

## 第 7 章 頻率偏移估算

正交分頻多工技術的主要的缺點之一是對載波頻率偏移非常敏感。由於傳送端和接收端的振盪器所產生的頻率偏移，若不進行頻率偏移補償，將使子載波間正交性被破壞。由於子載波間的互相干擾(Inter-carrier Interference, ICI)，不僅本身的信號能量下降，而且相鄰的子載波亦會對本身載波造成干擾，整體效能將受到相當大的影響。

前導信號由週期性的短訓練符元及長訓練符元所組成，短、長訓練符元皆可用來作頻率偏移的估算，但是短、長訓練符元的平均功率相等，所以短訓練符元的符元能量較長訓練符元為小，所以估算出的頻率偏移變異(Variance)較大[10]。週期較短的短訓練符元能估算的頻率偏移範圍較大，能將主要的頻率偏移估算並補償回來，但是估算所產生的變異較大，所以在利用短訓練符元作完頻率偏移粗步估算，並作進一步的補償後，可利用長訓練符元作頻率偏移的微調。利用長訓練符元估算的頻率偏移範圍較小，但是估算的變異較小，可用來進行頻率偏移的細部估算。



### 7.1 系統參數設定

IEEE 802.11a 與 IEEE 802.16a 封包的偵測、頻率偏移估算、碼框同步與通道估算，都是利用已知的前導信號來完成。假設每個符元是頻域上的資料經由  $N$  點快速富利葉反轉換所構成，在接收端，每個取樣點都受到一個獨立的高斯雜訊所影響。假設通道是一個多重路徑擴展(Delay Spread)的通道，總通道長度小於守護區間。於是在接收端經過頻率偏移影響的信號，在第  $n$  點的取樣值可以表示如下：

$$x(n) = e^{-j2\pi n\epsilon/N} s(n) + w(n) \quad (7.1.1)$$

$w(n)$  為 AWGN 雜訊， $N$  為 FFT 的點數。 $s(n)$  為所傳輸的 OFDM 符元和通道迴旋後的取樣信號， $s(n)$  表示如下：

$$s(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k) a_{n-k}, n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (7.1.2)$$

$a_n$  : IFFT Output  
 $L$  : Channel Memory  
 $M$  : Observation Interval  
 $h(k)$ :Channel Impulse Response

所以  $x(n)$  可以表示如下:

$$x(n) = e^{-j2\pi n\varepsilon/N} \sum_{k=0}^{L-1} h(k)a_{n-k} + w(n) \quad n=0,1,2,\dots,M-1 \quad (7.1.3)$$

式(7.1.3)可以用矩陣的方式來表示如下:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}(\varepsilon)\mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{w} \quad (7.1.4)$$

其中，

$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(M-1)]^T$ , vector of received signal samples

$\mathbf{\Gamma}(\varepsilon) = \text{diag}\{1, e^{-j2\pi\varepsilon/N}, e^{-j4\pi\varepsilon/N}, \dots, e^{-j2\pi\varepsilon(M-1)/N}\}$ , matrix of frequency offset.

$\mathbf{h} = [h(0), h(1), h(2), \dots, h(L-1)]^T$ , vector of channel response,

$\mathbf{A}$  是一個  $M \times L$  矩陣,  $[A]_{i,j} = a_{i-j}$ ,  $0 \leq i \leq M-1$ ,  $0 \leq j \leq L-1$

$\mathbf{w} = [w(0), w(1), \dots, w(M-1)]^T$ , zero-mean Gaussian vector, 其共變異

數(Covariance Matrix)為  $\mathbf{C}_w = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^H\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$ ,  $\mathbf{I}_M$  為  $M \times M$  恆等矩陣 (Identity Matrix)。

## 7.2 最可能頻率偏移估算

頻率偏移的估算通常是使用最可能頻率偏移估算(Maximum Likelihood Frequency Offset Estimation)的方法，以下簡稱 ML 頻率估算。由式(7.1.4)可知，傳送的信號、通道資訊及頻率偏移都是未知的，在使用 ML 頻率估計方法時，必須同時估算傳送信號、通道資訊與頻率偏移這三個參數。

### 7.2.1 ML 頻率估算方法一

為了同時估算頻率偏移、傳送信號與通道資訊，系統運算是相當繁複的，而且增加系統硬體的複雜度。為了簡化系統的複雜度，可以在估算頻率偏移前，先進行碼框同步(Frame Synchronization)，如此一來，所接收的前導信號就變成是已

知數，只剩頻率偏移與通道資訊這兩個參數需要被估計，然後採用傳統估計方法 (Classical Estimation) 估計頻率偏移。

在這個估算方法中，對於未知的參數  $\mathbf{h}$  與  $\varepsilon$  的相關資訊，除了參數的估算範圍之外，是一無所知的， $\mathbf{h}$  與  $\varepsilon$  這兩個參數是可確定性 (Deterministic) 的，給定一組通道資訊  $\mathbf{h}$  及頻率偏移  $\varepsilon$  後， $\mathbf{x}$  成為一 complex Gaussian random vector， $\mathbf{x}$  的 mean 向量為  $\Gamma(\varepsilon)\mathbf{A}\mathbf{h}$ ，covariance matrix 為  $\sigma_n^2\mathbf{I}_N$ ，於是可能性函數 (Likelihood Function) 可以寫成式 (7.2.1) [11]，想估算出準確的  $\mathbf{h}$  與  $\varepsilon$ ，就必須找出一對  $\tilde{\mathbf{h}}$  及  $\tilde{\varepsilon}$  使得  $\Lambda(\mathbf{x};\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\varepsilon})$  最大。

$$\Lambda(\mathbf{x};\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{(\pi\sigma_n^2)^N} \exp\left[\frac{-1}{\sigma_n^2}[\mathbf{x} - \Gamma(\varepsilon)\mathbf{A}\tilde{\mathbf{h}}]^H[\mathbf{x} - \Gamma(\varepsilon)\mathbf{A}\tilde{\mathbf{h}}]\right] \quad (7.2.1)$$

其中， $\tilde{\mathbf{h}}$  及  $\tilde{\varepsilon}$  是  $\mathbf{h}$  與  $\varepsilon$  的 trail value。

首先固定式 (7.2.1) 中的  $\tilde{\varepsilon}$ ，然後改變  $\tilde{\mathbf{h}}$  的值，在這種狀況下，當  $\tilde{\mathbf{h}}$  如式 (7.2.2) 時， $\Lambda(\mathbf{x};\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\varepsilon})$  有極大值 [12]。

$$\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\varepsilon}) = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\Gamma^H(\tilde{\varepsilon})\mathbf{x} \quad (7.2.2)$$

將式 (7.2.2) 代入式 (7.2.1)，然後改變  $\tilde{\varepsilon}$  的值，可以發現找尋  $\Lambda(\mathbf{x};\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\varepsilon})$  的極大值，等於是找尋式 (7.2.3) 的極大值。

$$g(\tilde{\varepsilon}) = \mathbf{x}^H\Gamma(\tilde{\varepsilon})\mathbf{B}\Gamma^H(\tilde{\varepsilon})\mathbf{x} \quad (7.2.3)$$

其中  $\mathbf{B}$  是一個投影矩陣 (Projector Matrix)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H \quad (7.2.4)$$

於是  $\tilde{\varepsilon}$  的估算值等於

$$\hat{\varepsilon} = \arg \max_{\tilde{\varepsilon}} \{g(\tilde{\varepsilon})\}$$

由於  $\mathbf{B}$  是赫密胥矩陣 (Hermitian Matrix)，所以式 (7.2.3) 可以寫成

$$g(\tilde{\varepsilon}) = -\rho(0) + 2\text{Re}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\rho(m)e^{j2\pi m\tilde{\varepsilon}/N}\right\} \quad (7.2.5)$$

$$\text{其中 } \rho(m) = \sum_{k=m}^{M-1} [\mathbf{B}]_{k-m,k} \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^*(k-m) \quad (7.2.6)$$

式(7.2.5)需要大量的數學運算，於是改變前導信號的結構，以簡化估算的複雜度，在此利用週期性的前導信號來達成這個目的，也就是說前導信號是由幾個相同的區塊組成。假設區塊長度為  $D$  個取樣時間，總通道長度小於短訓練符元長度  $D$ ，觀察區間由  $P$  個長度為  $D$  的短訓練符元所組成，。

矩陣  $\mathbf{A}$  可以表示如下：

$$\mathbf{A} = [\mathbf{C}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{C}]^T \quad (7.2.7)$$

其中  $\mathbf{C}$  為  $D \times D$  矩陣

$$[\mathbf{C}]_{i,j} = a_{|i-j|_D}, 0 \leq i, j \leq D-1 \quad (7.2.8)$$

其中  $|i-j|_D$  是  $i-j$  modulo  $D$

將式(7.2.7)代入式(7.2.4)， $\mathbf{B}$  變成一個由  $P \times P$  個  $D \times D$  identity matrix 組成的矩陣，

$$\mathbf{B} = \frac{1}{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & \mathbf{I}_L \dots \mathbf{I}_L \\ \mathbf{I}_L & \mathbf{I}_L \dots \mathbf{I}_L \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{I}_L & \mathbf{I}_L \dots \mathbf{I}_L \end{bmatrix} \quad (7.2.9)$$

其中， $\mathbf{I}_L$  為  $D \times D$  Identity Matrix。所以矩陣  $\mathbf{B}$  中的元素可以表示如下：

$$[\mathbf{B}]_{k-m, k} = \begin{cases} \frac{1}{P}, & \text{for } m = iD, 0 \leq i \leq P-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.2.10)$$

將式(7.2.10)代入式(7.2.5)得到

$$g(\hat{\varepsilon}) = -\xi(0) + 2\text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{P-1} \xi(m) e^{j2\pi m D \hat{\varepsilon} / N} \right\} \quad (7.2.11)$$

其中  $\xi(m) = \frac{1}{P} \sum_{k=mD}^{M-1} x(k) x^*(k-mD), m = 0, 1, \dots, P-1$

$$\text{所以 } \hat{\varepsilon} = \max_{\hat{\varepsilon}} \arg \left\{ \sum_{m=1}^{P-1} \text{Re} \left\{ e^{j2\pi m D \hat{\varepsilon} / N} \sum_{i=mD}^{M-1} x_{i-mD}^* x_i \right\} \right\} \quad (7.2.12)$$

比較式(7.2.5)與式(7.2.11)可知運算複雜度大幅的減低，但是付出的代價是可以估算的範圍縮小了  $D$  倍。

## 7.2.2 ML 頻率估計方法二

如果接收機接收的訓練序列  $\mathbf{a}_n$  是未知的，在估計頻率偏移時，必須同時估算傳送信號與通道資訊，運算複雜度也隨之提高。但是如果通道資訊的統計特性是已知的， $\mathbf{s}(n)$  的統計特性也隨之可知，利用此特性估算頻率偏移時，不需要同時估算傳送信號與通道資訊。在 IEEE 802.11a 與 IEEE 802.16a 的通道統計特性如第五章所述，每個路徑是由實數及虛數部分而構成，實數及虛數部分是由平均值為 0，且變異為  $\sigma_k^2/2$  的高斯隨機變數所產生。於是在任一個路徑上的振幅是一個雷利分布(Rayleigh Distribution)，相位為均勻分布(Uniform Distribution)的隨機變數，所以  $\mathbf{s}(n)$  為一個 complex Gaussian random variable。假設  $w(n)$  為 white Gaussian noise， $\mathbf{x}(n)$  則是一個 complex Gaussian random variable， $\mathbf{x}$  為一 complex Gaussian random vector，所以  $\mathbf{x}$  的機率分布函數可以寫成如下[13]:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^M (\det \mathbf{R})} \exp(-1/2(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \rangle)^H \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \rangle)) \quad (7.2.13)$$

其中  $\langle \mathbf{x} \rangle$  為 mean 向量， $\mathbf{R}$  為複數共變異數矩陣(Complex Covariance Matrix)，因為接收到的訓練序列內容是未知的，所以  $\langle \mathbf{x} \rangle$  為零向量(Null Vector)，所以  $\mathbf{x}$  的機率分布函數可以改寫成

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^M (\det \mathbf{R})} \exp(-1/2 \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}) \quad (7.2.14)$$

$(2\pi)^M (\det \mathbf{R})$  為一常數，所以對數可能行函數(Log-Likelihood Function)  $\Lambda(\varepsilon)$

可寫成如式(7.2.15)，

$$\Lambda(\varepsilon) = -1/2 \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (7.2.15)$$

頻率偏移的估算，就是找尋一個  $\varepsilon$  使  $\Lambda(\varepsilon)$  有最大值，

$$\hat{\varepsilon} = \max_{\varepsilon} \arg \Lambda(\varepsilon) \quad (7.2.16)$$

其中， $\mathbf{R} = \frac{1}{2}[\mathbf{xx}^H]$ ，所以  $\mathbf{R}$  共變異數矩陣中的元素可以表示如下：

$$\begin{aligned}
R_{n,n+k} &= \frac{1}{2} E[x(n)x^*(n+k)] \\
&= \frac{1}{2} E[(s(n)e^{-j2\pi(n+k)\varepsilon/N} + w(n))(s(n+k)e^{-j2\pi n\varepsilon/N} + w(n+k))^*] \\
&= \frac{1}{2} e^{j2\pi k\varepsilon/N} E[s(n)s(n+k)^*] + \delta(k)\sigma_n^2 \\
&= \frac{1}{2} e^{j2\pi k\varepsilon/N} E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1} h_i a_{n-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1} h_j a_{n+k-j}\right)^*\right] + \frac{1}{2} \delta(k)\sigma_n^2 \\
&= \frac{1}{2} e^{j2\pi k\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[h_i h_j^*] (a_{n-i} a_{n+k-j}^*) + \frac{1}{2} \delta(k)\sigma_n^2 \\
&= \frac{1}{2} e^{j2\pi k\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] (a_{n-i} a_{n+k-i}^*) + \frac{1}{2} \delta(k)\sigma_n^2 \\
\Rightarrow R_{n,n+k} &= \begin{cases} \frac{1}{2} (\sigma_s^2 + \sigma_n^2), k=0 \\ \frac{1}{2} e^{j2\pi k\varepsilon/N} \sigma_s^2, k=nD \\ \frac{1}{2} e^{j2\pi k\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] (a_{n-i} a_{n+k-i}^*), k \neq nD \end{cases} \quad (7.2.17)
\end{aligned}$$

其中， $\sigma_s^2 = E[|s(n)|^2]$ ， $\sigma_n^2 = E[|w(n)|^2]$

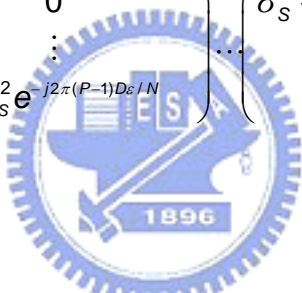
$$R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & e^{j2\pi\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n-i} a_{n+1-i}^* & \dots & e^{j2\pi(PD-1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n-i} a_{n+(PD-1)-i}^* \\ e^{-j2\pi\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+1-i} a_{n-i}^* & \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \dots & e^{j2\pi(PD-2)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+1-i} a_{n+(PD-1)-i}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi D\varepsilon/N} \sigma_s^2 & e^{-j2\pi(D-1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+D-i} a_{n+1-i}^* & \dots & e^{j2\pi((P-1)D-1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{(n+D)-i} a_{n+(PD-1)-i}^* \\ e^{-j2\pi(D+1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+D+1-i} a_{n-i}^* & e^{-j2\pi D\varepsilon/N} \sigma_s^2 & \dots & e^{j2\pi((P-1)D-2)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+D+1-i} a_{n+(PD-1)-i}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi(P-1)D\varepsilon/N} \sigma_s^2 & e^{-j2\pi((P-1)D-1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+(P-1)D-i} a_{n+1-i}^* & \dots & e^{j2\pi(D-1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+(P-1)D-i} a_{n+(PD-1)-i}^* \\ e^{-j2\pi((P-1)D+1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+((P-1)D+1)-i} a_{n-i}^* & e^{-j2\pi(P-1)D\varepsilon/N} \sigma_s^2 & \dots & e^{j2\pi(D-2)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+(P-1)D+1-i} a_{n+(PD-1)-i}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi(PD-1)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+(PD-1)-i} a_{n-i}^* & e^{-j2\pi(PD-2)\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{L-1} E[|h_i|^2] a_{n+(PD-1)-i} a_{n+1-i}^* & \dots & \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

如果將  $R$  直接代入式(7.2.15)， $\Lambda(\varepsilon)$  將是一個複雜的對數可能性函數，所以在此

假設每個訓練序列取樣點與其固定週期距離的取樣點彼此有相關性之外，其餘都是不相關的，以簡化其複雜度，因此在觀察區間內取樣點彼此的關連性可表示如下：

$$E[x(n)x^*(n+k)] = \begin{cases} \sigma_s^2 + \sigma_n^2, & k=0 \\ e^{j2\pi k\epsilon/N} \sigma_s^2, & k=nD \quad n=1,2,\dots,M-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

因此  $M$  可以簡化如下：

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \overbrace{\left( \begin{array}{ccc} \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{array} \right)}^{D \times D \text{ Matrix}} \dots \left( \begin{array}{ccc} \sigma_s^2 e^{j2\pi(P-1)D\epsilon/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_s^2 e^{j2\pi(P-1)D\epsilon/N} \end{array} \right) \\ \vdots \\ \left( \begin{array}{ccc} \sigma_s^2 e^{-j2\pi(P-1)D\epsilon/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_s^2 e^{-j2\pi(P-1)D\epsilon/N} \end{array} \right) \dots \left( \begin{array}{ccc} \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{array} \right) \end{array} \right)$$


以下數學推導附錄中有詳細說明請參照，

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{2}{P\sigma_s^2\sigma_n^2 + \sigma_n^4} \times \left( \begin{array}{c} \overbrace{\left( \begin{array}{ccc} (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{array} \right)}^{D \times D \text{ Matrix}} \dots \left( \begin{array}{ccc} -\sigma_s^2 e^{j2\pi(P-1)D/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\sigma_s^2 e^{j2\pi(P-1)D\epsilon/N} \end{array} \right) \\ \vdots \\ \left( \begin{array}{ccc} -\sigma_s^2 e^{-j2\pi(P-1)D\epsilon/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\sigma_s^2 e^{-j2\pi(P-1)D\epsilon/N} \end{array} \right) \dots \left( \begin{array}{ccc} (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{array} \right) \end{array} \right)$$



$$\begin{aligned}
\Lambda(\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \\
&= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}^H \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(0+D) \\ \vdots \\ x(0+(P-1)D) \end{bmatrix}^H \mathbf{r}_P^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(0+D) \\ \vdots \\ x(0+(P-1)D) \end{bmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(1+D) \\ \vdots \\ x(1+(P-1)D) \end{bmatrix}^H \mathbf{r}_P^{-1} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(1+D) \\ \vdots \\ x(1+(P-1)D) \end{bmatrix} + \dots \\
&\quad + \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} x(D-1) \\ x(D-1+D) \\ \vdots \\ x(D-1+(P-1)D) \end{bmatrix}^H \mathbf{r}_P^{-1} \begin{bmatrix} x(D-1) \\ x(D-1+D) \\ \vdots \\ x(D-1+(P-1)D) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中,

$$\mathbf{r}_P^{-1} = \frac{2}{P\sigma_s^2\sigma_n^2 + \sigma_n^4} \begin{bmatrix} (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 & -\sigma_s^2 e^{j2\pi D\varepsilon/N} & \dots & -\sigma_s^2 e^{j2\pi(P-1)D\varepsilon/N} \\ -\sigma_s^2 e^{-j2\pi D\varepsilon/N} & (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \dots & -\sigma_s^2 e^{j2\pi(P-2)D\varepsilon/N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma_s^2 e^{-j2\pi(P-1)D\varepsilon/N} & -\sigma_s^2 e^{-j2\pi(P-2)D\varepsilon/N} & \dots & (P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(\varepsilon) &= \frac{1}{P\sigma_s^2\sigma_n^2 + \sigma_n^4} \left[ 2\sigma_s^2 \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re}\{e^{j2\pi m D\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{P-m-1} x_{0+iD}^* x_{0+(i+m)D}\} - \sum_{i=0}^{P-1} |x_{0+iD}|^2 ((P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{P\sigma_s^2\sigma_n^2 + \sigma_n^4} \left[ 2\sigma_s^2 \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re}\{e^{j2\pi m D\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{P-m-1} x_{1+iD}^* x_{1+(i+m)D}\} - \sum_{i=0}^{P-1} |x_{1+iD}|^2 ((P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2) \right] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{P\sigma_s^2\sigma_n^2 + \sigma_n^4} \left[ 2\sigma_s^2 \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re}\{e^{j2\pi m D\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{P-m-1} x_{D-1+iD}^* x_{D-1+(i+m)D}\} - \sum_{i=0}^{P-1} |x_{D-1+iD}|^2 ((P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2) \right] \\
&= \frac{1}{P\sigma_s^2\sigma_n^2 + \sigma_n^4} \left[ 2\sigma_s^2 \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re}\{e^{j2\pi m D\varepsilon/N} \sum_{i=0}^{(P-m)D-1} x_i^* x_{i+mD}\} - \underbrace{\sum_{i=0}^{PD-1} |x_i|^2}_{\text{independent of } \varepsilon} ((P-1)\sigma_s^2 + \sigma_n^2) \right]
\end{aligned}$$

其中,  $x_n$  等同於  $x(n)$ ,



$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon} &= \max_{\varepsilon} \arg \left\{ \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi m D \varepsilon / N} \sum_{i=0}^{(P-m)D-1} x_i^* x_{i+mD} \right\} \right\} \\
&= \max_{\varepsilon} \arg \left\{ \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi m D \varepsilon / N} \sum_{i=mD}^{PD-1} x_{i-mD}^* x_i \right\} \right\} \\
&= \max_{\varepsilon} \arg \left\{ \sum_{m=1}^{P-1} \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi m D \varepsilon / N} \sum_{i=mD}^{M-1} x_{i-mD}^* x_i \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{7.2.18}$$

比較式(7.2.12)與式(7.2.18)其對數可能性函數相同，所以使用 ML 頻率估計方法一與方法二估算的結果是相同的。

### 7.3 多級輸出平均法

前面兩小節所述的 ML 頻率估算方法，想要找到最佳的頻率偏移，必須將頻率偏移估算範圍，細分成若干等份，分別代入式(7.2.12)與式(7.2.18)，找出使這兩個可能性函數有最大值的估計值，此值為最佳頻率偏移估計值，因此這種估算方法所需的硬體較為複雜，而且所運算花費的時間也較長。

在[14]中，提到頻率偏移估算的方法，是利用相隔為  $D$  個間距，在複數平面上同值同相位的兩點，在有頻率偏移的時候，會因為有時間差異而產生一相位差。於是藉由已經知道的兩點間距，可以估算傳送端和接收端所產生的頻率偏移。其對數可能性函數，可寫成如下式：

$$\begin{aligned}
\Lambda(\varepsilon) &= \log f(x(n) | \varepsilon), \quad n = 0, 1, \dots, 2D-1 \\
&= \log \left( \prod_{n \in I} f(x(n), x(n+D)) \right), \quad I = \{0, 1, \dots, D-1\}. \\
&= \log \left( C \prod_{n \in I} \exp \left( - \frac{|x(n)|^2 - 2\rho \operatorname{Re} \left\{ e^{\frac{j2\pi \varepsilon D}{N}} x^*(n) x(n+D) \right\} + |x(n+D)|^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_n^2)(1-\rho^2)} \right) \right) \\
&= \log \left( C \exp \left( - \sum_{n=0}^{D-1} \frac{|x(n)|^2 - 2\rho \operatorname{Re} \left\{ e^{\frac{j2\pi \varepsilon D}{N}} x^*(n) x(n+D) \right\} + |x(n+D)|^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_n^2)(1-\rho^2)} \right) \right) \\
&\propto \operatorname{Re} \left\{ e^{\frac{j2\pi \varepsilon D}{N}} \sum_{n=0}^{D-1} x^*(n) x(n+D) \right\} - \frac{1}{2\rho} \sum_{n=0}^{D-1} (|x(n)|^2 + |x(n+D)|^2) \\
&= |\gamma| \cos \left( \frac{2\pi \varepsilon D}{N} + \angle \gamma \right) - \rho^{-1} \Phi
\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

其中，

C:常數

$$\rho = \left| \frac{E[x^*(k)x(k+D)]}{\sqrt{E[|x(k)|^2]}\sqrt{E[|x(k+D)|^2]}} \right| = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}$$

$$\gamma = \sum_{n=0}^{D-1} x^*(n)x(n+D) = |\gamma| \angle \gamma$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{D-1} (|x(n)|^2 + |x^*(n+D)|^2)$$

$$E[|x(n)|^2] = \sigma_s^2, E[|w(n)|^2] = \sigma_n^2$$

在式(7.3.1)中，當  $\cos\left(\frac{2\pi\varepsilon D}{N} + \angle\gamma\right) = 1$

$\Lambda(\varepsilon)$  有最大值，於是可以推得：

$$\frac{2\pi\varepsilon D}{N} + \angle\gamma = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{N}{2\pi D} \angle\gamma + \frac{N}{D} \cdot k$$

在沒有相位模稜兩可(Phase Ambiguity)的情況下，

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{N}{2\pi D} \angle\gamma \quad (7.3.2)$$

如果相隔為  $D$  間距的整體倍，觀察區間為  $P$  個長度為  $D$  的短訓練符元，式(7.3.2)可改寫如下：

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{N}{2\pi\lambda D} \angle\gamma \quad \lambda = 1, 2, \dots, P-1 \quad (7.3.3)$$

在 AWGN 的通道下，相位偏移  $\angle\gamma$  是由實際頻率偏移  $\varepsilon$  與雜訊所產生的相位偏移所組成。所以式(7.3.3)可以表示成

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{N}{2\pi\lambda D} \angle\tilde{\gamma} - \frac{N}{2\pi\lambda D} \angle\phi_n \quad \lambda = 1, 2, \dots, P-1 \quad (7.3.4)$$

其中  $\angle\tilde{\gamma}$  為由實際頻率偏移  $\varepsilon$  所造成的相位偏移， $\angle\phi_n$  為雜訊所產生的相位偏移。由式(7.3.4)可知不同的估算間距，其頻率偏移估算範圍與受雜訊所產生的相位偏移影響是不同的。估算間距越小，頻率偏移估算範圍越大，受雜訊所產生的相位偏移影響較大，估算出的頻率偏移變異較大。反之，若估算間距越大，頻率偏移估算範圍越小，但是受雜訊所產生的相位偏移影響較小，所估算出的頻率偏移變異量較小，估算結果較準確，但是因為估算範圍較小，頻率偏移若大於可估

算範圍，就會產生相位模稜兩可的情況導致嚴重的估算誤差。使用相隔間距  $\lambda_1$ ，與相隔間距較大的  $\lambda_2 (\lambda_2 > \lambda_1)$  估算頻率偏移，其頻率偏移估算值  $\hat{\varepsilon}_1$  與  $\hat{\varepsilon}_2$  存在以下的關係：

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_1 &= \hat{\varepsilon}_2 + \frac{N}{\lambda_2 D} k, k \text{ is an integer} \\ \hat{k} &= \arg \min \left( \hat{\varepsilon}_1 - \left( \hat{\varepsilon}_2 + \frac{N}{\lambda_2 D} k \right) \right)\end{aligned}\quad (7.3.5)$$

根據式(7.3.5)可知，如果估算間距較小者，其可估算範圍大於系統規定的頻率最大偏移量，因此所估算出的頻率偏移不會發生相位模稜兩可的情況，此時所估算出的頻率偏移，可以用來當成使用估算間距較大者，是否產生相位模稜兩可情況的判斷標準。如果發生相位模稜兩可情況時，可以用來修正估算值，避免相位模稜兩可的情況，進而得到較準確的估算值。估算範圍較大者，所產生的估算值，可以視為粗略的頻率偏移，估算範圍較小者，所產生的估算值，可以視為頻率偏移較精密的估算。然後，將不同間距所估算出的頻率偏移平均，可得到較佳的估算值。估算方法可表示如下：

$$\begin{aligned}\angle \gamma_1(n) &= \sum_{k=0}^{P-2} \sum_{m=0}^{D-1} x(n+m+(k+1)D) \cdot x^*(n+m+kD) \\ \angle \gamma_2(n) &= \sum_{k=0}^{P-3} \sum_{m=0}^{D-1} x(n+m+(k+2)D) \cdot x^*(n+m+kD) \\ \angle \gamma_3(n) &= \sum_{k=0}^{P-4} \sum_{m=0}^{D-1} x(n+m+(k+3)D) \cdot x^*(n+m+kD) \\ \hat{\varepsilon} &= \frac{\frac{N}{2\pi D} \angle \gamma_1(n) + \frac{N}{4\pi D} \angle \gamma_2(n)}{2}, \text{ for } P = 3\end{aligned}\quad (7.3.6)$$

or

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\frac{N}{2\pi D} \angle \gamma_1(n) + \frac{N}{4\pi D} \angle \gamma_2(n) + \frac{N}{6\pi D} \angle \gamma_3(n)}{3}, \text{ for } P \geq 4$$

$N$ : Length of FFT

$D$ : Period of Training Symbol

## 7.4 模擬與分析

頻率偏移估算在效能上的比較，是以能夠有較低的變異量是標準差來決定方法的優劣。在本論文中，最可能頻率偏移估計的兩個方法，其數學推導結果是相同的，所以有相同的模擬結果，因此模擬結果只用一個來表示。但是值得注意的地方是，最可能頻率偏移估計方法二，在推導過程中，假設每個訓練序列的取樣點是不相關的，以簡化其複雜度，由圖 7.4.1 至圖 7.4.4 可知，訓練序列的取樣點在相隔長度為符元週期的倍數時，彼此有高度的相關性，除此之外的取樣點彼此的相關性不高，取樣點之間的關連性  $R(k) = E[x^*(n)x(n+k)]$ 。最可能頻率偏移估計方法二推導所得的結果，雖然只是一個近似方法，但與真實狀況極為接近。

累加的區塊越多，雜訊可以藉由較多的取樣點累加，將雜訊減少，因此可在相關器(Correlator)輸出得到較高的信號雜訊比，所以累加的區塊越多，頻率偏移估算越準確。

由圖 7.4.9 與圖 7.4.11 的模擬結果可知，IEEE 802.11a 在多重路徑衰退通道下使用最可能頻率偏移估計方法，在低信號雜訊比時，其效能較多級輸出平均法差。因為式(7.2.15)在受到雜訊及多重路徑的影響下有所失真，因此式(7.2.16)所估算出最大值離實際頻率偏移值較遠[10]。但是在 IEEE 802.16a 的系統中，由於每個週期性區塊取樣點為 IEEE 802.11a 的 4 倍，因此可在相關器(Correlator)輸出可得到較高的信號雜訊比，且訓練序列的功率比資料符元多 3dB，因此使用最可能頻率偏移估計方法，即使在低信號雜訊比時，效能仍然比多級輸出平均法為佳，由圖 7.4.13、圖 7.4.15、圖 7.4.17 及圖 7.4.19 可知。但是在高信號雜訊比時，無論是 IEEE 802.11a 及 IEEE 802.16a 的系統，最可能頻率偏移估計方法與多級輸出平均法效能幾乎是相同的。

多級輸出平均法中，使用較小的週期性間距估算時，其估算結果變異量較大，可以視為頻率偏移的粗估，使用較大的週期性間距估算時，其估算結果變異量較小，頻率偏移的估算較精準。在圖 7.4.6、圖 7.4.8、圖 7.4.10、圖 7.4.12、圖 7.4.14、圖 7.4.16、圖 7.4.18 及圖 7.4.20 的模擬結果可知，將相鄰週期性區塊連

續累加(Successive Accumulation)所估算出的頻率偏移，如式(7.3.6)的 $\angle\gamma_1(n)$ ，與多級輸出平均法頻率偏移估算值，隨著觀察區間加大效能有明顯的差異，因為累加區塊越多，雜訊壓制的程度越大，於是 $\angle\gamma_2(n)$ 及 $\angle\gamma_3(n)$ 所估算出的頻率偏移，精準度越高。

以下在多重路徑衰退通道模擬中，IEEE 802.11a 的 $T_{RMS}$ 為 50ns，IEEE 802.16a 為使用無指向性天線、K-factor 等於 0 的 SUI4 通道模型。



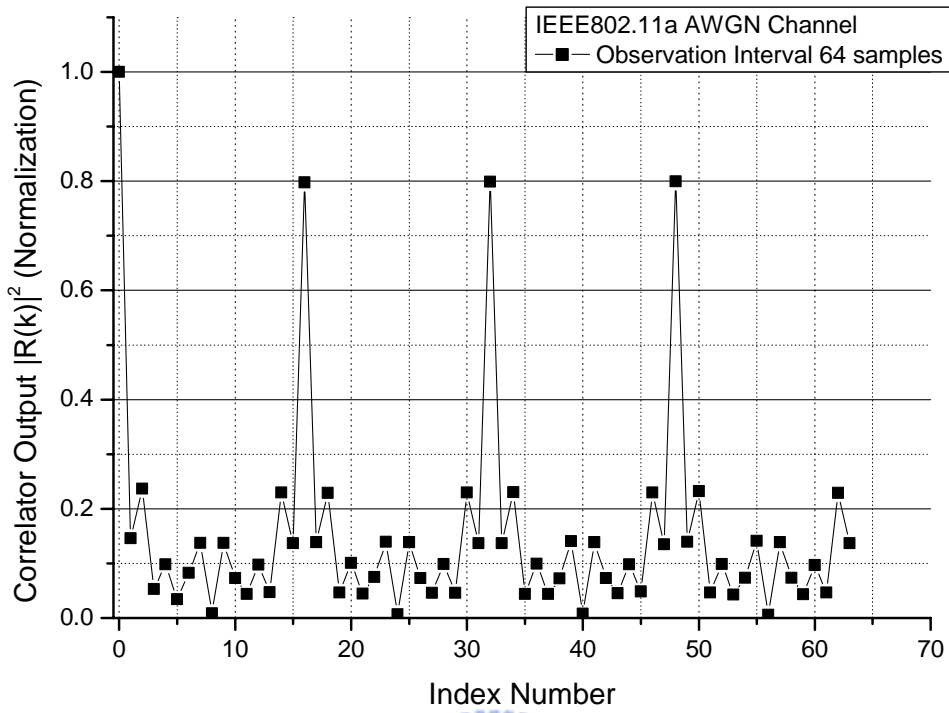


圖 7.4.1 AWGN 通道下觀察區間內取樣點彼此的相關性

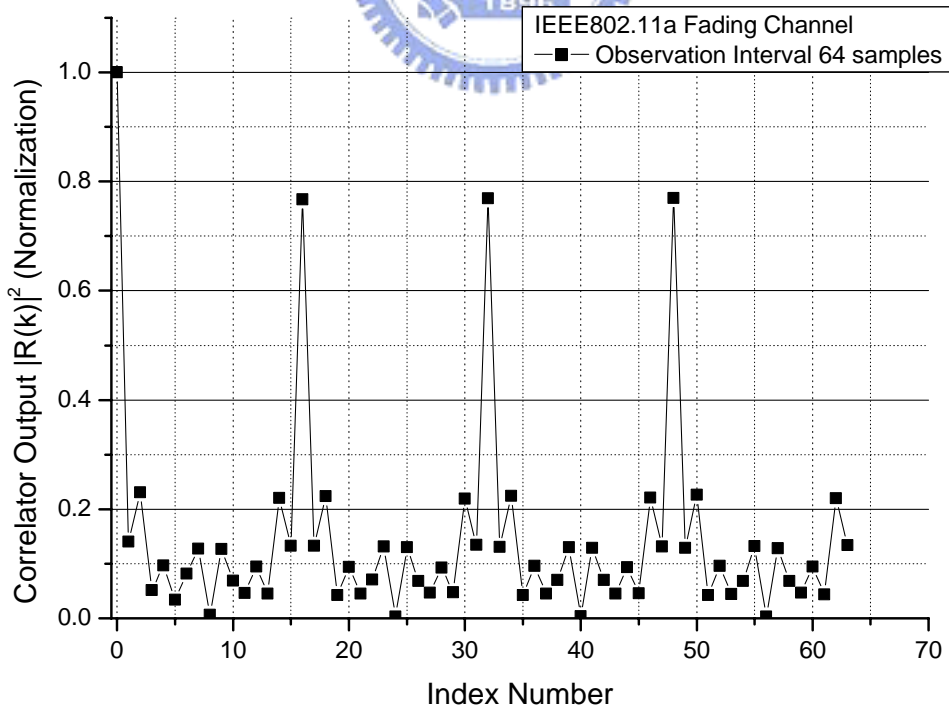


圖 7.4.2 多重路徑衰退通道下觀察區間內取樣點彼此的相關性

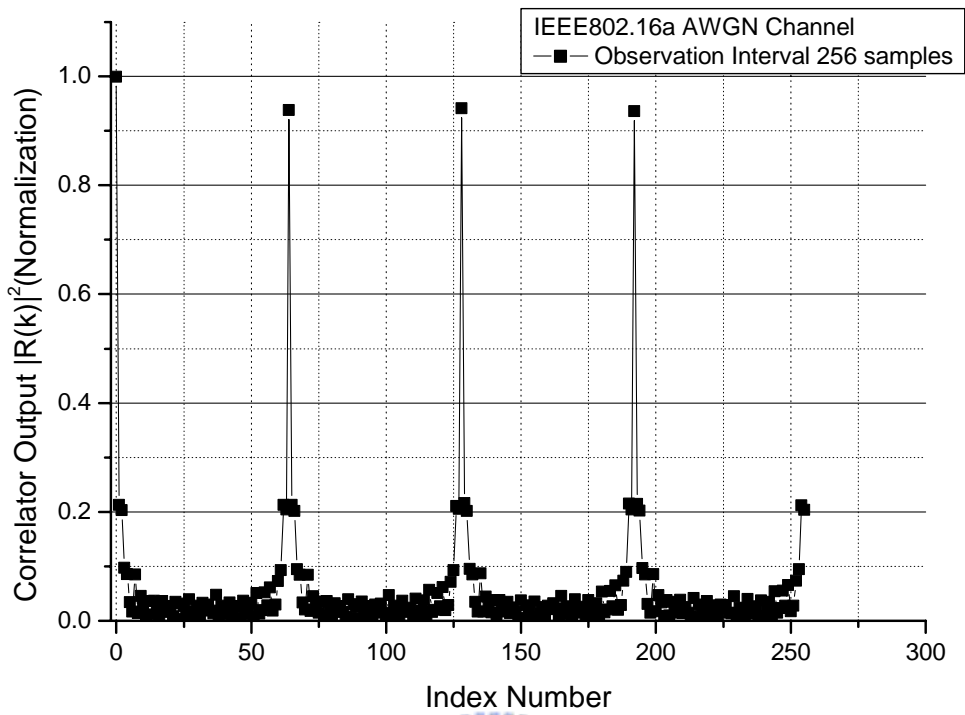


圖 7.4.3 AWGN 通道下觀察區間內取樣點彼此的相關性

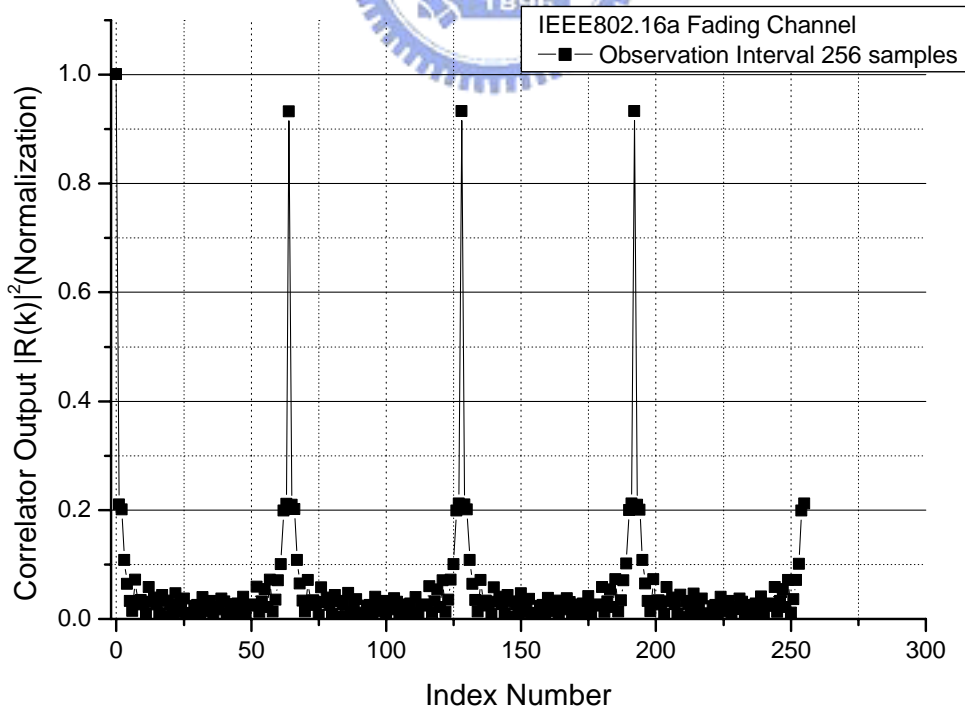


圖 7.4.4 多重路徑衰退通道下觀察區間內取樣點彼此的相關性



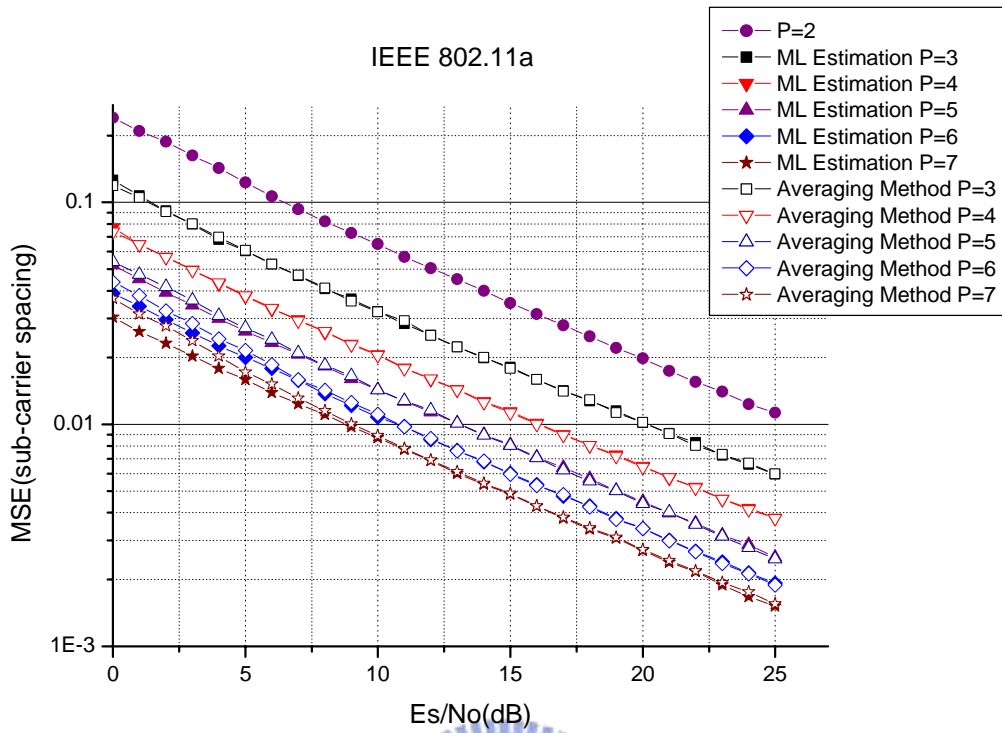


圖 7.4.5 AWGN 通道下頻率偏移為 0.25 時頻率偏移平均值估算

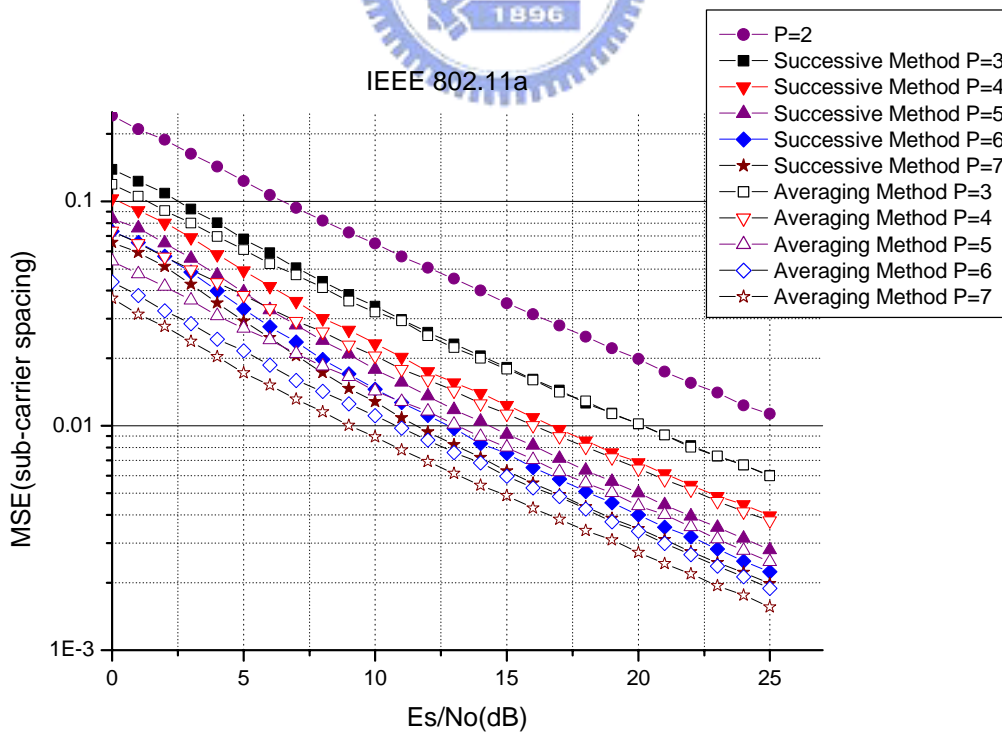


圖 7.4.6 AWGN 通道下頻率偏移為 0.25 時頻率偏移平均值估算

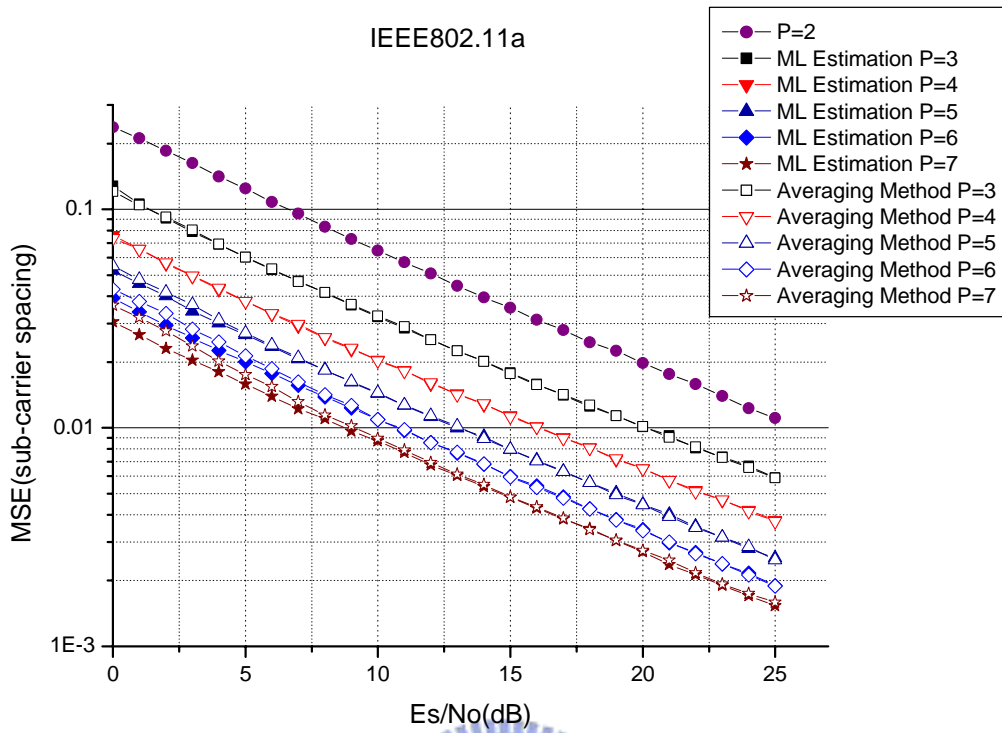


圖 7.4.7 AWGN 通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

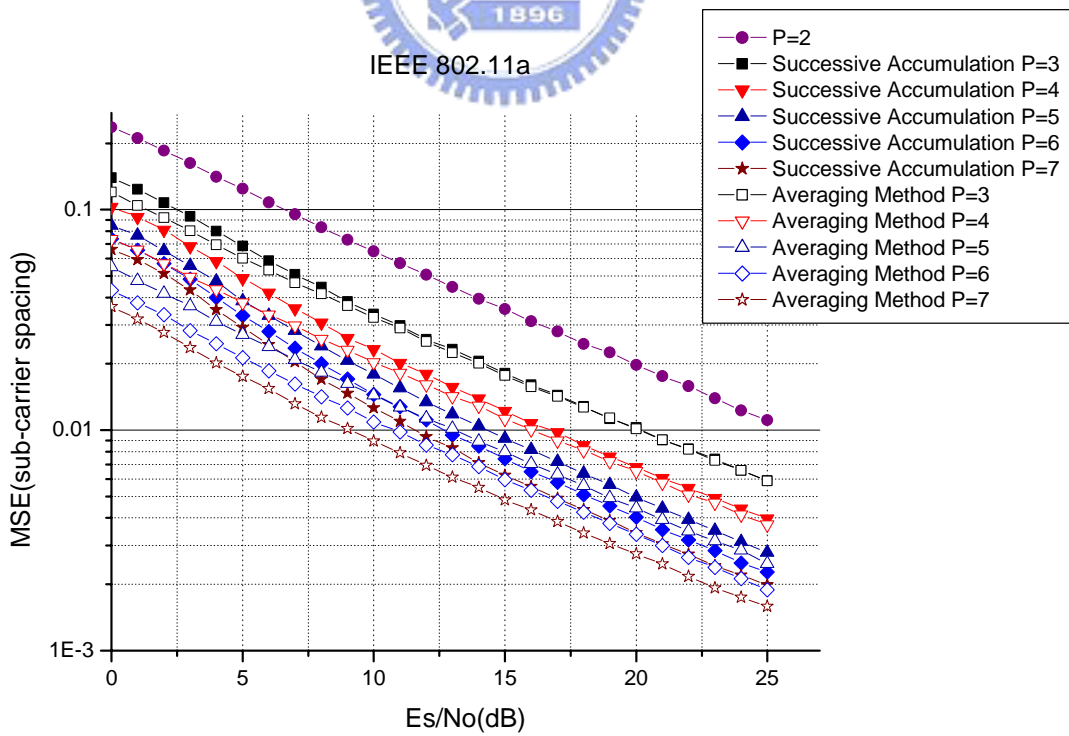


圖 7.4.8 AWGN 通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

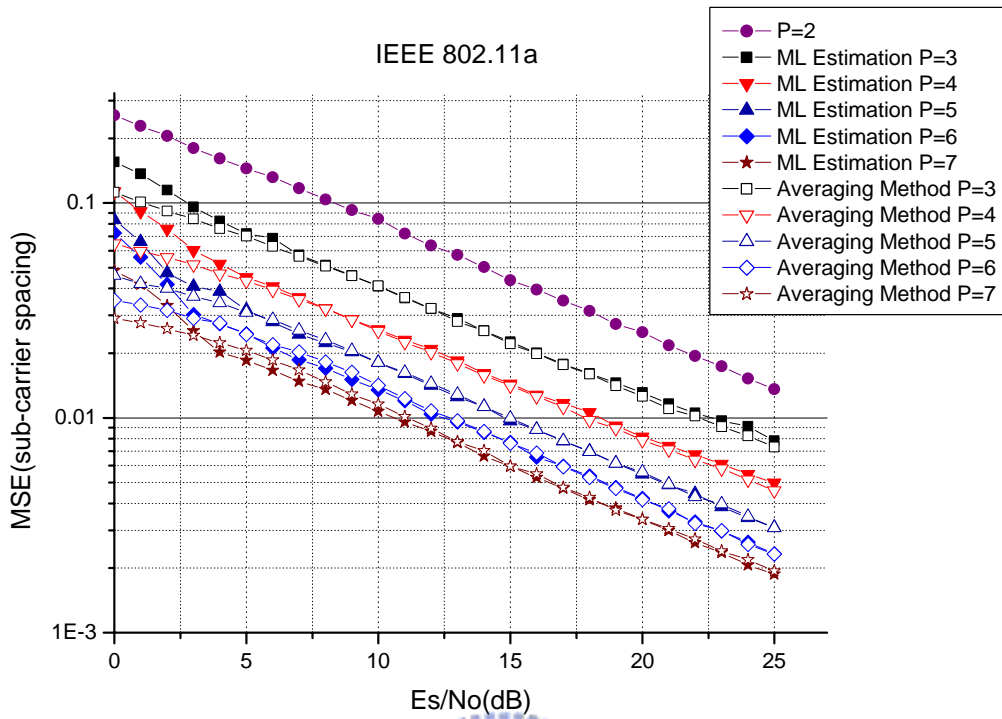


圖 7.4.9 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 0.25 時頻率偏移平均值估算

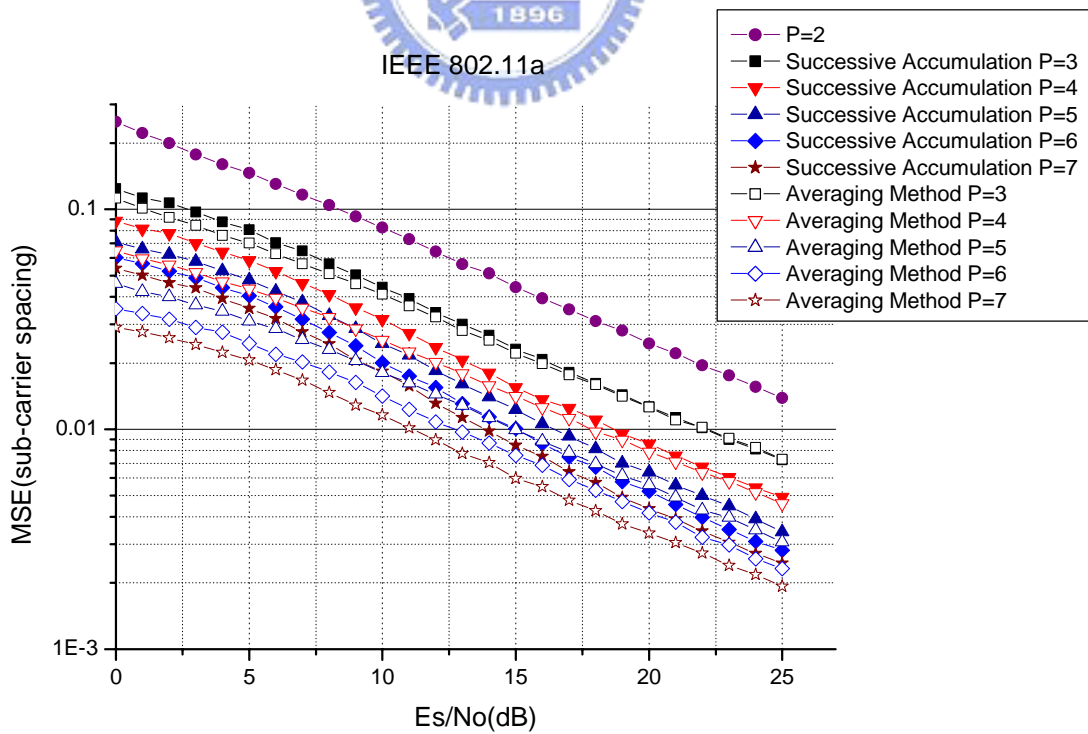


圖 7.4.10 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 0.25 時頻率偏移平均值估算

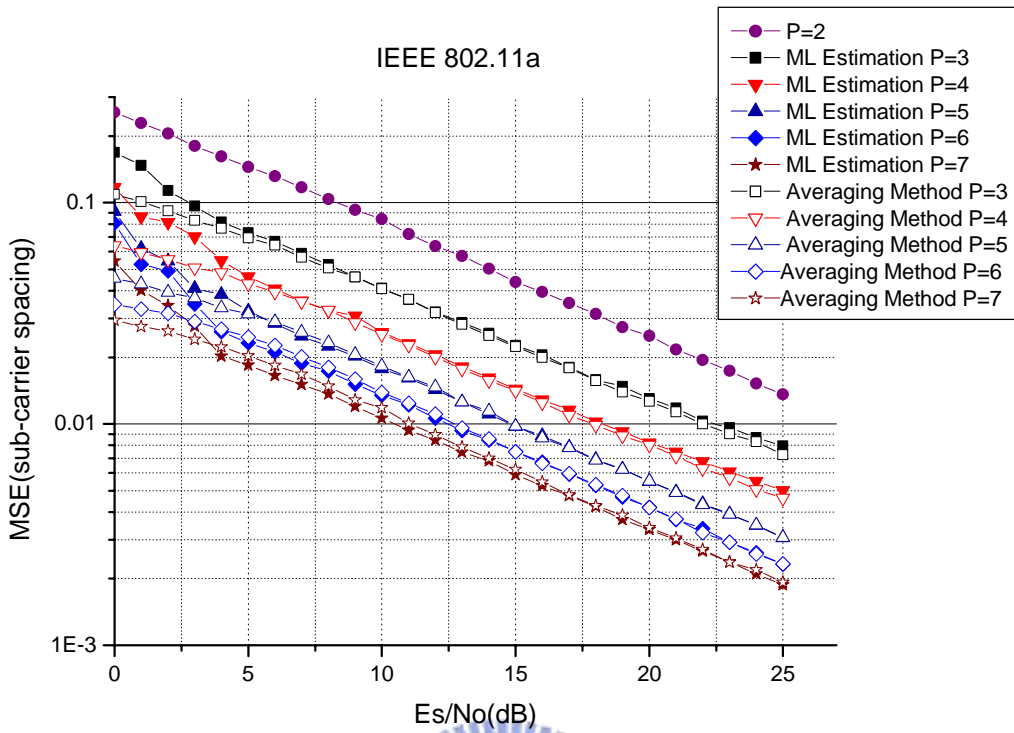


圖 7.4.11 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

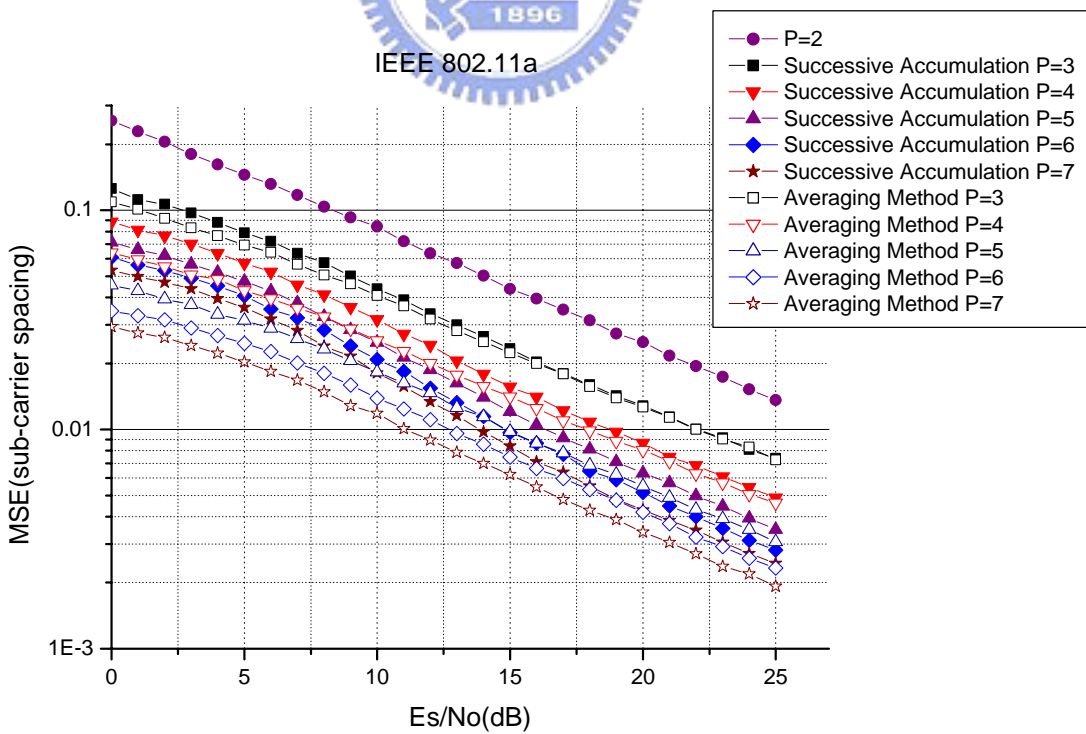


圖 7.4.12 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

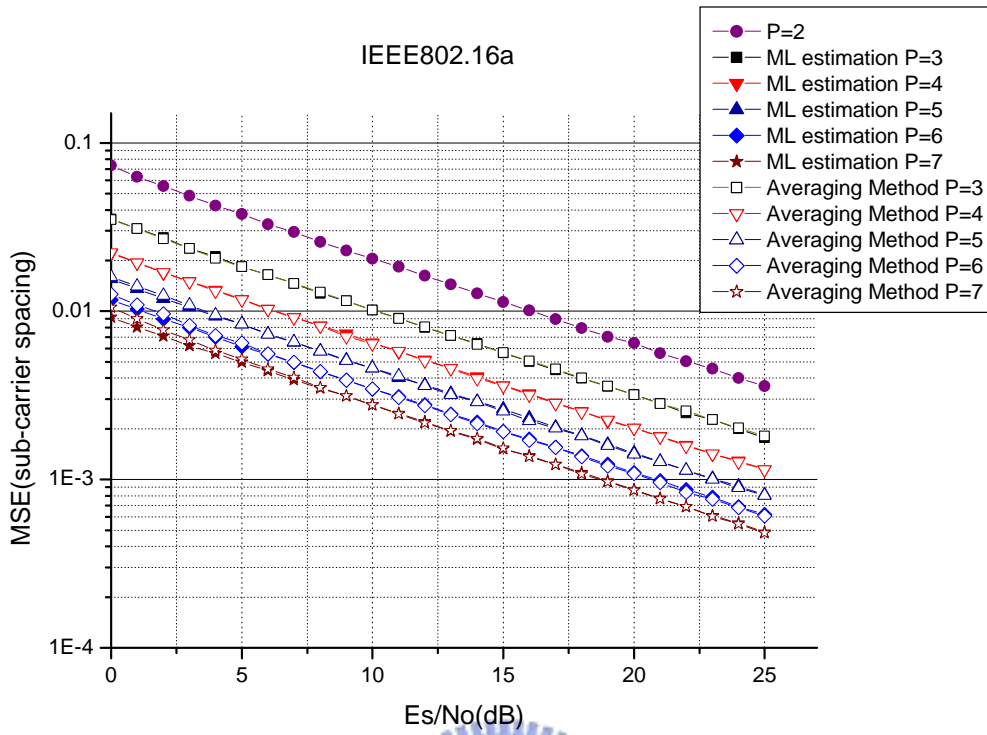


圖 7.4.13 AWGN 通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

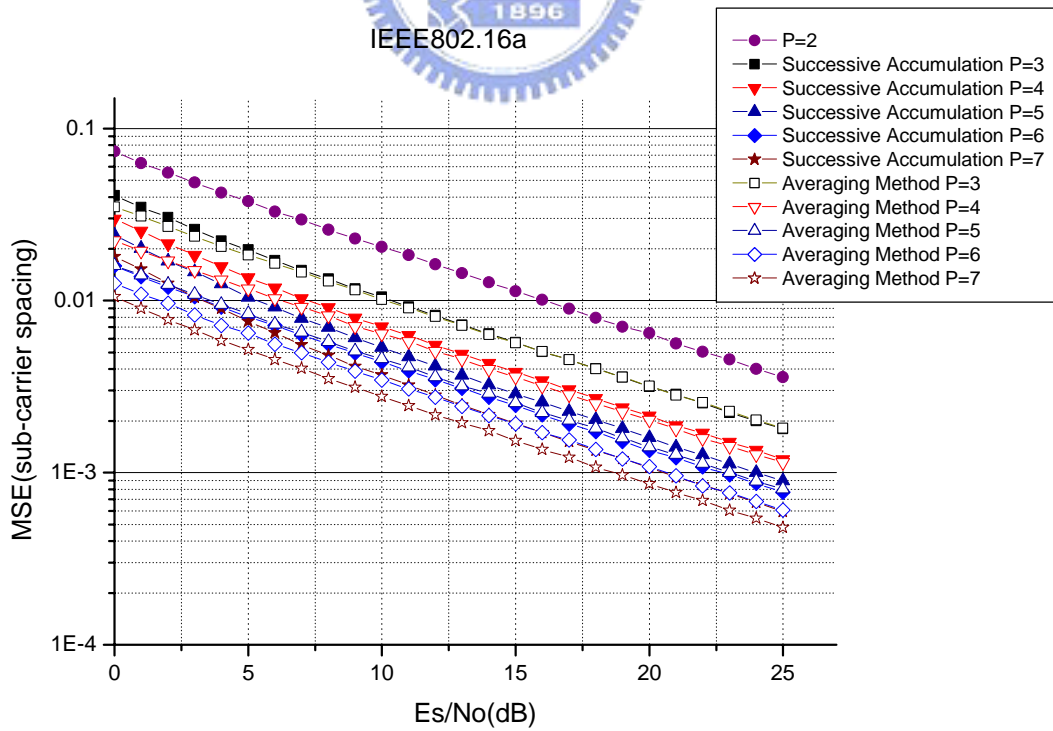


圖 7.4.14 AWGN 通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

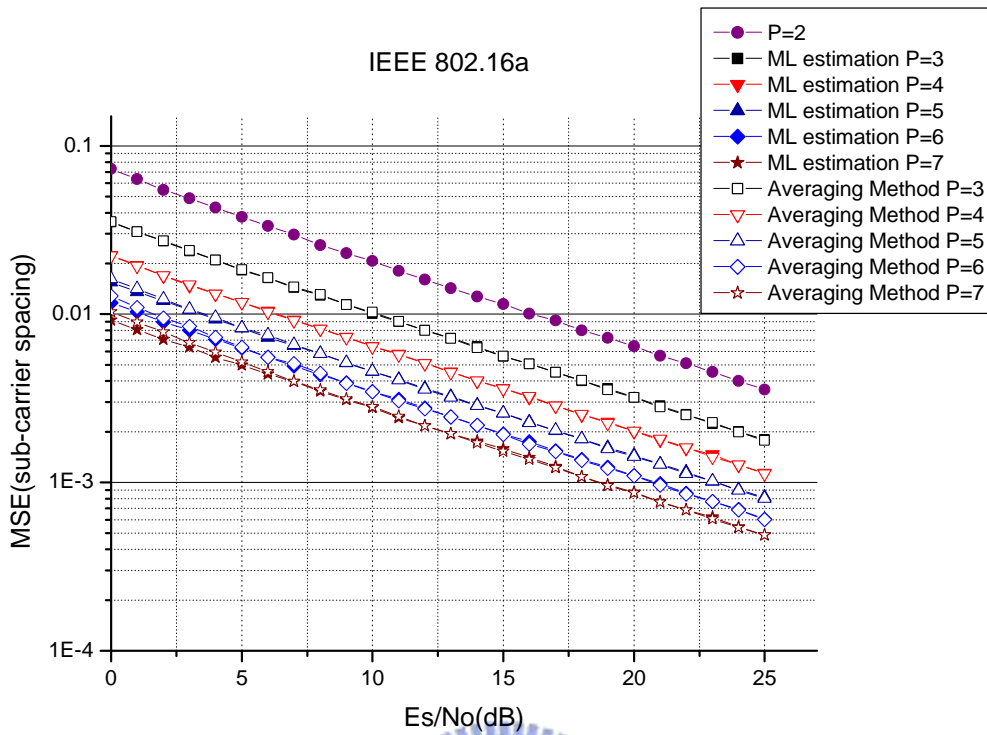


圖 7.4.15 AWGN 通道下頻率偏移為 1.5 時頻率偏移平均值估算

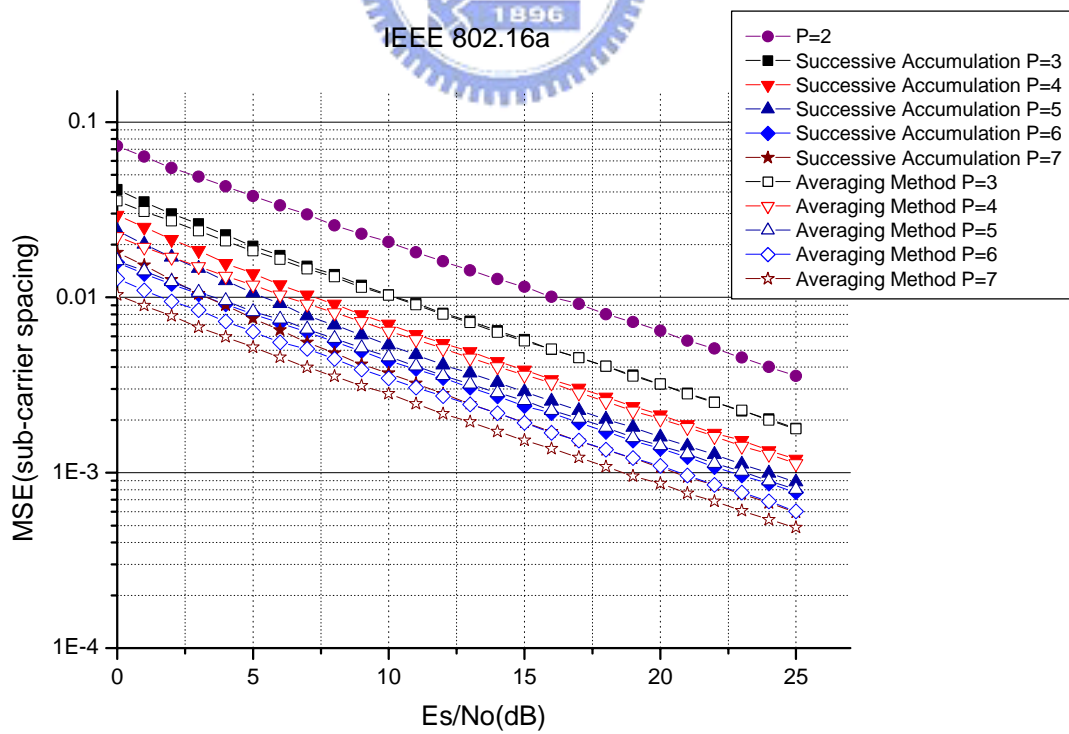


圖 7.4.16 AWGN 通道下頻率偏移為 1.5 時頻率偏移平均值估算



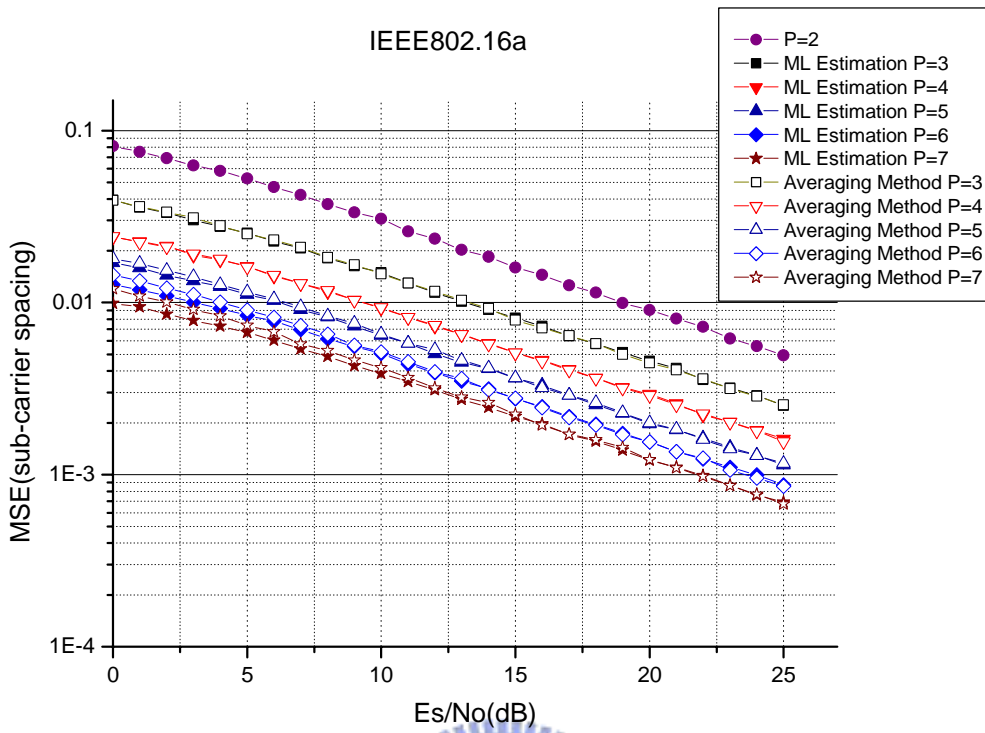


圖 7.4.17 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算

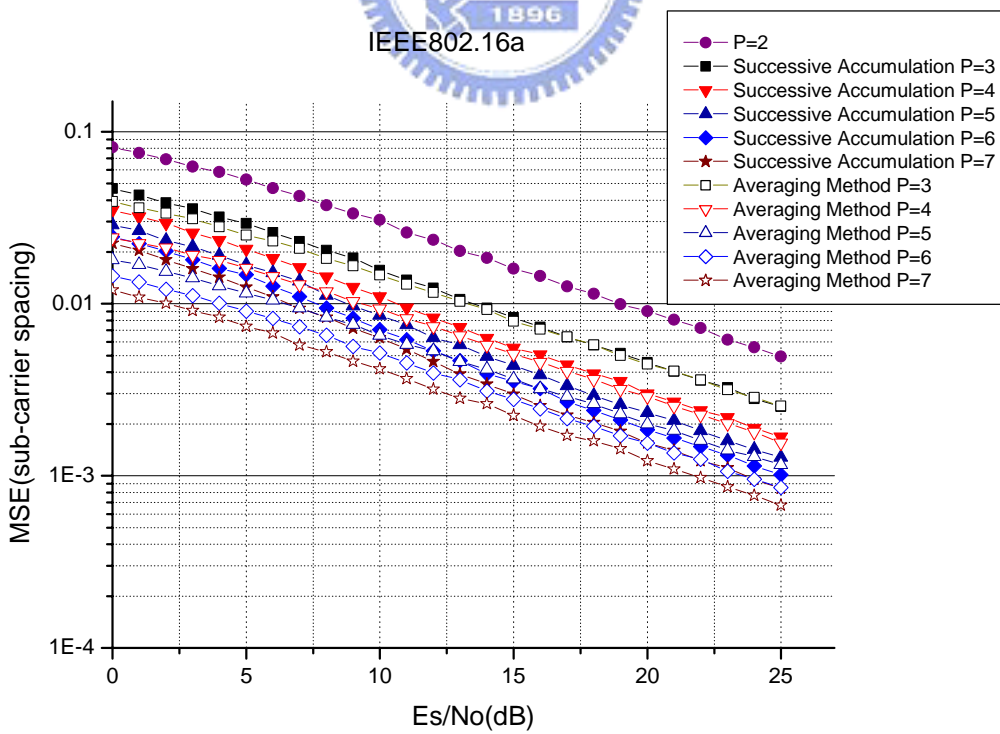


圖 7.4.18 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 0.75 時頻率偏移平均值估算



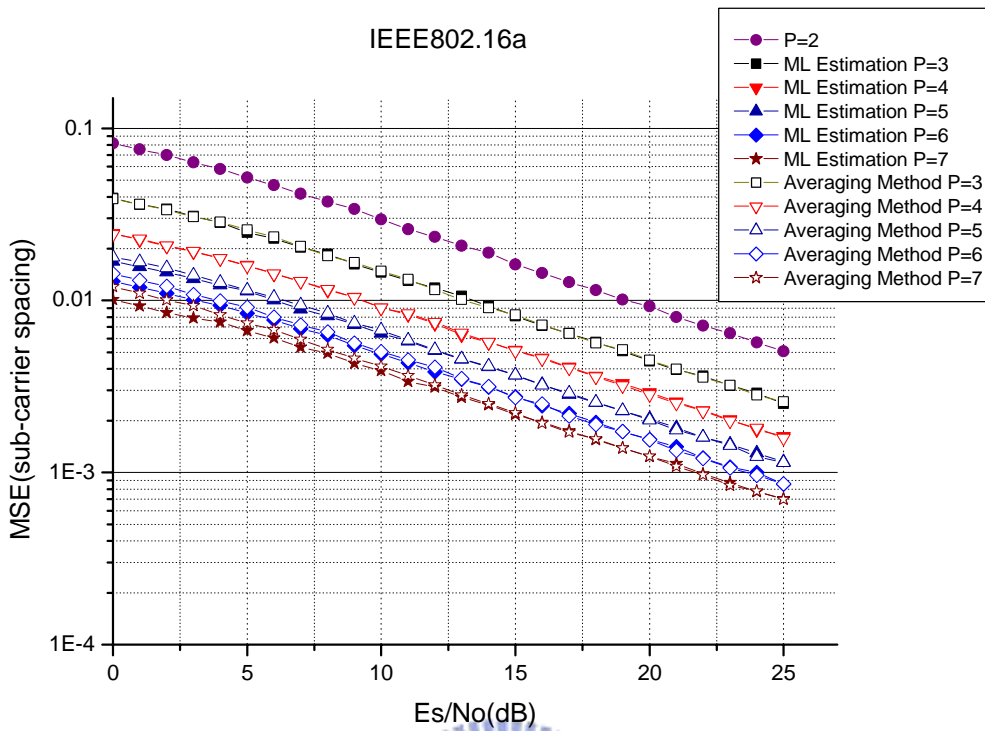


圖 7.4.19 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 1.5 時頻率偏移平均值估算

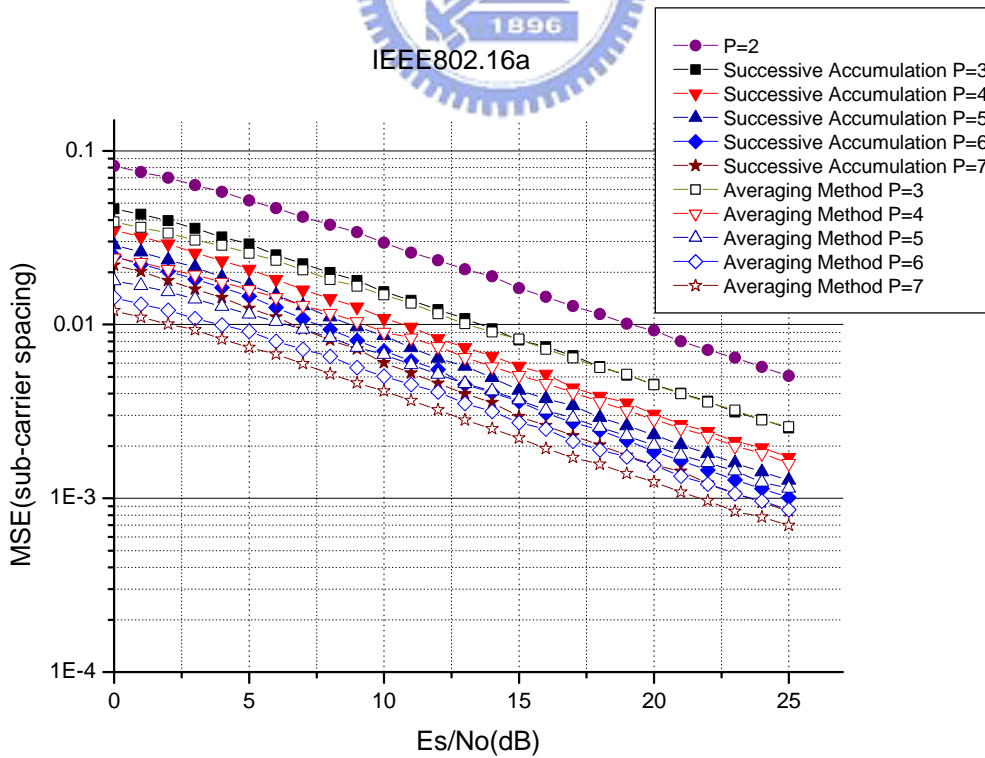


圖 7.4.20 多重路徑衰退通道下頻率偏移為 1.5 時頻率偏移平均值估算