

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

積分順滑模控制技術在可靠度控制上之研究

Study of Reliable Control via Integral Sliding Mode
Control Approach

研究生：丁立偉

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十八年七月

積分順滑模控制技術在可靠度控制上之研究

**Study of Reliable Control via Integral Sliding Mode
Control Approach**

研究生：丁立偉

Student : Li-Wei Ting

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang



A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electrical and Control Engineering

July 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年七月

積分順滑模控制技術在可靠度控制上之研究

學生：丁立偉

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系碩士班



本論文探討積分順滑模控制(Integral Sliding Mode)在可靠度控制上的應用。傳統順滑模控制對於外在干擾和系統不確定項有著穩健性的特性。而積分式順滑模控制因為一開始系統就在順滑面上，所以比起傳統順滑模控制有著更高的穩健性。除此之外，積分順滑模控制方式能依設計者的性能要求，結合諸如 LQR(linear quadratic regulator)的最佳控制技術來提升系統的性能表現。本論文也驗證了這些特性也可以成功地運用在可靠度控制的議題。模擬結果用衛星姿態控制來做驗證。

Study of Reliable Control via Integral Sliding Mode Control Approach

Student : Li-Wei Ting

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University



This paper studies the robust reliable control issues base on integral sliding mode control approach. Integral sliding mode control is known to have better robustness than conventional sliding mode control, because integral sliding mode eliminates the reaching phase. Moreover, integral sliding mode control can combine with optimal strategy, such as linear quadratic regulator (LQR) approach, depending on engineer's requirement to improve system performances. This nice property is extended in this paper to reliable control issues. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed scheme by the attitude control of a spacecraft.

誌謝

感謝許多人的關心與協助，使本論文能夠順利完成。首先特別要感謝指導教授梁耀文博士，感謝老師兩年來細心與耐心的指導及對我孜孜不倦的教誨，使我不僅在研究過程中受益良多，且在待人處世各方面有許多的成長。同時也要感謝口試委員廖德誠博士、鄭治中博士和徐聖棟博士給予建設性的建議與指導，使得本論文更臻完備。

接下來，要感謝實驗室的學長丞昶以及同學士昕和家榮，在我兩年的研究生涯中，給予適時的意見與幫助。謝謝學長學弟、同學及室友們，因為你們使我的研究生涯變得更多采多姿充滿回憶，謝謝你們的關懷與照顧，沒有你們的幫忙論文不可能順利完成。

最後要感謝我最愛的家人，父親、母親、姊姊與哥哥，由於你們的大力支持與鼓勵，使我在求學過程中無後顧之憂，使我能更能專心在學業上衝刺，謝謝你們，謹將此論文獻給你們。

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	viii
第 1 章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 論文架構.....	3
第 2 章 預備知識.....	4
2.1 傳統順滑模控制器之設計.....	4
2.2 積分順滑模控制器之設計.....	6
2.3 非線性 LQR 控制器之設計.....	8
第 3 章 積分順滑模控制在衛星姿態穩健性控制上之應用.....	11
3.1 問題描述.....	12
3.2 控制律設計.....	13
3.2.1 積分順滑模控制.....	13
3.2.2 傳統順滑模控制.....	15
3.2.3 非線性 LQR 控制.....	17
3.3 衛星姿態穩健控制之模擬.....	18
3.3.1 衛星動態.....	18
3.3.2 模擬結果.....	21
第 4 章 積分順滑模控制在可靠度控制問題上之研究.....	31
4.1 問題描述.....	32

4.2 主動式可靠度控制律設計.....	33
4.2.1 積分順滑模可靠度控制.....	33
4.2.2 傳統順滑模可靠度控制.....	36
4.2.3 非線性 LQR 可靠度控制.....	37
4.3 在衛星姿態控制上之應用.....	38
4.3.1 錯誤偵測與診斷觀察器設計.....	38
4.3.2 模擬結果.....	40
第 5 章 結論與未來研究方向.....	54
5.1 結論.....	54
5.2 未來研究方向.....	55
參考文獻.....	56



圖目錄

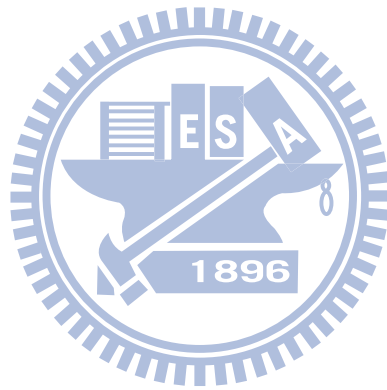
圖 2.1 順滑模式示意圖.....	4
圖 3.1 狀態變數 x_1 之時間響應比較圖	24
圖 3.2 狀態變數 x_2 之時間響應比較圖	24
圖 3.3 狀態變數 x_3 之時間響應比較圖	25
圖 3.4 狀態變數 x_4 之時間響應比較圖	25
圖 3.5 狀態變數 x_5 之時間響應比較圖	26
圖 3.6 狀態變數 x_6 之時間響應比較圖	26
圖 3.7 順滑函數 s_1 之時間響應比較圖.....	27
圖 3.8 順滑函數 s_2 之時間響應比較圖.....	27
圖 3.9 順滑函數 s_3 之時間響應比較圖	28
圖 3.10 控制輸入 u_1 之時間響應比較圖	28
圖 3.11 控制輸入 u_2 之時間響應比較圖	29
圖 3.12 控制輸入 u_3 之時間響應比較圖	29
圖 3.13 控制輸入 u_4 之時間響應比較圖	30
圖 4.1 錯誤偵測與診斷示意圖.....	40
圖 4.2 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_1 之時間響應比較圖	44
圖 4.3 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_2 之時間響應比較圖.....	44
圖 4.4 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_3 之時間響應比較圖.....	45
圖 4.5 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_4 之時間響應比較圖.....	45
圖 4.6 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_5 之時間響應比較圖.....	46
圖 4.7 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_6 之時間響應比較圖.....	46
圖 4.8 u_2 在 1s 時發生故障，順滑函數 s_1 之時間響應比較圖	47
圖 4.9 u_2 在 1s 時發生故障，順滑函數 s_2 之時間響應比較圖	47
圖 4.10 u_2 在 1s 時發生故障，順滑函數 s_3 之時間響應比較圖	48

圖 4.11 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_1 之時間響應比較圖	48
圖 4.12 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_2 之時間響應比較圖	49
圖 4.13 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_3 之時間響應比較圖	49
圖 4.14 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_4 之時間響應比較圖	50
圖 4.15 u_2 在 1s 時發生故障，殘留訊號 r_1 之時間響應比較圖	50
圖 4.16 u_2 在 1s 時發生故障，殘留訊號 r_2 之時間響應比較圖	51
圖 4.17 u_2 在 1s 時發生故障，殘留訊號 r_3 之時間響應比較圖	51
圖 4.18 u_2 在 1s 時發生故障，警報訊號 $alarm1$ 之時間響應比較圖	52
圖 4.19 u_2 在 1s 時發生故障，警報訊號 $alarm2$ 之時間響應比較圖	52
圖 4.20 u_2 在 1s 時發生故障，警報訊號 $alarm3$ 之時間響應比較圖	53



表目錄

表 3.1 效能比較表.....	30
表 4.1 效能比較表.....	53



第1章

緒論

1.1 研究背景與動機

現代化工程技術已發展為規模大且複雜的整合系統，而這類系統若是部分零件發生故障時沒有得到及時的維護和修理，可能造成人員及財產的巨大損失。例如：2003年2月所發生的美國哥倫比亞(Columbia)號太空梭返航解體事故，就造成了7名優秀的太空科學家身亡，而事故的總成本包括調查取證和殘骸搜救等共花費130億美元，如此重大的損失也讓美國思考如何設計出更加安全的太空飛行器，目前也正在研發新一代的太空船。由此可見得可靠度控制的研究就顯得相當的重要及熱門。可靠度控制的目的是設計一個適當的就是設計一個適當的控制器使得閉迴路系統可以容忍某些特定的控制元件發生故障時還能保持整個系統的穩定度及可接受的性能。控制元件故障的情況可能會有放大(amplification)、衰減(degeneration)、或者是完全故障。一般來說，可靠度控制器的設計可以分為主動式[1]-[3]與被動式[4]-[6]兩種。在主動式可靠度控制系統中，故障是藉由錯誤偵測與診斷機制(Fault Detection and Diagnosis, FDD)來辨別故障的部分及程度，然後再根據這些資料來進行即時的控制律重組動作。另一個被動式的方法是系統利用冗餘(inherent redundancy)來設計一個固定的控制律使得閉迴路系統無論在正常情況下或者是控制元件故障的情況下都能達到可接受的性能。二者方式相較之下被動式的方法在運作時不需要考慮故障是否發生來改變控制律，而主動式的方法則需要一些反應時間等待 FDD 發現故障後再重組控制律。不過被動式的方

法必須先根據統計和經驗來假定可能會發生故障的控制器部分，如果實際發生故障的部分與事先的假定的不同，那麼此控制方式可能就無法完成我們所要達到的目標。在這裡我們將考慮主動式的設計方式。

在現今可靠度控制的研究中，有很多的控制方式已經被提出。例如：基於 LMI(linear matrix inequality)的方法[6]、基於 ARE(algebraic Riccati equation)的方法[7]、[8]、基於 H-J(Hamilton-Jacobi)的方法[4]、[9]、基於順滑模控制(sliding mode control, SMC)的方法[10]-[12]。在上述所提到的方法之中，只有 H-J 方法和 SMC 方法是處理有關非線性系統的可靠度問題。在 H-J 方法中，由於要針對二次成本函數(quadratic cost function)設計出最佳的控制律，必須求解 Hamilton -Jacobi 方程式。一般來說，要解 Hamilton-Jacobi 方程式都需要經過複雜的計算過程；不過利用冪級數(power series)方法[13]，我們可以得到 Hamilton-Jacobi 方程式的近似解，減輕 H-J 方法的困難。不過，雖然 H-J 方法解決了可靠度的問題，但是此方法並沒有考慮穩健性的問題，若是當系統存在不確定性(uncertainty)或是外在干擾(external disturbance)時，系統可能會受到影響而無法穩定。另一方面，SMC 方法不僅可以解決可靠度的問題，而且還有著容忍系統不確定性或是外在干擾的穩健性以及容易設計等優點。但是相對地，SMC 方法沒有如同 H-J 方法一樣考慮特定的二次成本函數來設計對應的最佳控制律，所以若考慮相同的二次成本函數，H-J 方法所需的成本會比 SMC 方法的成本要少。

在 SMC 方法的設計流程中，其中很重要的一環是順滑面(sliding surface)的選取，而一般常用的都是選取線性順滑面的設計方式。近年來，有研究學者提出了以非線性積分式順滑面(nonlinear integral-type sliding surface)為主的積分順滑模控制(integral sliding mode control, ISMC)方法[14]-[18]。為了以示區別，用線性順滑面的 SMC 方法在這裡稱為傳統順滑模控制(conventional sliding mode control, CSMC)方法。積分順滑模控制被大家所應用，主要是因為它與傳統的比較起來多了幾項好處：一個是積分順滑模控制少了一開始要到達順滑面的過程，此過程稱為到達階段(reaching phase)，使得系統一開始就可以處在順滑模式

(sliding mode)下。由於在系統要到達順滑面的過程中，一般是依靠高增益的回溯控制來提升穩健性，因此比較起來積分順滑模控制有更好的穩健特性[14]，[15]；另一個則是積分順滑模控制多了一個設計的自由度，而這個自由度就是用來讓我們設計無干擾系統(nominal system)的控制律，稱作無干擾控制(nominal control)[15]，[16]。所謂的無干擾系統就是原始系統中不考慮系統不確定性或是外在干擾這些因素的系統，而此系統在無干擾控制下的狀態變化軌跡為無干擾軌跡(nominal trajectory)。積分順滑模控制的另一項特點就是使原始系統狀態追蹤此無干擾軌跡，有研究者應用此特性提出了次最佳化(suboptimal)控制方式[17]。在這裡我們將運用上述積分順滑模控制的這些特性，推廣到可靠度控制的問題上；以基於 H-J 方法的 LQR(linear quadratic regulator)設計作為無干擾控制，來減輕二次成本函數的花費的同時，另外還能達到比傳統順滑模控制更好的穩健性。



1.2 論文架構

本論文架構如下：第二章將會介紹傳統順滑模控制理論和積分順滑模控制理論。第三章先用衛星姿態控制系統為例子，比較積分順滑模控制、傳統順滑模控制和非線性 LQR 控制的這三種控制方式的穩健性以及二次成本函數的花費多寡，來驗證積分順滑模控制的優點。第四章將積分順滑模控制推廣到可靠度控制的問題，同時我們以傳統順滑模可靠度控制和非線性 LQR 可靠度控制這兩者作為與積分順滑模可靠度控制比較的對象；同樣是針對衛星姿態控制系統，比較它們三個控制方式的穩健性與二次成本函數之花費，與第三章的結果做對照，來驗證積分順滑模可靠度控制是否保有原來的特性及優點。第五章提出結論與未來研究方向。

第2章

預備知識

2.1 傳統順滑模控制器之設計

順滑模控制(sliding mode control, SMC)的特點在於利用不連續的控制輸入，使系統最後會被限制在一個預先決定的順滑面(sliding surface)上，而受控系統的行為則是由順滑面來規範。當順滑函數為 0，狀態軌跡沿著順滑面滑行的運動方式稱為順滑模式(sliding mode)，示意圖如圖 2.1：

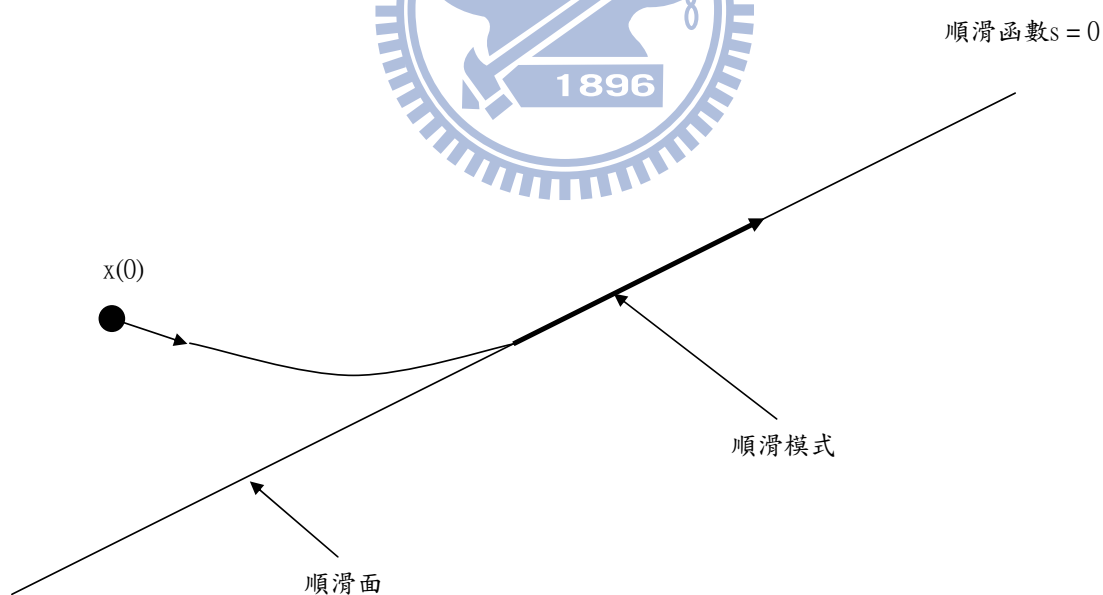


圖 2.1 順滑模式示意圖

一般來說，傳統順滑模控制(conventional sliding mode control, CSMC)的順滑面多半設計成線性的順滑函數，而系統在順滑面上時的動態階數則會比原始系

統階數要少，因此也減輕了設計的複雜度。總而言之，傳統順滑模控制器的設計主要分成二個步驟[19]-[22]；首先是選取適當的順滑面，當系統狀態維持在此順滑面上時會產生我們所要的表現；第二個是決定控制律使系統能在有限時間內到達順滑面並且維持在順滑面上，下面主要就是說明此控制律的設計。我們考慮一非線性動態系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 為狀態變數， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ 為控制輸入， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^n$ 以及 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ 為平滑函數， \mathbf{d} 為系統不確定性(uncertainty)或外在干擾(external disturbance)所造成的擾動(perturbation)。另外我們定義順滑面為：

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{M} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ 為常數，且 $\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 在所有狀態下均為可逆(invertible)。然後我們考慮設計控制律 \mathbf{u}^{eq} 和 \mathbf{u}^{re} ，其功用分別為使系統狀態維持在順滑平面以及在有限時間內使系統狀態到達順滑面，而其對應的條件則分別為 $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) < -\eta\|\mathbf{s}\|$ ， $\eta > 0$ 。設計 \mathbf{u}^{eq} 時先不考慮系統擾動的因素，令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq}$ ，由(2.1)

和 (2.2) 可 得 到 $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{eq} = \mathbf{0}$ ，因此

$\mathbf{u}^{eq} = -(\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 。然後我們再將系統擾動的因素考慮進去，假設

$\|\mathbf{M}\mathbf{d}\| \leq \sigma$ ， $\sigma > 0$ 。令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re}$ ，由(2.1)和(2.2)可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re}) + \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{d} \\ &= \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{re} + \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{d} \leq \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{re} + \|\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{M}\mathbf{d}\| \\ &\leq \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{re} + \sigma \|\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\| \end{aligned}$$

，設計 $\mathbf{u}^{re} = -(\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{-1}(\eta + \sigma)\mathbf{sgn}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$ ，代入上式後可以得到

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{s}^T(\mathbf{x})(\eta + \sigma)\mathbf{sgn}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) + \sigma \|\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\| \leq -\eta \|\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\|.$$

因此最後完整的控制律為 \mathbf{u}^{eq} 和 \mathbf{u}^{re} 的總和：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re} = -(\mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{-1} [\mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\eta + \sigma)\mathbf{sgn}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))] \quad (2.3)$$

2.2 積分順滑模控制器之設計

積分順滑模控制(integral sliding mode control, ISMC)的概念與傳統順滑模控制類似，唯一的差別在於順滑面的選取改成了積分的型式。這個改變使得積分順滑模控制少了系統狀態要到達順滑面的這一個過程；也就是說系統一開始就會處於順滑模式。而當系統維持在順滑模式時，系統的軌跡是由所謂的無干擾系統(nominal system)所決定的，在這裡我們可以選擇其他的控制方式對無干擾系統作控制；不過由於無干擾系統與原始系統差別只在於系統擾動的有無，所以它們的動態階數是相同的，這一點跟傳統設計方式的順滑模式情況有所不同。下面簡單說明順滑模式的情況以及如何設計控制律使系統維持順滑模式，考慮一非線性動態系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 為狀態變數， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ 為控制輸入， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^n$ 以及 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ 為平滑函數， \mathbf{d} 為系統不確定性或外在干擾所造成的擾動。在這裡我們假設 \mathbf{d} 符合匹配條件(matching condition)，所以可將(2.4)改寫為：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{d}_m). \quad (2.5)$$

其中 $\mathbf{d}_m = \mathbf{G}^+(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}$ ， $\mathbf{G}^+(\mathbf{x})$ 為 $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 的準反矩陣(pseudo inverse matrix)，而且

$\|\mathbf{d}_m\| \leq \rho_m$ ， $\rho_m > 0$ 。根據 ISMC 的設計方式[15]，[16]，控制律的形式為：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (2.6)$$

其中 \mathbf{u}_0 是對無干擾系統， $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$ ，所設計的控制律。 \mathbf{u}_1 是一個不連續的控制律用來抵消系統擾動使系統維持在順滑面上，設計成

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ -\rho \cdot \frac{[\mathbf{DG}(\mathbf{x})]^T \mathbf{s}}{\|[\mathbf{DG}(\mathbf{x})]^T \mathbf{s}\|}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.7)$$

其中 $\rho > \rho_m$ 。且順滑面定義為

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \cdot [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \mathbf{u}_0(\tau)) \cdot d\tau] = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

其中 t_0 為初始時間， $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ，而且對所有狀態而言， $\mathbf{DG}(\mathbf{x})$ 為滿秩。在這裡我們可以發現在任何狀態下 $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$ ，所以系統一開始一定會是順滑模式。另一方面，當系統維持順滑模式時，我們知道對應的情況為 $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ 。下面為了精簡式子，會將一些符號省略。由 (2.5) 和 (2.8)，可以得到 $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{D} \cdot [\dot{\mathbf{x}} - (\mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u}_0)] = \mathbf{D} \cdot [(\mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{d}_m) - (\mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u}_0)] = \mathbf{DG} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{d}_m - \mathbf{u}_0)$ 。

所以當系統維持順滑模式時，對應的控制律應為 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{d}_m$ ，代入 (2.5) 可以知道此時的系統動態為 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_0$ ，說明了順滑模式下的狀態軌跡會跟無干擾系統在無干擾控制(nominal control)下的軌跡相同。

了解了積分順滑面的特點之後，接著證明 \mathbf{u}_1 能使系統維持在順滑面上。當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ，我們選擇李雅普諾夫函數(Lyapunov function)為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，微分之後由 (2.5) 和 (2.8)，控制律代入 (2.6)、(2.7) 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{DG} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{d}_m - \mathbf{u}_0) = \mathbf{s}^T \mathbf{DG} \cdot \left(-\rho \cdot \frac{(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}\|} + \mathbf{d}_m \right) \\ &\leq -\rho \cdot \|(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}\| + \|\mathbf{d}_m\| \cdot \|(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}\| \leq (-\rho + \rho_m) \cdot \|(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}\| < 0 \end{aligned}$$

因為 \mathbf{DG} 為滿秩而且 $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$ ，所以控制律(2.6)、(2.7)可以保證維持順滑模式 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ， $\forall t \in [t_0, \infty)$ 。

2.3 非線性 LQR 控制器之設計

考慮一非線性動態系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.9)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 為狀態變數， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ 為控制輸入， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^n$ 以及 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ 為平滑函數。LQR 控制器的設計目的是使系統穩定並且同時使二次成本函數(quadratic cost function)

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.10)$$

降到最少，其中 $\mathbf{Q} \geq 0$ ， $\mathbf{R} > 0$ 皆為常數矩陣。根據[9]，一個最佳狀態回溯控制律為下：

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T(\mathbf{x}) \mathbf{V}_x^T(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

其中列向量 $\mathbf{V}_x(\mathbf{x})$ 符合下面 H-J 等式：

$$\mathbf{V}_x(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4} \mathbf{V}_x(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T(\mathbf{x}) \mathbf{V}_x^T(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0. \quad (2.12)$$

接著為了求得 H-J 等式的近似解，我們會對 $\mathbf{V}_x(\mathbf{x})$ 和(2.12)式作泰勒級數展開 (Taylor's series expansion)，再從二階的部分開始求解 $\mathbf{V}_x(\mathbf{x})$ ；得到二階部分的解後，利用這個結果接著求解三階部分的解，下面依此類推。然後先說明[13]中所用到的一些符號。row(\cdot) 代表從 $\mathcal{R}^{n \times m}$ 映射到 $\mathcal{R}^{1 \times nm}$ 的運算符號，亦即 $\text{row}(A) := (a_{11}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm})$ ，而 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ；還有 $\mathbf{x}^{(0)} := 1$ ，

$\mathbf{x}^{(m)} := \mathbf{x}^{(m-1)} \otimes \mathbf{x}$ ， m 為任一正整數， \otimes 代表克羅內克積(Kronecker product)；

$\mathbf{x}^{[0]} := 1$ ， $\mathbf{x}^{[1]} := \mathbf{x}$ ， $\mathbf{x}^{[k]}$ 是將 $\mathbf{x}^{(k)}$ 中有重複的部分去除之後的向量。很明顯地，

$\mathbf{x}^{(k)} \in \mathfrak{R}^{n^k}$ ， $\mathbf{x}^{[k]} \in \mathfrak{R}^{C_k^{n+k-1}}$ ，而 $C_k^n := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ， $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ 。而 M 和 N

分別定義為符合 $\mathbf{x}^{[k]} = M_k \mathbf{x}^{(k)}$ 以及 $\mathbf{x}^{(k)} = N_k \mathbf{x}^{[k]}$ 的矩陣。另外，我們對 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 作泰

勒級數展開為 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \mathbf{x}^{(i)}$ 。這裡假設我們要對 $\mathbf{V}_x(\mathbf{x})$ 求解到 N 階的近似解，

下面說明如何以遞迴的方式求求解：

步驟 1：

從 $A_1^T S_2 + S_2 A_1 - \frac{1}{2} S_2 G(x) R^{-1} G^T(x) S_2 + 2Q = 0$ 中解出 S_2 ，然後令 $k = 3$ ，跳到步

驟 2。

步驟 2：

$$E_k = \sum_{l+m=k+1; l, m \geq 2} \text{row}(S_l A_m)$$

$$Z_k = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 3 \\ \sum_{l+m=k+2; l, m \geq 3} P_l M_l \left[\sum_{i=1}^l \mathbf{I}_n^{(i-1)} \otimes \left(-\frac{1}{2} G(x) R^{-1} G^T(x) S_m^T \right) \otimes \mathbf{I}_n^{(i-1)} \right] & \text{if } k > 3 \end{cases}$$

$$V_k = -(E_k + \frac{1}{2} Z_k) N_k$$

$$U_k = M_k \sum_{i=1}^k \mathbf{I}_n^{(i-1)} \otimes \left(A_1 - \frac{1}{2} G(x) R^{-1} G^T(x) S_2 \right) \otimes \mathbf{I}_n^{(k-i)} N_k$$

$$P_k = V_k / U_k$$

For $i = 1, \dots, k$

將 $P_k M_k \in \mathfrak{R}^{1 \times n^k}$ 區分成 n^i 相同大小的區塊，也就是每個區塊的維度為 $1 \times n^{k-i}$

令 P_{mn} 是 $P_k M_k$ 中的第 $m + 6(n-1)$ 個區塊

定義 $P_k^i = (P_{mn}) \in \mathfrak{R}^{n \times n^{k-1}}$

end

$$S_k = \sum_{i=1}^k (P_k^i)^T$$

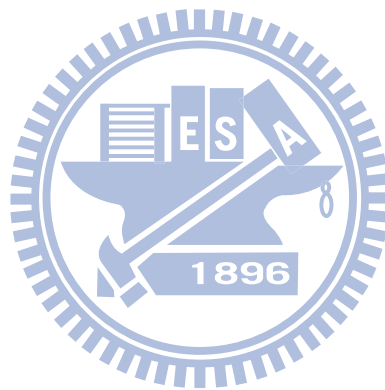
if $k = N + 1$ ，跳到**步驟 3**

else $k = k + 1$ ，跳回到**步驟 2**。

步驟 3：

$$V_x^T(\mathbf{x}) = \sum_{k=2}^{\infty} S_k^T N_{k-1} x^{[k-1]}。$$

將**步驟 3**最後所得到的 $V^T(\mathbf{x})$ 代入(2.11)中，就是最後的最佳控制律之近似值。



第3章

積分順滑模控制在衛星姿態穩健性控制上之應用

傳統順滑模控制由於能夠有效地消除系統擾動使系統穩定，加上有著容易實現設計的特性；因此常被大家用來處理系統穩健性的問題。雖然傳統順滑模控制能夠有效地達到穩健控制的目的，但是它在節省二次成本花費的問題上並沒有太多著墨。非線性 LQR 控制是一種能使二次成本花費降低的最佳化控制，但是這種控制方式對於系統擾動並不具穩健性。為了能夠使系統不受擾動影響，同時也希望能夠達到比較好的效能，我們採用積分順滑模控制。積分順滑模控制有幾項優點是我們採用這種設計方式的理由；一個是它能一開始就使狀態處於順滑模上，比起傳統順滑模控制更具有穩健性；另一個是當系統擾動為匹配式 (matched-type) 時，狀態軌跡會與無干擾系統軌跡一樣，而這個軌跡也是可以根據我們的需求來做設計，在這裡我們使用非線性 LQR 控制作為控制無干擾系統的控制律，希望能夠借此減少二次成本函數的花費。

在這一章中在 3.1 節我們定義所探討的系統為非線性二階系統，還有二次成本函數的形式以及控制目的。然後 3.2 節簡述針對此二階系統，使用第 2 章中所提到三種控制律的設計方式。接下來 3.3 節會以衛星姿態控制的模型為例子來模擬，並討論分析三種控制律的模擬結果，加以驗證順滑模控制的一些特性。

3.1 問題描述

考慮一個非線性二階微分方程如下：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{d} \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}^n$ ， $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}^n$ ， $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T \in \mathcal{R}^{2n}$ 代表系統狀態， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ 為控制輸入

且 $m \geq n$ ， $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$ 代表可能的系統不確定項或是外在干擾所產生的擾動，

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^n$ 以及 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ 為平滑函數且 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ， $(\cdot)^T$ 代表矩陣或向量的轉置。

在此我們必須先提出一個假設以方便後續控制律的推導。

假設 3.1：對所有的狀態而言， $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 為滿秩 (full rank) 矩陣。

另外在此我們定義二次成本函數為：

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{m \times m}$ 。

本章主要目的為比較三種控制律在面對外在干擾與系統不確定項這些系統擾動時是否能達到穩定的目的，同時以二次成本函數(3.2)作為指標來考慮效能比較。下面提到的函式為了表示上的方便，我們會省略一些在函式裡的變數。

3.2 控制律設計

3.2.1 積分順滑模控制

根據第 2 章所述積分順滑模控制的設計程序，首先我們需要二個假設

假設 3.2：存在一非負函數 $\rho_m(\mathbf{x}, t)$ (底下簡稱 ρ_m) 使以下不等式成立

$$\|\mathbf{d}_m\| \leq \rho_m \quad (3.3)$$

其中 $\mathbf{d}_m = \mathbf{G}^+ \cdot \mathbf{d}$ ， \mathbf{G}^+ 代表 \mathbf{G} 的準反矩陣(pseudo inverse matrix)。

假設 3.3：對於原始非線性系統(3.1)的無干擾系統，亦即


$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.4)$$

存在一控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ (底下簡稱 \mathbf{u}_0) 能使系統(3.4)全域漸進穩定。

有了假設 3.2 和假設 3.3 之後，設計的控制律主要分為二部分

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (3.5)$$

\mathbf{u}_0 是針對系統(3.4)的控制律； \mathbf{u}_0 的選擇視個人需求而定，一般來說會使用最佳化控制的設計方式，在這裡我們 \mathbf{u}_0 是選用非線性 LQR 的控制律。而 \mathbf{u}_1 為一非連續控制律； \mathbf{u}_1 是負責抵消擾動使系統保持在順滑面的狀態上。根據積分順滑模控制的設計方式[15]，[16]，順滑面的選取原本會定為

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{D}} \cdot [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t (\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\tau)) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \mathbf{u}_0(\tau)) \cdot d\tau] \quad (3.6)$$

其中 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T$, $\bar{\mathbf{D}} \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$, $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{x}_2^T(t), \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(t)))^T$,
 $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{0}_{m \times n}, \mathbf{G}^T(\mathbf{x}(t)))^T$, 不失一般性我們可以令 $\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D})$, $\mathbf{D}_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$,
 $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, 我們可以發現 $\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}(t))$ 。另一方面, 我們考慮對(3.6)

做微分, 可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{s}}}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{D}} \cdot [(\dot{\mathbf{x}}_1^T(t), \dot{\mathbf{x}}_2^T(t))^T - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{u}_0(t)] \\ &= \bar{\mathbf{D}} \cdot [(\mathbf{x}_2^T(t), \dot{\mathbf{x}}_2^T(t))^T - (\mathbf{x}_2^T(t), \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(t)))^T - (\mathbf{0}_{m \times n}, \mathbf{G}^T(\mathbf{x}(t)))^T \cdot \mathbf{u}_0(t)] \\ &= \bar{\mathbf{D}} \cdot [(\mathbf{0}_{1 \times n}, \dot{\mathbf{x}}_2^T(t) - \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(t)))^T - (\mathbf{0}_{m \times n}, \mathbf{G}^T(\mathbf{x}(t)))^T \cdot \mathbf{u}_0(t)] \\ &= \mathbf{D} \cdot [\dot{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{u}_0(t)].\end{aligned}$$

所以在這裡我們所選取的順滑面就簡化為

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \cdot [\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(t_0) - \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \mathbf{u}_0(\tau)) \cdot d\tau] = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

其中對所有狀態而言, $\mathbf{D}\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 為滿秩。當系統處於順滑模式下時, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ 。

由(3.1)和(3.7)式可以得到

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{D} \cdot [\dot{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u}_0)] = \mathbf{D} \cdot [\mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} - (\mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u}_0)] = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) = \mathbf{0}.$$

此時系統對應的控制律應為 $\mathbf{u} = -\mathbf{G}^+ \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{u}_0)$, 再代入原始系統(3.1)後, 可以證明與無干擾系統(3.4)相同。

第二部分的控制律 \mathbf{u}_1 需要分二種情況討論; 一是當 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 時, \mathbf{u}_1 不需作用, 所以 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$; 二是當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ 時, \mathbf{u}_1 要能使順滑函數保持為 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, 所以令

$$\mathbf{u}_1 = -\rho \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G})^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{D}\mathbf{G})^T \mathbf{s}\|} \quad (3.8)$$

其中 $\rho > \rho_m$ 。我們選取李雅普諾夫函數為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$, 微分之後代入(3.5)、(3.7)

和(3.8)可知

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{D} \cdot (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) = \mathbf{s}^T \mathbf{D}\mathbf{G} \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{G}^+ \mathbf{d} - \mathbf{u}_0) \\ &\leq -\rho \cdot \|(\mathbf{D}\mathbf{G})^T \mathbf{s}\| + \|\mathbf{G}^+ \mathbf{d}\| \cdot \|(\mathbf{D}\mathbf{G})^T \mathbf{s}\| \leq (-\rho + \rho_m) \cdot \|(\mathbf{D}\mathbf{G})^T \mathbf{s}\| < 0.\end{aligned}$$

最後我們可以提出以下定理：

定理 3.1：考慮一個非線性二階系統(3.1)，當假設 3.1 到假設 3.3 同時成立時，以下控制律

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_0, & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_0 - \rho_m \cdot \frac{(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{DG})^T \mathbf{s}\|}, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.9)$$

對於(3.1)系統原點能達到全域漸進穩定(globally asymptotically stable, GAS)。

3.2.2 傳統順滑模控制

根據第 2 章傳統順滑模控制設計方式，我們首先需要選取適當的順滑面，使得在順滑平面上的系統狀態最終能達到穩定。參考[12]，在這裡我們選取順滑平面為：

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{M}\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} > 0$ 。我們可以明顯地發現當 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 時；即系統在順滑面上的時候， \mathbf{x}_1 會逐漸為 $\mathbf{0}$ ， \mathbf{x}_2 也會隨之為 $\mathbf{0}$ 而使系統狀態穩定。

接著我們要設計一個控制律，使得系統狀態在有限時間內會到達順滑平面而且會持續維持在順滑平面上。因此我們先對(3.10)式做微分，得到

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_1 \quad (3.11)$$

再將原始系統(3.1)代入，整理後得到

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f} + \mathbf{M}\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (3.12)$$

根據傳統順滑模控制設計程序，我們選擇

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{u}^{re} \quad (3.13)$$

\mathbf{u}^{eq} 是為了使系統狀態在不考慮 \mathbf{d} 的時候能持續維持在順滑平面上，即設計控制律使 $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ 。因此我們可以得到

$$\mathbf{u}^{eq} = -\mathbf{G}^+ \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{M}\mathbf{x}_2). \quad (3.14)$$

另外一部分的控制律是為了讓系統狀態在有限時間內到達順滑平面，也就是要設計控制律滿足 $\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\eta \|\mathbf{s}\|$ ， $\eta > 0$ 為一常數。在這裡我們先提出一個假設：

假設 3.4：存在一非負函數 $\sigma(\mathbf{x}, t)$ (底下簡稱 σ) 使以下不等式成立

$$\|\mathbf{d}\| \leq \sigma. \quad (3.15)$$

根據傳統順滑模控制設計程序，若假設 3.4 成立，我們可以設計 \mathbf{u}^{re} 為

$$\mathbf{u}^{re} = -\mu \cdot \mathbf{G}^+ \text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (3.16)$$

其中 $\mu = \eta + \sigma$ ， $\text{sgn}(\mathbf{s}) = (\text{sgn}(s_1), \dots, \text{sgn}(s_n))^T$ 。將(3.14)、(3.16)代入(3.13)，得到最後完整的控制律為：

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G}^+ \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{M}\mathbf{x}_2 + \mu \cdot \text{sgn}(\mathbf{s})) \quad (3.17)$$

我們可以證明控制律(3.17)可以滿足 $\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\eta \|\mathbf{s}\|$ 的條件。考慮(3.12)和(3.17)，可以得到

$$\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T (\mathbf{f} + \mathbf{M}\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d}) = \mathbf{s}^T (-\mu \cdot \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{d}) \leq -(\eta + \sigma) \cdot \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{d}\| \cdot \|\mathbf{s}\| \leq -\eta \cdot \|\mathbf{s}\|.$$

由以上的討論我們會有以下的結果：

定理 3.2：當假設 3.1 和假設 3.4 同時成立時，採用控制律(3.17)可以使原始系統(3.1)的原點達到全域漸進穩定(globally asymptotically stable, GAS)。

3.2.3 非線性 LQR 控制

考慮不包含擾動 \mathbf{d} 的動態系統(3.1)，我們可將系統表示下面形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}' + \mathbf{G}'\mathbf{u} \quad (3.18)$$

其中 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T \in \mathfrak{R}^{2n}$ ， $\mathbf{f}' = (\mathbf{x}_2^T, \mathbf{f}^T)^T \in \mathfrak{R}^{2n}$ ， $\mathbf{G}' = (\mathbf{0}_{m \times n}, \mathbf{G}^T)^T \in \mathfrak{R}^{2n \times m}$ 。此系統與 2.3 節所描述的系統形式相同，因此我們應用同樣的設計步驟。

LQR 的控制的是找到一個最佳狀態回溯控制律使得二次成本函數(3.2)的值降低。參考 2.3 所描述的設計方式，一個非線性 LQR 的控制律為

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}'^T \mathbf{V}_x^T \quad (3.19)$$

其中列向量 \mathbf{V}_x 要符合下面的 H-J 等式：

$$\mathbf{V}_x \mathbf{f}' - \frac{1}{4} \cdot \mathbf{V}_x \mathbf{G}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}'^T \mathbf{V}_x^T + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0 \quad (3.20)$$

求解 \mathbf{V}_x 的過程與 2.3 節所述相同。

3.3 衛星姿態穩健控制之模擬

3.3.1 衛星動態

首先考慮三個動器的衛星系統動態方程式，根據尤拉(Euler)方程式的定義[23]，衛星系統動態方程式以角動量守衡法則來表現有以下形式：

$$T + G_e = \frac{dh}{dt} = \left[\frac{dh}{dt} \right]_b + \omega \times h \quad (3.21)$$

其中 T 是外界的干擾，可能包括太陽壓力力矩(solar pressure torque)、磁場干擾(magnetic field disturbance)以及外部輸入力矩(external input torque)； G_e 為地球的重力梯度力矩(gravity gradient torque)， h 是總角動量， ω 是主軸的角度率，而 $[\cdot]_b$ 是表示衛星相對於本體座標軸。定義 \hat{i} 、 \hat{j} 和 \hat{k} 為本體標軸中的標準基底向量，因此總角動量可以表示成：

$$h = (I_x \omega_x + h_{ax}) \hat{i} + (I_y \omega_y + h_{ay}) \hat{j} + (I_z \omega_z + h_{az}) \hat{k} \quad (3.22)$$

其中 I_x 、 I_y 、 I_z 分別代表相對於 x 、 y 、 z 三軸的慣量， ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分別定義為相對應 x 、 y 、 z 三軸的角度率， h_{ax} 、 h_{ay} 和 h_{az} 為輸入力矩。將(3.22)代入(3.21)可以得到

$$T + G_e = \begin{pmatrix} I_x \dot{\omega}_x + \dot{h}_{ax} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z + \omega_y h_{az} - \omega_z h_{ay} \\ I_y \dot{\omega}_y + \dot{h}_{ay} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z + \omega_z h_{ax} - \omega_x h_{az} \\ I_z \dot{\omega}_z + \dot{h}_{az} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y + \omega_x h_{ay} - \omega_y h_{ax} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

根據[23]，將角度率與尤拉角度率的關係表示成向量的形式：

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \omega_0 \sin \psi \cos \theta \\ \dot{\theta} + \omega_0 (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi) \\ \dot{\psi} + \omega_0 (\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

其中 ϕ 、 θ 和 ψ 分別為相對於 x 、 y 和 z 軸的旋轉角度， ω_0 為軌道率。重力梯度力矩可以寫成：

$$G_e = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\omega_0^2(I_y - I_z)\cos^2\theta\sin 2\phi \\ \frac{3}{2}\omega_0^2(I_z - I_x)\sin 2\theta\cos\phi \\ -\frac{3}{2}\omega_0^2(I_x - I_y)\sin 2\theta\sin\phi \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

定義狀態變數 $x_1 = \phi$ ， $x_2 = \theta$ ， $x_3 = \psi$ ， $x_4 = \dot{\phi}$ ， $x_5 = \dot{\theta}$ ， $x_6 = \dot{\psi}$ ，考慮 (3.23)-(3.25)，衛星動態系統可以表示成如下的形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.26)$$

其中 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)^T$ ， $\mathbf{x}_2 = (x_4, x_5, x_6)^T$ ， $\mathbf{u} = \left(\frac{T_x}{I_x}, \frac{T_y}{I_y}, \frac{T_z}{I_z} \right)^T$ ， $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ ，

$$f_1 = \omega_0 x_6 c x_2 c x_3 - \omega_0 x_5 s x_2 s x_3 + \frac{I_y - I_z}{I_x} \cdot [x_5 x_6 + \omega_0 x_5 c x_1 s x_2 s x_3 + \omega_0 x_5 c x_3 s x_1 + \omega_0 x_6 c x_1 c x_3 + \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_3) c^2 x_1 s x_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 c^2 x_3 s(2x_1) - \omega_0 x_6 s x_1 s x_2 s x_3 - \frac{1}{2} \omega_0^2 s^2 x_2 s^2 x_3 s(2x_1) - \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_3) s x_2 s^2 x_1 - \frac{3}{2} \omega_0^2 c^2 x_2 s(2x_1)],$$

$$f_2 = \omega_0 x_6 s x_3 c x_1 + \omega_0 x_4 c x_3 s x_1 + \omega_0 x_6 c x_3 s x_1 s x_2 + \omega_0 x_5 s x_1 s x_3 c x_2 + \omega_0 x_4 s x_2 s x_3 c x_1 + \frac{I_z - I_x}{I_y} \cdot [x_4 x_6 + \omega_0 x_4 c x_1 s x_2 s x_3 + \omega_0 x_4 c x_3 s x_1 - \omega_0 x_6 s x_2 c x_3 - \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_2) s^2 x_3 c x_1 - \frac{1}{2} \omega_0^2 c x_2 s x_1 s(2x_3) + \frac{3}{2} \omega_0^2 s(2x_2) c x_1],$$

$$f_3 = \omega_0 x_4 s x_1 s x_2 c x_3 - \omega_0 x_6 c x_1 c x_3 s x_2 - \omega_0 x_5 c x_1 c x_2 s x_3 + \omega_0 x_6 s x_1 s x_3 - \omega_0 x_4 c x_1 c x_3 + \frac{I_x - I_y}{I_z} \cdot [x_4 x_5 + \omega_0 x_4 c x_1 c x_3 - \omega_0 x_4 s x_1 s x_2 s x_3 - \omega_0 x_5 s x_3 c x_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 s(2x_3) c x_1 c x_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 s^2 x_3 s x_1 s(2x_2) - \frac{3}{2} \omega_0^2 s(2x_2) s x_1],$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

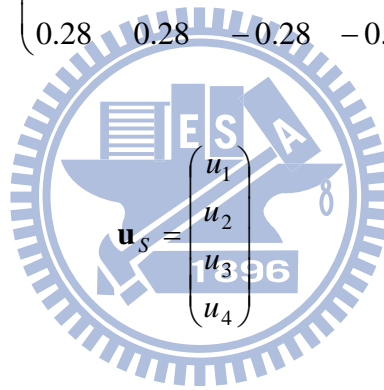
其中 c 和 s 分別代表 \cos 和 \sin 這二個函數。

以上衛星動態系統主要是描述三個控制輸入的系統；然而，在很多實際的應用中，一個系統通常會備有冗餘(redundancy)以因應推進器故障的情況，讓系統能夠維持正常的運作。其中有一個例子為備有四個推進器的 ROCSAT II 衛星[24]，其系統動態為：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}_S \mathbf{u}_S \end{cases} \quad (3.27)$$

其中 \mathbf{f} 不變，而 \mathbf{G}_S 和 \mathbf{u}_S 分別為：

$$\mathbf{G}_S = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.69 & -0.69 & -0.69 & 0.69 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -0.28 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$



$$\mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

在這裡 u_1 、 u_2 、 u_3 和 u_4 為 ROCSAT II 衛星在四個方向上的控制力矩。整合以上討論，我們考慮有擾動存在的衛星動態系統為：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}_S \mathbf{u}_S + \mathbf{d} \end{cases} \quad (3.30)$$

其中 $\mathbf{x}_1 = (\phi, \theta, \psi)^T = (x_1, x_2, x_3)^T$ ， $\mathbf{x}_2 = (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T = (x_4, x_5, x_6)^T$ ， $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ ， \mathbf{d} 代表擾動。

3.3.2 模擬結果

在這一小節中，我們利用 MATLAB 軟體來模擬 3.3.1 小節所提到的衛星系統；在考慮存在系統擾動的情形下，利用 3.2 節所提到的三種控制方式，觀察是否能達到穩定，另外還有比較它們二次成本函數以及收斂時間等這些效能的情況。在下面的模擬例子中，我們所選取的參數數值如下所述。在系統動態方面， $\omega_0 = 1.0312 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ ， $I_x = I_z = 2000 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ， $I_y = 400 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ， $\mathbf{d} = (0.05 \sin(t), 0.05 \cos(2t), 0.05 \sin(3t))^T$ 。有關二次成本函數的 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 分別為 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_6$ ， $\mathbf{R} = \mathbf{I}_4$ 。在積分順滑模控制律方面，由於系統中的 4 個控制輸入原本是由 3 個控制輸入增加冗餘後所產生的，所以這裡 $\mathbf{D} = \mathbf{I}_3$ ， \mathbf{u}_0 這裡採用非線性 LQR 控制的方式，對 V_x 求得其 3 階的近似解， ρ_m 的選取為 $\|\mathbf{G}_S^+ \mathbf{d}\|_\infty + 1$ 。同樣減輕切跳(chattering)現象，我們將控制律(3.9)修改為下面型式：

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 - \rho_m \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G}_S)^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{D}\mathbf{G}_S)^T \mathbf{s}\|}, & \text{if } \|(\mathbf{D}\mathbf{G}_S)^T \mathbf{s}\| \geq \varepsilon \\ \mathbf{u}_0 - \rho_m \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G}_S)^T \mathbf{s}}{\varepsilon}, & \text{if } \|(\mathbf{D}\mathbf{G}_S)^T \mathbf{s}\| < \varepsilon \end{cases} \quad (3.31)$$

在這裡我們選取 $\varepsilon = 0.02$ 。在傳統順滑模控制律方面， $\mathbf{M} = 2 \cdot \mathbf{I}_3$ ， σ 的選取為 $\|\mathbf{d}\|_\infty$ ， $\eta = 1$ 。另外為了減輕符號函數(sign function)所造成的切跳現象，在這裡我們用飽和函數(saturation function)來取代符號函數，其邊界寬度為 0.02。而系統的初始狀態設為 $\mathbf{x}(0) = (-0.7, -0.07, 1.5, 0.3, 1.3, -0.2)^T$ 。

模擬的結果顯示在圖 3.1-圖 3.13，而效能的比較整理在表 3.1。我們將積分順滑模控制的結果以 ISMC 當作標示；傳統順滑模控制的結果以 CSMC 當作標示；另外以 LQRd 和 LQR 分別代表非線性 LQR 控制在系統有擾動和沒有擾動的情況下所得到的結果。也就是說 LQR 是相當於積分順滑控制中的無干擾系統控

制(nominal system control)的部分。

圖 3.1-圖 3.6 分別代表狀態 x_1-x_6 ，我們可以看到 ISMC 和 CSMC 在有擾動的情況下都可以達到穩定，而 LQRd 因為有受到擾動的影響所以無法穩定。另外需要注意的一點是由於 ISMC 和 LQR 的狀態幾乎重合，所以狀態的圖形會看起來只有三條線，但實際有四條線。接著圖 3.7-圖 3.9 為 ISMC 和 CSMC 的順滑函數變化的比較；ISMC 的順滑函數一開始就為 0，此後也一直保持在 0 附近，如此驗證了積分順滑模控制中消除了到達階段(reaching phase)的這個特性；而 CSMC 的順滑函數則都是過了一段間才達到 0。我們可以注意到當 $t=3$ 的時候，CSMC 的順滑函數 s_1 、 s_2 和 s_3 差不多都已經到達 0，而 CSMC 的控制律也跟著在 $t=3$ 的時候產生了幅度較大的變化，也影響了 CSMC 的狀態 x_4-x_6 它們的變化軌跡變得不平滑。這是因為當系統狀態到達順滑面時，CSMC 的控制律會隨之作切換而產生的結果。最後圖 3.10-圖 3.13 為控制律的比較圖，值得注意的是 ISMC 和它對應的無干擾控制律 LQR 並不相同，不過 ISMC 的控制律看起來是以 LQR 的控制律做為基線的諧波振盪；這是因為 ISMC 和 LQR 的狀態軌跡十分接近，而 ISMC 的控制律比 LQR 的只是多了一部分要抵消干擾的控制律，而造成此現象。

表 3.1 為效能比較的整理表，主要說明了狀態穩定的情況和時間，以及一些二次成本函數的比較。其中 LQRd 最後並沒有達到穩定，所以用 No 來表示；有穩定的則用 Yes 來表示。而在二次成本上 LQR 都是花費最少的，再來 ISMC 在控制力道上花費的比 CSMC 少，而狀態的部分則是比 CSMC 多；不過最後二次成本函數的總和還是 ISMC 比 CSMC 少。而 $\|u\|_{\infty}$ 最大的是 CSMC。收斂時間(convergence time)這裡是訂為最後所有狀態的絕對值都小於 0.01 的時候。CSMC 在這裡是用了最多控制力道的，這也使得 CSMC 的收斂時間是最快的。

總和以上結果，首先可以驗證單靠非線性 LQR 控制律無法達到穩健性，而其他二個方法則可以順利達到。再來就是我們可以發現 ISMC 的狀態變化會與它

所對應的無干擾系統(在此次模擬中為 LQR)是幾乎重疊的，這點我們可以從圖 3.1-圖 3.6 以及表 3.1 內狀態的積分結果觀察得知。而從圖 3.7-圖 3.9 我們可以看到 ISMC 的順滑函數能夠從頭到尾一直保持為 0，也就是一直維持在順滑模式之下。另一方面，雖然 ISMC 比起 LQR 需要多一部分控制律來抵消擾動的影響，不過由於 ISMC 的狀態軌跡是幾乎與 LQR 的相同，所以在一定程度上減少了二次成本函數的花費，我們可以將此 ISMC 的控制律作為一種次最佳化(suboptimal)的設計方式。由最後的效能比較，我們也驗證了 ISMC 的二次成本函數會比 SMC 的花費少。



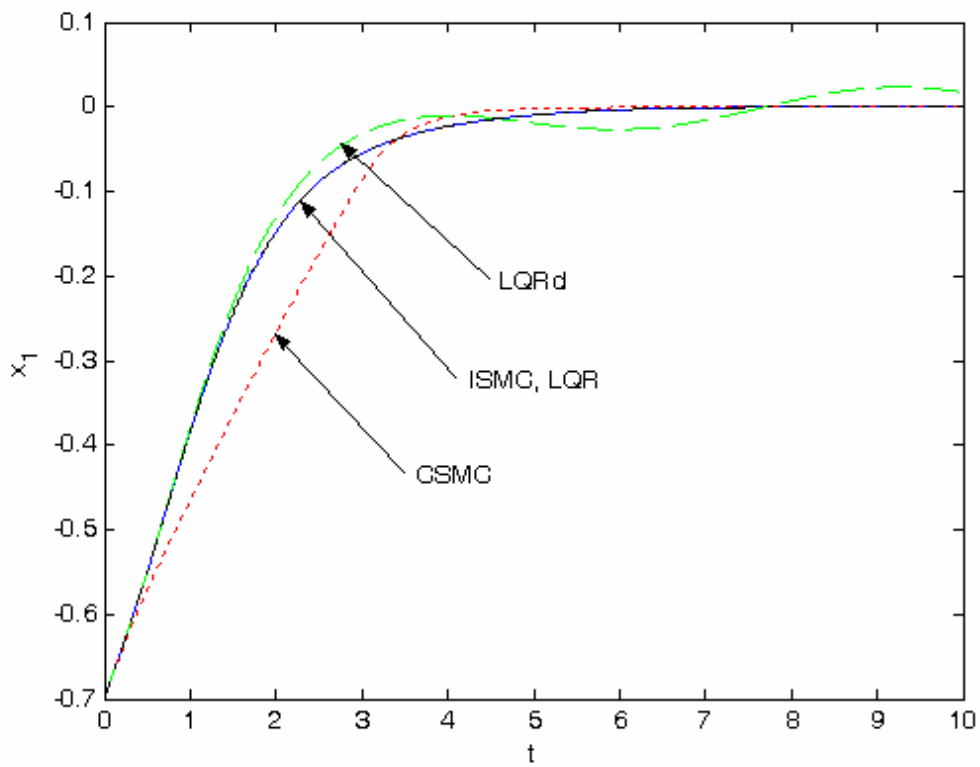


圖 3.1 狀態變數 x_1 之時間響應比較圖

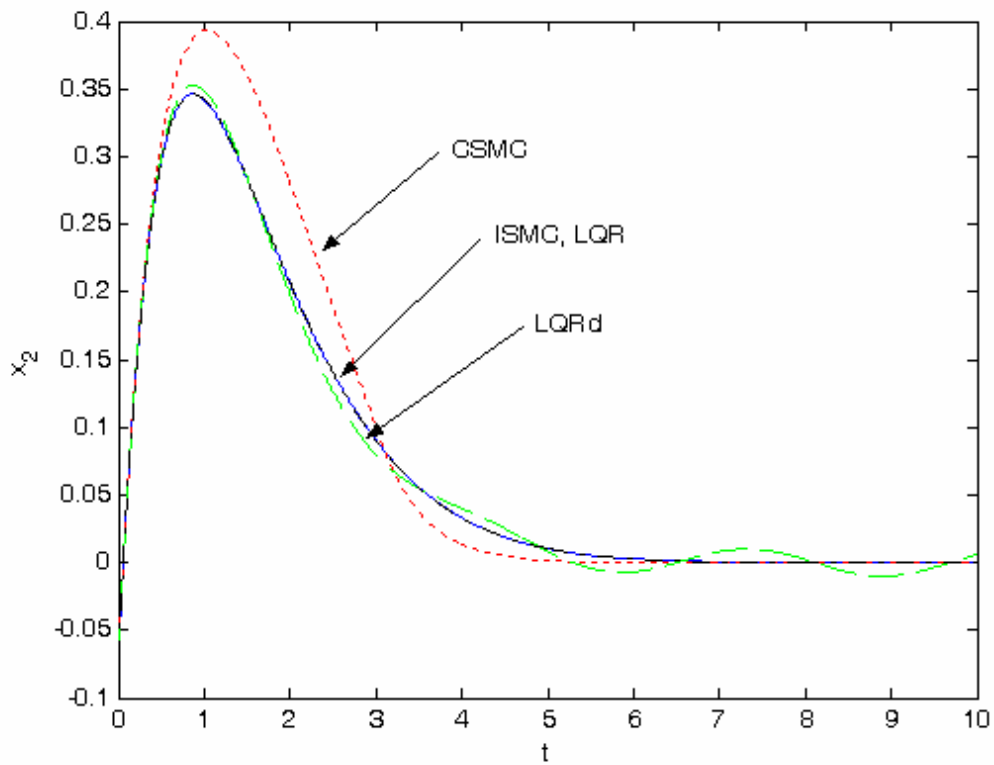


圖 3.2 狀態變數 x_2 之時間響應比較圖

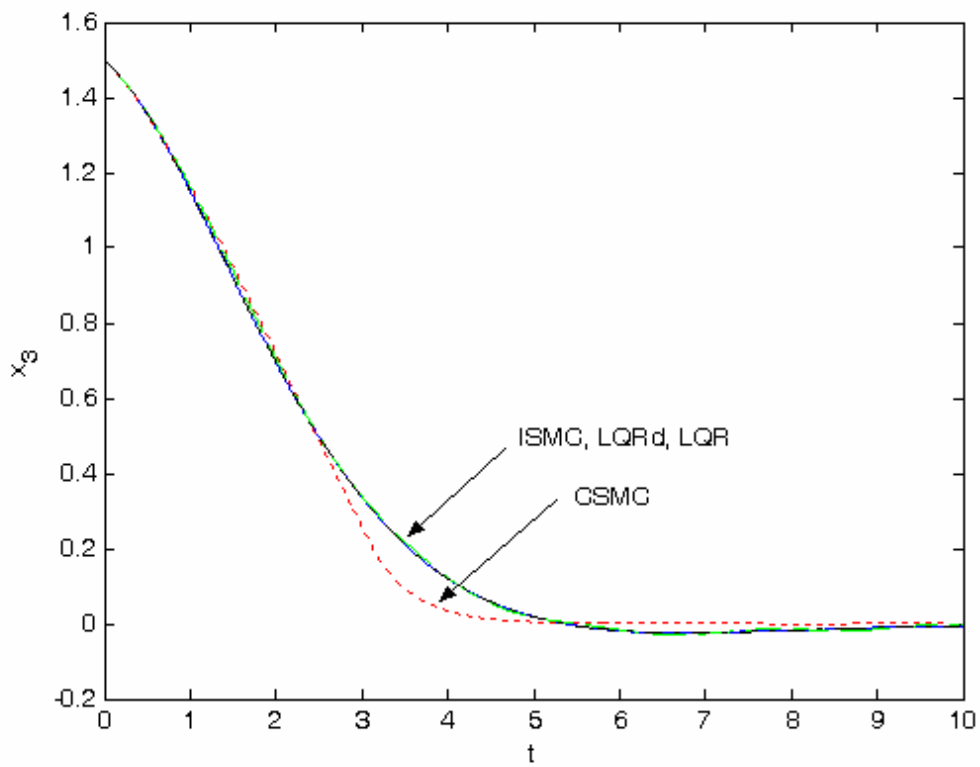


圖 3.3 狀態變數 x_3 之時間響應比較圖

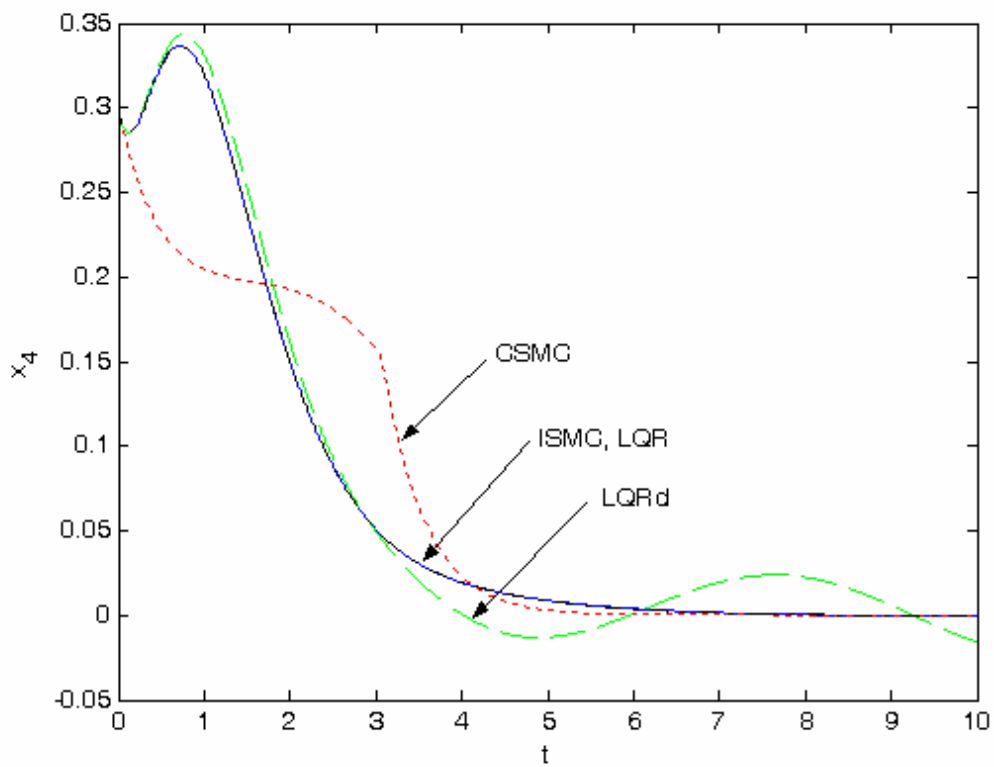


圖 3.4 狀態變數 x_4 之時間響應比較圖

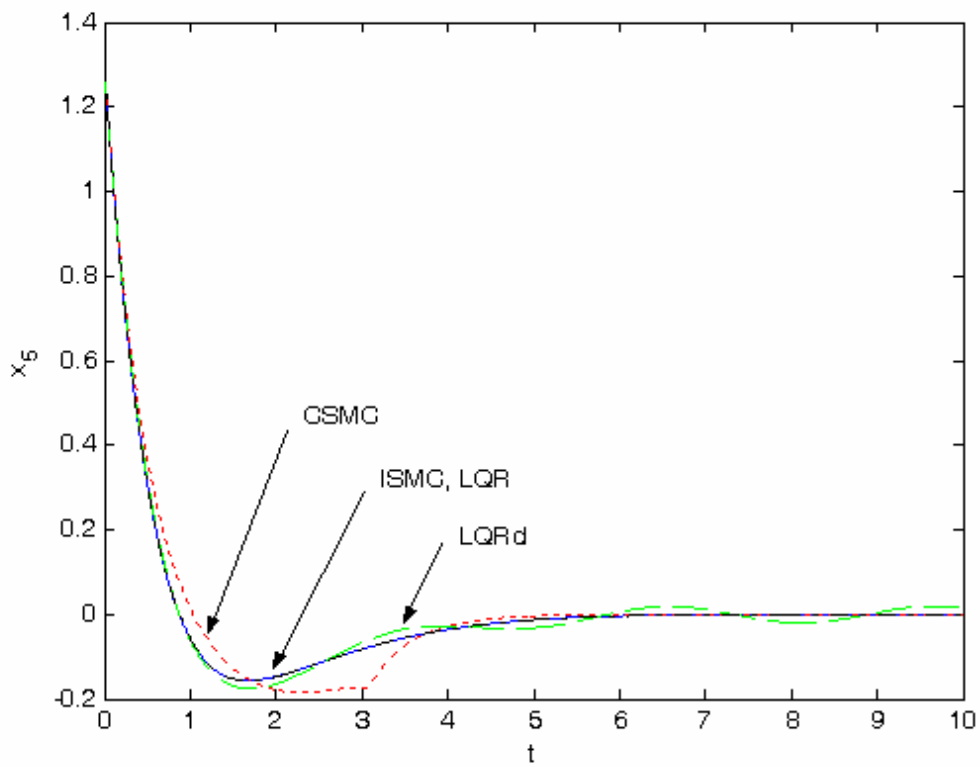


圖 3.5 狀態變數 x_5 之時間響應比較圖

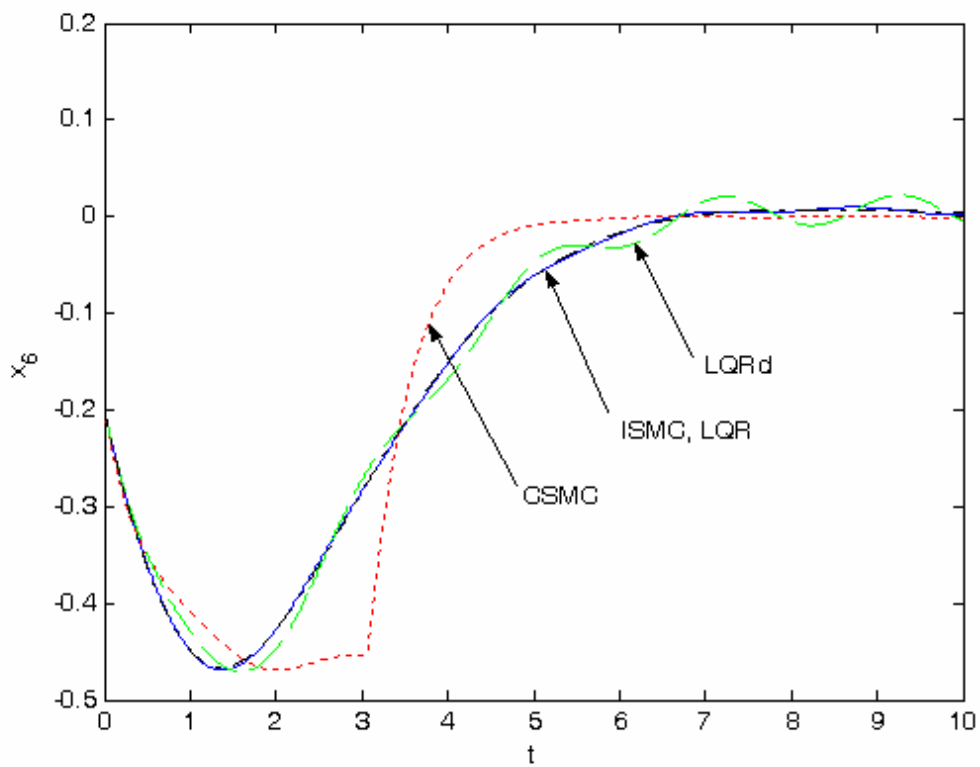


圖 3.6 狀態變數 x_6 之時間響應比較圖

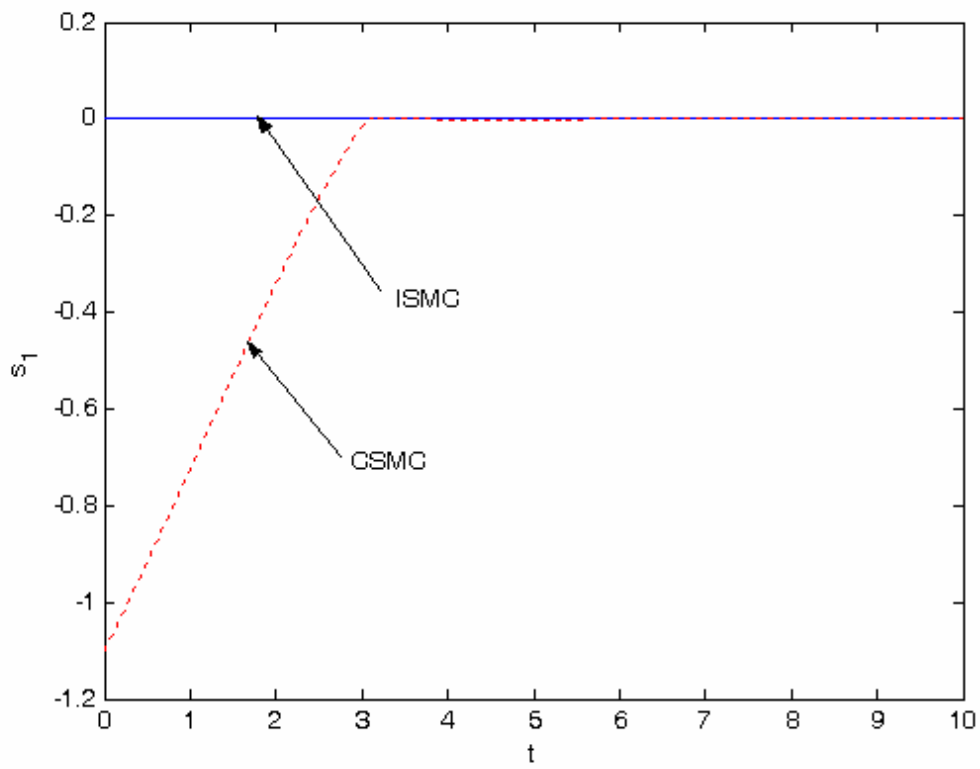


圖 3.7 順滑函數 s_1 之時間響應比較圖

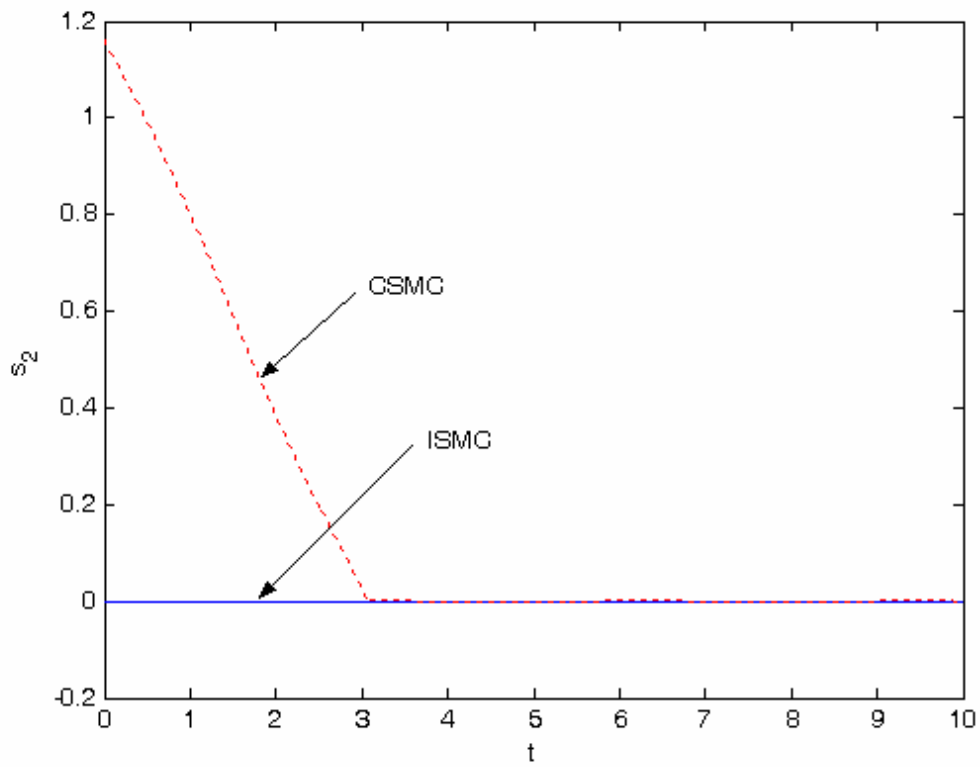


圖 3.8 順滑函數 s_2 之時間響應比較圖

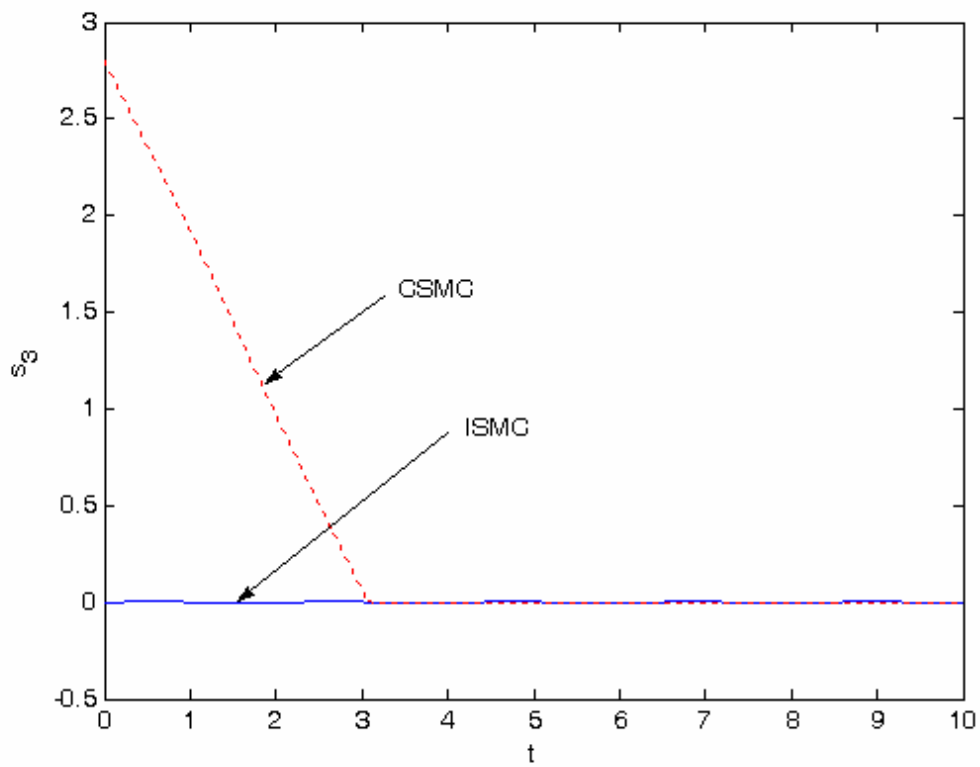


圖 3.9 平滑函數 s_3 之時間響應比較圖

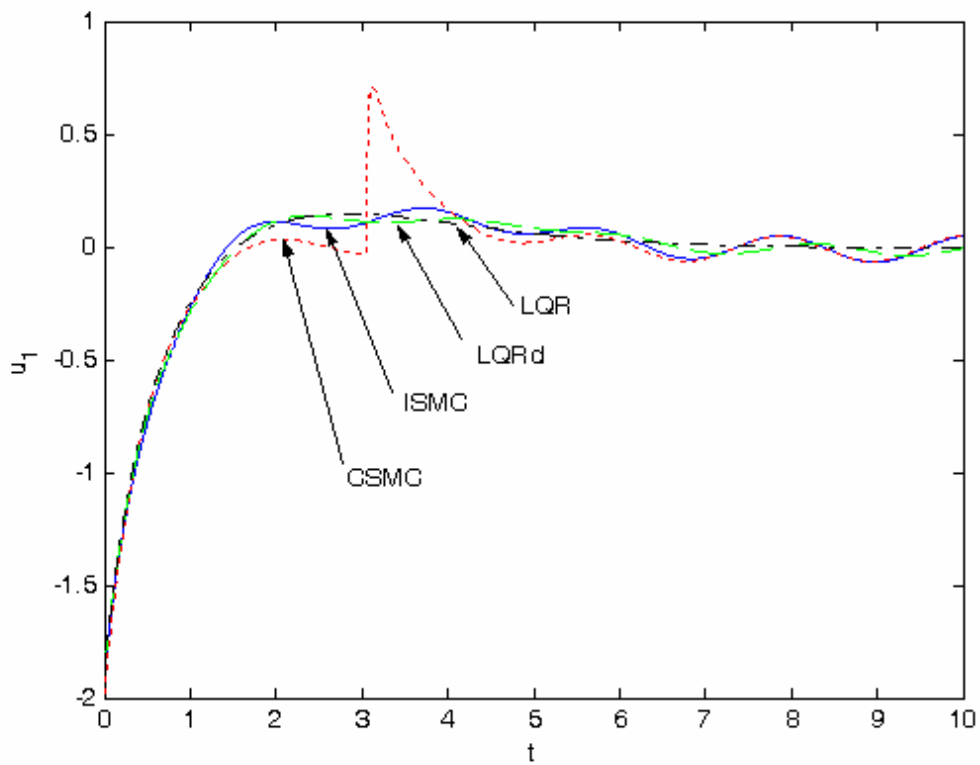


圖 3.10 控制輸入 u_1 之時間響應比較圖

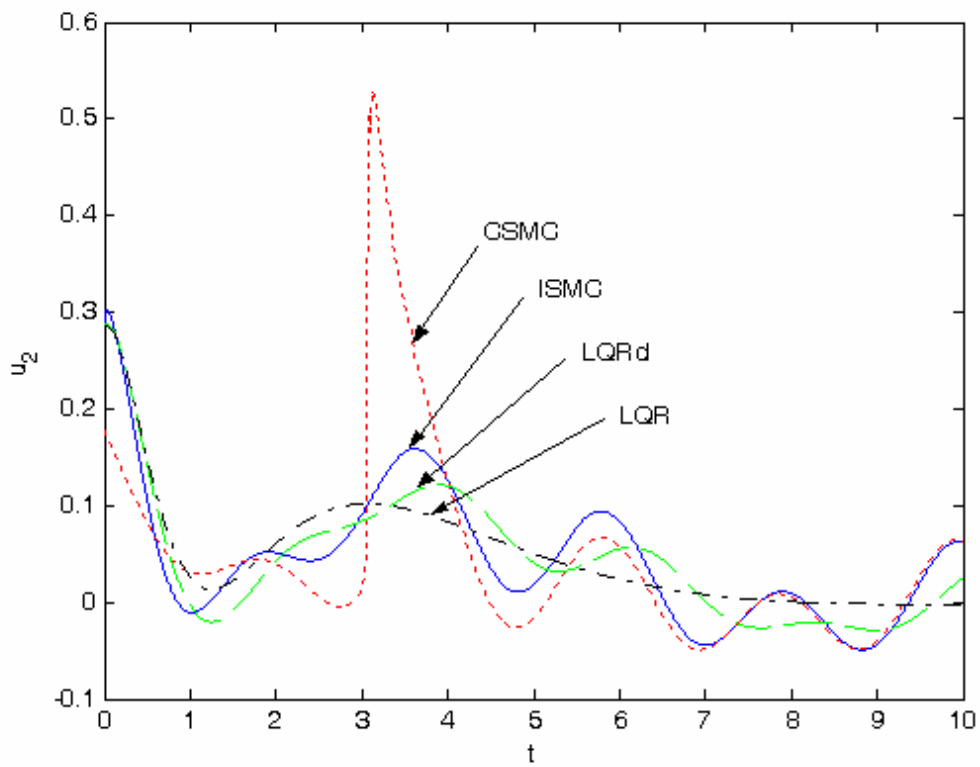


圖 3.11 控制輸入 u_2 之時間響應比較圖

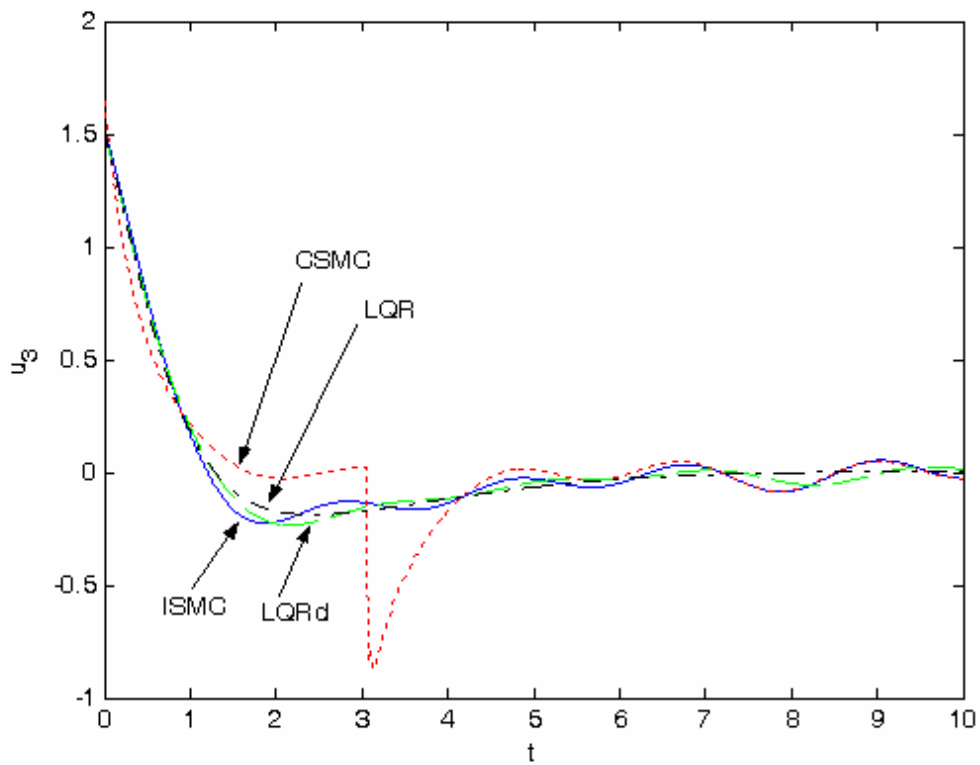


圖 3.12 控制輸入 u_3 之時間響應比較圖

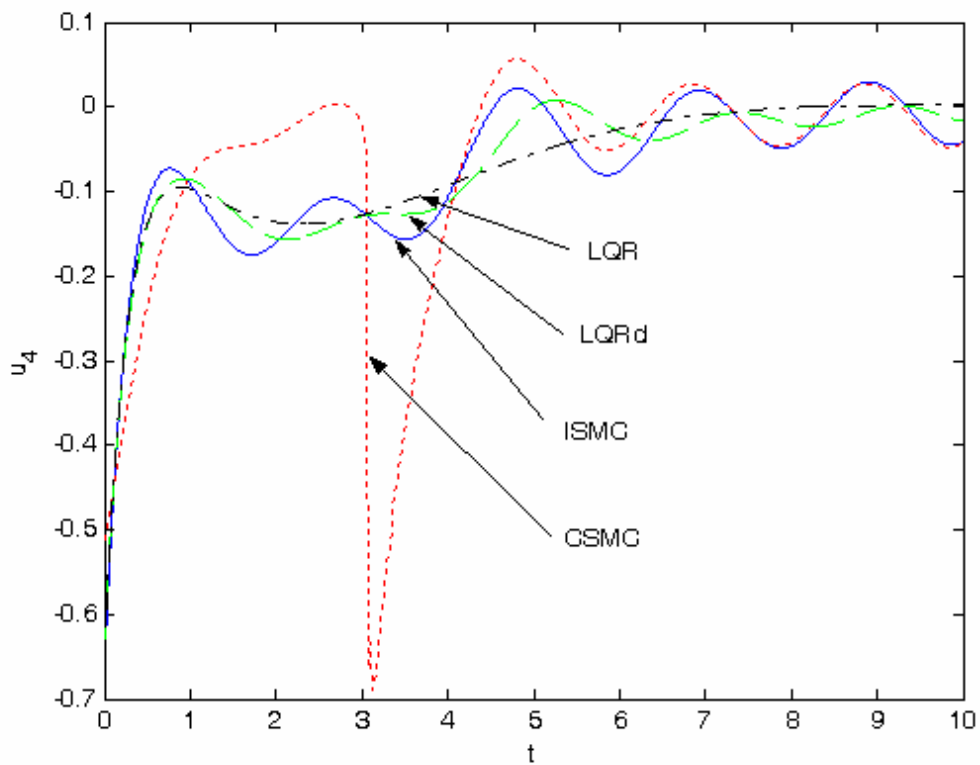


圖 3.13 控制輸入 u_4 之時間響應比較圖



表 3.1 效能比較表

Controller	Performance index					Convergence time
	Stable	$\int u^T u$	$\int x^T x$	$\int u^T u + \int x^T x$	$\ u\ _\infty$	
ISMC	Yes	2.1259	4.6294	6.7553	2.5099	5.1730
CSMC	Yes	2.4605	4.8981	7.3586	2.6305	4.6330
LQRd	No	X	X	X	X	X
LQR	Yes	1.9517	4.6277	6.5794	2.5099	5.1570

第4章

積分順滑模控制在可靠度控制問題上之研究

由第三章的討論我們可以得知積分順滑模控制有著一些不錯的優點，像是不受系統擾動影響的穩健性，還有可以加入非線性 LQR 的設計方式減少二次成本函數，並且我們從模擬結果也加以驗證了這些特性。在這一章中，我們希望能將積分順滑模控制的方法延伸到可靠度控制上面，並且仍然能夠保有原本積分順滑模控制的特性和優點。另一方面，我們會與傳統順滑模可靠度控制以及非線性 LQR 可靠度控制的方法來做比較。在可靠度設計的議題上，主要可分為二種設計方式；一種是被動式(passive)可靠度控制，另一種是主動式(active)可靠度控制。被動式可靠度控制必須先劃分出不會故障和可能故障的促動器(actuator)，可是實際上在故障發生前我們是很難得知這方面的資訊的。而主動式可靠度控制可以依靠錯誤偵測與診斷機制(fault detection and diagnosis, FDD)來監視故障的發生和嚴重的程度。所以在這裡我們決定以主動式的設計方式為主，下面所談到的控制律設計都是基於主動式的控制律設計。

這一章中首先在 4.1 節我們定義所探討的系統為非線性二階系統，還有二次成本函數的形式以及控制目的。在 4.2 節會推導如何設計積分順滑模的可靠度控制律，以及簡述傳統順滑模可靠度控制和 LQR 的可靠度控制的控制律設計。最後在 4.3 節我們會以衛星姿態控制做為模擬範例，討論三種設計方式的控制情況，並驗證積分順滑模可靠度控制的一些優點。

4.1 問題描述

在主動式的設計方式裡，我們會先假設我們由錯誤偵測與診斷機制(fault detection and diagnosis, FDD)的資訊中得知故障的促動器部分。為了區分正常和故障的促動器，我們以 H 代表正常的部分； F 代表故障的部分。參考系統動態 (3.1)，為了討論可靠度的問題，我們考慮一個非線性二階微分方程如下：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_H(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_F(\mathbf{x}) + \mathbf{d} \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}^n$ ， $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}^n$ ， $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T \in \mathcal{R}^{2n}$ 代表系統狀態， $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^k$ ， $\mathbf{u}_F(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{m-k}$ 為控制輸入且 $m \geq k \geq n$ ，因為在傳統順滑模控制和積分順滑模控制中，都需要 $\text{rank}(\mathbf{G}_H(\mathbf{x})) = n$ 的假設存在 [16]，[21]。 \mathbf{d} 代表可能的系統不確定項或外在干擾之類的系統擾動， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^n$ 以及 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (\mathbf{G}_H(\mathbf{x}), \mathbf{G}_F(\mathbf{x})) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ 為平滑函數且 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ， $(\cdot)^T$ 代表矩陣或向量的轉置。在此我們必須先提出一個假設以方便後續控制律的推導。

假設 4.1：對所有的狀態而言， $\text{rank}(\mathbf{G}_H(\mathbf{x})) = n$ 。

另外我們同樣定義二次成本函數為：

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{m \times m}$ 。

本章主要目的是要應用積分順滑模控制的觀念，設計一個控制律使得當某些促動器發生故障時依然能夠利用剩下正常的促動器來完成穩定的任務。另外我們會順便加入系統擾動的因素與傳統順滑模可靠度控制以及非線性 LQR 可靠度控

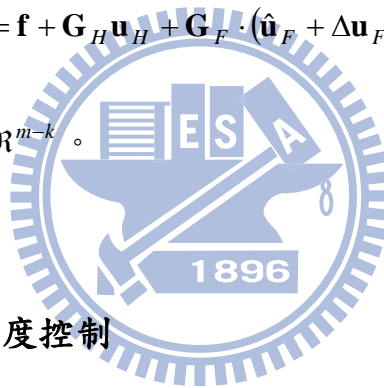
制來作比較，並且以二次成本函數(4.2)作為一項效能的指標。下面提到的函式為了表示上的方便，我們會省略一些在函式裡的變數。

4.2 主動式可靠度控制律設計

主動式可靠度控制的一個重要機構是錯誤偵測與診斷(FDD)的機制。我們考慮系統(4.1)，並且假設藉由錯誤偵測與診斷我們估測到故障部分的促動器為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ ，而估測誤差令為 $\Delta\mathbf{u}_F$ ，那麼實際的系統動態我們可以表示成：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}_H \mathbf{u}_H + \mathbf{G}_F \cdot (\hat{\mathbf{u}}_F + \Delta\mathbf{u}_F) + \mathbf{d} \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 $\hat{\mathbf{u}}_F \in \mathcal{R}^{m-k}$ ， $\Delta\mathbf{u}_F \in \mathcal{R}^{m-k}$ 。



4.2.1 積分順滑模可靠度控制

這一小節我們會討論如何用積分順滑面來設計主動式的可靠度控制律。如同3.2.1小節所提出的**假設 3.3**，在這裡我們也需要提出一個假設：

假設 4.2：對於下面非線性系統

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u} \end{cases} \quad (4.4)$$

存在一控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ (底下簡稱 \mathbf{u}_0)能使系統(4.4)全域漸進穩定。

另外，若**假設 4.1**成立，我們可以將系統(4.3)改寫為下列形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}_H \cdot (\mathbf{u}_H + \Delta \mathbf{d}_m) + \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 $\Delta \mathbf{d}_m = \mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F + \mathbf{d})$ 。在這裡我們先對 $\Delta \mathbf{d}_m$ 的範圍作個假設：

假設 4.3：存在一非負純量函數 $\rho_m(\mathbf{x}, t)$ (底下簡稱 ρ_m) 使以下不等式成立

$$\|\Delta \mathbf{d}_m\| \leq \rho_m. \quad (4.6)$$

根據積分順滑模設計程序，我們先定義順滑面為：

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \cdot [\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(t_0) - \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \mathbf{u}_0(\tau)) \cdot d\tau] = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

其中 $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ，而且對所有狀態而言， $\mathbf{D}\mathbf{G}_H$ 為滿秩。下面我們會證明當系統處於順滑模式時，系統動態會相當於假設 4.2 所述之無干擾系統(nominal system)動態。

當系統處於順滑模式時，亦即 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ， $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ ，由(4.5)，(4.7)可得到

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{D} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{f} - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{G}_H \cdot (\mathbf{u}_H + \Delta \mathbf{d}_m) + \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_H = -\mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) - \Delta \mathbf{d}_m.$$

代入(4.5)可以知道此時的系統動態為：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

與假設 4.2 所定義的無干擾系統相同。

然後我們考慮當促動器故障的情況發生時，FDD 運作正常。我們對正常運作的促動器 \mathbf{u}_H 的設計為：

$$\mathbf{u}_H = \begin{cases} \mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{G}\mathbf{u}_0 - \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F), & \text{if } \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{G}\mathbf{u}_0 - \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F) + \mathbf{u}_1, & \text{if } \mathbf{s} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.9)$$

其中 \mathbf{u}_0 如假設 4.2 所定義的，實際可依需求選擇不同的設計方式，例如最佳化控制。而 \mathbf{u}_1 的存在是為了使系統狀態維持在順滑模式，與(3.8)類似， \mathbf{u}_1 設計為：

$$\mathbf{u}_1 = -\rho \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\|} \quad (4.10)$$

其中 $\rho > \rho_m$ 。下面我們需要證明控制律(4.9)和(4.10)能夠符合下面特性：當系統不在順滑面上時，此控制律能讓系統保持在順滑面上。

要證明系統動態會維持在順滑面上，我們可以用李雅普諾夫函數來證明。考慮當 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ，我們選擇李雅普諾夫函數為 $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ ，對 V 微分並代入(4.7)、(4.9)和(4.10)得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{D} \cdot (\mathbf{G}_H \cdot (\mathbf{u}_H + \Delta \mathbf{d}_m) + \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{D} \cdot (\mathbf{G}\mathbf{u}_0 - \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F + \mathbf{G}_H \mathbf{u}_1 + \mathbf{G}_H \Delta \mathbf{d}_m + \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F - \mathbf{G}\mathbf{u}_0) \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{D}\mathbf{G}_H \cdot \left(-\rho \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\|} + \Delta \mathbf{d}_m \right) \\ &\leq -\|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\| \cdot \rho + \|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\| \cdot \|\Delta \mathbf{d}_m\| \\ &\leq \|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\| \cdot (-\rho + \rho_m) < 0. \end{aligned}$$

因此我們可以確定系統可以維持在順滑面 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ 。總合以上所述，我們可以提出以下定理：

定理 4.1：假設系統(4.1)中控制輸入發生了驅動器故障的情形，由 FDD 得到故障情況的估計值為 $\hat{\mathbf{u}}_F$ 而估計誤差為 $\Delta \mathbf{u}_F$ 。此時，若假設 4.1 到假設 4.3 成立，

則控制律 (4.9) 和 (4.10) 對系統 (4.1) 的原點能達到全域漸進穩定 (globally asymptotically stable, GAS)。

4.2.2 傳統順滑模可靠度控制

這一小節我們會簡單說明傳統順滑模可靠度控制的設計方式[12]。同樣藉由錯誤偵測與診斷的資料，我們考慮系統(4.3)，將 $\mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F + \mathbf{d}$ 看作是干擾並且提出下面假設：

假設 4.4： 存在一非負純量函數 $\sigma(\mathbf{x}, t)$ (底下簡稱 σ) 滿足下列不等式

$$\|\mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F\| + \|\mathbf{d}\| \leq \sigma \quad (4.11)$$

然後我們選取順滑面為：

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{M}\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

其中 $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} > 0$ 。由主動式可靠度控制器的程計程序，正常促動器的控制律設計成

$$\mathbf{u}_H = -\mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{M}\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F + \mu \cdot \text{sgn}(\mathbf{s})) \quad (4.13)$$

其中 $\mu = \eta + \sigma$ 且 $\eta > 0$ ， $\text{sgn}(\mathbf{s}) = (\text{sgn}(s_1), \dots, \text{sgn}(s_n))^T$ 。我們可以證明此控制律

(4.13) 能夠滿足 $\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\eta \cdot \|\mathbf{s}\|$ 的條件，由 (4.3)、(4.12) 和 (4.13) 我們可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{s}^T \cdot (\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{s}^T \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{G}_H \mathbf{u}_H + \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F + \mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F + \mathbf{d} + \mathbf{M}\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{s}^T \cdot (-\mu \cdot \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F + \mathbf{d}) \leq -\mu \cdot \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F\| \cdot \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{d}\| \cdot \|\mathbf{s}\| \\ &\leq -\mu \cdot \|\mathbf{s}\| + \sigma \cdot \|\mathbf{s}\| = -\eta \cdot \|\mathbf{s}\|. \end{aligned}$$

最後我們可以得到以下結論：

定理 4.2： 假設系統(4.1)中控制輸入 \mathbf{u}_F 發生了驅動器故障的情形，由 FDD 得到

故障情況的估計值為 \hat{u}_F 而估計誤差為 Δu_F 。此時，若假設 4.1 和假設 4.4 成立，則控制律(4.13)對系統(4.1)的原點能達到全域漸進穩定(globally asymptotically stable, GAS)。

4.2.3 非線性 LQR 可靠度控制

這一小節會簡述非線性 LQR 可靠度控制器的設計方式[4]，[11]。首先同樣考慮不包含擾動 \mathbf{d} 的系統(4.1)，藉由錯誤偵測與診斷機制，我們將系統簡化表示成：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}' + \mathbf{G}'_H \mathbf{u}_H + \mathbf{G}'_F \mathbf{u}_F \quad (4.14)$$

其中 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ， $\mathbf{f}' = (\mathbf{x}_2^T, \mathbf{f}^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ， $\mathbf{G}'_H = (\mathbf{0}_{k \times n}, \mathbf{G}_H^T)^T \in \mathbb{R}^{2n \times k}$ ， $\mathbf{G}'_F = (\mathbf{0}_{(m-k) \times n}, \mathbf{G}_F^T)^T \in \mathbb{R}^{2n \times (m-k)}$ 。而控制目的是要建構一個控制律容忍 \mathbf{u}_F 的故障並且同時降低二次成本函數(3.2)，二次成本函數的定義同(4.2)所述。一個次最佳化的控制律為

$$\mathbf{u}_H = -\frac{1}{2} \mathbf{R}_H^{-1} \mathbf{G}_H^T \mathbf{V}_x^T \quad (4.15)$$

其中列向量 \mathbf{V}_x 要符合下面的 H-J 等式：

$$\mathbf{V}_x \mathbf{f}' - \frac{1}{4} \cdot \mathbf{V}_x \mathbf{G}_H \mathbf{R}_H^{-1} \mathbf{G}_H^T \mathbf{V}_x^T + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0 \quad (4.16)$$

求解 \mathbf{V}_x 的步驟參考 2.3 節所述。

4.3 在衛星姿態控制上之應用

在這一節中模擬所採用的衛星動態模型與 3.3.1 節中所述相同，下面將直接描述對此系統錯誤偵測與診斷機制的設計以及應用三種控制律設計之模擬結果的觀察和比較。

4.3.1 錯誤偵測與診斷觀察器設計

在這一節中我們介紹對 3.3.1 節中所提到的衛星系統來設計 FDD 觀察器，主要的方式是將控制輸入解耦(decouple)，讓每一個促動器的故障能被分辨以及診斷出來[12]。考慮衛星系統動態為(3.27)，因為三個尤拉角度率可以表示成角速度向量的形式，我們可以藉由加速計(accelerometer)和陀螺儀(gyroscope)得知這些資訊。在這裡我們假設所有狀態可量測，而且 \mathbf{G}_S 保持為常數矩陣。FDD 和系統之間關係的示意圖可以表示成圖 4.1，詳細說明如下。首先我們先對原始系統做座標轉換，令 $\mathbf{z}_1 = (z_1, z_2, z_3)^T = \mathbf{x}_1$ ， $\mathbf{z}_2 = (z_4, z_5, z_6)^T = \mathbf{P}\mathbf{x}_2$ ， $\mathbf{P} := (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)^{-1}$ 而 \mathbf{g}_i 代表 \mathbf{G}_S 中的第 i 行。轉換過後的系統可以表示為：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{f}^{new}(\mathbf{z}) + \mathbf{G}^{new}\mathbf{u}^* + \mathbf{P}\mathbf{d} \end{cases} \quad (4.17)$$

其中 $\mathbf{f}^{new}(\mathbf{z}) = \mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{z}_1, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}_2)$ ， $\mathbf{G}^{new} = \mathbf{P}\mathbf{G}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{u}_S = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ 。

從(4.17)中我們可以看出 z_4 只會受到 u_1 和 u_4 影響； z_5 只會受到 u_2 和 u_4 影響； z_6 只會受到 u_3 和 u_4 影響。只要有二個促動器同時發生故障就無法達到所要的控制目的，因此我們只考慮一促動器發生故障的情形。

透過轉換系統(4.17)，我們可以設計觀察器為：

$$\dot{\xi}_i = f_i^{new} + u_i + l_i u_4 + k_i \cdot (z_{i+3} - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.18)$$

其中 $k_i > 0$ 。另外定義殘留訊號(residual signal)為：

$$r_i = z_{i+3} - \xi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.19)$$

接著說明單一的促動器故障如何偵測並診斷。假設只有第二個促動器 u_2 發生了故障，我們定義它的實際值與設計值之間的差距為：

$$\Delta u_2 = u_2^* - u_2 \quad (4.20)$$

其中 u_2^* 是故障後的實際值。將實際值代入系統動態(4.17)，我們可以得到：

$$z_{i+3} = f_i^{new} + u_i + l_i u_4 + \delta_i \Delta u_i + (\mathbf{Pd})_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.21)$$

其中 $\delta_1 = \delta_3 = 0$ ， $\delta_2 = 1$ 。再將(4.21)代入(4.18)，由(4.19)可以得到：

$$\dot{r}_i = -k_i r_i + \delta_i \Delta u_i + (\mathbf{Pd})_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

很明顯地， k_i 相當是 r_i 的收斂速率，而最後 r_i 會為多少由 Δu_i 和 $(\mathbf{Pd})_i$ 決定。假設干擾夠小可以忽略，那麼經過一段時間後

$$r_i \rightarrow \delta_i \cdot \frac{\Delta u_i}{k_i}. \quad (4.23)$$

因此我們可以知道第二個促動器會影響 r_2 ，而且我們可由(4.20)和(4.23)得到實際值 $u_2^* = u_2 + k_2 r_2$ 。同理我們可以知道第一個促動器會影響 r_1 ，第三個促動器會影響 r_3 ，而第四個促動器則會同時影響 r_1 到 r_3 。當殘留訊號大於一定的臨界值的時，就發出警報；藉由這個方式，我們可以簡單地偵測和診斷出故障的部分和情況。

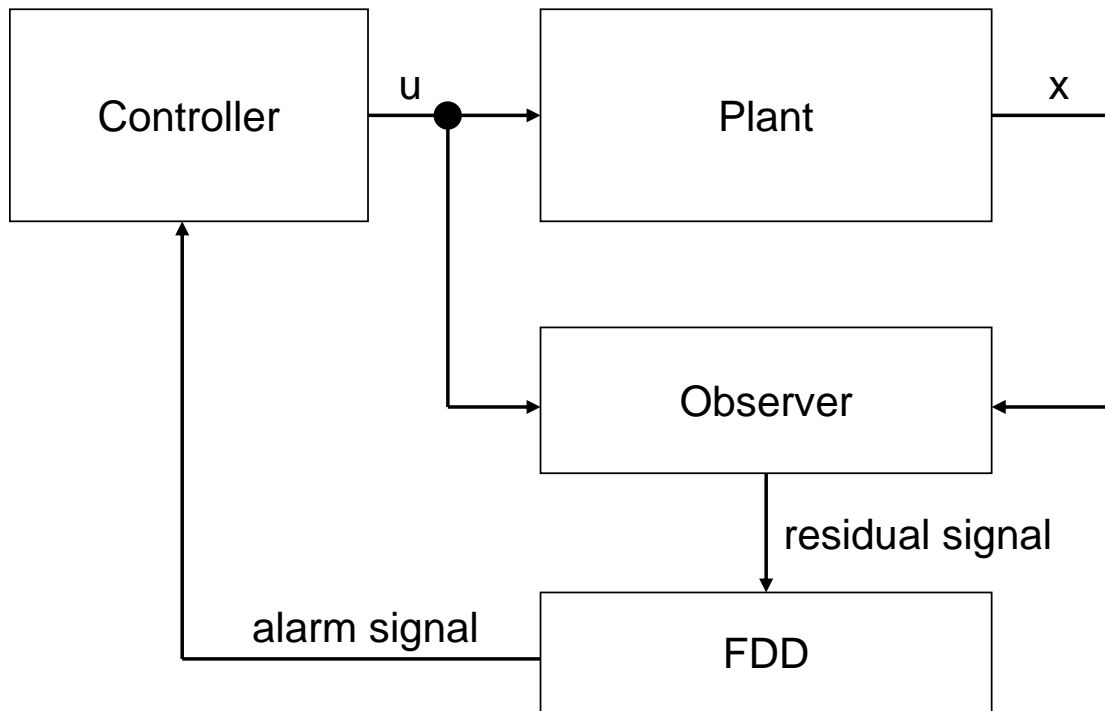


圖 4.1 錯誤偵測與診斷示意圖



4.3.2 模擬結果

在下面的模擬例子中，我們所選取的參數數值如下所述。在系統動態方面， $\omega_0 = 1.0312 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ ， $I_x = I_z = 2000 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ， $I_y = 400 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ， $\mathbf{d} = (0.01 \sin(t), 0.01 \cos(2t), 0.01 \sin(3t))^T$ 。有關二次成本函數的 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 分別為 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_6$ ， $\mathbf{R} = \mathbf{I}_4$ 。在積分順滑模控制律方面， $\mathbf{D} = \mathbf{I}_3$ ，有關無干擾控制 \mathbf{u}_0 這裡採用 3.2.3 小節所介紹的非線性 LQR 控制的設計方式，對 V_x 求得其 3 階的近似解， ρ 的選取為 $\|\Delta \mathbf{d}_m\|_\infty + 0.5$ 。同樣為了減輕切跳現象，我們將控制律(4.9)修改為下面型式：

$$\mathbf{u}_H = \begin{cases} \mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{G}\mathbf{k}_0 - \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F) - \rho \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}}{\|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\|}, & \text{if } \|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\| \geq \varepsilon \\ \mathbf{G}_H^+ \cdot (\mathbf{G}\mathbf{k}_0 - \mathbf{G}_F \hat{\mathbf{u}}_F) - \rho \frac{(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}}{\varepsilon}, & \text{if } \|(\mathbf{D}\mathbf{G}_H)^T \mathbf{s}\| < \varepsilon \end{cases} \quad (4.24)$$

在這裡我們選取 $\varepsilon = 0.02$ 。在傳統順滑模控制律方面， $\mathbf{M} = 2 \cdot \mathbf{I}_3$ ， σ 的選取為 $\|\mathbf{G}_F \Delta \mathbf{u}_F\|_\infty + \|\mathbf{d}\|_\infty$ ， $\eta = 0.5$ 。另外為了減輕符號函數所造成的切跳現象，在這裡我們用飽和函數來取代符號函數，其邊界寬度為 0.02。而系統的初始狀態設為 $\mathbf{x}(0) = (0.7, 0.07, -1.5, -0.3, -1.3, 0.2)^T$ 。而系統控制器發生故障的情況，在這裡是設定為 u_2 的部分在 1 秒時會故障。錯誤偵測與診斷機制中相關的設定參數為 $k_i = 10$ ， $i = 1, 2, 3$ ，而當 $|r_i| \geq 0.01$ 時，會發出警報。

模擬的結果顯示在圖 4.2-圖 4.20，而效能的比較整理在表 4.1。我們將積分順滑模控制的結果以 ISMCr 當作標示；傳統順滑模控制的結果以 CSMCr 當作標示。另外以 LQRr 和 LQR 分別代表非線性 LQR 控制器有發生故障和沒有發生故障的情況下所得到的結果，所以在這裡 LQR 是不需要錯誤診斷與偵測機制的。另外 LQRr 有考慮系統干擾存在，而 LQR 沒有。因此在這裡 LQR 的結果相當於積分順滑控制中的無干擾系統控制的部分。

圖 4.2-圖 4.7 分別代表狀態 $x_1 - x_6$ ，我們可以看到 ISMCr 和 CSMCr 在控制器有故障的情況下還是可以達到穩定，而 LQRr 因為有擾動影響所以有諧波振盪無法穩定。由於 ISMCr 和 LQR 的狀態軌跡幾乎重合，加上這一次模擬考慮的擾動振幅比較小，所以狀態的圖形會看起來會是三條線或是只有二條線，但實際有四條線。接著圖 4.8-圖 4.10 為 ISMCr 和 CSMCr 的順滑函數變化的比較；ISMCr 的順滑函數一開始就為 0，此後也一直保持在 0 附近，如此驗證了積分順滑模控制中會維持順滑模式的特性。而 CSMCr 的順滑函數則是過了一段間才達到 0。圖 4.11-圖 4.14 為控制律的比較圖；圖 4.15-圖 4.17 是錯誤診斷與偵測機制中殘留訊號的圖形；最後的圖 4.18-圖 4.20 是警報訊號的圖形。當殘留訊號超過所設定

的臨界值時，所對應的警報訊號會變為 1 以視為發出警報。在圖 4.12 中，由於設定第二個促動器會發生故障所以在 1 秒時會突然變化為 0，而 LQR 是要作為 ISMCR 中的無干擾系統情況的參照，因此是不考慮控制器會發生故障。當控制器發生故障後，錯誤診斷與偵測機制需要花一些時間才會發現故障。從圖 4.18-圖 4.20 可以知道錯誤診斷與偵測機制在 $t=1.1$ 左右的時候確實找到是 u_2 發生了故障，然後剩下正常的控制器會隨之來作調整。從圖 4.11、圖 4.13 和圖 4.14 所看到在 $t=1.1$ 左右的時候，除了 LQR 的控制律以外，其它三個的控制律有突然的跳動就是上述的原因所造成的。而在故障發生之前，我們可以看到 ISMCR、LQRr 和 LQR 三個的控制律是幾乎相同的。另外在 $t=2.2$ 左右和 $t=5.4$ 左右的時候，CSMCR 的 u_1 和 u_4 突然有幅度較大的變化，而 u_3 在 $t=2.2$ 左右的時候也有同樣的情況發生。這是因為 CSMCR 的平滑函數 s_1 和 s_2 在 $t=2.2$ 左右的時候到達 0，而 s_3 在 $t=5.4$ 左右的時候到達 0；當它們為 0 時 CSMCR 的控制律會有所變動，所以產生圖中控制律突然改變的現象。

表 4.1 為效能比較的整理表，主要說明了狀態穩定的情況和時間，以及一些二次成本函數的比較。其中 LQRr 最後並沒有達到穩定，所以用 No 來表示；其它有達到穩定的控制律則用 Yes 來表示。因為 ISMCR 和 LQR 的狀態軌跡很接近，所以它們狀態積分後的總和幾乎相同。而最後我們所考慮的二次成本函數是 CSMCR 最多，ISMCR 次之，LQR 最少。另外 $\|u\|_{\infty}$ 也是 CSMCR 最大。收斂時間這裡是訂為最後所有狀態的絕對值都小於 0.01 的時候。最後狀態有穩定的三種控制律中 CSMCR 的收斂時間是最快的，這是因為它比其它二種用了較多控制力道，促使狀態更快到達原點。

總和以上結果，我們可以發現 ISMCR 和 CSMCR 可以同時達到我們所要的穩健性和可靠度控制的目的；而 LQRr 則無法達到穩健性的特性。我們從圖 4.2-圖 4.7 以及

表 4.1 內狀態的積分結果觀察可以得知，ISMCR 的狀態變化會與它所對應的

無干擾系統(在此次模擬中為 LQR)相近；而從圖 4.8-圖 4.10 我們可以看到 ISMC 的順滑函數能夠從頭到尾一直保持為 0，也就是一直維持在順滑模式之下。上面結果驗證了我們所提出的積分順滑可靠度控制依然保有原本積分順滑模控制的特性。在二次成本函數方面，與之前第三章所討論的結果相同，雖然 ISMCr 的控制律多了要抵消擾動和故障情況的部分，不過由於 ISMCr 的狀態軌跡是幾乎與 LQR 的相同，ISMCr 的成本會接近 LQR 的結果，我們可以將此積分順滑可靠度控制的控制律作為一種次最佳化的可靠度設計方式。由最後的效能比較，我們也驗證了 ISMCr 的二次成本函數會比 SMCr 的花費少。



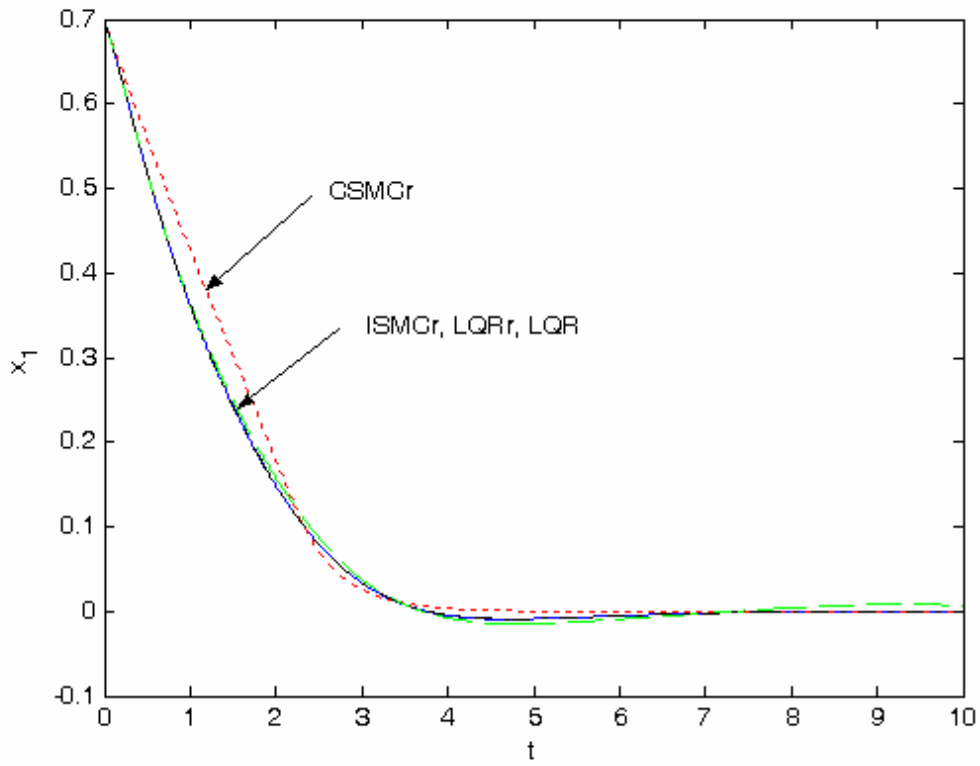


圖 4.2 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_1 之時間響應比較圖

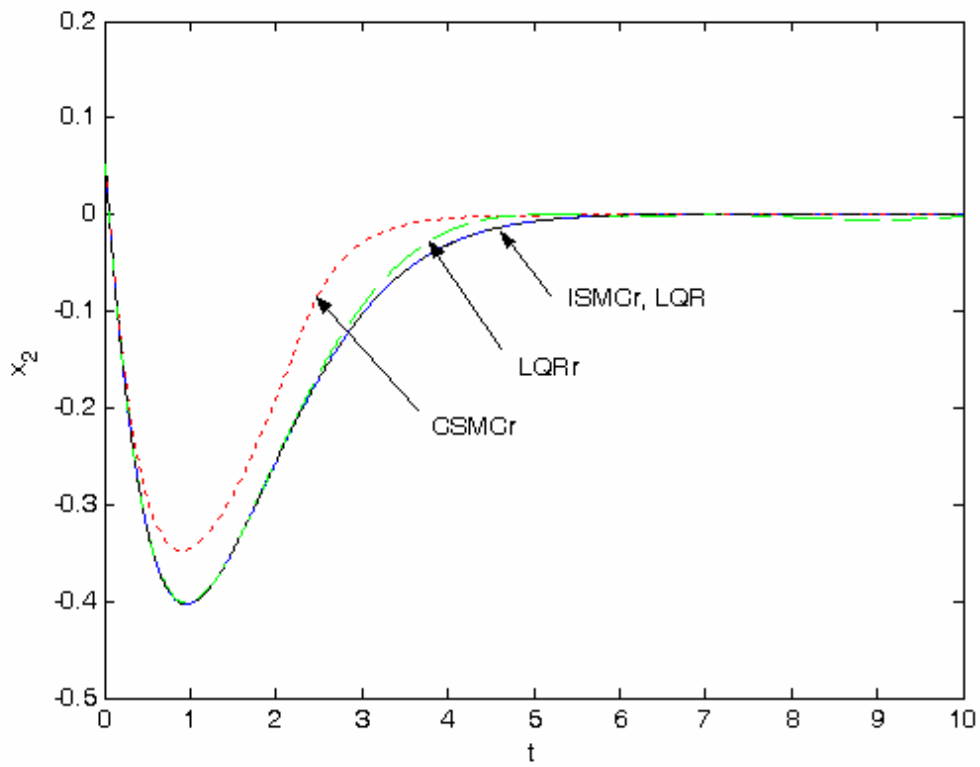


圖 4.3 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_2 之時間響應比較圖

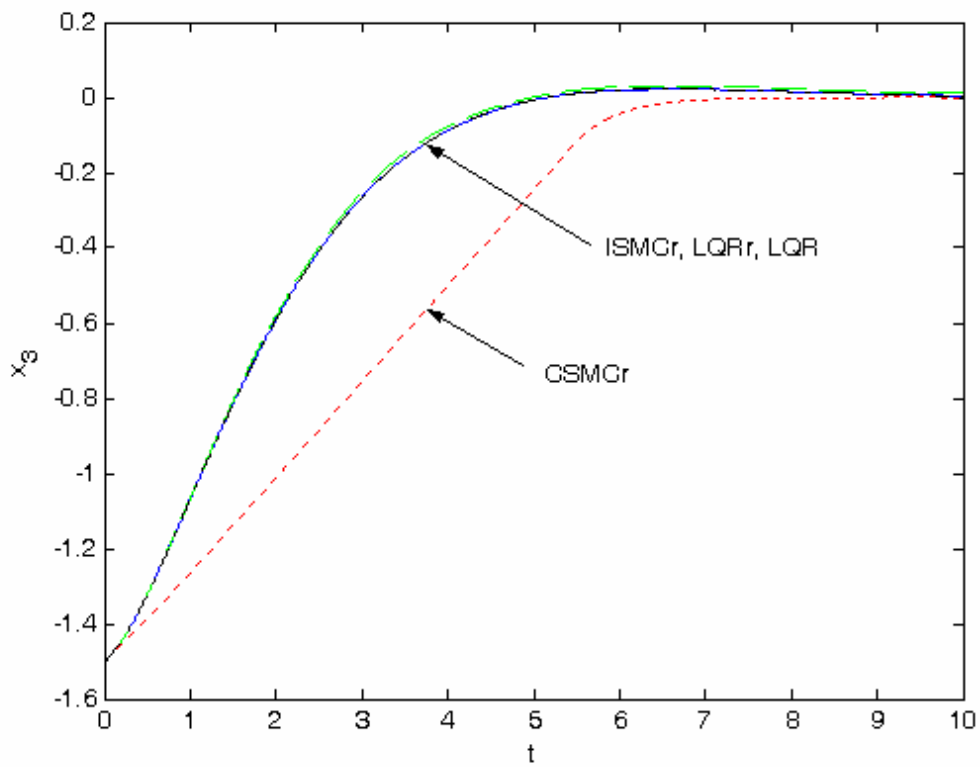


圖 4.4 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_3 之時間響應比較圖

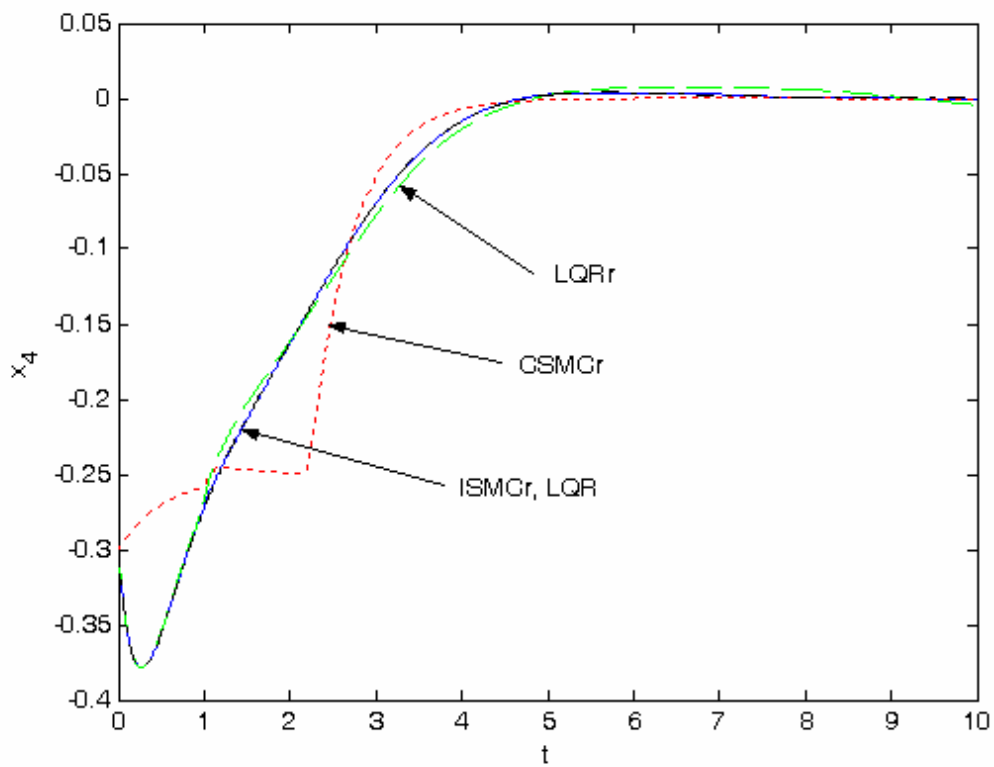


圖 4.5 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_4 之時間響應比較圖

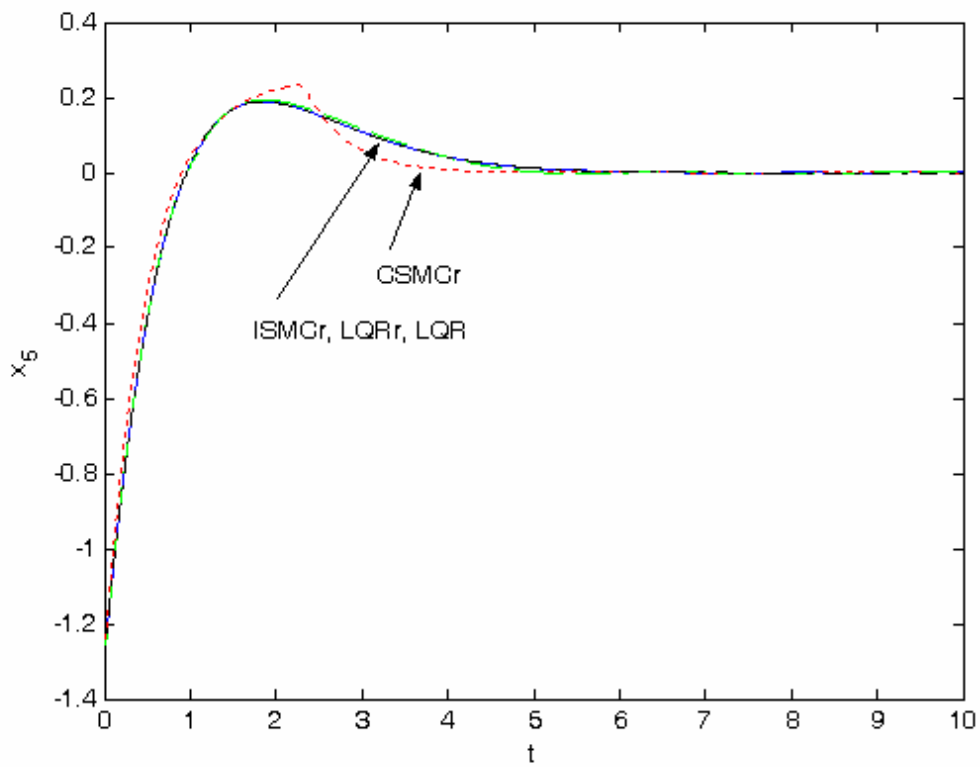


圖 4.6 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_5 之時間響應比較圖

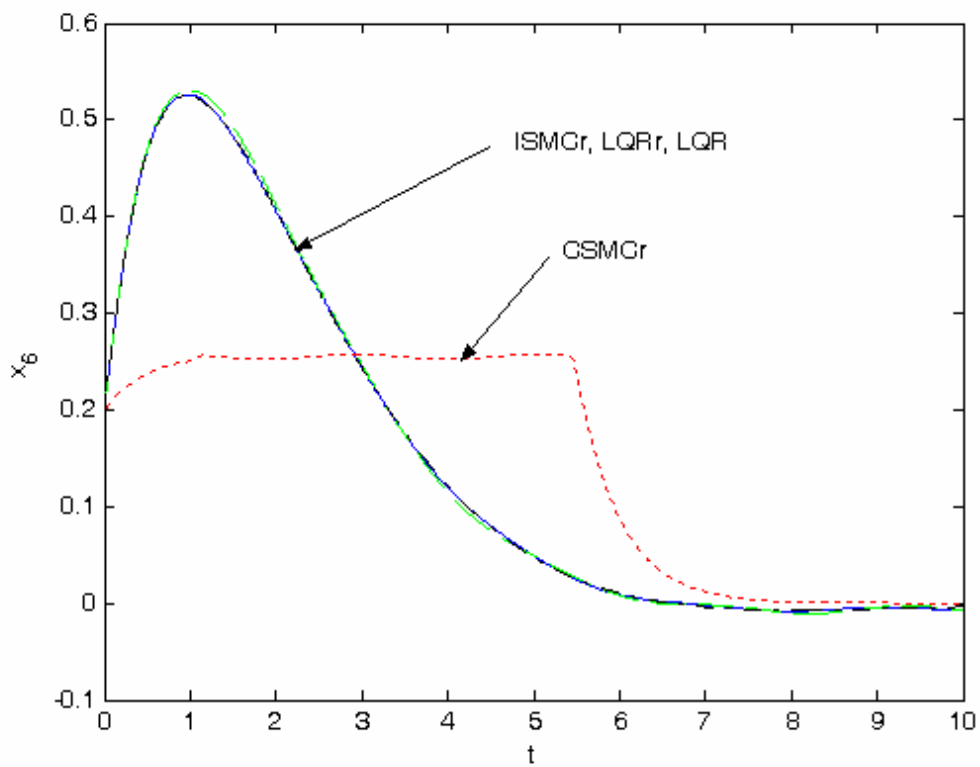


圖 4.7 u_2 在 1s 時發生故障，狀態變數 x_6 之時間響應比較圖

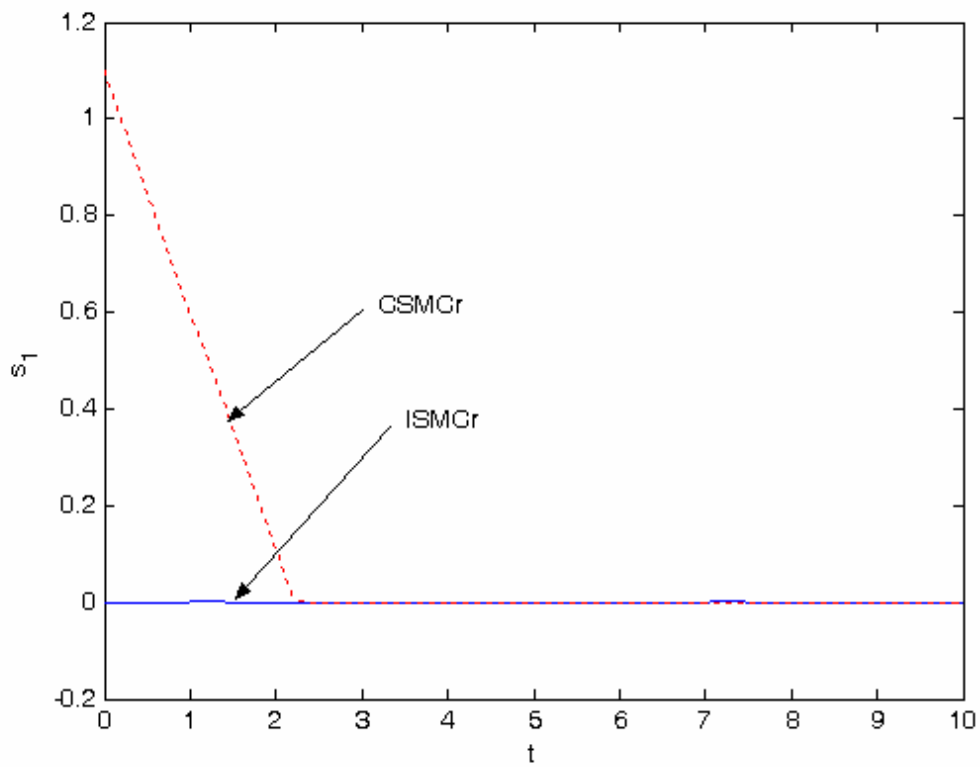


圖 4.8 u_2 在 1s 時發生故障，順滑函數 s_1 之時間響應比較圖

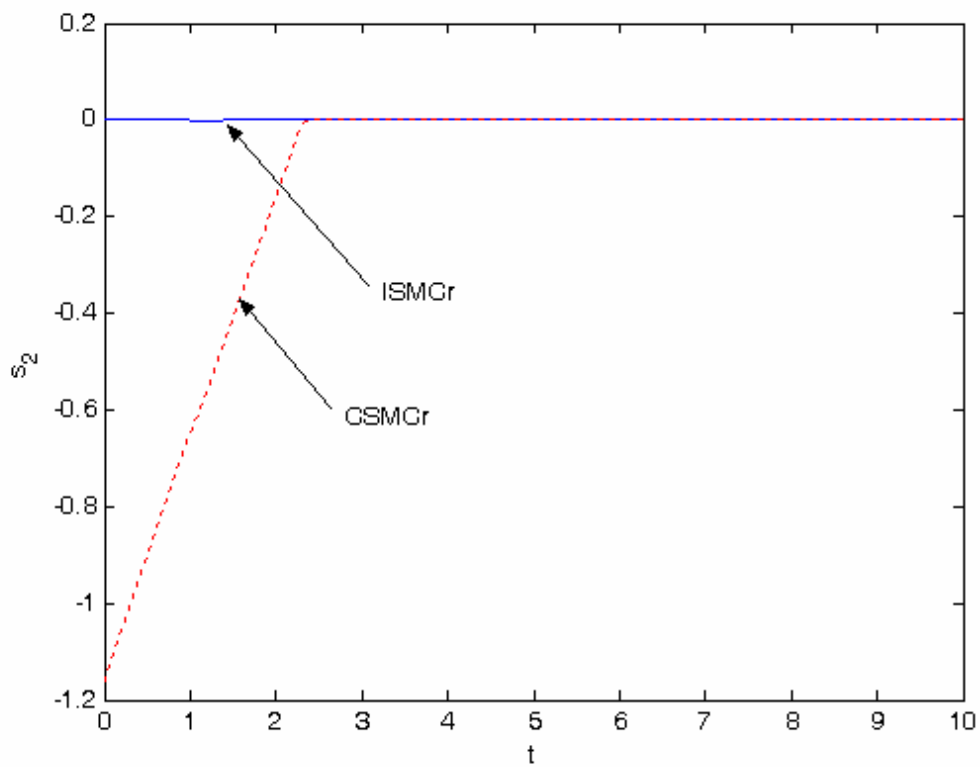


圖 4.9 u_2 在 1s 時發生故障，順滑函數 s_2 之時間響應比較圖

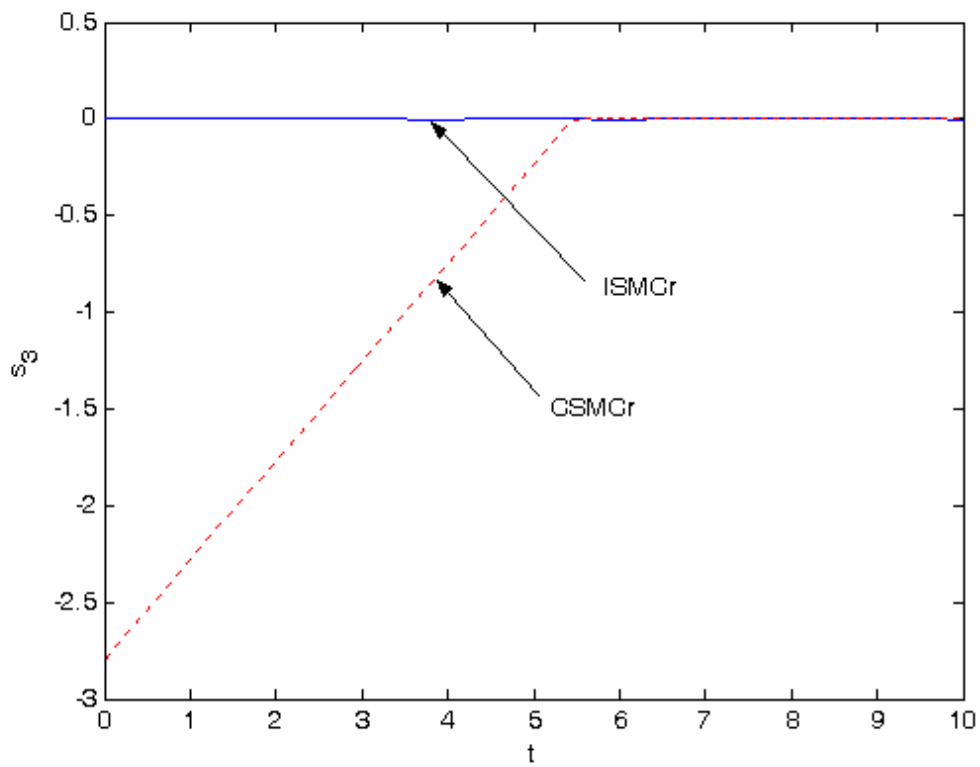


圖 4.10 u_2 在 1s 時發生故障，順滑函數 s_3 之時間響應比較圖

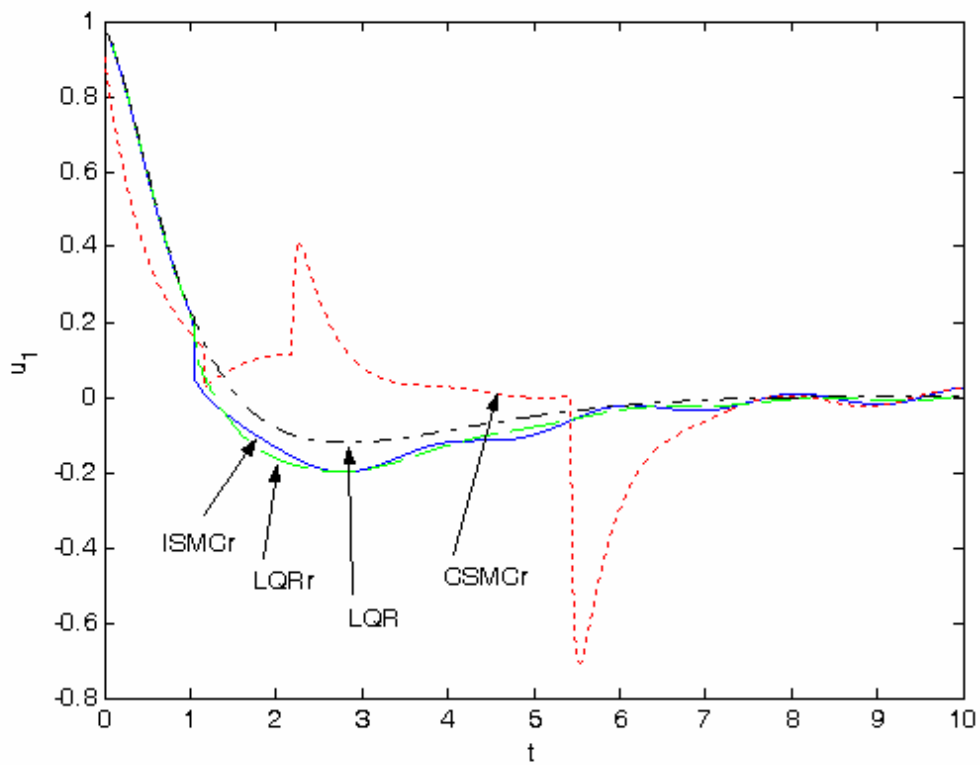


圖 4.11 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_1 之時間響應比較圖

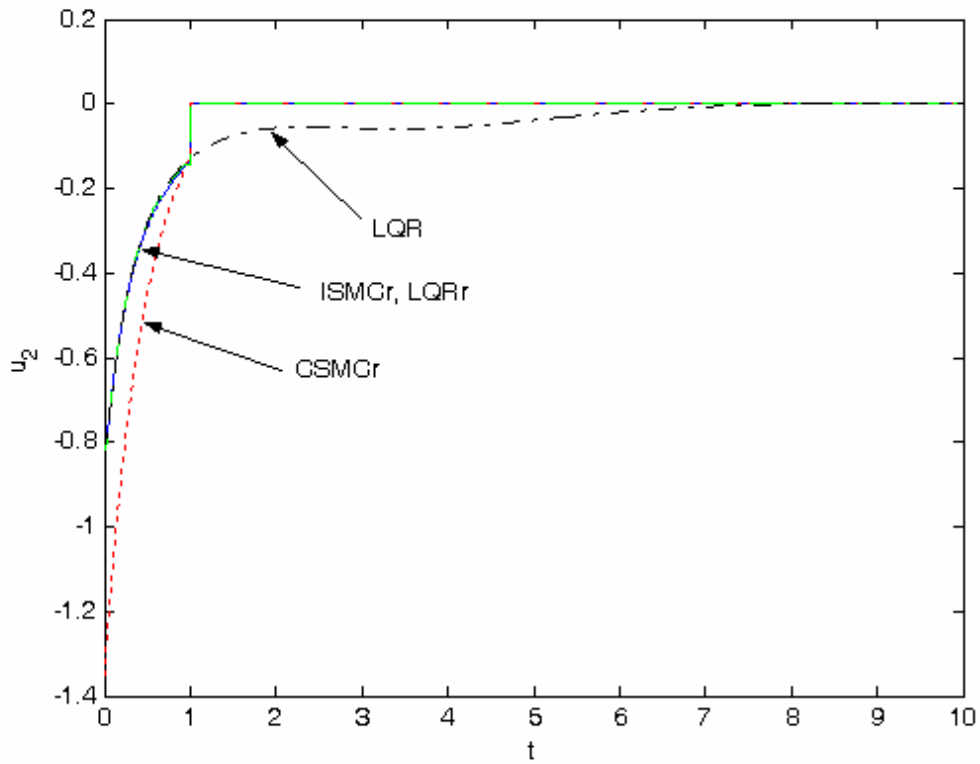


圖 4.12 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_2 之時間響應比較圖

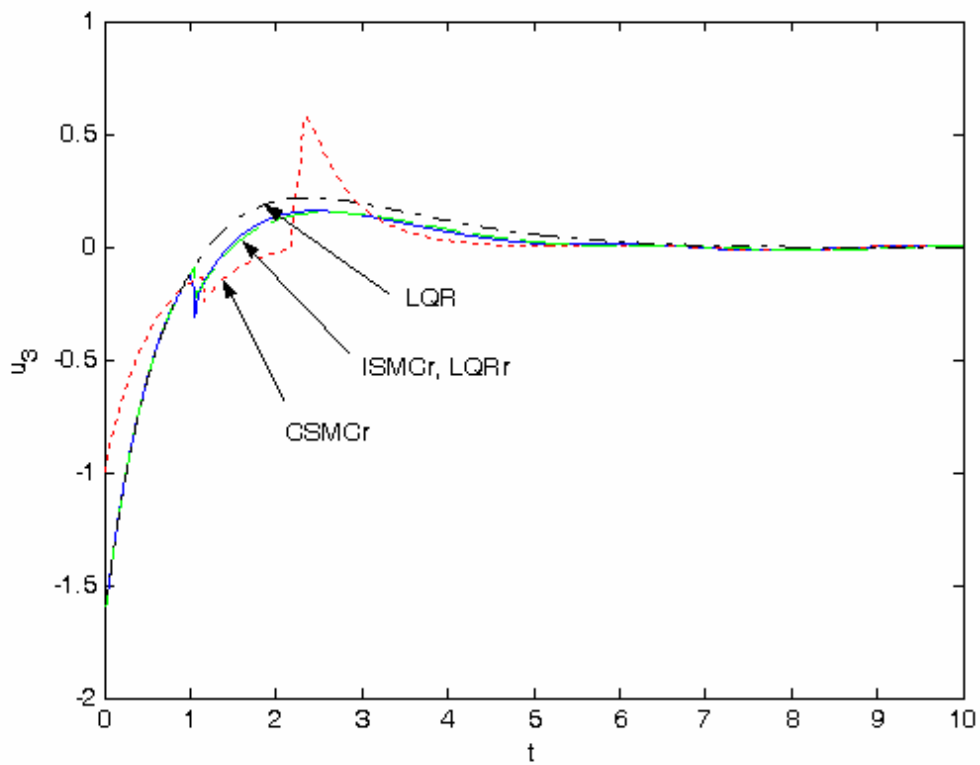


圖 4.13 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_3 之時間響應比較圖

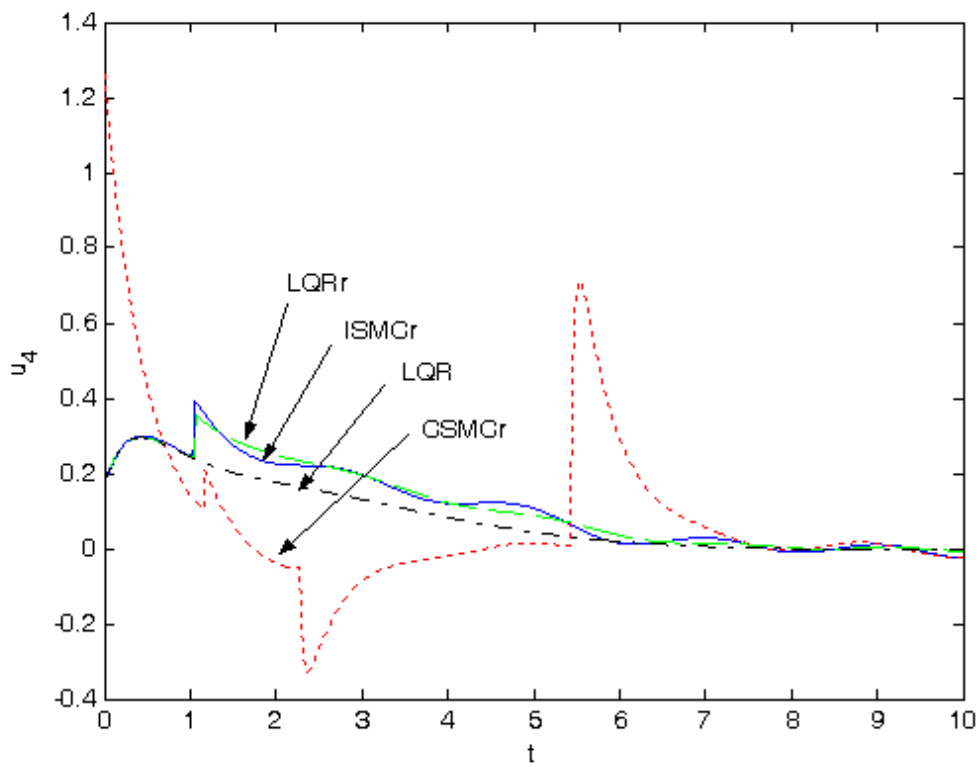


圖 4.14 u_2 在 1s 時發生故障，控制輸入 u_4 之時間響應比較圖

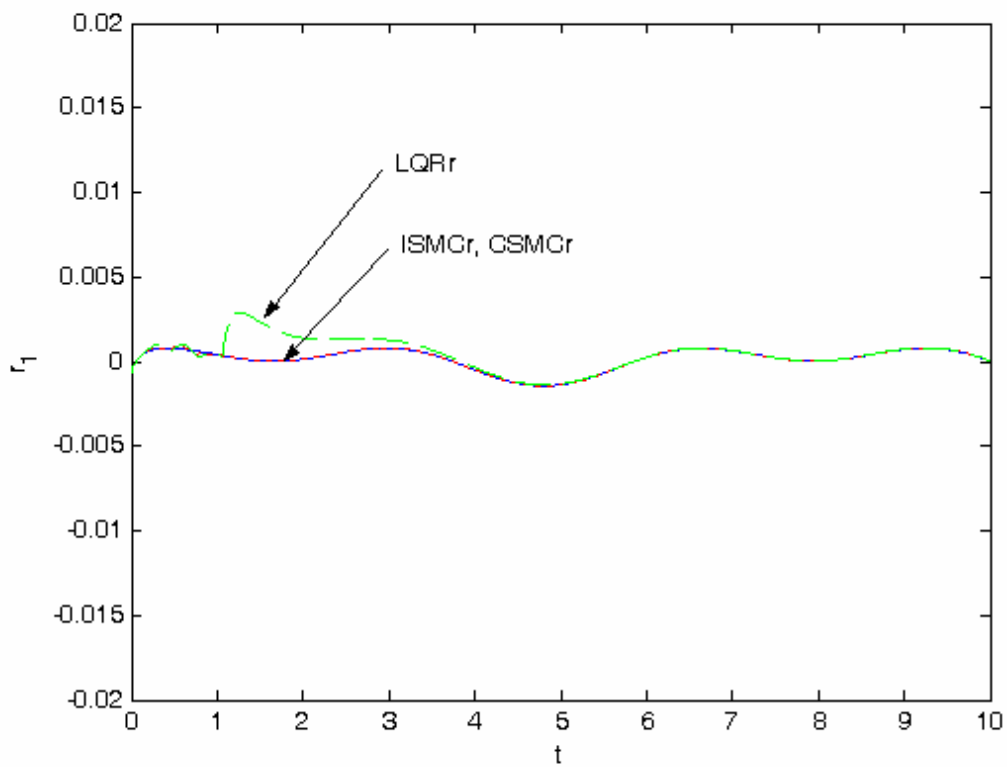


圖 4.15 u_2 在 1s 時發生故障，殘留訊號 r_1 之時間響應比較圖

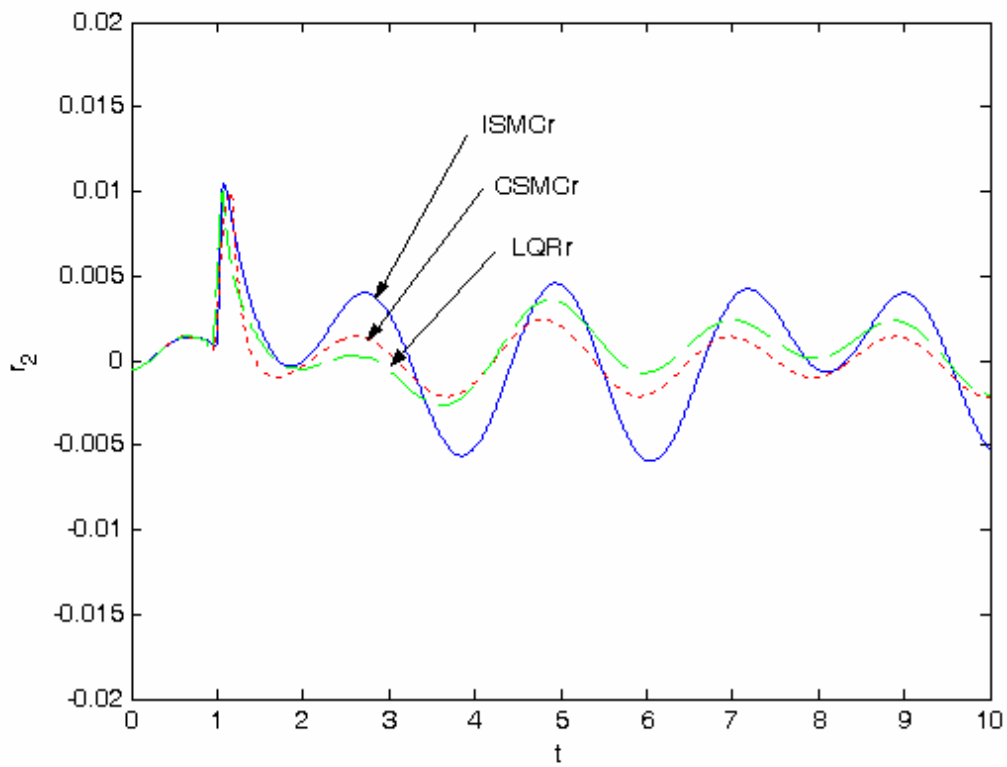


圖 4.16 u_2 在 1s 時發生故障，殘留訊號 r_2 之時間響應比較圖

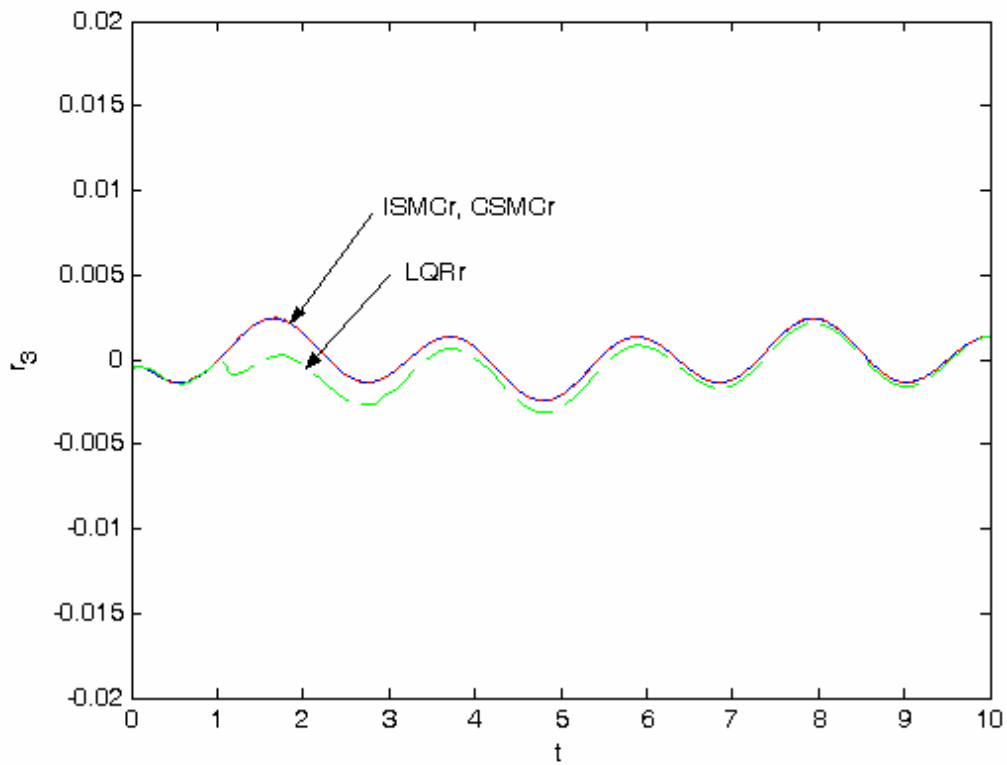


圖 4.17 u_2 在 1s 時發生故障，殘留訊號 r_3 之時間響應比較圖

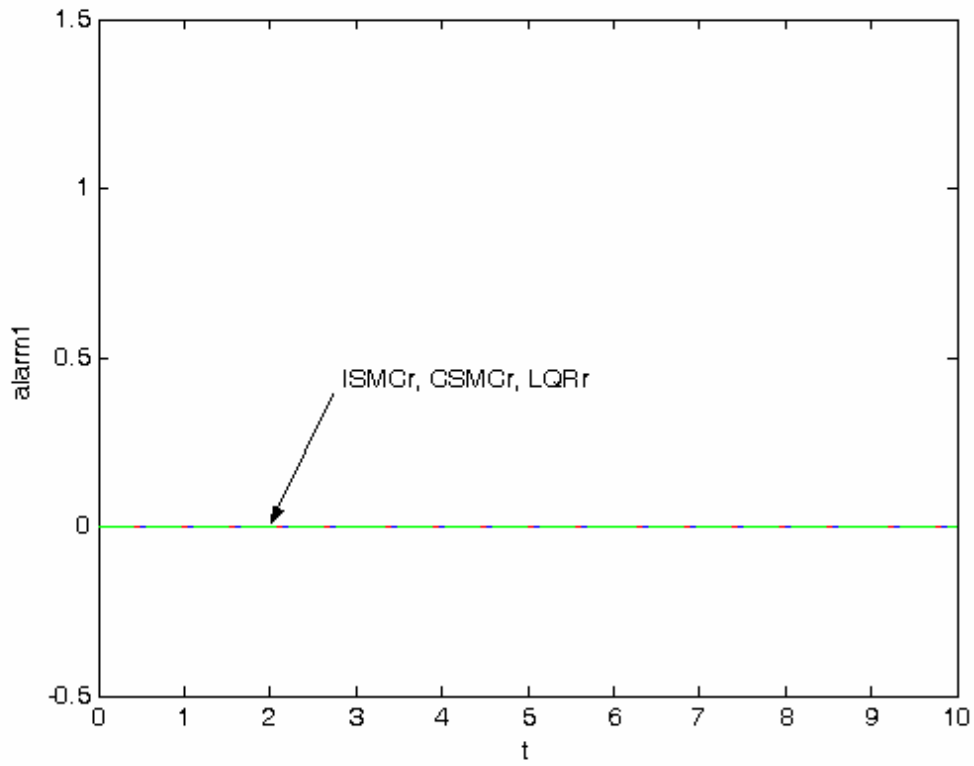


圖 4.18 u_2 在 1s 時發生故障，警報訊號 $alarm1$ 之時間響應比較圖

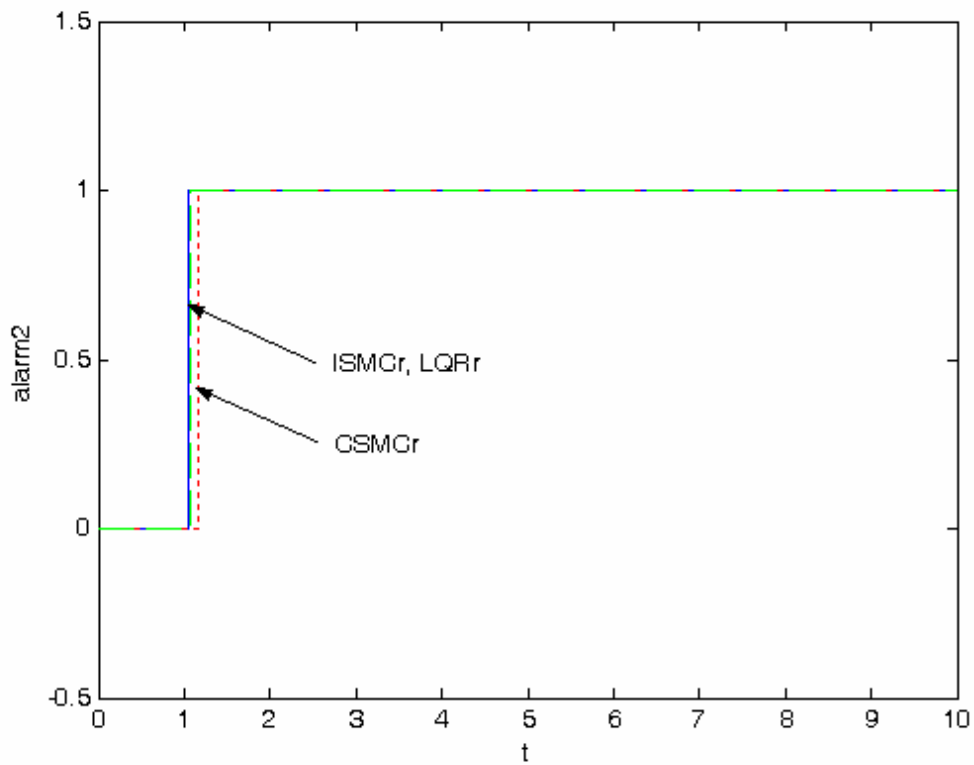


圖 4.19 u_2 在 1s 時發生故障，警報訊號 $alarm2$ 之時間響應比較圖

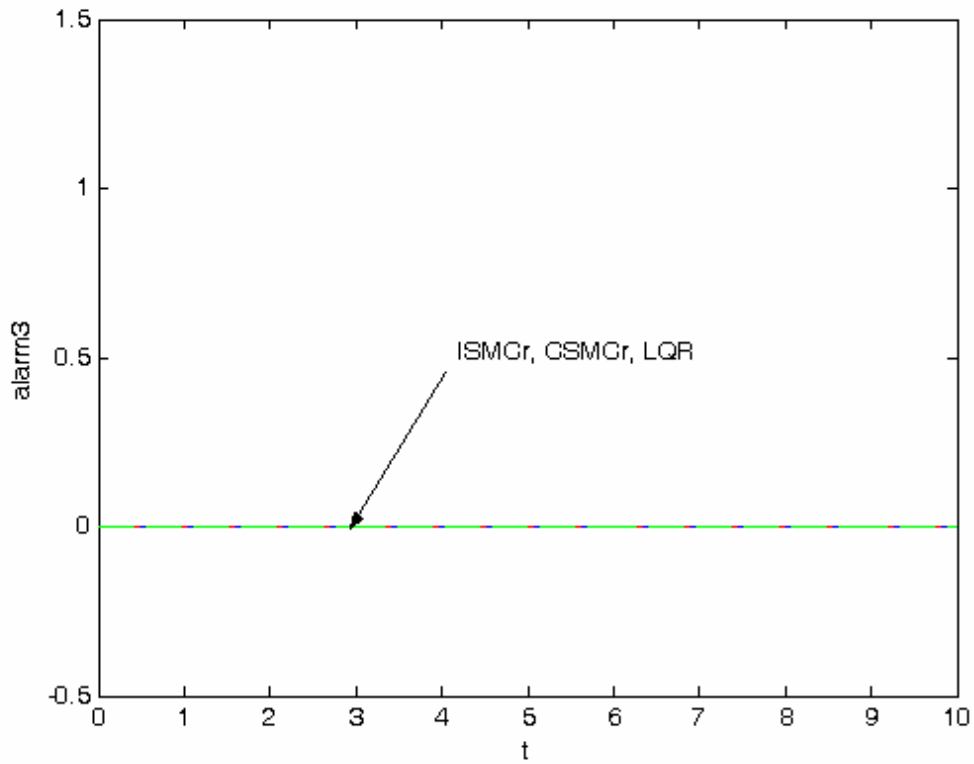


圖 4.20 u_2 在 1s 時發生故障，警報訊號 $alarm3$ 之時間響應比較圖



表 4.1 效能比較表

Controller	Performance index					Convergence time
	Stable	$\int u^T u$	$\int x^T x$	$\int u^T u + \int x^T x$	$\ u\ _\infty$	
ISMGr	Yes	1.6149	4.4142	6.0291	2.1232	8.8440
CSMGr	Yes	1.8763	6.0829	7.9592	2.2829	7.0940
LQRr	No	X	X	X	X	X
LQR	Yes	1.5576	4.4156	5.9732	2.1232	8.7990

第5章

結論與未來研究方向

5.1 結論

在本篇論文中，我們將積分順滑模控制的理論應用在可靠度控制的問題上，設計出一個具有穩健性的主動式可靠度控制器。在第三章中，我們將非線性 LQR 的控制律作為積分順滑模控制裡無干擾控制的部分。在模擬結果中我們驗證了此作法具有以下三種特性。首先，這種方法對符合匹配條件的擾動具有穩健的特性。第二，這種方法能夠作為一種次最佳化的控制方式。第三，這種方法能使系統一開始就在順滑模式下運作。而在第四章中，我們將第三章的作法延伸到可靠度控制的問題上做探討，設計主動式可靠度控制器。在討論衛星姿態控制的模擬中，我們驗證了此積分順滑模可靠度控制器的確能完成可靠度控制的目標，而且還保有上述三種特性；具有穩健性，並且比起傳統的滑模可靠度控制方式，需要的二次成本花費更少。

5.2 未來研究方向

1. 在考慮系統擾動的影響方面，往後的研究可以考慮加入不符合匹配條件的系統擾動來探討它的影響。
2. 在可靠度控制方面，往後的研究可以討論被動式可靠度控制器的設計，對於有可能發生故障的部分應該如何設計以提升效能。另一方面，也可以探討故障程度嚴重到無法滿足匹配條件的情況。
3. 在錯誤偵測與診斷設計方面，往後的研究可以考慮設計一個穩健的警報系統，使得它不會因為受到巨大的系統擾動影響而產生可能的誤報現象。



參考文獻

- [1] G. Bajpai, B. C. Chang, and A. Lau, "Reconfiguration of flight control systems for actuator failures," *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 16, pp. 29-33, 2001.
- [2] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, T.-C. Chu, and C.-C. Cheng, "Reliable output tracking control for a class of nonlinear systems," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol. 87, pp. 2314-2321, 2004.
- [3] D. D. Moerder, N. Halyo, J. R. Broussard, and A. K. Caglayan, "Application of Precomputed Control Laws in a Reconfigurable Aircraft Flight Control System," Storming Media, 1989.
- [4] Y.-W. Liang, D.-C. Liaw, and T.-C. Lee, "Reliable control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 706-710, 2000.
- [5] J. Jiang and Q. Zhao, "Design of reliable control systems possessing actuator redundancies," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, pp. 709-718, 2000.
- [6] F. Liao, J. L. Wang, and G.-H. Yang, "Reliable robust flight tracking control: an LMI approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 76-89, 2002.
- [7] R. Veillette, J. Medanic, and W. Perkins, "Design of reliable control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 290-304, 1992.
- [8] R. J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control," *Automatica (Journal of IFAC)*, vol. 31, pp. 137-143, 1995.
- [9] G.-H. Yang, J. L. Wang, and Y. C. Soh, "Reliable guaranteed cost control for uncertain nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 2188-2192, 2000.
- [10] M. L. Corradini and G. Orlando, "Actuator failure identification and compensation through sliding modes," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, pp. 184-190, 2007.
- [11] Y.-W. Liang and S.-D. Xu, "Reliable control of nonlinear systems via variable structure scheme," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, pp. 1721-1726, 2006.
- [12] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, and C.-L. Tsai, "Study of VSC reliable designs with application to spacecraft attitude stabilization," *IEEE Transactions on Control*

- Systems Technology*, vol. 15, pp. 332-338, 2007.
- [13] J. Huang and C.-F. Lin, "Numerical approach to computing nonlinear H sub (infinity) control laws," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, pp. 989-996, 1995.
- [14] V. Utkin and J. Shi, "Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions," 1996.
- [15] W.-J. Cao and J.-X. Xu, "Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 1355-1360, 2004.
- [16] F. Castanos and L. Fridman, "Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, pp. 853-858, 2006.
- [17] V. Y. Glizer, L. M. Fridman, and V. Turetsky, "Cheap suboptimal control of an integral sliding mode for uncertain systems with delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, pp. 1892-1898, 2007.
- [18] J. Shi, H. Liu, and N. Bajcinca, "Robust control of robotic manipulators based on integral sliding mode," *International Journal of Control*, vol. 81, pp. 1537-1548, 2008.
- [19] V. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [20] V. I. Utkin, *Sliding modes in control and optimization*: Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [21] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [22] D.-C. Liaw, Y.-W. Liang, and C.-C. Cheng, "Nonlinear control for missile terminal guidance," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 122, p. 663, 2000.
- [23] V. A. Chobotov, *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Melbourne, FL: Krieger, 1991.
- [24] Y.-W. Liang, S.-D. Xu, T.-C. Chu, C.-C. Cheng, and D.-C. Liaw, "Application of VSC reliable design to spacecraft attitude tracking," in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 2005, pp. 919-924.