

國立交通大學
光電工程研究所

博士論文

外差干涉術在中央條紋法的應用與誤差分析

The application and error analysis of heterodyne
interferometry with central fringe identification
technique



研究生：吳旺聰

指導教授：蘇德欽 教授

中華民國 一 百 年 八 月

外差干涉術在中央條紋法的應用與
誤差分析

The application and error analysis of heterodyne
interferometry with central fringe identification
technique

研究生：吳旺聰 Student: Wang-Tsung Wu
指導教授：蘇德欽 教授 Advisor: Prof. Der-Chin Su



A Dissertation

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of Doctor of Philosophy in
The Institute of Electro-Optical Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao-Tung University
Hsin-chu, Taiwan, R.O.C.

中華民國一百年八月

外差干涉術在中央條紋法的應用與誤差分析

研究生：吳旺聰

指導教授：蘇德欽 教授

國立交通大學 光電工程研究所

摘要

外差式中央條紋定位法，是一種利用可調波長雷射結合外差干涉術與中央條紋定位法，進行定位的絕對距離量測技術。具有光學架構簡單、定位方便、測量範圍大、準確度高、準確度不易受到波長擾動影響等優點。本研究設法將外差式中央條紋定位法應用在塊規厚度、透明平板厚度及多階高樣本量測，其中多階高樣本的量測是使用相機取樣的全場外差量測架構。

研究中，提出了外差式中央條紋定位法的快速定位步驟，並且發現外差式中央條紋定位法原理中應考慮的初始相位問題；當系統的相位重複性較差時，也提出了快速定位步驟中的波長選擇條件。另外整理了出外差干涉術可能有的 20 多種誤差來源，並以程式模擬分析部分誤差對干涉信號相位項的影響，結果歸納出最佳化的取樣參數設定。經由此研究可解決從前使用外差干涉術時不知道如何設定最佳取樣參數的窘境，也能夠直接根據誤差來源強度推論出相位誤差的大小，或是藉此評估實驗中最迫切需要改善的誤差來源。

The application and error analysis of heterodyne interferometry with
central fringe identification technique

Student: Wang-Tsung Wu

Advisor: Prof. Der-Chin Su

Institute of Electro-Optical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

Heterodyne central fringe identification technique is an absolute distance metrology technique, which combined the heterodyne interferometry and the central fringe identification method with a wavelength tunable laser. It has some merits such as simple optical configuration, easy operation, wide measurable range, high precision and the accuracy isn't easily affected by wavelength fluctuation. In this research, the heterodyne central fringe identification technique is applied on the gauge block, thickness of a parallel transparent plate, and multi-step height measurements. In the multi-step height measurement, the data is acquired by one camera with the full-field heterodyne central fringe identification configuration.

In this research, we propose fast identification procedures, and discover that the initial phase condition must be taken into account in the principle of heterodyne central fringe identification. As the phase repeatability is not good, the best wavelength suggestion is also proposed to the fast identification procedures. Besides, more than 20 kinds of error sources of the heterodyne interferometry are arranged. Then, we use simulation programs to analysis the phase error from some of the error sources. As a result, the optimal sampling conditions are induced. By this research, we solve the question of how to setup the sampling conditions in heterodyne interferometry, and induce phase error formulas to estimate the most important error in systems.

誌 謝

這本博士論文能夠順利完成，最要感謝的就是我的指導教授 蘇德欽教授，蘇教授在光學量測方面的學識十分淵博，對於研究的直覺常令我得到相當大的啟發，他的指導總是嚴而不厲，更多時候像是父親一樣的和藹，教授常秉持「教學本土化，研究國際化」的原則也深深的影響我。許多研究生會稱自己的指導教授為老闆，但在我們實驗室，我們更願意稱他為老師，因為他確實是理想的教師典範。然而造化弄人，老師在我完成博士論文口試後不久，就因病逝世並羽化而去了，但老師慈祥的微笑、拖著地板短促的腳步聲、還有與老師爭論研究方法的回憶已深深的刻在我的腦海，我會永遠感念老師的諄諄教導，謝謝老師。

另外也要感謝過去從實驗室畢業的學長們，邱銘宏博士 以及 李朱育博士，由於有他們過去的研究基礎，才能讓我站穩腳步並探索新的領域；感謝實驗室的夥伴，謝博任、簡志成、楊惠婷、謝鴻志、陳彥良、張巍耀、徐凡嬰、翁俊仁與何承舫，在研究、修課與實驗方面的協助與陪伴，其中我要特別感謝謝鴻志學長在這幾年的照顧與指導；也感謝我的朋友謝明憲與陳龍翌陪我談天論地，讓我這段研究生涯增添許多樂趣。

最後要感謝我的父親 吳昆固先生、母親 胡瓊文女士、以及我的女友薇祺，感謝你們長久以來的支持與鼓勵，讓我沒有後顧之憂，順利完成博士學位，願與我最愛的家人分享這份榮耀！

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌 謝.....	iii
目 錄.....	iv
表 目 錄.....	vii
圖 目 錄.....	viii
第一章 緒論.....	1
參考文獻.....	3
第二章 外差干涉術.....	6
2.1 前言.....	6
2.2 外差干涉術的基本原理.....	7
2.3 相位解析.....	8
2.3.1 三參數最小方差弦波擬合法.....	8
2.3.2 程式範例與提高效率的寫法.....	11
2.4 外差光源.....	12
2.4.1 EO 外差光源產生原理.....	14
2.4.2 半波電壓的檢測方法.....	16
2.4.3 EO 外差光源精確架設的方法.....	17
2.5 小結.....	18
參考文獻.....	19
附錄 A：弦波的疊加.....	22
第三章 外差干涉術相位誤差與取樣最佳化設定.....	24
3.1 前言.....	24
3.2 誤差的種類.....	24
3.2.1 EO 外差光源相位誤差.....	24
3.2.2 基本光學元件相位誤差.....	30

3.2.3 干涉儀系統誤差.....	30
3.2.4 偏極元件相位誤差.....	32
3.2.5 光偵測器誤差.....	36
3.2.6 其他誤差.....	41
3.3 總合分析.....	41
3.4 模擬分析-最佳化設定與相位誤差.....	44
3.5 小結.....	51
參考文獻.....	52
附錄 B：常被忽視的 Jones 矩陣問題.....	53
第四章 外差式中央條紋法.....	55
4.1 前言.....	55
4.2 傳統的中央條紋定位法.....	55
4.3 外差式中央條紋定位法.....	57
4.3.1 非共光程外差干涉術.....	57
4.3.2 外差式中央條紋定位法原理.....	59
4.3.3 快速定位步驟.....	61
4.3.4 波長變化量的選擇.....	61
4.4 更正確的外差式中央條紋法原理.....	62
4.5 使用外差干涉術精密測量位移.....	63
4.6 小結.....	64
參考文獻.....	65
第五章 以外差式中央條紋定位法進行塊規量測.....	68
5.1 前言.....	68
5.2 原理.....	69
5.3 實驗.....	70
5.4 討論.....	73
5.5 小結.....	74
參考文獻.....	75
第六章 以外差式中央條紋定位法測量透明平板厚度.....	76

6.1 前言.....	76
6.2 原理.....	76
6.2.1 第一種方法.....	76
6.2.2 第二種方法.....	80
6.3 實驗.....	84
6.4 討論.....	85
6.5 小結.....	88
參考文獻.....	90
第七章 以外差式中央條紋定位法進行全場階高量測.....	92
7.1 前言.....	92
7.2 原理.....	93
7.3 實驗.....	95
7.3.1 小區域量測的定位步驟.....	96
7.3.2 全畫素的定位量測.....	99
7.3.3 實驗結果.....	101
7.4 討論.....	103
7.5 小結.....	103
參考文獻.....	104
第八章 未來工作與結論.....	105
簡 歷.....	107
著 作.....	108

表 目 錄

Table 2.1	使 ϕ 的值域擴展為 $-\pi < \phi \leq \pi$ 。	10
Table 2.2	使 ϕ 的值域擴展為 $0 \leq \phi < 2\pi$ 。	10
Table B.1	各種光學元件的 Jones 矩陣。	54
Table 4.1.	各步驟的定位範例。	61
Table 4.2	波長的選擇與 d 的解析範圍的關係。	62
Table 5.1	各步驟的實驗數據(20°C)。	72
Table 7.1	小區域量測中各步驟的實驗參數。	97
Table 7.2	全畫素定位量測的相關參數。	99

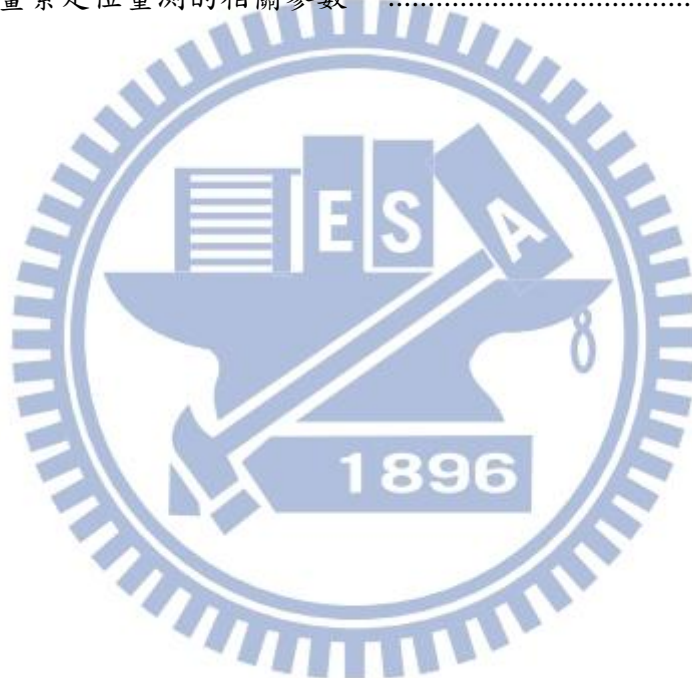


圖 目 錄

Fig. 2.1	Matlab 三參數擬合法範例。	11
Fig. 2.2	(a)都普勒外差光源 (b)AO 外差光源 (c)EO 外差光源。	13
Fig. 2.3	EO 外差光源之光學架構。	14
Fig. 2.4	驅動電光晶體的電壓信號。	15
Fig. 2.5	半波電壓的檢測架構。	16
Fig. 3.1	EO 外差干涉術常見架構簡圖。	24
Fig. 3.2	EO 反應時間造成弦波斷點的示意圖。	25
Fig. 3.3	鋸齒波訊號振幅為 120 V 時的干涉訊號@ $V_{\pi} = 148$ V, $\Gamma'_0 = 60^\circ$ 。	26
Fig. 3.4	溫度對 EO 相位的影響。	27
Fig. 3.5	偏極旋轉示意圖。	27
Fig. 3.6	偏極旋轉誤差 $\Delta\phi_R$ 、 ϕ 與 θ_R 之間的關係圖。	29
Fig. 3.7	各式環境振動來源示意圖。	31
Fig. 3.8	PBS 的偏極混合現象。	33
Fig. 3.9	偏極混合誤差 $\Delta\phi_m$ 與 ϕ 的關係圖。	35
Fig. 3.10	相機的 γ 值預設為 1，偵測到的光信號。	36
Fig. 3.11	關閉 γ 值調整功能或是設為零，偵測到的光信號。	36
Fig. 3.12	CCD 相機背景雜訊 10 秒內的跳動。	37
Fig. 3.13	計算取樣頻率方法的示意圖。	38
Fig. 3.14	取樣時間間隔不穩定的現象。	40
Fig. 3.15	(a)取樣頻率逐漸降低，(b)取到的資料點所重建的波形。	40
Fig. 3.16	模擬的流程。	45
Fig. 3.17	程式控制面板。	45
Fig. 3.18	內部組態。	46
Fig. 3.19	不同條件下相位誤差標準差對 P 的關係圖。	48
Fig. 3.20	不同參數時的相位誤差標準差。	49
Fig. 4.1	干涉信號。	56

Fig. 4.2	低同調干涉儀。	56
Fig. 4.3	使用EO晶體調變之非共光程外差干涉術。	57
Fig. 4.4	示波器上的信號。	60
Fig. 4.5	精密位移測量系統架構圖。	64
Fig. 5.1	測量塊規新法的光學裝置。	69
Fig. 5.2	相位計的相位重複性測試。	71
Fig. 5.3	示波器上的信號。	72
Fig. 6.1	實驗架構簡圖。	77
Fig. 6.2	實驗架構簡圖。	81
Fig. 6.3	四組定位點在空間上的關係。	82
Fig. 6.4	相位計的重複取樣測試。	85
Fig. 6.5	當波長變化時，相位的變化情形 (a)正確的定位 (b)錯誤的定位。	86
Fig. 6.6	對焦不準確示意圖。	86
Fig. 6.7	同時考慮面鏡傾斜、透鏡離軸與對焦不準的示意圖。	88
Fig. 7.1	中央條紋定位實驗架構。	93
Fig. 7.2	樣本示意圖(虛線區域表示量測範圍)。	95
Fig. 7.3	(a) 樣本表面的影像，(b) s-與 p-偏光干涉後的影像，(c) 過 IEEE1241 弦波擬合後的相位分佈(單位為 degree)。	96
Fig. 7.4	小區域量測。	97
Fig. 7.5	在不同距離下波長變化與相位變化量的關係。	98
Fig. 7.6	步進量測的定位結果示意。	99
Fig. 7.7	全場階高量測實驗流程示意圖。	100
Fig. 7.8	全畫素的定位量測參數控制面板。	100
Fig. 7.9	階高樣本的全場量測結果。	101
Fig. 7.10	(a)AB 線段的高度剖面圖 (b)其中 1~300 畫素的高度分布。	102
Fig. 7.11	本方法(實線)與掃描探針顯微鏡(虛線)的量測結果。	102

第一章 緒論

外差干涉術(heterodyne interferometry)由於具有精確度高、可快速量測、不易受背景光干擾等優點，因此被廣泛的應用在表面輪廓、距離量測[1,2]、表面粗糙度檢測[3,4]、折射率量測[5,6]、薄膜厚度量測、物體微小位移測量[7]，小角度量測[8,9]，絕對距離測量[10,11]，折射率[12-14]、雙折射率測量[15]等系統中。而中央條紋(central fringe)是光學干涉儀裡的重要特性之一，當中央條紋出現時，表示干涉儀兩臂所引入的光程差(optical path difference)是相等的。利用決定中央條紋位置的方法，可以應用在位移、壓力、溫度、應力以及任何可以轉換成位移量參數的測量上[16-19]。

1996年，李朱育等人提出以可調波長雷射(wavelength tunable laser)結合外差干涉術與中央條紋法，用以定位出干涉儀兩臂等長的位置的技術，我們稱之為外差式中央條紋定位法。外差式中央條紋定位法，原理上與雙波長干涉術[20]類似，皆利用到等效波長的特性。雙波長干涉術是直接由兩個波長分別取得的相位，能夠以等效波長推算出干涉儀兩臂的光程差，量測快速又方便，但是當應用在絕對距離量測時，在光程差越大會使得距離的準確度越低；而外差式中央條紋定位法，由於是定位在變波長前後相位變化量為零的位置，也就是兩臂光程差為零的位置，因此當應用在絕對距離量測時，不會因距離較長就使準確度變差。另外，外差式中央條紋定位法具有光學結構簡單、定位方便、測量範圍大、準確度高、準確度不易受到波長擾動影響等優點，是一種很有潛力的新型量測技術。

本研究將外差式中央條紋定位法應用在幾種不同的待測對象上，對於不同的待測物皆提出了相配合的原理與實驗方法，如第五章到第七章的應用。起初研究時發現用來做為相位計使用的鎖相放大器(lock-in amplify)，常常會有定不住相位的問題，同時為了第七章的全場外差式中央條紋定位法的研究，迫使我们開發了電腦虛擬示波器以及虛擬相位計，也意外地讓筆者對於外差干涉術的相位誤差理論有更深入的了解與研究動機。

為了徹底地了解外差式中央條紋定位法的誤差來源，必須回歸到外差干涉術來分析其相位誤差的成因。由2007年與2011的兩篇取樣最佳化研究[21,22]給予的靈感，與外差干涉術應用過程中所觀察到的誤差現象，本研究也歸納這些誤差，並找出合理的最佳化條件。

研究外差式中央條紋法之前，必須先了解此方法的基礎知識，因此在第二章中說明了外差干涉術的原理，以及如何利用電腦進行相位解析，並提出程式範例與提高效率的寫法；在外差光源的架構部份，介紹了各式外差光源，以及本論文所用之電光晶體調變器的工作原理，並交代如何精確的架設 EO 外差光源。提供往後相關研究人員能夠快速地了解並應用 EO 外差干涉術。

接著在第三章中，說明了各種相位誤差與來源，對於外差干涉術的各部份元件進行分類討論，如：外差光源、基本光學元件、干涉儀系統、偏極元件、光偵測器等，共二十多種誤差來源，並整理了整體的數學表示式，再利用程式模擬擬合頻率錯誤與均勻隨機雜訊兩項誤差的影響並分析，最後歸納出相位誤差量與這兩項誤差之間的數學關係，另外還能夠解析出最佳化的取樣週期數。能夠解決以往不知道該如何設定實驗參數的窘境

第四章則說明了外差式的中央條紋定位法的原理以及實驗時的快速定位步驟，特別針對相位重複性較差的系統來評估波長的選擇，接著又修正了外差中央條紋法中的初始相位隨波長變化的問題，而為了提高中央條紋法中移動平台的定位準確度，提出使用外差干涉儀來精密測定移動平台的位移量。

第五章利用外差式中央條紋定位法，來進行塊規兩端的零光程差的位置定位，並且待測物的量測範圍只受限於移動平台的最大行程，而不像傳統的超出片段法會受限於雷射的同調長度。本研究證明了外差式中央條紋定位法在塊規量測上的可行性。

而在透明平板厚度量測上，由於大多數的現有技術在測量樣本時，準確度會隨著樣本厚度的增加而下降[23-26]，或是使用很難被準確測量的物鏡有效數值孔徑來推導透明平板的幾何厚度[27,28]，使得在樣本厚度大於 1 mm 時，很難得到奈米等級的準確度。因此在第六章，提出兩種外差式中央條紋定位法的應用架構，來準確地測量透明平板的幾何厚度。

為了量測具有二維階高分佈的樣本，在第七章以一部 CCD 相機結合外差式中央條紋法，來定位出樣本各階高平面的高度分佈，能夠同時量測具有大小階高分佈的樣本，並能保持高準確度。在此研究中為了避免人為操作造成誤差，以及提升實驗量測的效率，也發展自動化控制及量測系統。

最後一章將對本研究做一個總結，並提出幾種未來可能繼續的研究方向。

參考文獻

1. E. Collett, *Polarized light: fundamentals and applications*, Marcel Dekker, New York, 515-556 (1993).
2. H. Kikuta, K. Iwata, and R. Nagata, "Distance measurement by the wavelength shift of laser diode light," *Appl. Opt.* **25**, 2976-2980 (1986).
3. E. Gelmini, U. Minomi, and F. Docchio, "Tunable, double-wavelength heterodyne detection interferometer for absolute distance measurement," *Opt. Lett.* **19**, 213-215 (1994).
4. G. E. Sommargren, "Optical heterodyne profilometry," *Appl. Opt.* **20**, 610-618 (1981).
5. D. Pantzer, J. Politch, and L. Ek, "Heterodyne profiling instrument for the angstrom region," *Appl. Opt.* **25**, 4168-4172 (1986).
6. D. C. Su, J. Y. Lee, and M. H. Chiu, "New type of liquid refractometer," *Opt. Eng.* **37**, 2795-2797 (1998).
7. D.C. Su, M. H. Chiu, and C. D. Chen, "A heterodyne interferometer using an electro-optic modulator for measuring small displacements," *J. Opt.* **27**, 19-23 (1996).
8. M. H. Chiu and D. C. Su, "Angle measurement using total-internal-reflection heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **36**, 1750-1753 (1997).
9. M. H. Chiu and D. C. Su, "Improved technique for measuring small angle," *Appl. Opt.* **36**, 7104-7106 (1997).
10. H. Kikuta, K. Iwata, and R. Nagata, "Distance measurement by the wavelength shift of laser diode light," *Appl. Opt.* **25**, 2976-2980 (1986).
11. E. Gelmini, U. Minomi, and F. Docchio, "Tunable, double-wavelength heterodyne detection interferometer for absolute distance measurements," *Opt.*

- Lett.* **19**, 213-215 (1994).
12. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Refractive index measurement based on the effects of the total internal reflection and the uses of the heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **36**, 2936-2939 (1997).
 13. D. C. Su, J. Y. Lee, and M. H. Chiu, "New type of liquid refractometer," *Opt. Eng.* **37**, 2795-2797 (1998).
 14. J. Y. Lee and D. C. Su, "A method for measuring Brewster's angle by circularly polarized heterodyne interferometry," *J. Opt.* **29**, 349-353 (1998).
 15. Y. C. Huang, C. Chou, and M. Chang, "Direct measurement of refractive Indices of a linear birefringent retardation plate," *Opt. Commun.* **133**, 11-16 (1997).
 16. Y. J. Rao, Y. N. Ning, and D. A. Jackson, "Synthesized source for white-light sensing systems," *Opt. Lett.* **18**, 462-464 (1993).
 17. P. Sandoz, G. Tribillon, and H. Perrin, "High-resolution profilometry by using phase calculation algorithms for spectroscopic analysis of white-light interferograms," *J. Mod. Opt.* **43**, 701-708 (1996).
 18. P. D. Groot and L. Deck, "Surface profiling by analysis of white-light interferograms in the spatial frequency domain," *J. Mod. Opt.* **42**, 389-401 (1995).
 19. U. Schnell, E. Zimmermann, and R. Dandliker "Absolute distance measurement with synchronously sampled white-light channelled spectrum interferometry," *Pure Appl. Opt.* **4**, 643-651 (1995).
 20. K. Creath, "Step height measurement using two-wavelength phase-shifting interferometry," *Appl. Opt.*, **26**, 2810-2816 (1987).
 21. Z. C. Jian, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, P. J. Hsieh, "An optimal condition for the full-field heterodyne interferometers," *Opt. Eng.* **46**, 115604 (2007).

22. H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang, Y. L. Chen, and D. C. Su, "Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **50**, 045601 (2011).
23. Z. C. Jian, C. C. Hsu and D. C. Su, "Improved technique for measuring refractive index and thickness of a transparent plate," *Opt. Comm.* **226**, 135-140 (2003).
24. J. C. Brasunas and G. M. Cushman, "Interferometric but nonspectroscopic technique for measuring the thickness of a transparent plate *Opt. Eng.* **34**, 2126-2130 (1995).
25. C. H. Liu, S. C. Yeh and H. L. Huang, "Thickness measurement system for transparent plates using dual digital versatile disc (DVD) pickups," *Appl. Opt.*, **49**, 637-643 (2010).
26. J. Na, H. Y. Choi, E. S. Choi, C. Lee, B. H. Lee, "Self-referenced spectral interferometry for simultaneous measurements of thickness and refractive index," *Appl. Opt.*, **48**, 2461-2467 (2009).
27. T. Fukano and I. Yamaguchi, "Separation of measurement of the refractive index and the geometrical thickness by use of a wavelength-scanning interferometer with a confocal microscope," *Appl. Opt.*, **38**, 4065-4073 (1999).
28. M. Ohmi, H. Nishi, Y. Konishi, Y. Yamada and M. Haruna, "High-speed simultaneous measurement of refractive index and thickness of transparent plates by low-coherence interferometry and confocal optics," *Meas. Sci. Technol.* **15**, 1531-1535 (2004).

第二章 外差干涉術

2.1 前言

雷射干涉術已經發展成為一項重要的量測工具，舉凡長度、微小位移的測量、折射率、表面粗糙度、物體定位與其他精密工程，都廣泛地使用雷射干涉術。在各種干涉術中，應屬外差干涉術最為重要，因為它具有快速反應、排除雜訊與克服訊號飄移的能力。從已經發表的一些論文可看出外差干涉術的應用訊息[1-5]。典型的外差干涉術是指將兩個具有不同頻率的波前互相干涉的技術[6]，將待測的參數引進光的相位之中，再利用相位解析技術取得相位。本章將針對相位解析方法與外差光源的架設做詳細的說明。首先 2.2 節是外差干涉術的基本原理。其次 2.3 節是相位解析方法，其中包含了程式範例與提高效率的寫法。2.4 節介紹的是外差光源，說明外差光源的種類，並特別敘述 EO 外差光源的原理與架設要注意的問題。

外差干涉術應用的領域相當廣泛，例如表面輪廓、粗糙度測量[1,2]，物體微小位移測量[7]，小角度量測[8,9]，絕對距離測量[10,11]，折射率[12-14]、雙折射率測量[15]以及凡是能夠將相位差引進光學信號的參數都可以用外差干涉術量測出來。在光電半導體產業中，所用的精密定位系統，就是利用外差干涉術來完成的。而它之所以被廣泛應用的理由，是因為具有以下幾項優點：

1. 測量精確度高；
2. 可做快速的量測；
3. 避免背景光干擾的影響；
4. 避免光源強度變化的影響。

當外差干涉術應用在不同的量測系統時，會有不同的光學結構加以配合；例如在位移、表面粗糙度或表面輪廓的方面，大都會架設麥克森（Michelson）干涉儀或特外曼-格林（Twyman-Green）干涉儀來測量。在折射率，雙折射率方面，則以共光程外差干涉術來測量。雖然光學架構也許不盡相同，但都需要一個共同的外差光源。

2.2 外差干涉術的基本原理

光在反射或穿透後皆可能會引入額外相位，然而光的頻率極高，以目前的科技無法記錄到光的電場震盪，因此也無法直接量測到光的相位項，為了解決這個問題，一般使用外差干涉術來取得相位。外差干涉術使用兩個具有不同頻率且頻率差很小的光波其電場形式分別為

$$E_1(t) = a_1 \exp(i\omega_1 t), \quad (2.1)$$

與

$$E_2(t) = a_2 \exp(i\omega_2 t + \phi), \quad (2.2)$$

其中 a_1 與 a_2 分別為兩波的振幅， ω_1 與 ω_2 分別為兩波的角頻率，而 ϕ 為兩波的相位差。當此二光波完全重疊在一起形成干涉並送入光偵測器，干涉光的強度可表示為

$$I(t) = |E_1 + E_2|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega t + \phi), \quad (2.3)$$

其中 ω 為兩光波的角頻率差 ($\omega = \omega_2 - \omega_1$)。由 Eq. (2.3) 可知此干涉光為弦波的形式，且該弦波的角頻率等於 ω ，由於 ω 很小使得光偵測器能夠清楚的記錄到干涉光訊號，兩個光波的相位差 ϕ 則被保留在此弦波訊號的相位項裡，我們常稱此弦波訊號為外差訊號，這種同時具有兩種頻率且頻差很小的光源也被稱為外差光源，而頻率差則被稱作外差頻率。

若再設法產生一組具有相同角頻率的參考訊號，形式為

$$I_r(t) = I_0(1 + \gamma \cos \omega t), \quad (2.4)$$

其中 I_0 為參考光的平均強度， γ 為弦波的對比度，將此參考訊號與 Eq. (2.3) 的測試訊號同時送入相位計中作比較，即可得到相位差 ϕ 。對於不同的實驗樣本及系統架構，將會對應不同相位差，我們便能夠藉由外差干涉術量測出樣本的各项資訊。

2.3 相位解析

要取得兩弦波訊號之間的相位差，需將參考訊號及測試訊號同時送入相位計中，再分別解析出兩弦波訊號的相位，兩相位之間差值即為所求。相位計一般可利用鎖相放大器來解析相位，但有時可能需要對訊號做特殊的處理，必須改用資料擷取卡(DAQ)將訊號送入電腦中做相位的解析，或者訊號是以相機取得，一定得使用電腦做相位解析的情況，我們必須特別考慮如何進行相位解析。

一般而言，弦波的相位解析方法有兩種：快速傅立葉轉換法(FFT)與最小方差弦波擬合法(least-squares fit to sine wave data)，最小方差弦波擬合法又可細分為三參數(已知頻率)及四參數(未知頻率)擬合法，這些方法皆能夠精確的擬合弦波，針對已知單一頻率的弦波訊號進行擬合時，三者所得到的相位幾乎沒有差別，然而考慮到要減少全場外差干涉術中大量相位解析所耗費的時間，我們通常使用三參數最小方差弦波擬合法來取得相位。

2.3.1 三參數最小方差弦波擬合法

假設有一組弦波訊號包含了 N 個資料點，每個資料點的訊號強度分別為 y_1, y_2, \dots, y_N ，所對應的時間為 t_1, t_2, \dots, t_N ，在沒有誤差的情況下所記錄到的信號強度可表示為

$$y_n = A_0 \cos(\omega t_n) + B_0 \sin(\omega t_n) + C_0, \quad (2.5)$$

然而實際上 y_n 不可能沒有誤差，使得方差合 S 不為零

$$S = \sum_{n=1}^N [y_n - A_0 \cos(\omega t_n) - B_0 \sin(\omega t_n) - C_0]^2. \quad (2.6)$$

為了擬合出一個最接近的弦波，首先以 A_0, B_0, C_0 分別對 S 做一次微分，找出 S 極小值的位置，因此只要將 $\partial S / \partial A_0 = 0$ ， $\partial S / \partial B_0 = 0$ ， $\partial S / \partial C_0 = 0$ 三式聯立，即可解出極小值的位置 A_0, B_0, C_0 。這組聯立方程式的解，即為該組弦波訊號的最小方差解，用矩陣表示可寫成

$$x_0 = (D_0^T D_0)^{-1} (D_0^T y), \quad (2.7)$$

其中

$$x_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} \cos \omega t_1 & \sin \omega t_1 & 1 \\ \cos \omega t_2 & \sin \omega t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \omega t_n & \sin \omega t_n & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

擬合後的弦波為

$$\begin{aligned} y_n' &= A_0 \cos(\omega t_n) + B_0 \sin(\omega t_n) + C_0, \\ &= A \cos(\omega t_n + \phi) + C_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中弦波的振幅與相位分別為

$$A = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}, \quad (2.12)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{-B_0}{A_0} \right]. \quad (2.13)$$

許多論文中在解相位時常常只寫到這一步是不對的，因為三角函數 \tan^{-1} 的值域只在 $-\pi/2 \sim \pi/2$ ，為了將相位 ϕ 的值域重新拓展到 $-\pi \sim \pi$ ，必須根據 A_0, B_0 的正負號進行判斷，並且把判斷式附在相位算式旁，判斷方法如 Table 2.1。本文提出另一種相位表示式

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A_0 - \sqrt{A_0^2 + B_0^2}}{B_0} \right); \quad (2.14)$$

此表示式可直接將值域拓展到 $-\pi \sim \pi$ ，且計算結果與判斷式的表示法完全相同，

可簡潔的表示相位，相當推薦在論文中使用，但需注意應用在電腦程式計算時，此表示法的處理速度比判斷式的表示法稍微慢一些。其推導過程如下：

改寫 Eq. (2.13) 為兩倍 \tan^{-1} 的形式

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-B_0}{A_0}\right) = 2 \tan^{-1}(x), \quad (2.15)$$

再利用倍角公式轉換

$$\tan \phi = \frac{2 \tan \frac{\phi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{-B_0}{A_0}, \quad (2.16)$$

推得

$$x = \frac{A_0 \pm \sqrt{A_0^2 + B_0^2}}{B_0}. \quad (2.17)$$

其中 x 只能選相減的解，理由可參考附錄 A，最後即得到 Eq. (2.14) 結果。若想將 ϕ 的值域拓展為 $0 \sim 2\pi$ 則可參考 Table 2.2。此外，弦波擬合的方均根 (root mean square) 誤差為

$$\varepsilon_{\text{rms}} = \sqrt{S/N}. \quad (2.18)$$

Table 2.1 使 ϕ 的值域擴展為 $-\pi < \phi \leq \pi$ 。

$A_0 \backslash B_0$	≥ 0	< 0
≤ 0	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right)$	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right) + \pi$
> 0	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right)$	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right) - \pi$

Table 2.2 使 ϕ 的值域擴展為 $0 \leq \phi < 2\pi$ 。

$A_0 \backslash B_0$	≥ 0	< 0
≤ 0	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right)$	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right) + \pi$
> 0	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right) + 2\pi$	$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right) + \pi$

2.3.2 程式範例與提高效率的寫法

Fig. 2.1 為 Matlab 三參數最小方差弦波擬合法範例，使用此程式所得到的 phi 即為該弦波訊號的相位項 ϕ (值域為 $0 \sim 360^\circ$)，若將第 7 行改寫成 $x_0 = D_0 \backslash y$ ，能夠大幅減少運算所需的時間。根據 Matlab 的語法說明，右除 (\backslash) 是用來找出 $D_0 * x_0 = y$ 時的解 x_0 ，意義上近似於 $x_0 = \text{inv}(D_0) * y$ ，然而三參數弦波相位擬合法中所使用的 D_0 通常不為正方形矩陣，因此不存在 D_0 的反矩陣 $\text{inv}(D_0)$ ，照理執行後應會出現警告，但是我們在 Matlab 中測試發現，當 D_0 不為正方形矩陣時， $x_0 = D_0 \backslash y$ 結果等同於 $x_0 = (D_0^T D_0)^{-1} (D_0^T y)$ ，會有這樣的結果是因為我們系統中的聯立方程式個數大於未知數之數目，形成了過度確定性系統 (overdetermined system)，在這種系統中沒有一個解能夠滿足所有方程式，只能找出一組最佳解，也就是最小平方方法的解。因此 $D_0 \backslash y$ 的意義應該更近似於 $\text{pinv}(D_0) * y$ ，因為 pinv 又稱為虛反矩陣 (pseudoinverse)，其功能與反矩陣之計算相同，但它會基於 svd 函數 (奇異值分解函數) 之計算方式，求得非正方形矩陣之反矩陣。

```
1 - y=[y1 y2 y3 ... yn];y=y';%y1~yn請輸入量測到的光強度
2 - fs=input('輸入取樣頻率(Hz) : ');
3 - w=input('輸入EO外差頻率(Hz) : ')*2*pi;
4 - N=length(y);%N為取樣點數
5 - tn=(0:N-1)/fs;tn=tn';
6 - D0=[cos(w*tn) sin(w*tn) ones(N,1)];
7 - x0=(D0'*D0)\(D0'*y);
8 - if x0(1)>=0
9 -     if x0(2)<=0
10 -         phi=atan(-x0(2)/x0(1))*180/pi;
11 -     else
12 -         phi=atan(-x0(2)/x0(1))*180/pi+360;
13 -     end
14 - else
15 -     phi=atan(-x0(2)/x0(1))*180/pi+180;
16 - end
```

Fig. 2.1 Matlab 三參數擬合法範例。

為使整個系統得到最佳化，也會利用 `pinv` 指令求得最接近解，故 $D0 \setminus y$ 、 $\text{inv}(D0' * D0) * D0' * y$ 、 $\text{pinv}(D0) * y$ 三者意義皆相同，但前提是行列式 $\det(D0' * D0)$ 不能為零，否則 $x0$ 的解會沒有意義，而使用三參數弦波相位擬合法時，只要確保取樣地時間點 t_n 至少能取到弦波中三個不同的相位點，使矩陣 $D0$ 的秩 $\text{rank}(D0) = 3$ ， $\det(D0' * D0)$ 將保證非零。運算速度方面，因為 $D0 \setminus y$ 的寫法 Matlab 已經預先編譯(compiler)過了，運算速度較 $\text{inv}(D0' * D0) * D0' * y$ 的寫法快上許多，因此在全場外差干涉術之類必須多次重複解相位的情況下，建議改用 $x0 = D0 \setminus y$ 來求解，以加快相位解析的速度。

2.4 外差光源

產生外差光源較常見的方法有以下幾種：

都普勒效應：利用壓電制動器(Piezoelectric Transducer, PZT)定速推動 Twyman Green 干涉儀其中一臂的反射鏡，使參考光產生都普勒效應，達到移頻的效果，結合另一臂的反射光即為外差光源，此法產生的頻差通常低於 kHz 等級，裝置的簡圖如 Fig. 2.2(a)所示。

聲光調變[16-18]：利用聲光調變器(Acousto-Optic Modulator, AOM)，使入射光子與聲子作用後產生移頻的效果，再與移頻前的光源合在一起後即為外差光，然而 AOM 的移頻量通常為 MHz 等級以上，若想得到低頻的外差光，可將光束分別穿過兩個具有不同移頻量且頻差較小的 AOM，再重合即可，如 Fig. 2.2(b)所示。

電光相位調變[19]：當施以電場於電光晶體時，能夠改變晶體的雙折射率，此裝置稱為電光調制器(Electro-Optic Modulator, EOM)。光線通過此晶體時，兩正交的偏極光會被引入相位差，適當的控制電壓信號，使相位產生連續變化，就可以控制兩偏極光的頻差，從而得到具有兩種頻率且偏極方向互相垂直的外差光，這種對相位調制的電光調制器稱為電光相位調制器，架構的簡圖如 Fig. 2.2(c)所示；順帶一提，有另一種是組合兩個不同軸向的電光晶體，能夠調制光的振幅，稱為電光振幅調制器。

Zeeman 雷射[20,21]：Zeeman 雷射為一種常見的雙頻雷射(Two-Frequency Laser)，其利用 Zeeman 效應，加磁場於雷射共振腔時，會使激發態的能階分裂，

進而使雷射產生兩個正交且具有不同頻率的偏極光，，一般而言輸出功率低於 1 mW，頻差約為 1~2 MHz。由於它可直接輸出外差光源，使用起來很方便。此外還有旋轉波片法[22,23]與移動繞射光柵法[24,25]也可產生外差光，但其頻差受機械轉速限制以及容易引入機械式的震盪，因此只能應用在一些特殊場合。

本實驗室選用電光相位調制的方式來產生外差光源，優點是外差頻率可調變的範圍極廣，從 0 Hz(直流)到數百 MHz 皆可，能夠搭配不同雷射光源產生外差光，應用上非常多元，使用方便且穩定性高。利用這種方式產生的外差光源，稱為 EO 外差光源，下一節中將說明如何利用電光相位調制器產生外差光源。

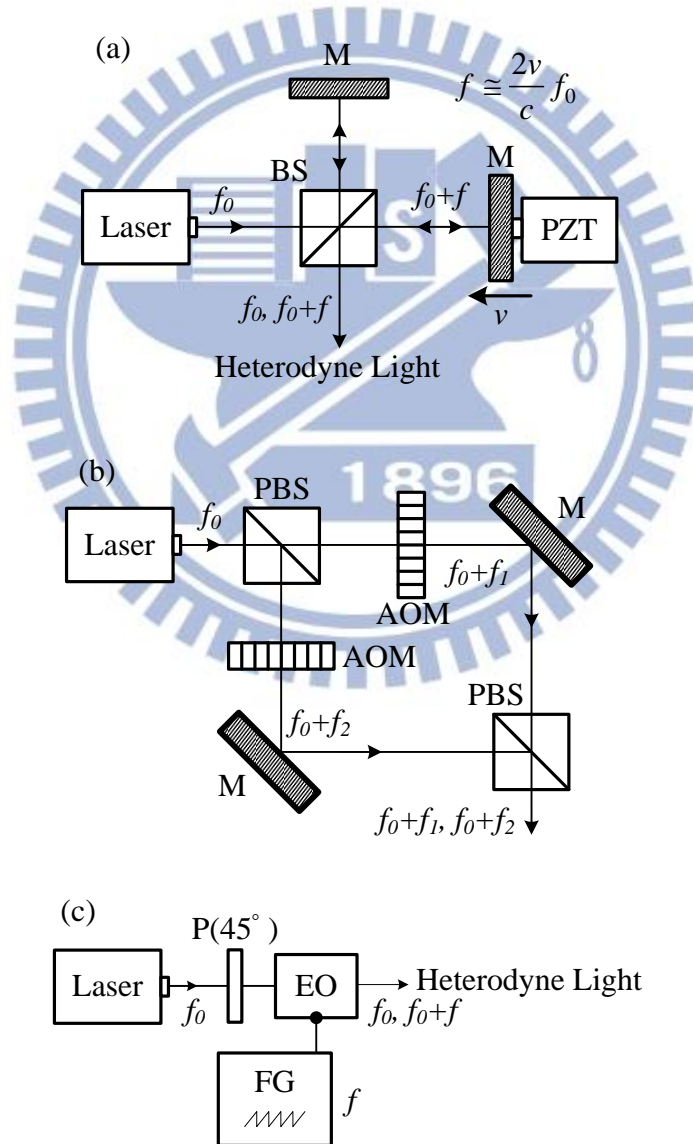


Fig. 2.2 (a)都普勒外差光源 (b)AO 外差光源 (c)EO 外差光源。

2.4.1 EO 外差光源產生原理

當外加電壓於電光晶體時，其雙折射率與電壓一次方成正比時，稱為一次電光效應，或 Pockels 效應。一般常用的電光晶體材料有，鈮酸鋰(LiNbO₃)，ADP (NH₄H₂PO₄)，KDP (KH₂PO₄)等[26,27]。

如 Fig. 2.3 所示，假設 z 軸為光前進方向，y 軸為垂直紙面向上的方向。將電光晶體 EO 的快軸設定在 x 軸上，且一與 x 軸夾角為 45°的線性偏極光源通過此 EO 後，x-偏光與 y-偏光之間會有一個相位延遲(phase retardation) Γ

$$\Gamma \cong \Gamma_0 + \frac{V}{V_\pi} \pi, \quad (2.19)$$

其中 Γ_0 為無偏壓初始相位延遲，成因是由於電光晶體在未加電壓之前，已有初始的雙折射效應； V 是經由波形產生器 FG 加載於 EO 的外加電壓； V_π 則是使 EO 產生 180°相位移所需的電壓，稱為半波電壓。半波電壓與電光晶體(New Focus, Model 4002)各項係數的關係式為[28]

$$V_\pi = \frac{\lambda d}{n_e^3 r_{33} l} \quad (2.20)$$

其中 l 與 d 分別為晶體的長度與厚度； r_{33} 為電光效應係數； n_e 為非尋常(extraordinary)折射率； λ 則是入射光波長。由 Eq. (2.20) 可知 V_π 與 λ 成正比關係(實際測試為線性關係)，因此當使用可變波長雷射透過電光晶體調變時，必須針對不同波長給予所需的半波電壓，這一點在本論文主要研究的外差式中央條紋法中特別重要。

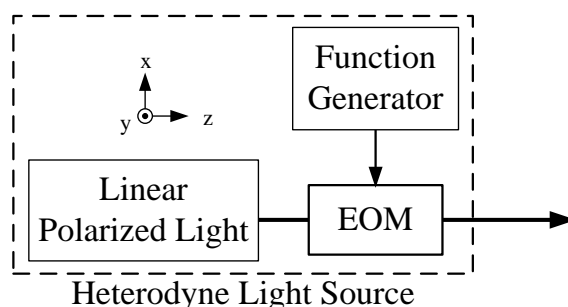


Fig. 2.3 EO 外差光源之光學架構。

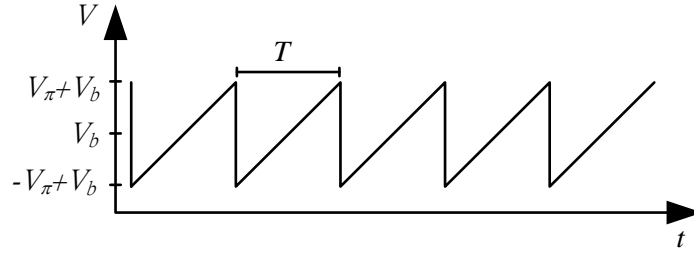


Fig. 2.4 驅動電光晶體的電壓信號。

當 $\Gamma > 0$ 時，快軸在 x 軸上的電光晶體相位延遲 Jones 矩陣可寫為

$$EO = \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

若使用波形如 Fig. 2.4 所示的鋸齒狀之電壓信號 $V(t)$ 來驅動此電光晶體，此鋸齒波的頻率為 f 且振幅為 V_{π} ，其數學形式可表示為

$$V(t) = \frac{2V_{\pi}}{T}(t - mT) + (V_b - V_{\pi}), \quad mT \leq t \leq (m+1)T, \quad (2.22)$$

其中 m 為整數， $T=1/f$ 為電壓信號的週期； V_b 為鋸齒波的直流偏壓。將此電壓訊號代入 Eq. (2.19) 後，可得到隨時間變化的相位延遲

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{T}(t - mT) + \Gamma'_0, \quad (2.23)$$

其中

$$\Gamma'_0 = \pi \left(\frac{V_b - V_{\pi}}{V_{\pi}} \right) + \Gamma_0, \quad (2.24)$$

Γ'_0 為 EO 的初始相位延遲，包含了偏壓項與無偏壓項，理論上與時間無關。因此，此時電光晶體相位延遲的 Jones matrix 可改寫為

$$EO = e^{im\pi} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega t + \Gamma'_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t + \Gamma'_0}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega t + \Gamma'_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t + \Gamma'_0}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

其中 $\omega=2\pi f$ ，且第二個等式成立的原因是 Jones matrix 只重視兩個偏極態之間的

相對關係。當偏極方向為 45° 之線性偏光 E_{in} 通過電光晶體後，其電場的 Jones vector 可寫為

$$\begin{aligned}
 E_h = EO \cdot E_{in} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 ω_0 為雷射光源的光頻；明顯地，線性偏光經由電光晶體調制過後，即成為頻差 ω 相位差 Γ'_0 的外差光源，可與 Eqs. (2.1), (2.2) 比較。調整直流電壓 V_0 可以改變初始相位項 Γ'_0 ，進而使外差光源的相位差變為零，此調製方式常應用在外差干涉術測量介質的絕對折射率這類系統中[29]。

2.4.2 半波電壓的檢測方法

當對 EOM 加以不同的調制頻率，或針對不同波長的光源使用時，所需的半波電壓皆不相同，因此廠商所提供的型錄很難清楚指出我們所需的半波電壓是多少，就算能夠指出，以精密量測的觀點來看，都應該假設他們所提供的規格不準確。為此我們設計一種簡單的方法來檢測半波電壓。

利用共光程 EO 外差干涉儀，如 Fig. 2.5，改變訊號產生器 FG 輸出的鋸齒波振幅，觀察相位計 PM 中 Eq. (2.18) 的弦波擬合方均根誤差 ϵ_{rms} 為最小時的鋸齒波振幅，此振幅即為半波電壓。注意相位計每次的總取樣時間至少大於一個弦波週期，以確保未達半波電壓時所造成弦波波形的影響會引入 ϵ_{rms} 中。

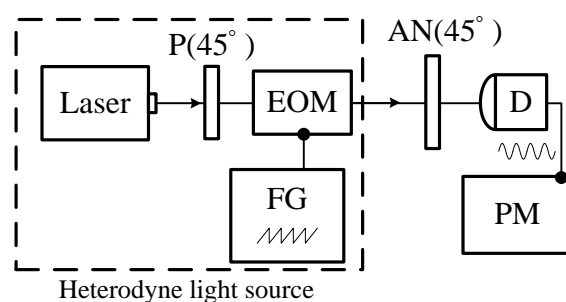


Fig. 2.5 半波電壓的檢測架構。

此外可測試各入射光波長 λ 及調制頻率 f 所對應的半波電壓。對於 New Focus, Model 4002 這款 EOM 而言，廠商提供的規格中說明該 EOM 的調制深度 (modulation depth) $\beta = \pi/V_\pi = 0.015 \text{ radians/volts @ } \lambda = 1060 \text{ nm}$ ，利用 Eq. (2.20) 可推算出 $V_\pi = 125.4 \text{ V @ } \lambda = 632.8 \text{ nm}$ 。然而實際上我們在調制頻率 $f = 500 \text{ Hz}$ 時，測得該 EOM 的 $V_\pi = 150.0 \text{ V @ } \lambda = 632.8 \text{ nm}$ 或是 $V_\pi = 151.6 \text{ V @ } \lambda = 638.0 \text{ nm}$ 。此外還發現另一顆同型號 EOM 測得的 V_π 結果皆少 2 V，可能是由於切削的晶體大小略有差異，因此建議對每顆 EOM 即使是同款式的也要一一測量出所對應的半波電壓。不正確的半波電壓將會造成額外的相位誤差。

2.4.3 EO 外差光源精確架設的方法

測試架構如同 Fig. 2.5，以 EOM 的快慢軸為實驗室座標方便分析，當偏光板 P(45°) 有 θ_P 的旋轉角度誤差，即代表入射 EOM 前的入射光電場 E_{in} 需改為 E'_{in}

$$E'_{in} = R(-\theta_P) \cdot E_{in} = \begin{pmatrix} \cos \theta_P & -\sin \theta_P \\ \sin \theta_P & \cos \theta_P \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

若檢偏板 AN(45°) 也有 θ_A 的旋轉角度誤差，因此檢偏板的矩陣 AN 應改為 AN'

$$\begin{aligned} AN' &= R(-\theta_A) \cdot AN \cdot R(\theta_A) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_A & -\sin \theta_A \\ \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

而電光晶體調制器的矩陣 EO 如 Eq. (2.26) 形式保持不變，因此穿過檢偏板後的電場為 $E = AN' \cdot EO \cdot E'_{in}$ ，而光偵測器 D 所偵測到的干涉光強度即為

$$I = |E|^2 = I_0 + A \cos(\omega t + \Gamma'_0), \quad (2.29)$$

其中平均光強度 I_0 與振幅 A 分別為

$$I_0 = \frac{1}{2} (1 + \sin 2\theta_A \sin 2\theta_P), \quad (2.30)$$

$$A = \frac{1}{2} \cos 2\theta_A \cos 2\theta_P, \quad (2.31)$$

由 Eq. (2.29) 可發現 AN 與 P 的旋轉角度誤差並不會影響外差光的相位項 Γ'_0 ，只

會造成平均光強度與振幅的改變，而平均光強度較容易受到背景光的影響，不適合拿來利用，相較之下干涉光的振幅項便較有利用價值。由 Eq. (2.31)可知 A 的最大值發生在 θ_p 與 θ_A 皆為 0 的時候，因此校準時可以先微調 P 的旋轉角度找到 A 的極大值，將 P 固定後，接著微調 AN 的旋轉角度找到 A 的最大值，此時 EO 外差光源便正確的架設完成，同時也得到正確的 45° 檢偏板。

2.5 小結

本章中說明了外差干涉術的原理，以及如何利用電腦進行相位解析，並提出程式範例與提高效率的寫法；在外差光源的架構部份，介紹了各式外差光源，以及本論文所用之電光晶體調變器的工作原理，並交代如何精確的架設 EO 外差光源。提供往後相關研究人員能夠快速地了解並應用 EO 外差干涉術。



參考文獻

1. G. E. Sommargren, "Optical heterodyne profilometry", *Appl. Opt.* **20**, 610-618 (1981).
2. D. Pantzer, J. Politch, and L. Ek, "Heterodyne profiling instrument for the angstrom region", *Appl. Opt.* **25**, 4168-4172 (1986).
3. H. Kikuta, S. Asai, H. Yasukochi, and K. Iwata, "Force microscopy using common-path optical-heterodyne interferometer", *Jap. J. Appl. Phys.* **130**, 587-590 (1991).
4. C. H. Lin, C. Chou, and K. S. Chang, "Real time interferometric ellipsometry with optical heterodyne and phase lock-in techniques", *Appl. Opt.* **29**, 5159-5162 (1990).
5. Y. Lin, Z. Zhou, and R. Wang, "Optical heterodyne measurement of the phase retardation of a quarter-wave plate", *Opt. Lett.*, **13**, 553-555 (1988).
6. R. S. Sirohi and M. P. Kothiyal, "Optical components, systems, measurement techniques", *Marcel Dekker, Inc.*, New York, 219-246 (1992).
7. D.C. Su, M. H. Chiu, and C. D. Chen, "A heterodyne interferometer using an electro-optic modulator for measuring small displacements", *J. Opt.* **27**, 19-23 (1996).
8. M. H. Chiu and D. C. Su, "Angle measurement using total-internal-reflection heterodyne interferometry", *Opt. Eng.* **36**, 1750-1753 (1997).
9. M. H. Chiu and D. C. Su, "Improved technique for measuring small angle", *Appl. Opt.* **36**, 7104-7106 (1997).
10. H. Kikuta, K. Iwata, and R. Nagata, "Distance measurement by the wavelength shift of laser diode light", *Appl. Opt.* **25**, 2976-2980 (1986).
11. E. Gelmini, U. Minomi, and F. Docchio, "Tunable, double-wavelength

- heterodyne detection interferometer for absolute distance measurements”, *Opt. Lett.* **19**, 213-215 (1994).
12. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, “Refractive index measurement based on the effects of the total internal reflection and the uses of the heterodyne interferometry”, *Appl. Opt.* **36**, 2936-2939 (1997).
 13. D. C. Su, J. Y. Lee, and M. H. Chiu, “New type of liquid refractometer”, *Opt. Eng.* **37**, 2795-2797 (1998).
 14. J. Y. Lee and D. C. Su, “A method for measuring brewster’s angle by circularly polarized heterodyne interferometry”, *J. Opt.* **29**, 349-353 (1998).
 15. Y. C. Huang, C. Chou, and M. Chang, “Direct measurement of refractive Indices of a linear birefringent retardation plate”, *Opt. Commun.* **133**, 11-16 (1997).
 16. M. J. Ehrlich and L. C. Philips, and J. W. Wanger, “Voltage-controlled acousto-optic phase shifter”, *Rev. Sci. Instrum.* **59**, 2390-2392 (1988).
 17. M. G. Gzalet, M. Raveg, F. Haine, C. Bruneel, and E. Bridoux, “Acousto-optic low frequency shifter”, *Appl. Opt.* **33**, 1293-1298 (1994).
 18. P. Dirksen, J. V. D. Werf, and W. Bardoel, “Novel two-frequency laser”, *Prec. Eng.* **17**, 114-116 (1995).
 19. D. C. Su, M. H. Chiu, and C. D. Chen, “Simple two frequency laser”, *Prec. Eng.* **18**, 161-163 (1996).
 20. H. Takasaki, N. Umeda, and M. Tsukiji, “Stabilized transverse Zeeman laser as a new light source for optical measurement”, *Appl. Opt.* **19**, 435-441 (1980).
 21. N. Umeda, M. Tsukiji, and H. Takasaki, “Stabilized ^3He - ^{20}Ne transverse Zeeman laser”, *Appl. Opt.* **19**, 442-450 (1980).
 22. J. C. Suits, “Magneto-optical rotation and ellipticity measurements with a spinning analyzer”, *Rev. Sci. Instrum.* **42**, 19-22 (1971).

23. M. P. Kothiyal and C. Delisle, "Optical frequency shifter for heterodyne interferometry using counterrotating wave plates", *Opt. Lett.* **9**, 319-321 (1984).
24. W. H. Stevenson, "Optical frequency shifting by means of a rotating diffraction grating", *Appl. Opt.* **9**, 649-652 (1970).
25. T. Suzuki and R. Hioki, "Translation of light frequency by a moving grating", *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 1551 (1967).
26. H. Takasaki, M. Isobe, T. Masaki, A. Konda, T. Agatasuma, and Y. Watanabe, "An automatic retardation meter for automatic polarimetry by means of an ADP polarization modulator", *Appl. Opt.* **3**, 371-377 (1964).
27. B. H. Billings, "The electro-optic effect in uniaxial crystal of the type XH₂PO₄. I. Theoretical", *J. Opt. Sci. Am.* **39**, 127-133 (1949).
28. <http://assets.newport.com/webDocuments-EN/images/15207.pdf>
29. Y. L. Chen, H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang and D. C. Su, "An alternative method for measuring the full-field refractive index of a GRIN lens with normal incidence heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **49**, 6888-6892 (2010).

附錄 A：弦波的疊加

若以兩個同頻率的弦波相加時，可得到另一個不同振幅、相位但同頻率的弦波，例如

$$A \cos(\omega t + \phi_1) + B \cos(\omega t + \phi_2) = C \cos(\omega t + \phi_3). \quad (\text{A.1})$$

想求出 C 、 ϕ_3 的值可將(1)式展開得到

$$\cos(\omega t)(A \cos \phi_1 + B \cos \phi_2 - C \cos \phi_3) - \sin(\omega t)(A \sin \phi_1 + B \sin \phi_2 - C \sin \phi_3) = 0$$

進而推得一組聯立方程式，並定義為變數 p, q 以簡化運算

$$\begin{cases} C \cos \phi_3 = A \cos \phi_1 + B \cos \phi_2 \equiv p, \\ C \sin \phi_3 = A \sin \phi_1 + B \sin \phi_2 \equiv q \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} C^2 = p^2 + q^2 \\ \tan \phi_3 = \frac{q}{p} \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

一般常見錯誤的解，是直接將(A3)式改寫為

$$\begin{cases} C = \sqrt{p^2 + q^2} \\ \phi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

錯誤在於反三角函數 \tan^{-1} 的值域只在 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 之間，使得 ϕ_3 的值域不正確，必須設法將值域拓展到 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 。常見做法是判斷 p, q 的正負號，將 \tan^{-1} 加減 180° ，可參考本章 Table 2.1 的判斷式。

然而有另一種算法不用這麼麻煩，方法是設

$$x = \tan\left(\frac{\phi_3}{2}\right), \quad (\text{A.6})$$

使得 Eq. (A.4) 可改寫為

$$\begin{cases} C^2 = p^2 + q^2 \\ \frac{2x}{1-x^2} = \frac{q}{p} \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

解得

$$\begin{cases} C = \pm\sqrt{p^2 + q^2} \\ x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + q^2}}{q} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

為了檢驗 Eq. (A.8) 中， x 的兩個解分別對應何種條件，將 x 的解代回 Eq. (A.2) 中

$$p = C \frac{1-x^2}{1+x^2} = C \frac{q^2 - (-p \pm \sqrt{p^2 + q^2})^2}{q^2 + (-p \pm \sqrt{p^2 + q^2})^2} = \pm p \frac{C}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad (\text{A.9})$$

因此得知 $C = \sqrt{p^2 + q^2}$ 對應 $x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + q^2}}{q}$ 的解； $C = -\sqrt{p^2 + q^2}$ 對應

$x = \frac{-p - \sqrt{p^2 + q^2}}{q}$ 的解。一般較習慣使用 $C > 0$ 的形式，歸納後可得到

$$\begin{cases} A \cos(\omega t + \phi_1) + B \cos(\omega t + \phi_2) = C \cos(\omega t + \phi_3) \\ C = \sqrt{p^2 + q^2} \\ \phi_3 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 + q^2}}{q} \right) \\ p = A \cos \phi_1 + B \cos \phi_2 \\ q = A \sin \phi_1 + B \sin \phi_2 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

此時 ϕ_3 值域為 $-180^\circ \sim 180^\circ$ ，便能夠合理的表示兩弦波相加的結果。

檢驗：以 Eq. (2.11) 為例

$$\begin{aligned} y_n' &= A_0 \cos(\omega t_n) + B_0 \sin(\omega t_n) + C_0 \\ &= A \cos(\omega t_n + \phi) + C_0 \end{aligned} \quad (\text{2.11})$$

與 Eq. (A.1) 比較，可知 $\phi_1 = 0^\circ$ ， $\phi_2 = -90^\circ$ ，將 ϕ_1 、 ϕ_2 代入 Eq. (A.10) 可得到

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \\ \phi = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A_0 - \sqrt{A_0^2 + B_0^2}}{B_0} \right) \end{cases}$$

即為 Eq. (2.14) 的結果。

第三章 外差干涉術相位誤差與取樣最佳化設定

3.1 前言

外差干涉術，有別於一般強度型量測方法，必須清楚的考慮光束經過各元件後所引入的相位與相位誤差。本章將說明各項相位誤差來源及所造成的誤差量，其中外差光源的部份特別針對 EO 外差光源進行討論，接著以數學模型總合表示這些誤差對干涉訊號的影響，並利用所提出模擬分析的方法，找出最佳化的參數設定值。Fig. 3.1 為 EO 外差干涉術常見的架構。

3.2 誤差的種類

3.2.1 EO 外差光源相位誤差

(i) 雷射功率不穩定

雷射輸出的光功率不穩定，一般 He-Ne 雷射的光強度穩定度約為 $\pm 1\%$ ，而強度穩定型雷射(intensity stabilized laser)[1]，一分鐘強度的穩定度(stability)可低於 $\pm 0.1\%$ ，雷射輸出光強度的變化通常是緩慢的漂動，因此當外差頻率約為 1 Hz 等級，或是總取樣時間達 1 秒時，較容易受到這項誤差的影響，但一般而言對相位影響不大，除了在干涉光對比度很差時不能忽略外(相機取樣較常見)，一般還是都忽略此項誤差。

(ii) EOM 相位調制非線性

Eq. (2.19)中假設 EO 相位變化量對外加電壓為線性關係，然而這只是近似後的結果，實際上可能會有些許非線性影響，經測試我們所使用的 EOM，相位對電壓線性程度很好，擬合後的弦波最小方差合也很小。

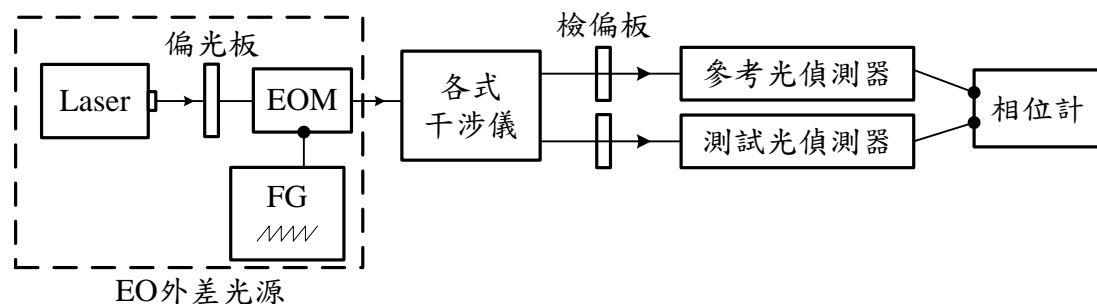


Fig. 3.1 EO 外差干涉術常見架構簡圖。

(iii) 反應時間誤差

驅動 EO 晶體的外部電壓劇烈變化時(Ex:從高突然掉到低), 相位變化需要一段反應時間(response time), 使 EO 外差干涉術干涉後的弦波波形不完美, 關係圖如 Fig. 3.2, 調制頻率(外差頻率 f) 越高, 即週期 T 越短, 此反應時間的影響越大; 相對的當我們使用較低的調制頻率時, 反應時間影響較小, 使得 Fig. 3.2(c) 中弦波斷裂處幾乎只有一小點, 雖然只有一小點, 但仍有可能造成擬合時的相位誤差。當弦波取樣頻率較低時(Ex:相機 $f_s < 1$ kHz), 不小心取到斷點資料的機率較低, 一般常忽略斷點的影響; 然而當取樣頻率較高時(Ex: DAQ 卡 $f_s > 100$ kHz), 較容易取到斷點的資料, 並造成些微相位誤差(約 0.1°), 為了彌補這個缺陷, 可先對取到的訊號資料進行一次弦波擬合, 將擬合後的弦波與原資料點比較, 找出誤差過大的那些資料點(斷點處), 將這部份資料點挑除, 以擬合後的資料取代, 再進行第二次弦波擬合, 如此可降低相位誤差量。這些過程可寫成程式自動移除斷點並解相位, 甚至提示我們是否有過多的資料點被取代, 以確保與預測不符的現象發生後能夠立刻被發現。

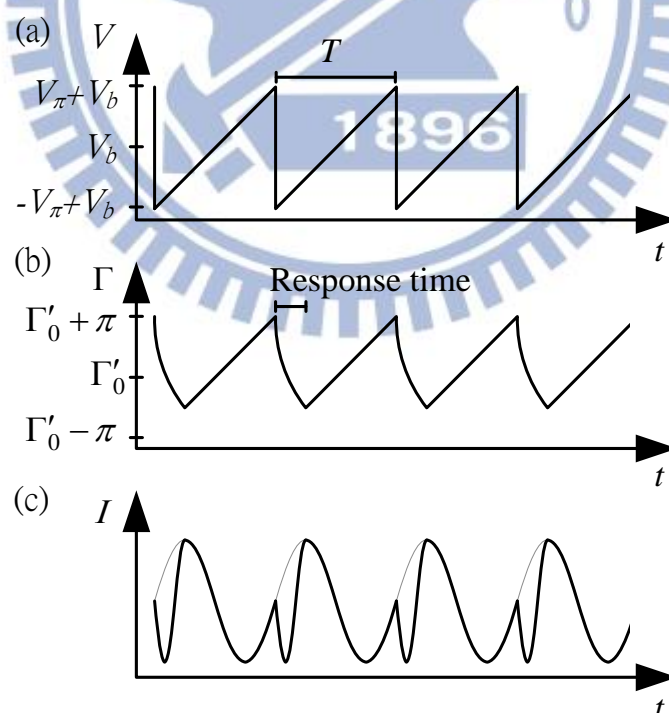


Fig. 3.2 EO 反應時間造成弦波斷點的示意圖。(a)輸入的鋸齒波信號, (b)造成的相位延遲對時間的變化, 其中反應時間的影響有刻意凸顯, (c) 干涉後的弦波波形出現斷點。

(iv) 半波電壓不準確

2.4.2 小節中提到半波電壓不準確，會造成相位誤差，其原因為加載在 EOM 上鋸齒波訊號的振幅未達半波電壓時，會使干涉後的弦波訊號出現不連續的現象，如 Fig. 3.3，此時被分割的每個片段弦波頻率將低於鋸齒波頻率；反之鋸齒波訊號的振幅超過半波電壓時，被分割的每個片段弦波頻率將高於鋸齒波頻率，這樣的干涉訊號送入相位計中擬合時，將會造成相位誤差。

(v) EOM 相位熱飄移

2.4.1 小節中提到調整直流電壓 V_b ，使外差光源的初始相位 $\Gamma'_0 = 0$ ，然而 EO 受到 thermal birefringence 效應的影響，使得的無偏壓初始相位 Γ_0 會隨著室溫 T_e 的擾動，如 Fig. 3.4，產生熱漂移(Thermal Drift)的現象，即 $\Gamma_0 = \Gamma_0(T_e)$ ，因此實際操作時很難穩定保持 $\Gamma'_0 = 0$ ，在測量絕對折射率的 EO 外差干涉儀中必須設法解決此問題，通常做法是使用恆溫裝置，並在找到使 $\Gamma'_0 = 0$ 的電壓之後盡快量測所要測量的樣本，減少相位漂移的程度。這種 EOM 熱漂移的現象也被註明在一些廠商的型錄中[2]，為了降低熱漂移的影響，有人使用兩個相對的 EO 晶體組合在一起，讓兩晶體的熱漂移現象互相消除，然而這種 EOM 只有強度型的調制(Ex: New Focus, Model 4102)，能夠消除熱漂移影響的相位型 EOM 目前還未能在市面上找到。

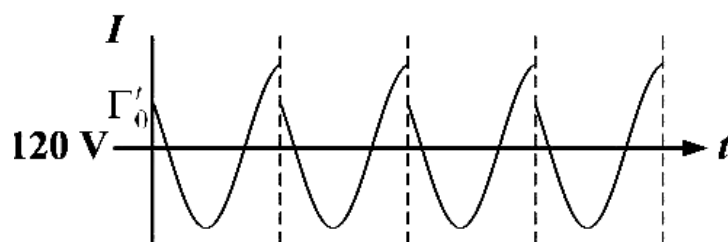


Fig. 3.3 鋸齒波訊號振幅為 120 V 時的干涉訊號@ $V_\pi = 148$ V, $\Gamma'_0 = 60^\circ$ 。

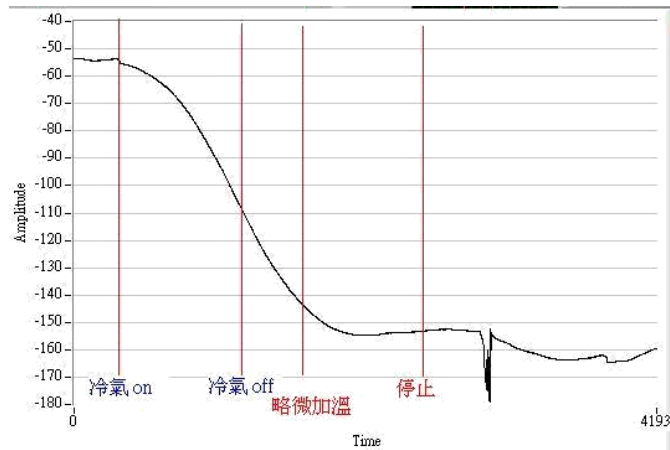


Fig. 3.4 溫度對 EO 相位的影響。

(vi) 偏極旋轉誤差[3,4]

偏極旋轉誤差也可稱作二次諧波誤差(second harmonic error)。主要的成因是在架設干涉儀時，外差光源的兩正交偏極光與實驗室座標有偏移量所致。例如以 z 軸為光前進方向，x 軸為水平方向，則理想的兩正交偏極光應在 x 與 y 軸的方向。當兩正交偏極光與 x 或 y 軸有一旋轉角度時，如 Fig. 3.5 所示，x 軸上會出現兩個頻率不同的偏極分量，y 軸上也會有兩個頻率不同的偏極分量。也就是，s- 與 p-偏光不再是單一頻率了。假設兩正交偏極光與實驗室座標有 θ_R 偏移量，則 Eq. (2.26) 中的外差光源的光束電場形式可改為

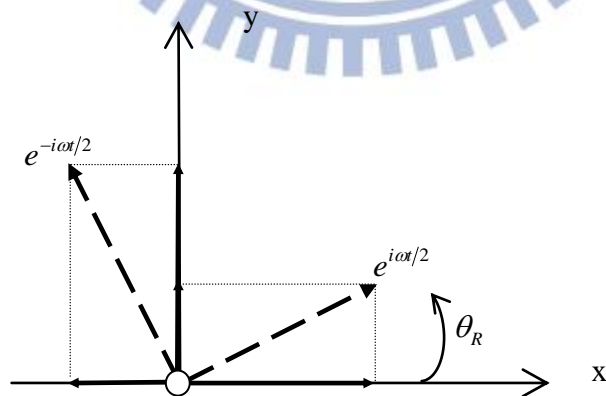


Fig. 3.5 偏極旋轉示意圖。

$$\begin{aligned}
E'_o &= R \cdot E_o = \begin{pmatrix} \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ -\sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_R e^{\frac{i\omega t}{2}} + \sin \theta_R e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ -\sin \theta_R e^{\frac{i\omega t}{2}} + \cos \theta_R e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \quad ; \quad (3.1)
\end{aligned}$$

其中 R 為旋轉矩陣。在參考光路中，光線通過穿透軸為 45° 角的檢偏板 AN_r 後，光的振幅與其強度分別為

$$\begin{aligned}
E_r &= AN_r(45^\circ)E'_o = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_R e^{\frac{i\omega t}{2}} + \sin \theta_R e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ -\sin \theta_R e^{\frac{i\omega t}{2}} + \cos \theta_R e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\cos \theta_R - \sin \theta_R) e^{\frac{i\omega t}{2}} + (\cos \theta_R + \sin \theta_R) e^{-\frac{i\omega t}{2}} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \quad , \quad (3.2)
\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}
I_r &= |E_r|^2 \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_R \cos \omega t) \quad , \quad (3.3)
\end{aligned}$$

由此可發現參考信號中交流部分的振幅為 $\cos 2\theta_R$ ，而相位項並沒有改變。另一方面，光線經過測試系統引進相位差之後，再通過穿透軸為 45° 角的檢偏板 AN_t 後，光的振幅與其強度分別為

$$\begin{aligned}
E_t &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_R e^{\frac{i\omega t}{2}} + \sin \theta_R e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ -\sin \theta_R e^{\frac{i\omega t}{2}} + \cos \theta_R e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(e^{i\phi} \cos \theta_R - \sin \theta_R) e^{\frac{i\omega t}{2}} + (\cos \theta_R + e^{i\phi} \sin \theta_R) e^{-\frac{i\omega t}{2}} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \quad , \quad (3.4)
\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}
I_t &= |E_t|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\cos^2 2\theta_R \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \cos(\omega t + \phi') \right) \quad , \quad (3.5)
\end{aligned}$$

其中

$$\phi' = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\cos^2(2\theta_R) \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} - \cos \phi \cos(2\theta_R)}{\sin \phi} \right), \quad (3.6)$$

測試信號相對於參考信號的相位差為 ϕ' ，而不是待測系統所引進的相位差 ϕ ，只有在沒有偏極旋轉的情況下 $\theta_R = 0$ ， ϕ' 才會等於 ϕ 。在偏極旋轉存在的情況下，相位差的誤差量為

$$\Delta\phi_R = \phi' - \phi, \quad (3.7)$$

將 $\Delta\phi_R$ 、 ϕ 與 θ_R 之間的關係以 Fig. 3.6 來表示，可發現誤差量 $\Delta\phi_R$ 是一個週期函數，當相位差 ϕ 經過一個 2π 的週期時，誤差量 $\Delta\phi_R$ 已經過了兩個週期，因此，才有二次諧波誤差的稱呼。當偏極旋轉 θ_R 的情況越大時，誤差量 $\Delta\phi_R$ 也越大，然而這是在架設系統時，校正與準直的失誤所帶來的，只要細心的調整各個元件，此項誤差就可減至最低。圖中有一些特別的相位差值 ϕ ，例如 $\pm 180^\circ$ ， $\pm 90^\circ$ 與 0° 的地方，誤差量為 0，也就是說，若設計一待測系統使測試相位差為 0° 時，可以有最小的誤差量。

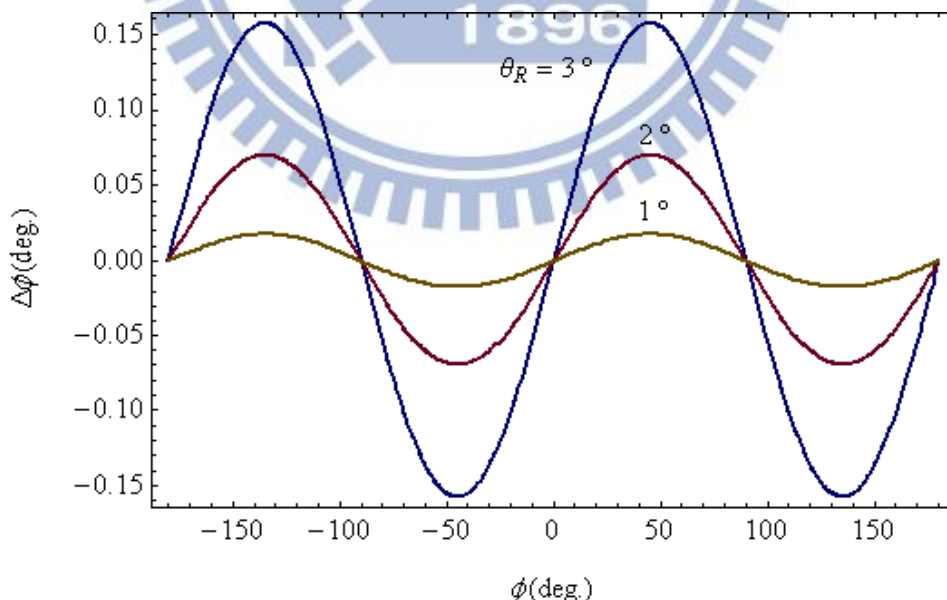


Fig. 3.6 偏極旋轉誤差 $\Delta\phi_R$ 、 ϕ 與 θ_R 之間的關係圖。

3.2.2 基本光學元件相位誤差

(i) 面鏡、分光鏡、偏極分光鏡反射後的相位影響

光經過面鏡、分光鏡 (beam splitter, BS)、偏極分光鏡 (polarization beam splitter, PBS) 反射後，皆會使 s-偏光與 p-偏光之間引入相位差[5,6]，原因是光經由金屬反射或經由介質全反射[7]後會使 s-偏光與 p-偏光的反射係數出現虛數項，也因此 s-偏光與 p-偏光之間產生額外相位差，此相位差與光的入射角以及波長有關[6]，相位變化量可達 20° 。外差干涉術中常需設法先量出系統中這些元件所引入的相位，扣除後才能得到真實樣本引入的相位。事實上這些不該稱為誤差，而是本來就會引入並且必須考慮的相位項。

(ii) 應力造成的雙折射現象

結晶物質常伴隨著雙折射 (birefringence) 現象，只是程度多寡的問題，然而照一般觀念，玻璃這種非晶 (amorphous) 材料，幾乎不會有雙折射的問題，但事實上玻璃遇到應力 (strain) 時也會出現稍微明顯的雙折射現象，應力的來源可以是玻璃製造過程中造成的內應力，或是使用夾具施加在玻璃上的外應力。許多元件如偏光板、衰減片、波片等都會以玻璃作為基板，因此以偏極光入射這些元件後，都有可能引入額外的相位延遲，並且由於應力分布不均勻，使得元件引入的相位分布也不均勻；而一些本來就有雙折射現象的晶體，受到應力作用後也會改變其雙折射率分佈，如電光晶體、晶體式偏極分光鏡與晶體式偏極化鏡等，造成元件引入的相位分布也不均勻。甚至可能得考慮光學元件表面的抗反射鍍膜是否也會出現雙折射現象。此問題在全場量測的系統中需特別注意。

3.2.3 干涉儀系統誤差[8]

干涉儀系統誤差較複雜，必須依據不同的干涉儀架構進行針對性的分析，舉例來說面鏡是否傾斜、分光鏡中兩稜鏡切磨不完美、透鏡擺設位置不準確、入射光束有些許收斂或發散、環境振動、空氣擾動、元件受熱膨脹等，皆可能引入額外光程誤差，造成干涉光的相位產生誤差。

而在非共光程干涉儀中，由於使用非共光程架構，特別容易受環境振動影響，必須設法抑制環境振動造成的影響。環境振動有許多來源，由外而內列舉如：附近道路交通或工廠施工的振動、大樓低頻擺動 (風吹或電梯昇降)、實驗室人員

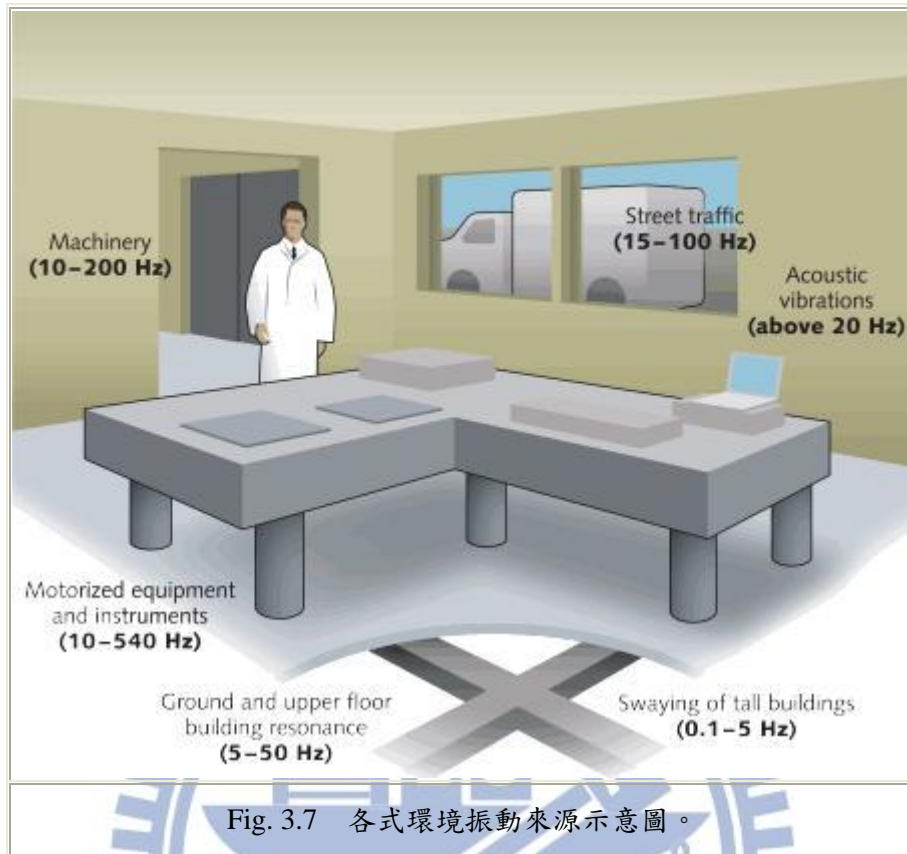


Fig. 3.7 各式環境振動來源示意圖。

source : Laser focus world 2010, vol.46, pp.65-71

走動、附近機械運轉的振動(真空/加壓幫浦、風扇或制動馬達)、聲音造成元件共振(冷氣、電腦風扇噪音或人員對話)等，可參見 Fig. 3.7。

抑制環境振動的方法，由易到難列舉如：實驗時關閉實驗區的冷氣機、避免觸碰實驗平台、人員不走動、電腦散熱風扇或人員呼吸時避免對著實驗平台、盡可能降低光學元件高度以減少振動的振幅、使用更穩定的元件支撐架、縮短干涉儀兩臂的光程、隔離噪音、減少量測時間以避免低頻振動影響、封閉干涉儀區域減少空氣對流、購置合適的光學桌抑制振動、實驗室設置於郊區地底下且地面上無建物。手邊如果有 Newport 型錄的話，可以參考 vibration control 目次中的 technical reference，有不少關於振動抑制的知識。

3.2.4 偏極元件相位誤差

(i) 偏光板角度誤差

當 Fig. 3.1 的 EO 外差光源中 45° 偏光板的角度設定不準確，使入射 EO 的 x, y-偏光強度不同，這通常不會直接對弦波的相位項造成影響，只會使得干涉後的弦波對比度下降。但在以相機進行全場外差量測的方法中，由於相機的灰階數有限，對比度的下降會使得所能有效利用的灰階數變得更少，而灰階數越少將使擬合時的相位誤差越大，此時必須盡可能減少偏光板的角度誤差，偏光板的校準方法可參考 2.4.3 小節。

(ii) 偏極混合誤差[10,11]

當光線通過如檢偏板與偏極分光鏡等偏光元件時，常會發生偏極混合 (polarization mixing) 的現象發生。假設有一 y-偏光入射到穿透軸為 x 軸方向的檢偏板時，理論上此偏光無法穿透，但受到偏極混合現象的影響，實際上仍可偵測到部份穿透光，且偏極方向與檢偏板的穿透軸相同(成為 x-偏光)，因此原本以 EO 外差光源入射一個 0° 的檢偏板時，其穿透光的電場為

$$\begin{aligned}
 E_o &= AN \cdot E_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i[(\omega_o + \frac{\omega}{2})t + \frac{\Gamma'_0}{2}]} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

只會得到一個頻率為 $\omega_o + \omega/2$ 的 x-偏光，不會出現干涉的狀況；然而當檢偏板存在偏極混合現象時，穿透光的電場變為

$$\begin{aligned}
 E_o &= AN'' \cdot E_h = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \end{pmatrix} e^{i\omega_o t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Ae^{\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} + ae^{-\frac{i\omega t + \Gamma'_0}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_o t}, \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

將得到兩個不同頻率的 x-偏光，產生些微的干涉現象，其中 $\left|\frac{a}{A}\right|^2$ 意義為檢偏板的消光比(extinction ratio)。

同樣的概念推廣到偏極分光鏡 PBS，如 Fig. 3.8，當以外差光源入射 PBS 時，受到偏極混合的影響，使得穿透光與反射光電場分別為

$$\begin{aligned} E_T &= T_{PBS} \cdot E_h = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\ &= \begin{pmatrix} Ae^{i\omega t/2} + \alpha e^{-i\omega t/2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} E_R &= R_{PBS} \cdot E_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta e^{i\omega t/2} + B e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $A = |A|e^{i\phi_A}$ 與 $B = |B|e^{i\phi_B}$ 為主要偏極振幅；而 $\alpha = |\alpha|e^{i\phi_\alpha}$ 與 $\beta = |\beta|e^{i\phi_\beta}$ 為混合雜訊的偏極振幅。由於 E_T 與 E_R 這兩道正交的偏極光走的路徑可能不同，將使得兩道光之間引入相位差 ϕ ，若設法將這兩道光重合在一起，並以 45° 檢偏板使其干涉後，干涉光的電場與強度分別為

$$\begin{aligned} E &= AN \cdot PH \cdot (E_T + E_R) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Ae^{i\omega t/2} + \alpha e^{-i\omega t/2} \\ \beta e^{i\omega t/2} + B e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

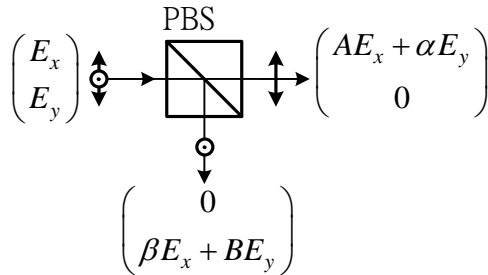


Fig. 3.8 PBS 的偏極混合現象。

與

$$I = |E|^2 = \frac{1}{2} \left(|A|^2 + |B|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) + |A||\beta| \cos(\phi + \phi_A - \phi_B) + |B||\alpha| \cos(\phi + \phi_A - \phi_B) \\ + |A||\alpha| \cos(\omega t + \phi_A - \phi_\alpha) + |\beta||B| \cos(\omega t + \phi_B - \phi_\beta) + |A||B| \cos(\omega t + \phi + \phi_A - \phi_B) \\ + |\alpha||\beta| \cos(\omega t - \phi + \phi_B - \phi_\alpha) \quad , \quad (3.13)$$

其中穿透光與反射光之間的相位差矩陣 PH 為 $\phi_A - \phi_B = \phi_{PBS}$ 為 PBS 的反射與透光之間本來就會引入的相位差，又假設， $\phi_A = \phi_\beta$ ， $\phi_B = \phi_\alpha$ ，使得 $\phi_B - \phi_\alpha = \phi_{PBS}$ ， $\phi_A - \phi_\alpha = \phi_{PBS}$ ， $\phi_B - \phi_B = \phi_{PBS}$ 皆為定值，。所以 Eq. (3.13) 可改為

$$I = |E|^2 = \frac{1}{2} \left(|A|^2 + |B|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) + (|A||\beta| + |B||\alpha|) \cos \phi \\ + (|A||\alpha| + |\beta||B|) \cos(\omega t + \phi_{PBS}) + |A||B| \cos(\omega t + \phi_{PBS} + \phi) \\ + |\alpha||\beta| \cos(\omega t + \phi_{PBS} - \phi) \\ = C + D \cos(\omega t + \phi_{PBS} + \phi') \quad ; \quad (3.14)$$

其中

$$C = \frac{1}{2} \left(|A|^2 + |B|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) + (|A||\beta| + |B||\alpha|) \cos \phi \quad , \quad (3.15)$$

$$D^2 = (|A||\alpha| + |B||\beta|)^2 + (|A||B| - |\alpha||\beta|)^2 + 4|A||B||\alpha||\beta| \cos^2 \phi \quad , \quad (3.16)$$

$$\phi' = \tan^{-1} \left(\frac{(|A||B| - |\alpha||\beta|) \sin \phi}{|A||\alpha| + |B||\beta| + (|A||B| + |\alpha||\beta|) \cos \phi} \right) \quad , \quad (3.17)$$

ϕ' 為該干涉光的弦波相位，而 ϕ 是待測的相位。因此，由偏極混合所引起的相位誤差為

$$\Delta \phi_m = \phi' - \phi \quad . \quad (3.18)$$

若 $|A| = |B|$ ，且電場的消光比 $e = |\alpha|/|A| = |\beta|/|B|$ ，因此 Eq. (3.14) 可改寫為

$$I = |A|^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \phi} \left[1 + \cos(\omega t + \phi_{PBS} + \phi') \right] \quad , \quad (3.19)$$

$$\phi' = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1 - e}{1 + e} \tan \frac{\phi}{2} \right) \quad . \quad (3.20)$$

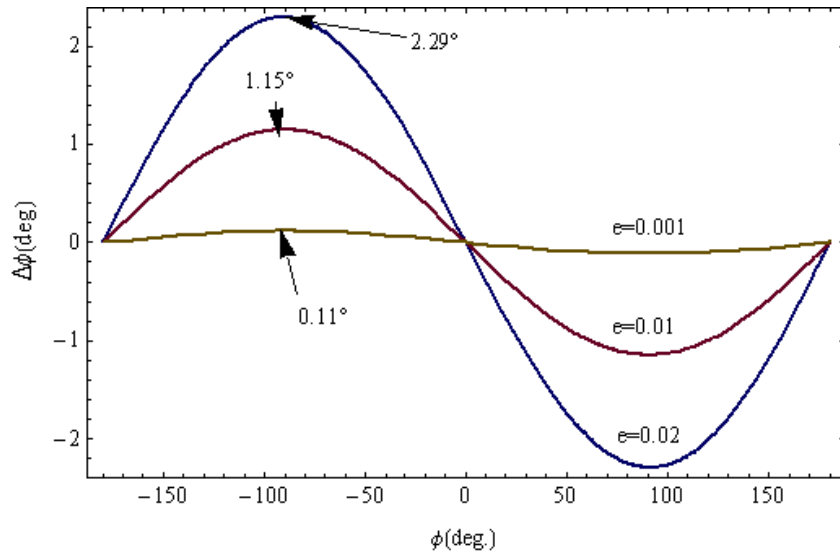


Fig. 3.9 偏極混合誤差 $\Delta\phi_m$ 與 ϕ 的關係圖。

當所一般 PBS 規格中所標示的消光比(extinction ratio)是指強度比，若要算電場的消光比時必須開根號，因此當消光比為 10^{-4} ，代表 $e = 0.01$ ，偏極混合誤差 $\Delta\phi_m$ 與 ϕ 的關係圖如 Fig. 3.9 所示。由此圖可發現消光比越小，偏極混合誤差也越小；而且此偏極混合誤差隨著不同 ϕ 呈現週期性的變化。

(iii) 分光鏡的部分偏極化

分光鏡 BS 的分光比是以光的強度計算，若沒有特別設計的情況下，一般的 BS 都存在部分偏極化現象，意思是當以無偏極光入射此 BS 後，會得到部分偏極化的穿透光與反射光。若以 45° 線性偏極光入射這種 BS 時，穿透光(或反射光)中的 x-偏光與 y-偏光，電場振幅將不一樣大，這對於外差干涉系統可能造成嚴重影響，例如外差式中央條紋法中，使干涉光的對比度大幅降低，因此必須特別選用無偏極分光鏡(non-polarization beam splitter, NPBS)降低此效應的影響。

(iv) 波片相位延遲誤差

一般波片(wave plate)是使用兩片玻璃夾住一層具有雙折射特性的薄膜，進行高精密度的量測大多選用零階(zero-order)的波片，並且必須針對不同波段搭配正確的波片，此外波片厚度不準確、不均勻或受到應力作用，皆會使相位延遲量不正確。

3.2.5 光偵測器誤差

(i) 光偵測器的非線性誤差

各式光偵測器的光電轉換皆存在非線性誤差，即入射光偵測器的光強度 I 與所產生的電壓 V 不是正比關係，好的光偵測器會對此進行修正。當干涉光入射這種非線性轉換的光偵測器，所得到的弦波信號會變形，造成相位擬合誤差。

但有時候會刻意使用非線性的光電轉換關係，例如相機的 γ (Gamma) 值，由於人眼對低亮度變化的感覺比對高亮度變化的感覺來得敏銳，較暗的畫面時通常會使用較高的 γ 值，以犧牲亮部層次來換取更多的暗部表現，因此設定 γ 值將會改變入射光強度與灰階值(gray level)的轉換關係，為了避免非線性的轉換，必須關閉相機的 γ 值調整功能。由 Fig. 3.10 與 Fig. 3.11 可以明顯看出 γ 值的設定所造成的差異，因此以相機進行光學量測時一定要記得關閉 γ 值。

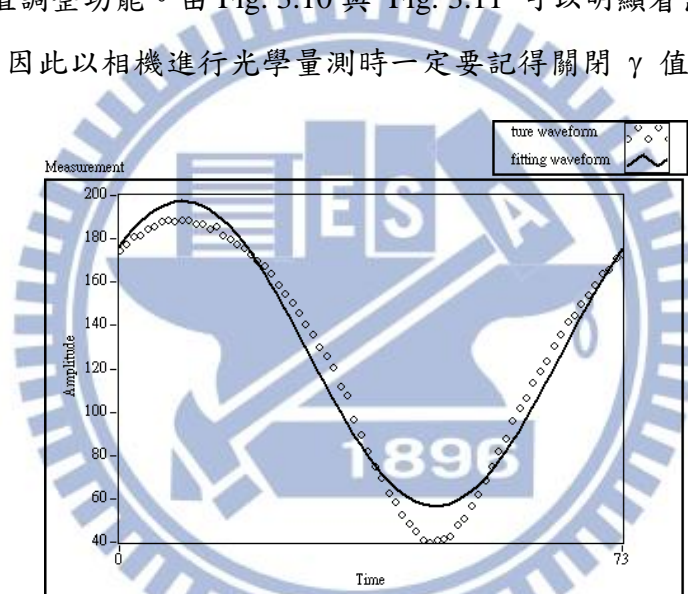


Fig. 3.10 相機的 γ 值預設為 1，偵測到的光信號。

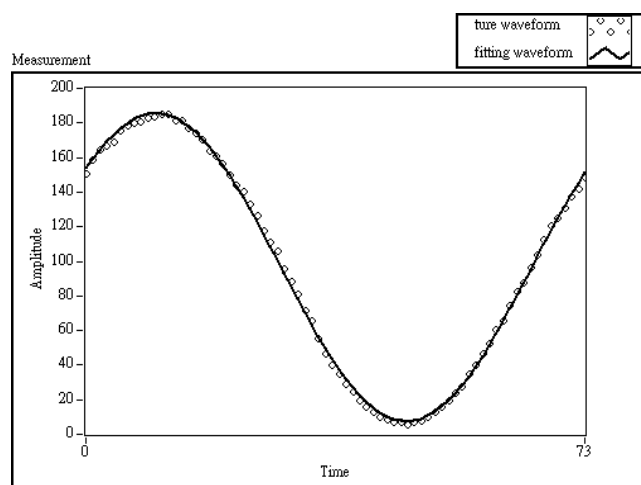


Fig. 3.11 關閉 γ 值調整功能或是設為零，偵測到的光信號。

(ii) 兩偵測器取樣時間不同步

外差干涉術常會需要參考訊號與測試訊號，用來比較出兩訊號之間的相位差，如果兩訊號開始取樣的時間不同步，或說有取樣時間的延遲 τ ，將會引入一個相位延遲量 $\phi_D = 2\pi f\tau$ ，其中 f 為外差頻率。為了避免這項誤差，通常會使用兩個完全相同的光偵測器，並且選用能夠多通道同步取樣的信號擷取卡(DAQ)，或是設計方法量出此相位延遲量。可再設計實驗確定 τ 是否固定不變？與哪些參數有關？(Ex: 相機的取樣張數、取樣頻率、畫素多寡等。)

(iii) 背景雜訊

背景雜訊可大概分為三類：強度無變化、固定頻率變化、隨機。一般而言，背景中漫射的光線屬於強度無變化的雜訊，外差干涉術較不會受到這類雜訊影響，因為所量測的是光的相位，而無變化的雜訊只會使所偵測到的強度增加一個常數值；然而某些背景光如日光燈，照射頻率與家用的電壓頻率相同，皆為 60 Hz，取樣頻率必須高於 60 Hz 兩個數量級，且總取樣時間也必須遠低於 1/60 秒，否則外差干涉術中的相位仍會受到背景光的影響，因此還是把日光燈關閉比較妥當；至於隨機雜訊，可能來自於環境中充斥著各波段的電磁波，當光偵測器的傳輸線沒有做好電磁波的屏蔽時，將會使電磁雜訊引入所測得的干涉訊號中，不過由於外差干涉術是使用弦波擬合的方式解相位，因此隨機雜訊的影響，可藉由提高取樣點的數目，來降低誤差。Fig. 3.12 為使用雷射光擴束後直接照射在 CCD 相機時，背景雜訊 10 秒內的跳動。

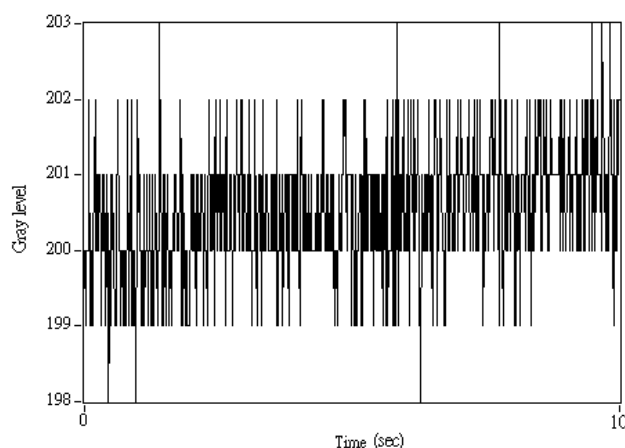


Fig. 3.12 CCD 相機背景雜訊 10 秒內的跳動。

(iv) 光偵測器的孔徑限制

某些光偵測器的孔徑較小，當光束較大的時候，可能使部份光無法進入偵測器中，由於光束的可能也有二維的相位分佈，因此光束完整被接收與部份被接收時，得到相位可能不同(測試過相位誤差可達 0.1°)，因此某些需要移動光偵測器的量測系統，必須注意這個問題。

(v) 光偵測器的取樣頻率誤差

若光偵測器(或相機)的取樣頻率的設定值與實際值可能不相符，不正確的取樣頻率會使得三參數弦波擬合法所求出的相位項產生誤差。為了檢驗真實的取樣頻率，可以利用以下方法：

定義外差訊號的週期為 T 、取樣點的時間間隔為 δt 、總取樣點數為 N 、取樣經過的總週期數為 P (不必為整數)，因此總取樣時間 t_{all}

$$t_{all} = PT = N\delta t \quad (3.21)$$

由 Eq. (3.21) 可得外差頻率 f ($f = 1/T$)、相機的取樣頻率 f_s ($f_s = 1/\delta t$)、 N 與 P 之間的關係可改寫為

$$P = N \frac{f}{f_s} \quad (3.22)$$

若實驗中所測得的弦波資料點如 Fig. 3.13 所示，可對此圖中畫一條水平線，此水平線可以方便我們計算此弦波資料經過的整數週期數目，接著計算此整數週期中的總資料點數，利用 Eq. (3.22) 即可求出真實的取樣頻率 $f_s = Nf/P$ 。

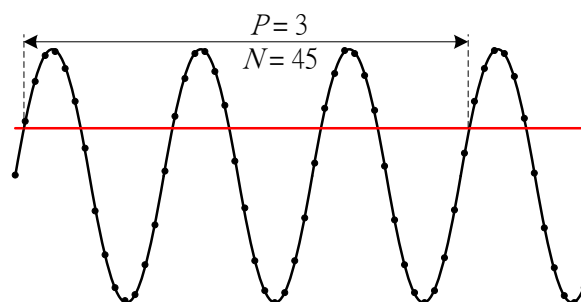


Fig. 3.13 計算取樣頻率方法的示意圖。此時若 $f = 1 \text{ Hz}$ ，可推得 $f_s = 15 \text{ Hz}$ 。

但是這樣的方法也不可免的存在誤差，因為計算總取樣點數時可能會有 1 個點的誤差，假設所造成的取樣頻率誤差為 Δf_s ，平均的取樣頻率為 \bar{f}_s ，因此

$$P = N \frac{f}{\bar{f}_s - \Delta f_s} = (N+1) \frac{f}{\bar{f}_s + \Delta f_s}, \quad (3.23)$$

可得取樣頻率誤差量

$$\Delta f_s = \frac{\bar{f}_s}{2N+1}. \quad (3.24)$$

此外，當 $f_s = \bar{f}_s \pm \Delta f_s$ ，由於 Eq. (3.22) 中， N 、 P 皆已知，使得外差頻率必須隨之改為 $\bar{f} \pm \Delta f$ ，意味著外差頻率會有 $\pm \Delta f$ 的不確定性(並不是真的指外差光源的外差頻率改變了，只是取樣誤差造成的相對效果)，使得送進三參數弦波擬合法擬合時，所設定的擬合頻率 \bar{f} 與實際外差頻率 $\bar{f} \pm \Delta f$ 之間將存在 $\pm \Delta f$ 的誤差，舉例來說，當 $\Delta f_s = 0.01 f_s$ 時，可得 $\Delta f = 0.01 f$ ，如此也將使擬合後的弦波相位與實際相位之間存在相位誤差。

理論上利用此方法時，取樣點數 N 越多， Δf 的誤差越小，但實際上相機的取樣張數 N 太多時，取樣頻率可能會不穩定，或是相機有取樣張數的上限，皆會限制 Δf 不能無限制的減小。另外需要注意的是，本方法應用時，一個週期內至少需要取 3 個點，即 $f_s/f \geq 3$ ，才可正確的數出週期數目，因此對於低於取樣理論的外差干涉術[9]不適用。

(vi) 光偵測器取樣的不穩定

光偵測器(或相機)取樣時，無法保證每次取樣的時間間隔 δt 都相同，以下舉出兩種可能的狀況，第一種如 Fig. 3.14 所示，取樣的時間間隔平均來說是相同的，但是每次取樣之間的時間間隔都有些微變化，若原本的取樣時間點

$t_n = n/f_s$ ，此時應改為

$$t_n = \frac{n}{f_s} \pm \Delta t_s, \quad (3.25)$$

其中時間誤差 Δt_s 的形式應為高斯隨機分佈。

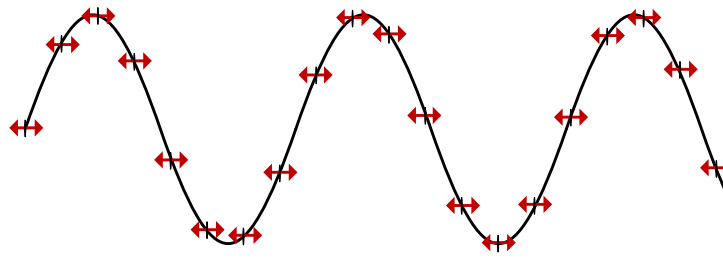


Fig. 3.14 取樣時間間隔不穩定的現象。

第二種則如 Fig. 3.15(a)所示，當相機連續取樣張數越多時，可能會出現取樣頻率降低或者更複雜的變化情形，取樣頻率逐漸降低時，將會使得所重建的弦波信號頻率逐漸變快，如 Fig. 3.15(b)，這是由於重建信號時必須假設 δt 為定值所導致。此時取樣時間點應改寫為

$$t_n = \frac{n}{f_s - n\alpha} \quad (3.26)$$

由於這種狀況還沒經過証實，我們暫且稱 α 為降頻係數，若要証實是否有這類狀況，可連續拍攝外差干涉信號，看拍到後面弦波的週期是否有變短，或是檢查每個週期中的取樣點數是否都相同。

上述兩種情況皆會使得相位解析產生誤差，然而第一種狀況中，可以預測當取樣點數 N 越大的時候，利用三參數弦波擬合法解出來的相位，誤差將會變小，這是最小方差擬合法的必然現象；而第二種狀況則相反，當 N 越大時，誤差將會變大，這是因為 N 越大時，頻率不正確的程度越明顯的關係。

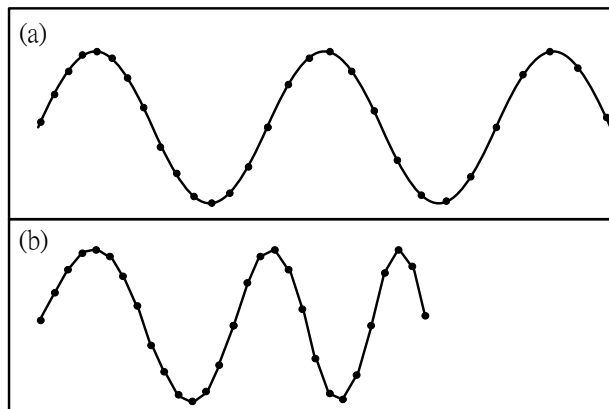


Fig. 3.15 (a)取樣頻率逐漸降低，(b)取到的資料點所重建的波形，可發現此時弦波頻率逐漸變快。

(vii) 灰階化誤差[9]

部份光偵測器取樣時會將原本的類比訊號轉為數位訊號，這樣的過程會造成訊號強度的微小誤差，在相機取樣時稱為灰階化誤差，由於相機的灰階數通常為256 (8-bit)，只有少數高階相機可達14-bit，因此必須注意灰階化對相位解析的影響，一般而言，取樣點數越多，灰階化的影響可以降低。

3.2.6 其他誤差

完整的誤差分析不能只討論相位誤差，還得考慮其他誤差例如：定位誤差 (abbe error)、光學尺精確度、熱膨脹誤差等，這些誤差應該依不同干涉系統進行針對性的討論，整體要考慮的誤差不勝繁舉，要完整的找出、分析並優化各項誤差是很大的工程，期待未來能夠建立完整的誤差分析及不確定性分析表 (uncertainty budget)。

3.3 總合分析

理想的外差干涉訊號為

$$I_n = I_0 (1 + \cos(2\pi f t_n + \phi)) \quad (3.27)$$

若考慮前述的這些誤差並整合在一起，則可表示為

$$I'_n = I'_0 (1 + \cos(2\pi f t'_n + \phi + \phi_0 + \phi' + \phi'')) + \underbrace{\text{noise}_0}_{(6)} + \underbrace{\text{noise}_1}_{(7)} + \underbrace{\text{noise}_2}_{(8)} \quad (3.28)$$

(1) 雷射功率漂移：雷射功率漂移造成光強度 I_0 必須改為 I'_0

$$I'_0 = I_0 (1 + \xi_1 \cos(2\pi f_1 t'_n + \phi_1)) \quad (3.29)$$

其中 ξ_1 為漂移的幅度， f_1, ϕ_1 為漂移頻率與相位，有可能同時具有多種漂移頻率。模擬時，每取完一組弦波訊號後，必須隨機改變 ϕ_1 。

(2) 取樣頻率不穩定：第一種，取樣時間有些微誤差

$$t'_n = \frac{n}{f_s} \pm \Delta t_n, \quad (3.30)$$

其中時間誤差 Δt_s 的形式應為高斯隨機分佈；第二種，取樣頻率逐漸變慢

$$t'_n = \frac{n}{f_s - n\alpha}, \quad (3.31)$$

其中 α 為降頻係數。

(3) 初始相位：BS、PBS等光學元件或是CCD曝光時間所引入的初始相位 ϕ_0 ，與取樣時間點 t_n 無關，但有時會與光源波長 λ 及元件入射角 θ 有關

(4) 振動：非共光程干涉儀中，當面鏡受到大樓的低頻晃動，或是面鏡受到環境振動或聲音的影響產生共振的現象，會使干涉儀兩臂距離差，出現弦波震盪的形式，如

$$\phi' = \frac{4\pi d'}{\lambda_0}, \quad d' = d + \xi_2 \cos(2\pi f_2 t'_n + \phi_2) + \xi_3 \cos(2\pi f_3 t'_n + \phi_3) + \dots, \quad (3.32)$$

其中 d 為無振動時的兩臂距離差， ξ_2, ξ_3 為晃動或振動的強度， f_2, ϕ_2, f_3, ϕ_3 為晃動或振動的頻率與相位。

(5) 週期非線性誤差：偏極旋轉與偏極混合之類，誤差量與當時相位有關的週期非線性誤差。

$$\phi'' = \Delta\phi_R(\phi) + \Delta\phi_m(\phi) + \dots, \quad (3.33)$$

其中偏極旋轉誤差 $\Delta\phi_R(\phi)$ 為

$$\Delta\phi_R = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\cos^2(2\theta_R) \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} - \cos \phi \cos(2\theta_R)}{\sin \phi} \right) - \phi, \quad (3.34)$$

θ_R 為外差光源與實驗室座標的角度誤差；而偏極混合誤差 $\Delta\phi_m(\phi)$

$$\Delta\phi_m = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1-e}{1+e} \tan \frac{\phi}{2} \right) - \phi, \quad (3.35)$$

e 為電場消光比。

(6) 常數背景光： $noise_0 = \text{const.}$ ，此項不會對相位造成影響，可忽略。

(7) 均勻隨機雜訊：可能為電子雜訊或背景光造成，可表示為

$$noise_1 = \chi_1 \cdot \text{rand}[0 \sim 1], \quad (3.36)$$

其中 χ_1 為雜訊的強度， $\text{rand}[0 \sim 1]$ 表示 0~1 之間的均勻隨機值。

(8) 週期性電子雜訊或背景光：

$$noise_2 = \chi_2 \cos(2\pi f_4 t'_n + \phi_4), \quad (3.37)$$

其中 χ_2 為雜訊的強度， f_4 與 ϕ_4 為該週期性雜訊的頻率與初始相位，也可能有多個雜訊頻率同時出現。模擬時，每取完一組弦波訊號後，必須隨機改變 ϕ_4 。

(9) 灰階化誤差：將 Eq. (3.28) 的外差干涉訊號送入相機中，相機會將光強度進行灰階化

$$I'' = \text{round} \left[\frac{I'}{I'_{Max}} \times 256 \right], \quad (3.38)$$

其中 256(8-bit) 為相機的灰階數，使用更高 bit 數的相機時請改為對應的灰階數。

(10) 擬合頻率錯誤：將上述弦波信號以三參數擬合法解析相位，當所設定的擬合頻率與實際值不符會造成相位誤差，模擬此誤差可設定 $f_{fit} = f + |\Delta f| \cdot \text{rand}[-1 \sim 1]$ 。

3.4 模擬分析-相位誤差與最佳化設定

一般以相機進行外差干涉術時，常會不知道取樣參數該如何設定，才能得到最小的相位誤差，或是想知道參數設定後此時的相位誤差有多少？建議可以用模擬的方式找出後，才以實驗驗證。由 3.2.5-(v)我們知道 f, f_s, P, N 為四個最主要的參數，其他參數如 $T, t_{all}, \delta t$ 等都可由這些參數換算得知，並且由 Eq. (3.22)可知

$$P = N \frac{f}{f_s} \quad (3.39)$$

而 Eq. (3.27)也可改寫為

$$I_n = I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s} n + \phi\right) \right), \quad (3.40)$$

可知會影響相位項 ϕ 的只是 f 與 f_s 的比例關係，因此程式控制時只要針對其中兩個主要參數(Ex: P and N)做調整即可。

由於總合誤差的模擬太過複雜，在此我們先只對最常見的擬合頻率錯誤與均勻隨機雜訊來模擬相位的誤差。此時所擷取到的訊號可表示為

$$I_n = A \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s} n + \phi\right) + C_0 + A_2 \cdot \text{rand}[0 \sim 1], \quad (3.41)$$

其中 $n=1,2,3,\dots,N$ ， A 為弦波訊號的振幅， C_0 為平均強度， A_2 為隨機雜訊的強度。假設我們想知道當擬合頻率 f_{fit} 的誤差量 $\Delta f = 0.05 f$ ， $A_2 = 0.05 A$ ， $N = 50$ 時的相位誤差有多大，但因對於不同 ϕ 時，相位誤差可能也不同，因此模擬時會使相位項從 0° 測試到 360° 。模擬的流程可參考 Fig. 3.16，而 Fig. 3.17 是利用 Labview 所撰寫的模擬程式控制面板，Fig. 3.18 為其內部組態，其中 3P fitting 為三參數弦波擬合程序。

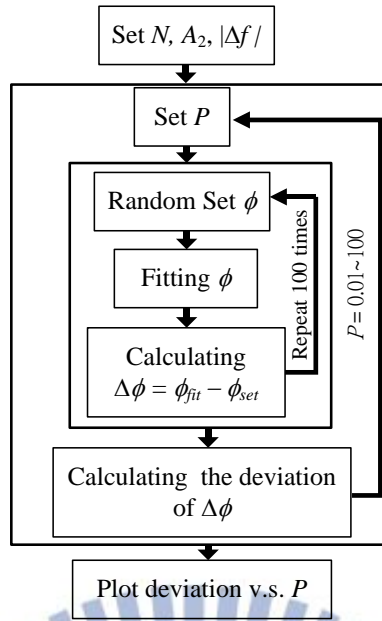


Fig. 3.16 模擬的流程。

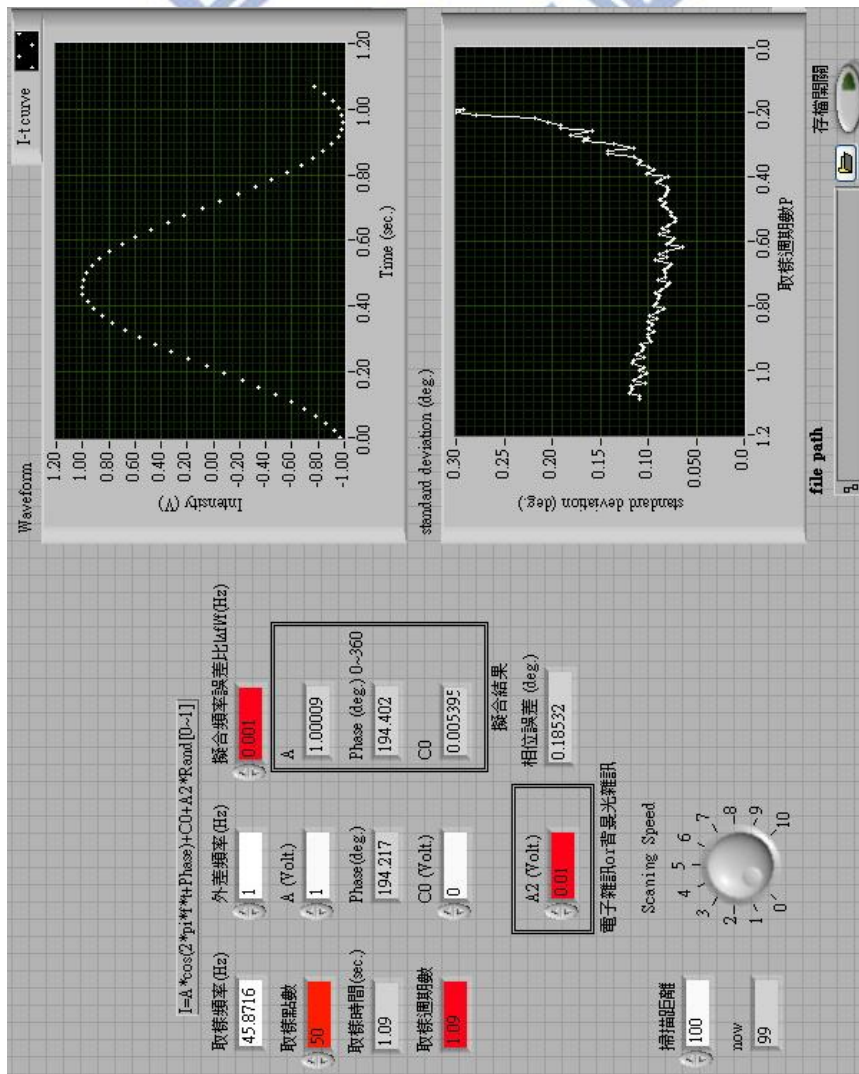


Fig. 3.17 程式控制面板。

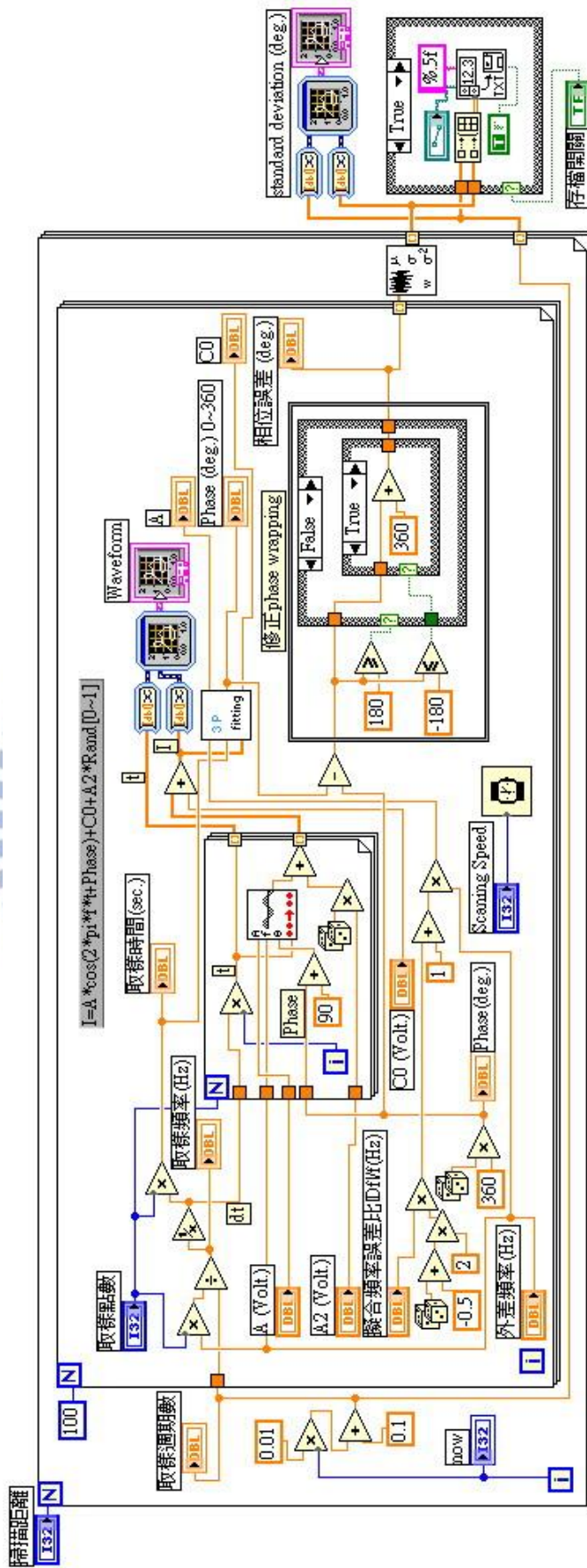


Fig. 3.18 內部組態。

整理模擬後的結果發現，如 Fig. 3.19 所示，當 f_{fit} 的誤差量 Δf 增加時， P 越大相位誤差越大；當雜訊強度 A_2 增加時， P 越小相位誤差越大。並且當擬合頻率錯誤與均勻隨機雜訊同時存在時，如 Fig. 3.19(b)~(d) 的相位誤差皆具有極小值，此時的取樣週期數定義為 P_m ，然而 P_m 與各參數間的關係很複雜，因此需要先分析出 Δf 與 A_2 分別對相位誤差的影響。

我們發現擬合頻率錯誤所造成的相位誤差標準差 σ_1 ，與 N, A_2 無關，又由 Fig. 3.20(a),(b) 等相關數據，可擬合並歸納出

$$\sigma_1 \approx 102^\circ \frac{|\Delta f|}{f} P \quad \text{as } P \neq \frac{N}{2}m, \quad m=1,2,3,\dots; \quad (3.42)$$

Eq. (3.42) 在 $P = Nm/2$ 的這些位置時會出現奇點，這是由於取樣頻率 f_s 過低，不滿足取樣定理(Nyquist theorem)所致，詳細原因可以參考 ref. [12]。

另一方面，均勻隨機雜訊所造成的相位誤差標準差 σ_2 ，與 Δf 無關，又由 Fig. 3.20(c)~(e) 等相關數據，可擬合並歸納出

$$\sigma_2 \approx \frac{23^\circ}{\sqrt{N}} \frac{A_2}{A} \quad \text{as } P \geq 1, \quad (3.43)$$

或是

$$\sigma_2 \approx \frac{23^\circ}{\sqrt{N}} \frac{A_2}{A} \frac{(P^{1.85} + P^{-1.85})}{2} \quad \text{as } 1 > P > 0.01, \quad (3.44)$$

其中當 P 在不同區間時，需要使用相對應的關係式來計算 σ_2 ，並且可注意到當 $P > 1$ 時， σ_2 與 P 開始無關。由 σ_1, σ_2 可得總體的相位誤差標準差 $\sigma_{\Delta\phi}$ 為

$$\sigma_{\Delta\phi} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (3.45)$$

利用此關係式可以很方便的計算出相位的誤差範圍，或稱為相位的準確度。例如當存在擬合頻率錯誤及均勻隨機雜訊時，若實際相位為 ϕ ， $|\Delta f| = 0.001f$ ， $A_2 = 0.01A$ ， $N = 50$ ， $P = 0.5$ ，所解得的相位有 95% 的機率會在 $\phi \pm 2\sigma_{\Delta\phi}$ 的範圍內，也就是 $\phi \pm 0.16^\circ$ 。

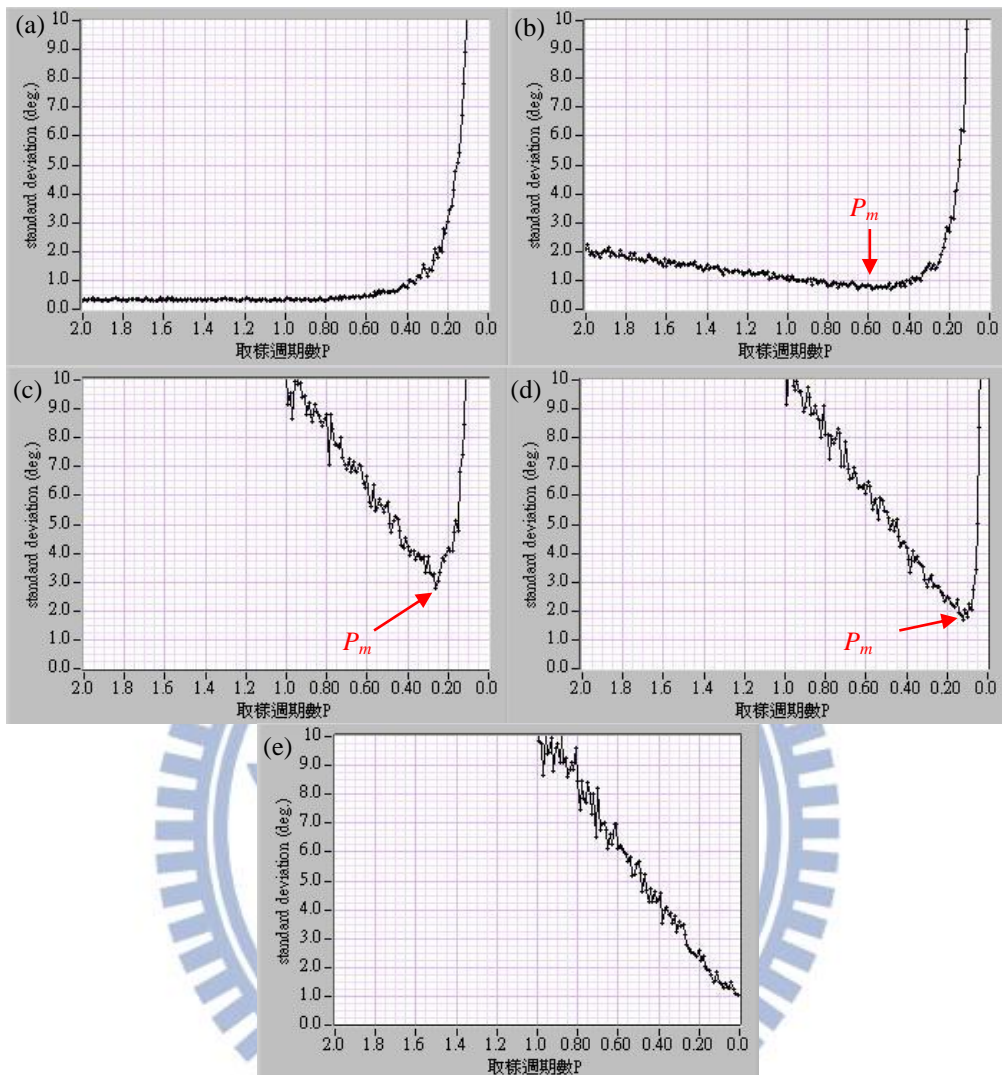


Fig. 3.19 不同條件下相位誤差標準差對 P 的關係圖。

- (a) $|\Delta f|=0$, $A_2=0.1A$, (b) $|\Delta f|=0.01f$, $A_2=0.1A$, (c) $|\Delta f|=0.1f$, $A_2=0.1A$,
 (d) $|\Delta f|=0.1f$, $A_2=0.01A$, (e) $|\Delta f|=0.1f$, $A_2=0$ 。 (@ $N=50$)

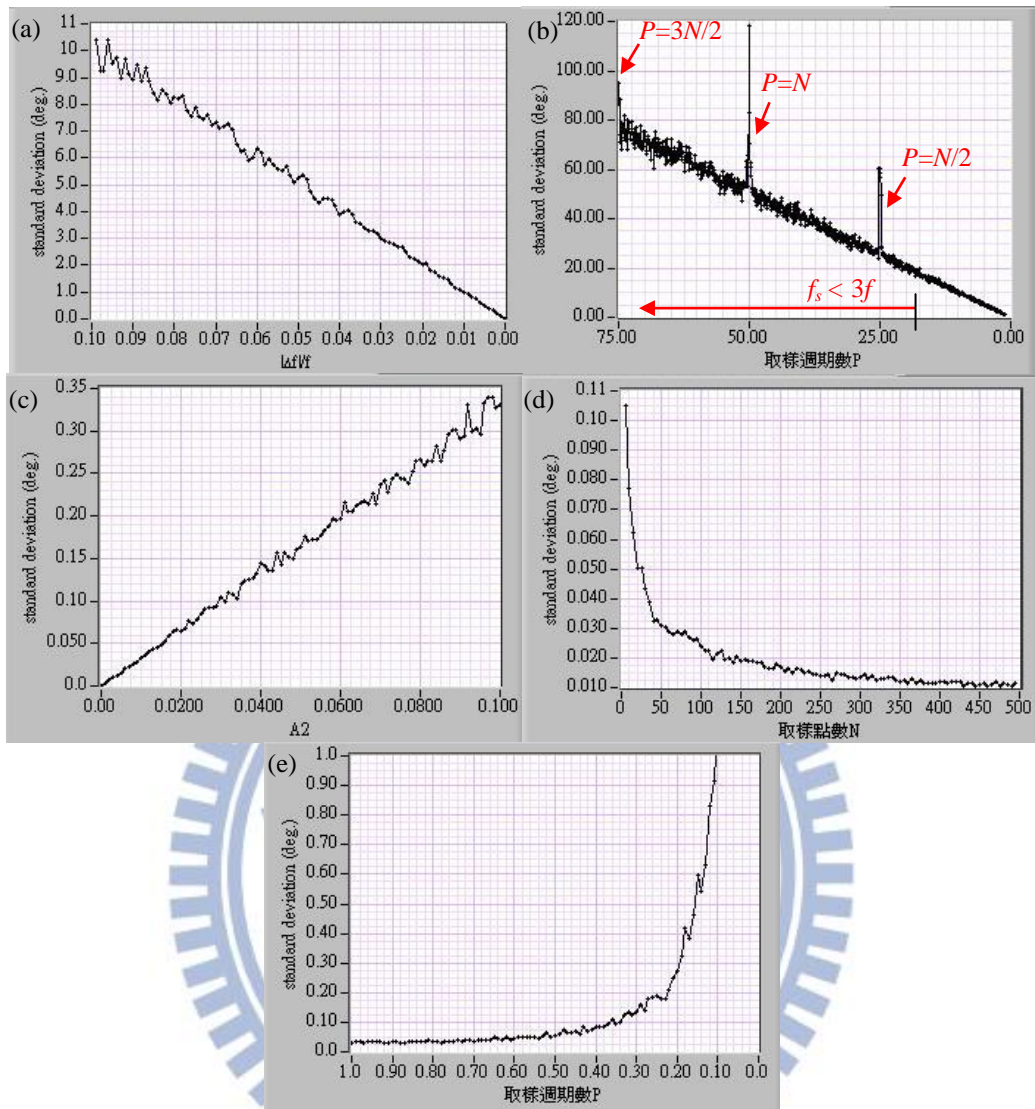


Fig. 3.20 不同參數時的相位誤差標準差。(a) $A_2=0, P=1$,
 (b) $A_2=0, |\Delta f|=0.1f$, (c) $|\Delta f|=0, P=1, N=50$, (d) $|\Delta f|=0, A_2=0.01A, P=1$,
 (e) $|\Delta f|=0, A_2=0.01A, N=50$ 。

另外若想求出 $\sigma_{\Delta\phi}$ 的極小值所在的取樣週期數 P_m ，可設 $\partial\sigma_{\Delta\phi}/\partial P=0$ ，由 Eqs. (3.42)與(3.44)整理後得到

$$\left(0.03+0.013P_m^{3.7}-0.017P_m^{7.4}\right)\left(\frac{A_2}{A}\right)^2 = NP_m^{5.7}\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 \quad \text{as } 1 > P_m > 0.01 \text{。} \quad (3.46)$$

由於此方程式過於複雜，很難得到解析解。觀察 Eq. (3.45)等式的左半部，發現當 P_m 在 1~0.01 的範圍中，第二、三項的貢獻不到 10%，可先捨棄而得到簡化後的關係式

$$P'_m = 0.54 \left(\frac{1}{N} \left(\frac{A_2}{A} \frac{f}{|\Delta f|} \right)^2 \right)^{0.1754} \quad \text{as } 1 > P'_m > 0.01 \text{。} \quad (3.47)$$

Eq. (3.46)限制 P_m 只能小於 1，當計算出 $P'_m > 1$ 時，由於不符合 Eq. (3.46)的限制條件，因此不可使用。但由 Eqs. (3.42)與(3.43)可知，當 $P \geq 1$ 的所有狀況中， $\sigma_{\Delta\phi}$ 的極小值都發生在 $P_m=1$ 的邊界位置上，因此可以歸納出最佳化的取樣週期數 P_m

$$P_m = \begin{cases} P'_m & \text{as } 1 > P'_m > 0.01 \\ 1 & \text{as } P'_m \geq 1 \end{cases} \text{。} \quad (3.48)$$

可發現最佳化的取樣週期數一定在 1 以下。當 P 位於最佳化取樣週期數 P_m 時，由 Eqs. (3.42)~(3.45)可發現取樣點數 N 越大， $\sigma_{\Delta\phi}$ 越小。整理出對存在擬合頻率錯誤及均勻隨機雜訊時的系統最佳化設定的過程為：設定系統所能承受的最大 N 值 \rightarrow 利用 Eqs. (3.47)與(3.48)決定 $P_m \rightarrow$ 代入 Eqs. (3.42)~(3.45)求出此時的 $\sigma_{\Delta\phi}$ 。至於 f_s/f 的大小可由 N, P ，利用 Eq. (3.39)轉換得知。此外需注意 Eqs. (3.42)~(3.48)是針對 $|\Delta f|=0\sim 0.1 f, A_2=0\sim 0.1 A, N=10\sim 500$ 的範圍內所做的擬合分析，若超出此範圍不保證結果會正確。

本模擬方法能夠解決以往不知道該如何設定實驗參數的窘境，但事實上對於更複雜的誤差來源時，如何歸納並正確的分析所模擬出來數據，仍是很大的考驗，建議分別對不同誤差來源做單獨的模擬分析後，再進行綜合的誤差討論，會比較確實。

3.5 小結

本章說明了各種相位誤差與來源，並整理了整體的數學表示式，再利用程式模擬擬合頻率錯誤與均勻隨機雜訊兩項誤差的影響並分析，最後歸納出相位誤差量與這兩項誤差之間的數學關係，另外還能夠解析出最佳化的取樣週期數，並且發現此最佳化取樣週期數一定在 1 以下。本文所提出說明能夠幫助相關研究者釐清誤差的來源，而經過誤差模擬分析後能夠解決以往不知道該如何設定實驗參數的窘境。

此外建議，進行絕對相位的量測實驗時，必須考慮所插入的各元件對相位的影響，最好在每插入一個元件就測試相位變化量，並且放入樣本後就不再改變其他元件的位置，以免引入額外相位差。



參考文獻

1. <http://www.newport.com/store/product.aspx?id=732092&lang=1033>
2. http://search.newport.com/?q=*&x2=sku&q2=4102-M
3. J. M. De Freitas and M. A. Player, "Importance of rotational beam alignment in the generation of second harmonic errors in laser heterodyne interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **4**, 1173-1176 (1993).
4. C. M. Wu and R. D. Deslattes, "Analytical modeling of the periodic nonlinearity in heterodyne interferometry," *Appl. Opt.*, **37**, 6696-6700 (1998).
5. J. H. Shia, Z. P. Wang and C. Y. Guana, "Theoretical analysis of non-polarizing beam splitters with appropriate amplitude and phase," *Opt. Laser Technol.* **41**, 351-355 (2009).
6. J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman, "Angular dependence of polarizing beam-splitter cubes," *Appl. Opt.*, **33**, 1916-1929 (1994).
7. E. Hecht, *Optics*, 4th edn., Addison Wesley, p.118 (2002).
8. W. BOOTH, "Vibration control: How to determine your equipment needs," *Laser focus world*, **46**, 65-71 (2010).
9. H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang, Y. L. Chen, and D. C. Su, "Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry," *Opt.Eng.* **50**, 045601 (2011).
10. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers", *Prec. Eng.* **14**, 91-98 (1992).
11. E. Rosenbluth and N. Bobroff, "Optical sources of nonlinearity in heterodyne interferometers", *Prec. Eng.* **12**, 7-11 (1990).
12. 謝鴻志, 「使用新穎取樣技術之全場外差干涉儀」, 博士論文, 第五章, 民國一百年。

附錄 B：常被忽視的 Jones 矩陣問題

Jones 矩陣計算時常會忽略光源本身的頻率項 ω_0 ，這可能會造成很大的誤會。兩種電場表示方式 $e^{i(\omega_0 t - kz)}$ 與 $e^{i(kz - \omega_0 t)}$ 皆代表光向+z方向傳播，物理上是完全沒有差異的，在不同的參考書中所選用的電場表示不一定相同，有時也可看到同一本書在不同章節時選用的電場表示也不同的狀況，由於我們習慣定義光的行進方向為+z方向，因此分析時可以只標示 $e^{i\omega_0 t}$ 或 $e^{-i\omega_0 t}$ ，如果沒標示會發生什麼問題呢？例如 Eq. (2.21)所提到 $\Gamma > 0$ 時快軸在 x 軸上的電光晶體 Jones 矩陣為

$$EO = \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

若 45° 的線性偏極光 E_{in} 選用 $e^{i\omega_0 t}$ 的形式

$$E_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t}. \quad (\text{B.2})$$

通過此電光晶體後，其電場的 Jones vector 可寫為

$$\begin{aligned} E_{out} &= EO \cdot E_{in} = \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} \\ e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Eq. (B.3)所代表的意義為 x-偏光的相位領先 y-偏光，稱 Eq. (B.1)為快軸在 x 軸上的電光晶體 Jones 矩陣沒錯；但若 45° 的線性偏極光 E_{in} 選用 $e^{-i\omega_0 t}$ 的形式

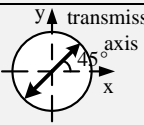
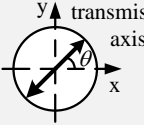
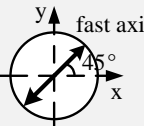
$$E_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}, \quad (\text{B.4})$$

通過此電光晶體後，其電場的 Jones vector 可寫為

$$\begin{aligned} E_{out} &= EO \cdot E_{in} = \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} \\ e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Eq. (B.5)所代表的意義變成 x-偏光的相位落後 y-偏光，此時稱 Eq. (B.1)為快軸在 x 軸上的電光晶體 Jones 矩陣就不正確了，會出現這樣的矛盾則是因為該 EO 矩陣係使用 $e^{i\omega_0 t}$ 的電場形式所推導出來的。因此建議在進行 Jones 計算時，最好標記清楚所選用的電場表示形式，或在整篇文章中皆選用固定的電場表示形式，避免混淆。因此需注意，當在文獻中查到一個光學元件的 Jones 矩陣，如 Table B.1，不要隨便就代入 Jones 計算中，必須檢查所使用的電場表示形式是否一致，如果不同時，可直接對該矩陣取共軛複數，所得到的共軛矩陣才會是所需的 Jones 矩陣。外差干涉術的計算中，若使用到不正確的矩陣，常會造成 180° 的相位差。

Table B.1 各種光學元件的 Jones 矩陣。

Polarization Element	Jones Matrix
Linear polarizer, horizontal transmission axis	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Linear polarizer, vertical transmission axis	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Linear polarizer, 45° 	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Linear polarizer, θ 	$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$
Wave plate, horizontal fast axis, $\Gamma > 0$	$\begin{pmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{pmatrix}$
Wave plate, 45° 	$\begin{pmatrix} \cos \frac{\Gamma}{2} & i \sin \frac{\Gamma}{2} \\ i \sin \frac{\Gamma}{2} & \cos \frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}$
Quarter wave plate, horizontal fast axis, $\Gamma = \pi/2$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Half wave plate, horizontal fast axis, $\Gamma = \pi$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

選用的電場形式為 $e^{i(\omega_0 t - kz)}$

第四章 外差式中央條紋定位法

4.1 前言

隨著科技的發展，對度量衡方面的要求越來越高。現代很多精密儀器或機械的元件都要求要有微米(μm)等級的精確度。因此，如何精密的測量實物長度是一項重要的課題。在光學測長法中包含有幾何光學法與干涉法；由於雷射光源的同調長度(coherent length)相當長，很適合作為干涉儀的光源，而且干涉法可測到光波長的等級，所以目前已經被大量的使用，例如以麥克森干涉儀(Michelson interferometer)為基礎測長技術[1]。此外，也很多研究人員利用同調長度短的光源做定位的工作，白光干涉儀(white light interferometer)就是一項非常適合的工具[2-5]。所謂的白光干涉儀，是指其所使用的光源同調度很短($1\sim 2\ \mu\text{m}$)，有如白光一般。所以只有當干涉儀兩臂等長時，才會觀察到干涉條紋強度的最大值。而這干涉條紋強度的最大值就稱為中央條紋(central fringe)[6]；也有人稱作零階(zero order)[4]條紋。由於光源同調長度很短，所以很不容易調出干涉條紋，但是一旦有干涉條紋出現，就表示干涉儀兩臂幾乎等長，白光干涉儀就是以中央條紋出現與否來決定是否已準確的定位。

本章將針對白光干涉儀的缺點，提出以可調波長外差干涉術來進行中央條紋定位研究[7-8]。

4.2 傳統的中央條紋定位法

中央條紋是光學干涉儀裡的重要特性之一。當中央條紋出現時，表示干涉儀兩臂所引入的光程差(optical path difference, OPD)是相等的。利用決定中央條紋位置的方法，可以應用在位移(displacement)、壓力(pressure)、溫度(temperature)、應力(strain)以及任何可以轉換成位移量參數的測量上[9-12]。當中央條紋位置定的越準確，上述測量參數就越準確。傳統的中央條紋定位方法是使用白光干涉術(white light interferometry, WLI)；由於白光光源是一種寬頻光源，其同調長度(coherence length)較差，通常為幾微米(μm)長，要調出干涉條紋很不容易。當光程差大於光源同調長度時，螢幕上出現一片均勻的亮場。然而當干涉現象發生時(如Fig. 4.1)即代表此干涉儀兩臂的光程幾乎相同，此時干涉信號最強處即為OPD等於零的位置，WLI感測系統[13-16]便是利用此特性建構的定位系統。架構如Fig.

4.2所示，由SLD(Superluminescence Laser Diode)出來的光束以壓電式移動平台PZT推動參考面鏡M進行縱向掃描，xy二維移動平台移動待測物S進行橫向掃描，找出所有絕對距離為零的位置繪圖後，即可得到待測物的表面形貌。

典型的WLI感測系統包含了兩個部分：感測干涉儀與參考干涉儀。感測干涉儀是將待測量轉換成光程差(OPD)，而參考干涉儀是將感測干涉儀所引入的光程差補償回來，使中央條紋出現。從補償量就可知道待測量的大小。一般而言，白光干涉感測系統的精確度決定於是否能精確決定出中央條紋峰值的位置。如果中央條紋的峰值與第一或負一階條紋的強度很接近，則系統需要很高的訊噪比(signal-to-noise ratio- SNR)才能辨認出中央條紋的位置。所以如何加大中央條紋的峰值與第一或負一階條紋的強度差，是近幾年來的研究主題[17-25]。

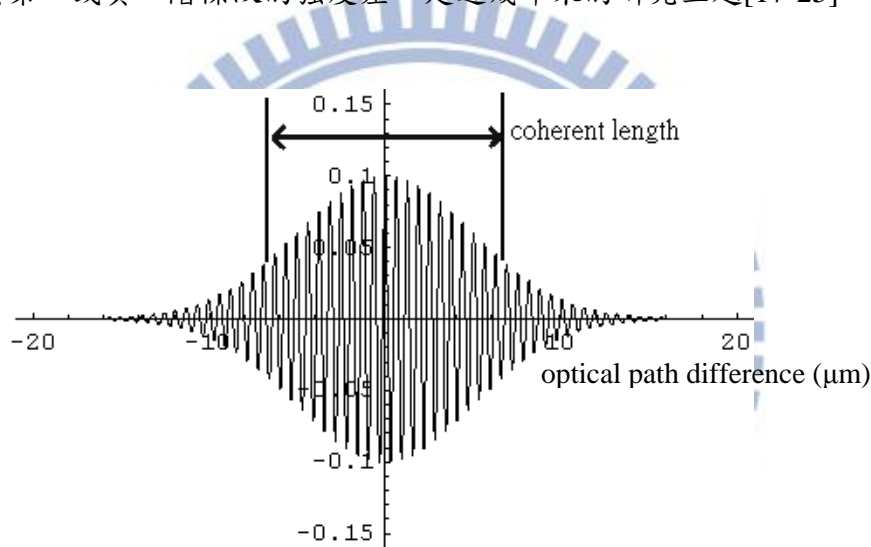


Fig. 4.1 干涉信號。

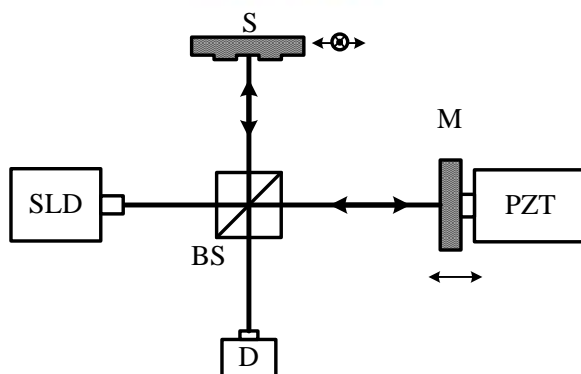


Fig. 4.2 低同調干涉儀。

這種傳統的定位方法，解析度約為 $2 \sim 3 \mu\text{m}$ 。然而，它仍然存在一些缺點，例如品質不良的透鏡或光學系統未準直架設，會引起干涉條紋的突兀效應(fringe beating effect)[26]，使得干涉條紋的包絡線變的不平滑。在最壞的情況下，突兀條紋的強度將會大於中央條紋的強度，而影響其定位。這是有待改進的地方。

4.3 外差式中央條紋定位法

1996年，李朱育等人[27]提出以外差干涉術結合可調波長雷射光源，進行中央條紋的定位，該方法能夠很方便的找出要到達中央條紋處的方向及距離。在本文中參考其原理進行優化，並提出快速定位的方法。在第五到第七章的量測系統中，就是以外差式中央條紋定位法進行絕對距離量測的應用。

外差式中央條紋定位法有下列幾項優點：

- i. 光學結構簡單；
- ii. 由於雷射二極體的同調長度比一般白光光源長了許多，所以在架設干涉儀時，很容易就得到干涉訊號；
- iii. 測量解析度不因雷射二極體的同調長度較長而變差；
- iv. 可以根據測試信號移動方向來辨別干涉儀的兩臂中何者較長。
- v. 可量測絕對距離的範圍極長，只受限於移動平台的最大移動距離。

下面的幾個小節中將說明外差式中央條紋定位法的原理，以及實驗時的快速定位步驟。

4.3.1 非共光程外差干涉術

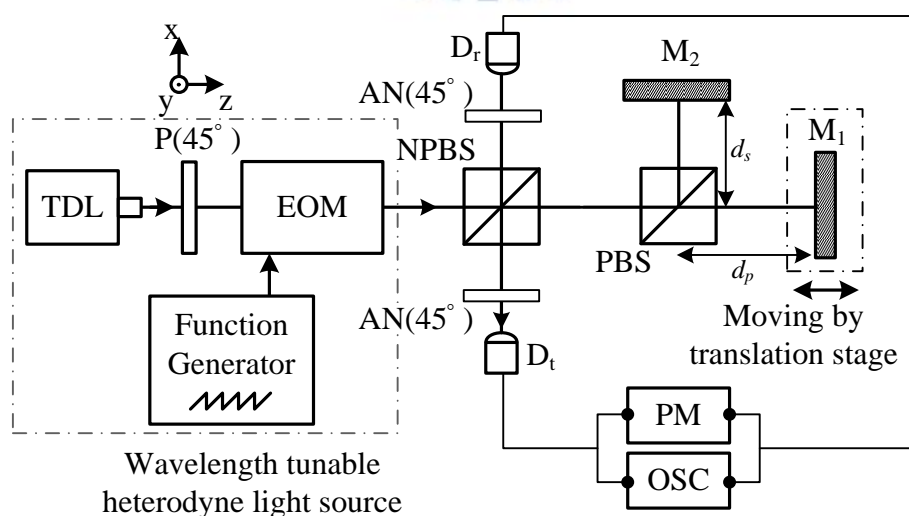


Fig. 4.3 使用EO晶體調變之非共光程外差干涉術。

基本架構如Fig. 4.3所示，為了方便起見，設定 z 軸為光行進方向， y 軸為垂直紙面向上的方向， x 軸為水平方向。雷射出射光為偏極方向與 x 軸成 45° 之線性偏極光，則其Jones vector可寫為

$$E_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (4.1)$$

又若電光晶體的快軸是在 x 軸方向，並以角頻率為 ω 、振幅為電光晶體的半波電壓 V_π 之鋸齒波信號驅動，光線入射電光晶體EOM後將使 p -偏光與 s -偏光之間產生相位延遲量(phase retardation) ωt ，此時 p -偏光與 s -偏光有光頻差 $\omega/2\pi$ ，即為外差光源。此外差光源，被無偏極分光鏡NPBS分為反射光與穿透光兩部份，反射光經過穿透軸與 x 軸成 45° 檢偏板 AN_r 後到達光偵測器 D_r ，根據 Jones calculus可計算出 D_r 上的電場形式為

$$\begin{aligned} E_r &= AN_r(45^\circ) \cdot EO \cdot E_{in} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

因此，光偵測器 D_r 所偵測到的參考信號形式為

$$I_r = |E_r|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t)]. \quad (4.3)$$

另一方面，穿透光則進入由偏極分光鏡 PBS 分光的改良式 Twyman-Green 干涉儀，在干涉儀中， s -偏光被反射， p -偏光則穿透(此處 s -與 p -偏光分別對應 y 與 x 偏振方向的入射光)。接著 s -偏光被反射鏡 M_1 反射，然後再經過 PBS 與 NPBS 反射，最後通過與 x 軸成 45° 夾角的檢偏板 AN_t 後到達光偵測器 D_t ， s -偏光在光偵測器 D_t 上的電場為 E_s ；而 p -偏光被反射鏡 M_2 反射後沿原來的路徑返回，並同樣被 BS 反射，通過 AN_t 到達光偵測器 D_t ， p -偏光在光偵測器 D_t 上的電場為 E_p 。此時 E_s 與 E_p 分別為

$$\begin{aligned}
E_s &= AN_t(45^\circ) \cdot R_{PBS} \cdot EO \cdot E_{in} \cdot e^{i\phi_s} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-ik(2d_s)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\omega t/2 + 2kd_s - \phi_R)} \quad , \quad (4.4)
\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}
E_p &= AN_t(45^\circ) \cdot T_{PBS} \cdot EO \cdot E_{in} \cdot e^{i\phi_p} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\phi_T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-ik(2d_p)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t/2 - 2kd_p + \phi_T)} \quad , \quad (4.5)
\end{aligned}$$

其中 R_{PBS} 與 T_{PBS} 為偏極分光鏡 PBS 針對反射光與穿透光轉換矩陣， ϕ_R 與 ϕ_T 分別為光經過 PBS 反射與穿透時所引入的額外相位，而 ϕ_s 與 ϕ_p 則分別為 s-與 p-偏光在 Twyman-Green 干涉儀中走的光程所引入的相位， $k = 2\pi/\lambda$ 為波數。因此，光偵測器 D_t 所偵測到的測試信號光強度與其相位項分別為

$$\begin{aligned}
I_t &= |E_s + E_p|^2 \\
&= \frac{1}{2} \{1 + \cos[\omega t + \phi]\} \quad ; \quad (4.6)
\end{aligned}$$

與

$$\phi = \phi_{PBS} - \frac{4\pi d}{\lambda} \quad , \quad (4.7)$$

其中 $\phi_{PBS} = \phi_T - \phi_R$ 為 PBS 所引入的相位項， $d = d_p - d_s$ 為干涉儀兩臂之間的距離差。將參考信號與測試信號送入相位計中比較後，即可得到相位項 ϕ ，

4.3.2 外差式中央條紋定位法原理

承4.3.1小節，若此時調整光源的波長由 λ_1 變化到 λ_2 ，則從相位計觀察到的相位變化量

$$\Delta\phi = \phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_1) = \left(-\frac{4\pi d}{\lambda_2}\right) - \left(-\frac{4\pi d}{\lambda_1}\right) = \frac{4\pi d\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}, \quad (4.8)$$

其中 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ 。

為了方便起見，可將光偵測器 D_r 與 D_t 的輸出端接至示波器 OSC，來觀察變波長後兩信號之間的相位變化量。首先設定光源波長的變化是由 λ_1 逐漸掃描至 λ_2 ，當在示波器中觀察到測試信號 I_t 信號向左移動，如 Fig. 4.4 所示，代表 $\Delta\phi > 0$ ，此時 $d_p > d_s$ ，應控制移動平台使面鏡 M_1 向左移動，以減少兩臂距離差；反之，當示波器中 I_t 信號向右移動，則代表 $\Delta\phi < 0$ ，此時 $d_p < d_s$ ，此時應控制移動平台使 M_1 向右移動，以減少兩臂距離差，才能找到中央條紋處；而當測試信號 I_t 不動時，即 $\Delta\phi = 0$ ，此時 M_1 的位置即為中央條紋處。此外，若將 Eq. (4.8) 改寫為

$$d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\Delta\lambda} \Delta\phi, \quad (4.9)$$

在定位的過程中，便可利用 Eq. (4.9)，由 $\Delta\phi$ 的大小估計中央條紋位置的大概距離 d ，能夠非常方便的找到中央條紋。

但是只利用示波器觀察波形相位變化來定中央條紋位置時，其精確度有限。為了增加測量的精確度，可以將測試信號與參考信號引入相位計來觀察相位項 ϕ 。當變波長後相位計顯示出的相位不再變化時，表示 M_1 位於中央條紋處，此時干涉儀兩臂的光程相等。

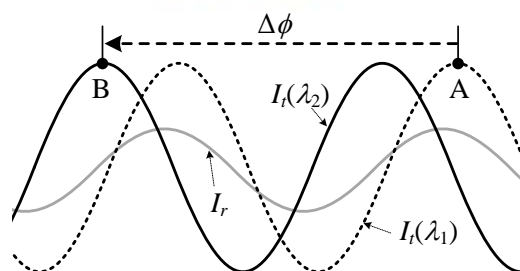


Fig. 4.4 示波器上的信號。當波長由 λ_1 掃描至 λ_2 ，弦波波峰由 A 移動至 B，經過了一個週期以上。

Table 4.1. 各步驟的定位範例。

	λ_1 (nm)	λ_2 (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	$\Delta\phi$ (deg.)	$d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\Delta\lambda} \Delta\phi$	stage displacement
<2>	633.00	633.02	0.02	378.09	1.0521E+07 nm	-10500000 nm
<3>	633.00	634.00	1.00	37.46	2.0880E+04 nm	-20900 nm
<4>	632.60	637.96	5.36	-0.17	-1.7778E+01 nm	+18 nm
<5>	632.60	637.96	5.36	0.00	0.0000E+00 nm	

4.3.3 快速定位步驟

以下提出能夠快速定位出中央條紋處的步驟，Table 4.1 為其相對應的範例：

- <1> 首先目測或以直尺量測，利用移動平台將面鏡推進到兩臂接近等長處。
- <2> 使用可變波長光源所能設定的最小波長變化量，記錄波長變化後造成的相位變化量 $\Delta\phi$ ，利用 Eq.(4.9)推算出 d 的值，依此移動面鏡 M_1 。其中 $d > 0$ 代表面鏡需向左移動； $d < 0$ 代表面鏡需向右移動。
- <3> 改用較大的波長變化量，記錄 $\Delta\phi$ ，推算 d 值，依此移動 M_1 。
- <4> 使用最大的波長變化量，記錄 $\Delta\phi$ ，推算 d 值，依此移動 M_1 。
- <5> 重複步驟<4>的動作，以檢查此時是否定位完成。

一般來說，若步驟<4>中 $\Delta\phi$ 很小時，步驟<5>可省略不做。經過這些步驟即可使得兩臂光程相等。

4.3.4 波長變化量的選擇

波長變化量的選擇也有技巧，在系統的相位重複性 σ_ϕ 較差的時候，可利用以下方法正確又快速地定位：

參考 Table 4.2 波長變化量與 d 的可解析範圍的關係，其中 d 的可解析範圍上下限 d_{min} 與 d_{max} 分別可由 σ_ϕ 與 $360^\circ - \sigma_\phi$ 代入 Eq. (4.9) 的 $\Delta\phi$ 中求得；步驟 <3>~<5> 波長變化量的選擇則可參考 Eq. (4.10)，

$$\Delta\lambda' \leq \frac{360^\circ - \sigma_\phi}{\sigma_\phi} \times \Delta\lambda, \quad (4.10)$$

Table 4.2 波長的選擇與 d 的解析範圍的關係。

	λ_1 (nm)	λ_2 (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	$d_{min} \sim d_{max}$ (μm)
<2>	632.60	632.62	0.02	834 ~ 9171
<3>	632.60	632.80	0.20	83.4 ~ 917.4
<4>	632.60	634.60	2.00	8.36 ~ 92.00
<5>	632.60	638.00	5.40	3.11 ~ 34.26

$\sigma_\phi = 30^\circ$ $\sigma_\phi \sim (360^\circ - \sigma_\phi)$

$\Delta\lambda$ 為上一個步驟的波長變化量， $\Delta\lambda'$ 則為該步驟所應使用的波長變化量。經過這樣的計算後，可得到 Table 4.2 中 d 的解析範圍皆能有互相重疊的區域，因此經過<2>~<5>的步驟後，可以很正確的將面鏡定位在兩臂等長處而不會因相位纏繞 (phase wrapping) 造成誤判的問題。此方法被應用在第七章的二維階高量測方法中。

相位重複性較差的情況下，有時也會發生另一種問題，假設目前 $d=0$ ，此時 $\phi \approx 0$ ，若所使用相位計中 ϕ 的值域為 $0 \sim 360^\circ$ ，受到環境振動等因素的影響時，將使得 ϕ 產生漂移，向正方向漂移不會有問題，但向負方向漂移會使相位跳躍式的增加 360° ，使得在變波長後的相位變化量 $\Delta\phi$ ，有可能成為三百多度，造成誤判。因此實驗時中央條紋的決定需要兩個判斷式：

$$|\Delta\phi| < \sigma_\phi, \quad (4.11)$$

與

$$|\Delta\phi| < 360^\circ - \sigma_\phi. \quad (4.12)$$

或是在計算相位差 $\Delta\phi$ 時，若 $\Delta\phi > 180^\circ$ 可直接減 360° ，若 $\Delta\phi < -180^\circ$ 可直接加 360° 。

4.4 更正確的外差式中央條紋法原理

當要求高解析度的定位時，4.3.2 小節的外差式中央條紋法推導過程，必須更仔細的考慮波長變化時各元件所引入的相位。如 Eq. (4.7) 中 ϕ_{PBS} 不只是 PBS 所引入的相位，還會包含 BS、面鏡等元件所引入的初始相位，可將整體的初始相位改用 ϕ_0 表示，並且由於這些元件所引入的初始相位皆與波長有關，使得 $\phi_0 = \phi_0(\lambda)$ ，因此 Eq.(4.7) 需改寫為

$$\phi = \phi_0(\lambda) - \frac{4\pi d}{\lambda}, \quad (4.13)$$

若入射光波長由 λ_1 改變為 λ_2 時，由 Eq. (4.13) 可推得相位變化量 $\Delta\phi$

$$\Delta\phi = \frac{4\pi(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} (d - \xi_{21}), \quad (4.14)$$

其中 ξ_{21} 為初始相位與波長有關時導致的定位誤差

$$\xi_{21} = \frac{\lambda_1\lambda_2[\phi_0(\lambda_2) - \phi_0(\lambda_1)]}{4\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (4.15)$$

而外差式中央條紋法定位完成時，即 $\Delta\phi = 0$ ，此時 $d = \xi_{21}$ ，使得兩臂光程不完全相等。

若要避免此現象的影響必須在各平面的定位時，都使用相同的波長與波長變化量進行定位，造成固定的定位誤差 ξ_{21} ，因此各定位點的座標相減後可消除 ξ_{21} 的影響，在 6.2.2 小節中有完整的說明。順帶一提，外差式中央條紋法中，因為是找相位不變的點，因此偏極混合與偏極旋轉誤差等週期非線性誤差的影響可被忽略。

4.5 使用外差干涉術精密測量位移

中央條紋法應用時，常需要移動參考面鏡 M_1 來做定位的動作， M_1 的定位準確度取決於移動平台的準確度。當中央條紋法應用在絕對距離的量測系統時，通常只靠移動平台上所標劃的刻度或內建的電子顯示面板來讀出面鏡的移動距離，然而廠商所提供的刻度精確度是否夠高，或是所劃的刻度是否正確，很難去評估。若要解決這個問題可改用外差干涉儀搭配相位計來精密測量位移，架構如 Fig. 4.5 所示。

當外差光源(heterodyne light source)入射此干涉儀後可在光偵測器 D_1 取得一弦波信號，此弦波信號的相位變化量 $\Delta\phi$ 與面鏡 M_1 的移動量 Δd 有關，其關係式為

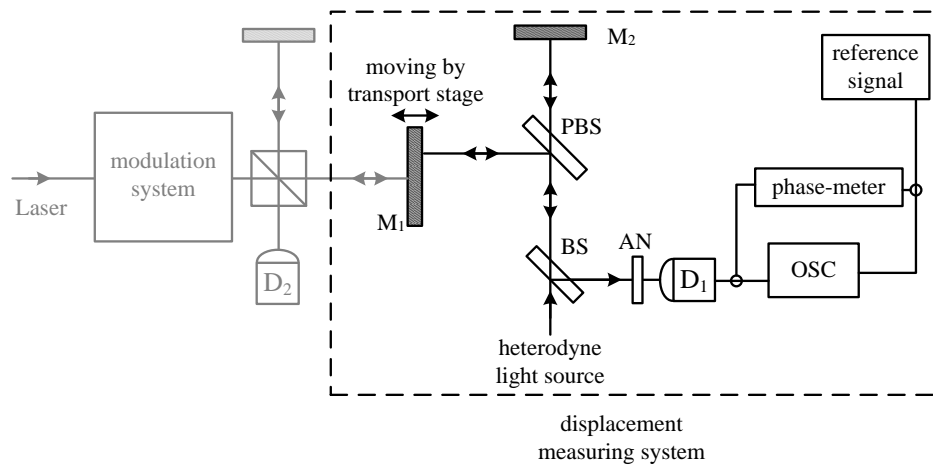


Fig. 4.5 精密位移測量系統架構圖。

$$\Delta d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \lambda = \frac{1}{2} \times \text{Number of fringes} \times \lambda \quad (4.16)$$

由於相位的大小只會在 $0 \sim 2\pi$ 之間，因此面鏡移動量超過 $\lambda/2$ 時，相位計會記錄相位變化了多少個 2π (即 Number of fringes)，但此功能只限面鏡緩慢移動時有效；若面鏡是瞬間的移動量就超過 $\lambda/2$ ，此時相位計可能出錯，實驗時要特別注意這點。

4.6 小結

本章說明了外差式的中央條紋定位法的原理以及實驗時的快速定位步驟，特別針對相位重複性較差的系統來評估波長的選擇，接著又修正了外差中央條紋法中的初始相位隨波長變化的問題，而為了提高中央條紋法中移動平台的定位準確度，提出使用外差干涉儀來精密測定移動平台的位移量。外差式中央條紋法具有光學架構簡單、定位方便、測量範圍廣、準確度高等優點，是一種相當有潛力的量測技術。

參考文獻

1. M. Francon, *Optical interferometry*, Academic, New York, 23-52 (1966).
2. M. Haruna, M. Ohmi, T. Mitsuyama, H. Tajiri, H. Maruyama, and M. Hashimoto, “Simultaneous measurement of the phase and group indices and the thickness of transparent plates by low-coherence interferometry”, *Opt. Lett.* **23**, 966-968 (1998).
3. T. Li, A. Wang, K. Murphy, and R. Claus, “White-light scanning fiber Michelson interferometer for absolute position-distance measurement”, *Opt. Lett.* **20**, 785-787 (1995).
4. M. Dobosz, H. Matsumoto, K. Seta, and S. Iwasaki, “Polychromatic light interferometer for high-accuracy positioning”, *Opt. & Laser Eng.* **24**, 43-56 (1996).
5. P. Hariharan and M. Roy, “White-light phase-stepping interferometry: measurement of the fractional interference order”, *J. Mod. Opt.* **42**, 2357-2360 (1995).
6. Q. Wang, Y. N. Ning, A. W. Palmer, and K. T. V. Grattan, “Central fringe identification in white light interferometer using a multi-stage-squaring signal processing scheme”, *Opt. Commun.* **117**, 241-244 (1995).
7. J. Y. Lee, M. H. Chiu, and D. C. Su, “Central fringe identification using a heterodyne interferometric technique and a tunable laser-diode”, *Opt. Commun.* **128**, 193-196 (1996).
8. J. Y. Lee and D. C. Su, “High resolution central fringe identification”, *Opt. Commun.* **156**, 1-4 (1996).
9. Y. J. Rao, Y. N. Ning, and D. A. Jackson, “Synthesized source for white-light sensing systems”, *Opt. Lett.* **18**, 462-464 (1993).
10. P. Sandoz, G. Tribillon, and H. Perrin, “High-resolution profilometry by using phase calculation algorithms for spectroscopic analysis of white-light

- interferograms”, *J. Mod. Opt.* **43**, 701-708 (1996).
- 11.P.. D. Groot and L. Deck, “Surface profiling by analysis of white-light interferograms in the spatial frequency domain”, *J. Mod. Opt.* **42**, 389-401 (1995).
- 12.U. Schnell, E. Zimmermann, and R. Dandliker “Absolute distance measurement with synchronously sampled white-light channelled spectrum interferometry”, *Pure Appl. Opt.* **4**, 643-651 (1995).
- 13.T. H. Marshall, Y. N. Ning, A. W. Palmer, and K.T. V. Grattan, “Dispersion in an electronically-scanned dual-wavelength low-coherence interferometer”, *Opt. Commun.* **138**, 136-142 (1997).
- 14.Q. Wang, Y. N. Ning, K.T. V. Grattan, and A. W. Palmer, “ Noise effects in position measurement using a white light interferometric system linked with different core diameter multimode fibers”, *Opt. Commun.* **133**, 67-71 (1997).
- 15.E. Raz, “A multiple white light interferometer”, *Rev. Sci. Instrum.* **67**, 3416-3419 (1996).
- 16.S. Chen, A. W. Palmer, K.T. V. Grattan, and B. T. Meggitt, “Digital signal-processing techniques for electronically scanned optical-fiber white-light interferometry”, *Appl. Opt.* **31**, 6003-6010 (1992).
- 17.M. Dobosz, H. Matsumoto, and S. Iwasaki, “Beamsplitter path equalization for white-light interferometry”, *Opt. Eng.* **34**, 493-497 (1995).
- 18.Y. J. Rao and D. A. Jackson, “Improved synthesised source for white light interferometry”, *Electron. Lett.* **30**, 1440-1441 (1994).
- 19.D. N. Wang, Y. N. Ning, K.T. V. Grattan, and A. W. Palmer, and K. Weir, “Three-wavelength combination source for white-light interferometry”, *IEEE Photon. Technol. Lett.* **5**, 1350-1352 (1993).
- 20.B. K. Ward and K. Seta, “Quaimonochromatic white light fringe interferometer”,

- Appl. Opt.* **30**, 66-71 (1991).
21. Q. Wang, Y. N. Ning, K. T. V. Grattan, and A. W. Palmer, "Effect of multimode fiber core diameter on modal noise suppression in white-light interferometry", *Opt. Commun.* **118**, 473-478 (1995).
22. Y. N. Ning, Y. Liu, K. T. V. Grattan, B. M. A. Rahman, and A. W. Palmer, "The limitations for suppressing modal noise induced in a graded-index multimode fiber in white light interferometer", *Opt. Commun.* **133**, 347-354 (1997).
23. S. Chen, A. W. Palmer, K. T. V. Grattan, and B. T. Meggitt, "Fringe order identification in optical fiber white light interferometry using centroid algorithm method", *Electron. Lett.* **28**, 553-555 (1992).
24. H. H. Liu, P. H. Cheng, and J. Wang, "Spatially coherent white-light interferometer based on a point fluorescent source", *Opt. Lett.* **18**, 678-680 (1993).
25. K. B. Farr and N. George, "Beamsplitter cube for white light interferometry", *Opt. Eng.* **31**, 2191-2196 (1992).
26. Y. N. Ning, K. T. V. Grattan, and A. W. Palmer, "Fringe beating effects induced by misalignment in a white-light interferometer", *Meas. Sci. Technol.* **7**, 700-705 (1996).
27. J. Y. Lee, M. H. Chiu, D. C. Su, "Central fringe identification using a heterodyne interferometric technique and a tunable laser-diode", *Opt. Commun.* **128**, 193-196 (1996).

第五章 以外差式中央條紋定位法進行塊規量測

5.1 前言

工業界或實驗室中進行長度校正時，通常會使用標準塊規做為校正元件，然而製造塊規時必須確認所製作的塊規，精確的長度是多少，才能提供使用者正確的長度資訊，因此塊規長度的測定方法一直是一個值得研究的領域。傳統塊規的量測使用超出片段法(exceed fraction method) [1,2]，此方法具有高解析度的優點，但無法直接測量未知長度的塊規，必須提供塊規的標稱長度資訊，用以估計超出片段法中的整數部分，為了解決這個問題，Bitou 與 Seta [3]利用波長掃描干涉術，來完整解析出塊規長度，然而前述兩種方法測量時皆必須極為準確的量出使用時雷射的波長，並嚴苛的保證雷射的穩定度，否則誤差將十分可觀。

而 Lee 等人[4]提出外差式中央條紋定位法，其方法結合外差干涉術[5,6]及可調波長雷射來辨別中央干涉條紋，可以很容易的定位出干涉儀兩臂光程長絕對相等的位置，該法與原理相近的白光中央條紋定位法[7]相比較，白光的方法在定位時，常無法確定零光程差的位置在參考面鏡的前方還是後方，而外差式中央條紋定位法能夠解決這個問題，外差式中央條紋定位法除了使用相位計外，亦可由示波器 OSC 所顯示的弦波信號在變波長後的移動方向及波數，判斷出到達零光程差的方向及大約的距離。

另一方面。市售的精密移動平台，雖然具有很高的精確度，但僅可以應用於某一起點至另一終點的平移或位移測量。由於其起點與終點無法和待測塊規相符合，因此無法直接應用於塊規的測量。

在本章中將此技術與高解析度移動平台相結合，提出一個新的塊規測量法。在本法中利用外差式中央條紋定位法使干涉儀兩臂光程絕對相等，而準確定位出塊規兩端在干涉儀另一臂的對應位置，這兩位置間的距離則由精密移動平台上的光學尺讀數讀出，此方法與 Bitou 的方法相比較，具有不必嚴苛要求波長的準確度和穩定度即可達到高解析度的優點；與白光中央條紋定位法相比較，則具有光學架構簡單、容易操作等優點，其量測範圍理論上可達無窮遠，但實際上受限於移動平台的最大移動範圍，而其解析度除了與移動平台有關之外，還與中央條紋定位法有關。

5.2 原理

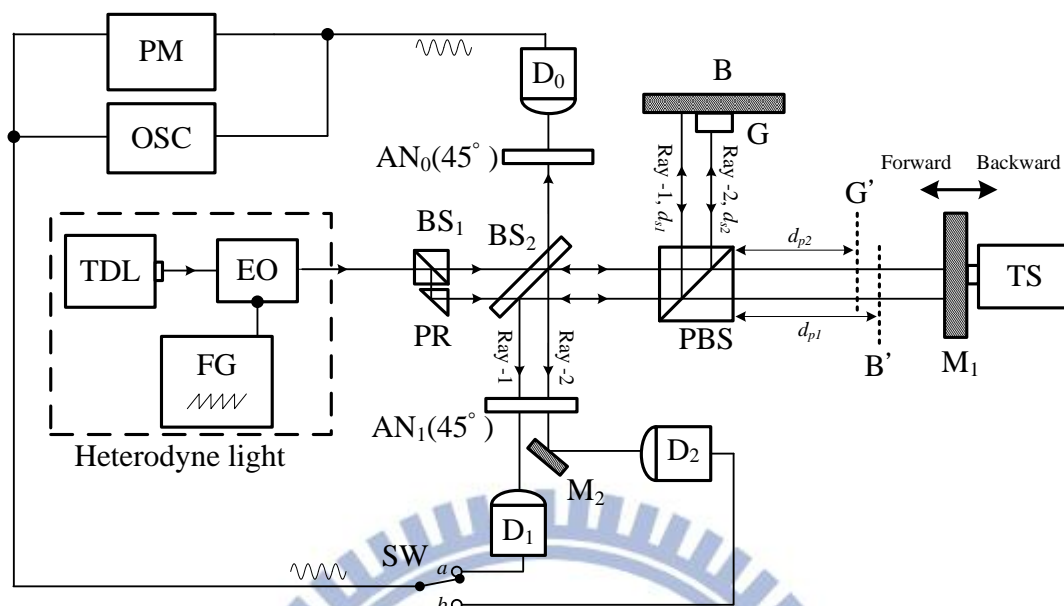


Fig. 5.1 測量塊規新法的光學裝置。TDL：可調波長雷射光源，EO：電光調制器，BS：分光鏡，PR：菱鏡，PBS：偏極分光鏡，S：塊規，B：基板，M：反射面鏡，TS：精密移動平台，AN：檢偏板，D：光偵測器，SW：切換開關，OSC：示波器，PM：相位計。

本實驗裝置是將 Lee 的裝置加以改進，如 Fig. 5.1 所示，由兩個分光鏡 BS，一個偏極分光鏡 PBS，兩個面鏡 M，待測塊規 G，基板 B，兩片檢偏板 AN，及三個光偵測器 D 所組成。設+z 為光前進方向，+y 為垂直紙面朝上的方向，其外差光源一樣由可調波長雷射 TDL 與一只受調制的電光晶體調制器所組成，且其 p-偏光和 s-偏光之間會有角頻差 ω ，此外差光經由 BS₁ 及一菱鏡 PR 分成兩平行光束 Ray-1 及 Ray-2，而後進入一個使用 PBS 的改良式 Michelson 干涉儀，其中 G 放置在 B 上，M₁ 為參考面鏡由移動平台 TS 所帶動。Ray-1 的光程為 PBS→B→PBS→BS₂→AN₁→D₁ (s-偏光) 與 PBS→M₁→PBS→BS₂→AN₁→D₁ (p-偏光)，而 Ray-2 的光程 PBS→G→PBS→BS₂→AN₁→D₂ (s-偏光) 與 PBS→M₁→PBS→BS₂→AN₁→D₂ (s-偏光)，若 AN₁ 的透光軸與 x 軸夾角為 45°，則 D_{i (i=1,2)} 所接收到光強度為

$$I_i = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t + \phi_i)], \quad (i=1,2) \quad (5.1)$$

其中，弦波信號的相位

$$\phi_i = -\frac{4\pi d_i}{\lambda}, \quad (5.2)$$

而 λ 為波長，干涉儀兩臂的光程差 $d_i \equiv d_{pi} - d_{si}$ ， d_{pi} 、 d_{si} 分別為 Ray- i 兩臂的 p-與 s-偏光的光程長。符號 i ($i=1, 2$) 分別是指對 Ray-1 與 Ray-2 所做的量測。

另外，外差光由 BS₂ 反射且穿過透光軸與 x 軸成 45° 的 AN₀，入射至 D₀ 成為此系統的參考訊號，其光強度可表示為

$$I_r = |E_r|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t)]。 \quad (5.3)$$

若將 Eq. (5.3) 的參考訊號 I_r 與 Eq. (5.1) 的測試訊號 I_i 送入相位計 PM，即可測得相位項 ϕ 。若入射光波長由 λ_1 變化到 λ_2 時，由 Eq. (5.2) 可推得相位變化量 $\Delta\phi$

$$\Delta\phi = \phi_{i,\lambda_2} - \phi_{i,\lambda_1} = \frac{4\pi d_i \Delta\lambda}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (5.4)$$

其中 $\Delta\lambda \equiv \lambda_2 - \lambda_1$ ，由 Eq. (5.4) 可知，若波長變化後，相位計的讀數仍不變時，則代表光程差 d_i 為零，此即為中央條紋定位法的核心概念，應用此原理，可精確地定位出干涉儀兩臂光程絕對相等時 M₁ 的位置。

先考慮 Ray-1，利用精密移動平台 TS，將 M₁ 移動到基板 B 所對應的參考位置 B' 處，接著利用中央條紋定位法，找出塊規兩個端點在干涉儀參考面鏡臂的對應的位置，並由移動平台的位移量推得塊規的長度 L 。

5.3 實驗

為了驗證本法的可行性，我們測量 1.03 mm 長的塊規(Mitutoyo, No. 516-402-26)；可調波長雷射(New Focus, Model 6304)的可變波長範圍在 632.6~637.96 nm 之間，其波長解析度為 0.02 nm；電光晶體調制器(New Focus, Model 4002)載入來自訊號產生器所輸出的鋸齒波，並使外差頻率為 500Hz；精密移動平台，結合光學尺(Sony, BL57-NE)及電控移動平台(Chuo Percision, ALS-510-H1P)，其最小移動量為 1 nm，最大行程為 100 mm；相位計則是使用 DAQ 卡(NI, PCI-6110)擷取兩個光偵測器信號，經過 IEEE1241 三參數弦波擬合(即最小方差弦波擬合)而得到相位 ϕ ，而由於使用的 DAQ 卡取樣頻率為 5 MHz，

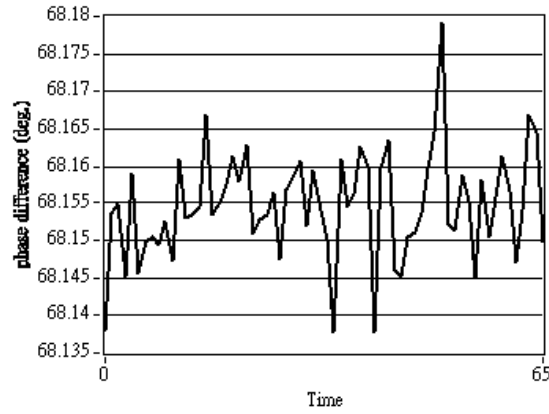


Fig. 5.2 相位計的相位重複性測試。

外差光的頻率為 500 Hz，因此相位的理論解析度為 0.036° [8]，Fig. 5.2 則為實際相位計對固定實驗條件下的多次取樣測試，可知相位誤差在 $\pm 0.02^\circ$ 以內。

由於可調波長雷射的波長是以掃動的方式在作變化，因此外差式中央條紋定位法可由相位計，及示波器 OSC 所顯示的弦波信號在變波長後移動的方向及波數，判斷出到達零光程差的方向及大約的距離。例如將 Eq. (5.4) 改寫為

$$d_i = \Delta\phi_i \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4\pi\Delta\lambda} \quad (5.5)$$

當 $\Delta\phi_i > 0$ ，則代表面鏡 M_1 尚未到達零光程差的位置；而當 $\Delta\phi_i < 0$ ，則代表面鏡 M_1 已經越過零光程差的位置了，因此可利用 Eq. (5.5) 估計零光程差的位置的大概距離(即光程差) d_i 。Table 5.1 是量測過程中所記錄的數據，以下則為相關數據量測的過程：

- I. 首先，先將開關 SW 轉至 a 處觀察 Ray-1 信號 (如 Fig. 5.1)。接著目測或以直尺量測，利用移動平台將面鏡推進到兩臂接近等長處。
- II. 將可變波長雷射的波長變化量 $\Delta\phi$ 設成最小，此時相位計觀察到的相位變化量 $\Delta\phi_1 = 18.09^\circ$ ，但由示波器可觀察到弦波波形的移動量超過一個週期，如 Fig. 5.3，故實際 $\Delta\phi_1 = 378.09^\circ$ ，代入 Eq. (5.5) 可推得 d_1 約為 10.5 mm，因此利用移動平台將面鏡 M_1 推進 10.5 mm，使其接近零光程差的位置 B'。
- III. 改用較大的 $\Delta\lambda$ ，進行定位，此時量測數據中 $|\Delta\phi_1|$ 變得比較小，這表示 M_1 正在接近 B'。

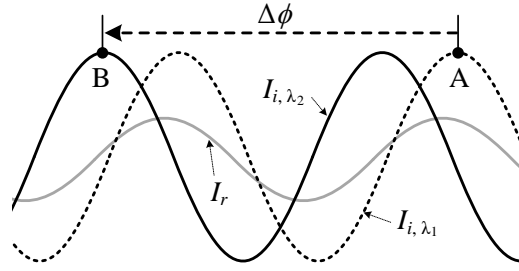


Fig. 5.3 示波器上的信號。當波長由 λ_1 掃描至 λ_2 ，弦波波峰由A移動至B，經過了一個週期以上。

- IV. 改用最大的 $\Delta\lambda$ ，進行定位，觀察到相位變化為負值，這代表 M_1 的位置已經越過 B' ，必須往回移動；相反地，如果相位變化為正值，這代表 M_1 的位置還沒到達 B' ，必須繼續往前移動。
- V. 以相同的 $\Delta\lambda$ 進行測量，由於相位變化為零，因此可檢驗出 $d_1=0$ ，這代表此時 M_1 的位置確實與 B' 重合。
- VI. 改將開關 SW 轉至 b 處觀察 Ray-2 信號，
- VII-X 重複 II-V 的步驟，只是改成找出兩臂絕對相等時 M_1 的位置 G' 。
- 此時 B' 與 G' 即為塊規兩端點在干涉儀另一臂的對應點，因此 TS 將 M_1 由 B' 點位移至 G' 的距離共 1,030,009 nm，即為塊規的長度 L 。

Table 5.1 各步驟的實驗數據(20°C)。

	$\lambda_1(\text{nm})$	$\lambda_2(\text{nm})$	$\Delta\lambda(\text{nm})$	$\Delta\phi_1(\text{deg.})$	$d_1 = \Delta\phi_1 \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\Delta\lambda}$	stage displacement
II	633.00	633.02	0.02	378.09	1.0521E+07 nm	-10,500,000 nm
III	633.00	634.00	1.00	37.46	2.0880E+04 nm	-20,900 nm
IV	632.60	637.96	5.36	-0.17	-1.7778E+01 nm	+18 nm
V	632.60	637.96	5.36	0.00	0.0000E+00 nm	
	$\lambda_1(\text{nm})$	$\lambda_2(\text{nm})$	$\Delta\lambda(\text{nm})$	$\Delta\phi_2(\text{deg.})$	$d_2 = \Delta\phi_2 \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\Delta\lambda}$	stage displacement
VII	633.00	633.02	0.02	37.02	1.0301E+06 nm	-1,000,000 nm
VIII	633.00	634.00	1.00	53.84	3.0010E+04 nm	-30,000 nm
IX	632.60	637.96	5.36	0.09	9.4117E+00 nm	-9 nm
X	632.60	637.96	5.36	0.00	0.0000E+00 nm	

gauge length $L=1,030,009$ nm

5.4 討論

精密移動平台的移動距離可由其內部的光學尺讀出，然而光學尺的準確度在大行程時誤差較高(位移 100 mm 誤差可達 45 nm)，此時改用雷射干涉儀(Ex: Agilent 5529A)直接測量面鏡的位移量可避免此項誤差。

本量測方法的整體解析度，須考慮移動平台的距離解析度 δd_i ($\delta d_i=1$ nm)，及外差式中央條紋定位法的長度解析度 δd_c ， δd_c 的推導方式係對 Eq. (5.5) 作微分，可得

$$\delta d_c = \frac{1}{4\pi\Delta\lambda} [\delta(\Delta\phi)\lambda_1\lambda_2 + \Delta\phi(\lambda_1\delta\lambda_2 + \lambda_2\delta\lambda_1) + \Delta\phi\lambda_1\lambda_2 \frac{\delta(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda}] \quad (5.6)$$

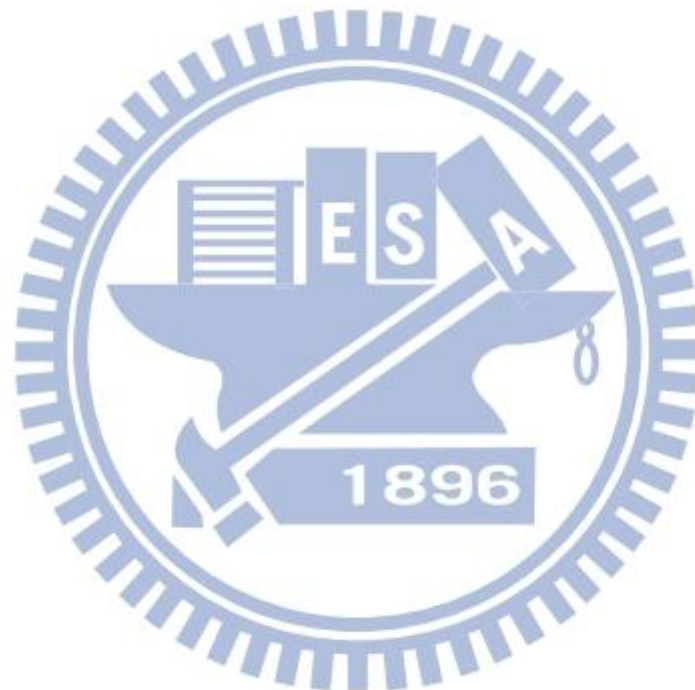
Eq. (5.6) 中的各項誤差，第一項為相位不準確度的影響，第二、三項為波長不準確度的影響，當在光程差 $d_i \approx 0$ 時， $\Delta\phi$ 約等於相位計的解析度 $\delta(\Delta\phi)$ ，而波長的解析度 $\delta\lambda_i$ 遠小於波長 λ_i ($i=1,2$)，且波長變化的準確度 $\delta(\Delta\lambda)$ 也遠小於波長變化量 $\Delta\lambda$ ，因此 Eq. (5.6) 中的第二、三項影響可忽略，而 Eq. (5.6) 也可化簡為

$$\delta d_c = \frac{\delta(\Delta\phi)\lambda_1\lambda_2}{4\pi\Delta\lambda} \quad (5.7)$$

此即意味著波長的不準確度在本方法中的影響可被忽略。相位的解析度 $\delta(\Delta\phi)=0.036^\circ$ ， $\lambda_1=632.6$ nm， $\lambda_2=637.96$ nm， $\Delta\lambda=5.36$ nm，代入 Eq. (5.7) 可推得長度的解析度 $\delta d_c \approx 3.8$ 。因此得到整體的長度解析度 $\delta d_T = (\delta d_i^2 + \delta d_c^2)^{1/2} \approx 4$ nm。此外若將可調波長雷射光源改用 New Focus, TLB-6320 的機台，其波長變化範圍可由 960 nm 到達 995 nm，將使得 δd_c 降低到 1.4 nm，甚至直接引入一道綠光雷射使波長變化量大幅增加，也能夠大幅提升外差式中央條紋定位法的解析能力，但需注意此時電光晶體調制器 EO 的半波電壓需隨波長做調整。另外，實際檢測塊規時，必須考慮塊規的熱膨脹、塊規表面平整度及空氣折射率修正等不確定性的影響[9-12]。

5.5 小結

本方法利用外差式中央條紋定位法，來進行塊規兩端的零光程差的位置定位，能夠以 4 nm 的長度解析度測量塊規長度，並且待測物的量測範圍只受限於移動平台的最大行程(本架構為 100 mm)，而不像傳統的超出片段法會受限於雷射的同調長度，此外解析度不易受到波長準確度及穩定度的影響。本研究證明了外差式中央條紋定位法在塊規量測上的可行性，並具有相當大的潛力應用在各式長距離定位系統上，或在高深寬比的微機電晶片等量測上。



參考文獻

1. B. G. Vaucher, R. Thalmann and H. Baechler, "European comparison of short gauge block measurement by interferometry," *Metrologia* **32**, 79-86 (1995).
2. N. Brown, T. B. Eom, E. Howick, O. Kruger, Y. Lan, S. L. Ling-Tan, H. Matsumoto, J. Pusaka, R. P. Singhal and Y. Xu, "Asia/Pacific metrology programme gauge block comparison," *Metrologia* **33**, 61-66 (1996).
3. Y. Bitou and K. Seta, "Gauge block measurement using a wavelength scanning interferometer," *Jpn. J. Appl. Phys.* **39**, 6084-6088 (2000).
4. J. Y. Lee, M. H Chiu, D. C. Su, "Central fringe identification using a heterodyne interferometric technique and a tunable laser-diode", *Opt. Commun.* **128**, 193-196 (1996).
5. N. A. Massie, R. D. Nelson and S. Holly, "High-performance real-time heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **18**, 1797-1803 (1979).
6. E. Gelmini, U. Minoni and F. Docchio, "Tunable, double-wavelength heterodyne detection interferometer for absolute-distance measurements," *Optics Lett.* **19**, 213-215 (1994).
7. Q. Wang, Y.N. Ning, A.W. Palmer and K.T.V. Grattan, "Central fringe identification in a white light interferometer using a multi-stage-squaring signal processing scheme," *Opt. Commun.* **117**, 241-244 (1995).
8. M. H. Chiu, J. Y. Lee and D. C. Su, "Complex refractive-index measurement based on Fresnel's equations and the uses of heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **38**, 4047-4052 (1999).
9. Jonghan Jin, Young-Jin Kim, Yunseok Kim and Seung-Woo Kim, "Absolute length calibration of gauge blocks using optical comb of a femtosecond pulse laser," *Opt. Express* **14**, 5968-5974 (2006).
10. E. Ikonen and K. Riski, "Gauge-block interferometer based on one stabilized laser and a white-light source," *Metrologia* **30**, 95-104 (1993).
11. A. Lewis, "Measurement of length, surface form and thermal expansion coefficient of length bars up to 1.5 m using multiplewavelength," *Meas. Sci. Technol.* **5**, 694-703 (1994).
12. K. P. Birch and M. J. Downs, "An updated Edlen equation for the refractive index of air," *Metrologia* **30**, 155-162 (1993).

第六章 以外差式中央條紋定位法測量透明平板厚度

6.1 前言

透明平板被廣泛的應用在各式光學元件上，為了保證其品質，必須準確的測量出透明平板的厚度，部份方法如低同調干涉術[1,2]與共焦顯微術[3,4]只能夠測量透明平板的光學厚度，雖然也有部份方法能夠測量透明平板的幾何厚度[5-10]，但準確度卻會隨著樣本厚度的增加而下降[5-8]，或是使用很難被準確測量的物鏡有效數值孔徑來推導透明平板的幾何厚度[9,10]，使得在樣本厚度大於 1 mm 時，很難得到奈米等級的準確度。在此我們提出兩種新方法來測量透明平板的幾何厚度。

第一種方法，是基於簡等人[5]所提出的一個雙波長架構，雙波長系統在量測厚樣本的同時，也會犧牲其厚度的解析度，為了改善這個缺點，我們改以外差式中央條紋定位法[11]來測量待測平板放入干涉儀前與放入後之間的光程差，再以斜入射式旋光外差干涉術來取得折射率，將折射率代入光程差後即可求出待測平板的厚度。然而此方法中旋光外差干涉術取得的折射率解析度不夠好，即使中央條紋定位的光程差很準確，所求出的待測平板厚度解析度也無法太好。

第二種方法，則是為了改善第一種方法中的折射率解析度問題，同樣應用了外差式中央條紋定位法，在一個以 PBS 分光的改良式 Twyman-Green 干涉儀中，高精度移動平台則被用來移動干涉儀其中一臂上的參考面鏡，長工作距離物鏡與待測透明平板則被放在另一臂上，利用物鏡將光束先後聚焦在待測透明平板的前表面與後表面，兩個表面分別造成的光程變化可由外差式中央條紋定位法進行測量，移除待測平板後所造成的光程變化也可用相同的方法測量，考慮透明平板色散的影響後，可精確的算出待測平板的幾何厚度。我們證明了此方法的可行性，此方法具有相當大的量測範圍，其範圍與物鏡的工作距離有關，此外在量測厚度在 1 mm 以上的透明平板時，也能夠保持奈米等級的高準確度。

6.2 原理

以下分別對兩個方法的原理進行說明。

6.2.1 第一種方法

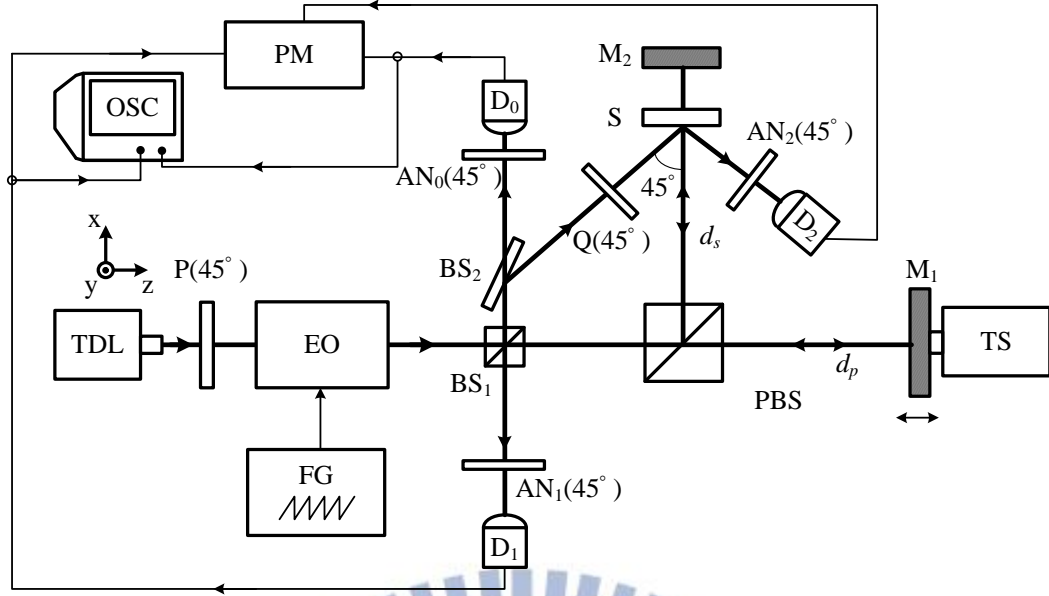


Fig. 6.1 實驗架構簡圖。TDL：可調波長雷射光源，P：偏極化片，EO：電光調制器，FG：波形產生器，BS：分光鏡，PBS：偏極分光鏡，Q：四分之一波片，S：待測透明平板，M：反射面鏡，TS：移動平台，AN：檢偏板，D：光偵測器，PM：相位計，OCS：示波器。

實驗裝置如 Fig. 6.1 所示，設+z 為光前進方向，+y 為垂直紙面朝上的方向，可調波長雷射 TDL 發出的雷射光受到偏振片 P 作用，成為與 x 軸夾角 45° 之線性偏振光，通過一個快軸在 x 軸方向，並以角頻率 ω 、振幅為電光晶體的半波電壓 V_{π} 之鋸齒波訊號驅動的電光晶體調制器 EO，而成為外差光源，此時 p-偏光和 s-偏光之間會有角頻差 ω ，外差光源穿過 BS₁ 進入一個改良式麥克森干涉儀，偏極分光器 PBS 將此入射光分成 p-偏光和 s-偏光，p-偏光穿過 PBS 再被面鏡 M₁ 反射並沿原路徑回去，在遇到 BS₁ 時反射進入 AN₁；而被 PBS 反射的 s-偏光垂直穿過待測片，由面鏡 M₂ 反射同樣地沿原路徑回去，也在遇到 BS₁ 時反射進入 AN₁，最後一同入射至 D₁，其電場的 Jones Matrices 形式分別為

$$\begin{aligned}
 E_s &= AN(45^\circ) \cdot 2(d_s - d) \cdot S \cdot R_{PBS} \cdot EO \cdot E_{in} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{i\frac{4\pi(d_s-d)}{\lambda}} \cdot e^{i\frac{4\pi nd}{\lambda}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\left\{\frac{4\pi[d_s+(n-1)d]}{\lambda} - \frac{\omega t}{2}\right\}} \quad , \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 E_p &= AN(45^\circ) \cdot 2d_p \cdot T_{PBS} \cdot EO \cdot E_{in} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{i\frac{4\pi d_p}{\lambda}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\frac{4\pi d_p}{\lambda} + \frac{\omega t}{2})} \quad , \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

其中 R_{PBS} 和 T_{PBS} 分別為 PBS 的反射及穿透矩陣， S 為待測片引入的相位， d 為待測片的厚度， d_p 、 d_s 分別為插入待測片以前兩臂的長度。因此在 D_1 上偵測到的干涉訊號為

$$I = |E_s + E_p|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t + \phi)] \quad (6.3)$$

其中

$$\phi = -\frac{4\pi d'}{\lambda} \quad (6.4)$$

而 d' 為此干涉儀兩臂的光程差

$$d' \equiv d_p - d_s - (n-1)d \quad (6.5)$$

另外，外差光源經由 BS_1 反射並穿過 BS_2 及檢偏板 AN_0 ，入射至光偵測器 D_0 成為此系統的參考訊號，其光強度可表示為

$$I_r = |E_r|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t)] \quad (6.6)$$

由(6.4)式可知，當入射光波長改變時，干涉訊號會產生相位變化量

$$\Delta\phi = \frac{-4\pi d'}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{-4\pi d'}{\lambda} \cong \frac{4\pi d' \Delta\lambda}{\lambda^2} \quad (6.7)$$

除了光程差 $d' = 0$ 時，干涉訊號的相位必定隨波長改變。

實驗時，示波器 OSC 的參考訊號和測試訊號分別來自 D_0 和 D_1 ，利用移動

平台 TS 推動面鏡 M_1 並改變波長，觀察這兩個正弦訊號之間的相位差，並記錄相位變化量為零時 M_1 的位置。接著，拿開待測片(可在 Eq. (6.5) 中設 $d=0$)，移動 M_1 並改變波長，找出第二個相位變化量為零的位置，此時 M_1 的移動距離即為待測片的光程差 OPD

$$OPD = 2(n-1)d \quad (6.8)$$

另一方面，外差光源被分光器 BS_1 、 BS_2 反射後，穿過快軸與 x 軸夾 45° 的四分之一波片 Q，穿透光的電場為

$$\begin{aligned} E_Q &= Q(45^\circ) \cdot R_{BS} \cdot EO \cdot E_{in} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{i\phi_{BS}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\omega t/2 - \pi/4 - \phi_{BS}/2) \\ \cos(\omega t/2 - \pi/4 - \phi_{BS}/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.9)$$

其中 ϕ_{BS} 為 BS_2 所引入的相位。接著以 45° 入射角入射待測片 S，再被待測片 S 反射，穿透檢偏板 AN_2 最後進入光偵測器 D_2 成為測試訊號。入射 D_1 的光電場與強度可以表示為

$$\begin{aligned} E_t &= AN(45^\circ) \cdot S \cdot E_Q \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t/2 - \pi/4 - \phi_{BS}/2) \\ \cos(\omega t/2 - \pi/4 - \phi_{BS}/2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

與

$$I_t = |E_t|^2 = I_0 [1 + \cos(\omega t + \phi)], \quad (6.11)$$

其中

$$I_0 = \frac{1}{4}(r_p^2 + r_s^2), \quad (6.12)$$

且

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left(\frac{r_p + r_s}{r_p - r_s} \right) - \phi_{BS}, \quad (6.13)$$

r_p 與 r_s 分別為 Fresnel's equations 中 p-偏光與 s-偏光的反射係數

$$r_p = \frac{n^2 \cos 45^\circ - \sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}{n^2 \cos 45^\circ + \sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}, \quad (6.14)$$

$$r_s = \frac{\cos 45^\circ - \sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}{\cos 45^\circ + \sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}. \quad (6.15)$$

為了由 Eq. (6.13) 求出折射率 n ，必須先設法量出 ϕ_{BS} 。若在光線穿過四分之一波片後，不經過樣本反射而是直接穿過 AN_2 ，此時入射 D_2 的光電場與強度分別為

$$E' = AN(45^\circ) \cdot E_Q, \quad (6.16)$$

與

$$I' = |E'|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega t - \phi_{BS} - \pi)]. \quad (6.17)$$

由 Eqs. (6.6) 與 (6.17) 可得 I_r 與 I' 之間有相位差 $-\phi_{BS} - \pi$ ，而由 Eqs. (6.6) 與 (6.11) 可得 I_r 及 I_t 之間有相位差 ϕ ，因此便可利用 Eq. (6.12) 求出折射率 n 的值。最後再將 n 代入 Eq. (6.8)，即可推得待測片的厚度 d

$$d = \frac{OPD}{2(n-1)}. \quad (6.18)$$

6.2.2 第二種方法

實驗裝置如 Fig. 6.2 所示，設 $+z$ 為光前進方向， $+y$ 為垂直紙面朝上的方向，可調波長雷射 TDL 發出的雷射光為與 x 軸夾角 45° 之線性偏振光，通過一個快軸在 y 軸方向，並以角頻率 ω 、振幅為電光晶體的半波電壓之鋸齒波訊號驅動的電光晶體調制器 EO 而成為外差光源，此時 p-偏光和 s-偏光之間會有角頻差 ω ，此外差光束穿過 BS 進入一個改良式麥克森干涉儀，偏極分光器 PBS 將此入射光分成 p 偏光和 s 偏光，p 偏光穿過 PBS 再被面鏡 M_1 反射並沿原路徑回去，在遇到 BS 時反射進入 AN_1 ；而被 PBS 反射的 s 偏光經過長工作距離物鏡 MO 後，聚焦在其焦點上，系統中 MO 的作用只是為了分辨不同反射面的光訊號，移動 MO 使光束先後聚焦在透明平板的前/後表面或面鏡 M_2 上，使反射光沿原路徑回去，並在遇到 BS 時反射進入 AN_1 ，最後與 p 偏光一同干涉在光偵測器 PD_1 上，參考

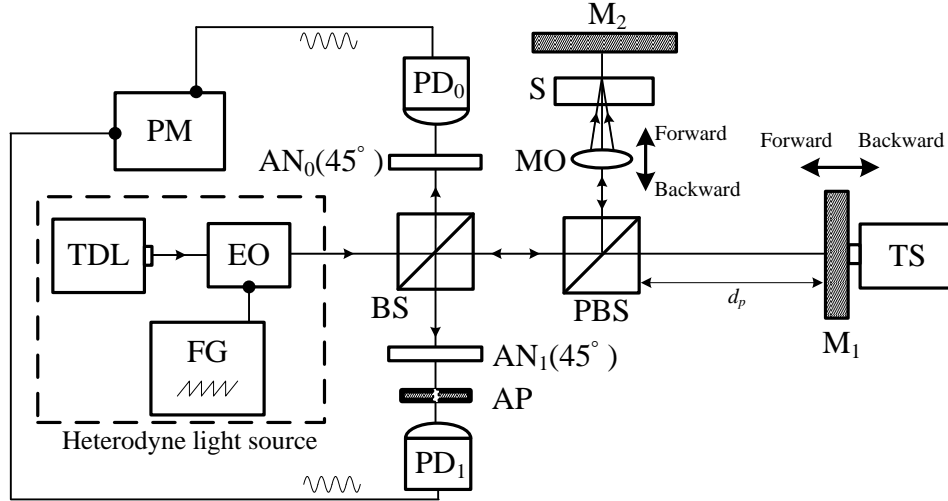


Fig. 6.2 實驗架構簡圖。TDL：可調波長雷射光源，EO：電光調制器，FG：波形產生器，BS：分光鏡，PBS：偏極分光鏡，MO：物鏡，S：待測透明平板，M：反射面鏡，TS：精密移動平台，AN：檢偏板，PD：光偵測器，AP：光欄，PM：相位計。

Eqs. (6.1)與(6.2)式的計算過程，PD₁所接收到干涉光強度表示式為

$$I = \frac{1}{2}[1 + \cos(\omega t + \phi)] , \quad (6.19)$$

其中，弦波信號的相位

$$\phi = \phi_0(\lambda) - \frac{4\pi[d_p - d_s(\lambda)]}{\lambda} , \quad (6.20)$$

λ 為波長， $\phi_0(\lambda)$ 為 BS 與 PBS 等元件引入的初始相位[12,13] (與波長有關，通常是全反射[14]、金屬介面反射或色散所引入)， $2d_p$ 、 $2d_s(\lambda)$ 分別代表兩臂中 p-與 s-偏光所走的光程長。(由於實驗中 s-偏光穿過透明平板，平板的折射率與波長有關，因此 $d_s(\lambda)$ 也與波長有關。)

另外，一開始的外差光源經由 BS 反射後直接進入 AN₀ 而干涉在光偵測器 PD₀ 上，PD₀ 所接收到參考光強度為

$$I_r = \frac{1}{2}[1 + \cos(\omega t)] . \quad (6.21)$$

若將 Eq. (6.21) 的參考訊號 I_r 與 Eq. (6.19) 的測試訊號 I 送入相位計 PM，即可測得相位項 ϕ 。

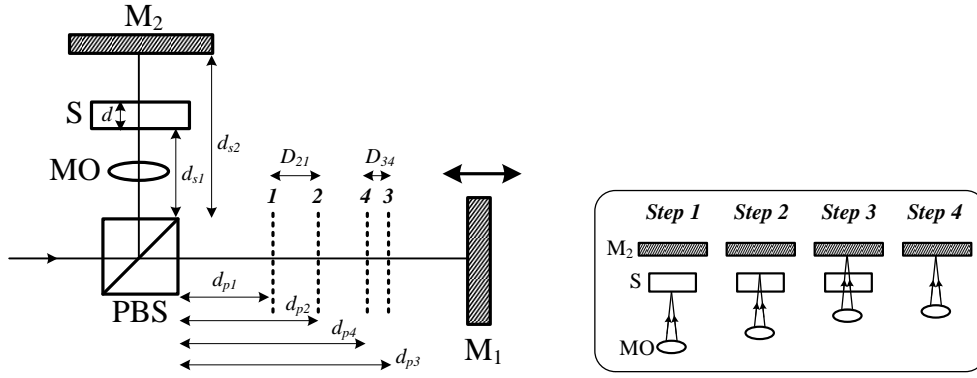


Fig. 6.3 四組定位點在空間上的關係。

若入射光波長由 λ_1 改變為 λ_2 時，由 Eq. (6.20) 可推得相位變化量 $\Delta\phi$

$$\Delta\phi \equiv \phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_1) = -\frac{4\pi[d_p - d_s(\lambda_2)]}{\lambda_2} + \frac{4\pi[d_p - d_s(\lambda_1)]}{\lambda_1} + \phi_0(\lambda_2) - \phi_0(\lambda_1), \quad (6.22)$$

而中央條紋法告訴我們移動參考面鏡 M_1 找出一個 d_p 的位置，使得波長變化後相位保持不變，即 $\Delta\phi = 0$ ，此時由 Eq. (6.22) 式可得到

$$d_p = \frac{\lambda_1 d_s(\lambda_2) - \lambda_2 d_s(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \xi_{21}, \quad (6.23)$$

其中

$$\xi_{21} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 [\phi_0(\lambda_2) - \phi_0(\lambda_1)]}{4\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (6.24)$$

接著我們要利用中央條紋法，定位出波長變化後相位保持不變如 Fig. 6.3 中所示的四個 d_p 的位置：

Step 1

移動 MO 使其對焦到 S 的前表面(理論分析時可忽略 MO 引入的光程，此外 MO 對焦不準確的容忍量可達 $18 \mu\text{m}$ ，後面討論中會說明)，此時 s 偏光所走的光程 $d_s(\lambda) = d_{s1}$ ，利用先前研究所提出的中央條紋法定位步驟[15]，可快速定位出第一個波長變化後相位保持不變的 d_p 的位置 d_{p1} ，根據 Eq. (6.23) 可知此時

$$d_{p1} = d_{s1} + \xi_{21}. \quad (6.25)$$

Step 2

移動 MO 使其對焦到 S 的後表面，此時 s 偏光所走的光程 $d_s(\lambda) = d_{s1} + n(\lambda)d$ ，而假設入射光波長在 λ_0 附近時，透明平板的折射率與波長為線性關係，即 $n(\lambda) = n(\lambda_0) + n'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)$ ，其中 $n'(\lambda_0)$ 代表斜率，代入 Eq. (6.23) 可定位出第二個波長變化後相位保持不變的 d_p 的位置

$$d_{p2} = d_{s1} + (n(\lambda_0) - n'(\lambda_0)\lambda_0)d + \xi_{21} \quad (6.26)$$

由 Eqs. (6.25) 與 (6.26) 可得

$$d = \frac{D_{21}}{n(\lambda_0) - n'(\lambda_0)\lambda_0} \quad (6.27)$$

其中 $D_{21} = d_{p2} - d_{p1}$ 。

Step 3

移動 MO 使 s 偏光穿過 S，並對焦到 M_2 ，此時 s 偏光所走的光程 $d_s(\lambda) = d_{s2} + (n(\lambda) - 1)d$ ，代入 Eq. (6.23) 可定位出第三個波長變化後相位保持不變的 d_p 的位置

$$d_{p3} = d_{s2} + (n(\lambda_0) - n'(\lambda_0)\lambda_0 - 1)d + \xi_{21} \quad (6.28)$$

Step 4

移除 S 後，移動 MO 使其再次對焦到 M_2 ，此時 s 偏光所走的光程 $d_s(\lambda) = d_{s2}$ ，代入 Eq. (6.23) 可定位出第四個波長變化後相位保持不變的 d_p 的位置

$$d_{p4} = d_{s2} + \xi_{21} \quad (6.29)$$

由 Eqs. (6.28) 與 (6.29) 可得

$$d = \frac{D_{34}}{n(\lambda_0) - n'(\lambda_0)\lambda_0 - 1} \quad (6.30)$$

其中 $D_{34} = d_{p3} - d_{p4}$ 。最後由 Eqs. (6.27) 與 (6.30) 可推得

$$\begin{cases} d = D_{21} - D_{34} \\ n(\lambda_0) - n'(\lambda_0)\lambda_0 = \frac{D_{21}}{(D_{21} - D_{34})} \end{cases}, \quad (6.31)$$

因此只要根據 TS 在 *Step 1, 2* 間的位移量 D_{21} 與 *Step 3, 4* 間的位移量 D_{34} ，即可求得 S 的厚度。

6.3 實驗

實驗所使用的儀器及其特性如下：可調波長雷射(New Focus, Model 6304)的波長可變範圍在 632.6~637.96 nm 之間，其波長解析度為 0.02 nm；電光晶體調制器(New Focus, Model 4002)載入來自訊號產生器的頻率為 500Hz；將光學尺(Sony, BL57-NEHC)的所輸出的類比信號強度分割成 400 等份，可得到 1 nm 的解析度，結合一具改良式電控移動平台(Chuo Percision, ALS-510-H1P)，而得到最小移動量為 1 nm，最大行程為 100 mm 的精密電控移動平台；物鏡(Mitutoyo, Plan Apo 10X)的工作距離與等效焦距分別為 34 mm 與 20 mm；相位計則是使用 DAQ 卡(NI, PCI-6110)擷取兩個光偵測器信號，經過 IEEE1241 三參數弦波擬合[16](即最小方差弦波擬合)而得到相位 ϕ ，而由於使用的 DAQ 卡取樣頻率為 5MHz，外差光的頻率為 500 Hz，因此相位的理論解析度為 0.036° [15]。Fig. 6.4 則為實際相位計對固定實驗條件下的多次取樣測試，可知相位誤差在 $\pm 0.045^\circ$ 以內。

在第一種方法中，我們測量一個 BK7 透明平板，游標尺測得其厚度為 4.60 mm，由於當時所使用的移動平台準確度較差(Model 9067, New Focus)，因此移動平台的位移量，是利用 4.5 小節中所提到的外差干涉儀架構來測量。實驗測得透明平板所引入的光程差 OPD 為 5.059638 mm， $\phi_{BS} = -4.94^\circ$ ， $\phi = -49.30^\circ$ ，由 Eq. (6.13)可求出折射率 $n = 1.5512$ ，再利用 Eq. (6.18)即可算出透明平板厚度 $d = 4.5897$ mm。

在第二種方法中，我們測量一個 BK7 透明平板(Newport, 10BW40-30)，游標尺測得其厚度為 6.18 mm，經過 *Step 1~4* 的量測，結果得到 $D_{21} = 9.490286$ mm， $D_{34} = 3.314401$ mm，由 Eq. (6.31)可推得此透明平板的厚度 $d = 6.175885$ mm。

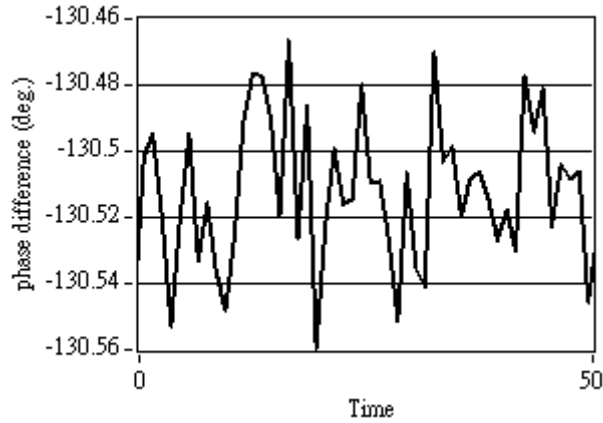


Fig. 6.4 相位計的重複取樣測試。

6.4 討論

第一種方法中，有三項明顯缺點：(a)在量測折射率的步驟中，入射角及檢偏板的快軸角度對參考訊號和測試訊號間的相位差有非常大的影響，必須很仔細的調整這些角度，以免造成誤差。(b)由於我們實驗所使用的相位計解析度為 0.036° ，因此由 Eq. (6.7)可推得定位的準確度約為 4 nm，使得光程差 OPD 可以準到只有數個奈米的誤差，但由於折射率 n 的有效位數只到小數點後第四位，將使得厚度的準確度只有次微米等級，喪失了外差式中央條紋法的高解析度優點。(c)此外，該方法未考慮透明平板色散的影響，也將使得量測厚度存在一定誤差。

第二種方法，則解決了這三項缺點，並考慮的更加齊全。以本方法找出 $\Delta\phi=0$ 的位置時，需注意可能會有誤判的情形發生，在 $\Delta\phi=0$ 的位置時，波長由 λ_1 掃描到 λ_2 的過程中受到初始相位 $\phi_0(\lambda)$ 的影響，相位項 $\phi(\lambda)$ 正常來說會如 Fig. 6.5(a) 所示， $\phi(\lambda_1)$ 、 $\phi(\lambda_2)$ 相位相同，中間波長部分的相位則可能較高也可能較低，Fig. 6.5(b)則出現了相位纏繞的狀況，雖然在波長 λ_1 、與 λ_2 處，相位計上觀察到的相位相同，但事實上兩者的相位差了 2π ，不能說是 $\Delta\phi=0$ 的位置，實驗時需利用波長掃描的方式來確保不會發生誤判。

本方法的整體解析度，須考慮移動平台的距離解析度 δd_t ($\delta d_t = 1 \text{ nm}$)，及外差式中央條紋法的厚度解析度 δd_c [15]

$$\delta d_c = \frac{\delta(\Delta\phi)\lambda_1\lambda_2}{4\pi\Delta\lambda} \quad (6.32)$$

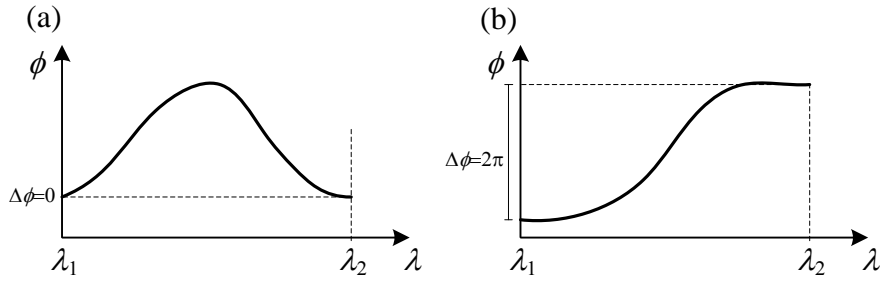


Fig. 6.5 當波長變化時，相位的變化情形 (a)正確的定位 (b)錯誤的定位。

將相位解析度 $\delta(\Delta\phi) = 0.045^\circ$, $\lambda_1 = 632.6 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 637.96 \text{ nm}$, 代入 Eq. (6.32) 可推得厚度的解析度 $\delta d_c \approx 4.7 \text{ nm}$, 並由 Eq. (6.32) 可得知此解析度不隨樣本的厚度變化, 且雷射波長的穩定度對 δd_c 的影響極小[15]。

關於加入 MO 後對定位的影響部分, 若入射透鏡的光為平面波, 加入 MO 後各光線聚焦在焦點處的相位也皆會相同, 因此理論推導時, 只要將各步驟 s 偏光所走的光程皆加上 $(n_L - 1)d_L$, n_L 為透鏡的折射率, d_L 為 MO 中心的厚度, 重覆 Eqs. (6.19)~(6.31) 的推導過程, 會發現對 Eq. (6.31) 的結果沒有影響。移動物鏡進行對焦時, 如 Fig. 6.6 所示如果 MO 沒有非常準確的對焦在待測面上, 使得焦點與待測面之間有距離差 δz , 利用 Ref.[11,17] 的原理進行推導可得到干涉光強度

$$I = |E_s + E_p|^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\omega t + \phi + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{f + 2\delta z} - \frac{1}{f} \right) \right] \right\} \quad (6.33)$$

其中 ϕ 的形式與 Eq. (6.20) 相同, ρ 為圓柱座標的徑向距離, f 為物鏡的等效焦距, $k = 2\pi/\lambda$ 。

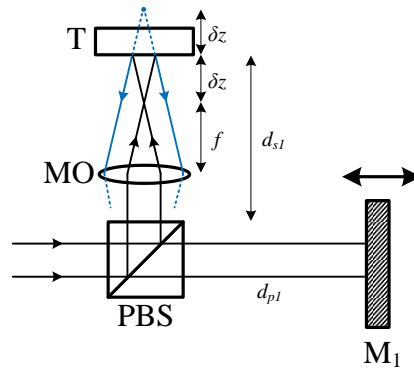


Fig. 6.6 對焦不準確示意圖。

此外由 Eq. (16.33)可知 I 在不同徑向距離 ρ 時，強度也不相同，若干涉光束的半徑為 ρ_0 ，且此光束的 beam size 完全在 PD₁ 的接收範圍內時，必須對 I 作面積分，PD₁ 所偵測到的光強度將為

$$I_D = \frac{1}{\pi\rho_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} I \rho d\rho d\theta, \quad (6.34)$$

$$= \frac{1}{2} [1 + V \cos(\omega t + \phi')]$$

$$V = \frac{\sin(2k\delta d_f)}{2k\delta d_f}, \quad (6.35)$$

$$\phi'(\lambda) = \phi_0(\lambda) - \frac{4\pi[d_p - d_s(\lambda) - \delta d_f]}{\lambda}. \quad (6.36)$$

$$\delta d_f = \frac{\rho_0^2}{8} \left(\frac{1}{f + 2\delta z} - \frac{1}{f} \right), \quad (6.37)$$

根據 Eq. (6.36)，可知對焦不準確將會使 s 偏光的光程多出一個誤差項 δd_f 。將此測試信號 I_D 與參考信號 I_r 送入相位計 PM，即可測得相位項 ϕ' ，而對比度 V 可以用來判斷對焦的距離誤差 δz 有多大，當我們所使用的波長波段為 632.6 ~ 637.96 nm， $f = 20$ mm， $\rho_0 = 1 \pm 0.05$ mm，移動 MO(注意:不可移動待測面，避免改變 s 偏光的光程)找到 V 最大值($V_{max}=1$)的位置，若 V 最大值的不確定度小於 1%，由 Eq. (35)可推算出對焦的距離誤差 δz 最大可為 18 μ m，接著將光欄 AP 半徑調小，使 $\rho_0 = 0.3 \pm 0.05$ mm，才來進行 d_p 的定位動作，由 Eq. (6.37)可推算出此時誤差項 δd_f 低於 1.4 nm，因此本系統中對焦的準確度不必嚴苛的要求，只要距離誤差 δz 小於 18 μ m，對誤差項 δd_f 的影響也將低於 1.4 nm，若想得到更好的解析度可以改用波長可變範圍更大的雷射光源，以降低 δd_c 的影響，但需注意此時電光晶體調制器 EO 的半波電壓需隨波長做調整；或是在物鏡對焦時，一開始使用更大的 ρ_0 ，找出對比度 V 最大時的物鏡位置，接著改用更小 ρ_0 來進行 d_p 的定位，如此可以更進一步降低 δd_f 的影響。然而若同時反射面有傾斜角 $\theta = \tan^{-1}(1/1000)$ ，透鏡有橫向偏離光軸量 $\Delta x = 0.1$ mm (可利用 CCD 觀察)，且有對焦的距離誤差 $\delta z = 18$ μ m 時(如 Fig. 6.7)，經過與 Eq. (6.34)類似的運算後，可得知對光程造成的誤差量 δd_x 為 4 nm。

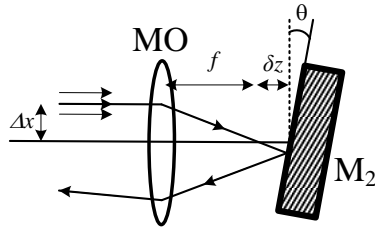


Fig. 6.7 同時考慮面鏡傾斜、透鏡離軸與對焦不準的示意圖。

當光穿過並會聚在透明平板後方時，需考慮一般平板像差與偏極像差的影響。根據 ref. [19] 的推導可得知，當光束半徑 $\rho_0 = 0.35 \text{ mm}$ 時，一般平板像差 δs 可達到 360 nm，但我們詳細的對 s-偏光光程進行推算發現，當面鏡固定於近軸焦點 (Δ_0 的位置) 處，平板像差對光程造成的誤差事實上只有 0.02 nm，若同時存在距離誤差 δz 時，可發現對光程造成的誤差量 δd_l 為 3 nm；至於平板偏極像差方面，由於我們使用的光束半徑很小，使得本實驗中偏極像差的影響可忽略。因此考慮這幾種誤差後，最後得到整體的厚度解析度 $\delta d_T = (\delta d_t^2 + \delta d_c^2 + \delta d_f^2 + \delta d_x^2 + \delta d_l^2)^{1/2}$ 約為 7 nm。

由於 Step 3 需要使光線穿過透明平板並對焦在面鏡 M_2 上，因此系統的量測最大厚度受到物鏡工作距離的限制，而最小量測厚度則不該低於 δz ，否則不易區分樣本前後兩面的反射光。本架構中物鏡的工作距離為 34 mm， $\delta z = 18 \mu\text{m}$ ，若想測量厚度更薄的透明平板，可使用半徑 ρ_0 較大的光束進行物鏡對焦，進而得到更低的 δz 。精密移動平台的移動距離可由其內部的光學尺讀出，然而光學尺的準確度在大行程時誤差較高(位移 60 mm 誤差可達 170 nm)，此時改用雷射干涉儀 (Ex: Agilent 5529A) 直接測量面鏡的位移量可避免此項誤差。另外，實際檢測透明平板時，必須考慮熱膨脹、表面平整度及空氣折射率修正等不確定性的影響 [18-21]。

6.5 小結

我們提出兩個新方法來測量透明平板幾何厚度，第一種方法，是以外差式中央條紋定位法來測量待測平板放入干涉儀前與放入後之間的光程差，再以斜入射式旋光外差干涉術來取得折射率，將折射率代入光程差後即可求出待測平板的厚

度。然而此方法中旋光外差干涉術取得的折射率解析度不夠好，即使中央條紋定位的光程差很準確，所求出的待測平板厚度解析度也無法太好。

第二種方法，改善第一種方法中的缺點，該方法應用了外差式中央條紋定位法。在一個以偏極分光鏡分光的改良式 Twyman-Green 干涉儀中，高精度移動平台則被用來移動干涉儀其中一臂上的參考面鏡，長工作距離物鏡與待測透明平板則被放在另一臂上，利用物鏡將光束先後聚焦在待測透明平板的前表面與後表面，兩個表面分別造成的光程變化可由外差式中央條紋定位法進行測量，移除待測平板後所造成的光程變化也可用相同的方法測量，考慮透明平板色散的影響後，可精確的算出待測平板的幾何厚度。我們證明了此方法的可行性，此方法具有相當大的量測範圍，其範圍與物鏡的工作距離有關，此外在量測厚度在 1 mm 以上的透明平板時，也能夠保持奈米等級的高準確度。本實驗中量測範圍為 18 μm ~ 34.0 mm，準確度為 7 nm。



參考文獻

1. T. Tsuruta and Y. Ichihara, "Accurate measurement of lens thickness by using white-light fringes," *Japan J. Appl. Phys.* **14**, 369–372 (1975).
2. B. L. Danielson and C. Y. Boisrobert, "Absolute optical ranging using low coherence interferometry," *Appl. Opt.* **30**, 2976–2979 (1991).
3. C. J. R. Sheppard, T. J. Connolly, J. Lee and C. J. Cogswell, "Confocal imaging of a stratified medium," *Appl. Opt.* **33**, 631–640 (1994).
4. T. Fukano and I. Yamaguchi, "Measurement of layer thickness by a laser confocal microscope," *Proc. of the 5th Meeting on Lightwave Sensing Technology* (Japanese Society of Lightwave Sensing Technology, Japan Society of Applied Physics, Tokyo), 91–98 (1995).
5. Z. C. Jian, C. C. Hsu and D. C. Su, "Improved technique for measuring refractive index and thickness of a transparent plate," *Opt. Comm.* **226**, 135-140 (2003).
6. J. C. Brasunas and G. M. Cushman, "Interferometric but nonspectroscopic technique for measuring the thickness of a transparent plate," *Opt. Eng.* **34**, 2126-2130 (1995).
7. C. H. Liu, S. C. Yeh and H. L. Huang, "Thickness measurement system for transparent plates using dual digital versatile disc (DVD) pickups," *Appl. Opt.* **49**, 637-643 (2010).
8. J. Na, H. Y. Choi, E. S. Choi, C. Lee, B. H. Lee, "Self-referenced spectral interferometry for simultaneous measurements of thickness and refractive index," *Appl. Opt.* **48**, 2461-2467 (2009).
9. T. Fukano and I. Yamaguchi, "Separation of measurement of the refractive index and the geometrical thickness by use of a wavelength-scanning interferometer with a confocal microscope," *Appl. Opt.* **38**, 4065-4073 (1999).
10. M. Ohmi, H. Nishi, Y. Konishi, Y. Yamada and M Haruna, "High-speed simultaneous measurement of refractive index and thickness of transparent plates by low-coherence interferometry and confocal optics," *Meas. Sci. Technol.* **15**, 1531-1535 (2004).
11. J. Y. Lee, M. H. Chiu and D. C. Su, "Central fringe identification using a heterodyne interferometric technique and a tunable laser-diode," *Opt. Commun.* **128**, 193-196 (1996).

12. J. H. Shia, Z. P. Wang and C. Y. Guana, "Theoretical analysis of non-polarizing beam splitters with appropriate amplitude and phase," *Opt. Laser Technol.* **41**, 351-355 (2009).
13. J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman, "Angular dependence of polarizing beam-splitter cubes," *Appl. Opt.* **33**, 1916-1929 (1994).
14. E. Hecht, *Optics*, 4th edn., Addison Wesley, p. 118 (2002).
15. W. T. Wu, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, W. Y. Chang and D. C. Su, "Method for gauge block measurement with the heterodyne central fringe identification technique," *Appl. Opt.* **49**, 3182-3186 (2010).
16. "IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters," *IEEE Std.* **1241-2000**, 25-29 (2001).
17. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York, pp. 49-60 (1991).
18. J. Jonghan, Y. J. Kim, Y. Kim and S. W. Kim, "Absolute length calibration of gauge blocks using optical comb of a femtosecond pulse laser," *Opt. Express* **14**, 5968-5974 (2006).
19. E. Ikonen and K. Riski, "Gauge-block interferometer based on one stabilized laser and a white-light source," *Metrologia* **30**, 95-104 (1993).
20. A. Lewis, "Measurement of length, surface form and thermal expansion coefficient of length bars up to 1.5 m using multiplewavelength," *Meas. Sci. Technol.* **5**, 694-703 (1994).
21. K. P. Birch and M. J. Downs, "An updated Edlen equation for the refractive index of air," *Metrologia* **30**, 155-162 (1993).

第七章 以外差式中央條紋定位法進行全場階高量測

7.1 前言

對於全場階高分佈的量測方法，常見的有雙波長干涉術[1-3]和白光干涉術[4,5]，雙波長干涉儀，其優點在於控制波長的變化量即可調變距離解析度，然而最大量測範圍卻受限於可調波長光源的最小波長可變量，且受到相位解析度並非無限小的影響，在量測大階高樣本時會使準確度相對變差；白光干涉儀，優點則為量測範圍只受限於移動平台的最大行程，能夠量測極大階高的樣本，並保持相當高的準確度，但其準確度卻受限於白光光源的頻寬，而很難得到奈米等級的解析度，此外在定位時也不易判斷出參考面鏡距離兩臂等長處還有多遠。

1996 年 Lee 等人提出外差式中央條紋定位法[6]，該方法結合了外差干涉術和可調波長雷射來辨別中央干涉條紋，可以很方便的辨識出到達干涉儀中兩臂等長處所需的距離與方向，且具有極高的準確度，並同時具有雙波長干涉術及白光干涉術的優點。而在我們先前的研究中[7]，就利用了外差式中央條紋定位法來測量出塊規的厚度，對於量測大階高樣本也能夠保持奈米等級的解析度，此外也得到波長的不準度對此方法影響極小的結論，然而該方法僅限於單一探測點的量測，若想要觀察整個面的高度分布，則必須另外設計量測方法。

在此我們提出一個能夠自動化測量二維大階高分佈的新方法，本方法以一部 CCD 相機結合外差式中央條紋法，首先將外差光源的光束平行擴束，進入由 PBS 分光的 Twyman-Green 干涉儀，p 與 s 偏光進行干涉成像於 CCD 上，CCD 的拍照時間與外差信號同步，將這些照片以最小方差擬合法解出各像素的相位分佈。當干涉儀兩臂等長時，改變波長將不會使其相位改變，接著以精密移動平台改變兩臂距離，重複變波長並解相位的步驟，記錄變波長後相位不變的畫素所對應的移動平台讀數，最後即可得到物體的二維階高分佈。本方法具有極大的量測範圍，並擁有相當高的距離準確度。

7.2 原理

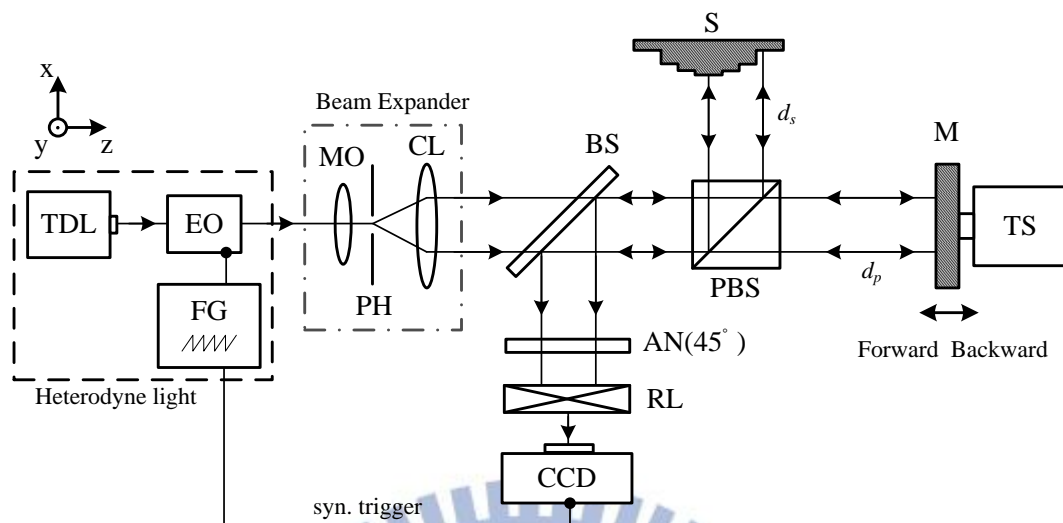


Fig. 7.1 中央條紋定位實驗架構。TDL：可調波長雷射光源，EO：電光調制器，FG：信號產生器，MO：顯微物鏡，PH：針孔，CL：準直透鏡，BS：分光器，PBS：偏極分光器，S：樣本，M：反射面鏡，TS：精密移動平台，AN：檢偏板，RL：中繼透鏡。

實驗架構如 Fig. 7.1 所示，設定 z 軸為光前進方向， y 為垂直紙面朝上的方向，可調波長雷射 TDL 發出的雷射光為與 x 軸夾角 45° 之線性偏振光，通過一個快軸在 y 軸方向，並以頻率 f 、振幅為電光晶體的半波電壓之鋸齒波訊號驅動的電光晶體調制器 EO 而成為外差光源，此時 p-偏光和 s-偏光之間會有頻差 f ，我們稱此頻差為外差頻率。此外差光束經由電光晶體 EO 調變後進入物鏡 MO，再經空間濾波器 PH 與一準直透鏡 CL，可得擴大且低雜訊的平行光束，接著穿過分光鏡 BS 進入由偏極分光鏡 PBS 分光的 Twyman-Green 干涉儀，在干涉儀中，s-偏光與 p-偏光分別被樣本 S 與面鏡 M 反射後沿原來的路徑返回，並在遇到 BS 時反射進入一個穿透軸與 x 軸成 45° 的檢偏板 AN 最後將干涉影像投射在 CCD 上。

利用 Jones calculus 推導，可得進入 CCD 前 s-偏光與 p-偏光電場分別為

$$\begin{aligned}
 E_s(x, y) &= AN(45^\circ) \cdot S \cdot R_{PBS} \cdot EO \cdot E_{in} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{i(2\pi f_0 t + \phi_s(x, y))} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\pi f t} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi f t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(2\pi f_0 t + \phi_s(x, y) - \pi f t)} \quad , \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}
 E_p &= AN(45^\circ) \cdot M \cdot T_{PBS} \cdot EO(\omega t) \cdot E_{in} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{i(2\pi f_0 t + \phi_p)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\pi f t} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi f t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(2\pi f_0 t + \phi_p + \pi f t)} \quad , \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

其中 E_{in} 是入射 EO 前的電場形式， R_{PBS} 與 T_{PBS} 為偏極分光鏡 PBS 針對反射光與穿透光轉換矩陣， f_0 為光源頻率， ϕ_s 與 ϕ_p 分別對應 s-偏光與 p-偏光在 Twyman-Green 干涉儀中走的光程 $2d_s$ 和 $2d_p$ ，即 $\phi_s = -\frac{2\pi}{\lambda}(2d_s)$ ， $\phi_p = -\frac{2\pi}{\lambda}(2d_p)$ ，因此，CCD 上接收到的干涉信號強度為

$$I = |E_s + E_p|^2 = \frac{1}{2} \{1 + \cos[2\pi f t + \phi(\lambda)]\} \quad (7.3)$$

其中相位項 $\phi(\lambda) = \phi_p - \phi_s(x, y) = -\frac{4\pi d(x, y)}{\lambda}$ ， $d(x, y) \equiv d_p - d_s(x, y)$ 。

由於 CCD 的拍照是由訊號產生器 FG 同步觸發的，因此每次拍第一張照片的起始時間都相同，設拍 N 張照片，由此 N 張照片的光強度分佈代入 IEEE1241 的三參數弦波擬合法(即最小方差擬合法)即可解得相位 ϕ 。

由 Eq. (7.3) 可知，若改變雷射波長可得干涉信號的相位變化量為

$$\Delta\phi = \phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_1) = \frac{4\pi d(x, y)\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \quad , \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \quad (7.4)$$

因此除了 $d(x, y) = 0$ 兩臂等長的位置以外，改變波長將使干涉信號的相位跟著改變；為了避免相位改變量剛好為 2π 而誤以為該處 $d(x, y) = 0$ ，必須適量的多次改變波長，以確定該點是否真的相位不變。接著推進精密移動平台 TS、重覆變波長的動作、找出相位不變的座標、將移動平台的位置記錄在該座標上，重覆進行上述步驟，即可得到物體的二維階高分佈圖。

7.3 實驗

本實驗使用的可調波長雷射(New Focus, Model 6304)的波長可變範圍在 632.6~638 nm 之間，波長最小變化量為 0.02 nm；將光學尺(Sony, BL57-NEHC)的所輸出的類比信號強度分割成 400 等份，可得到 1 nm 的解析度，結合一具改良式電控移動平台(Chuo Precision, ALS-510-H1P)，而得到最小移動量為 1 nm，最大行程為 100 mm 的精密電控移動平台；CCD 畫素為 1032*778、256 灰階、取樣頻率 10 Hz，每次拍攝 30 張影像；電光晶體調制器(New Focus, Model 4002)載入來自訊號產生器的頻率為 1 Hz；經過 IEEE1241 弦波擬合後的相位準確度 σ_ϕ 約為 30 度，在討論中有進一步的說明。

樣本為工研院量測中心所製作的多階高樣本，如 Fig. 7.2 所示。Fig. 7.3 為樣本表面的影像、s-與 p-偏光干涉後由 CCD 所拍攝的影像與經過 IEEE1241 弦波擬合後的相位分布。實驗時首先以原理中的方法對樣本的每個階高作小區域的量測，之所以先做小區域量測是因為在縱向步進量測時，階高樣本中只有少數幾步會被判定為兩臂等長處(即中央條紋出現的位置)，因此先初步定位出每個階高平面所對應的 TS 讀數，接著在做全畫素的量測時即可只對這些座標附近作步進量測，可減少不必要的量測及電腦解相位所耗費的運算時間。

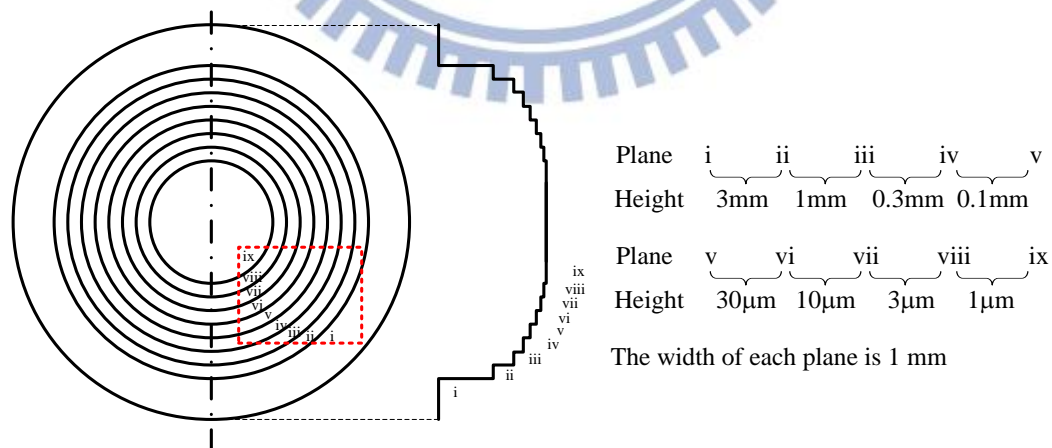


Fig. 7.2 樣本示意圖(虛線區域表示量測範圍)。

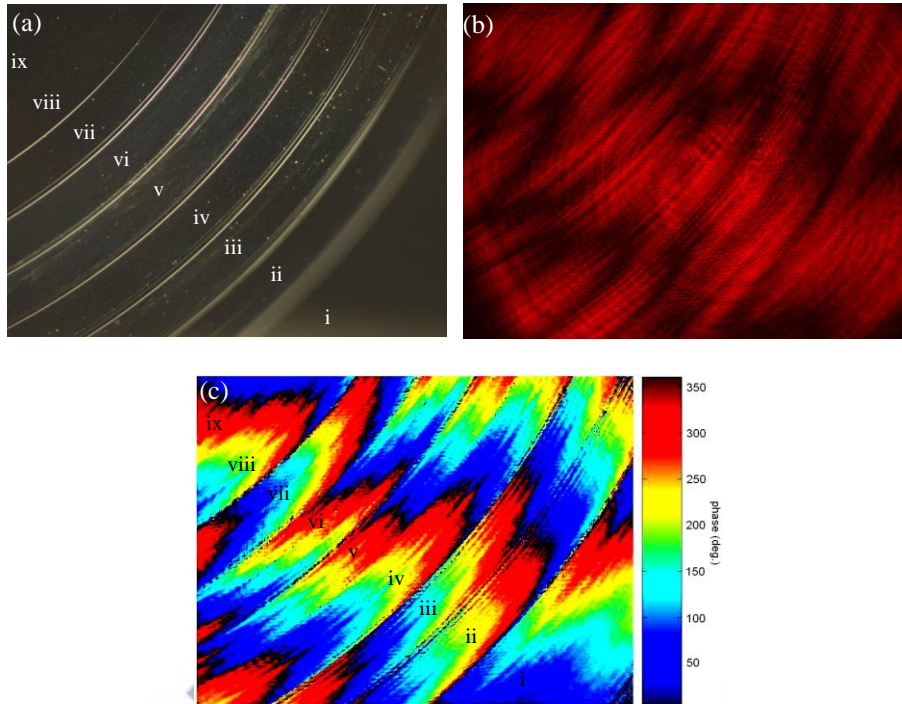


Fig. 7.3 (a) 樣本表面的影像，(b) s-與 p-偏光干涉後的影像，(c) 過 IEEE1241 弦波擬合後的相位分佈(單位為 degree)。

7.3.1 小區域量測的定位步驟

Table 7.1 是小區域量測過程中的實驗參數，以下則為利用相關參數的定位步驟：

- <1> 首先目測或以直尺量測，將面鏡以 TS 推進到兩臂接近等長處。
- <2> 使用最小的波長變化(0.02 nm)找出波長變化後，相位變化 $\Delta\phi$ 小於相位準確度 σ_ϕ 的 TS 定位位置。
- <3,4> 改用更大的波長變化，重複<2>的動作。
- <5> 使用最大的波長變化(5.40 nm)，重複<2>的動作，記錄此時 TS 的讀數，此位置即為該階高平面所對應的兩臂等長處。

表一為波長變化量與 d 的關係，其中<3,4>的波長變化的選擇可參考 Eq. (7.5)，

$$\Delta\lambda' \leq \frac{360^\circ - \sigma_\phi}{\sigma_\phi} \times \Delta\lambda, \quad (7.5)$$

$\Delta\lambda$ 為上一步的波長變化量， $\Delta\lambda'$ 則為該步驟所應使用的波長變化量，由於 $\Delta\phi$ 設定在 $\sigma_\phi \sim (360 - \sigma_\phi)$ 以內，且利用 Eq. (7.4) 算出 Table 7.1 中 d 的範圍皆能有互相重疊的區域，因此經過小區域的定位步驟後，可以很精確的將面鏡定位在兩臂等長處而不會有 phase wrapping 造成誤判的問題。

Table 7.1 小區域量測中各步驟的實驗參數。

	λ_1 (nm)	λ_2 (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	d (μm)
<2>	632.60	632.62	0.02	834~9171
<3>	632.60	632.80	0.20	83.4~917
<4>	632.60	634.60	2.00	8~92
<5>	632.60	638.00	5.40	3~34

$\sigma_\phi = 30^\circ$, $\sigma_\phi \sim (360 - \sigma_\phi)$

Fig. 7.4 為小區域的定位結果，此圖為 $10 \mu\text{m}$ 階高的交界處，可看出左半部已經十分接近兩臂等長處，而右半部波長由 A 變化到 E 時，相位增加了 $+70^\circ$ ，由 Eq. (7.4) 可推算出 $d=10 \mu\text{m}$ ，因此面鏡需再向前移動 $10 \mu\text{m}$ 才可到達右半部的兩臂等長處。Fig. 7.5(a-d) 可看出不同距離時，波長變化對相位的影響，

同樣地也可從相位變化推算出 d 的長度，注意 Fig. 7.5(a),(b) 的相位變化為負，故此時 TS 必須改成向後移動才能到達兩臂等長處，雖然在此例子中我們設定波長變化由 A 到 E 為 $632.60 \sim 632.68 \text{ nm}$ 每次間隔為 0.02 nm ，但實際上可發現相位變化的間隔並非完全相同(如 Fig. 7.5(a))，這是由於 TDL 的波長變化存在不準確度 $\delta\lambda$ 所導致，但是此不準確度在本方法中是可忽略的，關於這一點在討論中有更進一步的說明。

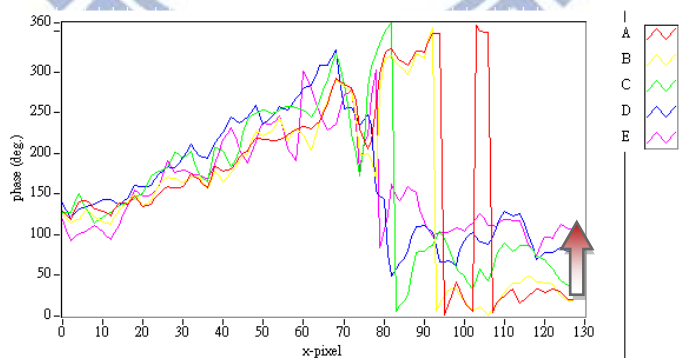


Fig. 7.4 小區域量測，圖中波長 λ 由 A~E 分別為 $633.0, 633.5, 635.2, 636.94, 637.0 \text{ nm}$ 。

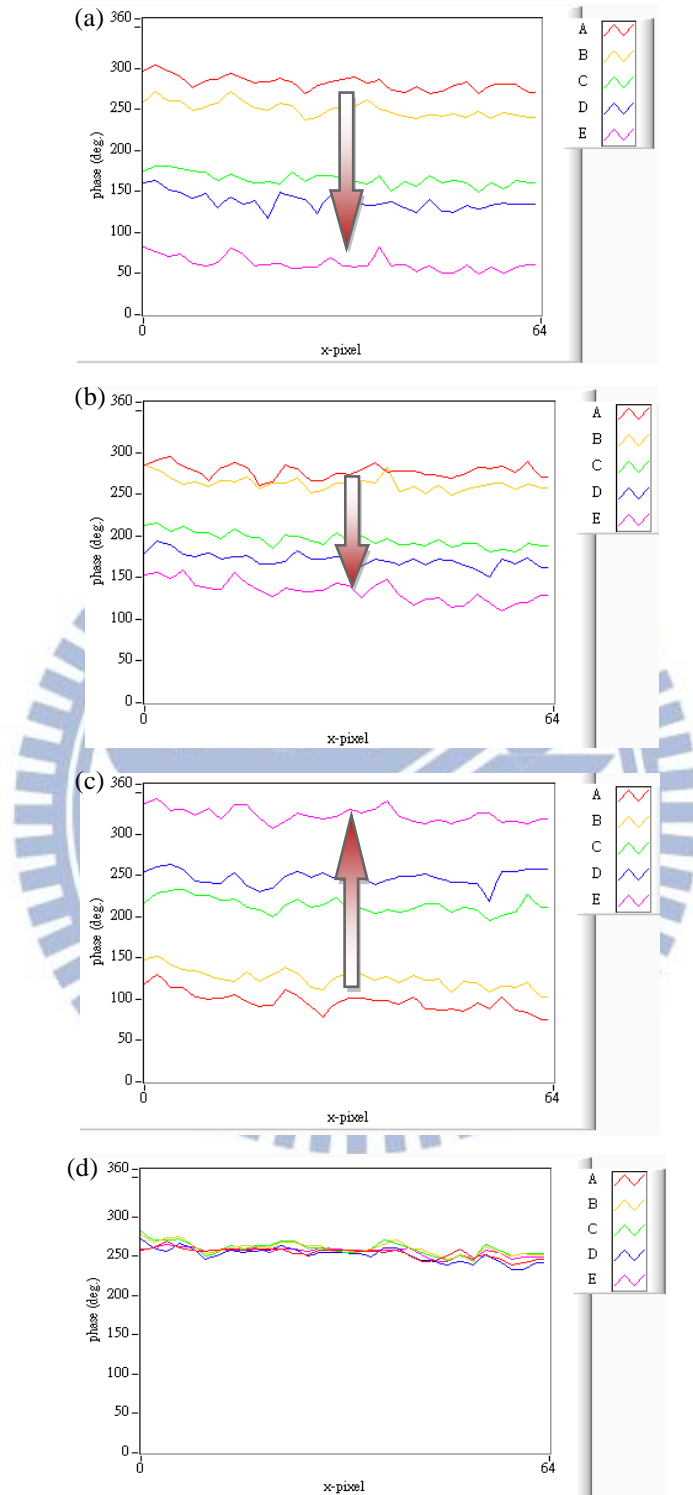


Fig. 7.5 在不同距離下波長變化與相位變化量的關係，波長的變化由 A 到 E 為 632.60 ~ 632.68 nm 每次間隔為 0.02 nm。 (a) $d = 1500 \mu\text{m}$, (b) $d = 700 \mu\text{m}$, (c) $d = -1500 \mu\text{m}$, (d) $d \approx 0$ 。

7.3.2 全畫素的定位量測

經過多次小區域的量測而分別定位出所有階高的高度後，我們才開始進行全畫素的定位量測。理論上變波長次數越多越能夠清楚的判斷出該位置是否為兩臂等長處，然而改變波長太多次也會使量測時間變得太長，因此進行全畫素的實驗時，我們只使用三個波長 $\lambda = 632.60, 636.94, 638.00$ nm，並尋找變波長後相位變化 $\Delta\phi$ 皆小於相位準確度 σ_ϕ 的 TS 定位位置，這樣的波長變化可以確保 $d = 0 \sim 176$ μm 的區間內不會因為 phase wrapping 而發生誤判，且能達到 3 μm 的定位準確度，如 Table 7.2。

雖然先前經過小區域的量測已初步定位出各階高平面的所對應的 TS 讀數，但若樣本有傾斜將使得屬於同一階平面的量測結果略有差距，考慮到這個問題，我們對每一個平面所初步定位出的 TS 讀數做前後 20 μm 的步進量測，由於所使用的 TDL 的波長變化量最大為 5.4 nm，使得單一次的定位準確度為 3 μm ，因此步進量測時的步進移動量應該小於 3 μm ，以避免一步越過兩臂等長處而不自知，本實驗所使用的步進移動量設為 1 μm ，因此對每一平面皆做前後 20 步的自動化步進量測，可預測一個階高平面上的單一點(對應 CCD 的一個畫素)大概會有 7 步被判定為兩臂等長處，如 Fig. 7.6，因此該點所對應的 TS 讀數(對應樣本高度)將取為此 7 步的平均值，得到此階高平面的高度分布資料後，再與其他階高平面的資料結合在一起，最後得到整個樣本的二維階高分布，量測步驟的簡圖可參考 Fig. 7.7。實驗參數的控制面板如 Fig. 7.8 所示。

Table 7.2 全畫素定位量測的相關參數。

λ_1 (nm)	λ_2 (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	d (μm)
636.94	638.00	1.06	16~176
632.60	638.00	5.40	3~34

$\sigma_\phi = 30^\circ$, $\sigma_\phi \sim (360^\circ - \sigma_\phi)$

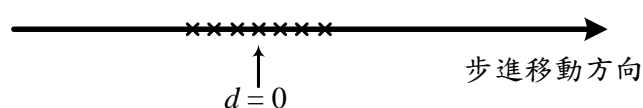


Fig. 7.6 步進量測的重複定位示意。

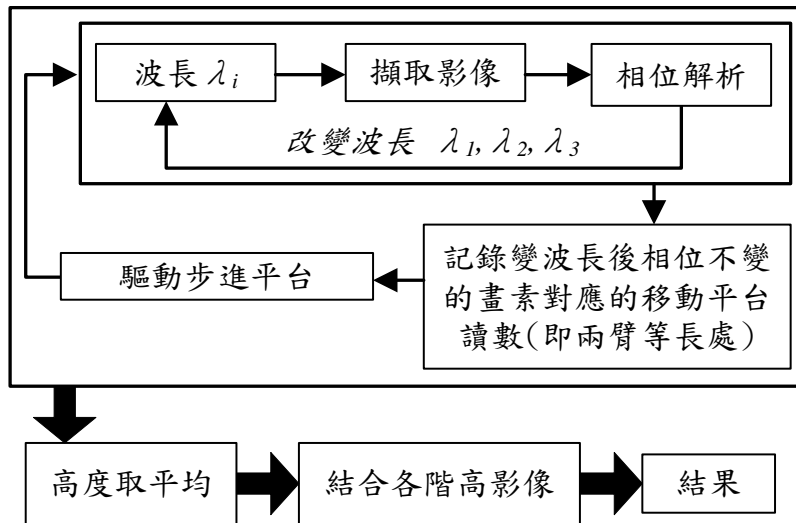


Fig. 7.7 全場階高量測實驗流程示意圖。

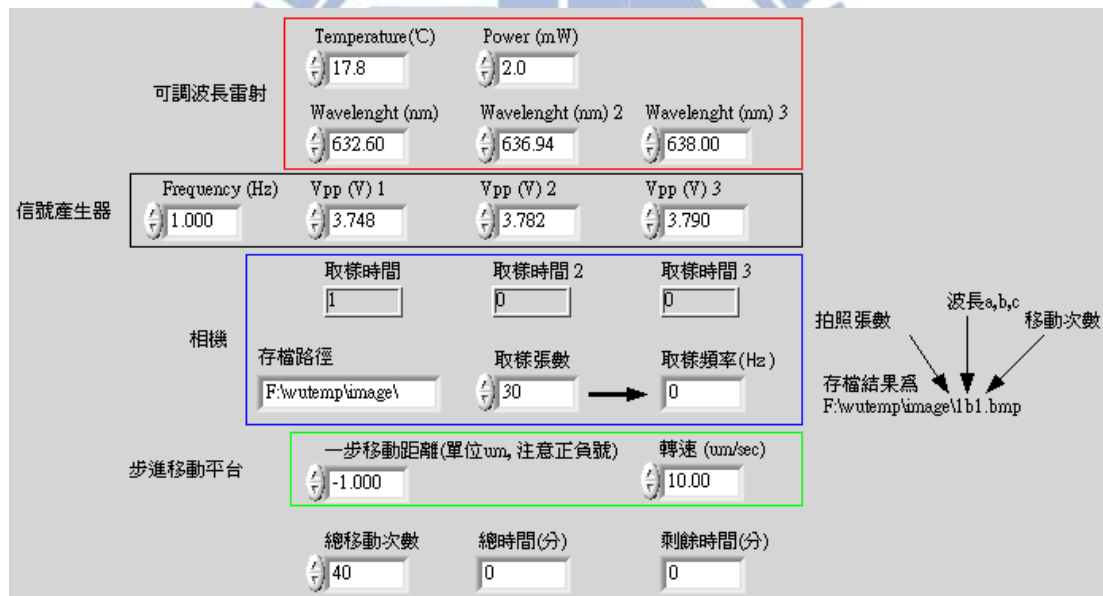


Fig. 7.8 全畫素的定位量測參數控制面板。

7.3.3 實驗結果

為了出清楚的顯示出各階高的差異，我們將測得的高度改成對數的形式來表示二維階高分布的結果，如 Fig. 7.9。沿著 Fig. 7.9(a)中的 AB 線段畫剖面圖即為 Fig. 7.10，的資料可得到與所標示樣本階高大小相近的結果，誤差皆在 $\pm 3 \mu\text{m}$ 內，雖然 7.3.2 小節提到單一次定位量測的準確度為 $3 \mu\text{m}$ ，但從 Fig. 7.10(b)仍可觀察到平面 ix 與 viii 之間有 $1 \mu\text{m}$ 的高度變化。而 Fig. 7.11 比較本方法與掃描探針顯微鏡的量測結果後，可知本全場量測技術的準確度相當高，雖然仍比不上掃描探針顯微鏡的準確度，但勝在可進行全場量測而不必單點逐步掃描。

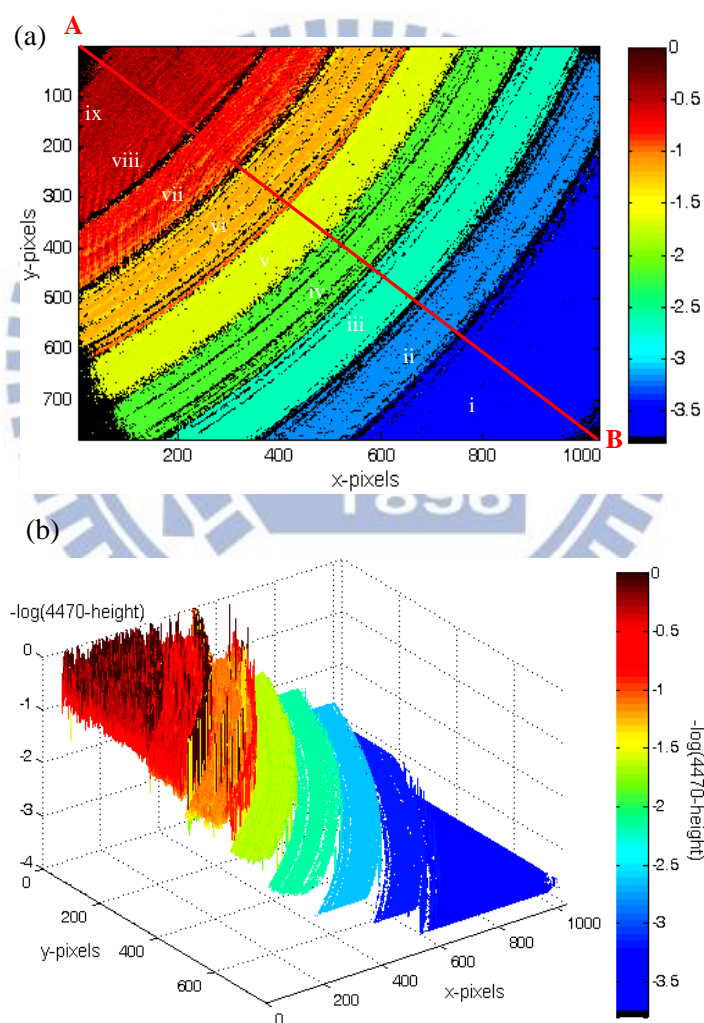


Fig. 7.9 階高樣本的全場量測結果，高度改以對數的形式表示。(a)上視圖 (b)立體圖。

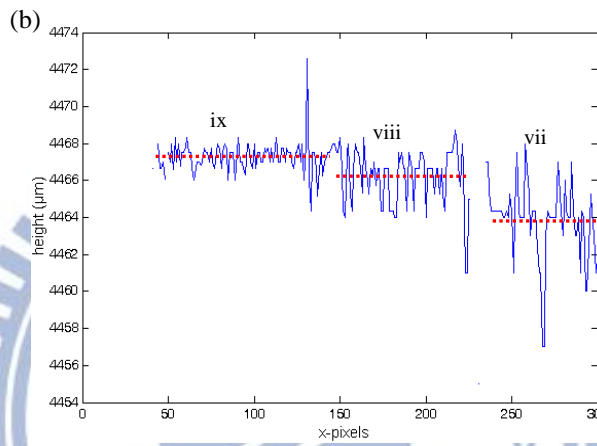
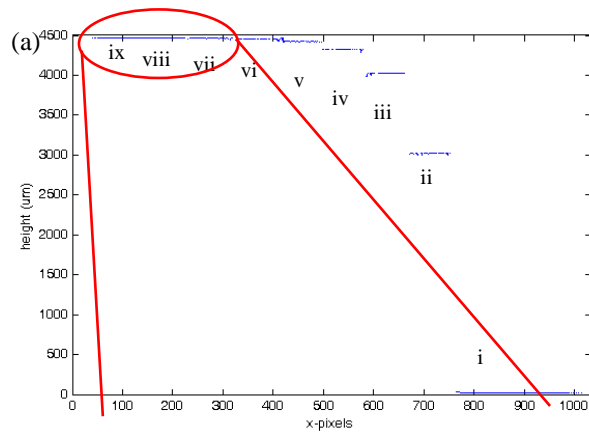


Fig. 7.10 (a)AB 線段的高度剖面圖 (b)其中 1~300 畫素的高度分布。

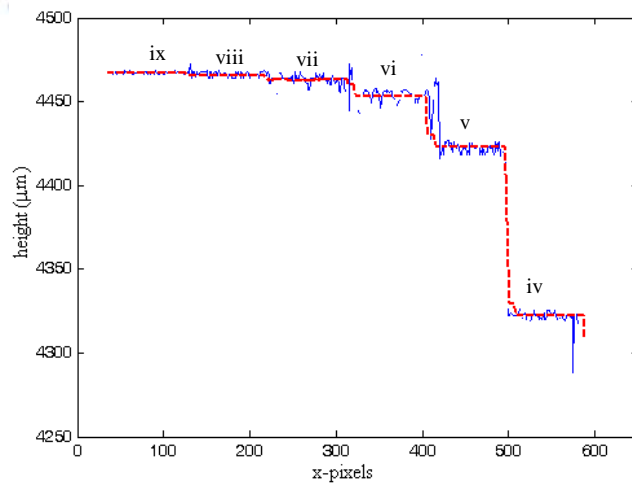


Fig. 7.11 本方法(實線)與掃描探針顯微鏡(虛線)的量測結果。

7.4 討論

當外差頻率 1 Hz，取樣頻率 10 Hz，CCD 的灰階數為 256，一次取樣 30 張影像，弦波的對比度為 1 時，可推得理論相位準確度約為 0.15° [8]，而實際所觀察到的相位準確度 σ_ϕ 接近 30 度，估計的方法是測量相位重複性，其誤差的來源除了理論相位準確度中的誤差外還包含震動、溫度變化、空氣擾動以及 CCD 與信號產生器之間的觸發時間不固定等影響。若仍改善這些問題，使得 σ_ϕ 接近理論值，由 Eq. (7.4) 推算出距離的解析度可達到 16 nm，便可大幅提升系統的準確度，此外如果選用波長可變範圍更大的雷射光源，還能更進一步提升準確度。

Fig. 7.3(b) 與 Fig. 7.9(a) 上出現同心圓狀的繞射條紋，其原因為中繼透鏡 RL 不完美所造成，此繞射條紋也會影響實驗結果，誤差約為 $2\ \mu\text{m}$ 。

7.5 小結

本方法以一部 CCD 相機結合外差式中央條紋法，來定位出樣本各階高平面所對應的兩臂等長處，這些位置可由移動平台的讀數來記錄，進而得到物體的二維階高分佈。此方法能夠很方便的辨識出到達干涉儀中兩臂等長處所需的距離與方向，並能夠測量極大的樣本階高高度，量測範圍只受限於移動平台的最大行程。此外波長的不準度對此方法影響極小。目前結果雖然沒有明顯比白光干涉術來得好，但若改善干涉儀穩定度或相位重複性的問題，便能降低高度的誤差，相信能夠成為更好的二維階高量測方法。

參考文獻

1. Y. Y. Cheng, and J. C. Wyant, "Two-wavelength phase shifting interferometry", *Appl. Opt.* **23**, 4539-4543 (1984).
2. K. Creath, Y. Y. Cheng, and J. C. Wyant, "Contouring aspheric surfaces using two-wavelength phase-shifting interferometry", *Opt. Acta.* **32**, 1455-1465 (1985).
3. D. Huang, E. A. Swanson, C. P. Lin, J. S. Schuman, W. G. Stinson, W. Chang, M. R. Hee, T. Flotte, K. Gregory, C. A. Puliafito and et al., "Optical coherence tomography" *Science* **254**, 1178-1181 (1991).
4. P. De Groot, L. Deck, "Surface profiling by analysis of white-light interferograms in the spatial frequency domain", *J. Mod. Opt.* **42**, 389-401 (1995).
5. K. Creath, "Step height measurement using two-wavelength phase-shifting interferometry", *Appl. Opt.* **26**, 2810-2816 (1987).
6. J. Y. Lee, M. H. Chiu, D. C. Su, "Central fringe identification using a heterodyne interferometric technique and a tunable laser-diode", *Opt. Commun.* **128**, 193-196 (1996).
7. W. T. Wu, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, W. Y. Chang and D. C. Su, "Method for gauge block measurement with the heterodyne central fringe identification technique," *Appl. Opt.* **49**, 3182-3186 (2010).
8. H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang, Y. L. Chen, and D. C. Su, "Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **50**, 045601 (2011).

第八章 結論與未來工作

本研究將外差式中央條紋定位法應用在塊規厚度、透明平板厚度及多階高樣本量測上，證明其具有光學結構簡單、定位方便、測量範圍大、準確度高、準確度不易受到波長擾動影響等優點，在量測距離大於 1 mm 又想達到奈米級準確度的情況下，推薦使用外差式中央條紋定位法。

在第二章中說明了外差干涉術的原理，以及如何利用電腦進行相位解析，並提出程式範例與提高效率的寫法；在外差光源的架構部份，介紹了各式外差光源，以及本論文所用之電光晶體調變器的工作原理，並交代如何精確的架設 EO 外差光源。提供往後相關研究人員能夠快速地了解並應用 EO 外差干涉術。

在第三章中整理出外差干涉術可能有的 20 多種誤差來源，並整理了整體的數學表示式，再利用程式模擬擬合頻率錯誤與均勻隨機雜訊兩項誤差的影響並分析，最後歸納出相位誤差量與這兩項誤差之間的數學關係，另外還能夠解析出最佳化的取樣週期數，並且發現此最佳化取樣週期數一定在 1 以下。此章節所提出分析過程能夠幫助相關研究者釐清誤差的來源，而經過誤差模擬分析後可解決從前應用外差干涉術時，不知道如何設定最佳取樣參數的窘境。

第四章則說明了外差式的中央條紋定位法的原理以及實驗時的快速定位步驟，特別針對相位重複性較差的系統來評估波長的選擇，接著又修正了外差中央條紋法中的初始相位隨波長變化的問題，而為了提高中央條紋法中移動平台的定位準確度，提出使用外差干涉儀來精密測定移動平台的位移量。

第五章利用外差式中央條紋定位法，來進行塊規兩端的零光程差的位置定位，能夠以 4 nm 的長度解析度測量塊規長度，並且量測範圍可達 100 mm，而不像傳統的超出片段法會受限於雷射的同調長度。本研究證明了外差式中央條紋定位法在塊規量測上的可行性。

第六章提出兩個新方法來測量透明平板幾何厚度，第一種方法，是以外差式中央條紋定位法來測量待測平板放入干涉儀前與放入後之間的光程差，再以斜入射式旋光外差干涉術來取得折射率，將折射率代入光程差後即可求出待測平板的厚度。然而此方法中旋光外差干涉術取得的折射率解析度不夠好，即使中央條紋定位的光程差很準確，所求出的待測平板厚度解析度也無法太佳。第二種方法，改善第一種方法中的缺點，該方法應用了外差式中央條紋定位法。在一個以偏極

分光鏡分光的改良式 Twyman-Green 干涉儀中，高精度移動平台則被用來移動干涉儀其中一臂上的參考面鏡，長工作距離物鏡與待測透明平板則被放在另一臂上，利用物鏡將光束先後聚焦在待測透明平板的前表面與後表面，兩個表面分別造成的光程變化可由外差式中央條紋定位法進行測量，移除待測平板後所造成的光程變化也可用相同的方法測量，考慮透明平板色散的影響後，可精確的算出待測平板的幾何厚度。此方法具有相當大的量測範圍，其範圍與物鏡的工作距離有關，本實驗中量測範圍為 $18\ \mu\text{m} \sim 34.0\ \text{mm}$ ，準確度為 $7\ \text{nm}$ 。

第七章以一部 CCD 相機結合外差式中央條紋法，來定位出樣本的二維階高分佈。此方法能夠測量極大的樣本階高高度，由於相機灰階數低、電子雜訊高、取樣頻率不穩定、以及振動等問題，使得相位重複性變得很差，造成實驗時定位準確度沒有明顯比白光干涉術好；另外，取樣時無意義的數據量太多，也造成相位解析的時間被拉長。在改善這些問題之前，若想做高準確度的精密量測，建議還是以單點的方式進行二維掃描量測，較可能保持高準確度的優勢。若要將此方法實際開發為量測儀器時，需先克服非共光程架構容易受振動影響的問題；接著在量測速度方面，由於量測過程中需要花時間移動參考面鏡來定位，以及所使用的可調波長雷射的波長變化速度較慢，因此仍有很大的改善空間。

原本希望將此方法應用在生物斷層掃描上，以取代光學同調斷層掃描儀 (optical coherence tomography, OCT)，然而對於生物以及顯微領域的不熟悉，使得該部份的研究被迫暫時放棄。若要繼續往這方面發展，可以先研究結合顯微鏡的外差式中央條紋法，用以量測高深寬比的微機電 (MEMS) 結構。

未來也希望能將此技術應用在非球面量測上。非球面檢測有兩種類型：1. 未知非球面樣本，能夠量出整個曲面的形貌，分析出曲面的方程式；2. 已知非球面樣本，要量出實際曲面與理論值之間的誤差。對於第 2 種類型的量測架構，目前的想法是將干涉儀中測試臂的光束利用透鏡先會聚再發散入射到待測樣本上，其中只有部分光束反射後再次遇到透鏡會平行回到分光鏡中，利用中央條紋法定位出這部分光束的位置；接著往前稍微移動透鏡，使得前述的部分光束會是由其他區域的曲面造成的，也同樣利用中央條紋法定位；重複推進透鏡，直到整個曲面都被定位完成。

另外，也可以想想當外差式中央條紋法定位完成後，是否有可能再利用 $\phi = \phi_{PBS} - 4\pi d/\lambda$ 估計目前的絕對距離 d ，解析度也許能夠更進一步提升。

簡 歷

基本資料：

姓 名：吳 旺 聰 (Wang-Tsung Wu)

出 生 日 期：民國 72 年 9 月 9 日

性 別：男

血 型：O

籍 貫：台灣省新北市

地 址：新北市板橋區三民路二段 193 巷 32 號 3F

電 話：02-29632682

學歷：

畢業學校	主修學門系別	學位	起訖年月
交通大學	光電工程學系	博士	96/9 – 100/9
交通大學	光電工程學系	碩士(直攻博士)	95/9 – 96/6
清華大學	物理學系	學士	91/9 – 95/6
成功高中	---	---	88/9 – 91/6

著作

(A) 期刊論文：

1. Yen-Liang Chen, Zi-Chen Jian, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, “Nano-roughness measurements with a modified Linnik microscope and the uses of full-field heterodyne interferometry,” *Opt. Eng.* **47**, 125601 (2008).
2. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Zi-Chen Jian, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, “Two-wavelength full-field heterodyne interferometric profilometry,” *Meas. Sci. Technol.* **20**, 025307 (2009).
3. Wang-Tsung Wu, Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wei-Yao Chang and Der-Chin Su, “Method for gauge block measurement with the heterodyne central fringe identification technique,” *Appl. Opt.* **49**, 3182-3186 (2010).
4. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Bor-Jiunn Wen, Wei-Yao Chang and Der-Chin Su, “An alternative bend-testing technique for a flexible indium tin oxide film,” *Displays* **31**, 191-195 (2010).
5. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang and Der-Chin Su, “Full-field refractive index distribution measurement of a gradient-index lens with heterodyne interferometry,” *Meas. Sci. Technol.* **21**, 105310 (2010).
6. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang and Der-Chin Su, “An alternative method for measuring the full-field refractive index of a GRIN lens with normal incidence heterodyne interferometry,” *Appl. Opt.* **49**, 6888-6892 (2010).
7. Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, Yen-Liang Chen, Der-Chin Su, “Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry,” *Opt. Eng.* **50**, 045601 (2011).
8. Wang-Tsung Wu, Hung-Chih Hsieh, Wei-Yao Chang, Yen-Liang Chen, and Der-Chin Su, “High accuracy thickness measurement of a transparent plate with the heterodyne central fringe identification technique,” *Appl. Opt.* **50**, 4011-4016 (2011).

(B) 研討會論文：

1. 謝鴻志，簡志成，謝博任，楊惠婷，吳旺聰，蘇德欽，“以旋光移相干涉術量測材料之二維折射率分佈”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-18.
2. 楊惠婷，謝鴻志，簡志成，謝博任，吳旺聰，蘇德欽，“利用雙波長移相干涉術測量二維階高分佈”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-19.
3. 謝博任，簡志成，謝鴻志，楊惠婷，吳旺聰，蘇德欽，“偏極獨立的多埠雙向光學準循環器”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-21.
4. 簡志成，謝博任，陳彥良，謝鴻志，楊惠婷，吳旺聰，蘇德欽，“全場外差干涉術的取樣誤差分析”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EP-094.
5. 謝鴻志，陳彥良，吳旺聰，蘇德欽，“利用旋光外差干涉術量測漸變折射率透鏡之二維軸向折射率分佈”，2007 台灣光電科技研討會，台中市，2007 年 12 月，論文集 EO-025.
6. 吳旺聰，陳彥良，謝鴻志，蘇德欽，“以中央條紋定位法測量二維階高分佈”，2007 台灣光電科技研討會，台中市，2007 年 12 月，論文集 EO-038.
7. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Der-Chin Su and Ken-Yuh Hsu, “Method for determining microindenter tip topography with a scanning white light interferometer and the uses of image stitching method”, International Topical Meeting on Information Photonics 2008, Awaji, Japan, Nov. 2008.
8. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu, Der-Chin Su and Ken-Yuh Hsu, “Two-wavelength Full-field heterodyne interferometry for measuring large step height”, Japan-Taiwan Bilateral Science & Technology Symposium- Frontiers in Functional Optics-, Utsunomiya, Japan, Nov. 2008.
9. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, “A method for measuring two-dimensional refractive index distribution of a GRIN lens”, 2008 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Taipei, Taiwan, Dec. 2008.

10. Wang-Tsung Wu, Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh and Der-Chin Su, "Method for measuring the thickness of a thick transparent plate", 2008 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Taipei, Taiwan, Dec. 2008.
11. 陳彥良, 謝鴻志, 吳旺聰, 蘇德欽, "全反射式移相干涉顯微相位成像術", 2009 台灣光電科技研討會, 台北市, 2009 年 12 月, 論文集 EO-122.
12. 謝鴻志, 陳彥良, 吳旺聰, 蘇德欽, "垂直入射全場外差干涉術量測 GRIN Lens 的折射率分佈", 2009 台灣光電科技研討會, 台北市, 2009 年 12 月, 論文集 EO-126.
13. 吳旺聰, 陳彥良, 謝鴻志, 蘇德欽, "測量塊規的新法", 2009 台灣光電科技研討會, 台北市, 2009 年 12 月, 論文集 EO-125.
14. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, "Method for measuring the refractive index distribution of a GRIN lens with heterodyne interferometry," Proc. SPIE 7390, 73900G 2009. (Munich, Germany)
15. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, "Full-field absolute phase measurements in the heterodyne interferometer with an electro-optic modulator," Proc. SPIE 7390, 73900F 2009.
16. Wang-Tsung Wu, Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wei-Yao Chang, and Der-Chin Su, "Step height measurement by using heterodyne central fringe identification technique," Proc. SPIE 7767, 77670J, 2010. (San Diego, USA)
17. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, and Der-Chin Su, "Two-dimensional refractive index distribution measurement of a GRIN lens," Proc. SPIE 7791, 77910A, 2010. (San Diego, USA)
18. Wang-Tsung Wu, Hung-Chih Hsieh, Wei-Yao Chang, Cheng-Fang Ho, Fan-Hsi Hsu, and Der-Chin Su "Novel method for measuring the thickness of a transparent plate," 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, OPT5-P-089(1140), Tainan, Taiwan, Dec. 2010.
19. Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, Fan-Hsi Hsu, Cheng-Fang Ho, and Der-Chin Su, "Limitation of the sampling frequency in the full-field heterodyne interferometry," 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, OPT5-O-032(1194), Tainan, Taiwan, Dec. 2010.
20. Wei-Yao Chang, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Fan-Hsi Hsu, Cheng-Fang

Ho, and Der-Chin Su, "A Method for Measuring Surface Profile with a moving grating," 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Tainan, OPT5-O-027(1148), Taiwan, Dec. 2010.

