試題在整份試卷中的相對好壞（余民寧，民 91)。說明如下：

當以測驗總分來代表學生的成就高低時，若試題具有能使「高能力學生的答對百分比，大於低能力學生的答對百分比」的特性，則可說其具有區別高、低能力學生的功能，而這功能即是試題分析中的鑑別度指標，其公式為：

$$D=P_H-P_L$$

，其中，D 為鑑別度指標，P_H 和 P_L 分別為高、低分組在該試題的答對百分比。當高、低分組越極端，其區別力越大，但相對來說，因受試者太少，反而會影響分析結果的可靠性。Kelley（1939）指出，在常態分配下，最適當的比率是高、低分組各佔 27%。如果分布的圖形較常態分配為平坦，則比率高於 27%，大約是 33%（Cureton, 1957)。而在一般教室中所進行的測驗，高、低分組比例只要介於 25~33%即可（陳英豪、吳裕益，民 81)。

D 介於 -1.00 到 1.00 之間，其值愈高表示該試題的鑑別度愈大，越能區別高、低分組學生答對試題的情形；反之則越差。當試題過於簡單使得全部高低分組學生都答對，或太困難使得高低分組學生都答錯時，其試題鑑別度都為零。表示極端容易與極端困難的試題，都不具有良好的鑑別度指標。而 D 值若小於零，代表該試題具有反向的鑑別作用，應予淘汰（余民寧，民 91)。此外，陳英豪與吳裕益（民 81）表示：「D 值的平均數越高，則測驗的信度就越高」。

從統計學的觀點來看，試題的難度指標與鑑別度指標具有密切的關係（Ebel,

1967；引自余民寧，民 91)。當試題難度越趨向兩極端時，試題鑑別度將趨近於零；而當難度越接近 0.50 時，鑑別度則可能達到最大（余民寧，民 91)。由於負的鑑別度應淘汰，所以，若希望試題的品質維持在某水準之上，則應挑選難度接近 0.50（即難易適中）的試題。郭生玉（民 79）指出，通常挑選優良試題的標準，是先挑出鑑別度較高的題目，再挑出難度較適中的題目。「一般而言，作為常模參照測驗用的試題鑑別度指標值是越高越好，但一般可接受的最低標準至少為 0.25 以上，低於此標準者，即可視為鑑別度不佳或是品質不良的試題（Noll, Scannell & Craig, 1979；引自余民寧，民 91)」。本研究採取美國測驗學者 Ebel 與 Frisbie（1991）提出的鑑別度判斷標準（如表 2-2）為試題鑑別度的判斷依據。

表 2-2、Ebel & Frisbie 的鑑別度評鑑標準

鑑別度指標	試題評鑑結果
0.40以上	非常優良
0.30-0.39	優良，但需小幅度修改
0.20-0.29	尚可，但需部份修改
0.19以下	劣，需要大幅修改或刪除

資料來源：教育測驗與評量：成就測驗與教學評量，余民寧，民91，臺北市：心理

2. 高、低分組

本研究在所有 1,050 位考生中界定出高、低分組，以同成績之學生落於同一組且各組人數最接近所有學生的 27%之取分原則，取總成績排序前 29.81%的 313 位學生為高分組，該組成績範圍在 100 分至 73 分之間；總成績排序後百分之 27.33%的 287 位學生為低分組，該組成績範圍在 51 分至 13 分之間。兩組學生各題的答對率與鑑別度請見附錄二與附錄三。令 *Ph*、*Pl* 分別為高、低分組的答對率，則鑑別度 *D* 值即為 *P*h 減 *P*l。根據鑑別度的定義與合理性，複選題的鑑別度計算方法仍為高分組答對率減去低分組答對率，且此時答對率為 2.1.1 節說明的加權平均，而非正確選項的

選答率。

3.五等分組

為了進一步暸解此份試卷針對不同的考生群的差異性，本研究參照大考中心的作法，將學生依微積分會考成績由高而低平均分成 a、b、c、d、e 五組，每組有 210 人，其通過率分別以 *P*a、*P*b、*P*c、*P*d、*P*e 來表示。藉由比較各組間的答對率，可看出每題主要鑑別的考生群不完全一樣（朱惠文。民 96）。為清楚比較其差異，令第 a 組考生（總成績在前百分之二十）與第 b 組考生（總成績在前百分之二十一~四十）的鑑別度 *D*1 等於 *P*a 減 *P*b；第 b 組與第 c 組考生的鑑別度 *D*2 等於 *P*b 減 *P*c，依此類推。（朱惠文。民 96）

2.1.3 答對率曲線與圖表說明

本節將介紹本研究在個別試題分析時所用到的部份圖表。

1. 答對率折線圖

在個別試題分析時，本研究將以a、b、c、d、e五組的答對率繪製各題的答對率折線圖。根據鑑別度的定義，鑑別度等於高分組的答對率減去低分組的答對率，當兩者之差越大，該題就有越高的鑑別度。故以答對率曲線圖來看，當曲線的傾斜程度愈大，該題的鑑別能力越好。

圖 2-1 為單選第 9 題的各等級答對率折線圖，觀察各組間的斜率可發現：第 a、b 兩組間的斜率非常小；第 b、c 兩組間的斜率與第 c、d 兩組間的斜率接近；而第 d、e 兩組間的斜率非常大，故由試題的答對率折線圖可以清楚看出該題主要鑑別第 d 組與第 e 組的學生。

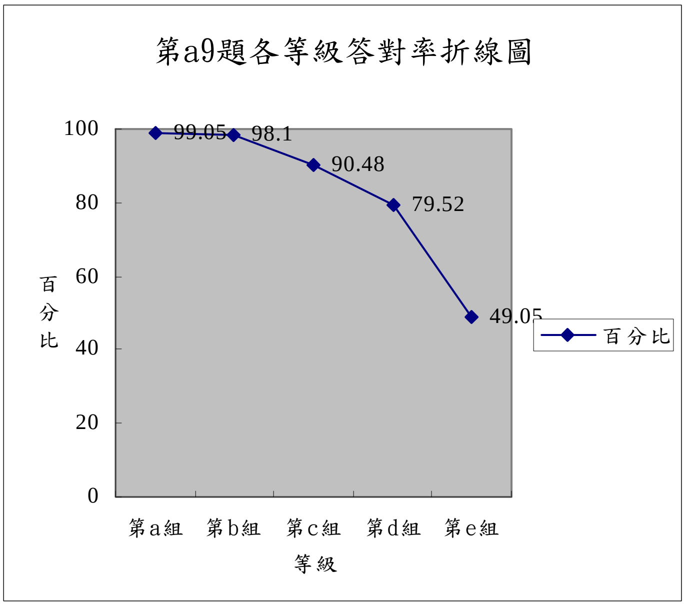


圖 2-1、單選第 9 題各等級答對率折線圖

若以各組的鑑別度總表（請見附錄三）搭配鑑別度評鑑表（請見表 2-2），則可解讀所有試題的鑑別情形。

表 2-3、單選第 9 題的鑑別度總表（節錄自附錄三）

鑑別度		*D*	*D*1	*D*2	*D*3	*D*4
單選題	第 9 題	0.4225	0.0095	0.0762	0.1095	0.3048

表 2-4、Ebel & Frisbie 的鑑別度評鑑標準（同表 2-2）

鑑別度指標	試題評鑑結果
0.40以上	非常優良
0.30-0.39	優良，但需小幅度修改
0.20-0.29	尚可，但需部份修改
0.19以下	劣，需要大幅修改或刪除

資料來源：教育測驗與評量：成就測驗與教學評量，余民寧，民91，臺北市：心理

對照表 2-3 與表 2-4，可得單選第 9 題的鑑別度 $D = 0.4225$ 為非常優良；而 $D4 = 0.3048$ 遠大於 $D1, D2, D3$，亦可看出本題主要鑑別第 d、e 兩組的學生，且有非常好的鑑別能力。

2. 複選題作答情形統計

在複選題方面，研究者統計出各種作答情形的人數與比例，如表 2-5 與表 2-6 各為高低分組與五等分組學生在複選第 3 題的作答情形統計。可針對選項間的概念關聯性，進一步分析學生的學習問題。

表 2-5、表 962-b3-3

962_b3	所有人		高分組		低分組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
AB	7	0.67%	2	0.64%	3	1.05%
ABC	13	1.24%	4	1.28%	5	1.74%
ABCD	122	11.62%	29	9.27%	42	14.63%
ABD	53	5.05%	5	1.60%	27	9.41%
AC	34	3.24%	3	0.96%	18	6.27%
ACD	142	13.52%	23	7.35%	50	17.42%
AD	26	2.48%	3	0.96%	15	5.23%
B	7	0.67%	2	0.64%	3	1.05%
BC	45	4.29%	18	5.75%	7	2.44%
BCD	281	26.76%	140	44.73%	37	12.89%
BD	153	14.57%	38	12.14%	44	15.33%
C	13	1.24%	3	0.96%	2	0.70%
CD	139	13.24%	40	12.78%	28	9.76%
D	14	1.33%	3	0.96%	5	1.74%

未作答	1	0.10%	0	0.00%	1	0.35%
總計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 2-6、表 962-b3-4

962_b3	第 a 組		第 b 組		第 c 組		第 d 組		第 e 組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
AB	1	0.48%	1	0.48%	1	0.48%	1	0.48%	3	1.43%
ABC	1	0.48%	3	1.43%	3	1.43%	2	0.95%	4	1.90%
ABCD	17	8.10%	25	11.90%	23	10.95%	24	11.43%	33	15.71%
ABD	2	0.95%	5	2.38%	10	4.76%	16	7.62%	20	9.52%
AC	3	1.43%	2	0.95%	6	2.86%	6	2.86%	17	8.10%
ACD	12	5.71%	22	10.48%	30	14.29%	45	21.43%	33	15.71%
AD	1	0.48%	4	1.90%	2	0.95%	5	2.38%	14	6.67%
B	2	0.95%	2	0.95%	0	0.00%	0	0.00%	3	1.43%
BC	14	6.67%	5	2.38%	14	6.67%	7	3.33%	5	2.38%
BCD	103	49.05%	64	30.48%	52	24.76%	37	17.62%	25	11.90%
BD	27	12.86%	30	14.29%	30	14.29%	37	17.62%	29	13.81%
C	2	0.95%	3	1.43%	4	1.90%	2	0.95%	2	0.95%
CD	25	11.90%	40	19.05%	33	15.71%	24	11.43%	17	8.10%
D	0	0.00%	4	1.90%	2	0.95%	4	1.90%	4	1.90%
未作答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%
總計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%

2.2 雙向細目表（two-way specification tables）

在挑選優良試題時，雖然可參考試題分析的結果（即難度與鑑別度），但卻不可以作為唯一的依據，還是需要參考雙向細目表兼顧學習目標，選出具有內容效度，即有課程內容代表性的試題，才算是優良試題。Nitko（1983）指出：「挑選優良試題的最好方法，便是兼顧試題分析的實證資料和邏輯分析的結果；有時候，使用邏輯分析的判斷方式（以確保試題具有內容效度），反而比使用單純的試題分析結果（或統計數據）更為重要」（余民寧，民 91）。

所以，除了統計的量化數據，本研究亦將從質性的角度分析整份試卷與逐題分析，而為更清楚做整份試卷的質性分析，本研究將建立九十六學年度第二學期微積分會考試題的雙向細目表。

2.2.1 效度（validity）

教材目標與教學內容是確立內容效度的兩個重要層面。余民寧（民 91）指出，內容效度最能夠反應出測驗是否可以測量出所要測量的特質內容，並可用來作為分析建構效度的基本證據。一般而言，可觀察其試題是否涵蓋所有教學目標和教材內容、是否根據雙向細目表來命題、是否具有足夠的代表性試題，來檢驗該測驗是否具備內容效度。

建立內容效度的方法之一是邏輯的分析方法，其作法是邀請學科或測驗專家，針對雙向細目表，判斷測驗是否符合教材內容所涵蓋的範圍及教學目標。如果測驗是測量教材內容和測量預期行為改變的代表性樣本，且不受其他如閱讀能力、指導語不清楚等無關因素的影響的話，則一份測驗具有良好的內容效度代表其雙向細目表中的題數可以反應出每項教材主題與教學目標的相對重要性。由邏輯的分析方法而得的內容效度又稱為「理性的或邏輯的效度」（rational or logical validity）（余民寧，民 91）。

因此，本研究將從雙向細目表著手，將試題填入雙向細目表後，由數位目前任教於大學之教授審查試題是否符合其所對應之學習目標與試題類型，以三角校正建立專家效度。

2.2.2 學習目標（learning object）

「能力指標」是把學生應具備的能力項目，轉化為可以觀察評量的具體數據，以反應其學習表現（楊思偉等，民 88）。這是因為「能力」是不易取得共識的抽象概念，必須用可測量或可觀察的指標來指出或表徵（洪瑞鎂，民 90）。另一方面，也必須透過測驗探究受試者所具備的能力，設計能力指標與適當反應該能力指標的試題，以便由學生答題情形，推論出學生是否具備該指標所指之能力（黃美芳等，民 96）。

余民寧（民 91）表示，學習目標是教學評量的主要依據，與選擇教材教法的依據。而用具體的學習目標來取代概括性的教育目標，有下列幾項重要的理由（Nitko, 1983）：

1. 學習目標可以讓教師與課程設計者能清楚瞭解自己的教育目標。
2. 學習目標有助於學生、家長、教師、或學校行政人員間溝通教學的目的。
3. 學習目標可做為分析教材及設計學生行為的依據。
4. 教師能夠根據具體描述行為表現的學習目標以評量教學的效果。
5. 可用學習目標和家長澄清教育目標的觀念。
6. 可利用學習目標讓學生知道對其學習和表現行為的預期。
7. 學習目標使得個別化教學更為容易。
8. 教師可利用學習目標來評鑑與修正教學過程及教學目的。

教師常自編測驗以瞭解學生的學習是否達成教學目標，或是否有困難。為避免可能測量到不是所要的行為，教師應在欲編測驗之前，知道所欲測量的行為是什麼。而具體的學習目標對於教師自編測驗有下列的價值（郭生玉，民 82）：

1. 知道所欲觀察的具體行為，可以幫助測驗程序之計畫。
2. 根據對具體行為的瞭解以進行測驗的選擇、設計及編製。
3. 對具體教學目標的瞭解有助於評鑑現有測驗的品質。
4. 必須知道測驗所欲測量的行為層面，才能適當地判斷測驗的內容程度。

所以，有具體的學習目標才能知道所欲測量的行為，進而設計試題來進行評量。

微積分為許多高等教育學科所需具備之基礎概念與應用工具，依據交通大學微積分

教學小組公告於網站上之資料，微積分會考之定位為一基本能力測驗，評量學生是否具備基本的能力。因此，應有適切的學習目標，才能檢核會考試題的品質與內容效度。

有暨於微積分課程並不如國高中課程有統一制定的學習目標與教材，本研究將針對微積分下學期課程，涵蓋無窮數列與級數、空間幾何與向量函數、多變數微分、多重積分等課程單元，建立具備專家效度的學習目標。

2.2.3 雙向細目表（two-way specification tables）

郭生玉（民 71）表示：「使用行為目標評鑑認知領域的學習，無論是整個學科的評鑑，或是只有一個單元的評鑑，通常須使用『雙向細目表』來擬定完整的教學計畫」。而雙向細目表在試題分析方面的功用如下（顧介梅，民 91）：

1. 雙向細目表可作為命題改善的研究。
2. 命題教師可根據雙向細目表來編寫試題，以釐清教學目標和學習內容的關係，確保測驗能反應實際教材內容，並夠評量到預期之教學目標。
3. 可利用雙向細目表檢核試題是否符合課程內容和教學目標。
4. 可由試題在雙向細目表之分布情形檢核各教學單元中所佔試題比例是否恰當。

本研究將建立針對交通大學微積分下學期課程的學習目標作為雙向細目表的縱軸。而在橫軸的部份，研究者先參考大學學科能力測驗數學考科的試題分析，將試題分為概念性、程序性與解題能力等三方面的知能，其意涵分述如下（朱惠文，民 96）：

1. 概念性
   (1) 能辨識某概念的正、反例
   (2) 能利用模型、圖形和符號表達某概念
   (3) 能確認概念中基本的數學原理

(4) 知道定義的條件或性質

(5) 能聯結某概念不同的表現形式

(6) 能整合各種概念間的關係

(7) 能從不同情境中，辨識與解釋符號所表達的概念

(8) 能解釋問題中的條件所涉及的概念

(9) 診斷錯誤概念

2. 程序性

(1) 能操作數與符號的運算及估算

(2) 能正確選選擇適當的程序

(3) 能讀圖、查表、製作圖表

(4) 能檢驗所用的程序無誤

3. 解題能力

(1) 能從情境中辨識數學元素並形成問題

(2) 能瞭解條件的充分性與一致性

(3) 能應用適當的定義、定理或性質

(4) 能使用相關的數學知識或策略轉換問題

(5) 能使用或修改或推廣程序

(6) 能運用推理能力

(7) 能檢驗結果的合理性與正確性

(8) 能使用數學語言表達解題過程

此分類方式在美國「國家教育進展評量委員會」（NEAP（The National Assessment of Educational Progress,2003））的數學能力評量架構（NAEP (NAGB, 2002)）中亦有類似看法，根據黃美芳等（民 96）等學者指出，此架構是由數學教育家們經過嚴慎地建立共識過程後所得之結果，將數學能力（mathematical abilities）分為概念的了解（conceptual understanding）、程序性知識（procedural knowledge）、與問題解決（problem solving）

三種類型。此外，國際教育成就評鑑協會（The International Asssociation for the Evaluation of Educational Achievement, IEA）成立至今，做過多次大規模的跨國調查研究。自 1990 年起推動「第三次國際數學與科學教育成就研究」（Third International Mathematics and Science Study, TIMSS）共計有 41 個國家參與。目前 TIMSS（The Trends in International Mathematics and Science Study,2003）的評量架構主要是從數學活動的角度來看數學能力，著重在學習數學概念、過程技巧與解題活動中所需的能力，認為數學能力可以從學生解題整個流程發現。

此外，根據美國加州公立學校數學課程綱要（n.d.），數學的精熟度需要計算、應用等的程序性技能與理解定義、定理等的概念性知識這兩種能力，且兩者會互相影響。更新的研究發現，解題活動可以促進學生獲得程序性技能與概念性知識，與增加解題策略的熟練度（Siegler and Stern 1998; Sophian 1997）。其中，概念性、程序性與推理能力的內涵如表 2-7。（戴政吉譯。http://mathed.ntcu.edu.tw/person/lh/）

表 2-7、概念性、程序性與推理能力的內涵

要達到的目標		
概念性能力	**程序性能力**	**數學推理能力**
知道要做什麼	知道怎麼做	知道何時及何地去做
非常瞭解如何達到目標（清楚某些特定程序可以達到目標）	能真正達到目標的行為	非常瞭解在情境脈絡中可行的概念性能力和程序性能力

資料來源：http://mathed.ntcu.edu.tw/person/lh/加州公立學校數學課程綱要

綜觀前述，本研究將採用概念性、程序性與解題能力等三方面之分類，並根據微積分學科之特性與大學生應具備之層次與能力做細項區分，以建立針對微積分課程的試題類型建立雙向細目表。

第三章　試題分析

本研究是以古典測驗理論為研究的基礎，對「九十六學年度第二學期微積分會考試題」所提供的考生測驗資料進行統計分析，以探討個別試題和整份測驗的特性，並以微積分學科角度進行個別試題的內容分析，冀希能提出更全方位的檢核與建議。

而為評估九十六學年度第二學期微積分會考試題是否理想，本章將從效度、難易度與鑑別度等三個向度探討。第一節先建立學習目標以瞭解本測驗是否合乎其目標；而為對整份試卷做更清楚的質性分析，將於第二節建立雙向細目表；第三節則結合質與量，從各試題所測內容與學生作答情形的統計數據做逐題的分析；第四節則依各試題在雙向細目表的分布情形，對整份試卷進行分析。

3.1 學習目標

本研究者以交通大學修習微積分課程之學生為程度評估之對象，根據微積分教學小組網站給定的課程綱要（如附錄一），先以微積分題庫小組成員編寫之學習目標為基準，將其翻譯並改寫為具體可測之學習目標，再根據 James Stewart 編寫的 Calculus (Early Transendentals), 6th Edition 課本內容、例題、與每章節最後的習題，加入與擴充學習目標的內容，並參酌由微積分教學小組網站給定的共同習題與近幾年的微積分會考試題，增訂與刪除部份目標，經過與學科專家不斷地討論與修改，訂定學習目標的初稿，再利用三角校正，請多位學科專家評定給予建議並修改，建立具專家效度的學習目標（如附件六）。

3.2 雙向細目表

為了更清楚整份試卷的質性分析，本節將建立雙向細目表以評估試卷的適切性，以

前一節針對微積分課程建立具備專家效度的學習目標為縱軸，並依據課程之特性建立試題分類的類型，以作為雙向細目表的橫軸。

在試題類型方面，本研究參考各學者將數學能力分為概念的了解、程序性知識、與問題解決三種類型。除此之外，有暨於微積分學科之特性與大學生應具備之層次與能力，本研究以交通大學微積分小組召集人余啟哲老師在評估歷年會考試題後，以其教學經驗訂定的「定義／驗證」、「定理／推論」、「計算／應用」、「其他」、「圖形」等五大分類為基本架構，並與學科專家訪談，刪掉「其他」類別與新增「解題」類別，將試題類型修訂為「定義／驗證」、「定理／推論」、「計算／應用」、「圖形」、「解題」等五大類。

根據研究者與余老師的訪談結果，這是將微積分試題做概略的歸類，以「定義」、「定理」等教學內容為主要的區分。因「定義」類的試題未必都屬於「驗證」，「驗證」與「推論」等只是輔助性的搭配，此寫法之考量是用來說明考題可能的形式與搭配說明能出什麼樣的題目，以避免使用者誤會，如「將定義做一個述說」的題目雖未直接考定義，仍應歸屬於「定義／驗證」類別之中。

此外，因微積分試題往往涵蓋不止單一的類型，故可將試題同時填入多種類別，如需畫出圖形才能計算的多重積分問題，即同時涵蓋「計算／應用」與「圖形」兩種類型。以下將針對各類型做簡單的描述介紹：

1. 「定義／驗證」指利用定義或用定義來驗證之題型，包含證明等觀念性的題目，測驗學生對數學概念是否瞭解。如在無窮級數與極限單元中，需利用 $\varepsilon-\delta$ 之概念以求 δ 範圍的題目；或多變數微分單元中，若偏微分均存在且連續，欲判斷函數是否可微的題目等均屬此類。
2. 「定理／推論」指利用定理解題或需利用定理推論後之性質的題型，或是稍微有衍生變化的情形。如多重積分單元中的變換積分順序；或多變數微分單元中，當可微分時問是否連續等題目均屬此類。
3. 「計算／應用」指從定義、定理衍生的應用計算，偏向單純計算或執行程序性問題的題目。如利用拉格朗日乘數法（Lagrange multiple）計算極值；或單純

連鎖率與單純積分等程序性問題均屬此類。

4. 「圖形」包含題幹或選項有圖形，或解題過程中必須畫出圖形題目，如極座標或多重積分等題目。此為抽象性代數數學外，特地獨立列出的一環。因圖形題的命題難度較高，故在一般測驗中較為少見。余老師指出，許多學生雖然能夠執行程序性計算但卻不能解讀概念的圖形，因此，圖形部份是大學生較需加強部份。
5. 「解題」係指學生在看到試題後無法馬上判斷出解題策略，需先思考或將概念連結轉換後才能執行的題目，是連結不同概念與計算或推理轉換等能力的解題性問題。通常為綜合型，包含概念與計算的題型；或邏輯思考與基本題型不同之試題。

此外，依據各類型的其性質可將「定義／驗證」、「定理／推論」、「圖形」歸屬於概念性問題，「計算／應用」為程序性問題，「解題」則為解題性問題，依此將兩種試題類別合併進行。

表 3-1、雙向細目表之架構

學習目標		類型／題號	概念性			程序性	解題性
			定義／驗證	定理／推論	圖形		
11 無窮數列與級數	11－1 數列	11－1－1					
		11－1－2					
		11－1－3					
		11－1－4					
		11－1－5					
		11－1－6					
	11－2 級數	11－2－1					
		11－2－2					

		11－2－3					
		11－2－4					
		11－2－5					
		11－2－6					

依據上述完成之學習目標與試題類型，將其分別列為縱軸及橫軸，建立專對交通大學微積分課程的雙向細目表，其架構如表 3-1。下節將針對整份試卷逐題分析，以依據分析結果建立九十六學年度第二學期微積分會考試題的雙向細目表。

3.3 個別試題分析

本研究由學生的作答情形，依據古典測驗理論製作各題的各組各選項選答情形等統計資料（請見附錄四），並針對每一試題繪製了各等級答對率折線圖、鑑別度總表、五等分組考生各選項選答情形表、全體暨高低分組考生各選項選答情形表、與各等級作答情形直條圖等五種圖表，並於正確選項的右上方註以星號標記。

除了量化部份，在質性方面，則根據試題內容寫出其測驗目標與試題分析，從解題步驟、涉及概念或執行程序等方面，以微積分學科的角度解構試題。附錄七為本研究針對九十六學年度第二學期微積分會考試題逐題以上述質與量的角度做個別試題分析。

3.4 整卷分析

本節將先把個別試題分析後的試題資訊填入 3.2 建立之雙向細目表，並請數位大學教授審查試題是否符合其所對應之學習目標與試題類型，以完成九十六學年度第二學期微積分會考試題具有專家效度的雙向細目表如表 3-2。

表 3-2、九十六學年度第二學期微積分會考試題之雙向細目表

96 下　考題雙向細目表　（一般題用**粗體紅字**題號，跨域題用**粗體黑字**題號）

學習目標		題號	概念性			程序性	解題性
		類型	定義／驗證	定理／推論	圖形	應用／計算	解題
11 無窮數列與級數	11－1 數列	11－1－1		複選第 1 題			
		11－1－2		複選第 1 題			
		11－2－2					單選第 2 題
		11－2－3				複選第 2 題	單選第 2 題
		11－2－5		複選第 1 題		單選第 1 題	單選第 2 題
		11－2－6				複選第 2 題	
		11－2－7				複選第 2 題	單選第 2 題
		11－2－8		複選第 1 題		單選第 1 題 複選第 2 題	單選第 2 題
		11－2－9				複選第 2 題	
		11－2－11	複選第 2 題	複選第 1 題			
		11－2－12					複選第 2 題
	11－3 冪級數	11－3－2				單選第 1 題	
		11－3－3					單選第 2 題
		11－3－5				單選第 1 題	單選第 2 題
	11－4 冪級數表示法	11－4－3				填充第 2 題	
		11－4－6				填充第 2 題	
13 向量函數	13－1 向量函數與空間曲面	13－1－3				填充第 1 題	
		13－1－6				單選第 3 題	
		13－1－7		單選第 3 題		單選第 3 題	
14 偏導函數	14－1 極限與連續性	14－1－2		複選第 4 題			
		14－1－5				單選第 4 題	
	14－2 切平面等	14－2－1	複選第 4 題			複選第 4 題	
		14－2－3		複選第 3 題			
		14－2－7		複選第 4 題			
	14－3 連鎖律	14－3－1				填充第 3 題	
	14－4 方向導數等	14－4－8		複選第 3 題 複選第 4 題			
	14－5 多變數的極值	14－5－1				複選第 5 題	
		14－5－2				複選第 5 題	
		14－5－6				填充第 4 題	
15 多重積分	15－1 二重積分	15－1－1			單選第 5 題		單選第 5 題
		15－1－3			填充第 5 題		
		15－1－4				填充第 5 題	
		15－1－5				單選第 5 題 單選第 10 題	
		15－1－7			單選第 6 題 單選第 7 題	單選第 6 題 單選第 9 題	
		15－1－8				單選第 9 題	
		15－1－9				單選第 9 題 單選第 10 題	
	15－2 三重積分	15－2－3			單選第 8 題		

再根據雙向細目表，從試題結構、試題類型等角度探討整份試卷的內容效度與專家效度。並由統計數據、成績分佈圖、鑑別度散佈圖等，從質性與量化的角度說明整份試卷的難易程度與鑑別能力，以回答本研究之待答問題。

3.4.1 效度分析

1. 試題結構

測驗是為反應教學成效進而改善教學，各單元在測驗中的命題數當然必須配合課程編排的比重才較為合理。本研究將 96 學年度下學期微積分課程分為四個單元，無窮數列與級數(第 11 章)，空間幾何與向量函數(第 12 及 13 章)，多變數微分(第 14 章)，多重積分(第 15 章)。根據交通大學微積分教學小組網站給定的課程綱要(如附錄一），無窮數列與級數單元建議的授課時數為 14 小時，空間幾何與向量函數單元建議的授課時數為 9 小時，多變數微分單元建議的授課時數為 16 小時，多重積分單元建議的授課時數為 11 小時。

表 3-3、微積分各單元授課時數百分比

課程單元	時數(hr)	百分比(%)
無窮數列與級數	14	28
空間幾何與向量函數	9	18
多變數微分	16	32
多重積分	11	22
小計	50	100

資料來源：微積分小組、本研究整理

根據雙向細目表可將九十六學年度第二學期微積分會考的單元配置整理如表 3-4。無窮數列與級數單元有五題，佔分比例百分之二十五；空間幾何與向量函數單元有二題，佔分比例百分之十；多變數微分單元有六題，佔分比例百分之三十；多重積分單元有七題，佔分比例百分之三十五，比重最大，單選題第 5 題至第 10 題均為多重積分。

表 3-4、九十六學年度第二學期微積分會考各題的單元配置

課程單元	題數	題號	佔分比例
無窮數列與極限	5	單選第 1, 2 題； 複選第 1, 2 題； 填充第 2 題	25%
空間幾何與向量函數	2	單選題第 3 題； 填充題第 1 題	10%
多變數微分	6	單選題第 4 題； 複選題第 3, 4, 5 題； 填充題第 3, 4 題	30%
多重積分	7	單選題第 5, 6, 7, 8, 9, 10 題； 填充題第 5 題	35%

資料來源：本研究整理

表 3-5、各單元授課時數百分比暨微積分會考單元配置對照表

課程單元	時數(hr)	百分比	佔分比例
無窮數列與級數	14	28%	25%
空間幾何與向量函數	9	18%	10%
多變數微分	16	32%	30%
多重積分	11	22%	35%

資料來源：本研究整理

比較各單元授課時數與九十六學年度第二學期微積分會考試題單元配置如表3-5，多重積分單元建議的授課時數佔學期授課時數的百分之二十二，但會考佔分比例達百分之三十五，比例明顯偏高；無窮數列與級數及多變數微分兩單元的授課時數百分比與會考佔分比例之差距均不大；空間幾何與向量函數單元建議的授課時數佔學期授課時數的百分之十八，會考佔分比例只有百分之十，比例略少。部分重要概念的章節，在本次會考反而並未有題目，如梯度與方向導數等章節；而多重積分單元中，單選第 6、7 題均為極座標轉換之問題，單選第 9、10 題均為表面積問題，題目的同質性過高。

2. 試題類型

由雙向細目表可觀察本試卷的題型分佈如表 3-6，由研究者主觀地將各試題依試題內容與解題程序分為概念性、程序性、與解題性等三類。其中，概念性理解的題目有十一題；程序性知識的題數有十五題。

雖然概念的理解在學習數學是非常重要的一環，但概念性問題並不容易命題，尤其是圖形的部份，一般常見多為程序性的計算。而九十六學年度第二學期微積分會考試卷的概念性問題並不少，主要是因為多重積分單元的佔分比重較大，在求積分區域時用到了圖形的概念。概念性問題包括評量多變數函數連續、可微、偏導數存在之間蘊含關係的複選第 3 題，與需利用空間概念畫出二重積分區域以計算體積的單選第 5 題等數題。程序性問題分布於各單元，包含求收斂區間的單選第 1 題、求向量函數極限的填充第 1 題、執行連鎖率程序性計算的填充第 3 題，與求表面積的單選第 9 題等各題。而問題解決類的題目共計有 3 題，分別為單選第 2 題，題目給定收斂區間，要判斷級數中的參數，其解題邏輯較一般收斂區間的問題不同；複選第 2 題，要選擇適當的檢驗法判斷級數的斂散性，解題過程需瞭解絕對收斂與條件收斂等的蘊含關係；與單選第 5 題，須具備空間概念判斷積分區域，以利用多重積分計算體積的應用問題。此三題屬於解題性的問題。

表 3-6、九十六學年度第二學期微積分會考試題類型分佈

類型／題號／學習目標	概念的理解		程序性的知識		問題解決	試題總數
	定義／驗證	定理／推論	圖形	應用／計算	解題	
無窮數列與級數	複 2	複 1		單 1、複 2、填 2	單 2、複 2	5
空間幾何與向量函數		單 3		填 1、單 3		2
多變數微分	複 4	複 3、複 4		單 4、複 4、複 5、填 3、填 4		6
多重積分			單 5、單 6、單 7、填 5、（單 8）	單 5、單 6、單 9、單 10、填 5	單 5	7
總題數	2	4	5	15	3	

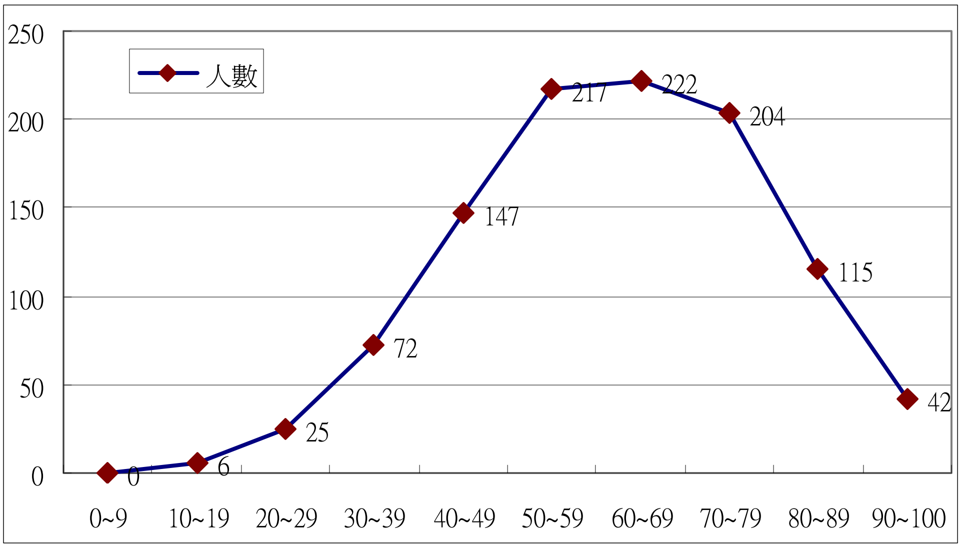
資料來源：本研究整理

單 1 表示單選第 1 題，複 3 表示複選第 3 題，填 5 表示填充第 5 題，其餘依此類推

有加底線的題號為跨域題，代表包含不同單元之概念或結合二種以上之試題類型

3.4.2 難度與鑑別度分佈

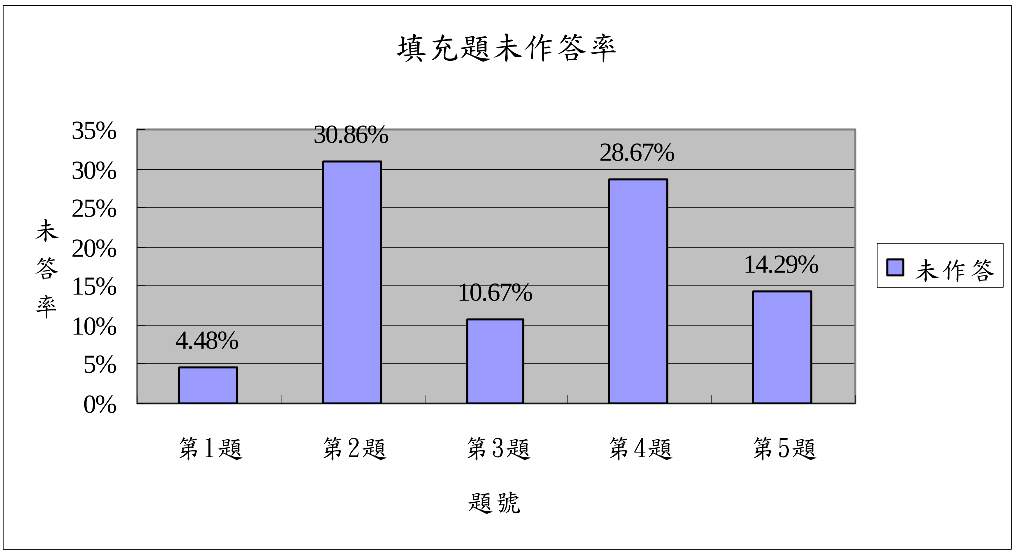
九十六學年度第二學期微積分會考的考生成績分布在13分至100分之間，平均成績61.75分，標準差16.46非常大，表示學生的成績非常分散，程度差異不小。圖3-1為考生成績分布圖。



資料來源：本研究整理

圖3-1、九十六學年度第二學期微積分會考成績分布圖

由圖3-1可看出，全體考生成績分佈曲線偏右，中位數與眾數均落於六十分至六十九分的及格區間內。由圖可算出預期區分的後百分之二十五的學生，其成績最高在五十至五十九分的區間內，而六十分以下的學生仍有467人，約佔所有考生人數的百分之四十四，這與微積分課程希望僅當約四分之一的學生之定位尚有差距。



資料來源：本研究整理

圖 3-2、填充題未作答比例直條圖

若觀察學生未作答情形，由各組各選項作答情形（如附件四）可看出，單選題共有六題有學生未作答的情形，其中，單選第 5 題的未作答比例最高，為百分之零點三八；複選題無學生未作答；填充題未作答率最高的是填充第 2 題，未作答比例有百分之三十點八六。

由於填充未作答代表學生對該題毫無概念或未能完成，進一步觀察填充各題的未作答比例，由圖 3-2 可看出填充第 1 題的未作答比例僅百分之四點四八，表示絕大部分學生都能執行計算向量函數極限的程序；而填充第 2、4 題的未作答比例則高達百分之三十點八六與百分之二十八點六七，試題分別為

填充第 2 題－Find the first four terms ___(2)____ of the Maclaurin series of

$$f(x)=\frac{\cos x}{1-x}$$

填充第 4 題－____(4)____ is the highest point on the plane curve that is given by the intersection of $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$.

顯示學生對於求函數的馬克勞林級數（Maclaurin series）與利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）求解多變數函數極值的應用問題此兩程序較不熟悉。

從試題難易度的分佈情形來探討整份試卷的難易。本研究採用Ebel與Frisbie（1991）的難易度等級表（如表2-1）與鑑別度評鑑標準（如表2-2）分別作為試題難易度與鑑別度的判斷準則。

表3-7為全體考生各題的難易度（P值）與鑑別度（D值）指數，並依試題難易度，由易至難排列。(各組各題的答對率總表請見附錄二；各組各題的鑑別度總表請見附錄三)。若題型為單選題與填充題，則答對率P值為答對該題的學生比例；若為複選題，則答對率P值指該題的加權平均，即全對的學生比率加上得部分分的學生比例乘上零點六。鑑別度D值則為高、低分組考生的答對率之差。

表3-7、九十六學年度第二學期微積分會考試題*P*、*D*值（依*P*值大小排列）

題號	*P* 值(%)	*D* 值
單選題第 8 題	88.76	0.2352
單選題第 3 題	86.00	0.2035
單選題第 4 題	85.90	0.2399
單選題第 10 題	84.19	0.3501
單選題第 9 題	83.24	0.4225
單選題第 6 題	82.38	0.3249
單選題第 1 題	81.52	0.4338
單選題第 7 題	74.29	0.3318
複選題第 5 題	72.17	0.3350
填充題第 1 題	69.24	0.4982
複選題第 2 題	67.09	0.5339
複選題第 4 題	64.10	0.5017
填充題第 5 題	53.81	0.7023
複選題第 3 題	52.99	0.3050
單選題第 5 題	48.38	0.5699
單選題第 2 題	41.24	0.4520
填充題第 3 題	37.24	0.5917
複選題第 1 題	24.65	0.1458
填充題第 4 題	24.00	0.4459
填充題第 2 題	13.81	0.3056

資料來源：本研究結果

由表 3-7，全卷答對率最高的試題是單選第 8 題，答對率約為百分之八十九，為判

斷給定不同積分次序的三重迭代積分是否相同的程序性問題。由於被積分函數為 $f(x,y,z)=1$，學生只要計算出迭代積分即可判斷（B）選項正確；答對率最低的試題為填充第 2 題，答對率僅約百分之十四，學生若不知特殊函數 $\frac{1}{1-x}$, $\cos x$ 的馬克勞林級數，或無法執行寫出函數 $f \cdot g$ 的馬克勞林級數的前 n 項的程序，就無法正確完成此題。

表3-8依Ebel與Frisbie的難易度等級表（如表2-1）將九十六年度第二學期微積分會考試題分為極容易、容易、難易適中、困難、與極困難等五等級，並列出各等級試題實際佔分比例。

表3-8、微積分會考試題難度分布

難易度等級	難易度(P)	題數	題號	佔分比例
極容易	$P \geq 0.80$	7	單選題第 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10 題	35%
容易	$0.60 \leq P < 0.80$	5	單選題第 7 題；複選題第 2, 4, 5 題；填充題第 1 題	25%
難易適中	$0.40 \leq P < 0.60$	4	單選題第 2, 5 題；複選題第 3 題；填充題第 5 題	20%
困難	$0.20 \leq P < 0.40$	3	複選題第 1 題；填充題第 3, 4 題	15%
極困難	$P < 0.20$	1	填充題第 2 題	5%

資料來源：本研究整理

由表3-8，答對率在百分之八十以上，難易度等級屬於極容易的試題有七題，佔分比例達百分之三十五，比重最重；各難度等級的試題數隨難易度(P)降低（即越困難）而減少。而答對率在百分之六十以上的題目共有十二題，佔分比例百分之六十；換句話說，若學生能答對此十二題，就可得到六十分之會考成績。然而，由圖3-1，成績在六

十分以上之人數只達約百分之五十六的學生。由此也能看出本份試卷尚未達到會考通過學生能有百分之七十五的預期。

所以，若希望達到能有四分之三的學生能通過此測驗學生是否具備基本能力的微積分會考，勢必必須加重基本與簡單的題目佔分比例，使答對率大於百分之七十五的題目達六十分，而由表3-7，本卷答對率在百分之七十五以上的題目共有七題，佔分僅三十五分。就試題內容來看，此七題中有超過一半的題目為多重積分單元，分別為單選第6、8、9、10題；其餘單元各有一題，分別為無窮數列與極限單元的單選第1題，空間幾何與向量函數的單選第3題、多變數微分單元的單選第4題。

表3-9將試題依D值依Ebel與Frisbie的鑑別度評鑑標準分為非常優良、優良、尚可、極不佳的試題等四等級，並列出各等級試題實際佔分比例。由表3-9，九十六學年度第二學期微積分會考試題，評鑑為非常優良、優良、尚可、劣之試題所佔比例依次為百分之五十、百分之三十、百分之十五、與百分之五。有百分之八十的試題鑑別度達優良以上的等級，且有一半的試題鑑別度達非常優良，顯示大部份題目的鑑別度都很好。

表3-9、微積分會考試題鑑別度分布

試題評鑑	鑑別度(D)	題數	題號	佔分比例
非常優良	$D > 0.40$	10	單選題第 1, 2, 5, 9 題；複選題第 2, 4 題；填充題第 1, 3, 4, 5 題	50%
優良	$0.30 \le D < 0.40$	6	單選題第 6, 7, 10 題；複選題第 3, 5 題；填充題第 2 題	30%
尚可	$0.20 \le D < 0.30$	3	單選題第 3, 4, 8 題	15%
劣	$D < 0.20$	1	複選題第 1 題	5%

資料來源：教育測驗與評量：成就測驗與教學評量，余民寧，民 91，臺北市：心理、本研究整理

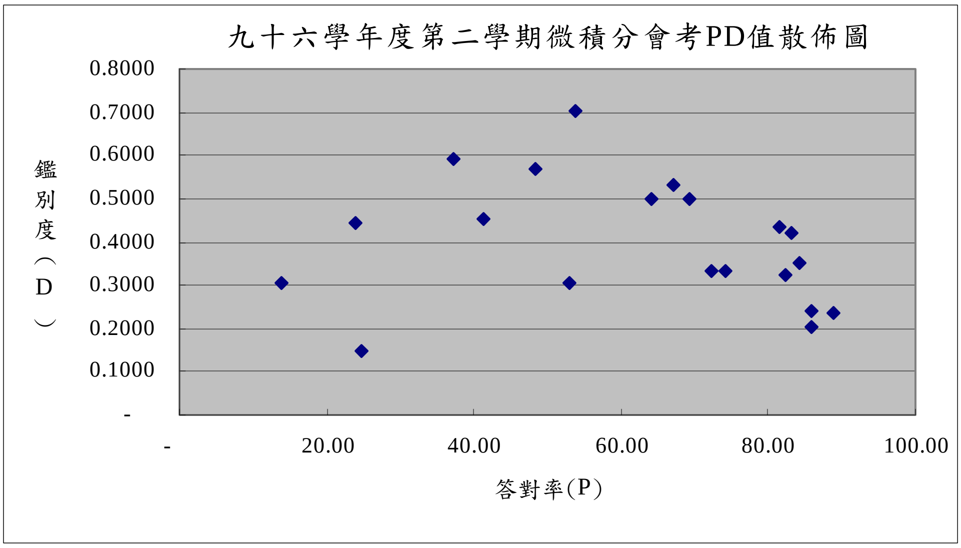


圖 3-3、答對率與鑑別度的散佈圖

圖 3-3 為各題答對率與鑑別度的散佈圖，可看出答對率在百分之六十以上的題目有十二題，鑑別度約介於 0.2 至 0.5 之間，其中答對率約在百分之七十五以上的九題，為密度最高的區域，亦屬於學生應答對的基本簡單題，本研究將在後續針對這些題目分組比較其答對率折線圖。為瞭解分布題號以做進一步分析，圖 3-4 畫出答對率與鑑別度的雙軸折線圖，可看出這九題由答對率從高至低排列分別為單選第 8、3、4、10、9、6、1、7 題，與複選第 5 題；而圖 3-3 左下角鑑別度最低的點可由圖 3-4 藍色曲線的最低點相呼應，為複選第 1 題，其答對率僅約 20%；鑑別度最高的點為填充第五題，其答對率約為所有考生中的一半。

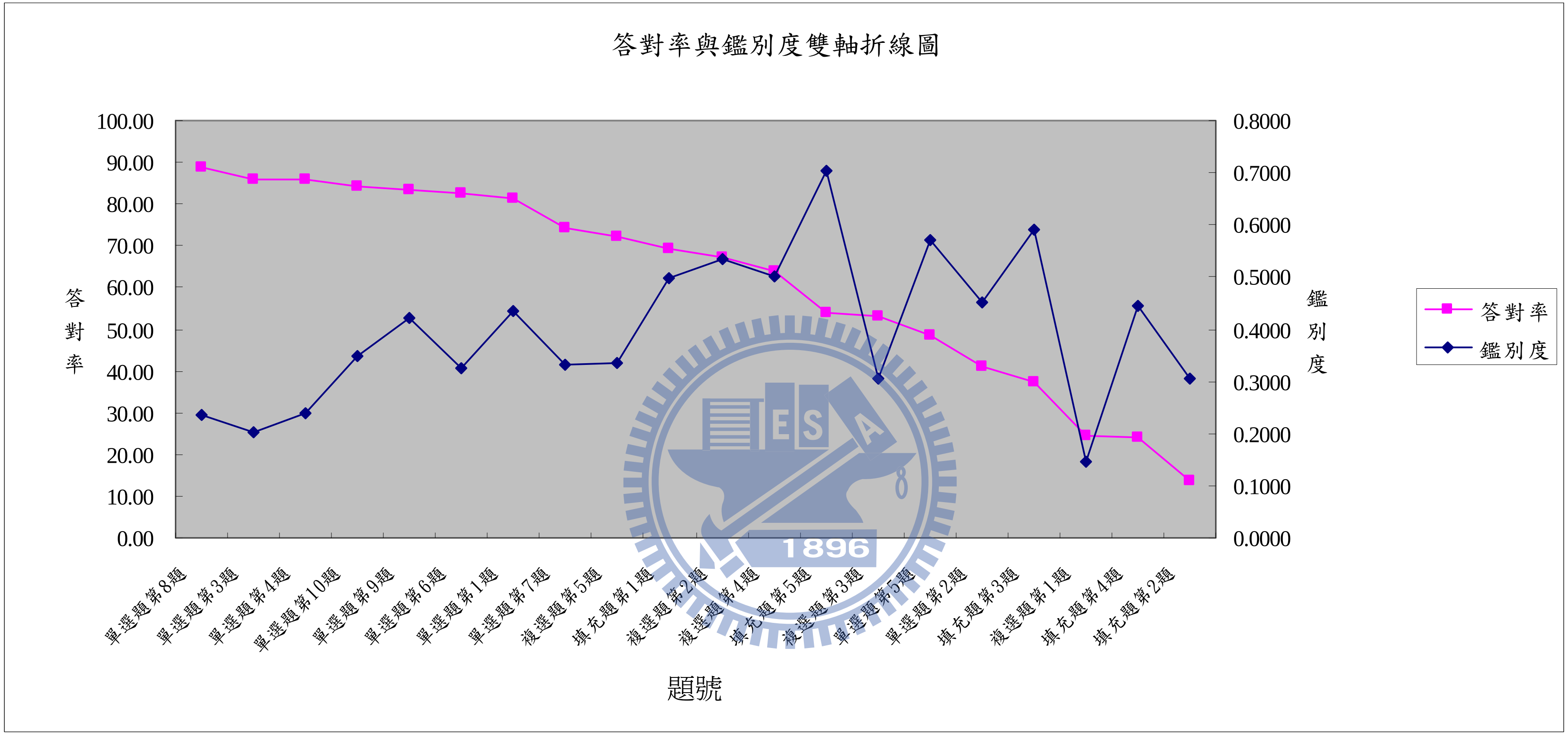


圖 3-4、答對率與鑑別度的雙軸折線圖

資料來源：本研究結果

將圖 3-4 所得結果整理於表 3-10，可得九十六學年度第二學期微積分會考試題的難易度與鑑別度分佈表，由表中可看出共有一半的題目鑑別度超過 0.40，鑑別等級為非常優良，其難易度平均分散在各等級中，分別為單選第 1、2、5、9 題、複選第 2、4 題，與填充第 1、3、4、5 題等十題。

而根據Noll, Scannell & Craig（1979）的界定，「一般可接受的最低標準至少為0.25以上，低於此標準者，即可視為鑑別度不佳或是品質不良的試題」（余民寧，民91）。由附錄三的各題鑑別度指數來看，評量向量導數與向量外積的單選第3題、計算雙變數函數極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ 的單選第4題、判斷不同積分次序的三重迭代積分是否相同的單選第8題，與評量學生是否能判斷無窮數列（或級數）各項性質的邏輯關係的複選第1題這四題的鑑別度均未達0.25。

再根據試題難易度與鑑別度分布表（如表3-10），單選第3、4、8等三題雖鑑別度等級僅為尚可（$0.20 \le D < 0.30$），但難易度均為極容易（$P \ge 0.80$）表示為基本與簡單的題目，故本研究建議可將其保留但做些修改（請見3.3個別試題分析）；複選第1題的鑑別度等級為極不佳（$D < 0.20$）且難度等級為困難（$0.20 \le P < 0.40$），但由各組各題的鑑別度總表（如附錄三），雖其對第c、d兩組有小幅的負鑑別力（$D = -0.0095$），但對第a、b兩組的學生有很好的鑑別能力（$D1 = 0.1839$），本研究建議可將其做大幅修改後保留（請見3.3個別試題分析）。

此外，對照表 3-10 與表 3-4 微積分會考各題的單元配置，各單元均包含至少一題鑑別度非常優良且難度為容易或極容易之試題，表示本份試卷能鑑別學生各單元的學習情形。

表3-10、九十六學年度第二學期微積分會考試題難易度與鑑別度分布表

試題題號／試題評鑑 難易度等級／題數(比重)	非常優良 （0.40 以上）	優良 （0.30 以上，未滿 0.40）	尚可 （0.20 以上，未滿 0.30）	劣 （未滿 0.2）	合計題數
極容易（0.80 以上）	單選題 第 1、9 題 2 題(10%)	單選題 第 6、10 題 2 題(10%)	單選題 第 3、4、8 題 3 題(15%)		7
容易（0.60 以上，未滿 0.80）	複選題第 2、4 題；填充題第 1 題 3 題(15%)	單選題第 7 題；複選題第 5 題 2 題(10%)			5
難易適中(0.40 以上，未滿 0.60)	單選題第 2、5 題；填充題第 5 題 3 題(15%)	複選題第 3 題 1 題(5%)			4
困難（0.20 以上，未滿 0.40）	填充題 第 3、4 題 2 題(10%)			複選題第 1 題 1 題(5%)	3
極困難（未滿 0.2）		填充題第 2 題 1 題(5%)			1
合計題數	10	6	3	1	20

為了進一步瞭解此份試卷針對不同的考生群的差異性，本研究將考生群分成五組，比較各組的答對率，可看出不同試題所能區分的考生群不完全一樣。

而為瞭解本試卷的鑑別情形能否回應微積分會考欲區分出成績在後百分之二十五的學生之定位，本研究依據表 3-10 與表 3-7 試題 *P*、*D* 值將試題依答對率分為三類（如

表 3-11）：A 類（如圖 3-5（A））為答對率有百分之七十五以上的試題，為試題難度分布（如表 3-10）中，全部難易度等級為極容易之試題與部份難易度等極為容易之試題，計有單選第 1 題等七題；B 類（如圖 3-5（B））為答對率百分之六十以上，未滿百分之七十五的試題，其難易度等級均屬於容易，計有單選第 7 題等五題；C 類（如圖圖 3-5（C））為所有難易度等級為困難或極困難之試題，其答對率未滿百分之四十，計有複選第 1 題等四題。

表 3-11、九十六學年度第二學期微積分會考試題答對率分類表

類別	答對率範圍	難易度落點	試題
A	$P \geq 0.75$	容易、極容易	單選第 1、3、4、6、8、9、10 題
B	$0.60 \leq P < 0.75$	容易	單選第 7 題；複選第 2、4、5 題；填充第 1 題
C	$P < 0.4$	困難或極困難	複選第 1 題；填充第 2、3、4 題

資料來源：本研究整理

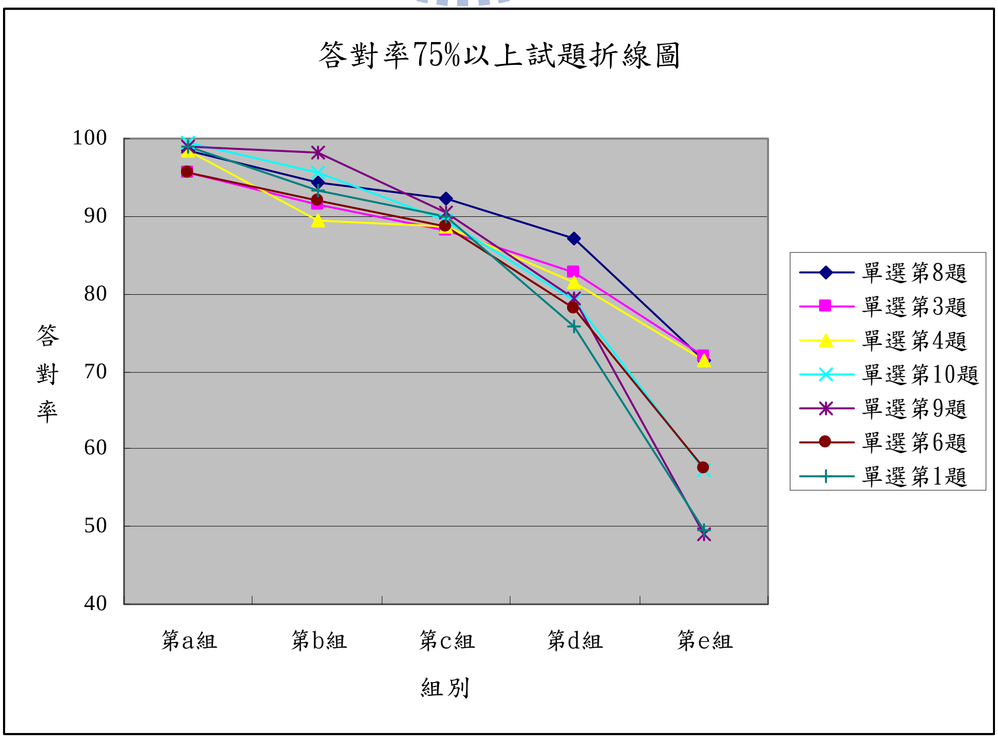


圖 3-5（A）

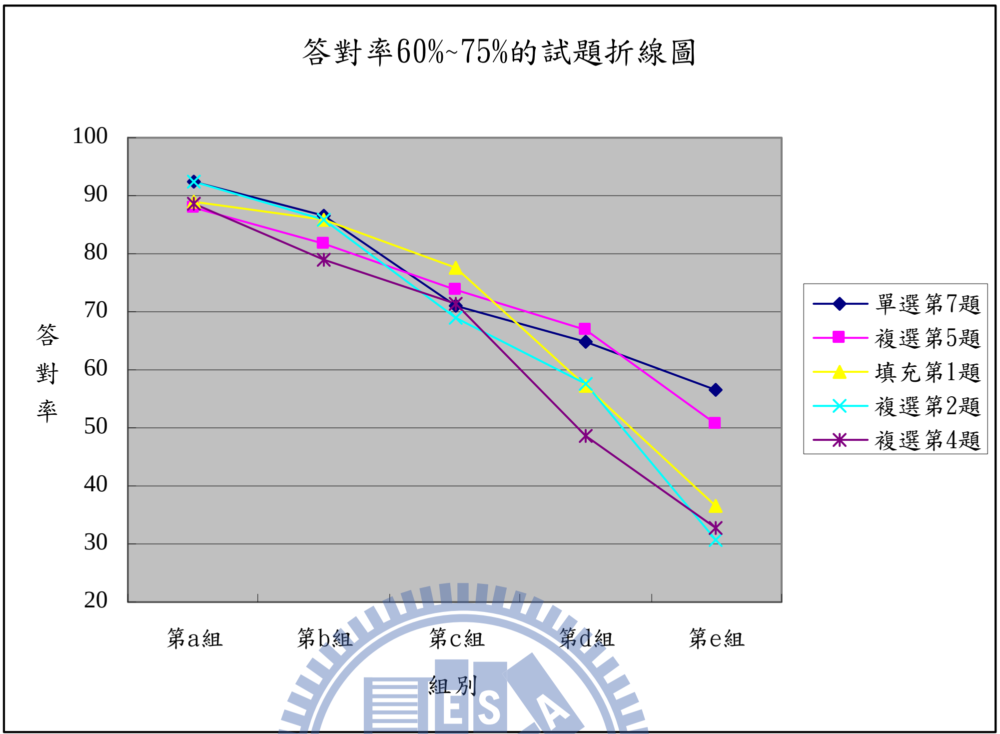


圖 3-5（B）

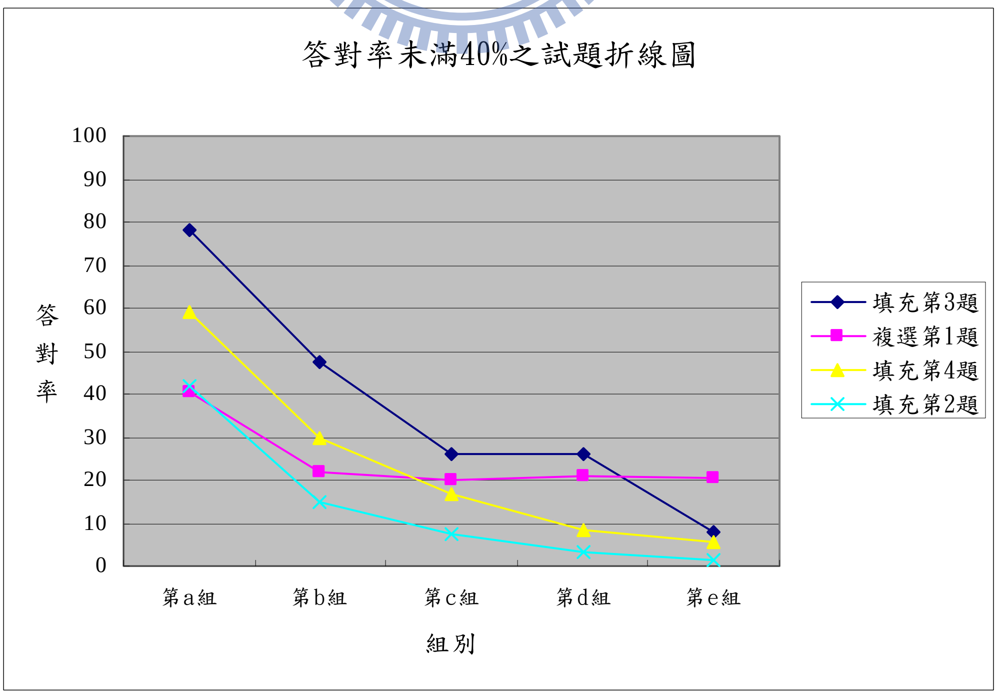


圖 3-5（C）

圖 3-5、區分各類考生的答對率折線圖

圖 3-5（A）為答對率百分之七十五以上的試題，共有七題，佔分三十五分。

由圖可發現，單選第 3、4、8 題三題，所有學生均達六十分以上，表示五組學生都及格，是屬於簡單但鑑別度差的題目。除了單選第 8 題對第 d、e 兩組有不錯的鑑別能力，其餘各組在這三題的鑑別情形都不佳。從內容來看，分別為評量向量導數與向量外積的單選第 3 題、計算解雙變數函數極限的單選第 4 題、與判斷給定不同積分次序的三重迭代積分是否相同的單選第 8 題。

其餘四題對第 c、d 與對 d、e 組間的學生，都有很好的鑑別能力，分別為單選第 1、6、9、10 四題。其中，單選第 1 題為無窮級數與極限單元，其餘三題均為多重積分單元的題目。

圖 3-5（B）為答對率百分之六十以上未滿七十五的試題，分別為計算向量函數極限的填充第 1 題、二重積分極座標轉換的單選第 7 題、評量學生多變數函數連續與微分間蘊含關係的複選第 4 題、多變數函數極值問題的複選第 5 題、與判斷級數斂散性的複選第 2 題。

由圖可見，除了單選第 7 題對第 c、d 與對 d、e 組間的學生鑑別情形不佳，與複選第 5 題對第 c、d 組間的學生亦不佳外，其餘各題對第 c、d 與對 d、e 組間的學生都有很好的鑑別能力。因此，建議可參考個別試題分析將填充第 1 題與複選第 4 題再做修改以提升答對率，作為符合會考需求的基本題。

圖 3-5（C）為答對率小於百分之四十的題目，分別是無窮數列與級數單元中，評量學生是否能判斷無窮數列（或級數）各項性質的邏輯關係的複選第 1 題與寫出馬克勞林級數前四項的填充第 2 題；及多變數微分單元中，有關連鎖率與極值的程序性問題的填充第 3、4 兩題。顯示概念性問題的邏輯推演與計算較為煩瑣或步驟數較多的程序性問題，對學生來說較為困難。

由表 3-10 與表 3-11 觀察此分類中的四題，難度等級為困難的填充第 3、4 兩題，其鑑別度等級均為非常優良，複選第 1 題鑑別度等級為劣，僅對 a、b 兩組間的學生有不錯的鑑別能力，但完全無法鑑別出其他組別間的學生；難度等級為極困難的填充第 2 題，其鑑別度等級為優良，除了對 a、b 兩組間的學生有非常優良的鑑別能力，對其餘各組間尚有部些許的鑑別能力。整體而論，此四題均對第 a、b 兩組間的學生有很好的鑑別能力。

3.4.3 質性比較

本節將針對試題內容的質性部分做進一步的比較。第一部分先利用表 3-10 之架構，整理各題所涉及之概念；第二部分則針對本卷命題數最多的多重積分單元做進一步的分析比較。

1. 綜合比較

由個別試題分析，可將各題所用到的概念或程序整理如表 3-12。

表3-12、九十六學年度第二學期微積分會考試題內容概念分布表

鑑別度 題號與內容 難易度	非常優良 （0.40 以上）	優良 （0.30 以上，未滿 0.40）	尚可 （0.20 以上，未滿 0.30）	劣 （未滿 0.2）	合計題數
極容易 （0.80 以上）	**單選第 1 題**－ 考古題、收斂區間 **單選第 9 題**－ 習題、選擇極座標、表面積 2 題(10%)	**單選第 6 題**－ 考古題、選擇極座標、計算二重積分 **單選第 10 題**－ 有考古題、選擇積分順序、表面積 2 題(10%)	**單選第 3 題**－ 計算向量函數的微分與外積、瞭解微分法則 **單選第 4 題**－ 課本內容、多變數函數的極限 **單選第 8 題**－ 改變積分順序或計算迭代積分 3 題(15%)		7
容易 （0.60 以上，未滿 0.80）	**複選第 2 題**－ 考古題、用適當檢驗法判斷級數的斂散性 **複選第 4 題**－ 考古題、由定義求微分、瞭解連續、可微、偏導數存在之間的關係 **填充第 1 題**－ 習題、向量函數的極值 3 題(15%)	**單選第 7 題**－ 轉換直角座標的迭代積分為極座標的迭代積分 **複選第 5 題**－ 有類似習題、多變數函數的臨界點、鞍點、與局部極值 2 題(10%)			5
難易適中 （0.40 以上，未滿 0.60）	**單選第 2 題**－ 收斂區間，解級數的參數 **單選第 5 題**－ 類似的共同習題、多重積分求體積、畫空間中圖形 **填充第 5 題**－ 習題、改變積分順序以計算迭代積分 3 題(15%)	**複選第 3 題**－ 多變數函數可微、連續、與偏導數存在方向導數之間的蘊涵關係、Clairaut’s theorem 1 題(5%)			4
困難 （0.20 以上，未滿 0.40）	**填充第 3 題**－ 連鎖率、多變函數的偏微 **填充第 4 題**－ 類似習題、用拉格朗日乘數法求極值 2 題(10%)			**複選第 1 題**－ 無窮級數的整體概念、性質、與邏輯推論。 1 題(5%)	3
極困難 （未滿 0.2）		**填充第 2 題**－ 函數相乘除後的馬克勞林級數 1 題(5%)			1
題數	10	6	3	1	20

從此表可以發現本份試卷大部分的題目都為課本內容與共同習題，或其類似與變化。

2.多重積分

有暨於多重積分單元的試題多達七題，以下本研究將針對此單元做進一步的比較分析。

在質性方面，利用個別試題分析之結果，從學科的角度比較同質性較高的試題，並整理本單元在課本習題、例題等方面的類似題型，與各題步驟數的主觀分析，整理如表 3-13；量化的部分，則是由答對率與鑑別度觀察各組學生的答題情形；如表 3-14。最後結合質與量做一綜合分析。

表 3-13、九十六學年度第二學期微積分會考多重積分單元試題比較

題號		單選 第 5 題	單選 第 6 題	單選 第 7 題	單選 第 8 題	單選 第 9 題	單選 第 10 題	填充 第 5 題
答對率		48.38%	82.38%	74.29%	88.76%	83.24%	84.19%	53.81%
相似題	考古題		V				V	
	共同習題	V	V					V
	其他習題	V		V	V	V	V	V
	課本例題		V				V	
畫圖－由圖形方程式畫出圖		V	V			V	V	
畫圖－給迭代積分畫區域				V	（V）			V

極座標		V	V		V		
表面積					V	V	
計算迭代積分	V	V		V	V	V	V
積分順序				（V）		V	V
單變數的變數變換		V			V	V	V
空間概念	V						
步驟數	3	2	2	1（2）	3	3	1

資料來源：本研究整理

在相似題部分，考古題係指前一年度完全相同的會考試題，計有單選第 6、10 兩題；單選第 9、10 與填充第 5 這三題，在其他習題均有幾乎相同的題目。其餘有勾選之各題則表示在共同習題、或其他習題、或課本例題，具有相似度不等的類似題目，詳細說明請見附錄八。

表3-14、多重積分單元的各組各題答對率總表暨難易度與鑑別度等級

答對率		P	Ph	Pl	Pa	Pb	Pc	Pd	Pe	難易度等級	鑑別度等級
單選題	第 5 題	48.38	78.59	21.60	83.33	61.90	45.24	31.90	19.52	難易適中	非常優良
	第 6 題	82.38	95.21	62.72	95.71	91.90	88.57	78.10	57.62	極容易	優良
	第 7 題	74.29	91.37	58.19	92.38	86.67	70.95	64.76	56.67	容易	優良
	第 8 題	88.76	98.08	74.56	98.57	94.29	92.38	87.14	71.43	極容易	尚可
	第 9 題	83.24	99.04	56.79	99.05	98.10	90.48	79.52	49.05	極容易	非常優良
	第 10 題	84.19	98.08	63.07	99.52	95.71	89.52	79.05	57.14	極容易	優良
填充題	第 5 題	53.81	86.26	16.03	90.95	75.24	54.76	37.14	10.95	難易適中	非常優良

資料來源：教育測驗與評量：成就測驗與教學評量，余民寧，民 91，臺北市：心理、本研究整理

研究者根據個別試題分析結果，針對有相同概念或程序的題目，做主觀地進一步分析如下：

1.觀察單選第5、6、7、9、10，五題均需要由給定數學式大致畫出圖形，以寫出迭代積分區域進行積分的運算或寫出對應的極座標轉換。其中，第6、7、9、10四題均為平面上的圖形，答對率均達百分之八十以上；第5題則為空間中的圖形，答對的學生不到總人數的一半。可見在幾何方面，學生較為熟悉平面中常見的圓等圖形，而較缺乏抽象的空間概念。

2.單選第8題的積分區域為三角柱，不論是計算其迭代積分或畫圖改變積分次序都非常簡單。就選項來看是四個獨立的單選題，但由於其被積分函數 $f(x,y,z)$ 為1，使得多重積分之計算更加容易，學生即使不會改變積分次序的程序，仍可利用計算迭代積分得到答案。雖然在課本例題或習題中，沒有出現完全相同的題型，但其僅評量的改變積分順序（或計算迭代積分）之程序，其實在非常多習題中均有出現且較本題更為困難。由答對率來看，單選第8題為整份試卷答對率最高的題目，各組學生的答對率均達七成以上為非常合理之現象。

3. 單選第9與第10題均為評量曲面表面積，且步驟數相同，亦均有幾乎相同的課本習題，是同質性非常接近的題目。

4.第 6、7、9 三題為多重積分單元中，涉及極座標轉換的題目，其積分區域幾乎相同，為圓心在原點的圓或半圓。第 6、9 兩題都有給定積分函數，還須求出 Jacobian 及計算多重積分，計算過程並用到單變數的變數變換之積分技巧，第 9 題並多加了表面積公式的程序；第 7 題的被積分函數為不定元之型式，題目已給定 Jacobian，不必（也不能）計算積分，該題僅評量學生是否能寫出直角座標轉換到極座標後的迭代積分。在步驟數方面，第 6、7 題的步驟數為 2，第 9 題的步驟數為 3，整理如表 3-15

表 3-15、九十六學年度第二學期會考試題單選第 6、7、9 題的步驟數比較

步驟	第 6 題	第 7 題	第 9 題
1	從給定方程式決定積分區域的圖形，並利用極座標寫出迭代積分	從給定直角座標下的迭代積分決定二重積分的積分區域	要知道表面積公式
2	計算出積分之值	利用極座標寫出迭代積分	從給定方程式決定積分區域的圖形，並利用極座標寫出迭代積分
3			計算出積分之值
步驟數	2	2	3

資料來源：本研究整理

此外，第6、9兩題都有幾乎相同的課本習題。但課本習題只有給定一般函數去做積分的計算，沒有給定如第七題不定元形式的題目。三題的答對率分別為82.38%、74.29%、83.24%。將以上質性分析整理如表3-16。

表3-16、九十六學年度第二學期會考試題單選第6、7、9題的質性分析比較

	積分函數	積分區域	要求出 Jacobian	要計算多重積分	步驟數	答對率	習題或考古題
第 6 題	給定函數 $\sin(x^2+y^2)$	近半圓 $1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge 0$	是	是	2	82.38	是
第 7 題	不定元 $f(x,y), f(r\cos\theta, r\sin\theta)$	半圓 $\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}}$	否	否	2	74.29	否
第 9 題	給定曲面 $z=2xy$ 要利用表面積公式求出積分函數	整個圓 $x^2+y^2=4$	是	是	3	83.24	是

資料來源：本研究整理

令人訝異的是，照上述質性分析來看，以第7題內容最為簡單，但卻與學生測驗出的答對率結果不一致。進一步比較學生的答題情況，第7題與第6、9兩題的答對率均相差了約八個百分點，第a、b、c三組學生在第6、9兩題均有約百分之九十以上的答對率，但在第7題的答對率不但下降且有明顯落差，以第c組差距將近百分之二十之差距為最大，僅第e組學生在第7題的答對率高於第9題。根據上述質性分析可觀察第7題主要的差異在於被積分函數為不定元，且較第6、9題多了將迭代積分轉為二重積分的步驟。是否此為答對率下降之因素或造成複雜度較高的題目答對率卻較高的不合理現象，值得教學工作者特別留意，以探究學生是否能執行解題程序，但卻未確實釐清數學概念。

此外，觀察上述質性分析與答對率，這三題的積分區域雖然都是圓，但半圓的答對率比較低。而由單選第6題與第7題的個別試題分析中可發現這兩題均有約百分之十四的學生選答圖形為整個圓盤的誘答選項（分別為第6題的（C）選項與第7題的（C）選項），顯示這些學生在極座標轉換的程序上產生問題，無法畫出正確的圖形，或無法由圖形寫出正確的迭代積分區域。但若把答半圓的百分之十四加回去，則第7、9兩題差不多。由這百分之十四的學生選擇來看，不確定是不定元在中間造成學生的困難，還是整個圓在中間對學生的影響。

而由單選第6題與第9題，兩題均用到極座標計算多重積分且有相似的課本習題，唯第9題多評量了表面積公式的程序。由第9題有稍高的答對率（第e組例外）來看，求表面積的程序對學生來說影響並不大。

綜合上述，積分的應用在體積與表面積，體積似乎不需要記公式，而表面積需要記得公式，但由這幾題的答對率來看，表面積公式似乎影響不大，不會對學生造成困難，反而是空間概念會對學生造成困難，是值得教學者注意的現象。

第四章　結論建議與發展

4.1　結論與建議

4.1.1 結論

本研究為評估九十六學年度第二學期微積分會考試題是否適宜，建立針對交通大學微積分下學期課程的學習目標，並由質性與量化的角度進行個別試題分析與整卷分析，從雙向細目表、成績分布、難易度分布、鑑別度、質性比較等角度來評估此份試卷。所得結果與建議如下：

微積分會考是一定位為評量學生是否具備基本能力之測驗，因目前並未清楚定義何謂基本能力，由於微積分教學小組於網站公佈之共同習題為老師挑過，應該是基本能力的指標，故本研究假設共同習題即學生應達到的基本能力。

由本份試卷來看，在效度方面，第一，在試題內容方面，大部分的題目（約佔百分之六十五）都與共同習題類似，符合其基本能力之要求，與微積分會考之定位一致。第二，就試題分布情形，多重積分單元的比重（佔百分之三十五）過重，與微積分教學小組網站公告的該單元教學時數（佔百分之二十二）有些差異，也造成多重積分單元同質性的題目太多，反而並未有如多變數函數單元中方向導數（directional derivatives）等概念之命題。

在難易度方面，本試卷平均成績 61.75 分，標準差 16.46，成績分布非常分散。依據 Ebel 與 Frisbie 的難易度等級表，難度等級屬於極容易、容易、難易適中、困難、與極困難的試題佔分比例各為百分之三十五、百分之二十五、百分之二十、百分十五，與百分之五，考生成績分布圖為右偏。但本卷成績未滿六十分的學生仍有 467 人，約佔所有考生人數的百分之四十四，顯然本卷的試題需要再做些調整。就試題內容來看，本卷不算困難，而空間概念是學生較需加強的部份。

在鑑別度方面，有一半以上的題目鑑別度為非常優良，且各單元均包含至少一題鑑別度非常優良之試題。整份試卷中，有較多的試題主要鑑別較低分組的學生；此外，難

度等級為困難或極困難（即答對率小於百分之四十）的試題，也能有效鑑別第 a、b 兩組的學生，整體而言，鑑別度分布還不錯且合乎會考定位。

綜觀上述，除了內容偏向多重積分，本卷試題與共同習題一致，難易度屬於容易，鑑別度非常良好，是份還不錯的試卷。

4.1.2 建議

1. 在試題分布方面，建議可評估微積分課程之需求，考量是否就命題數過多或較少的單元調整其教學時數，或是應調整試卷各單元的比重以呼應其重要性。

2. 如果共同習題是基本能力的指標，且學生對於共同習題都已熟悉清楚，則以本卷約有百分之六十五的類似題，學生應能通過此測驗，但由測驗結果發現，本卷有百分之四十四的學生未滿六十分。即若以共同習題當作基本能力的指標，則本份試卷的試題分布與共同習題一致，但由數據上來看，仍有超過四成的學生未達到基本能力之要求，此是否意味共同習題確實有部份偏難，需要再重新設定檢視基本能力，調整共同習題的難度；或是目前所指定的共同習題為學生都應該要會且應具的基本能力，則表示學生在部分概念與程序並未確實釐清，尚有在教學方面可能遺漏的地方，建議可從測驗中檢視學生答對率較低的部份，探究學生學習上的困難與「教」與「學」之間的落差，在教學上再為加強或調整，如空間概念。

4.2 發展

4.2.1 研究

本研究數據是依據正式大型考試的實際作答結果，參考性很高，可提供相關研究做進一步分析。基於時間限制，本研究雖統計了複選題的所有作答情形與學生得全錯與得部份份的比例，但未做進一步分析，實為遺珠之憾。建議可由學科角度，交叉分析複選題的所有作答情形，以推論學生可能具有的學習迷思；或找學生進行施測，檢驗是否得

部分分的學生較得全錯的學生有較佳的數學程度，以進行後續推論及研究；另外，對於部分選答率不低的錯誤選項，建議可找學生進行進一步的再測或訪談以瞭解其選答動機與解題思維。

4.2.2 應用

1. 當題庫中的試題數不夠時，學生較能因練習過相似題目而提升試題的通過率，但若學生能全數練習題庫中之題目，倒也樂觀其成。但若題庫中之試題未能涵蓋學生該具備之學習目標，則恐考試領導教學造成學習之偏漏。本研究建立之雙向細目表即提供教師作為檢核之依據，冀能將試題涵蓋所有學生應具備之基本能力，與搭配試題類型激盪出更多樣的命題題型。
2. 配合電子題庫為未來之趨勢，試題分析後所得各題的難度、鑑別度、學習目標、試題類型等資訊，均能利用資料庫的建立與關鍵字之搜尋使題庫之功能達到事半功倍之效。雙向細目表之功效，在題庫的試題數越多時越能看出成效。建議在題庫發展過程中，一方面利用仿照本研究從質與量的分析穩定試題品質，另一方面持續增加試題量使試題的分析數據能更精準。
3. 評量對教學工作者來說，最重要的目的就是瞭解學生學習狀況以回歸教學，提升教學品質與學生的學習成效。本研究從試題的檢核為起點，建立穩定之評量以確實反應學生的學習狀況；建議可由逐年累積題庫之命題量，以建立穩定之定錨題比較不同年度學生的學習差異。

中文參考文獻

王文科（民97）。**教育研究法**。臺北市：五南。

王大修、楊思偉、李咏吟、張煌熙、張景媛、王叢桂等人（民88）。國民中

小學九年一貫課程基本能力實踐。

朱惠文(民 96)。**九十六學年度學科能力測驗試題分析－數學考科**。大學入學考試中心。

李榮耀、辛靜宜、蔡孟傑（民94)。**微積分**。臺北市：湯姆生。

朱紋藤（民85)。**微積分寶典**。臺北市：臺灣東華。

李奉儒、吳芝儀（民 84）。**質的評鑑與研究**。臺北市：桂冠。

余民寧，(民80)。試題反應理論的介紹（一）－測驗理論的發展趨勢。**研習資訊，8卷(6期)**，13-18頁。

余民寧（民91)。**教育測驗與評量：成就測驗與教學評量**。臺北市：心理

吳裕益、陳英豪（民81）。**測驗與評量**（4版）。高雄市：復文。

洪瑞鎂（民90）。從「**第三次國際數學與科學教育成就研究後續調查」探究台灣**

國二學生的數學基本能力。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。

胡幼慧（民 85）。**質性研究：理論方法與本土女性研究實例**。臺北市：巨流。

郭生玉（民82）。**心理與教育測驗**（7版）。臺北市：精華。

許天維、殷志文（民84)。試題特徵曲線簡介。**測驗統計簡訊雙月刊，第6期**，頁1-7。

許天維、劉湘川（民90）。**技專院校九十學年度入學測驗各科命題分析研究計畫研究報告**。國立雲林科技大學：技專院校入學測驗中心。

許天維、黃美芳、陳雁芳、郭伯臣（民 96）。數學領域能力指標測驗題庫之建置。**測驗統計年刊，15 輯上期**，pp. 59-78。

陳梅生（民 71)。**教學行為目標敘寫法**。臺北市：台灣省國民學校教師研習會。

陳慧美（民95）**95學年度學科能力（各科）測驗試題淺析**。大考中心研究發展處。

顧介梅（民91）。**數學科試題檢核分析法之研究－以九十學年度四技二專工業類數學科**

試題為例。國立台中師範學院教育測驗統計研究所碩士論文。

張正林郁（民 95)。**微積分精粹**。臺北市：鼎茂。

黃義雄（民 94)。**微積分演習指引**。臺北市：五南。

黃光雄（民 71）。**教學目標與評鑑**（2 版）。高雄市：復文。

黃學亮（民 84)。**微積分精修講義**（再版)。臺北市：文笙。

葉重新（民 90）。**教育研究法**。臺北市:心理。

戴政吉譯。美國加州公立學校數學課程綱要- 從幼稚園到 12 年級-（2000）修訂版』的翻譯。(改編自 A. Holz, 1996. Walking the Tightrope: Maintaining Balance for Student Achievement in Mathematics. San Lius Obispo: California Polytechnic State University, Central Coast Mathematics Project.)。2010 年 7 月 24 日，取自國立台中教育大學數學教育學系劉好老師的個人網頁。http://mathed.ntcu.edu.tw/person/lh

英文參考文獻

Ahmanan, J. S., & Glock, M.D. (1981). *Evaluating student progress: Principles of tests and measurement*(6th ed.).Boston, MA: Allyn & Bacon. ,p163

Bloom, B.S., et al.,(Eds.)(1956). *Taxonomy of educational objectives: Cognitive domain*. New York: David McKay Co., Inc.

Chase, C. I. (1978). *Measurement for educational evaluation* (2nd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley. p140

Cureton, E.E. (1957). *The upper and lower twenty-seven percent rule*. Psychometrika, 22, 293-296.

Ebel, R. L.(1967). The relation of item discrimination to test reliability. *Journal of Educational Measurement, 4,* 125-128.

Ebel, R.L.,& Frisbie, D.A.(1991). *Essentials of educational measurement.*(5th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Kelley, T.L. (1939). The selection of upper and lower groups for the validation of test. *Journal of Educational Psychology, 30*, 17-24.

(NCTM美國數學教育指導原則及其評鑑標準

NEAP數學能力指標 (NAEP(NAGB, 2002) National assessment governing board(2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress*. National Assessment Governing Board U.S.Department of Education)

Nitko, A. J. (1983). *Educational tests and measurement*. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Noll, V. H., Scannell, D. P., & Craig, R.C. (1979). *Introduction to educational measurement*(4th ed.). Boston, MA: Houghton Mifflin.

Ten Brink, T. D. (1974) *Education: a practical guide for teachers*. N. Y.: McGraw-Hill.

The Trends in International Mathematics and Science Study[TIMSS] (n.d.). *TIMSS Mathematics Items: Released Set for Population 1(Third and Fourth Grades).* Retrieved January 10, 2004, from http://timss.bc.edu/timss1999.html

Wilson, J. W. (1971). *Evaluation in secondary school mathematics*. Chapter 19 in B. S. Bloom, J. T. Hastings,& G. F. Madaus, Handbook of Formative and Summative Evaluation of Classroom Learning. New York: McGraw-Hill.

附錄一、交通大學微積分課程大綱（下學期）暨建議授課時數

資料來源：交通大學微積分教學小組網站

微積分（二）A、B 班

(★ 標示之章節，由老師決定是否講授，不列入微積分會考範圍)

11 Infinite Sequences and Series -- ***14 hours***

11.1 Sequences

11.2 Series

11.3 The Integral Test and Estimates of Sums

11.4 The Comparison Tests

11.5 Alternating Series

11.6 Absolute Convergence and the Ratio and Root Tests

11.8 Power Series

11.9 Representations of Functions as Power Series

11.10 Taylor and Maclaurin Series

11.11 Applications of Taylor Polynomials

12 Vectors and the Geometry of Space -- ***4 hours***

12.1 Three-Dimensional Coordinate Systems

12.2 Vectors

12.3 The Dot Product

(12.1 12.2 與 12.3 為複習課程)

12.4 The Cross Product

12.5 Equations of Lines and Planes

12.6 Cylinders and Quadric Surface

13 Vector Functions -- ***5 hours***

13.1 Vector Functions and Space Curves

13.2 Derivatives and Integrals of Vector Functions

13.3 Arc Length And Curvature

★13.4 Motion in Space: Velocity and Acceleration

14 Partial Derivatives -- ***16 hours***

14.1 Functions of Several Variables

14.2 Limits and Continuity

14.3 Partial Derivatives

14.4 Tangent Plans and Differentials

14.5 The Chain Rule

14.6 Directional Derivatives and the Gradient Vector

14.7 Maximum and Minimum Values

14.8 Lagrange Multipliers

15 Multiple Integrals -- ***11 hours***

15.1 Double Integrals over Rectangles

15.2 Iterated Integrals

15.3 Double Integrals over General Regions

15.4 Double Integrals in Polar Coordinates

15.5 Application of Double Integrals

15.6 Triple Integrals

15.7 Triple Integrals in Cylindrical Coordinates

15.8 Triple Integrals in Spherical Coordinates

15.9 Change of Variables in Multiple Integrals

說明：

1. 第二學期課程規劃 50 小時，其餘時間由任課老師運用：演習課，考試，進度調整。
2. 向量分析與常微分方程因時間因素省略，在二年級需有其他課程搭配。
3. 課程內之定理與性質，強調其說明與講述其內容。
4. 每學期各有一次期末會考，題型為選擇及填充題；以鑑別基本觀念與計算能力為準。另有挑戰題由學生自由選擇作答與否，與會考成績合併後，作為於微積分獎學金之依據。

附錄二、九十六學年度第二學期微積分會考各組各題答對率總表

答對率		*P*	*Ph*	*Pl*	*Pa*	*Pb*	*Pc*	*Pd*	*Pe*	*T*
單選題	第 1 題	81.52	98.08	54.70	99.05	93.33	90.00	75.71	49.52	
	第 2 題	41.24	66.45	21.25	72.86	50.95	33.81	30.00	18.57	
	第 3 題	86.00	94.57	74.22	95.71	91.43	88.10	82.86	71.90	
	第 4 題	85.90	96.81	72.82	98.57	89.52	88.57	81.43	71.43	
	第 5 題	48.38	78.59	21.60	83.33	61.90	45.24	31.90	19.52	
	第 6 題	82.38	95.21	62.72	95.71	91.90	88.57	78.10	57.62	
	第 7 題	74.29	91.37	58.19	92.38	86.67	70.95	64.76	56.67	
	第 8 題	88.76	98.08	74.56	98.57	94.29	92.38	87.14	71.43	
	第 9 題	83.24	99.04	56.79	99.05	98.10	90.48	79.52	49.05	
	第 10 題	84.19	98.08	63.07	99.52	95.71	89.52	79.05	57.14	
複選題	第 1 題	24.65	35.14	20.56	40.29	21.90	19.81	20.76	20.48	4.48
	第 2 題	67.09	90.67	37.28	92.38	85.71	68.86	57.62	30.86	52.86
	第 3 題	52.99	68.69	38.19	72.76	59.05	53.33	43.90	35.90	26.76
	第 4 題	64.10	86.96	36.79	88.67	78.95	71.52	48.67	32.67	45.81
	第 5 題	72.17	87.86	54.36	87.90	81.62	73.71	66.76	50.86	62.57
填充題	第 1 題	69.24	88.50	38.68	89.05	85.71	77.62	57.14	36.67	
	第 2 題	13.81	31.95	1.39	41.90	14.76	7.62	3.33	1.43	
	第 3 題	37.24	69.97	10.80	78.10	47.62	26.19	26.19	8.10	
	第 4 題	24.00	50.16	5.57	59.05	30.00	16.67	8.57	5.71	
	第 5 題	53.81	86.26	16.03	90.95	75.24	54.76	37.14	10.95	

資料來源：本研究整理

P、*Ph*、*Pl*、*Pa*~ *Pe*—答對率、高分組答對率、低分組答對率、第a~e組各組答對率

T—複選題的全對率

附錄三、九十六學年度第二學期微積分會考各組各題鑑別度總表

鑑別度		*D*	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*
單選題	第 1 題	0.4338	0.0571	0.0333	0.1429	0.2619
	第 2 題	0.4520	0.2190	0.1714	0.0381	0.1143
	第 3 題	0.2035	0.0429	0.0333	0.0524	0.1095
	第 4 題	0.2399	0.0905	0.0095	0.0714	0.1000
	第 5 題	0.5699	0.2143	0.1667	0.1333	0.1238
	第 6 題	0.3249	0.0381	0.0333	0.1048	0.2048
	第 7 題	0.3318	0.0571	0.1571	0.0619	0.0810
	第 8 題	0.2352	0.0429	0.0190	0.0524	0.1571
	第 9 題	0.4225	0.0095	0.0762	0.1095	0.3048
	第 10 題	0.3501	0.0381	0.0619	0.1048	0.2190
複選題	第 1 題	0.1458	0.1839	0.0209	(0.0095)	0.0028
	第 2 題	0.5339	0.0667	0.1685	0.1124	0.2676
	第 3 題	0.3050	0.1371	0.0572	0.0943	0.0800
	第 4 題	0.5017	0.0972	0.0743	0.2285	0.1600
	第 5 題	0.3350	0.0628	0.0791	0.0695	0.1590
填充題	第 1 題	0.4982	0.0333	0.0810	0.2048	0.2048
	第 2 題	0.3056	0.2714	0.0714	0.0429	0.0190
	第 3 題	0.5917	0.3048	0.2143	0.0000	0.1810
	第 4 題	0.4459	0.2905	0.1333	0.0810	0.0286
	第 5 題	0.7023	0.1571	0.2048	0.1762	0.2619

資料來源：本研究整理

D—鑑別度，其值為高、低分組答對率之差

D1＝第a組答對率減第b組答對率；*D2*＝第b組答對率減第c組答對率；*D3*＝第c組答對率減第d組答對率；*D4*＝第d組答對率減第e組答對率

附錄四、九十六學年度第二學期微積分會考各選項選答情形

（以下各值均為選答人數比例（%））

單選題

單選題		A	B	C	D	未作答
第 1 題	所有考生	1.05	9.81	*81.52	7.62	0.00
	高分組	0.00	0.64	*98.08	1.28	0.00
	低分組	1.74	25.78	*54.70	17.77	0.00
第 2 題	所有考生	27.14	*41.24	12.67	18.67	0.29
	高分組	19.17	*66.45	6.71	7.67	0.00
	低分組	29.97	*21.25	19.51	28.22	1.05
第 3 題	所有考生	0.67	*86.00	4.67	8.67	0.00
	高分組	0.32	*94.57	1.92	3.19	0.00
	低分組	2.09	*74.22	8.36	15.33	0.00
第 4 題	所有考生	*85.9	6.48	1.43	6.19	0.00
	高分組	*96.81	1.60	0.32	1.28	0.00
	低分組	*72.82	10.80	3.83	12.54	0.00
第 5 題	所有考生	*48.38	21.14	20.19	9.90	0.38
	高分組	*78.59	8.63	8.63	4.15	0.00
	低分組	*21.60	31.36	30.66	15.68	0.70
第 6 題	所有考生	*82.38	2.29	13.62	1.62	0.10
	高分組	*95.21	0.64	4.15	0.00	0.00
	低分組	*62.72	6.27	25.78	4.88	0.35
第 7 題	所有考生	9.43	*74.29	13.81	2.48	0.00
	高分組	3.51	*91.37	4.79	0.32	0.00
	低分組	13.94	*58.19	23.00	4.88	0.00

第 8 題	所有考生	1.52	*88.76	4.67	4.95	0.10
	高分組	0.32	*98.08	0.64	0.96	0.00
	低分組	4.18	*74.56	11.50	9.76	0.00
第 9 題	所有考生	*83.24	2.86	8.10	5.71	0.10
	高分組	*99.04	0.00	0.64	0.32	0.00
	低分組	*56.79	8.71	21.95	12.20	0.35
第 10 題	所有考生	4.00	4.38	*84.19	7.14	0.29
	高分組	1.28	0.32	*98.08	0.32	0.00
	低分組	9.76	8.71	*63.07	17.77	0.70

資料來源：本研究整理

複選題

複選題		A	B	C	D	答對	全對	全錯	部份分	未作答
第 1 題	所有考生	*68.57	32.48	65.14	54.48	24.65	4.48	61.90	33.62	0.00
	高分組	*80.19	22.36	61.02	50.48	35.14	10.22	48.24	41.53	0.00
	低分組	*60.98	41.81	65.51	51.57	20.56	1.74	66.90	31.36	0.00
第 2 題	所有考生	30.38	*88.00	21.05	*85.71	67.09	52.86	23.43	23.71	0.00
	高分組	7.99	*96.49	5.43	*95.21	90.67	82.43	3.83	13.74	0.00
	低分組	58.89	*75.96	38.68	*72.82	37.28	21.60	52.26	26.13	0.00
第 3 題	所有考生	37.81	*64.86	*75.14	*88.57	52.99	26.76	29.52	43.71	0.00
	高分組	22.04	*76.04	*83.07	*89.78	68.69	44.73	15.34	39.94	0.00
	低分組	55.75	*58.54	*65.85	*86.41	38.19	12.89	44.95	42.16	0.00
第 4 題	所有考生	14.67	*90.10	42.10	18.00	64.10	45.81	23.71	30.48	0.00
	高分組	3.51	*98.72	21.41	4.79	86.96	75.08	5.11	19.81	0.00
	低分組	31.01	*80.14	61.67	35.54	36.79	16.72	49.83	33.45	0.00

第 5 題	所有考生	16.29	*80.00	18.10	*89.62	72.17	62.57	21.43	16.00	0.00
	高分組	4.15	*89.46	8.95	*96.49	87.86	83.07	8.95	7.99	0.00
	低分組	34.15	*67.60	28.22	*85.37	54.36	38.68	35.19	26.13	0.00

資料來源：本研究整理

填充題

填充題		答對	答錯	未作答
第 1 題	所有考生	69.24	26.29	4.48
	高分組	88.50	11.18	0.32
	低分組	38.68	48.78	12.54
第 2 題	所有考生	13.81	55.33	30.86
	高分組	31.95	56.87	11.18
	低分組	1.39	48.08	50.52
第 3 題	所有考生	37.24	52.10	10.67
	高分組	69.97	28.75	1.28
	低分組	10.80	62.72	26.48
第 4 題	所有考生	24.00	47.33	28.67
	高分組	50.16	38.98	10.86
	低分組	5.57	50.17	44.25
第 5 題	所有考生	53.81	31.90	14.29
	高分組	86.26	11.82	1.92
	低分組	16.03	51.92	32.06

資料來源：本研究整理

附錄五、九十六學年度第二學期微積分會考考題

資料來源：交通大學微積分教學小組

九十六學年度第二學期微積分會考試題 甲卷

說明:

(1) 答題之前請先檢查所取得之試卷與答案卷是否正確。

(2) 測驗時間 110 分鐘。甲乙兩份試卷加答案卷共計 8 頁。

(3) 甲卷爲一般試卷，包括選擇題與填充題，總分共計 100 分，占學期成績之 30%。乙卷爲挑戰題試卷，可自行決定是否作答，計 40 分，不佔學期成績。甲乙兩卷成績合計後，將做爲微積分獎給獎依據或教師加分參考。

(4) 乙卷採「延時加考」之方式進行，於測驗時間 110 分鐘結束，並回收甲卷後，再額外提供 30 分鐘時間作答乙卷。

(5) 請先確實填入相關個人資料。答題時請依題號空格作答，否則不予計分。

◎ 單選擇題 (單選十題，每題五分，共五十分，答錯不倒扣)

1. The interval of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(x-1)^n}{n}$ is

(A) $[1,3)$;　(B) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$;　(C) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$;　(D) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

2. For which α is the interval of convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}x^n$$

equal to $[-1,1)$.

(A) 1;　(B) 1/2;　(C) -1/2;　(D) -1.

3. If $\vec{F}(t)=\hat{i}+t\hat{j}+t^2\hat{k}$

$\vec{G}(t)=t\hat{i}+e^t\hat{j}+3\hat{k}$

Which of the following is not true

(A) $\vec{F}\,'(t)=\hat{j}+2t\hat{k}$;

(B) $G\,'(t)\times\vec{F}(t)=(t^2e^t)\hat{i}+t^2\hat{j}+(t-e^t)\hat{k}$;

(C) $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=(3-2te^t-t^2e^t)\hat{i}+(3t^2)\hat{j}+(e^t-2t)\hat{k}$;

(D) $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=\vec{F}\,'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}\,'(t)$.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ =

(A) 1; (B) 0; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) does not exist.

5. Find the volume of the solid bounded by the planes $y=0, z=0$ and $z=1-x+y$ and the parabolic cylinder $y=1-x^2$

(A) $\dfrac{28}{15}$; (B) $\dfrac{23}{15}$; (C) $\dfrac{11}{6}$; (D) $\dfrac{13}{7}$.

6. The value of $\iint_R \sin(x^2+y^2)dA$, where $R=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$, is

(A) $\dfrac{\pi}{2}(\cos 1-\cos 4)$; (B) $\dfrac{\pi}{2}(\sin 4-\sin 1)$;

(C) $\pi(\cos 1-\cos 4)$; (D) $\pi(\sin 4-\sin 1)$.

7. Suppose f is continuous on $\mathbb{R}$. Then $\int_0^4\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dxdy=$

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$;

(B) $\int_0^{\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$;

(C) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$;

(D) None of above.

8. Which of the following is wrong.

(A) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dxdzdy$;

(B) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz=\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} dydxdz$;

(C) $\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-z} dydzdx=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dxdzdy$;

(D) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dzdxdy=\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} dzdydx$.

9. Find the surface area of the part of the surface $z=2xy$ that lies within the cylinder $x^2+y^2=4$.

(A) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$; (B) $\frac{\pi}{7}(19\sqrt{19}-1)$;

(C) $\frac{\pi}{8}(21\sqrt{21}-1)$; (D) $\frac{\pi}{9}(23\sqrt{23}-1)$.

10. The area of the part of the surface $z=x+2y^2+3$ that lies above the triangle with vertices $(0,0),(0,1)$ and $(2,1)$ is

(A) $\frac{17}{6}\sqrt{2}$; (B) $\frac{15}{6}\sqrt{2}$; (C) $\frac{13}{6}\sqrt{2}$; D) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$.

◎ 多選擇題 (多選五題，每題五分，共二十五分。答錯一個選項扣兩分，錯兩個選項以上不給分，分數不倒扣)

1. Which of the following statements about the infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ are true ?

(A) If $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, then $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$;

(B) If $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$ converges;

(C) If $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges;

(D) If $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ converges.

2. Which of the following series are convergent ?

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; (B) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \tan\frac{\pi}{n}$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{3n-1})$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$.

3. Which of the following statements about a 2 variables function $f(x,y)$ are true ?

(A) If the partial derivatives f_x and f_y exist at (x_0, y_0), then $f(x,y)$ is continuous at (x_0, y_0);

(B) If f_x and f_y exist near (x_0, y_0) and are continuous at (x_0, y_0), then $f(x,y)$ is differentiable at (x_0, y_0);

(C) If $f(x,y)$ is differentiable at (x_0, y_0), then f is continuous at (x_0, y_0);

(D) If $f(x,y)$ is defined on a disk D that contains the point (x_0, y_0) and the functions f_{xy}, f_{yx} are both continuous on D, then

$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

4, Let

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Which of the following statements are TRUE ?

(A) f is continuous at $(0,0)$;

(B) $f_x(0,0)$ exists;

(C) $f_y(0,0)$ exists;

(D) f is differentiable at $(0,0)$.

5. Consider the following function

$f(x, y) = x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$

Which of the following statements are TRUE ?

(A) f has 3 critical points;

(B) f has a local maximum at $(-2,-2)$;

(C) f has a local minimum at $(-2,-2)$;

(D) f has a saddle point at (0, 0).

◎ 填空題 （五題，每題五分，共二十五分，答錯不倒扣）

1. Find the limit $\lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t,\ \mathrm{e}^{-4t}, \frac{\ln t}{t}) =$ ___(1)___.

2. Find the first four terms ___(2)___ of the Maclaurin series of

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x}.$$

3. Let

$$w = ze^{\frac{x}{y}},\quad x = \sin(t^2 s),\quad y = (1+st)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},\quad z = t(t^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Then, $\partial w/\partial s\,|_{(s,t)=(0,1)} =$ ___(3)___.

4. ___(4)___ is the highest point on the plane curve that is given by the intersection of $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$..

5. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1+y^3}\,dydx =$ ___(5)___.

附錄六、學習目標

微積分學習目標（／測驗目標）細目表

單元	項目	能力指標	備註
11 無窮數列 與級數	11－1 數列（ sequence）	11－1－1 能夠瞭解 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 的定義。	
		11－1－2 能夠瞭解並利用下列的極限法則做計算： 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 均為收斂數列（convergent sequences），且 c 為一常數，則： 1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ 2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$ 3. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$ 4. $\lim_{n\to\infty} c = c$ 5. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ 6. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$，其中 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 7. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 且 f 為連續函數，則 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$	
		11－1－3 能夠瞭解下述定理：	

		若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ 且對所有自然數 n， $f(n)=a_n$ ， 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 。	
		11－1－4 能夠利用夾擠定理（the squeeze theorem）判斷數列收斂並求出其極限值。	
		11－1－5 能夠利用單調數列定理（monotonic sequence theorem）判斷數列收斂並求出其極限值。	
		11－1－6 能夠暸解數列收斂、有界之間的蘊涵關係(implication)。	
	11－2 級數 （series）	11－2－1 能夠暸解級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的定義。	
		11－2－2 能夠暸解定理：若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則數列之極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 。	
		11－2－3 能利用發散級數檢驗法（the test for Divergence），來判斷級數的斂散性。	
		【先備知識 1】 能寫出幾何級數的部分和，並判斷其斂散性；對於收斂的幾何級數，能求出級數和。	*
		11－2－4 能利用積分檢驗法（Integral test），來判斷級數的	

		歛散性。	
		11－2－5 能瞭解 p －級數的斂散性，即 當 $p>1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收斂； 當 $p\le 1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 發散。	
		11－2－6 能利用比較檢驗法（Comparison test）來判斷級數的歛散性。	
		11－2－7 能利用極限比較檢驗法（Limit Comparison test），來判斷級數的歛散性。	
		11－2－8 能利用交錯級數檢驗法（Alternating Series test）判斷級數收歛。	
		11－2－9 能利用比值檢驗法（Ratio test），來判斷級數的歛散性。	
		11－2－10 能利用根值檢驗法（Root test），來判斷級數的歛散性。	
		11－2－11 能瞭解絕對收斂（absolutely convergent）與條件收斂（conditionally convergent）的蘊涵關係(implication)。	
		11－2－12	

		能利用適當的檢驗法判斷級數是否絕對收斂、條件收斂、或發散。	
	11－3 冪級數 （power series）	11－3－1 能瞭解並應用下述定理： 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $x=\alpha$ 時收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在所有的 x 滿足 $\lvert x-a\rvert < \lvert \alpha-a\rvert$ 時亦收斂；若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $x=\alpha$ 時發散，則 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在所有的 x 滿足 $\lvert x-a\rvert > \lvert \alpha-a\rvert$ 時亦發散。	
		11－3－2 能瞭解收斂半徑與收斂區間的定義。	
		11－3－3 能利用下述定理求收斂半徑： 給定一冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ，若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=l$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\rvert=l$ ，則收斂半徑為 $\frac{1}{l}$ 。	
		11－3－4 給定一冪級數，能求出其收斂半徑。	
		11－3－5 給定一冪級數，能求出其收斂區間。	
	11－4 冪級數表示法（power series	11－4－1 能夠瞭解泰勒級數及馬克勞林級數（Maclaurin series）的定義。	
		11－4－2	

representati

on （expansion ）	已知 $f(x)=\sum c_n(x\text{-}a)^n,\forall\lvert x-a\rvert<R$ ，能利用 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 的關係式求出 $f^{(n)}(a)$ 。	
	11－4－3 能夠寫出 $\dfrac{1}{1-x},e^x,\sin x,\cos x,\tan^{-1}x$ 的馬克勞林級數。	
	11－4－4 令 a,b,k 為任意實數，能利用二項式定理（The Binomial Series）求出 $(a+bx)^k$ 的馬克勞林級數及其收斂半徑。	
	11－4－5 令 a,b,k 為任意實數，給定一正整數 n ，能利用二項式定理求出 $(a+bx)^k$ 的馬克勞林級數中 x^n 的係數。	
	11－4－6 已知函數 f,g 的馬克勞林級數，給定一正整數 n ，能寫出 $f\cdot g$ 或 $\dfrac{f}{g}$ 的馬克勞林級數的前 n 項。	
	11－4－7 設 a 為實數， n 為一正整數，設 f 為一個 n 次可微的函數，能寫出 f 在 a 點的 n 次泰勒多項式。	
	11－4－8 已知冪級數 $f(x)=\sum a_n x^n$ ，能求出 $f(cx)$ 的冪級數表示法及其收斂半徑。	
	11－4－9	

		已知冪級數$\sum c_n(x-a)^n$之收斂半徑為 R，若對所有$\lvert x-a\rvert<R$， $f(x)=\sum c_n(x-a)^n$，能求出其導函數 $f'(x)$的冪級數表示法及其收斂半徑。	
		11－4－10 已知冪級數$\sum c_n(x-a)^n$之收斂半徑為 R，若對所有$\lvert x-a\rvert<R$，$f(x)=\sum c_n(x-a)^n$，能求出其反導函數$\int f(x)dx$的冪級數表示法及其收斂半徑。	
		11－4－11 能利用 11－4－9 及 11－4－10 解決函數的冪級數表示法的問題。	
		11－4－12 應用冪級數表示法，包含： （1）求給定函數在某點的極限，例如：求$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$；（2）能估計定積分在給定誤差範圍下的值，例如：估計$\int_0^1 e^{-x^2}dx$在準確度達 0.001 以內的值。（3）能求函數值的估計，例如：計算$e^{-0.2}$準確到小數點後第五位；（4）判斷是否為微分方程式的解；（5）物理學上的應用。	
	11－5 誤差估計 （error estimation）	11－5－1 *給定一用積分檢驗法的收斂級數，能在給定誤差範圍內求出其估計值及所須的項數。*	**暫定**
		11－5－2 *給定一用比較檢驗法及 p －級數性質的收斂級*	**暫定**

		數，能在給定誤差範圍內求出其估計值及所須的項數。	
		11－5－3 已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$，其中$b_n$遞減至0，給定誤差，能利用交錯級數估計定理（Alternating Series Estimation Theorem）求出其估計值。	
		11－5－4 設a為實數，n為一正整數，給定一函數$f(x)$，令$P_n(x)$為$f(x)$在a點的n次泰勒多項式，給定誤差範圍d，能夠利用泰勒不等式求出若以$P_n(x)$估計$f(x)$時，誤差小於d的x範圍。	
		11－5－5 設a,d,α,β為實數，給定一函數$f(x)$，給定一誤差範圍d，令P_n為$f(x)$在a點的n次泰勒多項式，能夠利用泰勒不等式決定n，使得以P_n估計$f(x)$時的誤差會小於d，其中$\alpha \le x \le \beta$。	
		11－5－6 設a,s,t為實數，n為一正整數，給定一函數$f(x)$，令P_n為$f(x)$在a點的n次泰勒多項式，給定$s \le x \le t$，若以P_n估計$f(x)$，能夠利用泰勒不等式求出誤差上限（maximum error）。	

微積分學習目標（／測驗目標）細目表

單元	項目	能力指標	備註
12 向量（Vectors and the geometry of space）		【先備 1】 【12.3-ex17,19】 能算出空間中兩不平行向量間的夾角。	*
		【先備 2】 【12.3-ex37,39】 給定兩向量 **a**,**b**，能計算 **b** 到 **a** 的向量投影(vector projection）與純量投影（scalar projection）。	*
12 向量與空間幾何（Vectors and the geometry of space）	12－1 直線與平面的方程式（Equations of Lines and planes）	12－1－1 給定空間中任意兩點（或空間中任意一點與一向量），能寫出通過此兩點（或通過給定點並平行給定向量）之直線的直線方程式（包含向量方程式（vector equation）、參數方程式（parametric equation）、對稱方程式（symmetric equation），並能寫出通過給定點及以給定向量為法向量（normal vector）之平面的平面方程式（包含向量方程式（vector equation）、純量方程式（scalar equation）或線性方程式（linear equation））。	
	12－2 柱面（Cylinders）與二次曲面（quadric surfaces）	12－2－1 給定一個二元二次方程式，能判別其對應之二次曲面（quadric surfaces）圖形。	
		12－2－2 給定一個二元二次方程式，能判別其類型（type）為橢圓面（ellipsoid）、橢圓的拋物面（elliptic	

		paraboloid)、雙曲的拋物面(hyperbolic paraboloid)、錐(cone)、一葉的雙曲面(hyperboloid of one sheet)、或二葉的雙曲面(hyperboloid of two sheets)。	
		12－2－3 給定一個二次曲面圖形，能從其特徵識別其方程式。	
13 向量函數 (Vector functions)	13－1 向量函數 (Vector functions) 與空間曲面 (space curves)	13－1－1 【13.1-ex23】 給定一向量函數(Vector functions)，能識別圖形的特徵。	
		13－1－2 【13.1-ex35】 給定兩個空間曲面，能夠利用向量函數表示其所交出的曲線。	
		13－1－3 給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 及定數 a，能夠求出 $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)$	
		13－1－4 能利用下列向量函數的極限法則做計算。 假定 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是向量函數，$\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$ 與 $\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$ 皆存在，且 c 是一個純量，則： 1. $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)]=\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)+\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$ 2. $\lim_{t\to a}[c\mathbf{u}(t)]=c\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$ 3. $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]=\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\cdot\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$ 4. $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]=\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\times\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$	

		13－1－5 能判斷給定向量函數在某點是否連續。	
		13－1－6 給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 及 a，能夠求出 $\mathbf{r}'(a)$。	
		13－1－7 能瞭解向量函數的微分法則。 即瞭解：假定 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 都是可微的向量函數，c 是一個純量，而 f 是一個實數值函數，則： 1. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)+\mathbf{v}'(t)$ 2. $\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)]=c\mathbf{u}'(t)$ 3. $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)]=f'(t)\mathbf{u}(t)+f(t)\mathbf{u}'(t)$ 4. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$ 5. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$ 6. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))]=f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$	
		13－1－8 給定向量函數 $\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$，能夠求通過函數圖形上一點 (x_0,y_0,z_0) 之切線（tangent line）。	
		13－1－9 給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 及 a,b，能夠求出 $\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$。	
		13－1－10 能夠瞭解向量函數跟空間中質點（particle）運動之間（motion in space）的關係。	
	13－2	13－2－1	

	弧長與曲率（arc length and curvature）	給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$，其中 $a \le t \le b$，能夠求出其弧長（arc length）。	
		13－2－2 給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 及其函數圖形描述之曲線上兩點，能夠求出兩點間的曲線長度（arc length）。	
		13－2－3 【13.3-例 4,5】 能給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$，能夠求其圖形在 $t = a$ 時之曲率（curvature）。(包含平面圖形 $y = f(x)$ 的特殊情形。	
		13－2－4 【13.3-例 6,7】 給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$，能夠求其在 $t = a$ 時的單位法向量（(principal) unit normal (vector)）$\mathbf{N}(a)$ 及法平面（normal plane）。	
		13－2－5 【13.3-例 6,7】 給定一平滑曲線 $\mathbf{r}(t)$，能夠求 $\mathbf{r}(t)$ 在點 (x_0, y_0, z_0) 其副法向量（binormal vector）$\mathbf{B}(t)$ 或密切面（osculating plane）。	

微積分學習目標（／測驗目標）細目表

單元	項目	能力指標	備註
14 偏導函數 （Partial Derivatives）	14－1 多變數函數的極限與連續性	14－1－1 能瞭解多變數實函數極限的定義。	
		14－1－2 已知一個雙變數實函數 $f(x,y)$，能瞭解： 若存在兩個不同的路徑 C_1, C_2， $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{沿著路徑}C_1}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{沿著路徑}C_2}} f(x,y)$ 則 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在。	
		14－1－3 能瞭解並應用多變數函數極限的四則運算法則。	
		14－1－4 給定有理式 $f(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 及點 (x_0,y_0)，能計算 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$。	
		14－1－5 能利用下述定理求函數的極限： 若 f 為雙變數實函數且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$，$g$ 是在 L 連續的單變數實函數，令 $h=g\circ f$。則 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=g(L)$ 。	
		14－1－6 能夠應用夾擠定理（the squeeze theorem）判斷多變數實函數的極限存在性，並求出其極限值。	

		14－1－7 能瞭解多變數實函數連續的定義。	
	14－2 偏導函數（Partial Derivatives）、切平面（tangent planes）及線性逼近（linear approximation），與多變數函數的微分	14－2－1 給定多變數實函數 f 與定義域中一點 $\mathbf{x}$，能利用定義求 f 在 $\mathbf{x}$ 點的偏導數。	
		14－2－2 給定一雙變數實函數 f 及其定義域中一點 (x_0, y_0)，能由 f 的圖形或等高線判斷 $f_x(x_0, y_0)$ 及 $f_y(x_0, y_0)$ 的正負號。	
		14－2－3 能瞭解 Clairaut's theorem。	
		14－2－4 給定雙變數實函數 $f(x, y)$，設 f 的一階偏導函數在 (x_0, y_0) 連續，能求出曲面 $z = f(x, y)$ 在點 $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 的切平面（tangent planes）方程式。	
		14－2－5 給定雙變數實函數 f 及點 (x_0, y_0)，設 f 的一階偏導函數連續，能利用線性逼近（linear approximation）估計 $f(x_0, y_0)$。	
		14－2－6 能瞭解多變數實函數可微（differentiable）的定義。	
		14－2－7 給定雙變數實函數 $f(x, y)$ 與點 (x_0, y_0)，能利用下	

		面性質判斷 $f(x,y)$ 是否可微： （1）若 $f(x,y)$ 在靠近點 (x_0,y_0) 的一階偏導數皆存在且連續，則 f 在 (x_0,y_0) 可微； （2）若 $f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0) 不連續，則 f 在點 (x_0,y_0) 不可微。	
	14—3 連鎖律（Chain rule）（或稱鏈鎖律或鏈規則）	14—3—1 能利用連鎖律計算多變數合成函數的偏微分。	
		14—3—2 設 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，F 的一階偏導連續且 $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，能利用隱微分（implicit differentiation）計算 $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$。	
	14—4 方向導數（Directional derivatives）與梯度向量（Gradient vector）	14—4—1 設 $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$ 為多變數實函數 f 的定義域中的一點，給定任意的向量 $\mathbf{u}$，能求出函數 f 在點 $\mathbf{x}_0$ 沿著方向 $\mathbf{u}$ 的方向導數。	
		14—4—2 給定多變數函數 f 與定義域中一點 $\mathbf{x}$，能求 f 在 $\mathbf{x}$ 點的梯度（gradient）$\nabla F(\mathbf{x})$。	
		14—4—3 能暸解梯度（gradient）的幾何意義。	
		14—4—4 已知 f 為一個可微的多變數實函數，能求出 f 的最大變化率（maximum rate of change）與發生的方向。	
		14—4—5	

		設雙變數實函數 f 的一階偏導函數連續，$f(x_0,y_0)=k$ 且 $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$，能求出等高線 $f(x,y)=k$ 在點 (x_0,y_0) 的切線方程式。	
		14－4－6 設多變數實函數 F 的一階偏導函數連續，$F(x_0,y_0,z_0)=k$ 且 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，能求出曲面 $F(x,y,z)=k$ 過 $P(x_0,y_0,z_0)$ 之切平面（tangent plane to the level surface）及法線（normal line）。	
		14－4－7 給定兩曲面 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$，且 C 為兩曲面相交出之曲線，令 P 為曲線 C 上之一點，能求過 P 點的切線方程式。	
		14－4－8 能瞭解極限存在、可微、連續、偏導數存在，與方向導數之間的蘊涵關係(implication)。	
	14－5 多變數函數的極值 （Extreme values）	14－5－1 能夠求出給定多變數實函數的臨界點（critical points）。	
		14－5－2 給定一個二階偏導數連續的雙變數實函數 f，能求出所有 f 的局部極大值（local maximum values）、局部極小值（local minimum values）及鞍點（saddle point）。	
		14－5－3 給定雙變數實函數的等高線圖，能判斷函數的局	

		部極值及鞍點。	
		14－5－4 給定一個可微的雙變數實函數 f，能夠利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）求出 f 限制在 $g(x,y)=k$ 時的極值。	
		14－5－5 給定一個三變數函數 f，能夠利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）求出 f 限制在 $g(x,y,z)=k$ 時的極值。	
		14－5－6 給定一個三變數函數 f，能夠利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）求出 f 限制在 $g(x,y,z)=k,\ h(x,y,z)=c$ 時的極值。	
		14－5－7 給定一雙變數或三變數的實函數 f，能夠求出 f 限制在給定封閉區域（closed and bounded）內的絕對極大值（absolute maximum value）及絕對極小值（absolute minimum value）。	

微積分學習目標（／測驗目標）細目表

單元	項目	能力指標	備註
15 多重積分 （Multiple integrals）	15－1 二重積分 （Double integrals）	15－1－1 能瞭解二重積分的定義與幾何意義。	
		15－1－2 設 f,g 為在平面區域 D 連續的雙變數函數，能瞭解並應用下列二重積分法則： 1. $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dA$ $=\iint_D f(x,y)dA+\iint_D g(x,y)dA$ 2. $\iint_D cf(x,y)dA=c\iint_D f(x,y)dA$，$c$ 為常數 3. 若在 D 上任意點 (x,y) 均有 $f(x,y)\ge g(x,y)$，則 $\iint_D f(x,y)dA\ge\iint_D g(x,y)dA$ 4. 若 $D=D_1\cup D_2$，且 D_1 和 D_2 除了相鄰的邊界外沒有其他的交集，則 $\iint_D f(x,y)dA=\iint_{D_1} f(x,y)dA+\iint_{D_2} f(x,y)dA$	
		15－1－3 給定迭代積分，能寫出對應的二重積分。	
		15－1－4 給定一個二重迭代積分，能夠改寫其積分次序。	
		15－1－5 能夠利用適當的迭代積分順序，來計算給定的二重積分。	

		15－1－6 能計算給定函數 $f(x,y)$ 在矩形區域 R 內的平均值（average value） f_{ave} 。	
		15－1－7 設 $f(x,y)$ 在極座標區域（polar region） $D=\{(r,\theta)\mid\alpha\le\theta\le\beta,h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$ 連續， 能利用 $\iint_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$ 寫出給定二重積分在極座標對應的迭代積分。	
		15－1－8 能夠適當地選擇直角座標或極座標來有效求出二重積分的值。	
		15－1－9 給定一曲面 $z=f(x,y)$，其中 $(x,y)\in D$，若 f 的一階偏導數在 D 上連續，能夠求出曲面的表面積。	
	15－2 三重積分 （Triple integrals）	15－2－1 設 f,g 為在區域 E 連續的三變數函數，能瞭解並應用下列三重積分法則： 1. $\iiint_E[f(x,y,z)+g(x,y,z)]dV$ $=\iiint_E f(x,y,z)dV+\iiint_E g(x,y,z)dV$ 2. $\iiint_E cf(x,y,z)dV=c\iiint_E f(x,y,z)dV$ ，c 為常數 3. 若在 E 上任意點 (x,y,z) 均有	

		$f(x,y,z) \ge g(x,y,z)$，則 $\iiint\limits_E f(x,y,z)dV \ge \iiint\limits_E g(x,y,z)dV$ 4. 若 $E = E_1 \cup E_2$，且 E_1 和 E_2 除了相鄰的邊界外沒有其他的交集，則 $\iiint\limits_E f(x,y,z)dV$ $= \iiint\limits_{E_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{E_2} f(x,y,z)dV$	
		15－2－2 給定迭代積分，能寫出對應的三重積分。	
		15－2－3 給定一個三重迭代積分，能夠改寫其積分次序。	
		15－2－4 能夠利用適當的迭代積分順序，來計算給定的三重積分。	
		15－2－5 能計算給定函數 $f(x,y,z)$ 在固體區域（solid region）E 上的平均值（average value）f_{ave}。	
		15－2－6 若函數 $f(x,y,z)$ 在 E 上連續，其中 $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$ ，而 D 為 E 在 xy 平面上的投影且可用極座標描述為 $D = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$，能利用柱座標轉換計算出三重積分 $\iiint\limits_E f(x,y,z)dV$。	
		15－2－7	

		若函數 $f(x,y,z)$ 在 E 上連續，其中給定一個三重積分 $\iiint_E f(x,y,z)dV$ ，其中 $E=\left\{(\rho,\theta,\phi)\middle\vert \begin{array}{l}\alpha\le\theta\le\beta, c\le\phi\le d,\\ g_1(\theta,\phi)\le\rho\le g_2(\theta,\phi)\end{array}\right\}$ ，能利用球座標轉換計算出三重積分 $\iiint_E f(x,y,z)dV$ 。	
		15－2－8 能夠適當地選擇直角座標、柱座標、或球座標來有效求出積分的值。	
	15－3 變數轉換 （Change of variables）	15－3－1 設 T 為一個由 R^2 到 R^2（或 R^3 到 R^3）的轉換（transformation），能寫出 T 的 Jacobian。	
		15－3－2 能利用適當的變數轉換計算多重積分。	

附錄七、個別試題分析

題號：單選第 1 題

試題內容：

The interval of convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(x-1)^n}{n}$ is

(A) $[1,3)$;

(B) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$;

(C) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$;

(D) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

題型：單選題

參考答案：C

測驗目標：

11－2－5

能瞭解 p 一級數的斂散性，即

當 $p>1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收斂；當 $p\le 1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 發散。

11－2－8

能利用交錯級數檢驗法（Alternating Series test）判斷級數收斂。

11－3－2

能瞭解收斂半徑與收斂區間的定義。

11－3－5

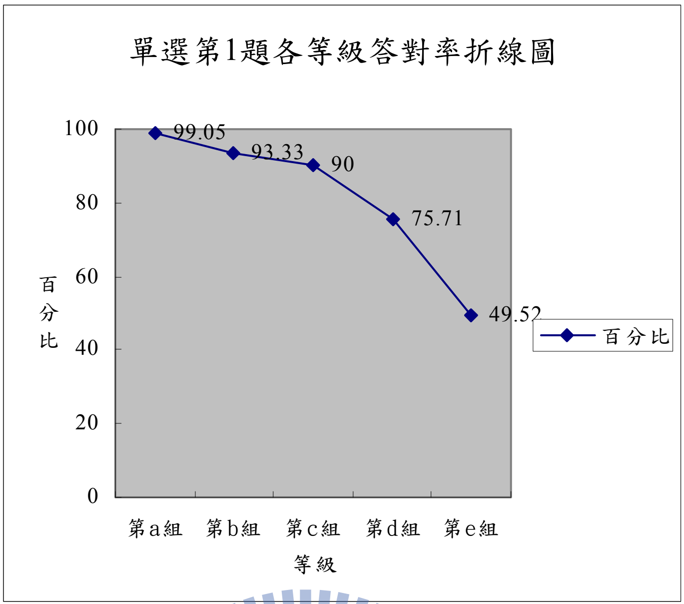
給定一冪級數，能求出其收斂區間。

答對率：P = 81.52%（Ph = 98.08%、Pl = 54.7%）

鑑別度：D = 0.4338

難度：P = 0.8152

作答情形：



單選第 1 題鑑別度總表

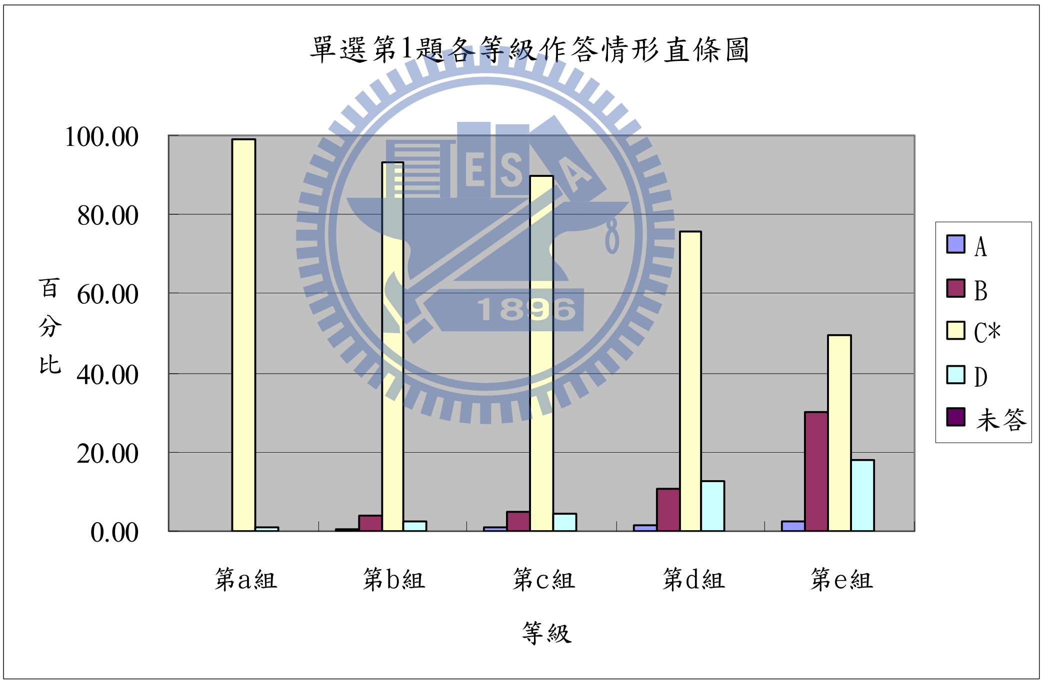
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 1 題	0.4338	0.0571	0.0333	0.1429	0.2619

單選第 1 題五等分組考生各選項選答情形表

單選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 1 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	3	1.43%	5	2.38%
B	0	0.00%	8	3.81%	10	4.76%	22	10.48%	63	30.00%
C*	208	99.05%	196	93.33%	189	90.00%	159	75.71%	104	49.52%
D	2	0.95%	5	2.38%	9	4.29%	26	12.38%	38	18.10%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 1 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 1 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	11	1.05%	0	0.00%	5	1.74%
B	103	9.81%	2	0.64%	74	25.78%
C*	856	81.52%	307	98.08%	157	54.70%
D	80	7.62%	4	1.28%	51	17.77%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 81.52%，難度介於極容易與容易的邊界。高分組答對率 98.08%，低分組答對率 54.70%。鑑別度 0.4338 非常優良，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第 c、d 兩組的學生，（鑑別等級為優良）與鑑別

第 d、e 兩組的學生，(鑑別等級為非常優良)。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e 五組的答對率分別為 99.05%、93.33%、90.00%、75.71% 與 49.52%。

本題評量學生能否解出給定冪級數的收斂區間，是一基本的程序性問題，計算不大。解題步驟如下，

1. 求收斂半徑

利用比值檢驗法（Ratio test）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ 會收斂之概念，計算出

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n(x-1)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)n}{(n+1)}(x-1)\right|=\left|(-2)(x-1)\right|<1\text{，}$$

解出 $|x-1|<\frac{1}{2}$，得收斂半徑為 $\frac{1}{2}$。

或利用定理「給定一冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=l$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l$，則收斂半徑為 $\frac{1}{l}$。」

因為

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n}{n}}\right|=2\text{，}$$

得收斂半徑為 $\frac{1}{2}$。

2. 判斷端點之斂散性

（1）$x=\frac{3}{2}$ 時：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(\frac{1}{2})^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$ 利用交錯級數檢驗法（Alternating Series test）得知級數收斂。

（2）$x=\frac{1}{2}$ 時：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(-\frac{1}{2})^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ ，利用 p 一級數的斂散性，得知級數發散。

由（1）、（2）得，收斂區間為 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ，（C）為正確選項。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（A）選項的學生只有 1.05%，表示這些學生對收斂區間完全沒有概念。答（B）選項的學生有 9.81%，低分組有 25.78%，由各等級作答情形直條圖，幾乎為 d、e 兩組的學生，代表兩端點的斂散性均判斷錯誤。由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（D）選項的學生有 7.62%為選答率最高的錯誤選項，高分組僅 1.28%，低分組則有 17.77%。

修題建議

從選擇題題型的角度來看，若以類似本題 $(a,b),(a,b],[a,b),(c,d)$ 等為選項，學生可猜 a,b 為兩端點，因此，只要判斷端點是否收斂即可，未必會去算收斂半徑；若以 $(a,b),(c,d],[e,f]$ 等為選項，則只要算出收斂半徑，即使未檢驗端點是否收斂仍可選答。所以，若欲評量收斂區間，建議改以填充題之型式命題。

題號：單選第 2 題

試題內容：

For which α is the interval of convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}x^{n}$ equal to $[-1,1)$.

(A) 1;

(B) 1/2;

(C) -1/2;

(D) -1

題型：單選題

參考答案：B

測驗目標：

11－2－2

能夠瞭解定理：若級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，則數列之極限 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

11－2－3

能利用發散級數檢驗法（the test for Divergence），來判斷級數的斂散性。

11－2－5

能瞭解 p 一級數的斂散性，即

當 $p>1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 收斂；當 $p\le 1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 發散。

11－2－7

能利用極限比較檢驗法（Limit Comparison test），來判斷級數的斂散性。

11－2－8

能利用交錯級數檢驗法（Alternating Series test）判斷級數收斂。

11－3－3

能利用下述定理求收斂半徑：

給定一冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=l$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l$，則收斂半徑為

$\frac{1}{l}$。

11－3－5

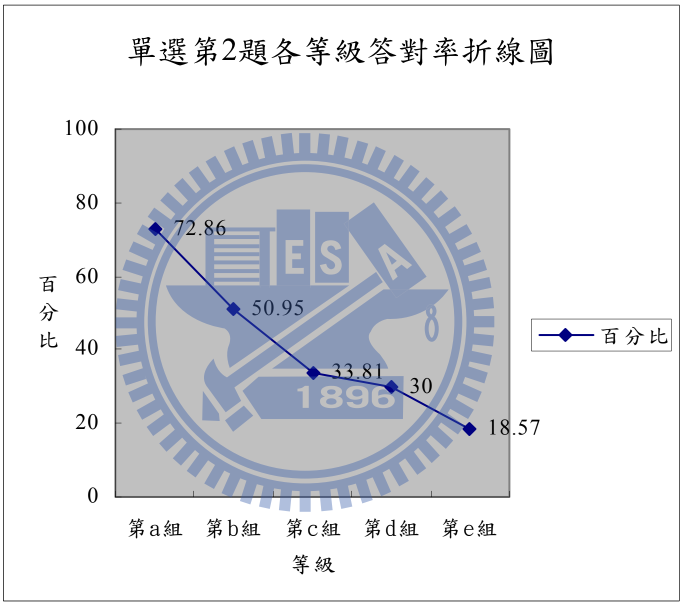
給定一冪級數，能求出其收斂區間。

答對率：P = 41.24%（Ph = 66.45%、Pl = 21.25%）

鑑別度：D = 0.452

難度：P = 0.4124

作答情形：



單選題第 2 題鑑別度總表（表 962-a2-3

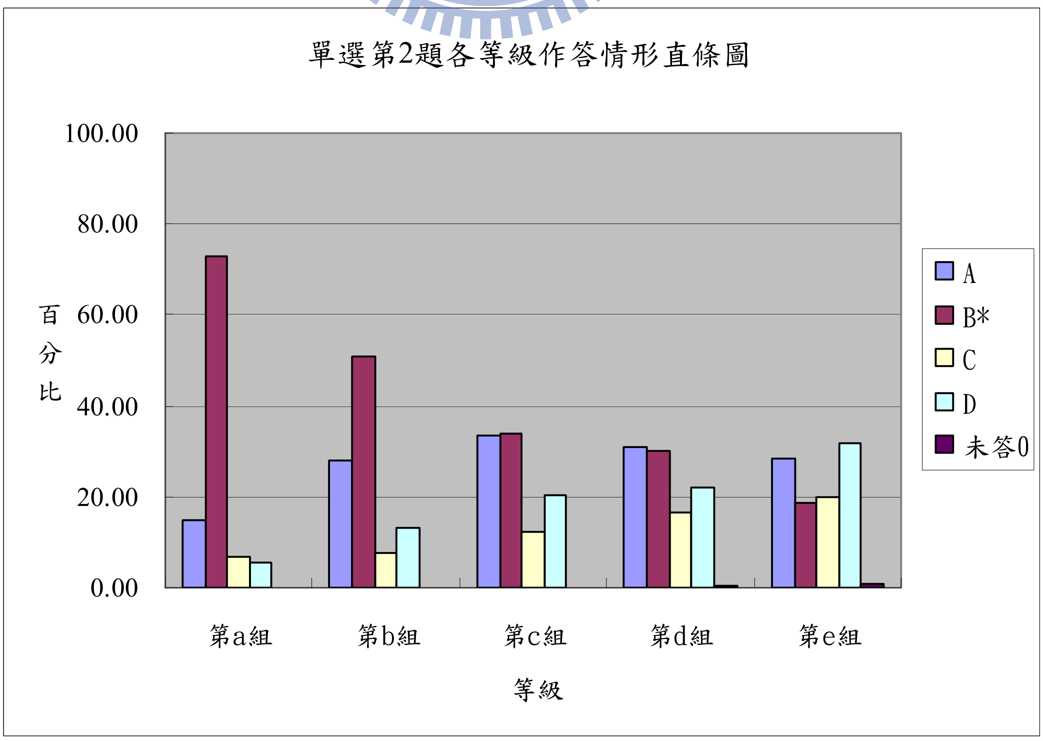
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 2 題	0.4520	0.2190	0.1714	0.0381	0.1143

單選第 2 題五等分組考生各選項選答情形表

單選第 2 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	31	14.76%	59	28.10%	70	33.33%	65	30.95%	60	28.57%
B*	153	72.86%	107	50.95%	71	33.81%	63	30.00%	39	18.57%
C	14	6.67%	16	7.62%	26	12.38%	35	16.67%	42	20.00%
D	12	5.71%	28	13.33%	43	20.48%	46	21.90%	67	31.90%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 2 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 2 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	285	27.14%	60	19.17%	86	29.97%
B*	433	41.24%	208	66.45%	61	21.25%
C	133	12.67%	21	6.71%	56	19.51%
D	196	18.67%	24	7.67%	81	28.22%
未答	3	0.29%	0	0.00%	3	1.05%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 41.24%，是答對率最低的單選題，難度介於難易適中與困難的邊界。高分組答對率 66.45%，低分組答對率 21.25%。鑑別度 0.452 非常優良，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第 a、b 兩組的學生與鑑別 b、c 兩組的學生，(鑑別等級均達非常優良)。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e 五組的答對率分別為 72.86%、50.95%、33.81%、30.00%與 18.57%。

本題為有關收斂區間的解題性問題，由於題目是給定收斂區間，要求出參數 α，解題的步驟雖和一般求收斂區間的程序相似，由於其中的解題邏輯不同，增加了問題的困難度。但由於是單選題，學生即使不能真正求得 α 的範圍，只要將選項中的 α 值代入，分別檢其對應之收斂區間，亦可得出正確選項。若此題改為填充題，則答對率必定大幅降低。

解題步驟如下，

由題意給定之冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}x^n$，利用定理「給定一冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=l$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l$，則收斂半徑為 $\frac{1}{l}$」，計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{\alpha}(n+1)}{(n+2)n^{\alpha}}\right|=1，$$

故不論 α 的值為何，收斂半徑均為1。

因為已知收斂區間為 $[-1,1)$，故級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}x^n$ 在端點 $x=-1$ 為收斂，在端點 $x=1$ 發散。即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}\text{收斂且}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}\text{發散。}$$

(1) 因為$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}$收斂，由定理：

若級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收斂，則數列之極限$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

可知$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}=0$，因此，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}=0$。

若$\alpha\geq 1$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{1+\frac{1}{n}}=1$ or ∞。故$\alpha<1$。

而$\alpha<1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}$是否收斂：

當$\alpha<1$ 時，$\frac{n^{\alpha}}{n+1}$遞減(令$f(x)=\frac{x^{\alpha}}{x+1}$，可計算$f'(x)=\frac{x^{\alpha-1}\left[(\alpha-1)x+\alpha\right]}{(x+1)^2}$，

故當x夠大時，可得$f'(x)<0$，即f遞減)，且$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{1+\frac{1}{n}}=0$，由

交錯級數檢驗法（Alternating Series test）可知級數$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}$收斂。

因此，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}$收斂的充要條件為$\alpha<1$ 。

（2）在$x=1$時，級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}$發散：

用極限比較檢驗法（Limit Comparison test）比較$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}$與$p$－級數

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{\alpha}}{n+1}}{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}=1\text{，}$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}$與$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$有相同的斂散性。

由 p 一級數的斂散性，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$ 發散的充要條件為 $1-\alpha\leq 1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}$ 發散的充要條件為 $1-\alpha\leq 1$，即 $\alpha\geq 0$

由 (1),(2) 可得 $0\leq\alpha<1$，故（B）選項 $\alpha=\frac{1}{2}$ 為符合題意之值。

（法二）將各選項的 α 值代回級數，並利用 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{\alpha}}{n+1}$ 收斂且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n+1}$ 發散的條件做檢驗。

（1） 當 $\alpha=1$，級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$。因為 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 不存在，故由發散級數檢驗法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 在 $x=-1$ 時發散，故（A）非為正確選項。

（2） 當 $\alpha=\frac{1}{2}$，級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}x^n$。因為 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 為交錯級數，且當 n 夠大時，$\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 會遞減，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=0$，故由交錯級數檢驗法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}x^n$ 在 $x=-1$ 時收斂；又因為用極限比較檢驗法比較 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 與發散的 p 一級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=1，$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 有相同的斂散性，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}x^n$ 在 $x=1$ 時會發散。故（B）為正確選項。

（3） 當 $\alpha=-\frac{1}{2}$，級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}x^n$。因為用極限比較檢驗法比較 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ 與收斂的 p 一級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1，$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 有相同的斂散性，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}x^n$ 在 $x=1$ 時會收斂，故（C）非為正確選項。

（4） 當 $\alpha=-1$，級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$。因為用極限比較檢驗法比較 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 與收斂的 p 一級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=1，$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 有相同的斂散性，或由套疊級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}]=1$，均可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 在 $x=1$ 時會收斂，故（D）非為正確選項。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（A）選項的學生共有 27.14%，為該組選答率最高的錯誤選項；高分組有 19.17%；低分組達 29.97%，高於該組選答正確選項的比例。由各等級作答情形直條圖，除第 a 組，其餘各組答（A）選項之人數差異不大。由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（C）選項的學生有 12.67%，低分組有 19.51%，接近該組選答正確選項的比例。答（D）選項的學生共有 18.67%，低分組有 28.22%，高於該組選答正確選項比例。由各等級作答情形直條圖，第 e 組學生答錯誤選項（A）、（C）、（D）的比例均高於該組選答正確選項（B）的比例。

此外，由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，低分組選答（A）、（D）選

項的人數接近，平均約為 29%，選答（B）、（C）選項的人數接近，平均約為 20.5%。而由各等級作答情形直條圖，c、d 兩組學生在各選項的選答比例都相當接近。

題號：單選第 3 題

試題內容：

If $\vec{F}(t)=\hat{i}+t\hat{j}+t^2\hat{k}$ $\vec{G}(t)=t\hat{i}+e^t\hat{j}+3\hat{k}$ Which of the following is not true？

(A) $\vec{F}'(t)=\hat{j}+2t\hat{k}$;

(B) $\vec{G}'(t)\times\vec{F}(t)=(t^2e^t)\hat{i}+t^2\hat{j}+(t-e^t)\hat{k}$

(C) $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=(3-2te^t-t^2e^t)\hat{i}+(3t^2)\hat{j}+(e^t-2t)\hat{k}$

(D) $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

題型：單選題

參考答案：B

測驗目標：

13－1－6

給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 及 a，能夠求出 $\mathbf{r}'(a)$。

13－1－7

能暸解向量函數的微分法則。

即暸解：假定 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 都是可微的向量函數，c 是一個純量，而 f 是一個實數值函數，則：

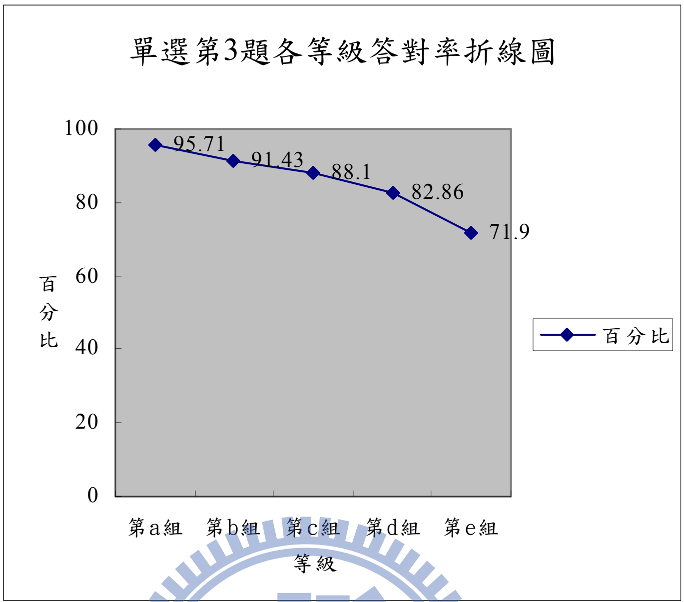
$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\right]=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$$

答對率：P = 86.00%（Ph = 94.57%、Pl = 74.22%）

鑑別度：D = 0.2035

難度：P = 0.86

作答情形：



單選第 3 題鑑別度總表

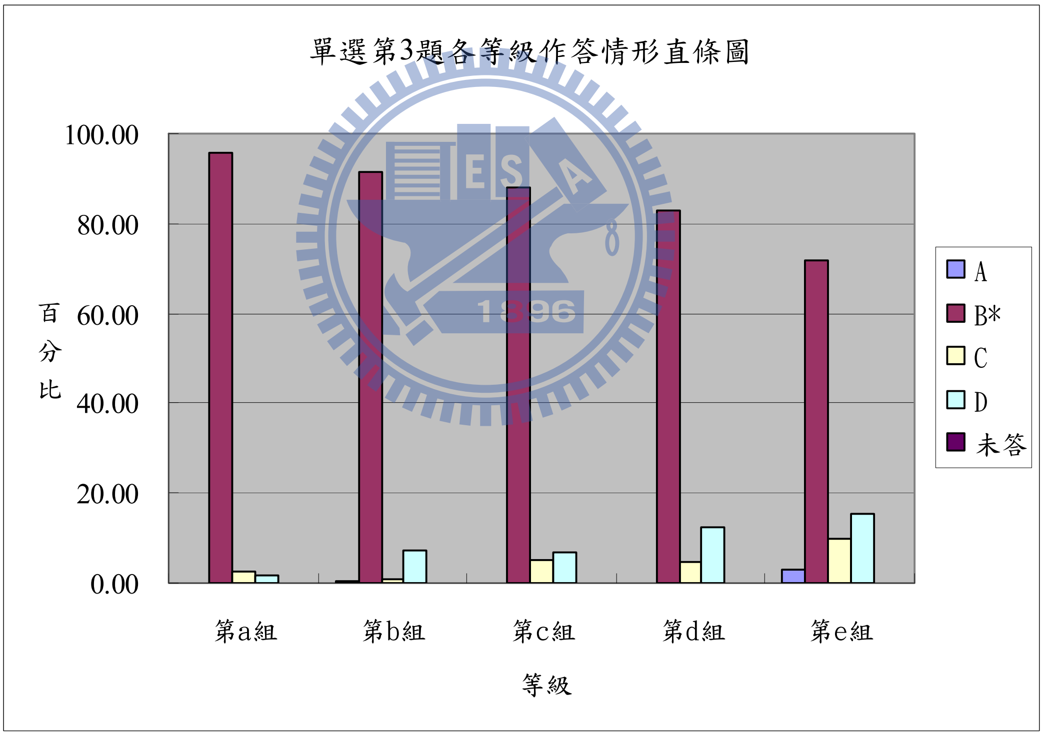
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 3 題	0.2035	0.0429	0.0333	0.0524	0.1095

單選第 3 題五等分組考生各選項選答情形表

單選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 3 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	0	0.00%	6	2.86%
B*	201	95.71%	192	91.43%	185	88.10%	174	82.86%	151	71.90%
C	5	2.38%	2	0.95%	11	5.24%	10	4.76%	21	10.00%
D	4	1.90%	15	7.14%	14	6.67%	26	12.38%	32	15.24%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 3 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 3 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	7	0.67%	1	0.32%	6	2.09%
B*	903	86.00%	296	94.57%	213	74.22%
C	49	4.67%	6	1.92%	24	8.36%
D	91	8.67%	10	3.19%	44	15.33%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 86.00%，難度屬於極容易。高分組答對率 94.57%，低分組也有 74.22%。由五等分組考生各選項選答情形表，第 e 組的答對人數仍有 151 人，佔該組 71.90%。鑑別度 0.2035 介於劣與尚可的邊界，由各等級答對率折線

圖與鑑別度總表，除了對第 d、e 兩組的鑑別能力尚可外，對其餘各組均沒有什麼鑑別力，是鑑別度最低的單選題。

本題其實是四個各自獨立的是非題，評量向量函數的微分與向量外積，屬於機械性的程序問題，計算並不困難。

解題步驟如下，

(1) 計算給定向量函數的導數：$\vec{F}'(t)=\hat{j}+2t\hat{k}$，$\vec{G}'(t)=\hat{i}+e^t\hat{j}$ 。

(2) 計算 $G'(t)\times\vec{F}(t)$：

$$G'(t)\times\vec{F}(t)=\left(\hat{i}+e^t\hat{j}\right)\times\left(\hat{i}+t\hat{j}+t^2\hat{k}\right)=(t^2e^t)\hat{i}-t^2\hat{j}+(t-e^t)\hat{k}$$

(3) 計算 $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)$：

可以先算外積再求導數

$$(\vec{F}\times\vec{G})(t)=\left(\hat{i}+t\hat{j}+t^2\hat{k}\right)\times\left(t\hat{i}+e^t\hat{j}+3\hat{k}\right)=(3t-t^2e^t)\hat{i}-(3-t^3)\hat{j}+(e^t-t^2)\hat{k}$$

$$(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=(3-2te^t-t^2e^t)\hat{i}+(3t^2)\hat{j}+(e^t-2t)\hat{k}\text{ 。}$$

也可以利用（D）選項的微分法則，但計算量會較大。

由此可得（B）為所求之選項。

計算外積時，若依第一列展開但忘記第二維度的負號（這是在計算外積時，學生容易出錯的地方），則會計算錯誤，則會得出

$$G'(t)\times\vec{F}(t)=(t^2e^t)\hat{i}+t^2\hat{j}+(t-e^t)\hat{k}$$

及

$$(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=(3-2te^t-t^2e^t)\hat{i}-(3t^2)\hat{j}+(e^t-2t)\hat{k}\text{ ；}$$

以為敘述（B）為真（C）敘述為偽，而誤選（C）。。

（D）選項是測驗向量函數外積的微分法則

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\right]=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)\text{。}$$

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，本選項相對有較多學生選答，共有 91（8.67%）的學生選答。代表這些學生雖能執行向量函數外積的微分程序，學生可以把向量函數的微分法則當公式背，但對向量函數微分的代數結構並不瞭解。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（A）選項的學生只有 0.67%，表示學生幾乎都能正確計算出向量函數的導數。以向量外積的計算程序而言，答錯此題的學生最有可能答（C）；但由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（C）選項的學生僅 4.67%，只佔答錯人數的三分之一。而答（D）選項的學生卻有 8.67%，為選答率最高的錯誤選項，連高分組亦有 3.19%選答，代表學生對於向量函數的微分法則之抽象概念並不熟悉。

修題建議

1. 建議將題幹敘述中的「not true」，以大寫「NOT TRUE」、「NOT true」或加底線「<u>not true</u>」等形式來提醒學生注意要選的是錯誤命題。
2. 以（D）選項的選答情形來看，學生可能會執行向量外積的計算，但對向量函數的微分法則之抽象概念並不熟悉。建議修改給定的向量函數以評量學生是否能利用下列向量函數的微分法則定理做計算。如選擇 $\vec{G}(t)$，使得 $\vec{G}'(t)$ 平行 $\vec{F}(t)$，則 $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)$。更進一步，可考慮複選題，並以

$\vec{F}'(t)$ 、 $\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$ 、 $\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)$ 及 $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)$ 作為選項。

題號：單選第 4 題

試題內容：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$

(A) 1;

(B) 0;

(C) $\frac{1}{2}$;

(D) does not exist

題型：單選題

參考答案：A

測驗目標：

14－1－5

能利用下述定理求函數的極限：

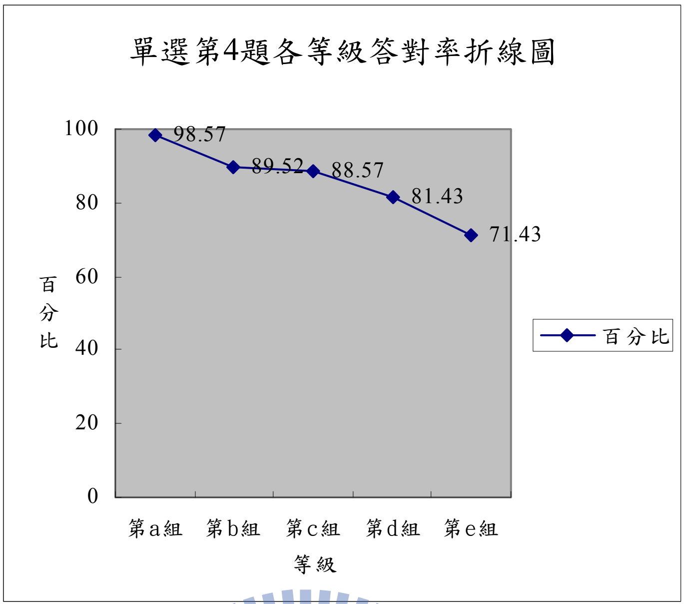
若 f 為雙變數實函數且 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$，$g$ 是在 L 連續的單變數實函數，令 $h=g\circ f$ 。則 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=g(L)$ 。

答對率：P＝85.90%（Ph＝96.81%、Pl＝72.82%）；

鑑別度：D＝0.2399；

難度：P＝0.859；

作答情形：



單選第 4 題鑑別度總表

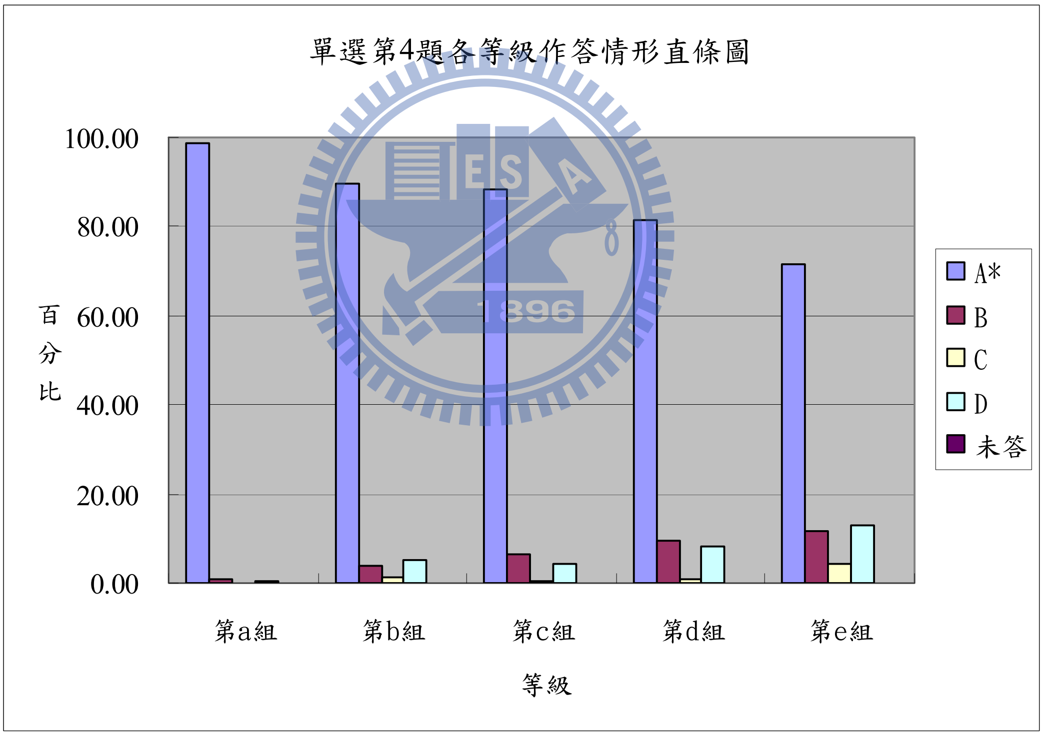
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 4 題	0.2399	0.0905	0.0095	0.0714	0.1000

單選第 4 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 4 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	902	85.90%	303	96.81%	209	72.82%
B	68	6.48%	5	1.60%	31	10.80%
C	15	1.43%	1	0.32%	11	3.83%
D	65	6.19%	4	1.28%	36	12.54%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

單選第 4 題五等分組考生各選項選答情形表

單選第 4 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	207	98.57%	188	89.52%	186	88.57%	171	81.43%	150	71.43%
B	2	0.95%	8	3.81%	14	6.67%	20	9.52%	24	11.43%
C	0	0.00%	3	1.43%	1	0.48%	2	0.95%	9	4.29%
D	1	0.48%	11	5.24%	9	4.29%	17	8.10%	27	12.86%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%



試題分析：

本題答對率 85.90%，難度屬於極容易。高分組答對率 96.81%，低分組答對率 72.82%。鑑別度 0.2399 為尚可，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題除了對第 a、b 兩組與對第 d、e 兩組的鑑別能力為尚可外，幾乎無法鑑

別出第 b、c 兩組的學生。

本題為計算雙變數函數極限的程序性問題，解題步驟有

(1) 令 $\theta = x^2 + y^2$ 或極座標變換，將多變數極限化為單變數極限。

(2) 利用羅必達法則（L'Hospital's Rule）計算極限。

解題程序如下，

<u>法一：</u>

1. 令 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$，則 $x^2 + y^2 = r^2$，且 $(x,y)\to(0,0)$ 等價於 $r\to 0$。故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2}$$

2. 利用單變數的羅必達法則（L'Hospital's Rule），計算得

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sin r}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\cos r}{1} = 1 \text{。}$$

<u>法二：</u>

令 $\theta = x^2 + y^2$，則 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$。若記得「$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$」這個性質，將可直接得到答案。否則，利用羅必達法則（L'Hospital's Rule）計算極限也很容易。

若學生混淆或記錯 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\sin r^2}{r^2}$ 與 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sin r^2}{r^2}$，則可能會誤算為 0 或極限不存在而

選（B）或（D）。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（B）選項的學生有 6.48%，高分組 1.60%，低分組 10.80%。答（D）選項的學生有 6.19%，高分組 1.28%，低分組 12.54%。由各等級作答情形直條圖，各組裡選（B）與選（D）的人數相差不大。

題號：單選第 5 題

試題內容：

Find the volume of the solid bounded by the planes $y=0, z=0$ and $z=1-x+y$ and the parabolic cylinder $y=1-x^2$

(A) $\frac{28}{15}$;

(B) $\frac{23}{15}$;

(C) $\frac{11}{6}$;

(D) $\frac{13}{7}$

題型：單選題

參考答案：A

測驗目標：

15－1－1

能瞭解二重積分的定義與幾何意義。

15－1－5

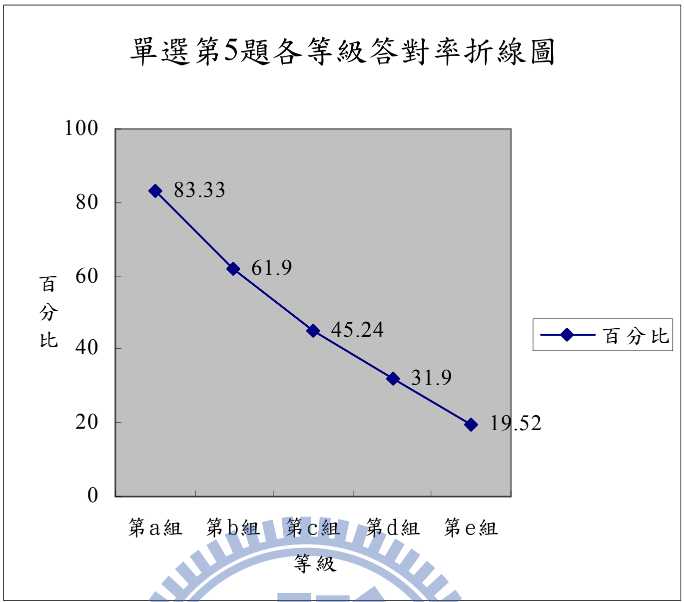
能夠利用適當的迭代積分順序，來計算給定的二重積分。

答對率：P = 48.38%（Ph = 78.59%、Pl = 21.6%）

鑑別度：D = 0.56991

難度：P = 0.4838

作答情形：



單選第 5 題鑑別度總表

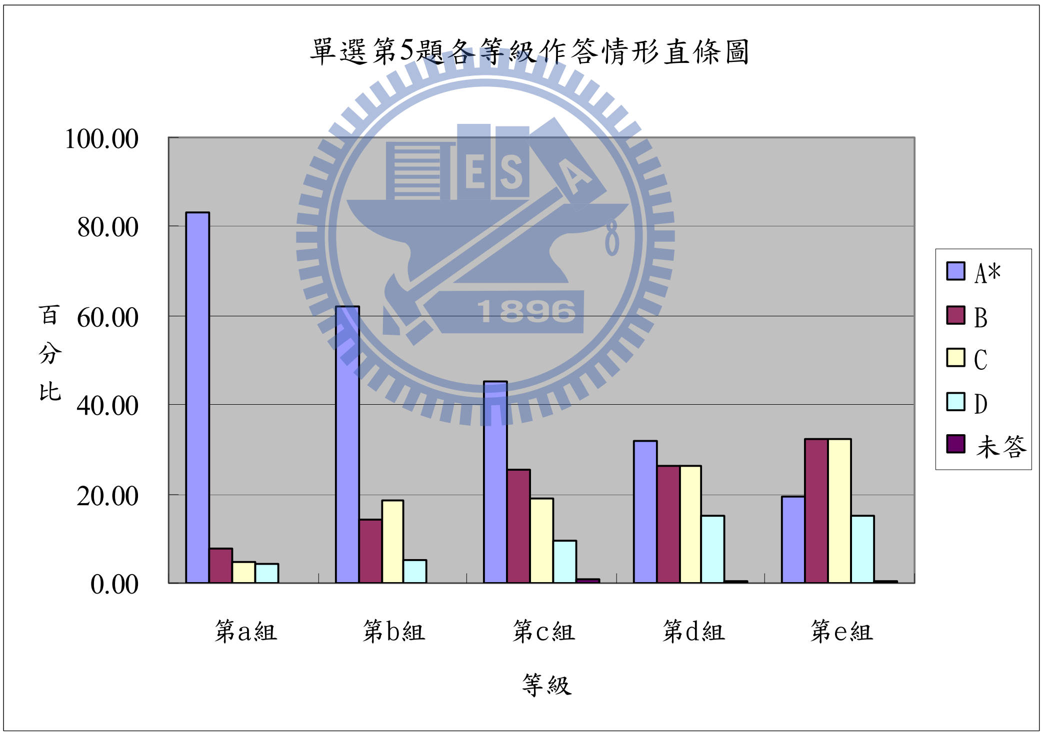
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 5 題	0.5699	0.2143	0.1667	0.1333	0.1238

單選第 5 題五等分組考生各選項選答情形表

單選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 5 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	175	83.33%	130	61.90%	95	45.24%	67	31.90%	41	19.52%
B	16	7.62%	30	14.29%	53	25.24%	55	26.19%	68	32.38%
C	10	4.76%	39	18.57%	40	19.05%	55	26.19%	68	32.38%
D	9	4.29%	11	5.24%	20	9.52%	32	15.24%	32	15.24%
未答	0	0.00%	0	0.00%	2	0.95%	1	0.48%	1	0.48%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 5 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 5 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	508	48.38%	246	78.59%	62	21.60%
B	222	21.14%	27	8.63%	90	31.36%
C	212	20.19%	27	8.63%	88	30.66%
D	104	9.90%	13	4.15%	45	15.68%
未答	4	0.38%	0	0.00%	2	0.70%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率48.38%，難度屬於難易適中。高分組通過率78.59%，低分組通過率21.6%。鑑別度0.5699非常優良，是鑑別度最高的單選題，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第a、b兩組的學生，(鑑別等級為非常優

良)。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e五組的答對率分別為83.33%、61.90%、45.24%、31.90%與19.52%。

本題要求由空間中平面 $y=0$、$z=0$ 及 $z=1-x+y$，與拋物柱面 $y=1-x^2$ 所圍出之空間區域的體積。此空間區域為

$$\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-x+y, 0\le y\le 1-x^2, -1\le x\le 1\}\text{，}$$

其圖形如下。

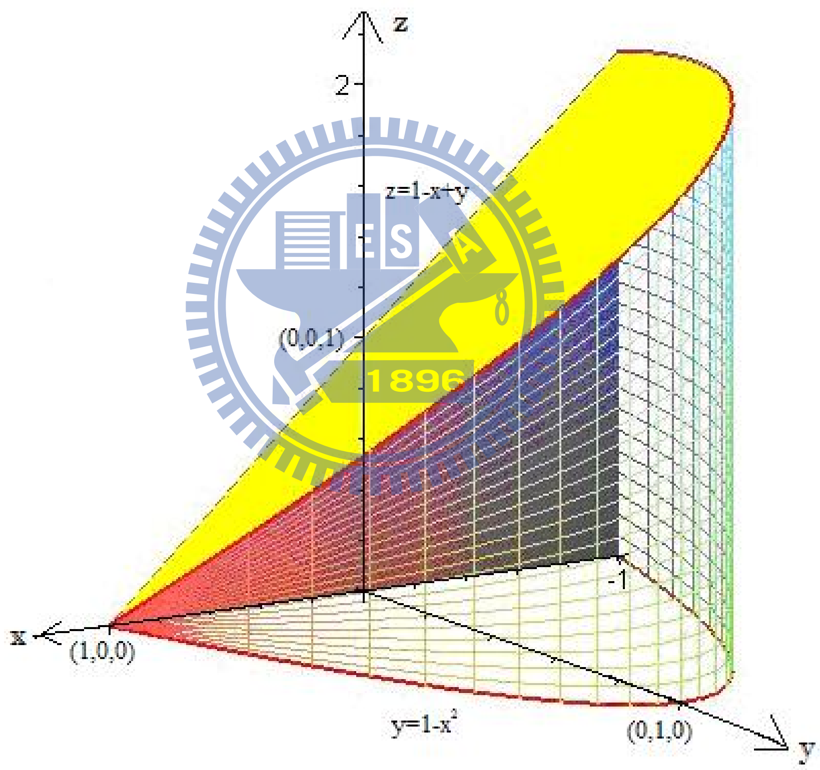


圖962-a5-1

本題的解題關鍵是對空間圖形的瞭解，給定之曲面間並沒有複雜的空間關係，是屬於基本的多重積分的應用問題。

若以三重積分來計算，則為

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{1-x+y} dzdydx\text{。}$$

若以二重積分來計算，則本題為計算 $z=1-x+y$ 在積分區域 R 的二重積分，

其中區域 R 為 $\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1-x^2, -1\le x\le 1\}$，其圖形如下。

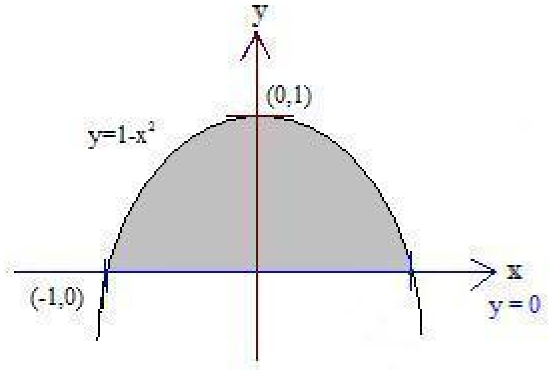


圖962-a5-1

無論以三重積分來計算或以二重積分來計算，都歸結到計算

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(1-x+y)\,dydx\text{。}$$

所求之體積為

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(1-x+y)\,dydx\\
&=\int_{-1}^{1}[y-xy+\frac{1}{2}y^2]|_{y=0}^{1-x^2}\,dx\\
&=\int_{-1}^{1}[(1-x^2)-x(1-x^2)+\frac{1}{2}(1-x^2)^2]dx\\
&=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}x^4+x^3-2x^2-x+\frac{3}{2})dx\\
&=[\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x]|_{x=-1}^{1}\\
&=\frac{28}{15}
\end{aligned}$$

此處之計算不困難，但因有許多分數的運算，必須細心才能正確作答。然而，

因為 $x(1-x^2)$ 是奇函數且 $(1-x^2)$ 及 $\frac{1}{2}(1-x^2)^2$ 是偶函數，若能利用對稱性，則

$$\int_{-1}^{1}[(1-x^2)-x(1-x^2)+\frac{1}{2}(1-x^2)^2]dx$$
$$=2\int_{0}^{1}[(1-x^2)+\frac{1}{2}(1-x^2)^2]dx$$
$$=\int_{0}^{1}(2-2x^2+1-2x^2+x^4)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(3-4x^2+x^4)dx$$
$$=3-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{28}{15}$$

則計算會簡單許多。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（B）、（C）選項的學生各有 21.14%與 20.19%，是選答率較高的錯誤選項。高分組答此兩選項的人數相同，均為 8.63%；低分組答此兩選項的人數亦接近，各為 31.36%與 30.66%%，且比例均高於該組選答正確選項（A）的比例。由五等分組考生各選項選答情形表，第 d 組選答（B）、（C）選項的人數相同，比例均為 26.19%；第 e 組選答（B）、（C）選項的人數亦相同，比例均為 32.38%。

修題建議

根據觀察後續請學生再測之結果，建議可以積分範圍無法正確寫出之學生易犯情況作為誘答選項，如：

（1）有畫出圖形，但以直線 $y=0$ 與端點 $(0,1,0)$ 為變數 y 之邊界

列出 $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(1-x+y)dydx=3$

（2）沒有畫圖，解給定曲面之數學式：令 $z=0$ 代入 $z=1-x+y$ 得 $y=x-1$；

令 $y=0$ 代入 $y=1-x^2$ 得 $x=\pm1$，列出 $\int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{1-x^2}\int_{0}^{1-x+y}1dzdydx=4$。

題號：單選第 6 題

試題內容：

The value of $\iint_R \sin(x^2+y^2)dA$,where $R=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$, is

(A) $\frac{\pi}{2}(\cos 1-\cos 4)$

(B) $\frac{\pi}{2}(\sin 4-\sin 1)$

(C) $\pi(\cos 1-\cos 4)$

(D) $\pi(\sin 4-\sin 1)$

題型：單選題

參考答案：A

測驗目標：

15－1－7

若 $f(x,y)$ 在極座標區域（polar region）

$D=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta, h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$ 連續，則能利用

$\iint\limits_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$

寫出給定二重積分在極座標對應的迭代積分。

15－1－8

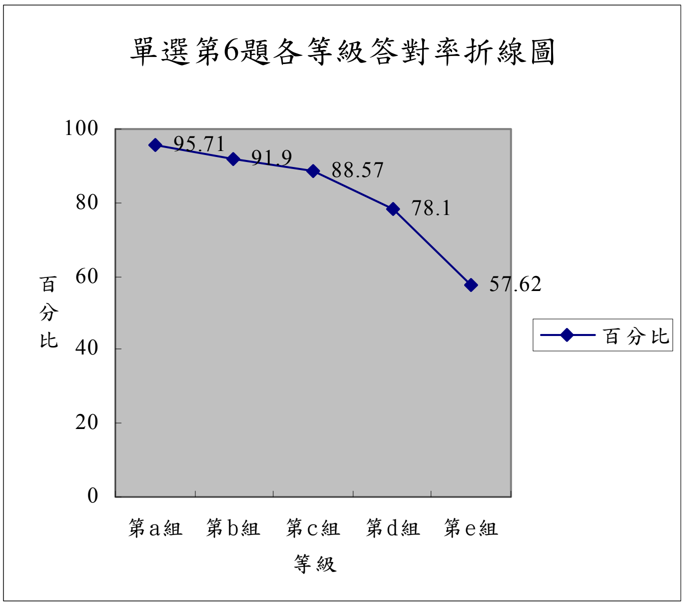
能夠適當地選擇直角座標或極座標來有效求出二重積分的值。

答對率：P＝82.38%（Ph＝95.21%、Pl＝62.72%）

鑑別度：D＝0.3249

難度：P＝0.8238

作答情形：



單選第 6 題鑑別度總表

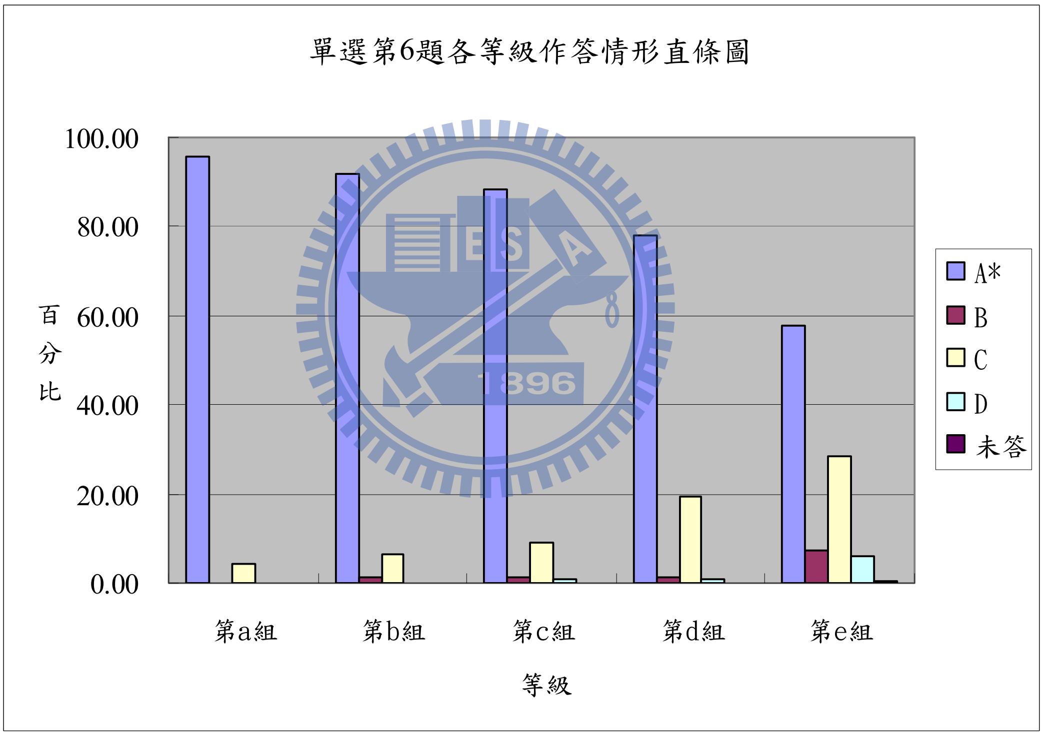
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 6 題	0.3249	0.0381	0.0333	0.1048	0.2048

單選第 6 題五等分組考生各選項選答情形表

單選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 6 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	201	95.71%	193	91.90%	186	88.57%	164	78.10%	121	57.62%
B	0	0.00%	3	1.43%	3	1.43%	3	1.43%	15	7.14%
C	9	4.29%	14	6.67%	19	9.05%	41	19.52%	60	28.57%
D	0	0.00%	0	0.00%	2	0.95%	2	0.95%	13	6.19%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 6 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 6 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	865	82.38%	298	95.21%	180	62.72%
B	24	2.29%	2	0.64%	18	6.27%
C	143	13.62%	13	4.15%	74	25.78%
D	17	1.62%	0	0.00%	14	4.88%
未答	1	0.10%	0	0.00%	1	0.35%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率82.38%，難度屬於極容易。高分組答對率95.21%，低分組答對率62.72%。鑑別度0.3249為優良，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第d、e兩組的學生，(鑑別等級為非常優良)。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e五組的答對率分別為95.71%、91.90%、88.57%、

78.10%與57.62%。

本題為計算二重積分的程序性問題，評量學生是否能利用極座標來計算 $\iint_R \sin(x^2+y^2)dA$。計算量很少，積分過程需用到單變數變數轉換的先備知識。

解題步驟如下，

先畫出在直角座標的積分區域 $R=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$，其圖形為下圖（如圖 962-a6-1）中藍色著色部份區域。

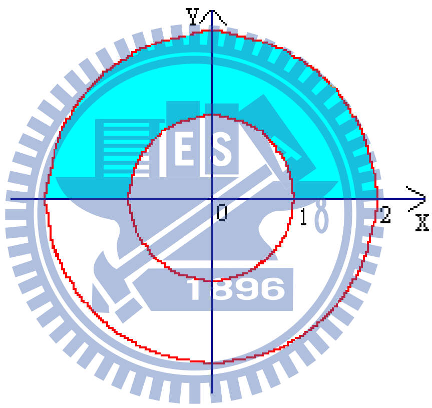


圖 962-a6-1

觀察上圖與被積分函數 $\sin(x^2+y^2)$ 之型式，可知本題應選擇極座標來做二重積分的計算，故利用

$$\iint_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

寫出 $\iint_R \sin(x^2+y^2)dA$ 在極座標對應的迭代積分為

$$\int_0^\pi \int_1^2 \sin(r^2)\cdot rdrd\theta \text{ 。}$$

令 $u=r^2$，則 $du=2rdr$ 。故

$$\int_0^{\pi}\int_1^2 \sin(r^2)\cdot r dr d\theta = \int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\int_1^2 \sin u du)d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(r^2)\big|_{r=1}^{2}\, d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\cos 4 - \cos 1) = \frac{\pi}{2}(\cos 1 - \cos 4)$$

，得（A）選項為正確答案。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（C）選項的學生共有 13.62%，是選答率最高的錯誤選項；高分組有 4.15%，低分組也達 25.78%，代表沒有注意 $y \ge 0$ 的條件，把積分區域 $[0,\pi]$ 誤值為 $[0,2\pi]$；由五等分組考生各選項選答情形表，第 d、e 組分別仍有 19.52%與 28.57%的學生選答。

由五等分組考生各選項選答情形表，答（B）選項 $\frac{\pi}{2}(\sin 4 - \sin 1)$ 與（D）選項 $\pi(\sin 4 - \sin 1)$ 的學生各有 2.29%與 1.62%。因為題目要求 $\iint_R \sin(x^2+y^2)dA$ 且此兩選項均非誘答選項，即使不會極座標的變數轉換，有積分概念的學生就應該選擇含有 $\cos x$ 的（A）或（C）選項，代表選（B）或（D）選項的學生無推理能力。由各等級作答情形直條圖，幾乎都是第 e 組的學生。

題號：單選第 7 題

試題內容：

Suppose f is continuous on R. Then $\int_0^4\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dxdy =$

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$

(B) $\int_0^{\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$

(C) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$

(D) None of above

題型：單選題

參考答案：B

測驗目標：

15－1－7

設 $f(x,y)$ 在極座標區域（polar region）

$D=\{(r,\theta)|\alpha\leq\theta\leq\beta,h_1(\theta)\leq r\leq h_2(\theta)\}$ 連續，能利用

$$\iint\limits_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

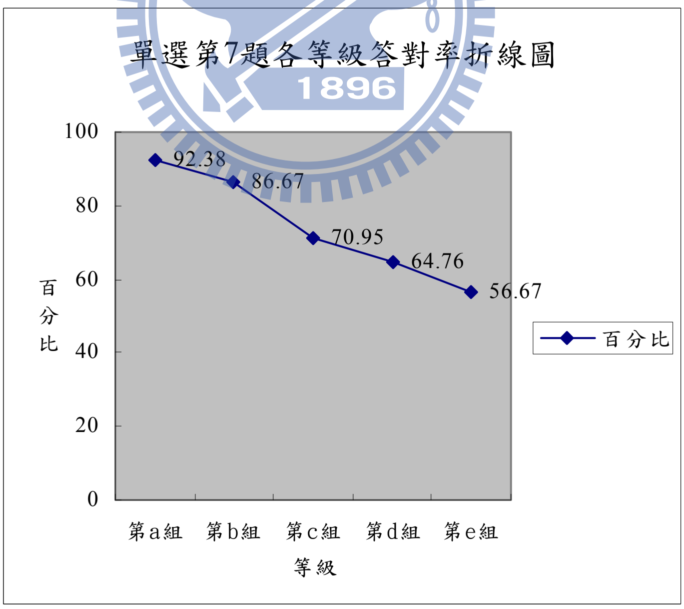
寫出給定二重積分在極座標對應的迭代積分。

答對率：P＝74.29%（Ph＝91.37%、Pl＝58.19%）

鑑別度：D＝0.3318

難度：P＝0.7429

作答情形：



單選第7題各等級答對率折線圖

單選第 7 題鑑別度總表

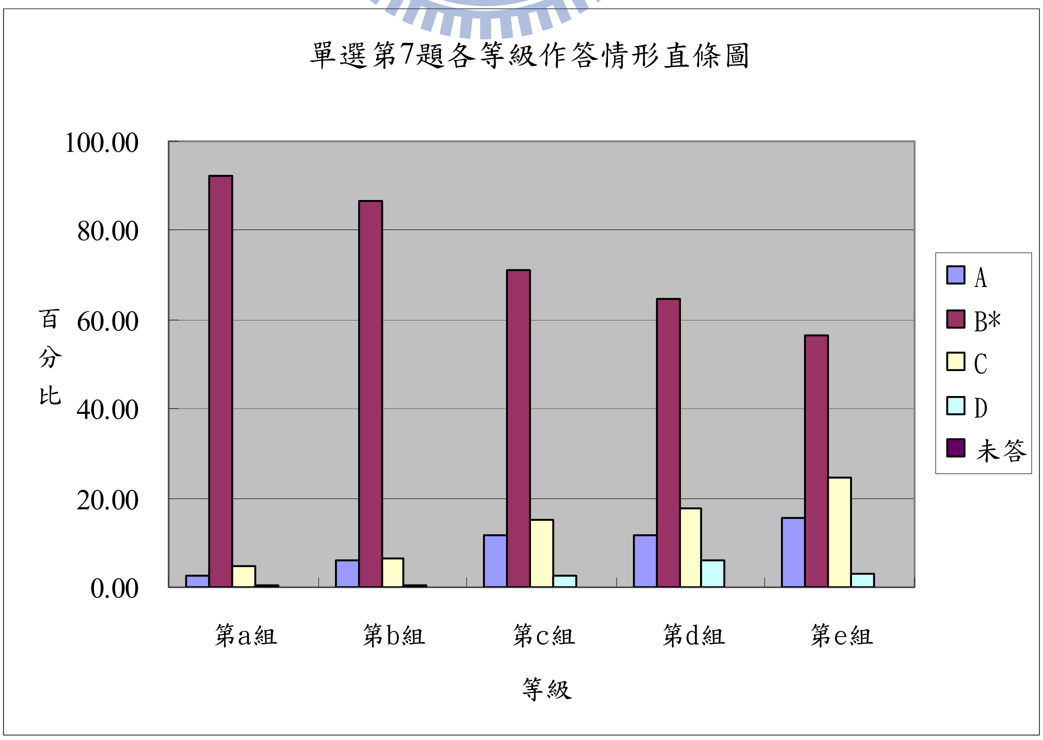
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 7 題	0.3318	0.0571	0.1571	0.0619	0.0810

單選第 7 題五等分組考生各選項選答情形表

單選第 7 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	5	2.38%	13	6.19%	24	11.43%	24	11.43%	33	15.71%
B*	194	92.38%	182	86.67%	149	70.95%	136	64.76%	119	56.67%
C	10	4.76%	14	6.67%	32	15.24%	37	17.62%	52	24.76%
D	1	0.48%	1	0.48%	5	2.38%	13	6.19%	6	2.86%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 7 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 7 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	99	9.43%	11	3.51%	40	13.94%
B*	780	74.29%	286	91.37%	167	58.19%
C	145	13.81%	15	4.79%	66	23.00%
D	26	2.48%	1	0.32%	14	4.88%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 74.29%，難度屬於容易。高分組答對率 91.37%，低分組 58.19%。鑑別度 0.3318 為優良，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第 b、c 兩組的學生（鑑別等級為優良）。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e 五組的答對率分別為 92.38%、86.67%、70.95%、64.76%與 56.67%。

本題給定一積分區域在直角座標的迭代積分，評量學生是否能利用極座標做二重積分的變數轉換（Change of variables）。評量二重積分的變數轉換時，Jacobian 的計算應是測驗的項目之一；但本題除了（D）選項之外，其餘選項均已給出正確的 Jacobian 的值。因此，嚴格說來，本題只是在評量學生是否能做直角座標和極座標的轉換而已。令人訝異的是，本題答對率只有 74.29%，表示約有四分之一的學生對極座標十分不熟悉。

解題步驟如下，

1. 觀察題幹中 $\iint f(x,y)dxdy$ ，與選項 $\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$ ，可知本題要求極座標轉換的積分區域。

2. 由給定的迭代積分 $\int_0^4\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dxdy$ 得 $f(x,y)$ 在直角座標的積分區域為

$$R=\left\{(x,y)\mid -\sqrt{16-y^2}\le x\le\sqrt{16-y^2}, 0\le y\le 4\right\}$$

，其圖形如下圖中紅色的半圓形區域。

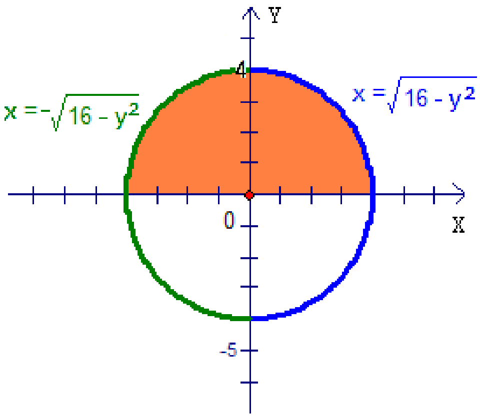


圖962-a7-1

觀察上圖即得知

$$R=\{(r,\theta)|0\le\theta\le\pi,0\le r\le 4\}，$$

故

$$\int_0^4\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta，$$

得（B）選項為正確答案。

選（A）、（C）選項之學生，代表無法正確地做直角座標和極座標的轉換。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形得知，答（A）選項的學生有9.43%，低分組有13.94%。答（C）選項共有13.81%，是選答率最高的錯誤選項；高分組有4.79%，低分組則為23.00%，代表學生誤以為積分區域為整個圓形區域。

修題建議

1. 建建議某些選項去掉 Jacobian 的值 r，如 $\int_0^{\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)drd\theta$，且避免「以上皆非」之選項。

2. 或可考慮改為填充題並評量 Jacobian 的值。

題號：單選第 8 題

試題內容：

Which of the following is wrong？

(A) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dxdzdy$

(B) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz = \int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} dydxdz$

(C) $\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-z} dydzdx = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dxdzdy$

(D) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dzdxdy = \int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} dzdydx$

題型：單選題

參考答案：B

測驗目標：

15－2－3

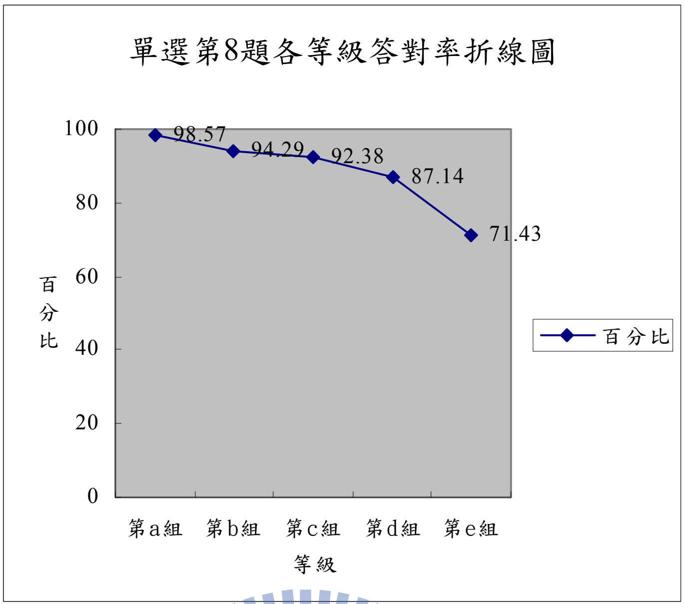
給定一個三重迭代積分，能夠改寫其積分次序。

答對率：P = 88.76%（Ph = 98.08%、Pl = 74.56%）

鑑別度：D = 0.2352

難度：P = 0.8876

作答情形：



單選第 8 題鑑別度總表

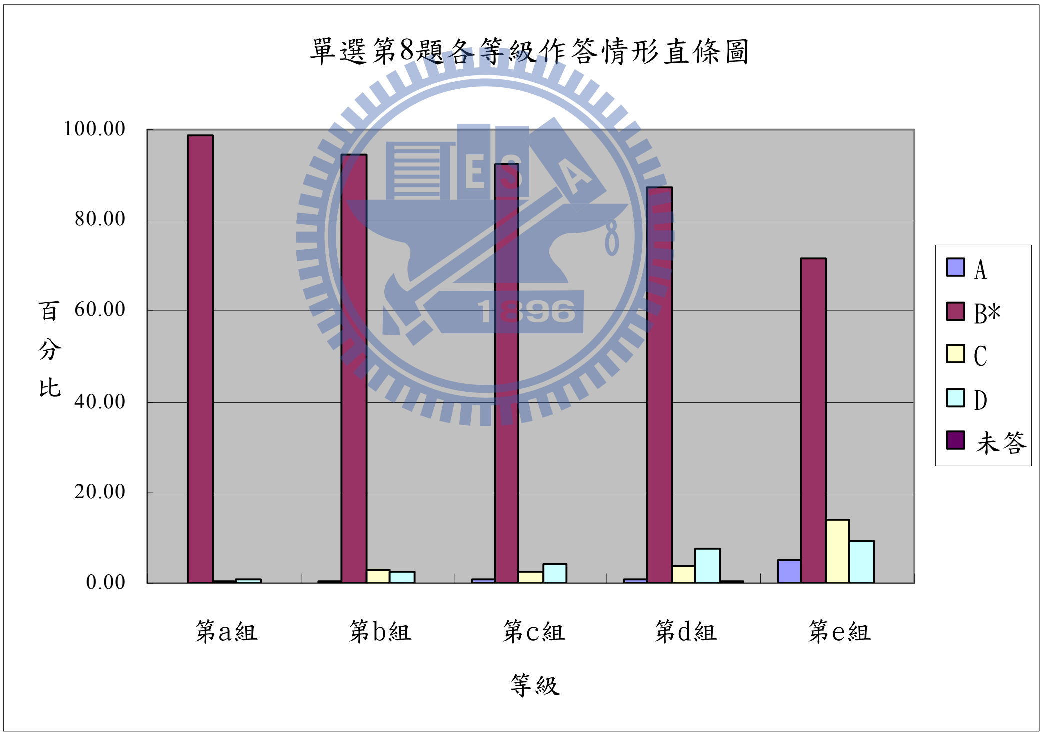
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 8 題	0.2352	0.0429	0.0190	0.0524	0.1571

單選第 8 題五等分組考生各選項選答情形表

單選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 8 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	2	0.95%	11	5.24%
B*	207	98.57%	198	94.29%	194	92.38%	183	87.14%	150	71.43%
C	1	0.48%	6	2.86%	5	2.38%	8	3.81%	29	13.81%
D	2	0.95%	5	2.38%	9	4.29%	16	7.62%	20	9.52%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 8 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 8 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	16	1.52%	1	0.32%	12	4.18%
B*	932	88.76%	307	98.08%	214	74.56%
C	49	4.67%	2	0.64%	33	11.50%
D	52	4.95%	3	0.96%	28	9.76%
未答	1	0.10%	0	0.00%	0	0.00%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 88.76%，是答對率最高的單選題，難度屬於極容易。高分組答對率 98.08%，低分組仍有 74.56%。鑑別度 0.2352 為尚可，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第 d、e 兩組的學生，(鑑別等級為優良)，

但幾乎無法鑑別出第 b、c 兩組的學生。

本題為判斷給定不同積分次序的三重迭代積分是否等價之概念性問題。

看似四個各自獨立的選項，但其實利用了相同的概念，除了利用積分區域與變數之關係逐項檢驗（法一），亦可以連結不同選項間之關係，利用推論的方式來解答（法二）。計算量極少，只要概念清楚，作答時間很短。

解題步驟如下，

（法一）

1. 觀察（A）選項 $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dxdzdy$ ，由於

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz &= \int_0^1\int_0^{1-z} 2\,dydz \\ \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dxdzdy &= \int_0^1\int_0^{1-y} 2\,dzdy\end{aligned},$$

只需要考慮 $\int_0^1\int_0^{1-z} 2\,dydz$ 和 $\int_0^1\int_0^{1-y} 2\,dzdy$ 是否相等即可。等式左邊的積分之積分區域為 $\{(y,z)\,|\,0\le y\le 1-z, 0\le z\le 1\}$ ，其圖形如下（如圖 962-a8-1），

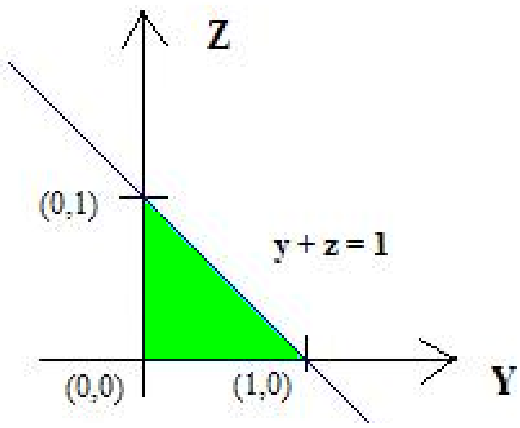


圖 962-a8-1

改變積分順序，得 $\int_0^1\int_0^{1-y} 2\,dzdy$ 。若學生瞭解積分中之變數為「啞巴變數」

(dummy variables)，則將互換即可得知 $\int_0^1\int_0^{1-z} 2\ dydz = \int_0^1\int_0^{1-y} 2\ dzdy$。

所以（A）選項之敘述為真，非正確選項。

同理可得，（C）、（D）選項之敘述均為真，非正確選項。

2. 觀察（B）選項 $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz = \int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} dydxdz$。

   $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz = \int_0^1 2(1-z)dz > 0$，而 $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} dydxdz = \int_0^1 0\ dz = 0$。

   可知

$$\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz \neq \int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} dydxdz \text{。}$$

   故（B）選項之敘述為假，為正確選項。

（法二）由於計算十分簡單，直接計算各選項中之迭代積分亦可。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（D）選項的學生有 4.95%，高分組 0.96%，為所有學生與高分組學生選答率最高的錯誤選項；低分組為 9.76%。由五等分組考生各選項選答情形表，（D）選項為 c、d 兩組選答率最高的錯誤選項。然而，只要知道 Fubini 定理，即可知

$$\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dzdxdy = \int_0^1\int_0^2\left[\int_0^{1-y} dz\right]dxdy = \int_0^2\int_0^1\left[\int_0^{1-y} dz\right]dydx = \int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} dzdydx \text{。}$$

因此，答（D）選項的這些學生顯然對重積分十分不熟悉。

修題建議

1. 建議把題幹中的「wrong」改為大寫「WRONG」或加底線「<u>wrong</u>」來提醒學生，或與單選第 3 題的修題建議一致改成「NOT TRUE」。
2. 若出題者的本意在評量學生是否能夠變換積分次序，則建議將選項改為

   (A) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 f(x,y,z)dxdzdy$

(B) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 f(x,y,z)dxdydz=\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} f(x,y,z)dydxdz$

(C) $\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-z} f(x,y,z)dydzdx=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 f(x,y,z)dxdzdy$

(D) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdxdy=\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$

題號：單選第 9 題

試題內容：

Find the surface area of the part of the surface $z=2xy$ that lies within the cylinder $x^2+y^2=4$.

(A) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$;

(B) $\frac{\pi}{7}(19\sqrt{19}-1)$;

(C) $\frac{\pi}{8}(21\sqrt{21}-1)$;

(D) $\frac{\pi}{9}(23\sqrt{23}-1)$

題型：單選題

參考答案：A

測驗目標：

15－1－7

設 $f(x,y)$ 在極座標區域（polar region）

$D=\{(r,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$ 連續，能利用

$\iint_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$

寫出給定二重積分在極座標對應的迭代積分

15－1－8

能夠適當地選擇直角座標或極座標來有效求出二重積分的值。

15－1－9

給定一曲面 $z = f(x, y)$，其中 $(x, y) \in D$，若 f 的一階偏導數在 D 上連續，

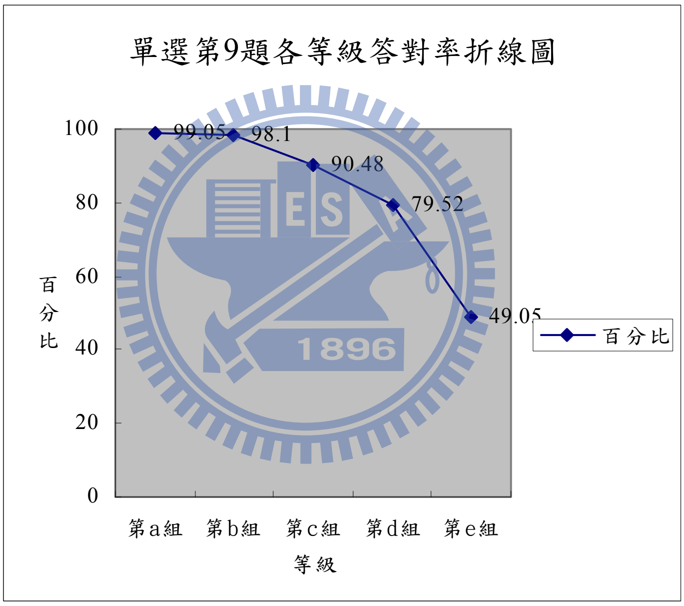
能夠求出曲面的表面積。

答對率：P = 83.24%（Ph = 99.04%、Pl = 56.79%）

鑑別度：D = 0.4225

難度：P = 0.8324

作答情形：



單選第 9 題鑑別度總表

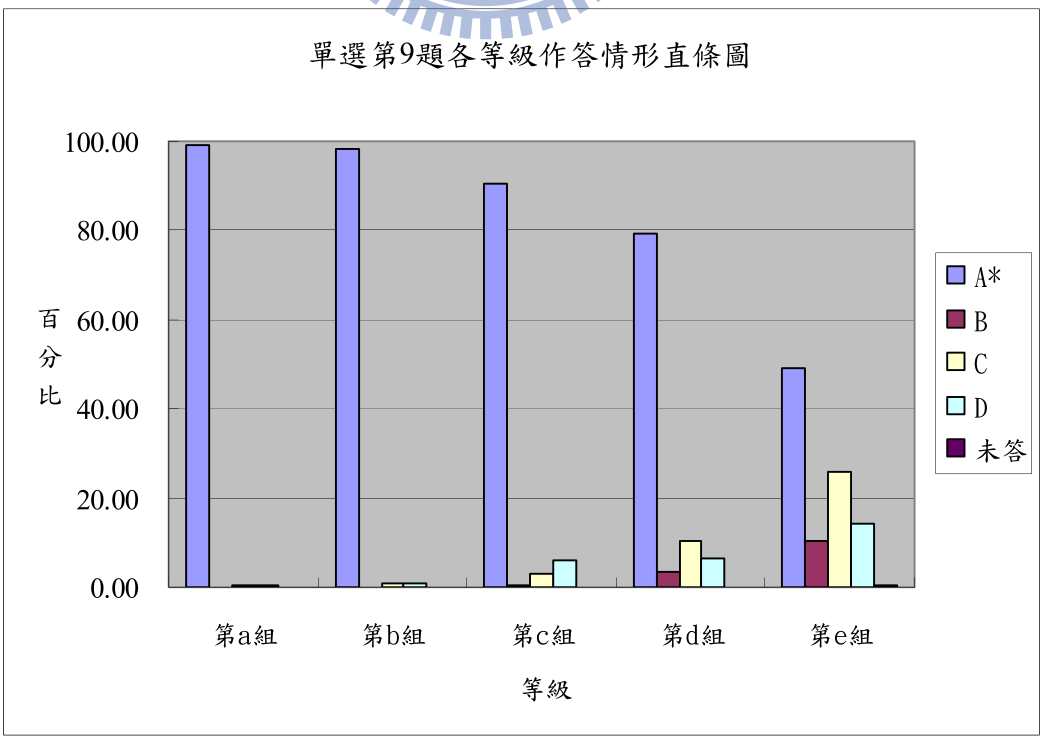
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 9 題	0.4225	0.0095	0.0762	0.1095	0.3048

單選第 9 題五等分組考生各選項選答情形表

單選第 9 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	208	99.05%	206	98.10%	190	90.48%	167	79.52%	103	49.05%
B	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	7	3.33%	22	10.48%
C	1	0.48%	2	0.95%	6	2.86%	22	10.48%	54	25.71%
D	1	0.48%	2	0.95%	13	6.19%	14	6.67%	30	14.29%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 9 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選第 9 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	874	83.24%	310	99.04%	163	56.79%
B	30	2.86%	0	0.00%	25	8.71%
C	85	8.10%	2	0.64%	63	21.95%
D	60	5.71%	1	0.32%	35	12.20%
未答	1	0.10%	0	0.00%	1	0.35%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 83.24%，難度屬於極容易。高分組答對率 99.04%，低分組 56.79%。鑑別度 0.4225 非常優良，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第 d、e 兩組的學生，(鑑別等級為非常優良)，但幾乎無法鑑別出第 a 組與第 b 組的學生。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e 五組的答對率分別為 99.05%、98.10%、90.48%、79.52%與 49.05%。

本題是計算表面積的程序性問題。解題步驟有

(1) 知道表面積公式。

(2) 決定積分區域。

(3) 知道選擇極座標來計算二重積分。

解題程序如下，

令 $f(x,y)=2xy$，由表面積公式得本題要求之表面積為

$$\iint_R \sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)+1}\,dA=\iint_R \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA \qquad (1)$$

其中 $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$，其圖形如下。

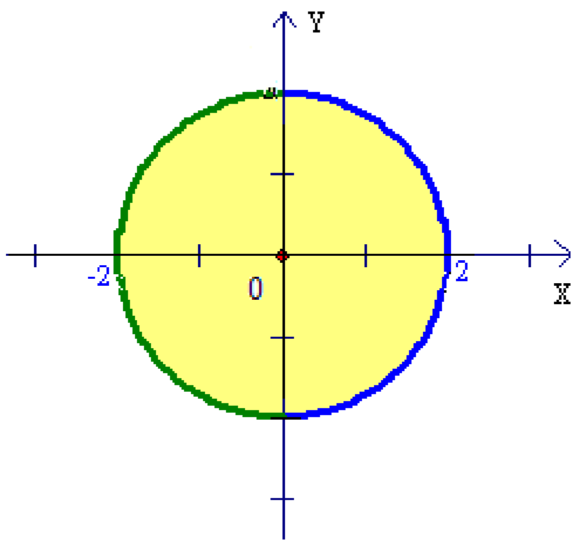


圖 962-a9-1

觀察積分區域之型式，即可知本題應選擇極座標來做二重積分的計算，即

$$\iint_R \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta \text{。}$$

令 $u=4r^2+1$，則 $du=8rdr$ ，故

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^{17}\frac{1}{8}\sqrt{u}\,du\right)d\theta = \frac{2\pi}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)\text{，}$$

得（A）選項為正確答案。

由全體暨高低分組考生各選項選答情形表，答（C）選項的學生有 8.10%，是選答率最高的錯誤選項；高分組為 0.64%，低分組則有 21.95%；由五等分組考生各選項選答情形表，第 d、e 組分別仍有 10.48%與 25.71%的學生選答。答（D）選項的學生有 5.71%，由各等級作答情形直條圖，幾乎都是第 c、d、e 三組的學生。

修題建議

由於本題非正解之誘答效應不明顯，且考的是計算層面，建議將本題改為填充題。

題號：單選第 10 題

試題內容：

The area of the part of the surface $z=x+2y^2+3$ that lies above the triangle with vertices $(0,0),(0,1)$ and $(2,1)$ is

(A) $\frac{17}{6}\sqrt{2}$

(B) $\frac{15}{6}\sqrt{2}$

(C) $\frac{13}{6}\sqrt{2}$

(D) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$

題型：單選題

參考答案：C

測驗目標：

15－1－5

能夠利用適當的迭代積分順序，來計算給定的二重積分。

15－1－9

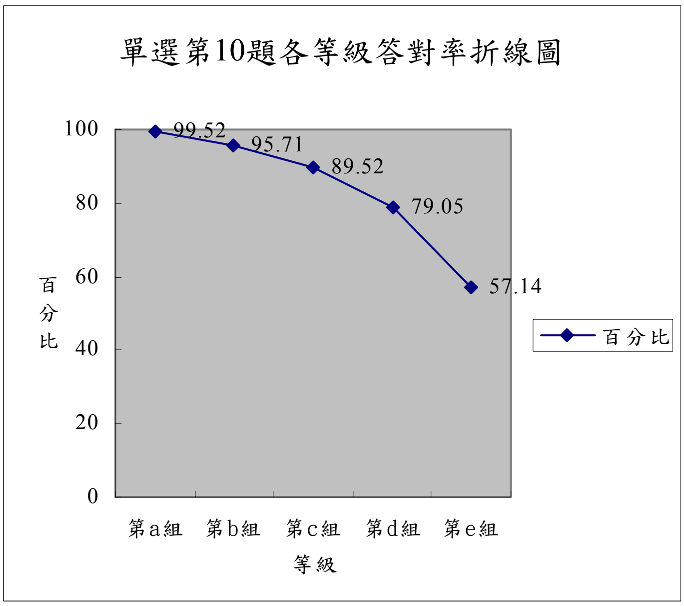
給定一曲面 $z = f(x, y)$，其中 $(x, y) \in D$，若 f 的一階偏導數在 D 上連續，能夠求出曲面的表面積。

答對率：P = 84.19%（Ph = 98.08%、Pl = 63.07%）

鑑別度：D = 0.3501

難度：P = 0.8419

作答情形：



單選第 10 題鑑別度總表

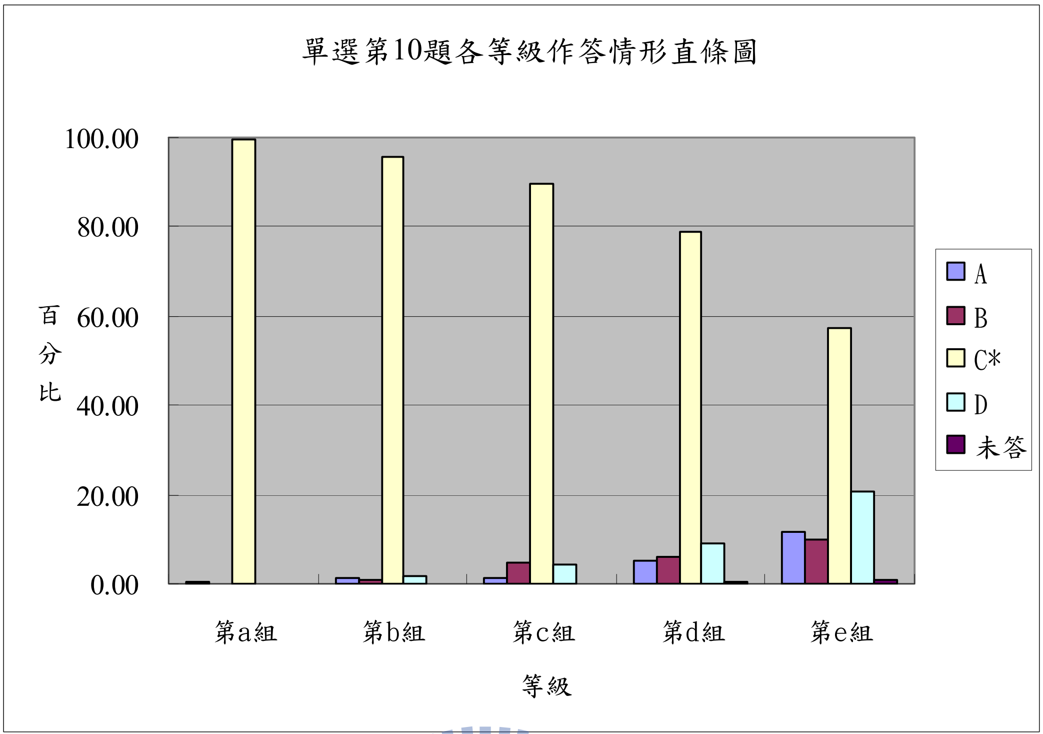
鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
單選題	第 10 題	0.3501	0.0381	0.0619	0.1048	0.2190

單選第 10 題五等分組考生各選項選答情形表

單選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 10 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	1	0.48%	3	1.43%	3	1.43%	11	5.24%	24	11.43%
B	0	0.00%	2	0.95%	10	4.76%	13	6.19%	21	10.00%
C*	209	99.52%	201	95.71%	188	89.52%	166	79.05%	120	57.14%
D	0	0.00%	4	1.90%	9	4.29%	19	9.05%	43	20.48%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

單選第 10 題全體暨高低分組考生各選項選答情形表

單選	所有考生		高分組		低分組	
第 10 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	42	4.00%	4	1.28%	28	9.76%
B	46	4.38%	1	0.32%	25	8.71%
C*	884	84.19%	307	98.08%	181	63.07%
D	75	7.14%	1	0.32%	51	17.77%
未答	3	0.29%	0	0.00%	2	0.70%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%



試題分析：

本題答對率 84.19%，難度屬於極容易。高分組答對率 98.08%，低分組答對率 63.07%。鑑別度 0.3501 為優良，由各等級答對率折線圖與鑑別度總表，本題主要鑑別第 d、e 兩組的學生，(鑑別等級為非常優良)。由五等分組考生各選項選答情形表，a、b、c、d、e 五組的答對率分別為 99.52%、95.71%、89.52%、79.05%與 57.14%。

本題是計算表面積的程序性問題。解題步驟有

(4) 要知道表面積公式。

(5) 決定積分區域。

(6) 選擇適當的迭代積分順序來計算二重積分。

解題程序如下，

令 $f(x,y)=x+2y^2+3$，由表面積公式得本題要求之表面積為

$$\iint_R \sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)+1}dA=\iint_R \sqrt{16y^2+2}dA \qquad (1)$$

其中 R 為由 $x=2y,\ x=0,\ y=1$ 三直線所圍之區域，其圖形為下圖（如圖 962-a10-1）中藍色著色部分的三角區域。

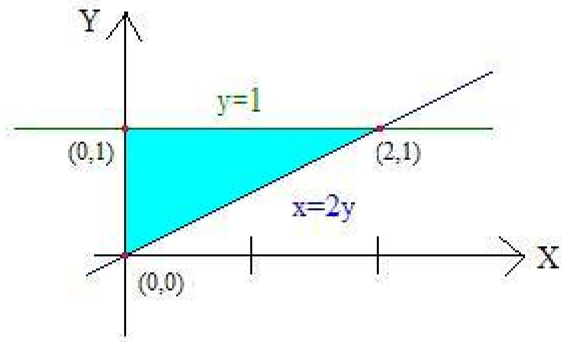


圖 962-a10-1

$$\iint_R \sqrt{16y^2+2}dA=\int_0^1\int_0^{2y}\sqrt{16y^2+2}dxdy=\int_0^1(2y\sqrt{16y^2+2})dy$$

令 $u=16y^2+2$，則 $du=32ydy$。故

$$\int_0^1(2y\sqrt{16y^2+2})dy=\frac{1}{16}\int_2^{18}\sqrt{u}du=\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{18}=\frac{1}{24}(54\sqrt{2}-2\sqrt{2})=\frac{13\sqrt{2}}{6},$$

得（C）選項為正確答案。

若選擇先積 y 再積 x，$\iint_R \sqrt{16y^2+2}dA=\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^1\sqrt{16y^2+2}dydx$，則需利用三角代換。

令 $y=\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{8}}$，$\sqrt{16y^2+2}=\sqrt{2}\sec\theta,\ dy=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\sec^2\theta d\theta$，得

$$\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^1(\sqrt{16y^2+2})dydx=\int_0^2\left(\frac{1}{2}\int_{\tan^{-1}(\sqrt{2}x)}^{\tan^{-1}(2\sqrt{2})}\sec^3\theta d\theta\right)dx$$

就得利用複雜的部分積分或利用公式

$\int \sec^3 t dt = \frac{1}{2}\sec t \cdot \tan t + \frac{1}{2}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + c$ 來計算上式，計算十分繁複。因此，積分順序的選擇在此題是影響作答的關鍵。

修題建議

可利用錯誤的積分區域所得之答案作為誘答選項，如

$$\int_0^1\int_0^2 \sqrt{16y^2+2}\,dxdy = 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{2}+3) \text{ 或 } \int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}y} \sqrt{16y^2+2}\,dxdy = \frac{13}{24}\sqrt{2} \text{ 等等。}$$

題號：複選第 1 題

試題內容：

Which of the following statements about the infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ are true?

(A) If $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, then $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$;

(B) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + a_n\right)$ converges;

(C) If $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + a_n\right)$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges;

(D) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges

題型：複選題

參考答案：A

測驗目標：

11－1－1

能夠瞭解 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 的定義。

11－1－2

能夠瞭解並利用下列的極限法則做計算：若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 均為收斂數列，

則 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$。

11－2－5

能瞭解 p －級數的斂散性，即

當 $p>1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收斂；當 $p\le 1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 發散。

11－2－8

能利用交錯級數檢驗法判斷級數收斂。

11－2－11

能瞭解絕對收斂（absolutely convergent）與條件收斂（conditionally convergent）的蘊涵關係(implication)。

答對率：P = 24.65%（Ph = 35.14%、Pl = 20.56%）

鑑別度：D = 0.1458

難度：P = 0.2465

作答情形：

表 962-b1-1

複選第 1 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	720	68.57%	251	80.19%	175	60.98%
B	341	32.48%	70	22.36%	120	41.81%
C	684	65.14%	191	61.02%	188	65.51%
D	572	54.48%	158	50.48%	148	51.57%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	47	4.48%	32	10.22%	5	1.74%
全錯	650	61.90%	151	48.24%	192	66.90%
部份分	353	33.62%	130	41.53%	90	31.36%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%
加權平均		24.65%		35.14%		20.56%

圖 962-b1-1

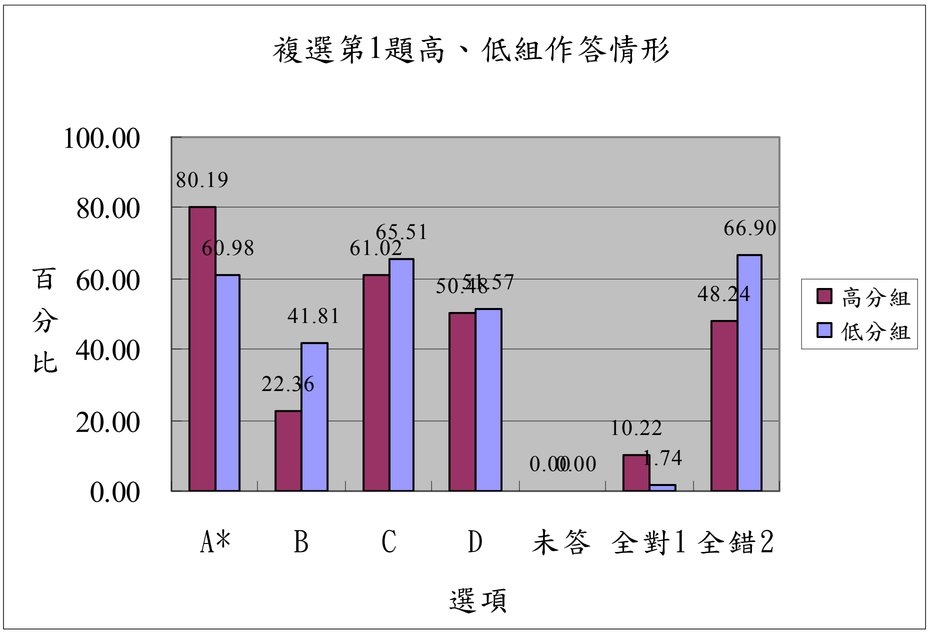


表 962-b1-2

複選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 1 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A*	175	83.33%	147	70.00%	137	65.24%	138	65.71%	123	58.57%
B	38	18.10%	64	30.48%	66	31.43%	86	40.95%	87	41.43%
C	126	60.00%	138	65.71%	149	70.95%	131	62.38%	140	66.67%
D	97	46.19%	128	60.95%	127	60.48%	115	54.76%	105	50.00%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	30	14.29%	4	1.90%	5	2.38%	4	1.90%	4	1.90%
全錯	89	42.38%	136	64.76%	144	68.57%	140	66.67%	141	67.14%
部份分	91	43.33%	70	33.33%	61	29.05%	66	31.43%	65	30.95%
小計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%
加權平均		40.29%		21.90%		19.81%		20.76%		20.48%

表 962-b1-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
複選題	第 1 題	0.1458	0.1839	0.0209	(0.0095)	0.0028

圖 962-b1-2

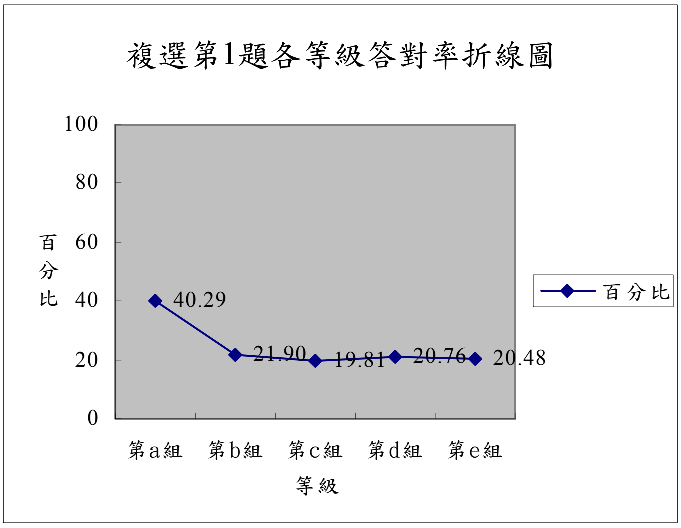


表 962-b1-4

複選第 1 題	d1	d2	d3	d4
A*	0.1333	0.0476	(0.0048)	0.0714
B	0.1238	0.0095	0.0952	0.0048
C	0.0571	0.0524	(0.0857)	0.0429
D	0.1476	(0.0048)	(0.0571)	(0.0476)

di=（正確選項的）高分組選答率減去低分組選答率；或（錯誤選項的）低分組選答率減去高分組選答率；其中，高、低分組係指五等分組中，相鄰兩組相對之成績高低。例如：A 選項的 d1=（若 A 為正確選項）第 a 組選 A 的學生比例減去第 b 組選 A 的學生比例；或是（若 A 為錯誤選項）第 b 組選 A 的學生比例減去第 a 組選 A 的學生比例。

圖 962-b1-3

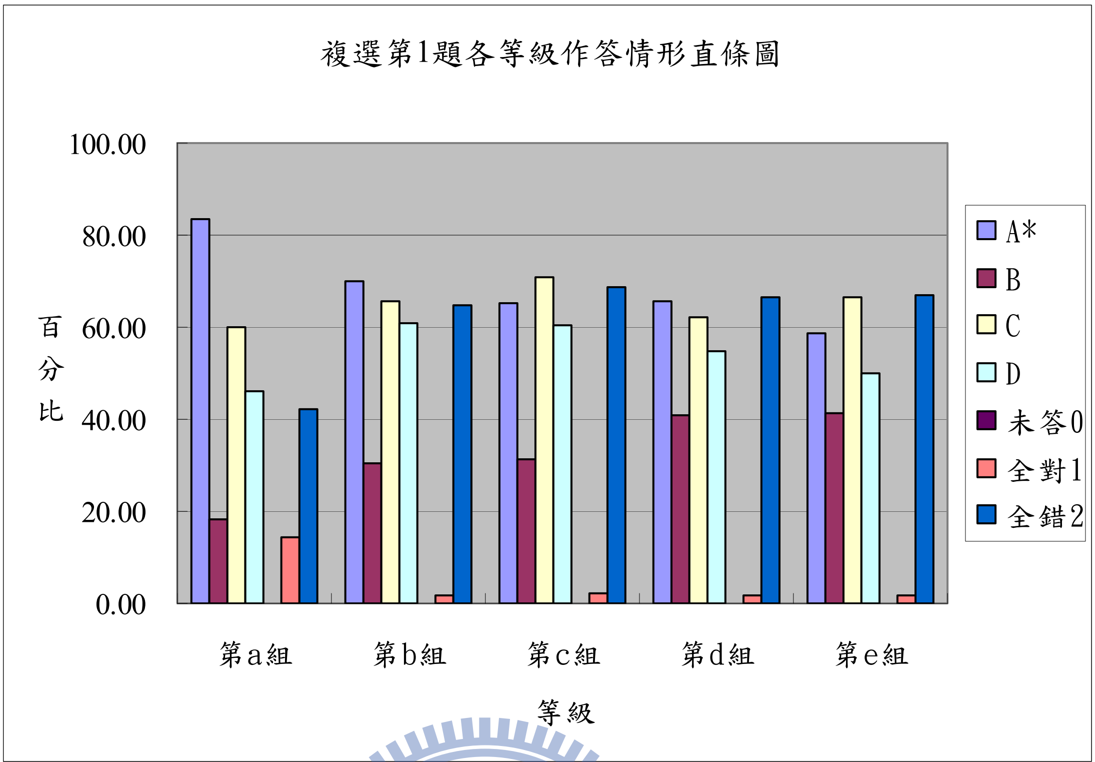


表 962-b1-5

複選第 1 題	所有人		高分組		低分組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	47	4.48%	32	10.22%	5	1.74%
AB	79	7.52%	22	7.03%	25	8.71%
ABC	23	2.19%	7	2.24%	9	3.14%
ABCD	21	2.00%	3	0.96%	6	2.09%
ABD	117	11.14%	30	9.58%	37	12.89%
AC	207	19.71%	74	23.64%	56	19.51%
ACD	159	15.14%	49	15.65%	28	9.76%
AD	67	6.38%	34	10.86%	9	3.14%
B	6	0.57%	0	0.00%	4	1.39%
BC	33	3.14%	2	0.64%	14	4.88%
BCD	23	2.19%	2	0.64%	10	3.48%
BD	38	3.62%	4	1.28%	14	4.88%
C	80	7.62%	17	5.43%	24	8.36%

CD	137	13.05%	36	11.50%	41	14.29%
D	9	0.86%	0	0.00%	2	0.70%
DB	1	0.10%	0	0.00%	1	0.35%
CE	1	0.10%	1	0.32%	0	0.00%
未作答	2	0.19%	0	0.00%	2	0.70%
總計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 962-b1-6

複選第 1 題	第 a 組		第 b 組		第 c 組		第 d 組		第 e 組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	30	14.29%	4	1.90%	5	2.38%	4	1.90%	4	1.90%
AB	15	7.14%	10	4.76%	16	7.62%	22	10.48%	16	7.62%
ABC	3	1.43%	5	2.38%	4	1.90%	5	2.38%	6	2.86%
ABCD	2	0.95%	5	2.38%	6	2.86%	3	1.43%	5	2.38%
ABD	14	6.67%	30	14.29%	16	7.62%	30	14.29%	27	12.86%
AC	53	25.24%	42	20.00%	36	17.14%	33	15.71%	43	20.48%
ACD	35	16.67%	33	15.71%	45	21.43%	30	14.29%	16	7.62%
AD	23	10.95%	18	8.57%	9	4.29%	11	5.24%	6	2.86%
B	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	3	1.43%
BC	2	0.95%	3	1.43%	6	2.86%	10	4.76%	12	5.71%
BCD	0	0.00%	4	1.90%	6	2.86%	6	2.86%	7	3.33%
BD	2	0.95%	7	3.33%	11	5.24%	7	3.33%	11	5.24%
C	9	4.29%	18	8.57%	15	7.14%	19	9.05%	19	9.05%
CD	21	10.00%	28	13.33%	31	14.76%	25	11.90%	32	15.24%
D	0	0.00%	3	1.43%	3	1.43%	2	0.95%	1	0.48%
DB	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%
CE	1	0.48%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
未作答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	2	0.95%
總計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%

試題分析：

由表 962-b1-1，答對率 24.65%為複選五題中最低，難度屬於困難，全對比例僅 4.48%為複選五題中最低，且僅第 a 組的全對比例有 14.29%，其餘四組的

差異不大，均小於各組人數的 3%，全錯比例 61.90%為複選五題中最高；高分組答對率為 35.14%與全對比例 10.22%為複選五題中最低，全錯比例 48.24%與得部份分比例 41.53%為複選五題中最高；低分組答對率 20.56%與全對比例 1.74%亦為複選五題中最低，而全錯比例 66.90%亦為複選五題中最高。鑑別度 0.1458 屬於鑑別度不佳或品質不良之試題，建議刪除。由圖 962-b1-2 與表 962-b1-3，本題主要為鑑別 a、b 兩組間的學生（鑑別等級為非常優良），但對其餘四組則幾乎沒有鑑別能力。

本題為十分困難的無窮數列（或級數）的概念性問題，評量學生對於數列及級數的整體概念。學生必需熟悉級數的性質並做邏輯推論才能答對此題。

解題步驟與學生答題情形如下，

（A）選項

利用三角不等式，可得$\left||a_n|-|0|\right| \le |a_n-0|$。當 n 趨近∞時，因為$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$|a_n-0|$趨近於$0$。因此，當 n 趨近∞時，$\left||a_n|-|0|\right|$亦趨近於 0。由極限的定義可知$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$。故（A）選項為真。

（A）為正確選項，由表 962-b1-1，答（A）選項的學生有 68.57%；有 80.19%的高分組學生與 60.98%的低分組學生選答。由圖 962-b1-3 與表 962-b1-4，主要鑑別 a、b 兩組間的學生，（鑑別等級為優良）。

（B）選項

因為$|a_n| = \left(|a_n| + a_n\right) - a_n$，若（B）選項正確，則會得出收斂級數必絕對收斂。但收斂級數未必絕對收斂，由此可知（B）選項不正確。具體的反例則如

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收斂，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|+\frac{(-1)^n}{n}\right]=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發散。

（B）為錯誤選項，由表 962-b1-1，答（B）選項的學生有 32.48%，是選答率最低的選項；由圖 962-b1-1，高低組選答比例差距不少，分別有 22.36%的高分組學生與 41.81%的低分組學生選答。由圖 962-b1-3 與表 962-b1-4，各組選答本選項的比例均明顯低於選答其他選項之比例，主要為鑑別 a、b 兩組間的學生與 c、d 兩組間的學生，(鑑別等級均為尚可)，但對 b、c 兩組間與別 d、e 兩組間的學生，則幾乎沒有鑑別能力。由表 962-b1-2，五組的選答比例分別為 18.10%、30.48%、31.43%、40.95%與 41.43%。

（C）選項

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不為正項級數時，此敘述則未必成立。反例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$，雖然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|-\frac{1}{n}\right|+\frac{1}{n}\right)$ 收斂，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 發散。

（C）為錯誤選項，由表962-b1-1，答（C）選項的學生有65.14%；但由圖962-b1-1，可看出選答（C）選項的高、低組人數差異不大，分別有61.02%的高分組學生與65.51%的低分組學生選答。由圖962-b1-3，本選項為五組學生選答比例均為最高的錯誤選項，且第c、e兩組選答該選項的比例都高於對正確選項的選答率。由圖962-b4-3與表962-b4-4，本選項對各組間的鑑別能力均為不佳，對c、d兩組間的學生有相對較大但為負向的鑑別能力，(即第c組的選答率高於第d組選答率)，建議刪除。由表962-b1-2，五組選答比例均差距不大，且均有超過六成的學生選答，c組更有高達70.95%選答，為五組中最高。

（D）選項

高等微積分會學到，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收斂；但若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 並非絕對收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 不一定收斂。

反例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$；$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收斂，但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散。所以（D）選項之敘述非真。

（D）為錯誤選項，由表 962-b1-1，答（D）選項的學生有 54.48 %；但由圖 962-b1-1，可看出高、低組人數差異不大，是高、低組選答比例差距最小的選項，分別有 50.48%的高分組學生與 51.57%的低分組學生選答。由表 962-b1-2，a、e 兩組選答人數的比例差距僅 3.81%。由圖 962-b4-3 與表 962-b4-4，本選項主要鑑別 a、b 兩組間的學生，(鑑別等級為優良)，但對其餘四組間的學生，鑑別能力均不佳且為負向，即成績較低的學生組卻有較少的學生選答本錯誤選項，建議修改或刪除。由表 962-b1-2，a、b、c、d、e 五組的選答率分別為 46.19%、60.95%、60.48%、54.76%與 50.00%。

修題建議

整題而言，雖然本題對 a、b 兩組間的學生有非常優良的鑑別能力，但因為難度過高(答對率 24.65%為複選五題中最低，難度屬於困難，全錯比例 61.90%為複選五題中最高)，對其餘四組則幾乎沒有鑑別能力。

且高分組答對率為 35.14%與全對率 10.22%為複選五題中最低，全錯比例 48.24%與得部份分比例 41.53%為複選五題中最高；低分組答對率 20.56%與全對率 1.74%亦為複選五題中最低，而全錯比例 66.90%亦為複選五題中最高。使得整體鑑別度 0.1458 低於 0.25，屬於鑑別度不佳或品質不良之試題，建議刪除。

由選項來看，

正確選項（A）的選答率有 68.57%；鑑別能力優良；

錯誤選項中，

答（B）選項的學生有 32.48%，鑑別能力尚可

答（C）選項的學生有 65.14%，對各組間的鑑別能力均為不佳，對 c、d 兩組間的學生有相對較大但為負向的鑑別能力，建議刪除。

答（D）選項的學生有 54.48 %，對 a、b 兩組間的鑑別等級為優良，但對其餘四組間的學生，鑑別能力均不佳且為負向，建議修改或刪除。

題號：複選第 2 題

試題內容：

Which of the following series are convergent?

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

(B) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{\pi}{n}$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n}{3n-1})$;

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$

題型：複選題

參考答案：BD

測驗目標：

11－2－12

能利用適當的檢驗法判斷級數是否絕對收斂、條件收斂、或發散。

（各選項）

11－2－3

能利用發散級數檢驗法（the test for Divergence），來判斷級數的斂散性。

11－2－6

能利用比較檢驗法（Comparison test）來判斷級數的斂散性

11－2－7

能利用極限比較檢驗法（Limit Comparison test），來判斷級數的斂散性。

11－2－9

能利用比值檢驗法（Ratio test），來判斷級數的斂散性。

11－2－10

能利用交錯級數檢驗法（Alternating Series test）判斷級數收斂。

11－2－11

能瞭解絕對收斂（absolutely convergent）與條件收斂（conditionally convergent）的蘊涵關係(implication)。

答對率：P = 67.09%（Ph = 90.67%、Pl = 37.28%）

鑑別度：D = 0.5339

難度：P = 0.6709

作答情形：

表 962-b2-1

複選第 2 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	319	30.38%	25	7.99%	169	58.89%
B*	924	88.00%	302	96.49%	218	75.96%
C	221	21.05%	17	5.43%	111	38.68%
D*	900	85.71%	298	95.21%	209	72.82%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	555	52.86%	258	82.43%	62	21.60%
全錯	246	23.43%	12	3.83%	150	52.26%
部份分	249	23.71%	43	13.74%	75	26.13%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%
加權平均		67.09%		90.67%		37.28%

圖 962-b2-1

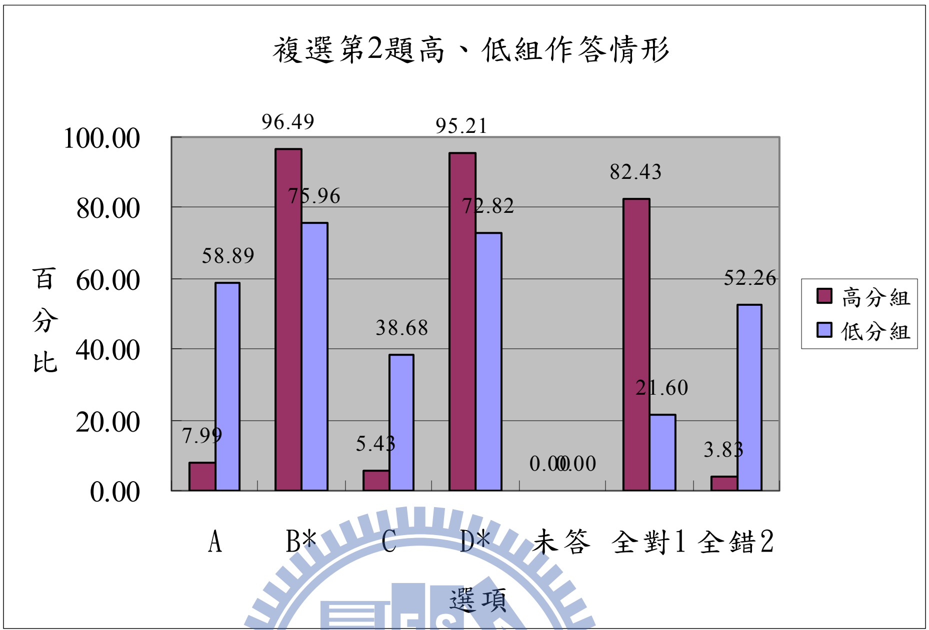


表 962-b2-2

複選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 2 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	16	7.62%	23	10.95%	58	27.62%	88	41.90%	134	63.81%
B*	204	97.14%	199	94.76%	185	88.10%	186	88.57%	150	71.43%
C	6	2.86%	25	11.90%	49	23.33%	53	25.24%	88	41.90%
D*	200	95.24%	199	94.76%	185	88.10%	168	80.00%	148	70.48%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	179	85.24%	156	74.29%	108	51.43%	76	36.19%	36	17.14%
全錯	6	2.86%	14	6.67%	41	19.52%	59	28.10%	126	60.00%
部份分	25	11.90%	40	19.05%	61	29.05%	75	35.71%	48	22.86%
小計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%
加權平均		92.38%		85.71%		68.86%		57.62%		30.86%

表 962-b2-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
複選題	第 2 題	0.5339	0.0667	0.1685	0.1124	0.2676

圖 962-b2-2

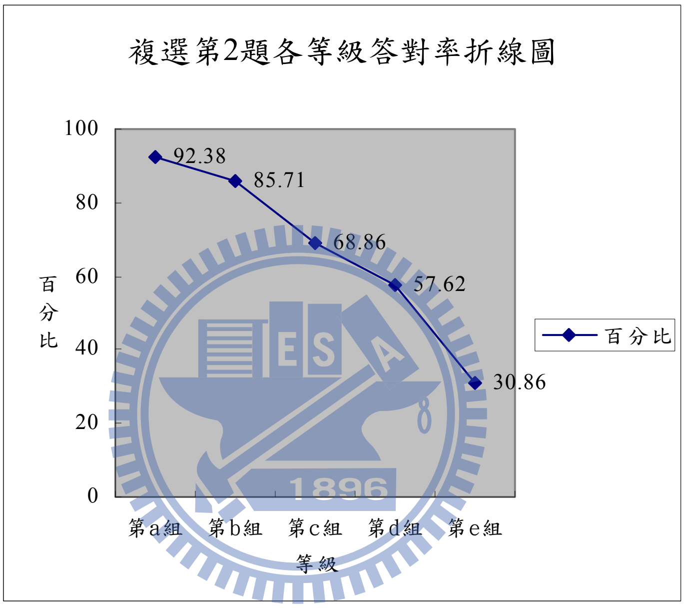


表 962-b2-4

複選第 2 題	d1	d2	d3	d4
A	0.0333	0.1667	0.1429	0.2190
B*	0.0238	0.0667	(0.0048)	0.1714
C	0.0905	0.1143	0.0190	0.1667
D*	0.0048	0.0667	0.0810	0.0952

di=（正確選項的）高分組選答率減去低分組選答率；或（錯誤選項的）低分組選答率減去高分組選答率；其中，高、低分組係指五等分組中，相鄰兩組相對之成績高低。例如：A 選項的 d1=（若 A 為正確選項）第 a 組選 A 的學生比例減去第 b 組選 A 的學生比例；或是（若 A 為錯誤選項）第 b 組選 A 的學生比例減去第 a 組選 A 的學生比例。

圖 962-b2-3

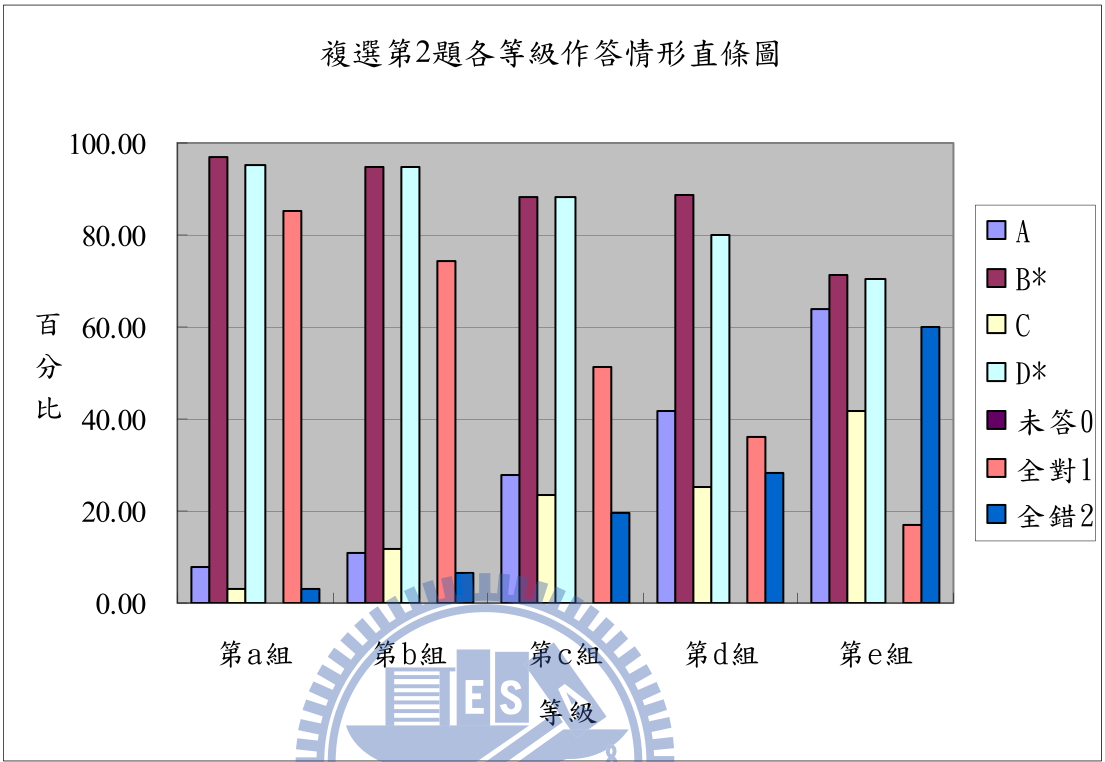


表 962-b2-5

複選第 2 題	所有人		高分組		低分組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	8	0.76%	1	0.32%	6	2.09%
AB	41	3.90%	0	0.00%	22	7.67%
ABC	22	2.10%	0	0.00%	17	5.92%
ABCD	46	4.38%	1	0.32%	33	11.50%
ABD	123	11.71%	18	5.75%	42	14.63%
AC	13	1.24%	0	0.00%	9	3.14%
ACD	17	1.62%	0	0.00%	10	3.48%
AD	49	4.67%	5	1.60%	30	10.45%
B	33	3.14%	9	2.88%	8	2.79%
BC	26	2.48%	5	1.60%	11	3.83%
BCD	78	7.43%	11	3.51%	23	8.01%
BD	555	52.86%	258	82.43%	62	21.60%

C	2	0.19%	0	0.00%	1	0.35%
CD	17	1.62%	0	0.00%	7	2.44%
D	15	1.43%	5	1.60%	2	0.70%
未作答	5	0.48%	0	0.00%	4	1.39%
總計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 962-b2-6

複選第 2 題	第 a 組		第 b 組		第 c 組		第 d 組		第 e 組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	1	0.48%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	6	2.86%
AB	0	0.00%	1	0.48%	10	4.76%	12	5.71%	18	8.57%
ABC	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	7	3.33%	12	5.71%
ABCD	0	0.00%	3	1.43%	6	2.86%	8	3.81%	29	13.81%
ABD	12	5.71%	16	7.62%	25	11.90%	44	20.95%	26	12.38%
AC	0	0.00%	0	0.00%	3	1.43%	2	0.95%	8	3.81%
ACD	0	0.00%	0	0.00%	5	2.38%	3	1.43%	9	4.29%
AD	3	1.43%	2	0.95%	6	2.86%	12	5.71%	26	12.38%
B	7	3.33%	5	2.38%	6	2.86%	10	4.76%	5	2.38%
BC	2	0.95%	3	1.43%	3	1.43%	10	4.76%	8	3.81%
BCD	4	1.90%	14	6.67%	25	11.90%	19	9.05%	16	7.62%
BD	179	85.24%	156	74.29%	108	51.43%	76	36.19%	36	17.14%
C	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%
CD	0	0.00%	3	1.43%	5	2.38%	4	1.90%	5	2.38%
D	2	0.95%	5	2.38%	5	2.38%	2	0.95%	1	0.48%
未作答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	4	1.90%
總計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%

試題分析：

由表 962-b2-1，答對率 67.09%，難度屬於容易，全對比例為 52.86%。高分組答對率 90.67%為複選題五題中最高，全對比例 82.43%；低分組答對率 37.28%，全對比例 21.60%，得部份分比例 6.13%為複選五題中最低，顯示低分組學生對判斷級數斂散性的解題熟悉度落差很大。鑑別度 0.5339 非常優

良，由圖 962-b2-2 與表 962-b2-3，主要鑑別 b、c 兩組間（鑑別等級為優良）與 d、e 兩組間的學生（鑑別等級為非常優良）。

此外，由圖 962-b2-1，高分組學生選答正確選項（B）、（D）的比例差距不大，各為該組 96.49%與 95.21%；低分組學生選答的比例各為 75.96%與 72.82%，比例差距亦不大。顯示學生對交錯級數檢驗法與比較檢驗法的運用熟悉程度接近，比例約為九成的高分組學生與七成的低分組學生。

本題評量學生能否利用適當的檢驗法去判定各選項給定級數是否收斂。

解題步驟與學生答題情形如下，

（A）選項給定級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$，

以調和級數 $\sum\frac{1}{n}$ 與原式用極限比較檢驗法（Limit Comparison test），得比值為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=1$$

，故與 $\sum\frac{1}{n}$ 具相同斂散性。

又 $\sum\frac{1}{n}$ 發散，所以級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ 發散，（A）非正確選項。

（A）為錯誤選項，由表 962-b2-1，答（A）選項的學生有 30.38%；由圖 962-b2-1，是高、低組選答比例差距最多的選項，分別有 7.99%的高分組學生與 58.89%的低分組學生選答。由圖 962-b2-3 與表 962-b2-4，主要為鑑別 d、e 兩組間的學生，（鑑別等級為非常優良），且對 b、c、d 三組間的學生亦均有鑑別等級為優良的鑑別能力。

（B）選項給定級數$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{\pi}{n}$，【利用交錯級數檢驗法的程序性問題】

由於$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{\pi}{n}$為交錯級數，且$\tan\frac{\pi}{n}$遞減至零。利用交錯級數檢驗法（Alternating Series test）可知級數$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{\pi}{n}$收斂。所以（B）為正確選項。

（B）為正確選項，由表962-b2-1，答（B）選項的學生有88.00%；有96.49%的高分組學生與75.96%的低分組學生選答。由圖962-b2-3與表962-b2-4，（B）選項為各組學生選答率最高的選項，主要為鑑別d、e兩組間的學生，（鑑別等級介於優良與非常優良之間），但對c、d兩組間的學生，則幾乎沒有鑑別能力。

（C）選項給定級數$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n}{3n-1})$，【利用發散級數檢驗法的程序性問題】

因為$\lim_{n\to\infty} a_n=\ln(\frac{1}{3})\neq 0$，利用發散級數檢驗法（the test for Divergence）可判斷得級數$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{n}{3n-1})$發散。所以（C）為正確選項。

（C）為錯誤選項，由表 962-b2-1，答（C）選項的學生有 21.05%；由圖 962-b2-1，高、低組選答比例差距不少，分別有 5.43%的高分組學生與 38.68%的低分組學生選答。由圖 962-b2-3 與表 962-b2-4，除了第 b 組學生，（C）選項為其餘各組選答率最低的選項，主要為鑑別 d、e 兩組間的學生，（鑑別等級為優良），對 a、b、c 三組間的學生則均有鑑別等級為尚可的鑑別能力。

（D）選項給定級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$，【利用比較檢驗法、比值檢驗法與絕對收斂之概念的程序性問題】

（1）因為$|\cos n|\le 1$，所以$\left|\frac{\cos n}{n!}\right|\le\frac{1}{n!}$

（2）觀察$\sum\frac{1}{n!}$，因為$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$。由比值檢驗法（Ratio test）可知$\sum\frac{1}{n!}$收斂。

由（1）、（2），利用比較檢驗（Comparison test）法可得

$$\sum\left|\frac{\cos n}{n!}\right|\le\sum\frac{1}{n!}<\infty$$

，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$為絕對收斂。故級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$收斂，（D）為正確選項。

（D）為正確選項，由表 962-b2-1，答（D）選項的學生有 85.71%；有 95.21%的高分組學生與 72.82%的低分組學生選答。由圖 962-b2-3 與表 962-b2-4，主要鑑別 d、e 兩組間的學生，（鑑別等級為尚可）與 c、d 兩組間的學生，（鑑別等級介於不佳與尚可之間），但對 a、b 兩組間的學生，則幾乎沒有鑑別能力。

題號：複選第 3 題

試題內容：

Which of the following statements about a 2 variables function $f(x,y)$ are true?

(A) If the partial derivatives f_x and f_y exist at (x_0,y_0), then $f(x,y)$ is continuous at (x_0, y_0);

(B) If f_x and f_y exist near (x_0, y_0) and are continuous at (x_0, y_0), then $f(x, y)$ is differentiable at (x_0, y_0);

(C) If $f(x, y)$ is differentiable at (x_0, y_0), then f is continuous at (x_0, y_0)

(D) If $f(x, y)$ is defined on a disk D that contains the point (x_0, y_0) and the functions f_{xy}, f_{yx} are both continuous on D, then

$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

題型：複選題

參考答案：B、C、D

測驗目標：

14－2－3

能瞭解 Clairaut's theorem。

14－4－8

能瞭解極限存在、可微、連續、偏導數存在，與方向導數之間的蘊涵關係(implication)。

答對率：P = 52.99%（Ph = 68.69%、Pl = 38.19%）

鑑別度：D = 0.3050

難度：P = 0.5299

作答情形：

表 962-b3-1

複選第 3 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	397	37.81%	69	22.04%	160	55.75%
B*	681	64.86%	238	76.04%	168	58.54%
C*	789	75.14%	260	83.07%	189	65.85%
D*	930	88.57%	281	89.78%	248	86.41%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	281	26.76%	140	44.73%	37	12.89%
全錯	310	29.52%	48	15.34%	129	44.95%
部份分	459	43.71%	125	39.94%	121	42.16%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%
加權平均		52.99%		68.69%		38.19%

圖 962-b3-1

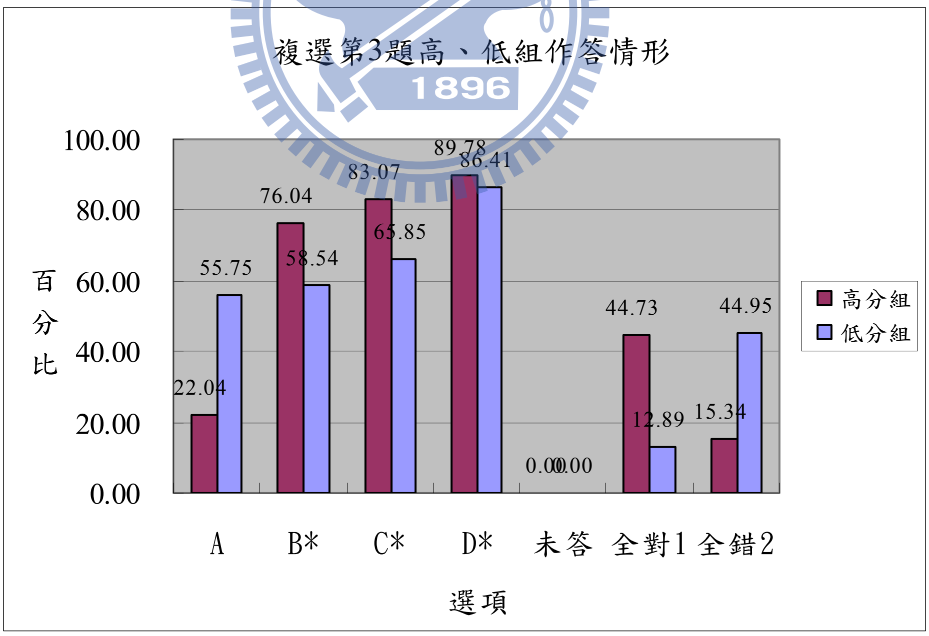


表 962-b3-2

複選	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 3 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	37	17.62%	62	29.52%	75	35.71%	99	47.14%	124	59.05%
B*	167	79.52%	135	64.29%	133	63.33%	124	59.05%	122	58.10%
C*	177	84.29%	164	78.10%	165	78.57%	147	70.00%	136	64.76%
D*	187	89.05%	194	92.38%	182	86.67%	192	91.43%	175	83.33%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	103	49.05%	64	30.48%	52	24.76%	37	17.62%	25	11.90%
全錯	24	11.43%	46	21.90%	58	27.62%	81	38.57%	101	48.10%
部份分	83	39.52%	100	47.62%	100	47.62%	92	43.81%	84	40.00%
小計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%
加權平均		72.76%		59.05%		53.33%		43.90%		35.90%

表 962-b3-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
複選題	第 3 題	0.3050	0.1371	0.0572	0.0943	0.0800

圖 962-b3-2

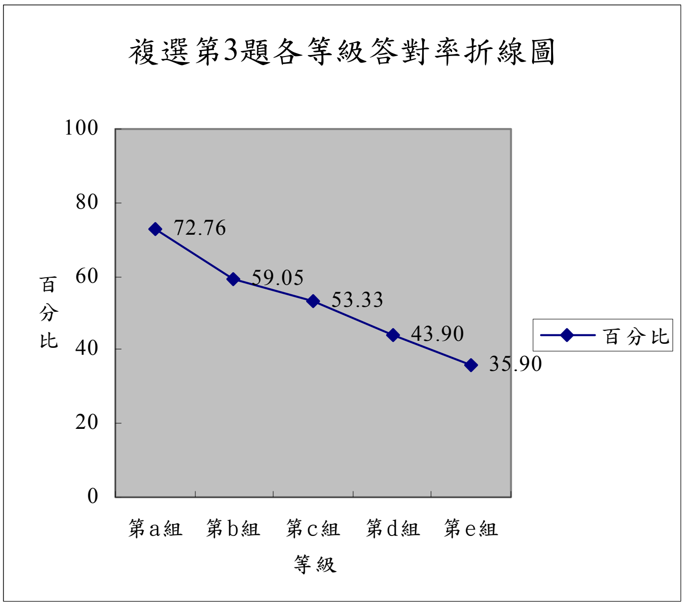


表 962-b3-4

複選第 3 題	d1	d2	d3	d4
A	0.1190	0.0619	0.1143	0.1190
B*	0.1524	0.0095	0.0429	0.0095
C*	0.0619	(0.0048)	0.0857	0.0524
D*	(0.0333)	0.0571	(0.0476)	0.0810

di=（正確選項的）高分組選答率減去低分組選答率；或（錯誤選項的）低分組選答率減去高分組選答率；其中，高、低分組係指五等分組中，相鄰兩組相對之成績高低。例如：A 選項的 d1=（若 A 為正確選項）第 a 組選 A 的學生比例減去第 b 組選 A 的學生比例；或是（若 A 為錯誤選項）第 b 組選 A 的學生比例減去第 a 組選 A 的學生比例。

圖 962-b3-3

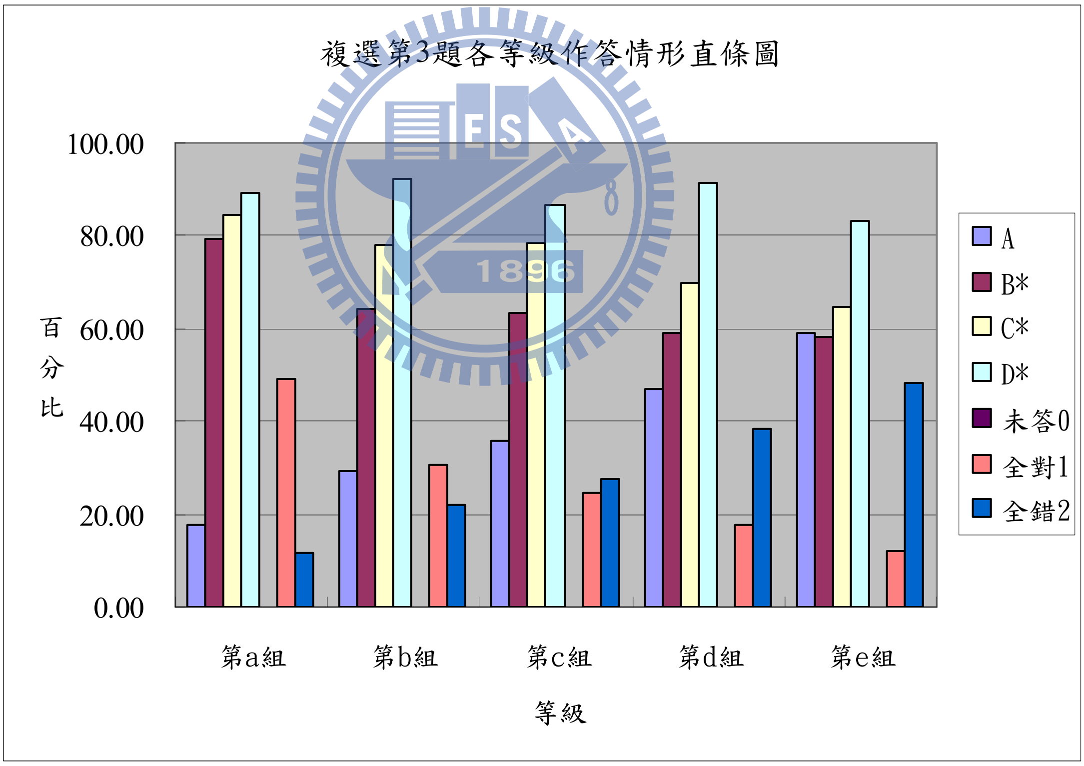


表 962-b3-5

複選第 3 題	所有人		高分組		低分組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
AB	7	0.67%	2	0.64%	3	1.05%
ABC	13	1.24%	4	1.28%	5	1.74%
ABCD	122	11.62%	29	9.27%	42	14.63%
ABD	53	5.05%	5	1.60%	27	9.41%
AC	34	3.24%	3	0.96%	18	6.27%
ACD	142	13.52%	23	7.35%	50	17.42%
AD	26	2.48%	3	0.96%	15	5.23%
B	7	0.67%	2	0.64%	3	1.05%
BC	45	4.29%	18	5.75%	7	2.44%
BCD	281	26.76%	140	44.73%	37	12.89%
BD	153	14.57%	38	12.14%	44	15.33%
C	13	1.24%	3	0.96%	2	0.70%
CD	139	13.24%	40	12.78%	28	9.76%
D	14	1.33%	3	0.96%	5	1.74%
未作答	1	0.10%	0	0.00%	1	0.35%
總計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 962-b3-6

複選第 3 題	第 a 組		第 b 組		第 c 組		第 d 組		第 e 組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
AB	1	0.48%	1	0.48%	1	0.48%	1	0.48%	3	1.43%
ABC	1	0.48%	3	1.43%	3	1.43%	2	0.95%	4	1.90%
ABCD	17	8.10%	25	11.90%	23	10.95%	24	11.43%	33	15.71%
ABD	2	0.95%	5	2.38%	10	4.76%	16	7.62%	20	9.52%
AC	3	1.43%	2	0.95%	6	2.86%	6	2.86%	17	8.10%
ACD	12	5.71%	22	10.48%	30	14.29%	45	21.43%	33	15.71%
AD	1	0.48%	4	1.90%	2	0.95%	5	2.38%	14	6.67%
B	2	0.95%	2	0.95%	0	0.00%	0	0.00%	3	1.43%
BC	14	6.67%	5	2.38%	14	6.67%	7	3.33%	5	2.38%
BCD	103	49.05%	64	30.48%	52	24.76%	37	17.62%	25	11.90%
BD	27	12.86%	30	14.29%	30	14.29%	37	17.62%	29	13.81%
C	2	0.95%	3	1.43%	4	1.90%	2	0.95%	2	0.95%

CD	25	11.90%	40	19.05%	33	15.71%	24	11.43%	17	8.10%
D	0	0.00%	4	1.90%	2	0.95%	4	1.90%	4	1.90%
未作答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%
總計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%

試題分析：

由表 962-b3-1，答對率 52.99%，難度屬於難易適中，全對比例為 26.76%，得部份分比例 43.71%為複選中最高；高分組答對率 68.69%，全對比例 44.73%，得部份分比例 39.94%；低分組答對率 38.19%，全對比例 12.89%，得部份分比例 42.16%亦為複選中最高。顯示有不少學生對本觀念性問題，有一些概念知道但又不完全清楚。鑑別度 0.3050 介於優良與尚可的邊界，由圖 962-b3-2 與表 962-b3-3，主要鑑別 a、b 兩組間的學生（鑑別等級為優良）。

本題是觀念性問題，評量學生多變數函數的偏導數、連續、可微的概念及彼此的蘊涵關係。

解題步驟與學生答題情形如下，

（A） 選項

一多變數函數 f 的一階導數存在，f 不連續，反例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不連續。

所以（A）選項之敘述非真。

由表962-b3-1，答（A）選項的學生有30.38%；由圖962-b3-1，是高低組選答

比例差距最多的選項，分別有22.04%的高分組學生與55.75%的低分組學生選答。由圖962-b3-3與表962-b3-4，本選項除了對b、c兩組間較無鑑別能力外，對其餘相鄰各組間均有等級為尚可的鑑別能力。

（B）選項是要測驗學生是否暸解若多變數函數的一階導數均存在且連續，則此多變數函數可微。

（B）選項為真。由表962-b3-1，答（B）選項的學生有64.86%；有76.04%的高分組學生與58.54%的低分組學生選答。由圖962-b3-3與表962-b3-4，本選項為各組學生選答率最低的正確選項，且b、c、d、e四組的選答率相差不大，主要鑑別a、b兩組間的學生，（鑑別等級為優良）。

（C）選項是要測驗學生是否暸解連續與可微之間的蘊涵關係(implication)；即，若 $f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0) 可微，則 f 在點 (x_0,y_0) 連續。此蘊涵關係與單變數之情形相同。

（C）選項為真。

此蘊涵關係與單變數之情形相同，答對的比率相當高。由表 962-b3-1，答（C）選項的學生有 75.14%；有 83.07%的高分組學生與 65.85%的低分組學生選答。由圖 962-b3-3 與表 962-b3-4，本選項較鑑別 c、d 兩組間的學生，（鑑別等級為不佳）。

（D）選項即為 Clairaut’s 定理之敘述。

由表 962-b3-1，答（D）選項的學生有 88.57%；但由圖 962-b3-1，可看出選答（D）選項的高、低組人數差異不大，是高、低組選答比例差距最小的正確選項，分別有 89.78%的高分組學生與 86.41%的低分組學生選答。由圖 962-b3-3，各組學生答對率都很高，但有趣的是第 a 組選答率略小於第 b 組，

且第 c 組的選答率亦略小於第 d 組。 Clairaut’s 定理之結論與學生之直觀相符，許多學生並未注意到 Clairaut’s 定理之假設的必要性。因此，學生選答此選項不代表真正了解 Clairaut’s 定理，可能有些學生擔心此選項有陷阱，反而沒有選答此選項。由圖 962-b3-3 與表 962-b3-4，本選項主要鑑別 d、e 兩組間的學生，(鑑別等級為不佳)。但對 a、b 兩組間與 c、d 兩組間的學生，有負向的鑑別能力，建議應刪掉此選項。

題號：複選第 4 題

試題內容：

Let $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 1 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Which of the following statements are TRUE?

(A) f is continuous at $(0,0)$;

(B) $f_x(0,0)$ exists;

(C) $f_y(0,0)$ exists;

(D) f is differentiable at $(0,0)$.

題型：複選題

參考答案：B

測驗目標：

14－1－2

已知一個雙變數函數 $f(x,y)$，能瞭解：

若存在兩個不同的路徑 C_1,C_2， $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{沿著路徑}C_1}} f(x,y)\neq\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{沿著路徑}C_2}} f(x,y)$

則 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在。

14－2－1

給定多變數實函數 f 與定義域中一點 $\mathbf{x}$，能利用定義求 f 在 $\mathbf{x}$ 點的偏導數。

14－2－7

給定雙變數實函數 $f(x,y)$ 與點 (x_0,y_0)，能利用下面性質判斷 $f(x,y)$ 是否可微：若 $f(x,y)$ 在點 (x_0,y_0) 不連續，則 f 在點 (x_0,y_0) 不可微。

14－4－8

能瞭解極限存在、可微、連續、偏導數存在，與方向導數之間的蘊涵關係(implication)。

答對率：P = 64.10%（Ph = 86.96%、Pl = 36.79%）

鑑別度：D = 0.5017

難度：P = 0.6410

作答情形：

表 962-b4-1

複選第 4 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	154	14.67%	11	3.51%	89	31.01%
B*	946	90.10%	309	98.72%	230	80.14%
C	442	42.10%	67	21.41%	177	61.67%
D	189	18.00%	15	4.79%	102	35.54%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	481	45.81%	235	75.08%	48	16.72%
全錯	249	23.71%	16	5.11%	143	49.83%
部份分	320	30.48%	62	19.81%	96	33.45%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%
加權平均		64.10%		86.96%		36.79%

圖 962-b4-1

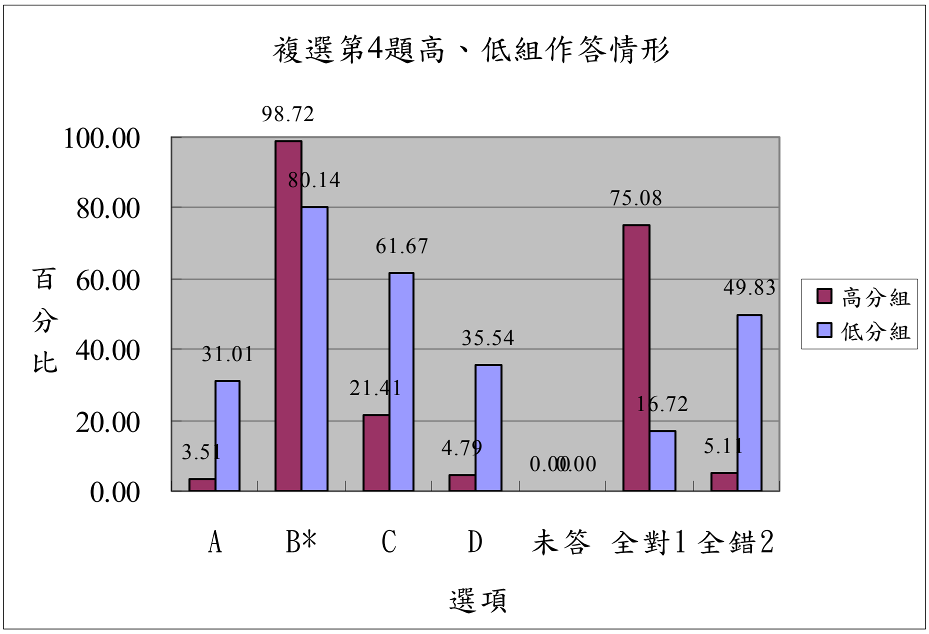


表 962-b4-2

複選 第 4 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	8	3.81%	10	4.76%	18	8.57%	44	20.95%	74	35.24%
B*	207	98.57%	204	97.14%	196	93.33%	177	84.29%	162	77.14%
C	38	18.10%	71	33.81%	81	38.57%	128	60.95%	124	59.05%
D	7	3.33%	20	9.52%	24	11.43%	55	26.19%	83	39.52%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	164	78.10%	128	60.95%	107	50.95%	50	23.81%	32	15.24%
全錯	9	4.29%	19	9.05%	31	14.76%	73	34.76%	117	55.71%
部份分	37	17.62%	63	30.00%	72	34.29%	87	41.43%	61	29.05%
小計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%
加權 平均		88.67%		78.95%		71.52%		48.67%		32.67%

表 962-b4-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
複選題	第 4 題	0.5017	0.0972	0.0743	0.2285	0.1600

圖 962-b4-2

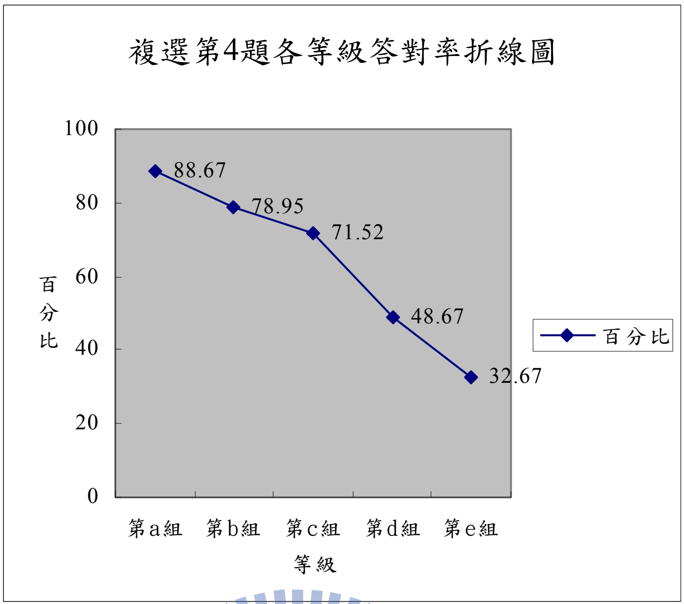


表 962-b4-4

複選第 4 題	d1	d2	d3	d4
A	0.0095	0.0381	0.1238	0.1429
B*	0.0143	0.0381	0.0905	0.0714
C	0.1571	0.0476	0.2238	(0.0190)
D	0.0619	0.0190	0.1476	0.1333

di=（正確選項的）高分組選答率減去低分組選答率；或（錯誤選項的）低分組選答率減去高分組選答率；其中，高、低分組係指五等分組中，相鄰兩組相對之成績高低。例如：A 選項的 d1=（若 A 為正確選項）第 a 組選 A 的學生比例減去第 b 組選 A 的學生比例；或是（若 A 為錯誤選項）第 b 組選 A 的學生比例減去第 a 組選 A 的學生比例。

圖 962-b4-3

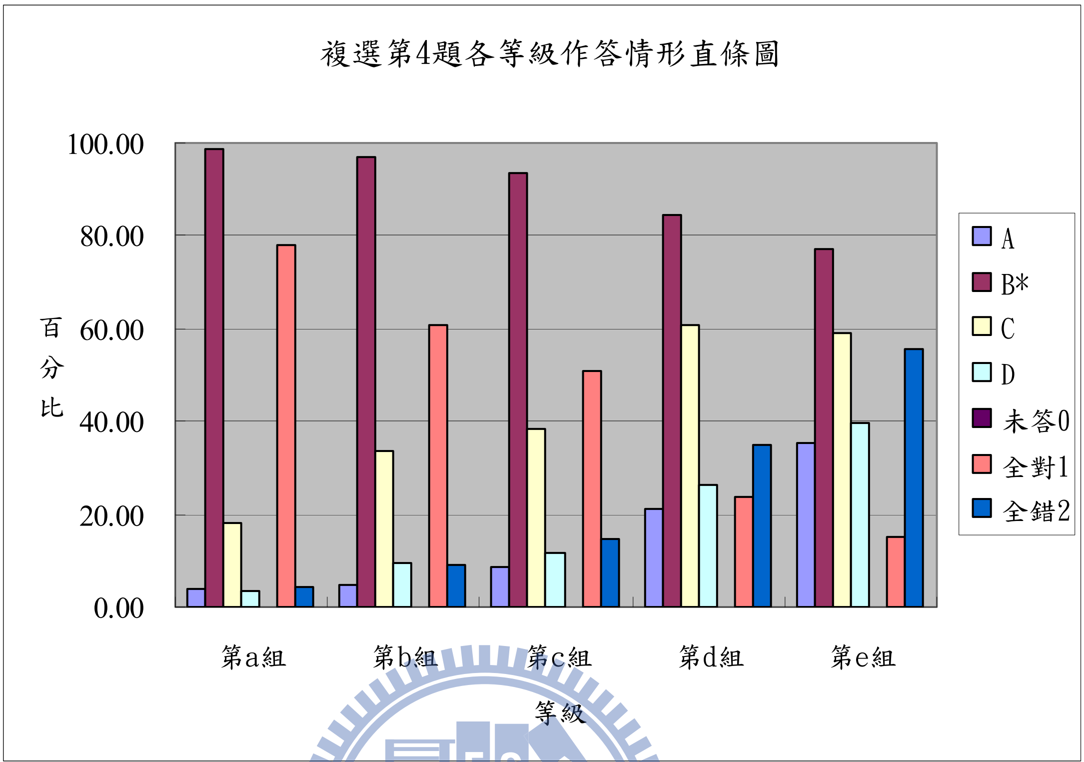


表 962-b4-5

複選第 4 題	所有人		高分組		低分組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	28	2.67%	2	0.64%	14	4.88%
AB	25	2.38%	6	1.92%	7	2.44%
ABC	26	2.48%	0	0.00%	20	6.97%
ABCD	46	4.38%	3	0.96%	30	10.45%
ABD	3	0.29%	0	0.00%	2	0.70%
AC	3	0.29%	0	0.00%	2	0.70%
ACD	1	0.10%	0	0.00%	0	0.00%
AD	22	2.10%	0	0.00%	14	4.88%
B	481	45.81%	235	75.08%	48	16.72%
BC	272	25.90%	53	16.93%	83	28.92%
BCD	70	6.67%	9	2.88%	34	11.85%
BD	23	2.19%	3	0.96%	6	2.09%
C	19	1.81%	2	0.64%	6	2.09%

CD	5	0.48%	0	0.00%	2	0.70%
D	19	1.81%	0	0.00%	14	4.88%
未作答	7	0.67%	0	0.00%	5	1.74%
總計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 962-b4-6

複選第 4 題	第 a 組		第 b 組		第 c 組		第 d 組		第 e 組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	2	0.95%	0	0.00%	5	2.38%	10	4.76%	11	5.24%
AB	5	2.38%	3	1.43%	7	3.33%	3	1.43%	7	3.33%
ABC	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	5	2.38%	18	8.57%
ABCD	1	0.48%	3	1.43%	3	1.43%	16	7.62%	23	10.95%
ABD	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	0	0.00%	2	0.95%
AC	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	2	0.95%	1	0.48%
ACD	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%
AD	0	0.00%	2	0.95%	1	0.48%	7	3.33%	12	5.71%
B	164	78.10%	128	60.95%	107	50.95%	50	23.81%	32	15.24%
BC	31	14.76%	55	26.19%	58	27.62%	79	37.62%	49	23.33%
BCD	5	2.38%	8	3.81%	12	5.71%	19	9.05%	26	12.38%
BD	1	0.48%	5	2.38%	7	3.33%	5	2.38%	5	2.38%
C	1	0.48%	3	1.43%	6	2.86%	4	1.90%	5	2.38%
CD	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	2	0.95%	2	0.95%
D	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	5	2.38%	13	6.19%
未作答	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	4	1.90%
總計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%

試題分析：

由表 962-b4-1，答對率 64.10%，難度屬於容易，全對比例為 45.81%。高分組答對率為 86.96%，全對比例 75.08%；低分組答對率 36.79%，全對比例 16.72%。鑑別度 0.5017 非常優良，由圖 962-b4-2 與表 962-b4-3，主要鑑別 c、 d 兩組間（鑑別等級為非常優良）與 d、e 兩組間的學生（鑑別等級為優良）。

本題是一綜合程序與概念的問題。

解題分析如下，

（A）選項要判定 $f(x,y)$ 在點 $(0,0)$ 是否連續。

若取路徑 $y=mx$ 逼近點 $(0,0)$ ，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

，其值隨不同之 m 值而改變；即不同路徑所得極限值不同，因此。極限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。故函數 $f(x,y)$ 在點 $(0,0)$ 不連續，（A）為錯誤選項。

（B）、（C）選項要判定 $f_x(0,0)$ 與 $f_y(0,0)$ 是否存在。

由多變數函數 $f(x,y)$ 的偏微分定義可得

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0$$

，故 $f_x(0,0)$ 存在，（B）為正確選項。

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-1-1}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-2}{h}$$

會趨近於無限大，故 $f_y(0,0)$ 不存在，（C）非正確選項。

（D）選項要判定 f 在點 $(0,0)$ 是否可微。

由(A)，函數 f 在 $(0,0)$ 不連續，故函數 f 在 $(0,0)$ 不可微，（D）為錯誤選項。

或由(C)， $f_y(0,0)$ 不存在，故函數在 $(0,0)$ 不可微。

（A）為錯誤選項，由表962-b4-1，答（A）選項的學生有14.67%；有3.51%的高分組學生與31.01%的低分組學生選答；由圖962-b4-3與表962-b4-4，本選項為各組選答率最低的選項，主要鑑別d、e兩組間的學生，(鑑別等級為優良)。

（B)、(C）兩選項雖然都是判斷偏導數是否存在，但作答情形有些差異：

（B）是本題唯一的正確選項，由表962-b4-1，答（B）選項的學生有90.10%，由圖962-b4-1，分別有98.72%的高分組學生與80.14%的低分組學生選答，是高、低組選答比例差距最小的選項；由圖962-b4-3與表962-b4-4，本選項為各組選答率最高的選項，且選答率明顯高於其他選項，主要鑑別c、d兩組間的學生，(鑑別等級為尚可)。

（C)為錯誤選項，由表962-b4-1，答(C)選項的學生有42.10%；由圖952-b4-1，是高、低組選答比例差距最多的選項，分別有21.41%的高分組學生與61.67%的低分組學生選答。再由圖962-b4-3與表962-b4-4，(C）選項為各組學生選答率最高的錯誤選項，且選答率明顯高於其他錯誤選項，主要鑑別出a、b兩組間的學生（鑑別等級為優良）與c、d兩組間的學生（鑑別等級為非常優良)。即第b、d兩組的選答率均較前組有大幅增加，且第b、c兩組的選答率差異不大，第d、e兩組的選答率也接近。

（D）為錯誤選項，由表 962-b4-1，答（D）選項的學生有 18.00%；由圖 962-b4-1，高、低組選答比例差距不少，分別有 4.79%的高分組學生與 35.54%的低分組學生選答。由圖 962-b4-3 與表 962-b4-4，本選項主要鑑別 c、d 兩組間的學生與 d、e 兩組間的學生，(鑑別等級均為優良)。

題號：複選第 5 題

試題內容：

Consider the following function $f(x,y) = x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

Which of the following statements are TRUE ?

(A) f has 3 critical points;

(B) f has a local maximum at $(-2,-2)$;

(C) f has a local minimum at $(-2,-2)$;

(D) f has a saddle point at (0, 0)

題型：複選題

參考答案：B、D

測驗目標：

14－5－1

能夠求出給定多變數函數的臨界點（critical points）。

14－5－2

給定一個二階偏導數連續的雙變數函數 f，能求出所有 f 的局部極大值（local maximum values）、局部極小值（local minimum values）及鞍點（saddle point）。

答對率：P = 72.17%（Ph = 87.86%、Pl = 54.36%）

鑑別度：D = 0.3350

難度：P = 0.7217

作答情形：

表 962-b5-1

複選第 5 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	171	16.29%	13	4.15%	98	34.15%
B*	840	80.00%	280	89.46%	194	67.60%
C	190	18.10%	28	8.95%	81	28.22%
D*	941	89.62%	302	96.49%	245	85.37%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	657	62.57%	260	83.07%	111	38.68%
全錯	225	21.43%	28	8.95%	101	35.19%
部份分	168	16.00%	25	7.99%	75	26.13%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%
加權平均		72.17%		87.86%		54.36%

圖 962-b5-1

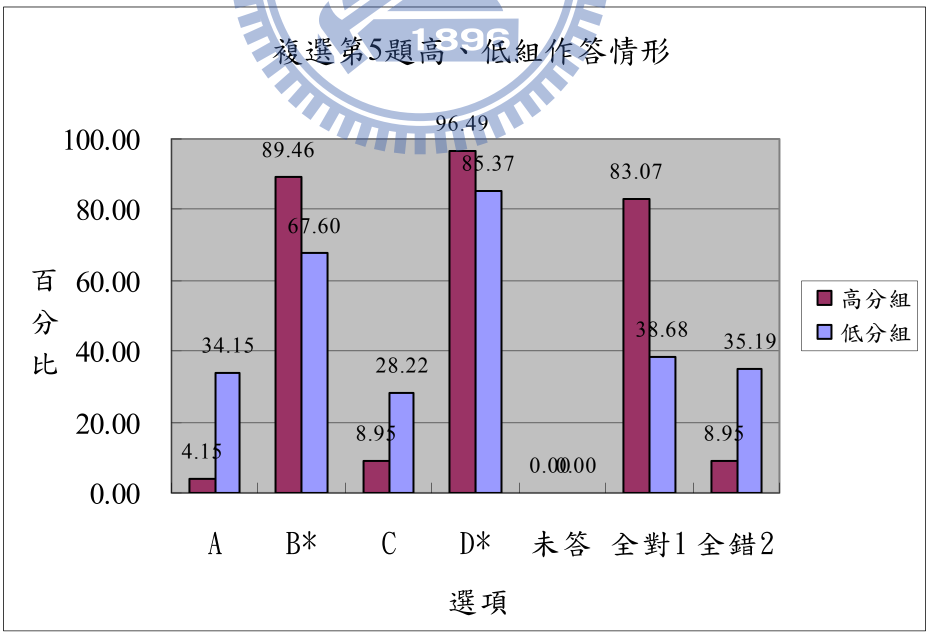


表 962-b5-2

複選 第 5 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	9	4.29%	12	5.71%	33	15.71%	35	16.67%	82	39.05%
B*	187	89.05%	177	84.29%	174	82.86%	164	78.10%	138	65.71%
C	18	8.57%	29	13.81%	35	16.67%	44	20.95%	64	30.48%
D*	203	96.67%	198	94.29%	186	88.57%	177	84.29%	177	84.29%
未答	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%
全對	175	83.33%	160	76.19%	135	64.29%	112	53.33%	75	35.71%
全錯	19	9.05%	31	14.76%	42	20.00%	51	24.29%	82	39.05%
部份分	16	7.62%	19	9.05%	33	15.71%	47	22.38%	53	25.24%
小計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%
加權平均		87.90%		81.62%		73.71%		66.76%		50.86%

表 962-b5-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
複選題	第 5 題	0.3350	0.0628	0.0791	0.0695	0.1590

圖 962-b5-2

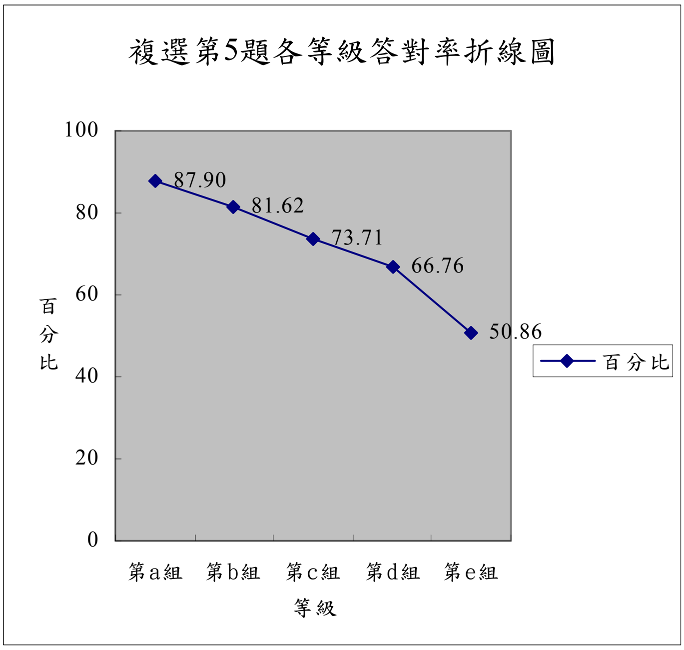


表 962-b5-4

複選第 5 題	d1	d2	d3	d4
A	0.0143	0.1000	0.0095	0.2238
B*	0.0476	0.0143	0.0476	0.1238
C	0.0524	0.0286	0.0429	0.0952
D*	0.0238	0.0571	0.0429	0.0000
di=（正確選項的）高分組選答率減去低分組選答率；或（錯誤選項的）低分組選答率減去高分組選答率；其中，高、低分組係指五等分組中，相鄰兩組相對之成績高低。例如：A 選項的 d1=（若 A 為正確選項）第 a 組選 A 的學生比例減去第 b 組選 A 的學生比例；或是（若 A 為錯誤選項）第 b 組選 A 的學生比例減去第 a 組選 A 的學生比例。				

圖 962-b5-3

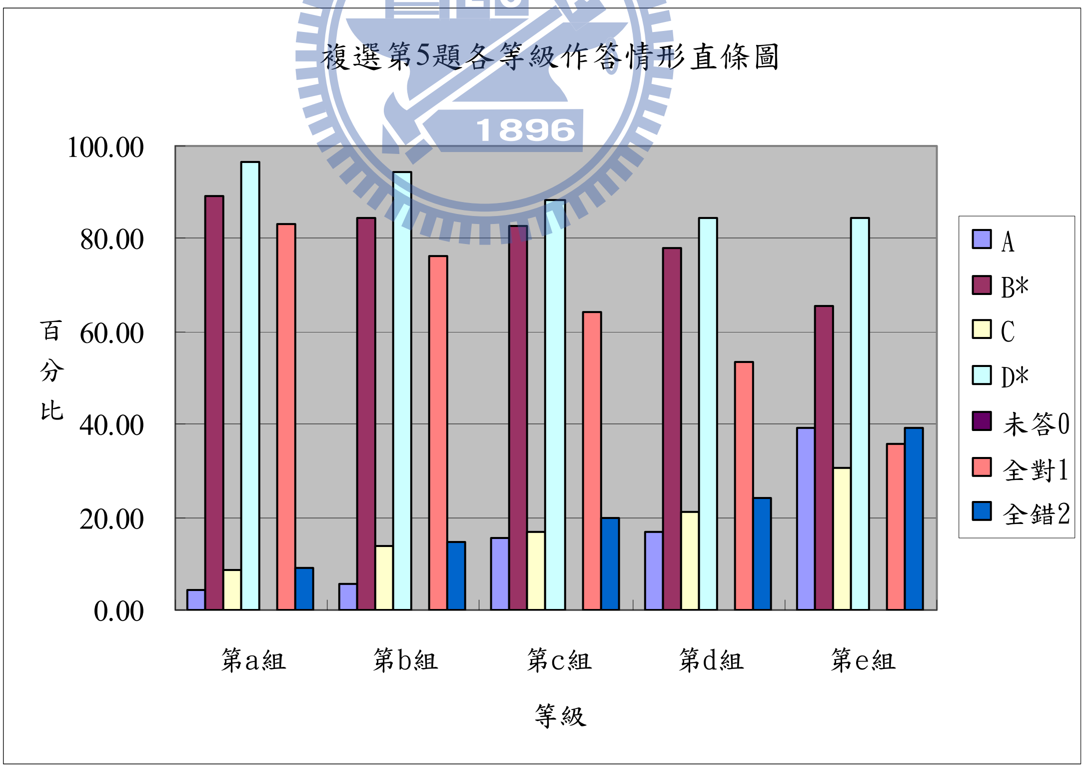


表 962-b5-5

複選第 5 題	所有人		高分組		低分組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	5	0.48%	0	0.00%	4	1.39%
AB	13	1.24%	1	0.32%	6	2.09%
ABC	5	0.48%	0	0.00%	4	1.39%
ABCD	37	3.52%	4	1.28%	17	5.92%
ABD	59	5.62%	6	1.92%	34	11.85%
AC	6	0.57%	0	0.00%	5	1.74%
ACD	27	2.57%	1	0.32%	19	6.62%
AD	19	1.81%	1	0.32%	9	3.14%
B	56	5.33%	7	2.24%	19	6.62%
BC	7	0.67%	0	0.00%	1	0.35%
BCD	6	0.57%	2	0.64%	2	0.70%
BD	657	62.57%	260	83.07%	111	38.68%
C	13	1.24%	3	0.96%	0	0.00%
CD	89	8.48%	18	5.75%	33	11.50%
D	47	4.48%	10	3.19%	20	6.97%
未作答	4	0.38%	0	0.00%	3	1.05%
總計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 962-b5-6

複選第 5 題	第 a 組		第 b 組		第 c 組		第 d 組		第 e 組	
作答情形	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
A	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	4	1.90%
AB	1	0.48%	1	0.48%	2	0.95%	3	1.43%	6	2.86%
ABC	0	0.00%	0	0.00%	0	0.00%	3	1.43%	2	0.95%
ABCD	3	1.43%	2	0.95%	10	4.76%	6	2.86%	16	7.62%
ABD	3	1.43%	4	1.90%	14	6.67%	13	6.19%	25	11.90%
AC	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	5	2.38%
ACD	1	0.48%	2	0.95%	2	0.95%	4	1.90%	18	8.57%
AD	1	0.48%	3	1.43%	3	1.43%	6	2.86%	6	2.86%
B	4	1.90%	7	3.33%	11	5.24%	22	10.48%	12	5.71%
BC	0	0.00%	1	0.48%	2	0.95%	3	1.43%	1	0.48%
BCD	1	0.48%	2	0.95%	0	0.00%	2	0.95%	1	0.48%

BD	175	83.33%	160	76.19%	135	64.29%	112	53.33%	75	35.71%
C	2	0.95%	3	1.43%	6	2.86%	2	0.95%	0	0.00%
CD	11	5.24%	19	9.05%	14	6.67%	24	11.43%	21	10.00%
D	8	3.81%	6	2.86%	8	3.81%	10	4.76%	15	7.14%
未作答	0	0.00%	0	0.00%	1	0.48%	0	0.00%	3	1.43%
總計	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%	210	100.00%

試題分析：

由表 962-b5-1，本題答對率 72.17%與全對比例 62.57%均為複選五題中最高，難度屬於容易；高分組答對率 87.86%，全對比例 83.07%為複選題最高；低分組答對率 54.36%與全對比例 38.68%亦為複選五題中最高。而所有學生得部分分比例 16.00%與高、低分組學生得部分分比例 7.99%與 26.13%，均為複選五題中最低，顯示學生對本題的程序熟悉度落差很大。鑑別度 0.3350 為優良，由圖 962-b5-2 與表 962-b5-3，主要鑑別 d、e 兩組間的學生（鑑別等級為優良）。

本題為基本的求極值之程序性問題。

解題步驟如下，

本題給定函數 $f(x,y)= x^3+6xy-3y^2+2$，

（A）選項要判斷 f 的臨界點（critical points）的個數：

解

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6y=0 \\ f_y(x,y)=6x-6y=0 \end{cases}$$

得臨界點（critical points）為點 $(0,0)$ 及 $(-2,-2)$，故 f 的臨界點個數應為2，（A）選項非真。

（B）、（C）、（D）選項要判斷 f 的局部極大值（local maximum values）、局部極小值（local minimum values）及鞍點（saddle point）。

f 的Hessian行列式 D 為

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix}=-36(x+1) \text{ 。}$$

利用二階導數檢驗法（Second Derivatives Test），

（1）因為 $D(0,0)<0$，故點 $(0,0)$ 為 f 的鞍點（saddle point），得（D）選項為真；

（2）因為 $D(-2,-2)>0$ 且 $f_{xx}(0,0)<0$，所以 f 在點 $(-2,-2)$ 有局部極大值（local maximum values），故（B）選項為真及（C）選項非真。

（A）選項非真，由表 962-b5-1，答（A）選項的學生有 16.29%；但由圖 962-b5-1，（A）是高、低組選答比例差距最多的選項，分別僅 4.15%的高分組學生與 34.15%的低分組學生選答。由圖 962-b5-3 與表 962-b5-4，本選項為除了第 e 組學生外，其餘各組選答率最低的選項，顯示絕大部分的學生對計算臨界點之個數並無太大問題，主要鑑別 d、e 兩組間的學生，（鑑別等級為非常優良）。

（B）選項為真，由表 962-b5-1，答（B）選項的學生有 80.00%；由圖 962-b5-1，（B）是正確選項中，高低組選答比例差距最多的選項，分別有 89.46%的高分組學生與 67.60%的低分組學生選答。（C）選項非真，由表 962-b5-1，答（C）選項的學生有 18.10%；有 8.95%的高分組學生與 28.22%的低分組學生選答。此外，由圖962-b5-3與表962-b5-4，（B）、（C）兩選項除了對d、e兩組間的學生有等級為尚可的鑑別能力外，對其餘相鄰各組間的鑑別能力均不佳。顯示

僅第e組的學生較不熟悉求局部極值的程序。

（D）選項為真，由表962-b5-1，答（D）選項的學生有89.62%；由圖962-b5-1，是正確選項中，高低組選答比例差距最少的選項，分別有96.49%的高分組學生與85.37%的低分組學生選答。由圖962-b5-3與表962-b3-4，五組學生選答本選項的比例均為最高，本題對各組間的鑑別能力均不佳，且對第d、e兩組間的學生無鑑別能力（d4=0）。顯示絕大多數的學生均會計算給定函數的鞍點。

題號：填充第 1 題

試題內容：

Find the limit $\lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t,\ \mathrm{e}^{-4t}, \frac{\ln t}{t}) =$ ______

題型：填充題

參考答案：$(\frac{\pi}{2},0,0)$

測驗目標：

13－1－3

給定一向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 及定數 a ，能夠求出 $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)$

答對率：P = 69.24%（Ph = 88.50%、Pl = 38.68%）；

鑑別度：D = 0.4982；

難度：P = 0.6924；

作答情形：

圖 962-c1-1

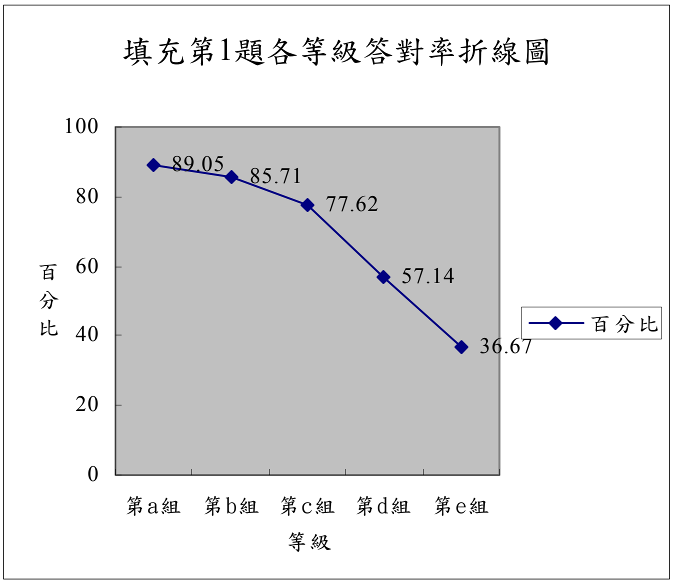


表 962-c1-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
填充題	第 1 題	0.4982	0.0333	0.0810	0.2048	0.2048

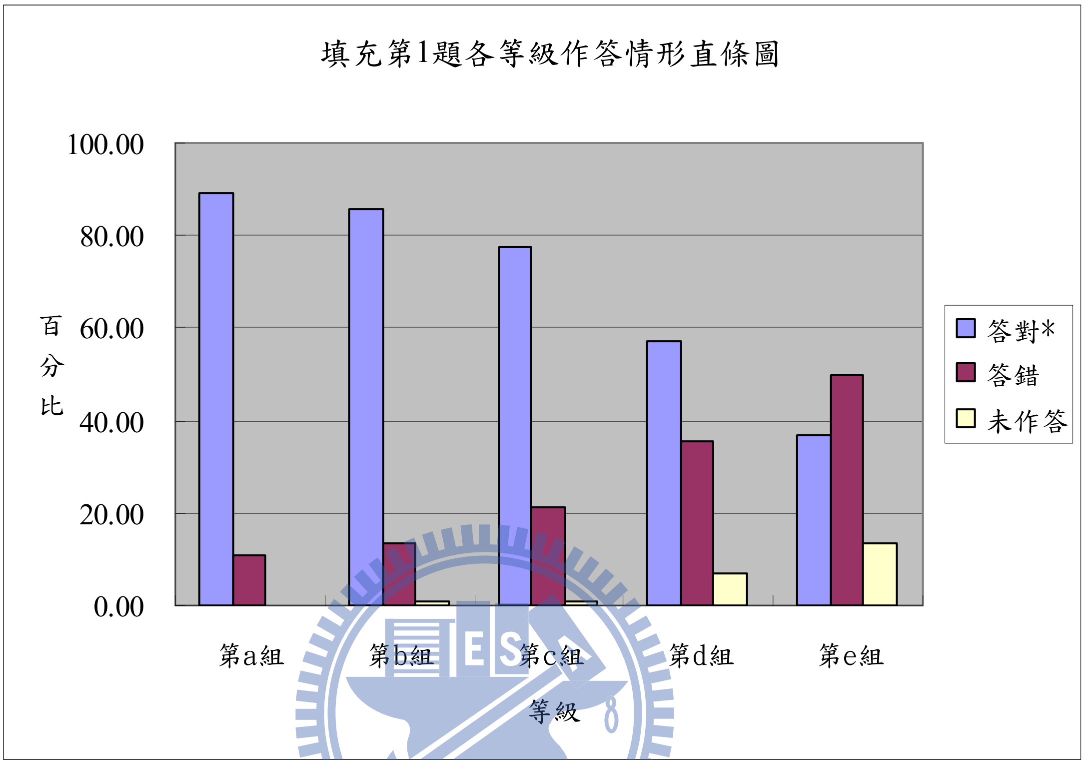
表 962-c1-2

填充第 1 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	187	89.05%	180	85.71%	163	77.62%	120	57.14%	77	36.67%
答錯	23	10.95%	28	13.33%	45	21.43%	75	35.71%	105	50.00%
未作答	0	0.00%	2	0.95%	2	0.95%	15	7.14%	28	13.33%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

表 962-c1-1

填充第 1 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	727	69.24%	277	88.50%	111	38.68%
答錯	276	26.29%	35	11.18%	140	48.78%
未作答	47	4.48%	1	0.32%	36	12.54%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

圖 962-c1-2



試題分析：

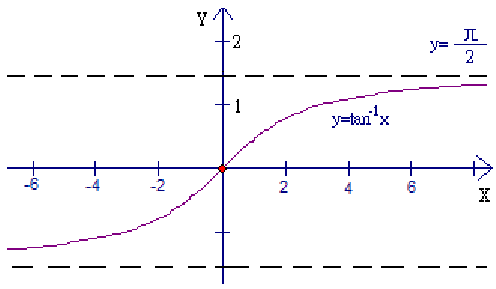
由表 962-c1-1，答對率 69.24%，是答對率最高的填充題，難度屬於容易。未作答比例 4.48%為填充最低，由圖 962-c1-2，絕大部分為第 d、e 兩組之學生。高分組答對率高達 88.50%為填充最高，未作答比例 0.32%；低分組答對率 38.68%亦為填充最高，未作答比例 12.54%。鑑別度為 0.4982 非常優良，由圖 962-c1-1 與表 962-c1-3，本題對分數越低的組別間有越佳的鑑別能力，主要是鑑別 c、d 兩組間與 d、e 兩組間（鑑別等級均達非常優良）的學生。

本題是基本的向量函數極值的程序性問題，計算量少，需要用到反三角函數、指數函數、對數函數極限及羅必達法則（L'Hospital Rule）等先備知識。

解題步驟如下：

$$\lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t,\ \ e^{-4t},\frac{\ln t}{t})=(\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t,\lim_{t\to\infty}e^{-4t},\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t})$$ 。

1.觀察 $y=\tan^{-1}x$ 的圖形，如圖 962-c1-4，得 $\lim\limits_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\dfrac{\pi}{2}$ 。



（圖 962-c1-4）

2. $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-4t}=0$ 。

利用定理

If $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$, and $f(n)=a_n$ as $n\in N$, then $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L.$ ，

可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-4t}=0$ 。

3. 利用羅必達法則（L’Hospital Rule）計算得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{{}^{1}\!/_{t}}{1}=0$$ 。

修題建議

本題的答案有三個分量，只要一個分量計算錯誤，整題就沒有分數。類似的題目可考慮以複選題之型式出題，一方面可以更清楚地區分學生的能力，也

可以更進一步瞭解學生答錯的情形。

題號：填充第 2 題

試題內容：

Find the first four terms ______ of the Maclaurin series of $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-x}$.

題型：填充題

參考答案：$1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}$

測驗目標：

11－4－3

能夠寫出 $\dfrac{1}{1-x}, e^x, \sin x, \cos x, \tan^{-1} x$ 的馬克勞林級數（Maclaurin series）。

11－4－6

已知函數 f, g 的馬克勞林級數，給定一正整數 n，能寫出 $f \cdot g$ 或 $\dfrac{f}{g}$ 的馬克勞林級數的前 n 項。

答對率：P = 13.81%（Ph = 31.95%、Pl = 1.39%）

鑑別度：D = 0.3056

難度：P = 0.1381

作答情形：

圖 962-c2-1

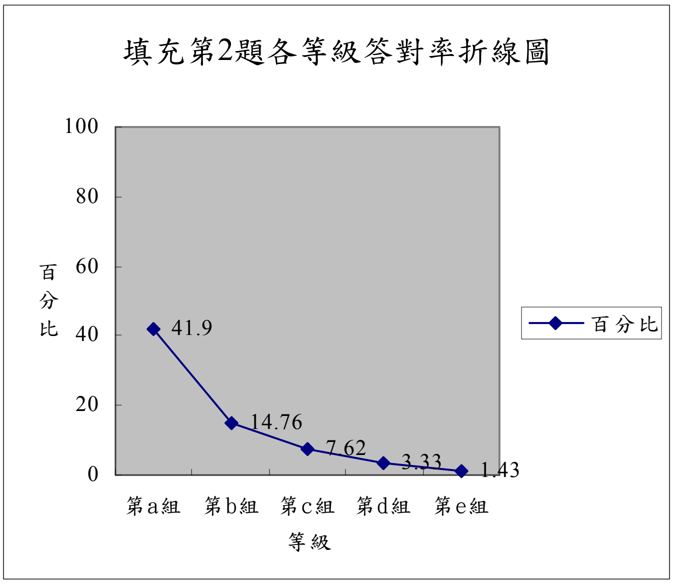


表 962-c2-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
填充題	第 2 題	0.3056	0.2714	0.0714	0.0429	0.0190

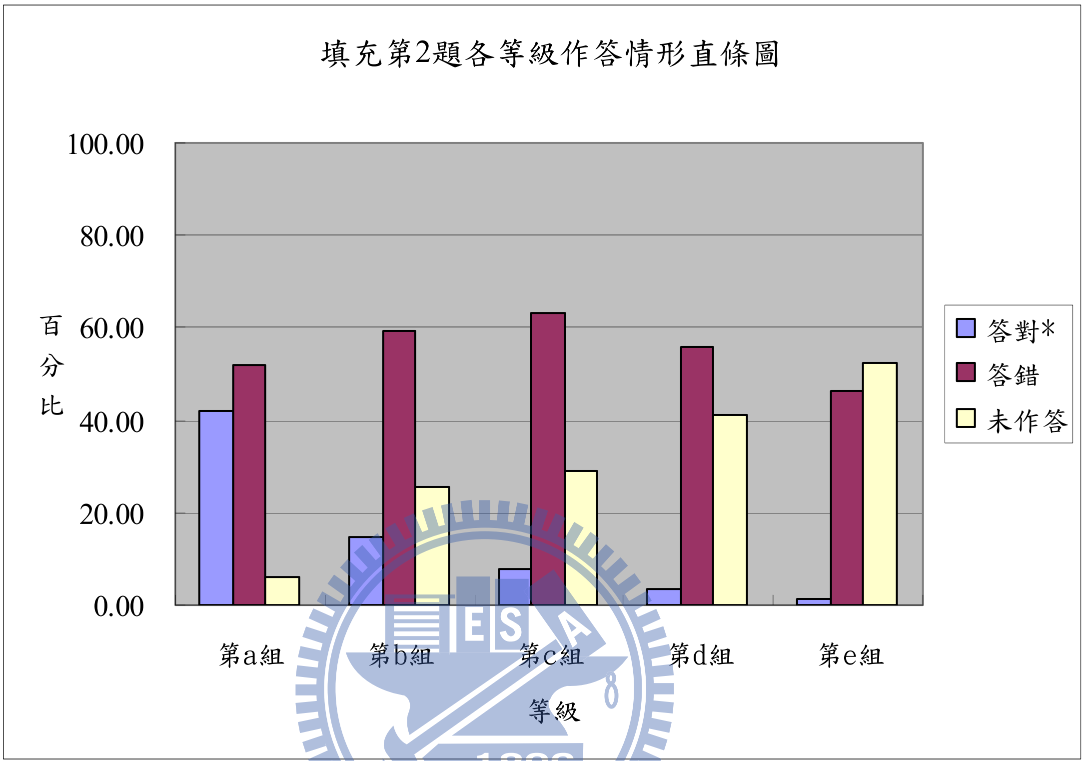
表 962-c2-2

填充第2題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	88	41.90%	31	14.76%	16	7.62%	7	3.33%	3	1.43%
答錯	109	51.90%	125	59.52%	133	63.33%	117	55.71%	97	46.19%
未作答	13	6.19%	54	25.71%	61	29.05%	86	40.95%	110	52.38%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

表 962-c2-1

填充第 2 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	145	13.81%	100	31.95%	4	1.39%
答錯	581	55.33%	178	56.87%	138	48.08%
未作答	324	30.86%	35	11.18%	145	50.52%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

圖 962-c2-2



試題分析：

由表 962-c2-1，答對率 13.81%，是答對率最低的填充題，難度屬於極困難。未作答比例達 30.86%，為填充最高。高分組答對率 31.95%為填充最低，未作答比例有 11.18%則為填充最高；低分組答對率 1.39%亦為填充最低，未作答比例達 50.52%亦為填充最高，有超過半數學生未作答，由圖 962-c2-2，第 e 組未作答比例高於答錯比例；高、低分組的答對率差距為填充最低，未作答比例之差距為填充最高。鑑別度 0.3056 介於優良與尚可的邊界，由圖 962-c2-1 與表 962-c2-3，本題對分數越高的組別間有越佳的鑑別能力，主要鑑別 a、b 兩組間（鑑別等級為非常優良）的學生。

此外，本題答錯比例為 55.33%，高分組答錯比例高達 56.87%為填充最高，比例甚至超過低分組，(低分組答錯比例 48.08%)，為不合理之現象，(比較填充五題的作答情形，可推測是因為本題高分組答錯率偏高與低分組未答率太高所致)。由圖 962-c2-2，a、b、c、d、e 五組的答錯比例之差距均不大，而由表 962-c2-2，第 a 組的答錯率就超過該組人數的一半。

本題為計算給定函數的馬克勞林級數的程序性問題。

解題步驟如下，

令 $g(x)=\cos x$，$h(x)=\dfrac{1}{1-x}$

則 $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-x}=g(x)\cdot h(x)$，

故要求函數 $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-x}$ 的馬克勞林級數展開之前四項即為求 $g(x)\cdot h(x)$ 的馬克勞林級數展開之前四項。

利用特殊函數的冪級數展開表示法，

先寫出 $g(x)=\cos x$ 與 $h(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數分別為

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,\forall x\in R\ ,$$
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ ,-1<x<1$$

再利用長除法，得前四項為 $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}$。

若學生不會上述之方法，欲利用泰勒級數表示法計算，則步驟如下：

設給定函數 $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-x}$ 的馬克勞林級數展開之前四項為 $\sum_{n=0}^{3}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$ 。

$$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x+x\sin x}{(1-x)^2},$$

$$f''(x)=\frac{(1-x)^2(x\cos x-\cos x)+2(\cos x-\sin x+x\sin x)(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$\begin{aligned}f'''(x)=\frac{1}{(1-x)^8}&\{[(-2)(1-x)^5(x\cos x-\cos x)+(1-x)^6(\cos x-x\sin x+\sin x)]\\&+2[(1-x)(-\sin x-\cos x+\sin x+x\cos x)-(\cos x-\sin x+x\sin x)]\\&+4(1-x)^3[(1-x)^2(x\cos x-\cos x)+2(\cos x-\sin x+x\sin x)(1-x)]\}\end{aligned},$$

代 $x=0$ 得 $f(0)=1,\ f^{(1)}(0)=1,\ f^{(2)}(0)=1,\ f^{(3)}(0)=3$，故 $f(x)$ 的馬克勞林級數展開之前四項為 $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}$ 。

由以上之程序可知計算量非常龐大且繁雜，需要花費不少時間且容易出錯。在有限的考試時間內，採用此策略算出答案的學生應該不多。

本題未作答的學生比例非常高，可能原因有：(1)沒有記特殊函數 $\cos x$ 與 $\dfrac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數展開式；(2) 知道 $\cos x$ 與 $\dfrac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數，但不知如何利用長除法求 $\dfrac{\cos x}{1-x}$ 的馬克勞林級數。

修題建議：

1. 建議將題幹改為「非零的項」以說明所要求之前四項是否包含為零之項。

題號：填充第 3 題

試題內容：

$$\text{Let}\quad w = ze^{\frac{x}{y}},\quad x = \sin(t^2 s),\quad y = (1+st)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},\quad z = t(t^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Then,}\quad \partial w / \partial s\,|_{(s,t)=(0,1)} = \underline{\qquad\qquad}$$

題型：填充題

參考答案：$\sqrt{2}$

測驗目標：

14－3－1

能利用連鎖律計算多變數合成函數的偏微分。

通過率：P = 37.24%（Ph = 69.97%、Pl = 10.80%）；

鑑別度：D = 0.5917；

難度：P = 0.3724；

作答情形：

圖 962-c3-1

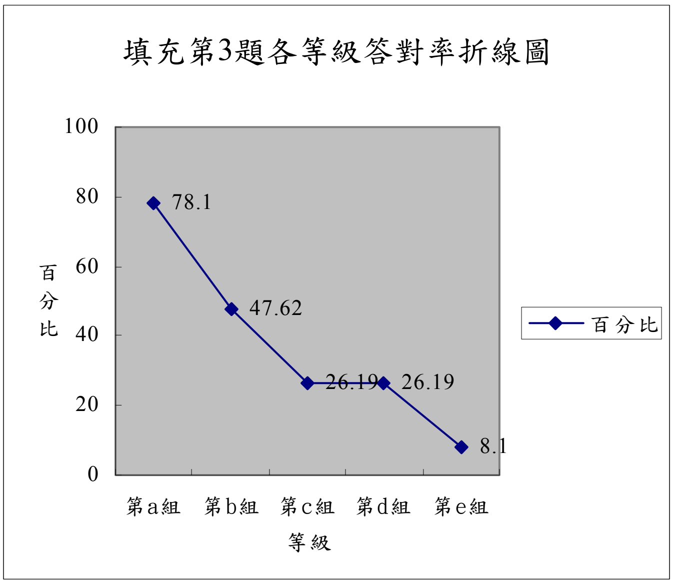


表 962-c3-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
填充題	第 3 題	0.5917	0.3048	0.2143	0.0000	0.1810

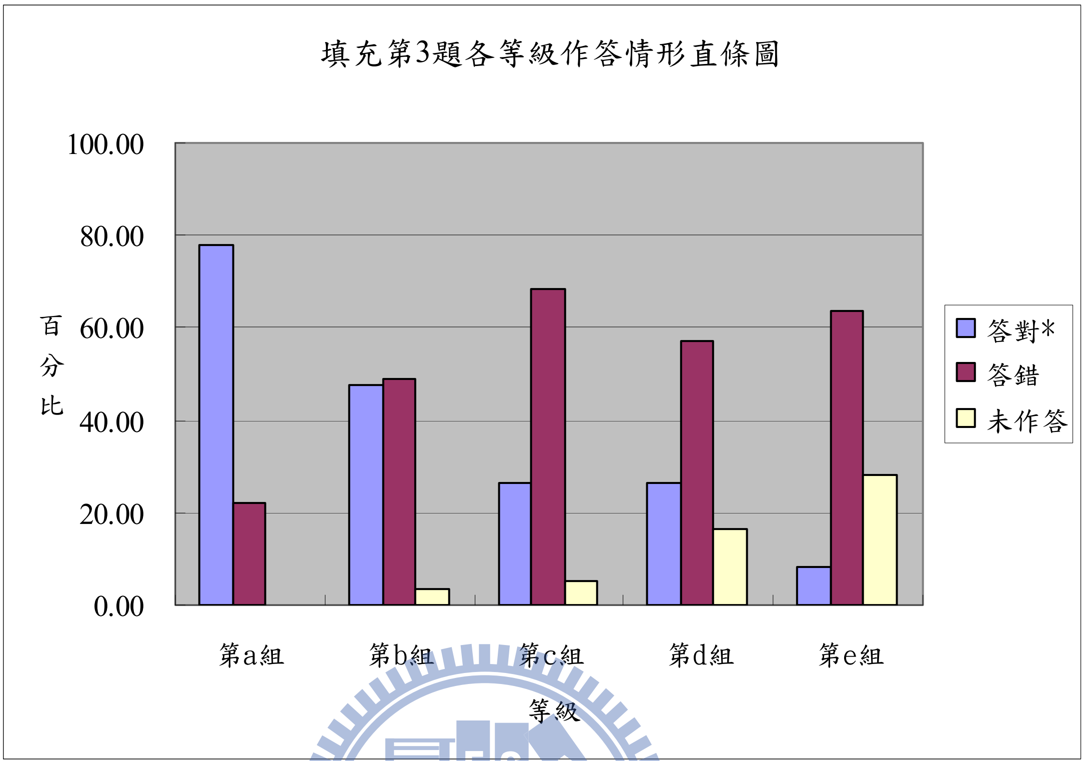
表 962-c3-2

填充	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
第 3 題	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	164	78.10%	100	47.62%	55	26.19%	55	26.19%	17	8.10%
答錯	46	21.90%	103	49.05%	144	68.57%	120	57.14%	134	63.81%
未作答	0	0.00%	7	3.33%	11	5.24%	35	16.67%	59	28.10%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

表 962-c3-1

填充第 3 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	391	37.24%	219	69.97%	31	10.80%
答錯	547	52.10%	90	28.75%	180	62.72%
未作答	112	10.67%	4	1.28%	76	26.48%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

圖 962-c3-2



試題分析：

由表 962-c3-1，答對率 37.24%，難度屬於困難。未作答比例 10.67%。高分組答對率 69.97%，未作答比例 1.28%；低分組答對率 10.80%，未作答比例 26.48%。鑑別度 0.5917 非常優良，由圖 962-c3-1 與表 962-c3-3，本題除了對 c、d 兩組間的學生無法鑑別外（$P3=P4,\ D3=0$），對其餘各組間的鑑別能力都很好，（鑑別等級均達非常優良），且對分數越高的組別間有越佳的鑑別能力。

本題是典型的連鎖律程序性問題，計算雖不難但量不少，學生必須熟悉連鎖律及偏導函數運算才能正確作答。

此外，因為 $y=(1+st)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},\ \ z=t(t^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}$，此題若改為求 $\frac{\partial w}{\partial t}$，則在計算 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 與 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 的部份，會多應用微分的乘法性質，難度會增加不少。

解題步驟如下，

$w = ze^{\frac{x}{y}},\quad x=\sin(t^2 s),\ y=(1+st)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}},\ z=t(t^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}$，由連鎖律得

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \qquad (1)$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=z\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=z\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot(\dfrac{-x}{y^2}) \\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=e^{\frac{x}{y}} \end{cases} \qquad (2)$$

且

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}=\cos(t^2 s)\cdot t^2 \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}=t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s}=t(\dfrac{-3}{2})\cdot(t^2+s^2)^{\frac{-5}{2}}(2s) \end{cases} \qquad (3)$$

將(2)、(3)代回(1)，得

$$\frac{\partial w}{\partial s}=[z\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}]\cdot[\cos(t^2 s)\cdot t^2]+[z\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot(\frac{-x}{y^2})]\cdot[t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}]+[e^{\frac{x}{y}}]\cdot[t(\frac{-3}{2})\cdot(t^2+s^2)^{\frac{-5}{2}}(2s)] \quad (4)$$

令 $(s,t)=(0,1)$，得 $x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=1$。

因此，$\left.\dfrac{\partial w}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,1)}=\sqrt{2}$。

在式(4)中，學生極容易因為抄錯而功虧一簣，

若在第(2)、(3)式就將 $x=0,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=1$ 與 $(s,t)=(0,1)$ 代入，

可得

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = z\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left.\frac{1}{y}\right|_{(x,y,z)=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = \sqrt{2} \\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x,y,z)=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = z\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left.(\frac{-x}{y^2})\right|_{(x,y,z)=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = 0 \\ \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = \left.e^{\frac{x}{y}}\right|_{(x,y,z)=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = 1 \end{cases} \qquad (5)$$

與

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,1)} = \cos(t^2 s)\cdot \left.t^2\right|_{(s,t)=(0,1)} = 1 \\ \left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,1)} = \left.t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right|_{(s,t)=(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,1)} = \left.t(\frac{-3}{2})\cdot(t^2+s^2)^{\frac{-5}{2}}(2s)\right|_{(s,t)=(0,1)} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

將(5)、(6)代回(1)，即可得 $\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,1)} = \sqrt{2}$。

兩種作法的計算量雖然接近，但後者省去了抄寫式(4)的時間並避免因抄錯而算錯的機會。

試題分析：

本題雖然只是單純的連鎖律，但計算量不少，容易因解題過程粗心而導致全錯，建議改為單選題。

題號：填充第 4 題

試題內容：

_______ is the highest point on the plane curve that is given by the intersection of $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$.

題型：填充題

參考答案：$(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$

測驗目標：

14－5－6（法一）

給定一個三變數函數 f，能夠利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers）

求出 f 限制在 $g(x,y,z)=k,\ h(x,y,z)=c$ 時的極值。

答對率：P = 24.00%（Ph = 50.16%、Pl = 5.57%）；

鑑別度：D = 0.4459；

難度：P = 0.2400；

作答情形：

圖 962-c4-1

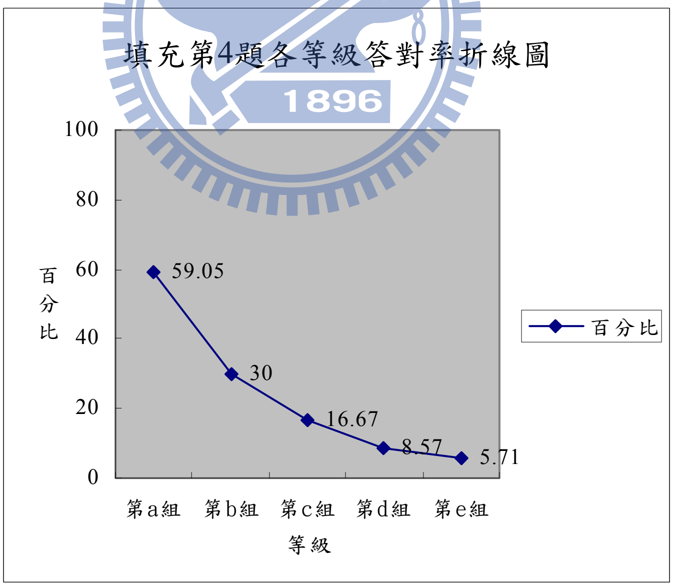


表 962-c4-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
填充題	第 4 題	0.4458	0.2905	0.1333	0.0810	0.0286

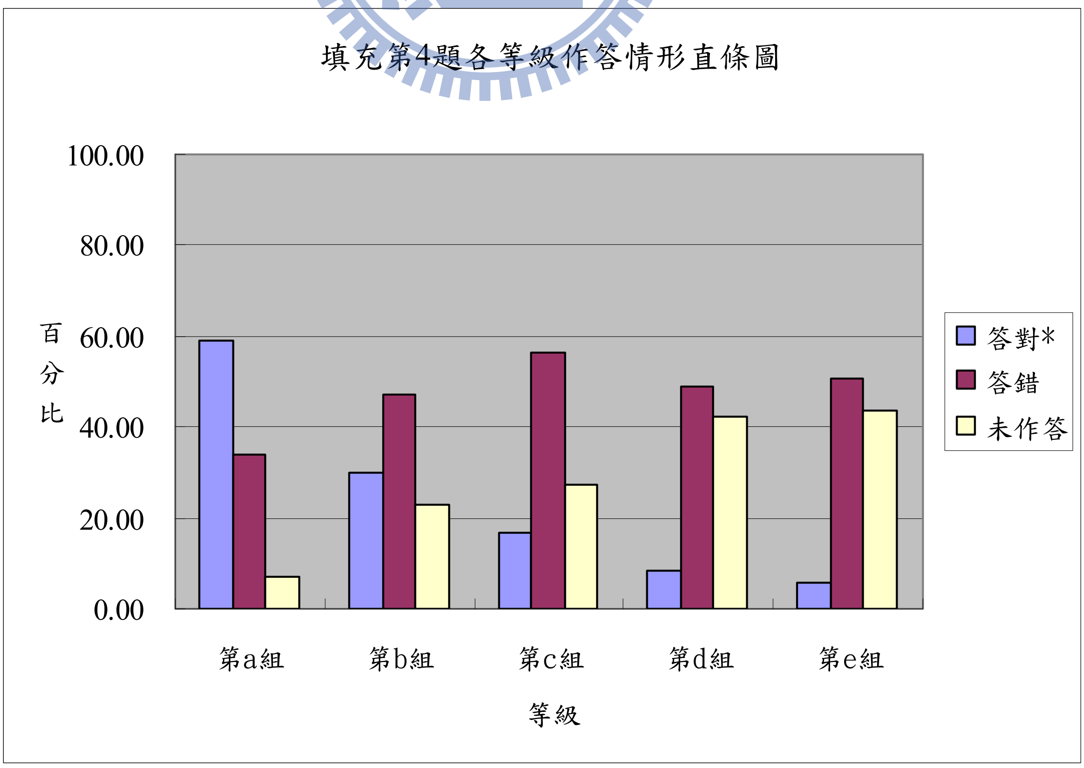
表 962-c4-2

填充第4題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	124	59.05%	63	30.00%	35	16.67%	18	8.57%	12	5.71%
答錯	71	33.81%	99	47.14%	118	56.19%	103	49.05%	106	50.48%
未作答	15	7.14%	48	22.86%	57	27.14%	89	42.38%	92	43.81%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

表 962-c4-1

填充第 4 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	252	24.00%	157	50.16%	16	5.57%
答錯	497	47.33%	122	38.98%	144	50.17%
未作答	301	28.67%	34	10.86%	127	44.25%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

圖 962-c4-2



試題分析：

由表 962-c4-1，答對率僅 24%，難度介於困難與非常困難的邊界。未作答比例達 28.67%。高分組答對率 50.16%，未作答比例 10.86%；低分組答對率 5.57%，未作答比例達 44.25%；由表 962-c4-2，第 a 組未作答率有 7.14%，為該組在填充題中最高的未答率，b、c 兩組差異不大，各有 22.86%與 27.14%，d、e 兩組未作答的比例則高達 42.38%與 43.81%。鑑別度 0.4459 非常優良，由圖 962-c4-1 與表 962-c4-3，本題對分數越高的組別間有越佳的鑑別能力，主要鑑別 a、b 兩組間（鑑別等級為非常優良）與 b、c 兩組間（鑑別等級為優良）的學生。

此外，由圖 962-c4-2，第 d 組在各方面的作答比例都與第 e 組相當接近，且兩組的未作答比例均與答錯比例差異不大。顯示 d、e 兩組學生對本題的解題能力接近，且有極高比例的學生未作答。

本題給定一平面 $x+y+z=0$ 與球 $x^2+y^2+z^2=1$，要求相交曲線上的最高點，是求解多變數函數極值的應用問題。要先對題意分析與理解，並將問題轉譯，把題目要求的「最高點」轉化為數學式求 z 之最大值與寫出等價的數學式子，再運用適當的方法解題。

解題步驟如下，

<u>法一：</u>

因為要求平面 $x+y+z=0$ 與球 $x^2+y^2+z^2=1$ 交面曲線上的最高點，所以本題目標即為求 z 的極大值。

令 $f(x,y,z)=z$；$g(x,y,z)=x+y+z,$ $h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，依題意要求 f 限

制在 $g(x,y,z)=0,\ h(x,y,z)=1$ 時的極大值。利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers），極值發生的點必為下述聯立方程式的解。

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z)+\mu\cdot\nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (1)\text{。}$$

又

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=(0,0,1) \\ \nabla g(x,y,z)=(1,1,1) \\ \nabla h(x,y,z)=(2x,2y,2z) \end{cases} \text{，}$$

代入 (1) 後可得

$$\begin{aligned} &0=\lambda+\mu\cdot 2x && (2) \\ &0=\lambda+\mu\cdot 2y && (3) \\ &1=\lambda+\mu\cdot 2z && (4) \\ &x+y+z=0 && (5) \\ &x^2+y^2+z^2=1 && (6) \end{aligned}$$

首先我們注意到 $\mu\neq 0$。

由 (2),(3),(4) 得 $x=\frac{-\lambda}{2u},\ y=\frac{-\lambda}{2u},\ z=\frac{1-\lambda}{2u}$，並代入 (5) 得 $\lambda=\frac{1}{3}$。

由 (6) 解得 $u=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 或 $u=-\frac{1}{\sqrt{6}}$。

當 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 時，$(x,y,z)=(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$；當 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 時，$(x,y,z)=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}})$。

因為 $f(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=\frac{2}{\sqrt{6}}$，$f(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})=-\frac{2}{\sqrt{6}}$，所以最大值發生的點為 $(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$。

<u>法二：</u>

由 $x+y+z=0,x^2+y^2+z^2=1$，得

$z=-x-y, x^2+y^2+(x+y)^2=2x^2+2xy+2y^2=1$，令 $f(x,y)=-x-y$，

$g(x,y)=2x^2+2xy+2y^2$。依題意我們要求 f 在 $g(x,y)=1$ 時的最大值。

利用拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers），極值發生的點必為下述聯立方程式的解。

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\cdot\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(-1,-1)=\lambda\cdot(4x+2y,2x+4y) & (1)\\ 2x^2+2xy+2y^2=1 & (2)\end{cases}$$

由(1)可知 $\lambda\neq 0$ 且 $4x+2y=2x+4y$，因此，$x=y$。

代入(2)，得 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 或 $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$。

當 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 時，$f(x,y)=-\frac{2}{\sqrt{6}}$；當 $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 時，$f(x,y)=\frac{2}{\sqrt{6}}$。

因此，最高點發生在 $(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$。

<u>法三：</u>

因 $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$，得 $x+y=-z,\ x^2+y^2=1-z^2$，利用柯西不等式（Cauchy inequation），

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(1^2+1^2\right)\geq\left(x+y\right)^2，$$

因此，

$$\left(1-z^2\right)\cdot 2\geq\left(-z\right)^2=z^2，$$

即 $-\frac{2}{\sqrt{6}}\leq z\leq\frac{2}{\sqrt{6}}$。

等號成立時，$x=y$。將 $x=y$ 代回 $x+y=-z,\ x^2+y^2=1-z^2$，解得

$x=y=\frac{-1}{\sqrt{6}}$，$z=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 或 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$，$z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$。因此，

$(x,y,z)=(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$時，$z$ 有最大值。

題號：填充第 5 題

試題內容：

$$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\sqrt{1+y^3}\,dydx=\_\_\_\_\_\_\_$$

題型：填充題

參考答案：$\frac{52}{9}$

測驗目標：

15－1－3

給定一個二重迭代積分，能夠改寫其積分次序。

答對率：P = 53.81%（Ph = 86.26%、Pl = 16.03%）

鑑別度：D = 0.7023

難度：P = 0.5381

作答情形：圖 962-c5-1

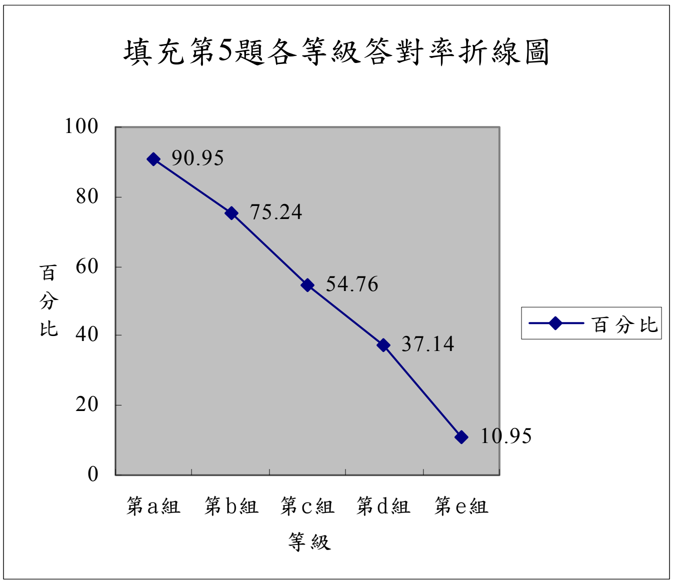


表 962-c5-3

鑑別度		D	D1	D2	D3	D4
填充題	第 5 題	0.7023	0.1571	0.2048	0.1762	0.2619

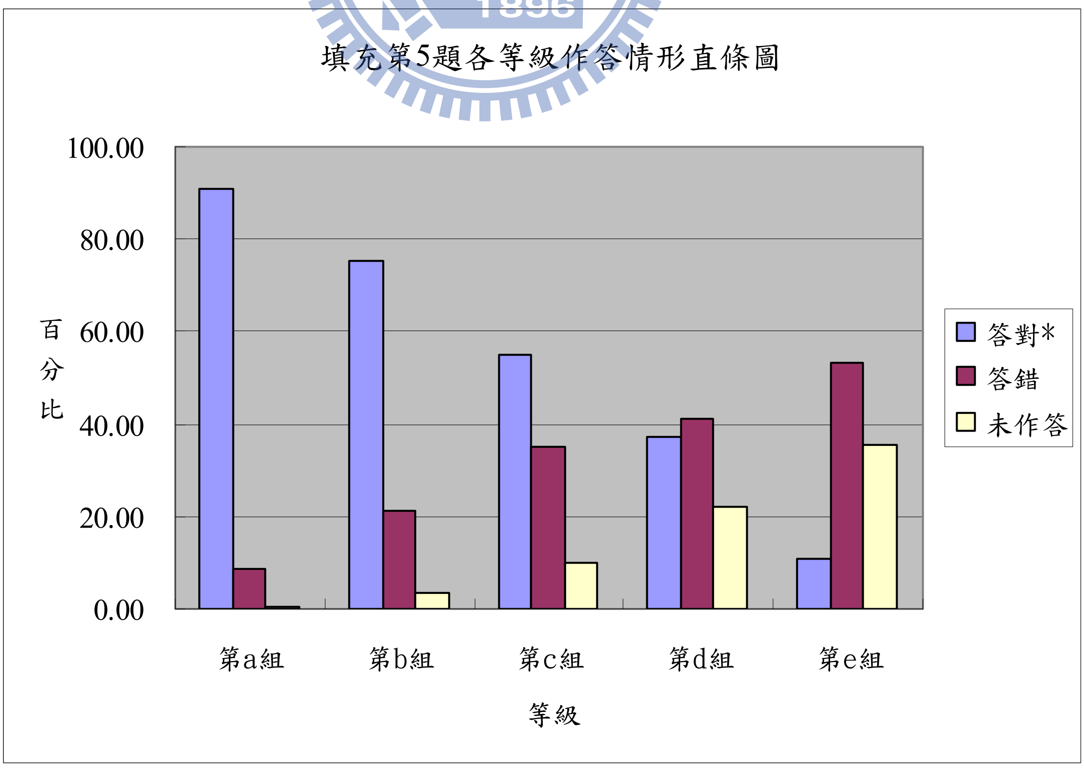
表 962-c5-1

填充第 5 題	所有考生		高分組		低分組	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	565	53.81%	270	86.26%	46	16.03%
答錯	335	31.90%	37	11.82%	149	51.92%
未作答	150	14.29%	6	1.92%	92	32.06%
小計	1050	100.00%	313	100.00%	287	100.00%

表 962-c5-2

填充第 5 題	第 a 組 0001-0210		第 b 組 0211-0420		第 c 組 0421-0630		第 d 組 0631-0840		第 e 組 0841-1050	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
答對*	191	90.95%	158	75.24%	115	54.76%	78	37.14%	23	10.95%
答錯	18	8.57%	45	21.43%	74	35.24%	86	40.95%	112	53.33%
未作答	1	0.48%	7	3.33%	21	10.00%	46	21.90%	75	35.71%
小計		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%		100.00%

圖 962-c5-2



試題分析：

由表 962-c5-1，答對率 53.81%，難度屬於難易適中。未作答比例 14.29%。高分組答對率有 86.26%，未作答比例 1.92%，答錯率 11.82%；低分組答對率僅 16.03%，未作答比例 32.06%，答錯率 51.92%；高、低分組的答對率差距與答錯率差距均為填充題中最大。鑑別度 0.7023 非常優良，是填充題中最高，由圖 962-c5-1 與表 962-c5-3，本題對各組間的學生均有很好的鑑別能力，(除 a、b 兩組間的鑑別等級為優良，其餘各組間的鑑別等級均為非常優良)。

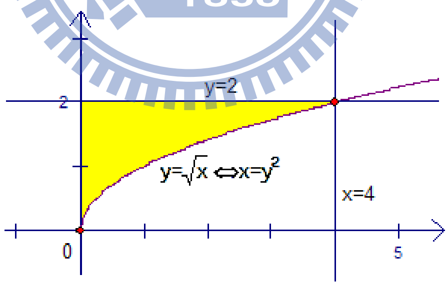
本題是標準利用改寫積分順序計算迭代積分的程序性問題，計算量不多。

解題步驟如下，

觀察給定之迭代積分 $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1+y^3}\,dydx$，無法利用學過的積分技巧先對變數 y 積分。

$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1+y^3}\,dydx$ 之積分區域為由 $y=\sqrt{x}$（即 $x=y^2$ 的上半部），

$y=2, x=0, x=4$ 所圍之區域，圖形如下，



若改變積分順序，則可改寫為

$$\int_0^2\int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}\,dxdy \text{ 。}$$

$$\int_0^2\int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}\,dxdy = \int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy \text{ 。}$$

令 $u=1+y^3$，則 $du=3y^2dy$，故

$$\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy = \frac{1}{3}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=1}^{9} = \frac{52}{9} \text{ 。}$$

附錄八、多重積分單元相似題整理

課本例題、習題－係指

James Stewart編寫的Calculus(Early Transcendental)(5th Ed)之內容

共同習題－公布於交通大學微積分小組網頁之習題

其他習題－指課本習題中，非共同習題的題目

資料來源：本研究整理

單元：多重積分

會考題目：單選題第 5、6、7、8、9、10、與填充第 5 題，共七題。

相似題（最為接近題）整理：

	單選 第 5 題	單選 第 6 題	單選 第 7 題	單選 第 8 題	單選 第 9 題	單選 第 10 題	填充 第 5 題
考古題		有				有	
課本例題		15.4 節 第一題				15.6 節 第一題	
共同習題	15.7 節 第 9 題 15.7 節 第 19 題 15.7 節 第 29 題	15.4 節 第 11 題	15.4 節 第 5 題	15.3 節 第 37 題 15.7 節 第 33 題			15.3 節 第 37 題
其他習題					15.6 節 第 9 題	15.6 節 第 4 題	15.3 節 第 44 題