國立交通大學

工業工程與管理學系

碩士論文

有限規劃期與階梯式訂購成本之經濟訂購批量模式

EOQ Model under Finite Planning Horizon and Stepwise Ordering Cost

研 究 生：張景閎

指導教授：許錫美 博士

中 華 民 國 九 十 七 年 十一 月

有限規劃期與階梯式訂購成本之經濟訂購批量模式

EOQ Model under Finite Planning Horizon and Stepwise Ordering Cost

研 究 生：張景閎　　　　Student：Ching-Hung Chang

指導教授：許錫美　　　　Advisor：Dr. Hsi-Mei Hsu

國立交通大學

工業工程與管理學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Industrial Engineering and Management

College of Management

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master of Science

In

Industrial Engineering

Nov 2007

Hsin-Chu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十七年十一月

有限規劃期與階梯式訂購成本之經濟訂購批量模式

研究生：張景閎　　　　　　　　　　　指導教授：許錫美 博士

國立交通大學工業工程與管理學系

摘要

本論文探討在有限規劃期、運輸成本對批量呈階梯式關係(step-wise function)、顧客需求已知情境下，最佳經濟訂購量模式的構建及其求解方法。該經濟訂購量模式適用於貨物利用海、陸或空運時的決策環境(例如：訂購成本除基本費用外，另需支付與運送量的相關的運費)。本論文提出一啟發式的演算法，求解最佳訂購量的近似解。並與 Lee[7]的無限期存貨模式相比較，當規劃期越短時，本論文的結果與 Lee 相比較，有較好的績效。

關鍵字：經濟訂購批量、有限規劃期、階梯式訂購成本

目錄

圖目錄

表目錄

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

台灣的產業中，有許多廠商的原物料需從國外進口。原物料進口商的訂購成本除基本費用外，另需支付與運送量相關的運費，如使用貨櫃數量的運費。因此，訂購成本對訂購批量呈階梯式關係(step-wise function)。此外，原物料進口商與客戶訂定未來某段期間的供應原物料契約，契約內容是原物料進口商於某段給定的期間內供應客戶的需求，契約期末的存貨仍屬進口商所有，客戶僅支付其使用量的費用。例如：A 公司是台灣第一大電子氣體供應商，客戶群涵蓋台積電、聯電等國際級晶圓製造公司。該公司與顧客訂定未來一年的供貨契約，負責供應各晶圓製造公司各種大宗普通氣體、特種氣體、大宗特種氣體以及電子化學品。

A 公司需向海外製造商訂購產品來滿足顧客需求，針對大量需求的產品是經由海運貨櫃來運送，每次訂購除了支付一固定訂購成本 K 外，還需支付與運送的貨櫃數量相關的費用，訂購成本(Ordering Cost)非一固定值而是一階梯式的函數(step-wise function)，。假設單一貨櫃的容量為 P 及運送費用為 R 時，訂購成本如圖 1.1 所示。

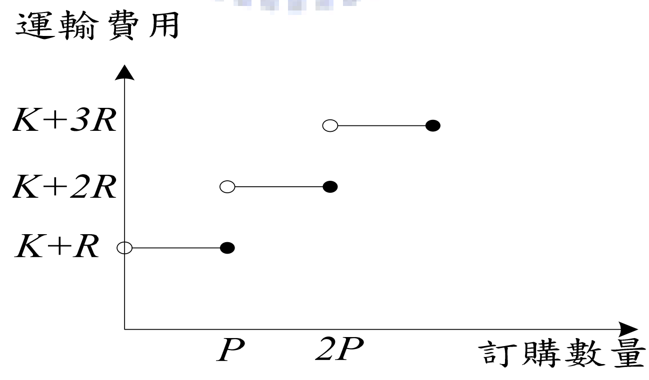

圖 1.1 階梯式訂購成本示意圖

當合約期結束之後，剩餘產品仍屬於 A 公司所有，由於產品屬於工業用氣體，甚至得額外增加一筆處理費用來處理剩餘產品。因此，A 公司希望在有限的合約期結束之後，並不會有剩餘產品留下。在上述的情境下，A 公司該如何構建其存貨模式，以決定最佳訂購批量。

因此本論文將討論有限規劃期之下且訂購成本為一階梯式的運輸成本的經濟批量問題。該問題具有下列特性：（1）有限規劃期。（2）訂購成本為一階梯式的運輸成本。

由 Schwartz 學者[14]所研究的經濟批量模型吾人可知當單獨考慮有限的規劃期之下，最佳訂購批量 Q 與總需求 TD 有下列關係：$TD = mQ$，m 即為訂購總次數。因此，廠商的訂購批量即受限於總需求的大小。

而當訂購成本與訂購批量成階梯式關係時，根據 Lee 學者的研究[7]，最佳訂購批量 Q 與貨櫃容量 P 有下列關係時：$Q = iP$，i 為任意正整數，可以使運輸成本最小。因此，廠商的訂購批量即受限於貨櫃容量的大小。

當上述兩項性質若無法兼顧時，該如何決定最佳訂購批量，以最小化存貨成本，是本論文探討的主要課題。

1.2 問題定義

本論文定義研究的問題屬於單階層的存貨模式，如下：

假設：

(1) 上游供應商的產能無限。

(2) 不允許缺貨情形發生。

(3) 忽略運送時間（或假設為一固定常數）。

(4) 存貨的殘餘價值假設為零。

(5) 存貨數量在當期若無法滿足需求，不容許缺貨後補。

已知：

(1) 顧客的需求為一固定消耗率且已知。

(2) 廠商已確定與顧客簽訂合約規劃期長度。

(3) 廠商已確定貨櫃運輸的相關成本費用。

在有限的規劃期之下，廠商的存貨成本包含了於規劃期內的總持有成本與訂購總成本。訂購總成本為廠商在規劃期內每一次訂購成本的加總，但與以往存貨模式不同之處為廠商單次的訂購成本除了一固定費用還需加上與訂購數量相關的貨櫃運輸費用。此外，在給定規劃期之下，總需求為固定，因此購買成本固定，不列入成本計算。

本論文乃針對廠商訂購需透過貨櫃運輸以滿足顧客需求之前提，以廠商成本最小化為目標，建構數學模式，決定每次的訂購數量。已達成以下研究目的：

一、提出能符合所考慮情境之最佳批量模型，及其求解方法。

二、探討各項參數（貨櫃容量、貨櫃運送費用、合約期長度...）對成本的影響，並幫助廠商找出在存貨管理上可供參考的資訊。

本論文將上述情境彙整如表 1.1 所示。

表 1.1 研究情境說明

項目	情境
顧客需求	➢ 已知顧客的需求為一固定消耗率(單位:需求數量/單位時間)。
規劃週期	➢ 規劃時間為 T(單位:年)。
存貨成本	一、規劃期間內的存貨總持有成本。 二、規劃期間內的總訂購成本: 總訂購成本為 T 期間內單次訂購所需成本的加總。 單次訂購成本為訂購固定成本加上運輸費用。 運輸費用則依不同的訂購數量所需的貨櫃數目來決定。
目的	➢ 使規劃期間存貨總成本最小化
決策	➢ 提出一訂購策略來決定廠商在規劃期內的所需的總訂購次數,以及每次的訂購數量。

1.3 研究範圍與限制

本論文存貨模式探討的範圍與限制如下：

1. 限定於單一顧客，且顧客的需求為一已知固定銷耗率。
2. 供應鏈上游的產能無限。
3. 產品採購前置時間、運送時間假設為一已知固定時間。

1.4 論文架構

本論文架構分為下列幾個步驟：

- 訪談業界，蒐集並探討相關的文獻
- 定義問題
- 建構數學模式
- 建立求解方法
- 模式敏感度分析
- 結論與未來方向

第二章 文獻探討

本章將分兩部分探討相關文獻。第一部分探討有限規劃期的存貨相關文獻。第二部分探討階梯式運輸成本的存貨相關文獻。最後並比較本論文與 Lee 學者[7]存貨模型的差異之處。

2.1 有限規劃期於存貨模型的影響

在經濟訂購量存貨模式中，在規劃期為 T 且需求 D 為已知時， Schwartz [14]學者證明最佳經濟批量 Q 與總需求 TD 有下列關係：$TD=mQ$，m 即為總訂購次數。舉例說明如下，如圖 1.1，當總需求 TD 為 1000 單位時，廠商的訂購批量若在{500,999}之間，皆需訂購兩次，與訂購批量為 500 時的總訂購成本相同，但造成較高的存貨成本，因此，若給定廠商的訂購總次數為 m，則訂購批量為 m 整除總需求時(即 $Q=TD/m$)，有較低的總成本（總訂購成本＋存貨成本）。此一特殊的訂購批量性質為本論文的基礎。

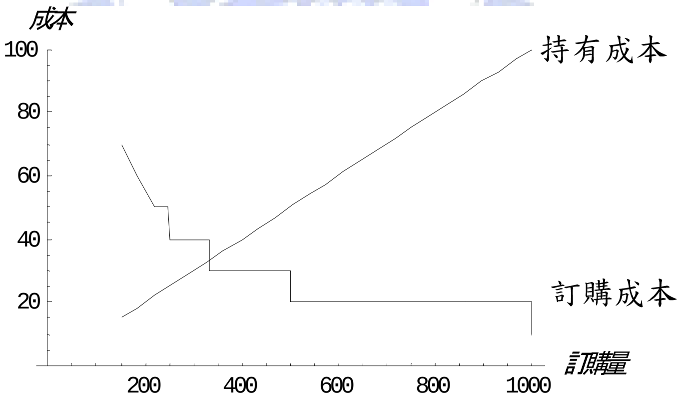

圖 2.1 有限規劃期之下的成本

而在有限的規劃期之下，有許多的學者考慮經濟批量模型中的某一個參數會隨著時間增加而改變。有學者研究當購買成本隨時間變動時，廠商要如何修正訂購數量。(Lev 與 Soyster[8]; Goyal[5])

Lev 與 Weiss[9]學者則提出一存貨模型能將規劃期分成兩類，分別就有限或無限的規劃期，探討廠商要如何決定其存貨策略。

Sivazlian 與 Stanfel[15]學者則考慮當需求會時間增加而改變時，廠商要如何修正後期的訂購數量。另外針對需求此參數的其他相關研究，Goyal[6]等學者考慮在隨機需求且容許缺貨的條件下，提出一演算法來尋找廠商的最佳存貨決策。Park 與 Kapuscinski[11]則是考慮在兩階層的供應鏈中，當需求是隨機且上游供應商的產能有限制的條件下，利用動態規劃的手法求出每一階層向其上游的訂購數量。

Dai[4]學者則是研究當廠商要向多個供應商訂購時，要如何調整向每一個供應商的訂購數量，並利用動態規劃的手法來求得廠商的存貨政策。

大部分的文獻中，考慮有限的規劃期此一因素這類型的存貨模式，大都是藉由調整廠商的訂購政策，或是尋求一新的演算法來求得最佳的訂購數量。

2.2 階梯式運輸成本

階梯式運輸成本可解構成固定成本與訂購數量相關的變動成本，即當訂購數量超過一貨櫃的容量限制時，需額外多支付一貨櫃的租用費用，此為廠商需額外考慮的變動成本。

許巧鶯與謝幼屏[20]中提出海運貨櫃運輸的航運成本與上述類似。該研究分析航運成本可分類為船舶時間成本、船舶燃料成本與港埠成本這三項。並認為航運成本具有一經濟規模性。本論文認為此假設在計算海運的成本時，比較具有一般性，而易於評估訂購量對運輸成本的影響。

Lee 學者[7]認為當廠商採用貨櫃運送貨品時應採用此假設來計算成本。Lee 學者[7]並進一步指出在考慮階梯式運輸成本之下，為了充分利用貨櫃容量，使總訂購成本最小，最佳經濟批量 Q 只會為貨櫃容量 P 的整數倍，即 $Q=iP$(i 為任意正整數)。在此性質之下，成本函數不具有隨訂購量改變而遞增或遞減的特性，而是有許多的局部最小解存在，此一特性為本論文考量的第二項基礎。

其他考慮到階梯式運輸成本的相關研究則分別敘述如下：

針對此特殊運輸成本，有些學者認為可視為一種根據訂購量而獲得折扣的問題(Nahmias[10]; Bramel & Simchi-Levi[2])。

Swenseth 與 Godfrey[16]則將階梯式的訂購成本函數加以修改，修改過後的成本函數可以使總成本成為一遞增的函數。此方法雖然易於計算，但是所求出的訂購量只是趨近於最佳的訂購量，而非最佳的解。

Alp 等學者[1]則是在階梯式成本之下，額外考慮由於天氣、道路狀況等確定因素，產品運送所需的運送時間具有一隨機性。在此條件之下，作者將規劃期分成許多的節點，並以動態規劃的手法來尋求最佳訂購批量。

Russell 與 Krajewski[13]學者研究運輸問題中的零擔運輸問題(Less-than-truckload, LTL)，並認為 LTL 的問題中的成本函數具有同樣的特性，其研究並指出若以經濟批量模型所求出的最低成本只能作為 LTL 問題的下界，該研究並提出了一演算法來修正最佳訂購量。Carter[3]修正 Russell[13]所提出的演算法以求得更有效率的解法。

Rieksts 與 Ventura[12]探討廠商分別在有限以及無限的規劃期的條件之下，當受到階梯式的成本函數的影響，要如何決定最佳的訂購數量。其研究並證明不論在有限以及無限的規劃期之下，廠商皆能找到一最佳的存貨策略，並分別提出了一演算法來尋求最佳的訂購數量。

此外，也有許多學者考慮在兩階層供應鏈中，階梯式運輸成本對廠商存貨政策的影響。Toptal 與 Cetinkaya[18]研究兩階層供應鏈中，位於中游的廠商向上游供應商訂購以及向下游顧客補貨的運輸成本為階梯式成本。該研究利用啟發式演算法先找出總成本的上界，再依此來尋找訂購數量的最適解以決定廠商的存貨策略。

Zhao 等學者[19]則提出一效率極高的演算法來求解經濟規模性運輸成本在兩階層供應鏈的經濟批量模型中的影響。

Toptal 與 Cetinkaya[17]兩學者則又考慮在隨機需求之下的兩階層存貨模型，

但針對中游廠商只訂購一次的條件加以分析，相較於以往的文獻著重在存貨策略的分析，該研究希望探討透過廠商之間訂價分析能達到供應鏈的合作。

上述學者之研究本論文整理成表 2.1，由以往研究可發現在考慮了階梯式的變動成本之後，會使成本函數產生許多的局部極小值，而大多數的研究則藉由修正訂購量的方式來尋找最佳訂購數量。

表 2.1 階梯式成本相關文獻整理

	研究範圍	需求類型	研究主題	解題方法
Lee[7]	一階多期模型	固定	訂購成本為階梯式成本	提出一演算法求解
Nahmias[10]; Bramel & Simchi-Levi[2]	一階多期模型	固定	同上	轉化成折扣問題求解
Russell&Krajewski[13]; Carter[3]	一階多期模型	固定	考慮的為零擔運輸的問題	以 EOQ 模型所求的解在加以調整
Sweseth&Godfrey[16]	一階多期模型	固定	只求出近似解	提出”Inverse model”來修改原本函數
Alp 等學者[1]	一階多期模型	固定	考慮運送時間為一隨機性	動態規劃
Rieksts&Ventura[12]	一階多期模型	固定	考慮同時採用 FTL 與 LTL 的運輸方式	利用每次訂購的時間間隔作為決策變數求解
Toptal&Cetinkaya[18]	二階多期模型	固定	同時考慮廠商向上游訂購以及向下游補貨的運輸成本為階梯式成本	利用啟發式方法求出成本的上界，在尋找極值
Zhao 等學者[19]	二階多期模型	固定	同上	提出效率極高的演算法來求解
Total&Cetinkaya[17]	二階單期模型	隨機	同上	將求解範圍分段來求解

2.3 本論文與過去研究不同之處

本論文為了更加符合所研究問題的特性，同時考量了有限規劃期與階梯式的運輸成本此兩因素。因此，除了可視為延伸 Schwarz 學者[14]的存貨模型加入階梯式運輸成本的影響，也可視為延伸 Lee 學者[7]的存貨模型，導入有限規劃期此一因素對成本的影響。

本論文與上述兩學者的不同之處有下列兩點：

第一點為同時考量有限規劃期與階梯式訂購成本讓模型更符合廠商的營運特性。

第二點則是本論文的訂購策略與 Lee 學者不同。

Lee 學者[7]證明在只考慮階梯式的運輸成本此兩因素時，廠商最佳的訂購策略為每次皆訂購相同的數量，且為貨櫃容量的整數倍。但是，若同時考慮有限規劃期與階梯式運輸成本此兩因素時，可知在總需求為固定的條件之下，Lee 學者[7]所提出的方法可知不再適用，廠商最佳的訂購批量則勢必需加以調整，以免超出總需求。

因此，本論文提出一啟發式的訂購策略，若廠商在規劃期內共訂購 m 次，限定前 m-1 次皆訂購相同的數量。最後一次的訂購數量則剛好使得總訂購量等於總需求。本論文將根據此訂購策略來分別計算總訂購次數、單次訂購所需的貨櫃數量，再依此來計算相關成本。並提出一求解的演算法

第三章 模式建構及求解

本章將說明存貨成本模式建構及其求解方法。根據 1.2 節，本研究考慮的情境為有限規劃期之下且訂購成本為一階梯式成本，相關的成本包含了在規劃期內的持有成本與訂購成本，廠商要決定在規劃期內該如何訂購。

首先，本論文以廠商成本最小化為目標，藉由加總規劃期內的每一次訂購的成本來計算總成本，並建立一模式。接著根據此模式，本研究提出一啟發式的訂購策略來建立一改良型的模式，以及其求解方法。以下將依次說明論文存貨模型的符號定義、模式構建以及改良型模式構建及其求解方法，最後並以一範例說明如何求解。

3.1 符號定義

符號定義將分別就不同模式說明。

原模式之符號定義：

決策變數：

Q_i：廠商第 i 次的訂購數量。i=1,2,3,…

模型參數：

T ：規劃期的時間長度(單位：年)。

D ：顧客的需求率(需求數量/年)。

h ：廠商的存貨持有成本($/年)。

K ：訂購成本中的固定成本，每次訂購的固定支出費用。

R ：訂購成本中的變動成本，使用一個載具來運送的成本。(例：一個貨櫃的租金)。

P ：載具的容量限制。(例：一個貨櫃的容量大小)。

$\lfloor x \rfloor$：高斯函數的其中一種，對任意正實數 x 而言，小於 x 的最大整數。

$\lceil x \rceil$：高斯函數的其中一種，對任意正實數 x 而言，大於 x 的最小整數。

成本函數：

$C(Q_i)$：第 i 次訂購且訂購量為 Q_i 時，該次訂購所需的成本。此成本包含了持有成本與訂購成本。

$TC(Q_1,\ldots, Q_i,\ldots,Q_m)$：每次訂購量為 Q_i 使規劃期內的總成本。m 為總訂購次數，並為一未知數。

3.2 模式構建

本論文所探討問題除了假設訂購成本為一階梯式的函數之外，由於廠商與顧客所簽訂的契約期限為 T，還需假設廠商每當訂購的產品用完之後才會再次訂購，以確保期末存貨為零，能符合有限規劃期的限制。其餘假設則與傳統 EOQ 存貨模式皆相同。

本論文的目標是尋找一訂購策略，能夠在有限的規劃期 T 之下，最小化廠商的訂購成本與持有成本。該訂購策略包含了廠商在規劃期內的所需的總訂購次數，以及每次的訂購數量。

本論文原先的問題可轉換成下列模式：

$$\min \;\; TC(Q_1,\ldots,Q_i,\ldots,Q_m)=\sum_{i=1}^{m}C(Q_i) \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \;\; \sum_{i=1}^{m}Q_i = DT$$

上述的模式中，$C(Q_i)$則為單次訂購的成本，如下列公式：

$$C(Q_i)=h\frac{Q_i}{2}\cdot\frac{Q_i}{D}+\left(K+R\left\lceil\frac{Q_i}{P}\right\rceil\right) \tag{3.2}$$

成本第一項為存貨持有成本，由於第 i 次訂購至 i+1 次的間隔時間為 Q_i/D，利用平均存貨為 $Q_i/2$ 計算而得。第二項則為訂購成本，除了所需的固定成本 K 之外，還需根據該次的訂購量 Q_i 計算出所需的貨櫃數量 $\left\lceil\frac{Q_i}{P}\right\rceil$ 之後，來計算所需的費用。

另外，模式(3.1)的限制式則是為了避免總訂購數量超過總需求。

問題解構：

根據上述模式，可得五點結論，如下：

(1) 模式(3.1)與 Schwarz[14]的存貨模型不同之處在於每次的訂購成本與訂購量相關，而非固定值。模式(3.1)若假設 P=∞，即表示貨櫃運輸量是無限大，此時的訂購成本即為一固定值。在此種情況下模式(3.1)可視為與 Schwarz[14]相同。Schwarz[14]藉由 LaGrange multiple 方法，證明了當 $Q_i=DT/m$ 為總成本最適化的必要條件。這代表此時廠商最佳的訂購策略為每次訂購皆訂購相同數量。

(2) 接著，當導入階梯式的訂購成本之後，卻可以發現上述的訂購策略卻不一定能同時使貨櫃運輸的成本最小，故不一定為此模式之最佳訂購策略。

例如，在未考慮貨櫃運輸的相關成本之前，當總需求為 1000 單位，吾人求出共訂購 10 次，每次訂購 100 單位為最佳訂購策略。若一個貨櫃容量限制為 40 單位，可知此方法需要 30 個貨櫃，但可以知道若採用每次訂購 120 單位，只需要 25 個貨櫃。

(3) 根據上述兩點可知，在考慮了階梯式的訂購成本之後，每次訂購皆訂購相同數量此策略在訂購成本為固定的環境之下依然適用。且此方法簡單且容易於實務上執行。因此，本論文根據 Schwarz[14]的策略加以修改而提出一啟發式的訂購策略以符合所考慮的情境。

(4) 本研究的訂購策略為在規劃期 T 之內，廠商只要連續訂購 Q 個產品，直到規劃期將結束時，若最後一次訂購 Q 個會使總訂購數量超過總需求，則修改最後一次訂購數量，只訂購到剛好為總需求數量 DT 的產品。

(5) 根據上述策略可知：若訂購批量為 Q，則訂購總次數為 $m=\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil$，令 $Q_1=Q_2=\cdots=Q_{m-1}=Q$，且 $Q_m = DT-\left(\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil -1\right)Q$ 來求解。以下將根據此方法來建構一改良型的模型以方便求解。

3.3 改良型模式建構

根據 3.2 節所提出的訂購策略，本章將建立一改良型模式。本論文所提出的訂購策略限定除了最後一次訂購之外，每次的訂購數量皆相同，令每次的訂購數量為 Q，最後一次訂購的數量則為 $DT-\left(\left\lceil \frac{DT}{Q}\right\rceil -1\right)Q$。

單次訂購的成本 $C(Q)$則分成三部分考慮：持有成本、訂購固定成本、訂購變動成本。由於除了最後一次之外，每次的訂購的成本皆相同，本論文分別就不同的訂購數量來計算相關的成本。

本論文的改良型模型即為最小化總成本 $TC(Q)$，而決策變數即為訂購批量 Q。此改良型模式與原本模式最大的差異之處為決策變數只有一個。

圖 3.1 為本論文改良型模型中，廠商的庫存水準與時間關係圖。

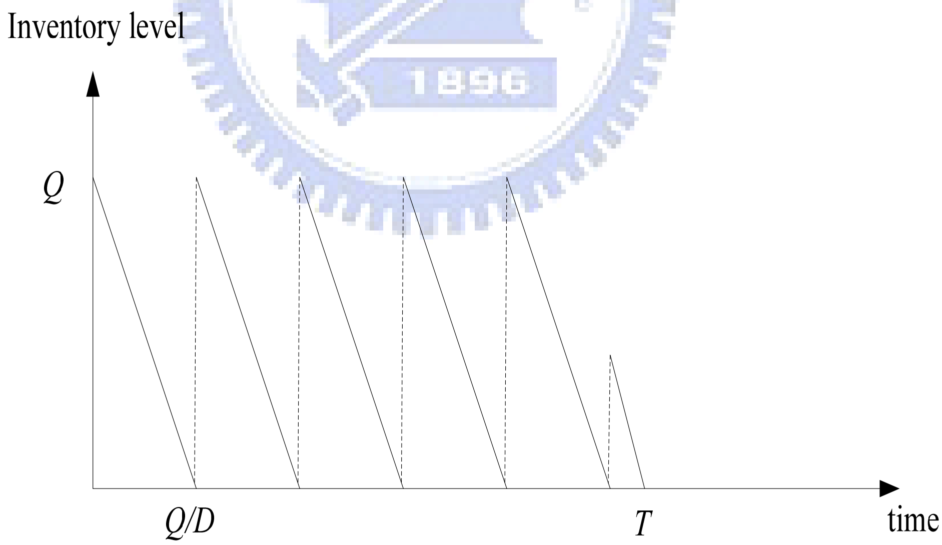

圖 3.1 改良型模型之存貨水準示意圖

相關基本資訊如下：

1. 給定訂購量 Q，可將規劃期 T 分成 $\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil$ 個週期。

2. 廠商每一週期訂購一數量 Q 的產品。最後一週期只訂購

$(DT-\left(\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil -1\right)Q)$ 個產品。

3. 每週期的平均存貨水準為 $\frac{Q}{2}$，而最後一週期則為 $\frac{DT-\left(\left\lceil DT/Q \right\rceil -1\right)Q}{2}$。

4. 每週期的時間長度為 $\frac{Q}{D}$，而最後一週期則為 $\frac{DT-\left(\left\lceil DT/Q \right\rceil -1\right)Q}{D}$。

5. 每週期廠商需負擔 $R\cdot\left\lceil \frac{Q}{P} \right\rceil$ 的運輸費用，而最後一週期則為

$R\cdot\left\lceil \frac{DT-\left(\left\lceil DT/Q \right\rceil -1\right)Q}{P} \right\rceil$。

根據上述資訊可計算相關成本。

總成本＝總持有成本＋總訂購固定成本＋總訂購變動成本

$$TC(Q)=H(Q)+S_1(Q)+S_2(Q) \tag{3.3}$$

其中，

$H(Q)$：規劃期內的總存貨持有成本。

$S_1(Q)$：規劃期內的總訂購固定成本，與訂購總次數相關。

$S_2(Q)$：規劃期內的總訂購變動成本，與訂購所需要的貨櫃數量相關。

上述三項成本解構如下：

總持有成本：

$$H(Q)=h\cdot\frac{Q}{2}\cdot\frac{Q}{D}\cdot\left(\left\lceil\frac{DT}{Q}\right\rceil-1\right)$$

$$+h\cdot\frac{DT-\left(\lceil DT/Q\rceil-1\right)Q}{2}\cdot\left(\frac{DT-\left(\lceil DT/Q\rceil-1\right)Q}{D}\right) \tag{3.4}$$

總訂購固定成本：

$$S_1(Q)=K\cdot\left\lceil\frac{DT}{Q}\right\rceil \tag{3.5}$$

總訂購變動成本：

$$S_2(Q)=R\cdot\left\lceil\frac{Q}{P}\right\rceil\cdot\left(\left\lceil\frac{DT}{Q}\right\rceil-1\right)+R\cdot\left\lceil\frac{DT-\left(\lceil DT/Q\rceil-1\right)Q}{P}\right\rceil \tag{3.6}$$

以下分別說明三項成本的公式定義：

(1) 總持有成本方面：

公式(3.4)的第一項代表廠商在前期每次皆訂購Q個單位的周期內的持有成本，第二項則為最後一次訂購的持有成本。

(2) 訂購固定成本方面：

公式(3.5)為廠商每次訂購所需支付的固定費用，由高斯函數計算出廠商的訂購總次數來計算成本。

(3) 訂購變動成本方面：

公式(3.6)與廠商每次訂購所要的貨櫃數量有關。成本第一項代表廠商於前期每次訂購Q時的總運輸費用,第二項則為最後一次訂購的運輸費用。

本論文同時考量兩因素對成本的影響，使得所考慮的成本函數較以往 EOQ 模型多考慮了一項總訂購變動成本 $S_2(Q)$。另外，由於改良型模型中 $H(Q)$ 與 $S_1(\mathrm{Q})$ 兩成本同時使用了高斯函數來計算 $\frac{DT}{Q}$ 此數值，因此，為了方便計算總成本，本論文令一函數 $LTC(Q)$ 為總持有成本 $H(Q)$ 與訂購固定成本 $S_1(\mathrm{Q})$ 之和。

$$LTC(Q) = H(Q) + S_1(Q) \tag{3.7}$$

總成本亦可改寫為：

$$TC(Q) = LTC(Q) + S_2(Q) \text{。} \tag{3.8}$$

本論文將前述三項成本函數分成兩部份探討。第一部份為 $LTC(Q)$，第二部份則為訂購變動成本 $S_2(Q)$，如圖 3.2 所示。

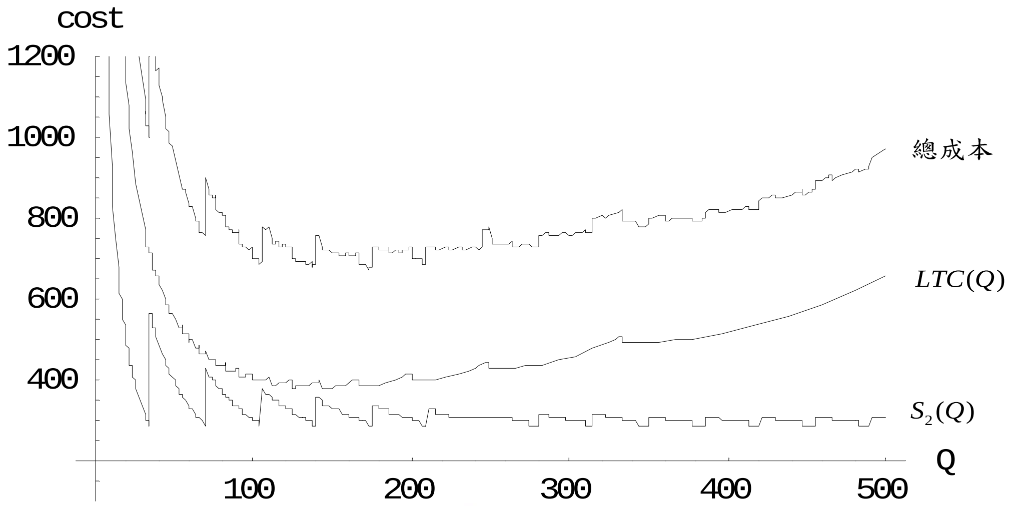

圖 3.2 $LTC(Q)$ 與 $S_2(Q)$ 示意圖

從圖 3.2 可觀察到總成本函數有許多轉折點，這是由於本論文模型中的成本函數用到了許多高斯函數來計算。而這些轉折點即為總成本的局部最小值，並具有一共通的特性就是當訂購量增加超過這些轉折點會使成本呈一階梯式的變化。

本論文模型求解的困難之處有兩點。第一點是由於成本的特性無法使用微分的方法來求解。第二點則是使用了高斯函數來計算成本而使得總成本函數非凸函數，並使總成本具有許多的局部最小解。因此，這兩點增加了求解的困難。

本論文將先分別就此兩成本函數歸納出相關性質，並依此來找出總成本的性質，以作為決定最適解方法的依據。

3.4 改良型模式成本函數的性質說明

為了說明各成本函數的性質，以下將分別就 $LTC(Q)$與 $S_2(Q)$依序說明，並歸納出總成本函數性質。

一、成本函數 $LTC(Q)$的性質說明：

根據 Schwartz[14]的研究，廠商在有限的規劃期 T 之下，若不考慮總訂購變動成本，只考慮與訂購次數相關的訂購成本以及存貨持有成本時，可知最佳訂購批量 Q 與總需求 TD 有下列關係：$TD=mQ$，m 即為廠商的總訂購次數。而本論文模型若不計算總訂購變動成本 $S_2(Q)$，所考慮的成本項目則與 Schwartz 存貨模型[14]所考慮的成本項目相同。

根據 Schwartz[14]的求解方法，可得到下列性質一：

性質一：必存在一正整數 $m_1=\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+2hDT^2/K}}{2} \right\rceil$，當 $Q=\frac{DT}{m_1}$ 時，

$LTC(Q=\frac{DT}{m_1})=\min\limits_{Q>0}\{LTC(Q)\}$。

說明：請參閱附錄 A。

但是，總成本由兩項成本 $LTC(Q)$與 $S_2(Q)$所構成。$LTC(Q=\frac{DT}{m_1})$ 為 $LTC(Q)$ 之最小值，但 $Q=\frac{DT}{m_1}$ 卻不一定為本論文模型之最適解，m_1 也不一定為最佳的訂購總次數。

然而，當給定總訂購次數為 m 時，即代表限定了訂購量的範圍為 $\left[\frac{DT}{m},\frac{DT}{m-1}\right)$。則 $LTC(Q=DT/m)$可視為一個 m 的二次函數(quadratic function)，並可寫成下列形式：

$$LTC(Q=\frac{DT}{m})=mK+\frac{hDT^2}{2m} \tag{3.9}$$

可知 $LTC(Q=DT/m)$為 $LTC(Q)$於此範圍內之最小值。在給定總訂購次數之下，若能找出總變動成本 $S_2(Q)$的性質，即能幫助求解。

因此，本研究分段給定訂購批量的範圍，將各成本函數分段來計算，每一段的範圍為$\left[\dfrac{DT}{m},\dfrac{DT}{m-1}\right)$。如圖 3.3 所示。

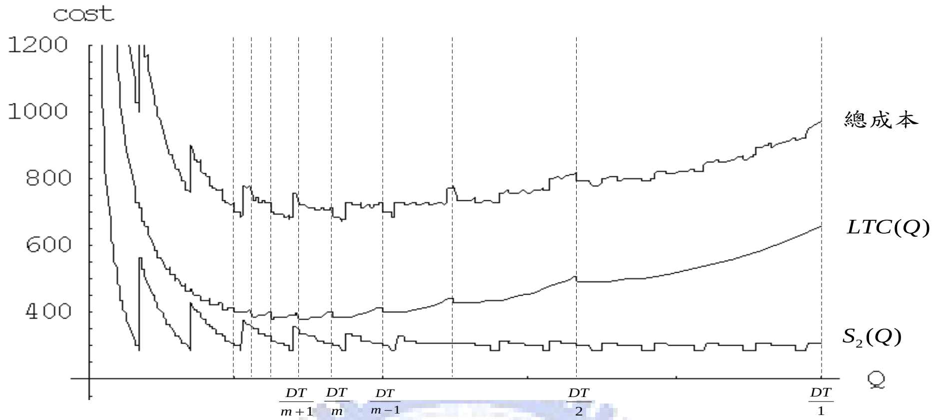

圖 3.3 成本函數位於不同訂購量的範圍

以下將說明成本函數 $S_2(Q)$在給定訂購量於任意正整數 m 所形成的$\left[\dfrac{DT}{m},\dfrac{DT}{m-1}\right)$區間時，根據觀察與公式分析而得到的性質。

二、成本函數 $S_2(Q)$的性質說明：

性質二：要運送總需求為 DT 數量的產品，至少需使用$\left\lceil \frac{DT}{P} \right\rceil$個貨櫃。因此，若每次的訂購量 Q 為貨櫃容量 P 的整數倍時(即$Q = iP$，i 為任意正整數)，可知所使用的貨櫃數量即為最少的數量。

說明：

性質二說明了 $S_2(Q)$具有一最小值$R\left\lceil \frac{DT}{P} \right\rceil$。例如：當總需求 DT=1000 單位時，若 P=35，不論訂購量為何，可知最少需要$\left\lceil \frac{DT}{P} \right\rceil = 29$個貨櫃來運送產品。若廠商每次訂購的訂購量 Q=280=8P，可知廠商最少共需訂購四次。前三次訂購每次需要 8 個貨櫃，最後一次訂購則需要 5 個貨櫃，總共需要 29 個。此時無法再藉由改變訂購量來降低所需的貨櫃數。

如圖 3.4 所示，只要 Q 為 P 的整數倍時，可知即使每次訂購所需的貨櫃數也許不同，但最後總和必定仍為最少之貨櫃數，也會有最小的總訂購變動成本。

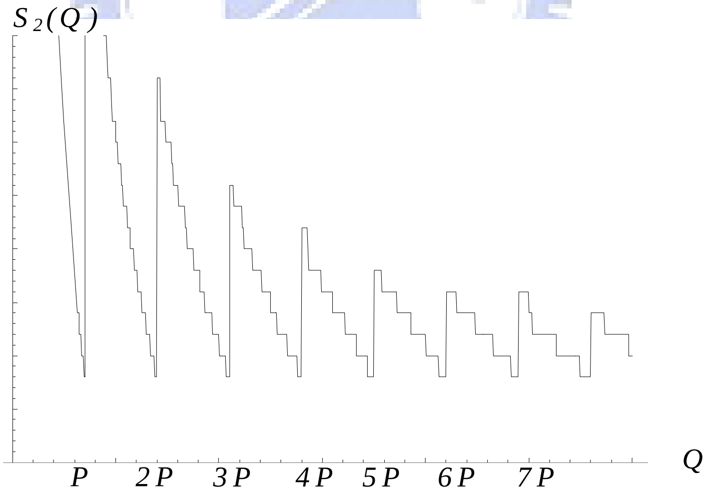

圖 3.4 $S_2(Q)$示意圖

而 $S_2(Q)$在給定總訂購次數為 m 之下(即訂購量的範圍為：$\frac{DT}{m} \le Q < \frac{DT}{m-1}$)，根據公式(3.9)可化簡成下列公式：

$$
\begin{aligned}
S_2(Q) &= R \cdot \left\lceil \frac{Q}{P} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil - 1 \right) + R \cdot \left\lceil \frac{DT - \left(\lceil DT/Q \rceil - 1 \right) Q}{P} \right\rceil \\
&= R \left\lceil \frac{Q}{P} \right\rceil (m\text{-}1) + R \left\lceil \frac{DT-(m-1)Q}{P} \right\rceil \qquad if \ \frac{DT}{m} \le Q < \frac{DT}{m-1} \\
&= S_2^{(1)}(Q) + S_2^{(2)}(Q)
\end{aligned}
$$

$S_2^{(1)}(Q)$：前(m-1)次訂購，每次訂購量為 Q 時，所需的總運送成本。

$S_2^{(2)}(Q)$：最後一次訂購，所需的運送成本。

為了進一步說明 $S_2(Q)$變動的性質，以下將分別就 $S_2^{(1)}(Q)$與 $S_2^{(2)}(Q)$兩項成本於$\left[\frac{DT}{m}, \frac{DT}{m-1} \right)$區間的性質進行分析。

性質三：若兩訂購量 Q_1、Q_2，滿足$\frac{DT}{m} \le Q_1 < Q_2 < \frac{DT}{m-1}$，且 $Q_2=Q_1+\varDelta Q$，$\varDelta Q$ 為一極小正數，可知：

(1) 前(m-1)次訂購中，每次所使用的貨櫃數量為$\left\lceil \frac{Q}{P} \right\rceil$，此數量隨 Q 的增加而增加或不變。換言之，$0 \leqq S_2^{(1)}(Q_2)\text{-} S_2^{(1)}(Q_1) \leqq (m\text{-}1)R$。

(2) 最後一次訂購，所使用的貨櫃數量為$\left\lceil \frac{DT-(m-1)Q}{P} \right\rceil$，此數量隨 Q 的增加而減少或不變。換言之，$0 \leqq S_2^{(2)}(Q_1) - S_2^{(2)}(Q_2) \leqq R$。

說明：

根據上述 $S_2(Q)$的兩點性質，當 Q 增加時，很難判斷 $S_2(Q)$變化的情形。然而，若兩訂購批量 Q_1、Q_2 使廠商的總訂購次數相同，且又同時使廠商最後一次訂購所需的貨櫃數目相同(即表示 $S_2^{(2)}(Q_1)= S_2^{(2)}(Q_2)$)，即可確定 $S_2(Q_1) \leqq S_2(Q_2)$。

三、總成本函數 $TC(Q)$的性質說明：

根據前述性質一、二、三可歸納出總成本的特性。

性質四：若由性質一所求得的訂購量 $Q=DT/m_1$，且 Q 為 P 的整數倍時，則 $TC(Q=\dfrac{DT}{m_1})=\underset{Q>0}{Min}\ TC(Q)$。

說明：

根據性質一，可知 $LTC(Q=DT/m_1)$為 $LTC(Q)$之最小值。根據性質二，當 Q 為貨櫃容量 P 的整數倍時，只會造成最小的總訂購變動成本。因此，若 $Q=DT/m_1$ 同時亦為 P 的整數倍時，可知 Q 同時使 $LTC(Q)$與 $S_2(Q)$為最小值，故為總成本之最適解。

性質五：

當 $Q' \leqq Q$，且 $\left\lceil \dfrac{DT}{Q'} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{DT}{Q} \right\rceil = m$，和 $\left\lceil \dfrac{DT-(m-1)Q'}{P} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{DT-(m-1)Q}{P} \right\rceil = b$，則 $TC(Q') \leqq TC(Q)$。

說明：性質五證明請參閱附錄 B。

當訂購批量為 Q 或 Q'時，$\left\lceil \dfrac{DT}{Q'} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{DT}{Q} \right\rceil = m$ 表示不論哪一訂購批量皆使得廠商的總訂購次數為 m。$\left\lceil \dfrac{DT-(m-1)Q'}{P} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{DT-(m-1)Q}{P} \right\rceil = b$ 則表示在總訂購次數為 m 次之下，不論哪一訂購批量皆使得廠商最後一次訂購所需的貨櫃數為 b。性質五說明若廠商訂購量為 Q，必可以找到一相同或更佳的訂購量 Q'，但 Q' 需符合上述三個條件。

舉例說明如下，以前述性質二之例子說明，當 TD=1000，且 P=35 時，若 Q=280=8P，可知廠商共需訂購四次。前三次訂購每次需要 8 個貨櫃；最後一次需要 5 個。然而，吾人可以找到另一訂購量 Q'=275 使得廠商的總訂購次數與相關變動成本皆不變。但只會產生較少的存貨持有成本，可得較低之總成本。

根據性質五可知若一訂購量 Q 使廠商的訂購總次數為 m，且最後一次訂購所需的貨櫃數為 b。則根據 m、b，可找出 Q 的可能範圍；並可找出總成本於該範圍內的最適解 Q'。以上述例子說明，如圖 3.5 所示，當 $m=4$、$b=6$，吾人即可求出 Q 的可能範圍為[263, 275)，以及 Q'=263。

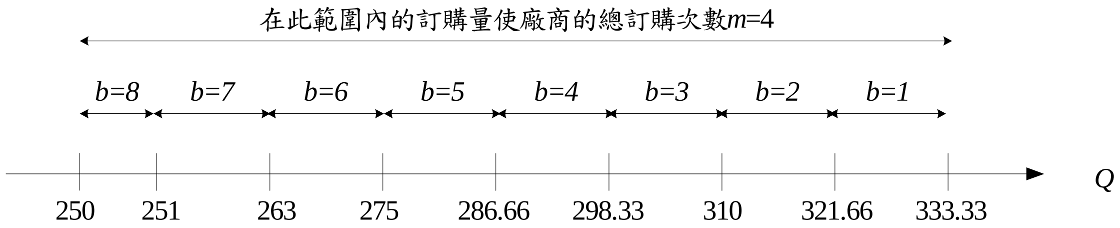

圖 3.5 利用 m 、b 找出 Q 的範圍

以下說明該範圍與 Q'的計算方式：

1. 若 Q 使得廠商的訂購總次數為 m 時，可知：$\frac{DT}{m} \leq Q < \frac{DT}{m-1}$。故可知廠商最後一次的訂購數量必在下列範圍：$0 < DT-(m-1)Q \leqq DT/m$。
2. 而當 Q 同時使得廠商最後一次訂購所需貨櫃數為 b 時 ，可知：$(b-1)P < DT-(m-1)Q \leqq bP$ 。
3. 利用前述兩點最後一次訂購量範圍取交集，即可找出 Q 的可能範圍。

   以下將分兩種情形考慮：

   一、根據第一點，由於最後一次訂購數量不能大於 DT/m，

   若 $b \geq \frac{DT}{mP}$，可知： $(b-1)P < DT-(m-1)Q \leqq DT/m \leqq bP$。

   並可化簡成：$\frac{DT}{m} \leq Q < \frac{DT-(b-1)P}{m-1}$ 。

   二、若 $b < \frac{DT}{mP}$，可知： $(b-1)P < DT-(m-1)Q \leqq bP \leqq DT/m$。

   故可化簡成：$\frac{DT-bP}{m-1} \leq Q < \frac{DT-(b-1)P}{m-1}$ 。

4. 在決定了 Q 的可能範圍之後，根據性質五便可以找出 Q'。

5. 總結上述，可知：

$$\text{若}\ b \geq \frac{DT}{mP}\text{，可知}\ TC\left(Q' = \frac{DT}{m}\right) \leq \min_{\frac{DT}{m} \leq Q < \frac{DT - P(b-1)}{m-1}} TC(Q)\ \text{。} \tag{3.10}$$

$$\text{若}\ b < \frac{DT}{mP}\text{，可知}\ TC\left(Q' = \frac{DT - Pb}{m-1}\right) \leq \min_{\frac{DT - Pb}{m-1} \leq Q < \frac{DT - P(b-1)}{m-1}} TC(Q)\ \text{。} \tag{3.11}$$

小結：

本論文將總成本 $TC(Q)$ 分成 $LTC(Q)$ 與 $S_2(Q)$ 兩個成本分別探討其性質，對兩成本皆能分別找到一訂購量使其最小。而根據前述性質，對總成本的最適解有下列兩點結論。

1. 若 $Q = \dfrac{DT}{m_1}$ 此數值為 P 的整數倍，則可判定 $Q = \dfrac{DT}{m_1}$ 亦為總成本之最適解。
2. 根據性質五，由於總成本最適解必然為某些特定訂購量，藉由比較這些特定訂購量即可得總成本最適解。因此，若 $Q = \dfrac{DT}{m_1}$ 不為 P 的整數倍，本論文將藉由 $\dfrac{DT}{m_1}$ 以及所探討成本函數之性質來減少求解範圍，以找出最適解。

3.5 求解方法說明

本章將說明尋找最適解的流程。尋找最適解的流程如圖 3.6 所示。首先，本論文根據性質一可尋找到一訂購量 $Q=DT/m_1$ 能使總持有成本與訂購固定成本兩者和最小。若此訂購量 $Q=DT/m_1$ 為 P 的整數倍，則代表 Q 使訂購變動成本最小，可確定 Q 即為總成本之最適解，並結束求解過程。但若不成立，則本論文提出一方法來尋找總成本之最小值。

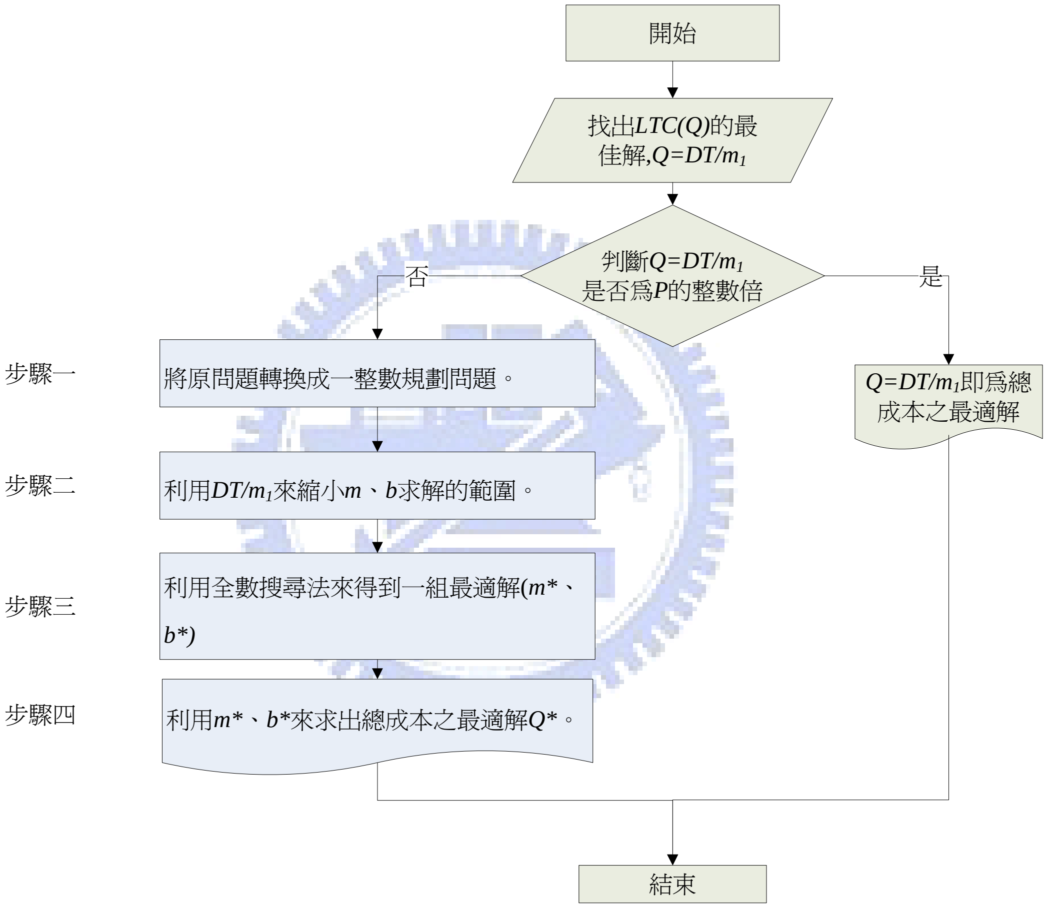

圖 3.6 尋找總成本之最適解之流程

本論文所提出之方法可分四步驟說明。

步驟一：根據性質五，可將原問題轉換成一整數規劃問題。

本論文改良型模型的問題為求一訂購量 Q 使 $TC(Q)$最小。由於成本函數的特性為非線性，在求解上有困難。但根據性質五，若給定任意正整數 m、b，便能計算出訂購量的一特定區間，以及總成本位於該區間之最小值。

由於 m、b 不同的組合所計算出來的區間包含了訂購量的所有可能範圍。故只要找到一組特定正整數 m^*、b^*，即可計算出總成本之最適解 Q^*。這表示可將總成本由原先的連續函數 $TC(Q)$轉換成一離散型的函數，

即 $TC(Q)=\begin{cases} TC\left(Q=\dfrac{DT}{m}\right) & \text{if } b \geq \dfrac{DT}{mP} \\ TC\left(Q=\dfrac{DT-Pb}{m-1}\right) & \text{if } b < \dfrac{DT}{mP} \end{cases}$。

成本函數也可因此而轉換成與 m、b 相關的數值來幫助求解。

（例如：$\left\lceil \dfrac{DT}{Q} \right\rceil = m$，$TC(Q=\dfrac{DT}{m})=\dfrac{hDT^2}{2m}+km$

$+R\left\lceil \dfrac{DT}{mP} \right\rceil (m-1)+R\left\lceil \dfrac{DT-(m-1)(DT/m)}{P} \right\rceil$。）

原先的問題可視為一個有兩個決策變數的非線性整數規劃問題，如下：

$$Min\ TC(Q)=\begin{cases} TC\left(Q=\dfrac{DT}{m}\right) & \text{if } b \geq \dfrac{DT}{mP} \\ TC\left(Q=\dfrac{DT-Pb}{m-1}\right) & \text{if } b < \dfrac{DT}{mP} \end{cases} \quad (3.12)$$

決策變數：總訂購次數 m、最後一次訂購所需的貨櫃數 b。

限制式：m、b 需為正整數。

由於上述非線性整數規劃問題仍然包含了高斯符號，使得封閉形式解(closed-form)不易求出，故本研究利用在有限求解範圍之下，所求整數解為有限個數的性質，藉由前述成本函數性質來找出 m、b 的範圍，並以全數搜尋法來求解。

步驟二：利用 DT/m_1 來縮小 m、b 求解的範圍。

以下分別說明如何計算 b、m 的範圍：

一、b 的範圍：

由於當訂購總次數為 m 時，廠商的訂購量 $Q \geqq DT/m$。即代表最後一次訂購的數量 $(DT-(m-1)Q)$ 最多為 DT/m。故可知 b 的範圍為：$\left\lceil \frac{DT}{mP} \right\rceil \geq b > 0$。這表示只要能求出 m 的範圍，即可知道 b 的範圍。

二、m 的範圍：

另外，為了減少求解時間，本研究根據前述成本函數性質，以一啟發式的方法來求出 m 的範圍。即求出 m 的範圍為：$m_{\min} \leqq m \leqq m_{\max}$。

本論文尋找 m 的範圍的方法共可分為三個步驟，說明如下：

(1) 首先利用 $Q = \frac{DT}{m_1}$ 找出一訂購量 $Q_L = \left\lceil \frac{DT/m_1}{P} \right\rceil P$，利用此訂購量即可縮小最適解 Q^* 的範圍。

如圖 3.7 所示，由於 Q_L 為大於 $\frac{DT}{m_1}$ 且為 P 的整數倍中最小之訂購量。

根據性質二，$S_2(Q_L)$ 為最小之總訂購變動成本。

由於 $LTC(Q_L)+S_2(Q_L) \geqq LTC(Q^*)+S_2(Q^*)$。

可知 $LTC(Q_L) - LTC(Q^*) \geqq S_2(Q^*)-S_2(Q_L) \geqq 0$。

即 $LTC(Q_L) \geqq LTC(Q^*)$。

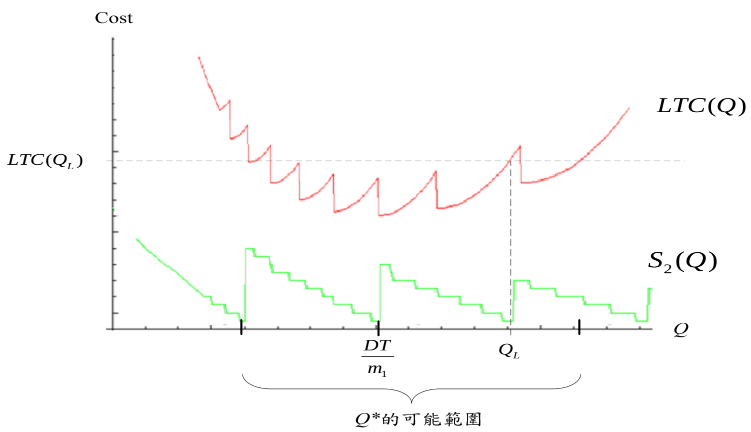

圖 3.7 Q^*的可能範圍示意圖

(2) 接著，利用上述 Q^*的限制式，可以找出 m 的範圍。

當訂購批量為 Q^*，可計算出廠商的最佳訂購總次數 m^*。

而根據附錄 B 之公式(B.1)可知：$LTC(Q^*) \geq LTC(\frac{DT}{m^*})$ 。

這表示 m^*須滿足 $LTC(Q_L) \geq LTC(Q^*) \geq LTC(\frac{DT}{m^*})$ 此限制式。

(3) 求出 m 的範圍：

根據公式(3.9)，$LTC(Q_L) \geq LTC(\frac{DT}{m^*})$ 可化簡成下列公式：

$$LTC(Q_L) \geq m^*K + \frac{hDT^2}{2m^*}$$

如圖 3.8 所示，由於 $LTC(Q = \frac{DT}{m})$ 為 m 的一個二次函數，利用二次函數公式解可求出 m^*的範圍。但為了符合 m^*需為正整數之限制，可求出 $m_{\min}$、$m_{\max}$ 分別為：

$$m_{\max} = \left\lfloor \frac{LTC(Q_L) + \sqrt{LTC(Q_L)^2 - 2KhDT^2}}{2K} \right\rfloor \quad (3.12)$$

$$m_{\min} = \left\lceil \frac{LTC(Q_L) - \sqrt{LTC(Q_L)^2 - 2KhDT^2}}{2K} \right\rceil \quad (3.13)$$

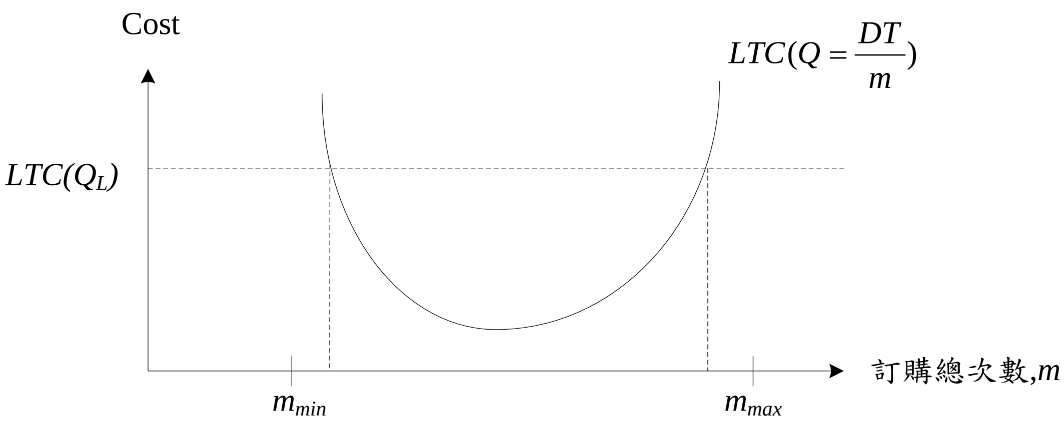

圖 3.8 m 的範圍求解示意圖

步驟三：並求出一組 m^*、b^*為上述問題之最適解。

根據步驟一、二將問題轉化成整數規劃的問題以及 m、b 求解的範圍之後，利用全數搜尋法即可求出一組最佳的解(m^*, b^*)

步驟四：利用 m^*、b^*來求出總成本之最適解 Q^*。

根據公式(3.7)、(3.8)可求出一最適解，

若 $b^* \geq \dfrac{DT}{m^* P}$，可知 $Q^* = \dfrac{DT}{m^*}$。

若 $b^* < \dfrac{DT}{m^* P}$，可知 $Q^* = \dfrac{DT - Pb^*}{m^* - 1}$。

3.6 範例分析

本章利用一數據案例來說明 3.5 節所導出的經濟批量特性與求解方法。本論文以 K=20、R=10、h=2、T=1、D=1000、P=35 作為基準，以下將利用 3.5 節之求解方法進行求解。求解的步驟如下：

1. 找出 $LTC(Q)$之最小值：

   利用 $m^s = \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{1+2hDT^2/K}}{2} \right\rfloor = 7$ 可找出 $LTC(Q)$的最佳值，Q=1000/7。由於不是 P 的整數倍，將繼續下一步驟。

2. 原先的問題可轉換成整數規劃問題：

目標式：$Min\ TC(Q) = \begin{cases} TC\left(Q = \dfrac{DT}{m}\right) & if\ \ b \ge \dfrac{DT}{m} \\ TC\left(Q = \dfrac{DT-Pb}{m-1}\right) & if\ \ b < \dfrac{DT}{m} \end{cases}$

限制式：$\left\lceil \dfrac{DT}{mP} \right\rceil \ge b > 0$

$m_{\min} \leqq m \leqq m_{\max}$

m、b 需為正整數。

目標式中的兩項成本如下：

$$TC(Q=\frac{DT}{m}) = \frac{hDT^2}{2m} + Km + R\left\lceil \frac{DT}{mP} \right\rceil (m-1) + R\left\lceil \frac{DT-(m-1)(DT/m)}{P} \right\rceil$$

$$TC\left(Q=\frac{DT-bP}{m-1}\right) = LTC\left(Q=\frac{DT-bP}{m-1}\right) + S_2\left(Q=\frac{DT-bP}{m-1}\right)$$

$$= \frac{h(DT-bP)^2}{2D(m-1)} + \frac{hb^2P^2}{2D} + Km + R\left\lceil \frac{DT-bP}{(m-1)P} \right\rceil (m-1) + Rb$$

3. 求出 m 的範圍：

由於 $Q_L = \left\lceil \frac{DT/m_1}{P} \right\rceil P = 175$

$$m_{\max} = \left\lceil \frac{LTC(Q_L) + \sqrt{LTC(Q_L)^2 - 2hDT^2}}{2K} \right\rceil = 9$$

$$m_{\min} = \left\lfloor \frac{LTC(Q_L) - \sqrt{LTC(Q_L)^2 - 2KhDT^2}}{2K} \right\rfloor = 5$$

4. 將模式參數分別帶入上述方程式之後，由於兩決策變數 m、b 的範圍已知，利用全數搜尋法將所有可行解帶入之後，可求得上述問題之一組最適解為 $(m^*,b^*)=(6,4)$。

5. 由於 $b^* < \frac{DT}{m^*P}$，可知最佳訂購批量 $Q^* = \frac{DT - Pb^*}{m^*-1} = 172$。

表示當廠商每次訂購 172 單位的產品，在訂購五次之後，最後一次在訂購 140 單位的產品。

第四章 數值研究

為進一步了解模式使用的情況與結果，本章針對模型重要相關參數進行敏感性分析，以進一步了解不同的成本要素對於決策所造成的影響。最後並用同一個數據案例分別在給定不同的規劃期 T 與不同的需求 D 之下與 Lee 學者[14]的存貨模型加以比較。

4.1 存貨模型之數值分析

本論文以 K=20、R=10、h=2、T=1、D=1000、P=35 作為基準，並就模型參數以敏感度分析來比較對總成本的影響。在找出影響成本的重要因素之後，再就該因素來分析對訂購量的影響。並分別將 R、P 此兩因素分別就不同數值交叉比對來探討雙重因素對總成本的影響。

4.1.1 個別因素的影響：

(一) 影響總成本的重要因素

以下針對 3.5 節之範例變動各參數做敏感度的分析。分析變動的參數為 P、K、h、R 等四參數，接著對各目標參數做 20%的幅度變化，其結果如下表所示。

表 4.1 各參數對最佳總成本的敏感度分析

變動參數 / 變動範圍	P	K	h	R
-80%	1713.52	417.74	416.77	345.52
-60%	1005.00	471.00	470.31	403.52
-40%	763.19	511.00	510.47	461.52
-20%	646.67	551.00	544.02	519.52
0%	577.52	577.52	577.52	577.52
20%	525.00	601.52	611.02	635.52
40%	492.86	625.52	631.40	693.52
60%	466.67	649.52	651.60	751.52
80%	445.00	670.78	671.80	809.52

表 4.2 各參數對最佳總成本的的變異比例分析

變動參數 / 變動範圍	P	K	h	R
-80%	196.70%	-27.67%	-27.83%	-40.17%
-60%	74.02%	-18.44%	-18.56%	-30.13%
-40%	32.15%	-11.52%	-11.61%	-20.09%
-20%	11.97%	-4.59%	-5.80%	-10.04%
0%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
20%	-9.09%	4.16%	5.80%	10.04%
40%	-14.66%	8.31%	9.33%	20.09%
60%	-19.19%	12.47%	12.83%	30.13%
80%	-22.95%	16.15%	16.32%	40.17%

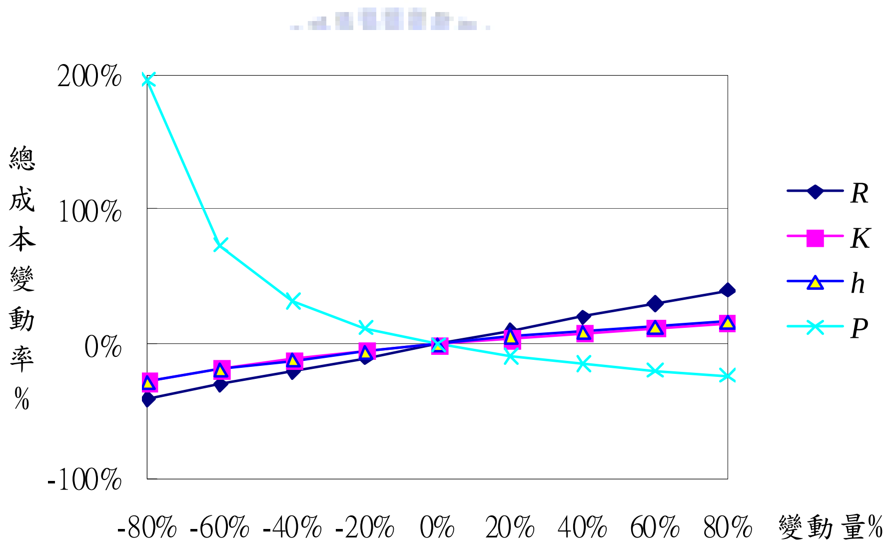

圖 4.1 各因素的敏感性分析圖

根據表 4.1、表 4.2、圖 4.1 可以分析歸納出各參數對於最佳總成本的影響和分析如下：

(1) 載具容量 P：

如圖 4.1，可以觀察到 P 的變動與總成本 $TC(Q)$之間為一遞減的關係，隨 P 增加越大，總成本減少越少。

這是由於在有限的規劃期之下，本論文考慮的需求為固定需求。所以 P

增加會使得總訂購變動成本減少，而隨著 P 增加，由於廠商仍然維持一定的訂購的總次數，代表廠商仍然需要一定的運輸費用，因此總成本會隨 P 增加而呈非線性遞減。

(2) 訂購變動成本(變動成本 R)：

可以觀察到 R 與總成本為一線性關係。這是由於在此例子中 R 的改變皆不會使最佳訂購量改變，故會使運輸成本($S_2(Q)$)呈線性增加，而使得總成本也呈線性增加。。

(3) 持有成本 h、訂購固定成本(每次的訂購費用 K)：

可以觀察到此兩參數的變動與總成本為一遞增關係，但隨著 h、K 越大而總成本增加越少。

合理的推測此現象的原因是由於 h、K 越大會使得廠商的總訂購次數越少，連帶使得最佳訂購量逐漸增多。由成本函數的公式(3.4)、(3.5)、(3.6)可知 h、k 任一項單一參數的變動皆會影響到所有的成本。因此，總成本並不像傳統 EOQ 模型中與 h、K 的變動呈線性關係。

藉由上述的分析，可得 3 點結論如下：

1. R 變動對總成本的影響皆比 h、k 還大，且為線性關係。
2. P 的變動與總成本可觀察到為一遞減的關係。但本論文認為這是由於當 P 不斷減少趨近於 0 時，由於總訂購變動成本 $S_2(Q)$ 會呈非線性遞增所產生之必然的結果。

   甚至可以推論當 P 非常大時，所需要之貨櫃數即等於總訂購次數。而總成本即不再受 P 的改變而影響。
3. 本論文認為在此模型中，R、P 為影響成本的兩重要因素。

(二) 影響最佳訂購量的重要因素

由於 R、P 的大小直接影響了廠商的運輸成本，為了分析 *R*、*P* 此兩參數發生變化時對最佳訂購量的影響，本論文以上述案例作為基準，分別設計兩極端案例作為分析。

如表 4.3 所示，案例一與 3.6 節例子相同，而由成本分析可知案例一的運輸成本佔總成本的比例相當大。本論文另外令 h=200 做為案例二，案利二的成本比率則幾乎相同。本論文將分別就兩不同案例來分析。

表 4.3 h=2 與 h=200 兩案例的比較

h	最佳訂購量	持有成本(比例)	訂購成本(比例)
案例一 h=2	172	167.52 (29%)	410 (71%)
案例二 h=200	500/29	1724.12 (49.77%)	1740 (50.22%)

以下分別就 h=2、與 h=200 兩案例，各以 R=10、P=35 作為基準，分別就 10% 的幅度變化來分析其對最佳訂購量的影響。案例一、案例二之分析結果說明如下。

1. 案例一之分析結果：

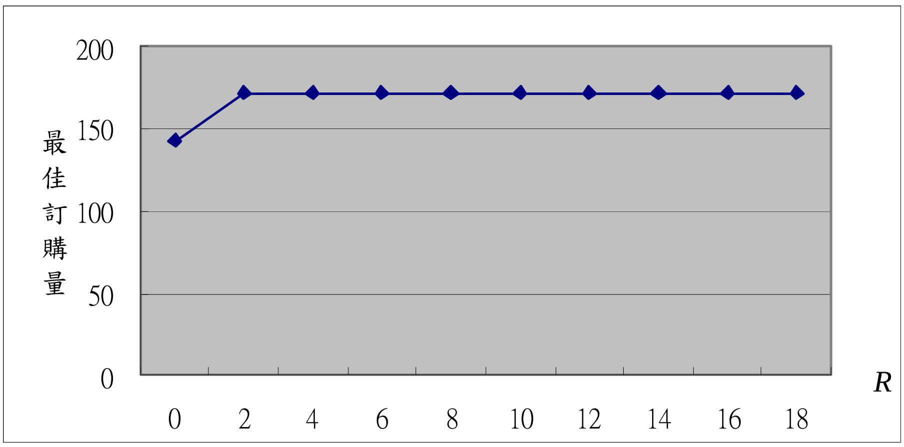

圖 4.2 h=2 時，R *變動*與最佳訂購量關係

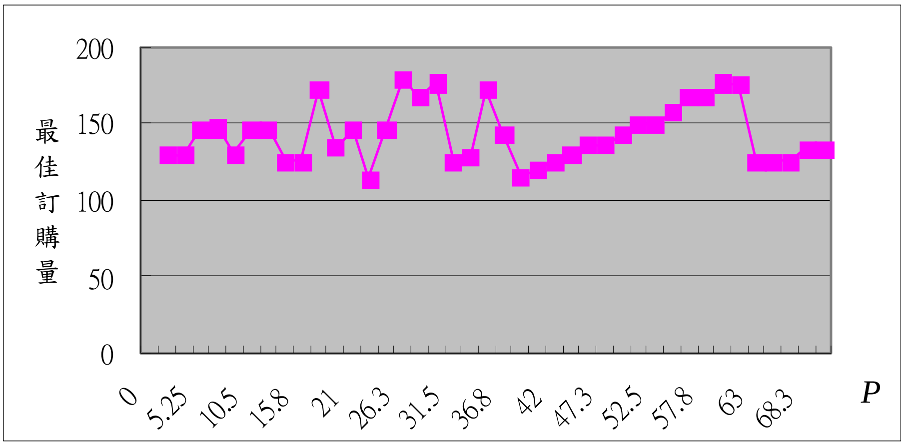

圖 4.3 h=2 時，P 變動與最佳訂購量關係

根據圖 4.2、圖 4.3 可以分析歸納出各參數對於最佳總成本的影響和分析如下：

(1) 當 R 為零時，本論文的存貨模型即等同於 Schwartz 學者[7]所提出的模型。由圖 4.2 可以觀察到當 R=0 時，最佳的訂購量等於 $\frac{1000}{7}$ 。

(2) 當 R 超過 1.15 時，由圖 4.2 可以觀察到最佳訂購量不受 R 改變的影響。這是由於在此案例中，最佳訂購量已經使運輸成本為最小，無法再藉由改變訂購量來降低成本。

(3) 由圖 4.3 觀察可以發現，當 P 增加時，最佳訂購量會呈不規則變化。這是由於此案例中，運輸成本的比重較大。因此，為了使運輸成本為最小（表示使所需的載具數目 $\left\lceil \frac{Q}{P} \right\rceil \cdot \left(\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil - 1 \right) + \left\lceil \frac{DT - (\lceil DT/Q \rceil - 1)Q}{P} \right\rceil$ 最小），隨著 P 增加，最佳訂購量 Q 有可能增加以降低訂購總次數 $\left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil$ 來降低成本，也有可能減少以降低每次訂購所需載具數目 $\left\lceil \frac{Q}{P} \right\rceil$ 。

2. 案例二之分析結果：

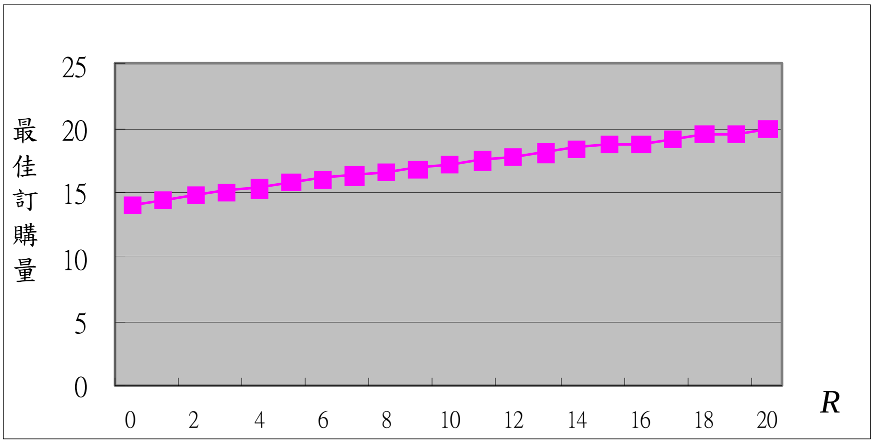

圖 4.4 h=200 時，R 變動與最佳訂購量關係

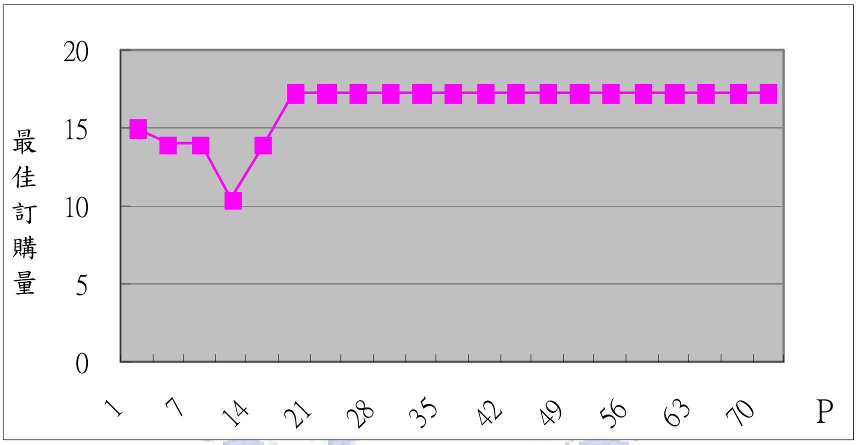

圖 4.5 h=200 時，P 變動與最佳訂購量關係

根據圖 4.4、4.5 可以分析歸納出各參數對於最佳總成本的影響和分析如下：

(1) 由圖 4.4 觀察可發現，隨著 R 增加，最佳訂購量逐漸增加，但非線性。

(2) 由圖 4.5 觀察可發現，當 P 超過 21 時，最佳訂購量皆為 $\frac{1000}{58}$ 並為總需求的分數倍，且不隨 P 增加而改變。這是由於此時持有成本占總成本的比重較大，廠商會傾向訂購相同數量產品以獲得較低總成本。

4.1.2 雙重因素的影響

本論文想要解決的問題之一便是 R、P 為不同的的組合時，對成本有什麼影響。例如，若廠商可以選擇兩種不同載具來運輸，運輸費用與容量限制分別為 $(R,P)=(10,35)$與$(R,P)=(20,70)$，則採用哪一種載具可以有較低的成本？

為了利用本論文之存貨模型來回答上述問題，本論文先選定 R 的值，再與各個不同的 P 值兩兩加以排列各種可能的變化，以求出當兩因素同時變動時對總成本的影響。分析的結果如下：

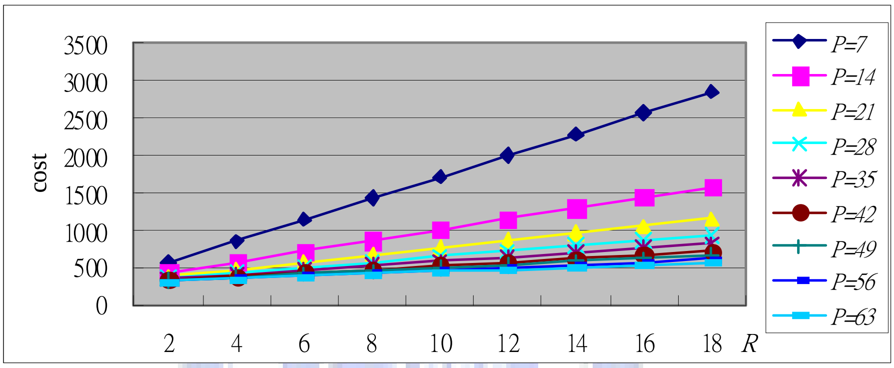

圖 4.6 R 與 P 的成本分析圖

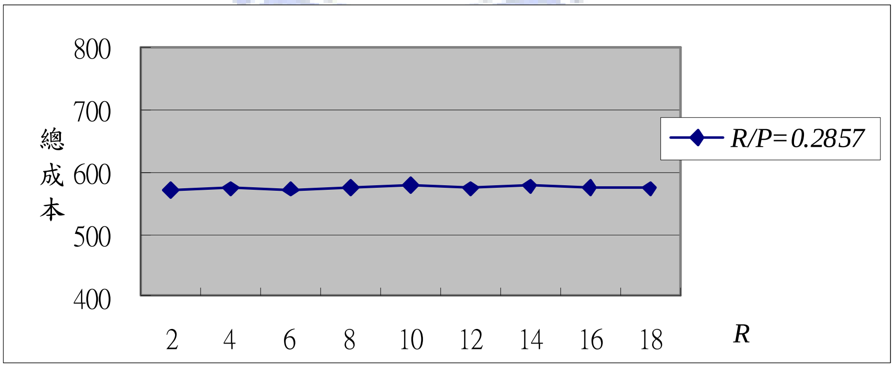

圖 4.7 相同 R/P 比、不同 R 對成本的分析圖

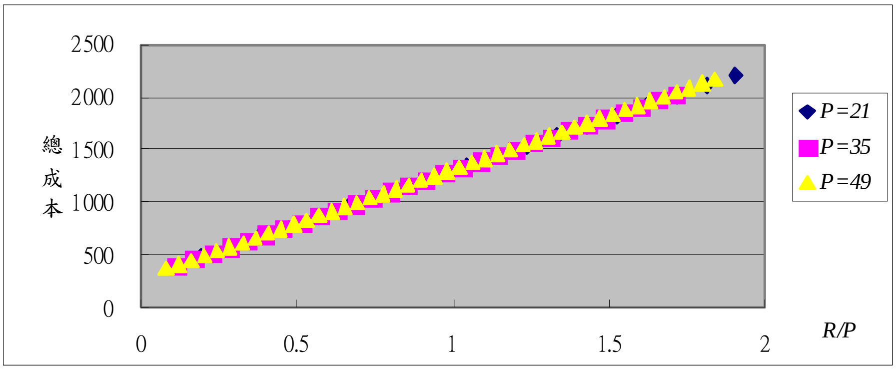

圖 4.8 不同 R/P 值與總成本的關係

在選定的兩因素為獨立的假設之下，分析的結果可得 3 點結論如下：

1. 由圖 4.5 可推論當變動成本 R 越小且載具容量 P 越大時，可得較小之總成本。
2. 根據圖 4.6，只要 R/P 值相同，即使不同的組合，在此案例中對成本的影響不大。本論文利用 3.6 節的例子中 $\frac{R}{P}=\frac{10}{35}=0.2857$ 作為基準，去分析在相同的 R/P 比之下，不同的 R 對成本的影響。由圖 4.5 可以發現當 $(R,P)=(2,7)$時，可以獲得最低的成本，但是成本的差距並不大。
3. 根據圖 4.7，只要 $\frac{R}{P}$ 值較低，即可獲得較低的成本。

   圖 4.7 則是給定 3 種載具容量(P=21、P=35、P=49)，再來分析不同的 $\frac{R}{P}$ 值與成本的關係。考慮 $\frac{R}{P}$ 值在 0.05 至 2 的範圍內，針對三種不同的載具容量 P 各作了 50 種的組合。分析的結果顯示，只要 $\frac{R}{P}$ 值較低，即可獲得較低的成本，與 P 的大小無關。

由上述分析，本論文認為廠商在選擇不同種類的載具來運輸產品時，只需根據 $\frac{R}{P}$ 值來做決策，若 $\frac{R}{P}$ 較低的則明顯的可以獲得較低的成本。

4.2 有限規劃期*T*的影響

本論文的存貨模型與 Lee 學者[7]的存貨模型主要的差異在於本研究的模型考慮了一有限的規劃期 *T*，而 Lee 學者則無。

為了了解有限的規劃期 *T* 對廠商的影響，本論文藉由給定不同的規劃期 *T*，分別以本論文與 Lee 學者之求解方法來計算最佳的總成本。以 Lee 學者的計算方法所求得的成本作為基準，來比較本論文之存貨模型所求得的成本，即可判斷當廠商額外考慮了一有限的規劃期 *T* 時，對總成本的助益有多少。

本論文以 *K*=20、*R*=10、*P*=35、*h*=2、*D*=1000（單位：需求數量/單位時間）作為基準，針對 *T* 此參數（單位：年），以不同的變化幅度來分析其對總成本的影響，並計算最佳訂購量與總成本，如下表 4.3。

表 4.4 本論文與 Lee 學者模型差異

給定規劃期 *T*	本論文模型 總成本（訂購量分別計算）	Lee 學者模型 總成本（訂購量=140）	差異	差異百分比
T=0.2	120.00	132.80	12.80	10.67%
T=0.4	233.33	238.40	5.07	2.17%
T=0.6	352.70	368.00	15.30	4.34%
T=0.8	457.63	466.00	8.37	1.83%
T=1.0	578.75	592.40	13.65	2.36%
T=1.2	690.90	702.80	11.90	1.72%
T=1.4	796.00	796.00	0.00	0.00%
T=1.6	917.71	928.80	11.09	1.21%
T=1.8	1015.00	1034.40	19.40	1.91%
T=2.0	1150.96	1164.00	13.04	1.13%
T=2.1	1194.00	1194.00	0.00	0.00%
T=2.8	1592.00	1592.00	0.00	0.00%

表 4.3 計算的方式如下：

1. 由於 Lee 學者的存貨模型並沒有考慮有限規劃期此因素，因此本論文根據其演算法所求出的最佳訂購量做為訂購量。
2. 為了計算 Lee 學者的存貨模型在給定一有限規劃期 T 之下的總成本，需計算相關總存貨持有成本、總訂購固定成本、總訂購變動成本。例如，當 T=1 時，若訂購批量為 140 個，可知共訂購了八次，再分別計算相關成本。
3. 此外，由於共訂購了 1120 個產品。這比總需求 1000 還多出了 120 個產品，而這剩餘成本則未被計算至表 4.3 內。

為了方便分析表 4.3 之結果，將之轉換成下列圖 4.7。

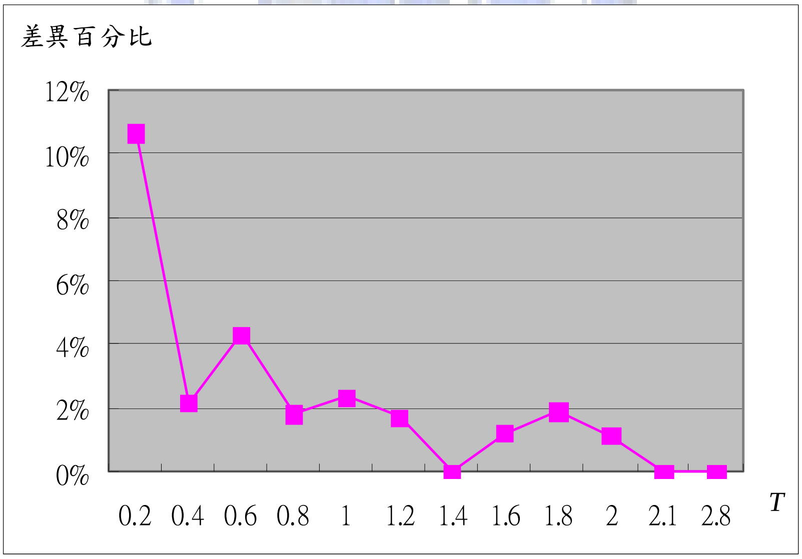

圖 4.9 本研究與 Lee 學者總成本的差異百分比

根據表 4.3 與圖 4.7 可歸納三點結論：

1. 當 T 增加時，與 Lee 學者相比則可發現成本皆都較低或相同。如圖 4.7 所示。可發現隨著 T 越大，總成本的差距百分比則逐漸變小，但由於 Lee 學者尚有一部份剩餘成本則未被計算，故可知本論文的結果較優。
2. 在給定 T=1.4 之下，由於總需求剛好為 Lee 學者的演算法所計算之訂購量(140)的整數倍。這表示本論文之存貨模型在此參數設定之下，與 Lee 學者相同。
3. 此外，藉由後續的分析可發現，甚至當 T=2.1、2.8 時，本論文所計算之最佳訂購量與總成本與 Lee 學者之模型皆相同。這表示當 T 增加到使得總需求為 140 的整數倍時（例如：當 D=1000 時，T=1.4、2.1、2.8…），本論文的存貨模型與 Lee 學者的模型完全相同。

第五章 結論與未來研究方向

本論文提出一有限規劃期與階梯式的訂購成本的經濟批量問題，並建構數學模式，探討經濟批量與成本的關係。根據 Schwartz[14]的訂購策略，本論文提出一啟發式演算法，建立一改良型模式並透過成本函數的特質來尋找一經濟訂購批量。

在未來研究方面將進一步針對該啟發式演算法的求解品質(求解方法的適用性、求解速度、與最佳解的差異等…）進行探討。

參考文獻

[1] Alp,O., Erkip,N. K. and Güllü,R. "Optimal Lot-Sizing/Vehicle-Dispatching Policies Under Stochastic Lead Times and Stepwise Fixed Costs", Operations research, 51, 1, 160-166, INFORMS, 2003.

[2] Bramel,J. and Simchi-Levi,D. , The Logic of Logistics: Theory, Algorithms, and Applications for Logistics Management, Springer, New York, 1997.

[3] Carter,J. R., Ferrin,B. G. and Carter,C. R. "On Extending Russell and Krajewski's Algorithm for Economic Purchase Order Quantities*", Decision Sciences, 26, 6, 819-829, Blackwell Synergy, 1995.

[4] Dai,T. and Qi,X. "An acquisition policy for a multi-supplier system with a finite-time horizon", Computers and Operations Research, 34, 9, 2758-2773, Elsevier, 2007.

[5] Goyal,S. K. "An inventory model for a product for which purchase price fluctuates", New Zealand Operational Research, 3, 2, 112-117, NZOR, 1975.

[6] Goyal,S. K., Morin,D. and Nebebe,F. "The finite horizon trended inventory replenishment problem with shortages", Journal of the Operational Research Society, 43, 12, 1173-1178, JSTOR, 1992.

[7] Lee,C. Y. "The Economic Order Quantity for Freight Discount Costs", IIE Transactions, 18, 3, 318-320, Taylor & Francis, 1986.

[8] Lev,B. and Soyster,A. L. "An inventory model with finite horizon and price changes", Journal of the Operational Research Society, 30, 43–53, JSTOR, 1979.

[9] Lev,B. and Weiss,H. J. "Inventory models with cost changes", Operations research, 38, 1, 53-63, JSTOR, 1990.

[10] Nahmias ,S. , Production and operations analysis, Irwin Homewood, IL, 1997.

[11] Parker,R. P. and Kapuscinski,R. "Optimal Policies for a Capacitated

Two-Echelon Inventory System", Operations research, 52, 5, 739-755, INFORMS, 2004.

[12] Rieksts,B. Q. and Ventura,J. A. "Optimal inventory policies with two modes of freight transportation", European Journal of Operational Research, 186, 2, 576-585, Elsevier, 2008.

[13] Russell,R. M. and Krajewski,L. J. "Optimal Purchase and Transportation Cost Lot Sizing for a Single Item", Decision Sciences, 22, 4, 940-952, Blackwell Synergy, 1991.

[14] Schwarz,L. B. "Economic Order Quantities for Products with Finite Demand Horizons", IIE Transactions, 4, 3, 234-237, Taylor & Francis, 1972.

[15] Sivazlian,B. D. and Stanfel,L. E.. , Analysis of Systems in Operations Research, Chap. 5, Prentice Hall, 1975.

[16] Swenseth,S. R. and Godfrey,M. R. "Incorporating transportation costs into inventory replenishment decisions", International Journal of Production Economics, 77, 2, 113-130, Elsevier, 2002.

[17] Toptal,A. and Çetinkaya,S. "Contractual agreements for coordination and vendormanaged delivery under explicit transportation considerations", Naval Res.Logist, 53-55, 2006.

[18] Toptal,A., Çetinkaya,S. and Lee,C. Y. "The Buyer-Vendor Coordination Problem: Modeling Inbound and Outbound Cargo Capacity and Costs", IIE Transactions, 35, 11, 987-1002, Taylor & Francis, 2003.

[19] Zhao,Q. H., Wang,S. Y., Lai,K. K. and Xia,G. P. "Model and algorithm of an inventory problem with the consideration of transportation cost", Computers & Industrial Engineering, 46, 2, 389-397, Elsevier, 2004.

[20] 許巧鶯 and 謝幼屏.「海運定期貨櫃航線之船型與頻次決策研究」, 運輸計劃季刊, 34, 2, 211-241, 2005.

附錄A

性質一：必存在一正整數 $m_1=\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+2hDT^2/K}}{2} \right\rceil$，當 $Q=\frac{DT}{m_1}$ 時，

$LTC(Q=\frac{DT}{m_1})=\min_{Q>0}\{LTC(Q)\}$。

說明：

Schwarz[14]證明最佳的訂購總次數 m 為滿足下列限制式中的最小整數：

$$m(m+1)\geq\frac{hDT^2}{2K} \tag{A.1}$$

由於公式(A.1)為一二次不等式。為了找到該整數，利用公式解可知 m 的範圍為 $m\geq\frac{-1+\sqrt{1+2hDT^2/K}}{2}$。($m\leq\frac{-1-\sqrt{1+2hDT^2/K}}{2}$ 負不合)

為了符合正整數限制，可知當 m 最小為 $m_1=\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+2hDT^2/K}}{2} \right\rceil$。

附錄B：

性質五：

當 $Q' \leqq Q$，且 $\left\lceil \frac{DT}{Q'} \right\rceil = \left\lceil \frac{DT}{Q} \right\rceil = m$，和 $\left\lceil \frac{DT-(m-1)Q'}{P} \right\rceil = \left\lceil \frac{DT-(m-1)Q}{P} \right\rceil = b$，則 $TC(Q') \leqq TC(Q)$。

說明：

若 $Q' \leqq Q$，且皆使廠商的總訂購次數為 m，可知：$\frac{DT}{m} \le Q' \le Q < \frac{DT}{m-1}$。

若廠商的總訂購次數為 m，$LTC(Q)$可改寫成下列公式：

$$LTC\left(Q \,\middle|\, \frac{DT}{m} \le Q < \frac{DT}{m-1}\right) = h\frac{Q}{2}(m-1)\frac{Q}{D} + h\frac{DT-(m-1)Q}{2}\left(\frac{DT-(m-1)Q}{D}\right) + Km$$

$$= m(m-1)\left(Q - \frac{DT}{m}\right)^2 + \frac{D^2T^2}{m} + Km \qquad \text{(B.1)}$$

由上述公式可知 $LTC(Q)$在此區間內為從$(D^2T^2/m+Km)$開始，隨訂購量增加而嚴格遞增之函數。故可知 $LTC(Q') \leqq LTC(Q)$。

根據性質四，可知 $S_2^{(1)}(Q') \leqq S_2^{(1)}(Q)$。

由於 Q'、Q 使最後一次訂購所需的貨櫃數為 b，可知 $S_2^{(2)}(Q') = S_2^{(2)}(Q) = bR$。

由於 $TC(Q)=H(Q)+S_1(Q)+S_2^{(1)}(Q)+S_2^{(2)}(Q)$，根據前述可知 $TC(Q') \leqq TC(Q)$。