

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

機器人控制與錯誤診斷系統

Control and Actuator Fault Diagnosis of Robot Manipulators

研究生：翁茂樵

指導教授：蕭得聖 博士

中華民國九十八年七月

機器人控制與錯誤診斷系統

Control and Actuator Fault Diagnosis of Robot Manipulators

研究生：翁茂樵

指導教授：蕭得聖 博士

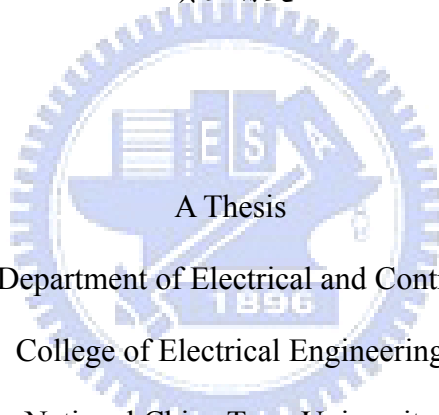
Student : Mao-Chiao Weng

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文



A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年七月

機器人控制與錯誤診斷系統

學生：翁茂樵

指導教授：蕭得聖博士

國立交通大學電機與控制工程學系碩士班

摘要

本研究在一個二軸平面的機械手臂實驗平台上，進行控制器與錯誤診斷的整合測試。在控制器的部分，使用非追蹤型卡曼濾波器(UKF)進行角速度估測，將此估測與透過差分所得到的角速度，分別代入計算扭力控制器演算法觀察其效果差異。此外將提出一個僅需位置回授的新型控制器與上述兩個控制器一起比較。在錯誤偵測與判別中，實現二階廣義偽貝氏演算法(GPB-2)及交互多模型(IMM)錯誤演算法的測試，其中所使用之估測器為控制器部分的 UKF 估測器。由實驗結果可以看出，僅需位置回授的新型控制器在只有位置回授的情形下，效能更勝傳統的計算扭力控制器，而錯誤偵測與判別系統也能夠在系統發生錯誤後的極短時間內，告知使用者系統已經發生錯誤，並判斷出錯誤發生的位置，不僅增加了安全性，也降低硬體成本，增加未來智慧型機器人能夠同時擁有安全與效能兼備的可能性。

Control and Actuator Fault Diagnosis of Robot Manipulators

Student : Mao-Chiao Weng

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

Department of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

This study experimentally evaluates the performance of various kinds of controllers and actuator fault diagnosis system on a two-joint robotic manipulator. On the part of controllers, we use UKF(Unscented Kalman Filter) to estimate (angular) velocities, and compare the performance of the computed-torque controllers with velocities estimated by UKF and backward difference filters respectively. Moreover, we propose a new control method which only requires position feedback. On the part of actuator fault diagnosis system, we combine UKF , GPB-2(General Pseudo Bayesian of Order 2) and IMM(Interacting Multiple Model) algorithms to detect and identify actuator failures of the robotic manipulator. The experimental results show that the new control method has better performance than other controllers. The results also show that the fault diagnosis system can correctly detect and isolate actuator failures in a short time.

致謝

首先誠摯的感謝指導教授蕭得聖博士，老師悉心的教導以及對我研究能力的信任，讓我能夠順利的在實驗平台上實現控制理論及錯誤診斷演算法，不僅在理論上有更清楚的認識，在實作方面的經驗也獲益匪淺，可謂獲益良多。

本論文的完成另外亦得感謝我的口試委員林源倍教授及徐保羅教授。因為有各位老師在口試中給的建議及方向，使得本論文能夠更完整而嚴謹。

兩年裡的日子，感謝暉鈞、宗明、毅鴻、永洲學長不厭其煩的指出我研究中的缺失，且總能在我迷惘時為我解惑，也感謝東新同學的共同砥礪。念冀及志誠學弟的加油與鼓勵，也讓我備感溫馨。

女友亞儒在背後的默默支持更是我前進的動力，沒有亞儒的體諒、包容，相信這兩年的生活將是很不一樣的光景。

最後，要感謝我摯愛的家人，謝謝父母多年來的養育與栽培，有您們在生活上的精神及支持，我才能在求學階段無任何後顧之憂。當然，也要感謝我的妹妹逸芄，每周末晚上幫我煮的溫馨泡麵，也增加了我熬夜研究的動力。

目錄

摘要.....	I
ABSTRACT.....	II
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	IX
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 論文貢獻.....	2
1.3 論文架構.....	2
第二章 相關研究.....	3
2.1 機器手臂控制相關研究.....	3
2.2 機器人錯誤偵測與判別相關研究.....	4
第三章 機械手臂動態模型與控制器設計.....	6
3.1 機械手臂的動力學模型.....	6
3.2 計算力矩控制器.....	10
3.3 觀察器設計.....	11
3.4 僅需位置回授的新型控制器.....	15
3.4.1 線性控制器的設計.....	17
3.4.2 非線性控制器的設計.....	20
第四章 錯誤偵測與判別技術.....	25
4.1 以模型為基礎的錯誤偵測技術.....	25
4.2 多模型架構.....	27
4.2.1 廣義偽貝氏法.....	31
4.2.2 交互多模型法.....	34
4.3 階層式錯誤偵測與判別系統.....	37
第五章 實驗結果與討論.....	40
5.1 機械手臂硬體實驗平台.....	40
5.2 控制器實驗結果.....	45
5.2.1 UKF 估測器效果測試.....	45
5.2.2 計算力矩控制器實驗結果.....	48
5.2.3 僅需位置回授的新型控制器實驗結果.....	55
5.2.4 性能分析與比較.....	59

5.2.5 強健性測試.....	61
5.3 錯誤偵測實驗結果.....	65
5.4 錯誤判別實驗結果.....	69
第六章 結論及未來工作.....	80
6.1 結論.....	80
6.2 未來工作.....	81
參考文獻.....	82



圖目錄

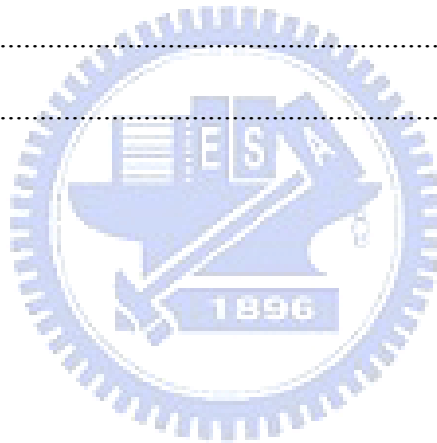
圖 1 兩軸平面機械手臂示意圖	7
圖 2 直流馬達示意圖	8
圖 3 計算力矩控制器系統方塊圖	10
圖 4 UKF 與 EKF 效能比較圖	12
圖 5 UKF 流程圖	14
圖 6 差分角速度與命令軌跡，下圖為局部放大圖	15
圖 7 不需要速度估測的控制器方塊圖	16
圖 8 增大的受控廠	18
圖 9 MODEL-BASED 錯誤偵測系統架構圖	26
圖 10 靜態多重模型估測流程圖[7]	28
圖 11 GPB-2 流程圖[7]	33
圖 12 GPB-1、GPB-2 及 IMM 的估測性能比較圖[8]	34
圖 13 IMM 流程圖[7]	36
圖 14 階層式錯誤偵測與診斷系統流程圖	39
圖 15 二軸平面機械手臂	40
圖 16 二軸機械臂實驗平台硬體方塊圖	41
圖 17 大軸角速度比較圖(軌跡 1)	46
圖 18 小軸角速度比較圖(軌跡 1)	46
圖 19 大軸角速度比較圖(軌跡 2)	47
圖 20 小軸角速度比較圖(軌跡 2)	47
圖 21 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 1 差分)	48
圖 22 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 1 差分)	49
圖 23 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 1 差分)	49
圖 24 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 1 UKF)	50

圖 25 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 1 UKF V.S 差分).....	50
圖 26 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 1 UKF).....	51
圖 27 計算力矩控制器，10 秒前使用差分增益，10 秒後使用 UKF 增益(軌跡 1 差分).....	51
圖 28 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 2 差分).....	52
圖 29 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 2 差分).....	52
圖 30 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 2 差分).....	53
圖 31 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 2 UKF).....	53
圖 32 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 2 UKF V.S 差分).....	54
圖 33 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 2 UKF).....	54
圖 34 非線性控制器開啟前及開啟後的比較.....	55
圖 35 僅需位置回授的新型控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 1).....	56
圖 36 僅需位置回授的新型控制器角度追蹤誤差(軌跡 1).....	56
圖 37 僅需位置回授的新型控制器兩軸輸入電壓(軌跡 1).....	57
圖 38 僅需位置回授的新型控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 2).....	57
圖 39 僅需位置回授的新型控制器角度追蹤誤差(軌跡 2).....	58
圖 40 僅需位置回授的新型控制器兩軸輸入電壓(軌跡 2).....	58
圖 41 計算力矩 (差分及 UKF)與僅需位置回授控制器的角度追蹤誤差比較圖(軌跡 1).....	59
圖 42 角度追蹤誤差範數(1-NORM)比較圖(軌跡 1).....	60
圖 43 計算力矩 (差分及 UKF)與僅需位置回授控制器的角度追蹤誤差比較圖(軌跡 2).....	60
圖 44 角度追蹤誤差範數(1-NORM)比較圖(軌跡 2).....	61
圖 45 計算力矩 (差分)強健性測試追蹤誤差比較圖.....	62
圖 46 計算力矩 (差分)強健性測試角度追蹤誤差範數(1-NORM)比較圖.....	62
圖 47 計算力矩 (UKF)強健性測試追蹤誤差比較圖.....	63
圖 48 計算力矩 (UKF)強健性測試角度追蹤誤差範數(1-NORM)比較圖.....	63
圖 49 僅需位置回授控制器的強健性測試角度追蹤誤差比較圖.....	64
圖 50 僅需位置回授控制器的強健性測試角度追蹤誤差範數(1-NORM)比較圖.....	64
圖 51 實驗 1 的角度、角速度估測及輸出電壓.....	66

圖 52 實驗 1 動力學模型與運動學模型機率估測(模型 1 及模型 4)	67
圖 53 實驗 2 的角度、角速度估測及輸出電壓	67
圖 54 實驗 2 動力學模型與運動學模型機率估測(模型 1 及模型 4)	68
圖 55 實驗 3 的角度、角速度估測及輸出電壓	68
圖 56 實驗 3 動力學模型與運動學模型機率估測(模型 1 及模型 4)	69
圖 57 實驗 4 的角度、角速度估測及輸出電壓	70
圖 58 實驗 4 各軸發生錯誤之機率估測	71
圖 59 實驗 5 的角度、角速度估測及輸出電壓	72
圖 60 實驗 5 各軸發生錯誤之機率估測	72
圖 61 實驗 6 的角度、角速度估測及輸出電壓	73
圖 62 實驗 6 各軸發生錯誤之機率估測	74
圖 63 實驗 7 的角度、角速度估測及輸出電壓	75
圖 64 實驗 7 各軸發生錯誤之機率估測	75
圖 65 實驗 8 的角度、角速度估測及輸出電壓	76
圖 66 實驗 8 各軸發生錯誤之機率估測	77
圖 67 實驗 9 的角度、角速度估測及輸出電壓	78
圖 68 實驗 9 各軸發生錯誤之機率估測及衰減曲線	78

表目錄

表 1 機械手臂硬體參數	41
表 2 馬達及減速機構參數	41
表 3 參數單位對應表	43
表 4 模型參數表	44
表 5 僅需位置回授的新型控制器設計參數表	55
表 6 大軸在不同控制器下的強健性比較	65
表 7 小軸在不同控制器下的強健性比較	65
表 8 系統錯誤種類表	66
表 9 錯誤偵測實驗結果列表	79
表 10 錯誤判別實驗結果列表	79



第一章 緒論

1.1 研究動機與目的

智慧型機器人自 1970 年起，開始大量運用於工業製造生產上，例如汽車、機械與半導體等產業，歷經數十年的科技躍進，與智慧型機器人相關的感測、認知、控制與通訊技術愈趨成熟，以往只能存在於電影中，能夠與人類互動的智慧型機器人將不再只是一個夢想。

在機器人運動控制的設計與分析領域裡，也有許多優秀的控制理論上被提出。然而在大部分的控制演算法中，速度被都假設為可量測的，但實際上，量測速度的轉速計(tachometer)通常帶有比較大的雜訊，並且也會增加機器人的成本。因此，如何在沒有速度的資訊下維持控制的效能是一個值得研究的問題。

此外，在著重研究於機器人控制與功能設計的同時，可靠度與安全性也必須納入設計的考量中。可靠度是指機器人自身能夠長期於妥善的狀況下運作，而安全性乃指機器人運作時不應對人類以及週遭環境造成傷害。這往往是最容易被忽略的部份，但卻是智慧型機器人能否讓人們安心的與它們互動及商品化的重要關鍵，因為一個不安全不可靠的產品絕對不可能為公司帶來利潤，反而是一種累贅與商譽的損壞。

本論文的目的就是要透過一個已建立之二軸平面機械手臂實驗平台，來驗證已知的控制法則，並設計一個僅需位置回授的新型控制器與已知的控制法則作比較。除此之外還會加入機器人錯誤偵測與識別(Fault Detection and Identification)的能力，利用事先建立好的各種系統錯誤模型及適當的估測器，依據角度量測資訊及控制器的扭力命令去估測各種系統錯誤模型應有的輸出及狀態，藉此去計算各模型下機率來進行比較，判斷出錯誤是否發生以及其發生錯誤的種類。

1.2 論文貢獻

本研究在一個二軸平面的機械手臂實驗平台上，進行控制器與錯誤偵測與診斷的整合測試。在控制器的部分，實現非追蹤型卡曼濾波器(UKF)進行角速度估測，將此估測與透過差分所得到的角速度，分別代入計算扭力控制器演算法觀察其效果差異。此外將提出一個僅需位置回授的新型控制器與上述兩個控制器一起比較。在錯誤偵測與判別中，實現廣義偽貝氏演算法(General Pseudo Bayesian of Order 2，簡稱GPB-2)以及交互多模型法(Interacting Multiple Model，簡稱IMM)的錯誤演算法測試，其中所使用的估測器為控制器部分所使用的UKF估測器。由第五章中可以看出，僅需位置回授的新型控制器在只有位置回授的情形下，效能更勝傳統的計算扭力控制器，而錯誤偵測與判別系統也能夠在系統發生錯誤後的極短時間內，告知使用者系統已經發生錯誤，並判斷出錯誤發生的位置。

1.3 論文架構

本篇論文共分為六章：第一章為緒論，主要說明研究動機與目的；第二章介紹機器手臂的控制理論與錯誤偵測及識別的相關文獻；第三章介紹控機械手臂的動態模型、UKF估測器、控制器的設計及其理論推導。第四章將介紹觀察器及錯誤偵測與判別技術，針對IMM、GPB-2、錯誤模型等作進一步的介紹。第五章將之前的控制理論和錯誤偵測與判別系統，放置於二軸機械臂的實驗平台上進行實驗，探討不同控制器的結果及錯誤判別與診斷的效能；最後，第六章對兩年來的研究做一結論並展望未來可以進行的研究方向。

第二章 相關研究

2.1 機器手臂控制相關研究

在 J. J. Craig[1]與 R. Kelly[2]的著作中，針對機械手臂的控制方法採用計算力矩的控制器。這個方法牽涉非線性項的計算和消除，化簡系統成為一個線性的系統，以下簡述之。考慮動力學方程式

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + B(\dot{q}) \quad (1)$$

計算力矩的控制法則給定如下：

$$\tau = M(q)[\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + B(\dot{q}) \quad (2)$$

其中 K_v 和 K_p 為對稱正定的矩陣， $\tilde{q} = q_d - q$ 表示角度的誤差。將(1)式帶入(2)式可得(3)，適當的選擇 K_v 和 K_p 這兩個增益值，調整控制的效能。

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0 \quad (3)$$

J. J. E. Slotine 在[9]使用各軸追蹤運動的追蹤誤差去驅動參數的適應，而且證明了適應的前饋控制加比例微分控制器的整體追蹤收斂性，它不需要加速度的量測，並利用電腦模擬與實際實驗其可行性。適應性控制器在參數的不確定之下，能夠達到整體誤差收斂。它能夠依據給定的適應性參數估測法則，得到參數，對無法準確知道動力學模型的參數是一個可行的辦法。

H. Berghuis 在[12]中使用各軸的追蹤誤差及各軸濾波後力矩的預測誤差去驅動參數的適應，接著建立以模型為基礎的控制器。其證明此方式比傳統的比例微分控制器有較好的效能。

A. Tayebi 在[14]使用Lyapunov-like 函式，並針對機械手臂軌跡追蹤的問題設計反覆學習適應性控制演算法，此方法不需要加速度的量測資訊及系統未知參數的範圍，只需要簡單的比例微分控制器及正定的適應性學習增益即可較傳統的反覆學習適應性控制演算法有更好的效能。

T. Hsiao 在[3]提出的位置回授控制器設計，這個控制器是應用在車輛橫向運動的控制。文中說明在設計狀態回授控制器時，觀察器沒有被考慮進去，外加的觀察器改變了原來的狀態回授控制系統，因而不能保證控制器的強健。這個控制器設計提出兩個步驟的設計程序，將狀態回授控制器轉換到一個輸出回授的控制器而不會改變閉迴路的特性。

2.2 機器人錯誤偵測與判別相關研究

M.L. McIntyre 在[10]將機械臂錯誤情形做分類，分別為致動器卡住(locked -joint fault)、不受力甩動(free-swing fault)、階梯錯誤(ramp fault)或是飽和錯誤(saturated fault)。主要透過預測值與實際值誤差和非線性觀測器與來進行轉軸致動器的錯誤偵測和識別，其主要貢獻在於利用濾波器使計算力矩不需使用到角加速度，因為若由角度作兩次差分或角速度作一次差分往往會因為產生高頻雜訊的干擾而失真，造成力矩計算的極大誤差，因此利用濾波器濾掉角加速度來進行力矩計算與比較，此濾波方法也會應用於底下的模型參數估測。此外由於觀察器不會受到控制器影響，故強健度較好，不容易受到雜訊干擾。

Jin-Ho Shin 與 Ju-Jang Lee 於[11]中提出適用於機器人致動器的錯誤偵測與強健的錯誤矯正控制，其討論錯誤發生為致動器錯誤並僅討論馬達自由甩動的情況，馬達卡住或飽和不在討論範圍內。該論文首先將偵測與識別各別分為一個平台，兩個平台的方法都很直接。錯誤偵測部分由計算力矩控制器(Computed Torque Controller)事先給定軌道，再用感測器去獲得實際的軌道，若兩者相差大於臨界值則錯誤發生。而錯誤識別的平台也是檢測事先給定的系統錯誤的軌道是否與感測器量測值相同，來確定哪個軸的致動器故障。若有一個 n 軸機械臂，其中有 p 個軸故障，則事先給定的參考訊號須有 C_p^n 個。

De Luca, A.Mattone,R. 於 [13] 中提出一種基於廣義慣量(generalized momenta)與經由理論設計狀態觀測器的機械臂轉軸錯誤偵測方法。該論文先將致動器發生錯誤的問題重新改寫為一針對線性系統設計觀察器的問題。因此設計一組識別器

(identifier) 代表一種錯誤狀況，每一個識別器由皆為線性濾波器，並會產生一個相對應的剩餘值訊號，來決定該錯誤發生與否。雖然該論文最後進行實驗，的確可以決定系統錯誤的種類，但作者仍有提到這是依據量測雜訊(measurement noise)事先設定門檻(threshold)的結果，也就是門檻的設定將會影響錯誤偵測的結果。

根據上述文獻分析，在控制器的部分，雖然可透過適應性估測及濾波估測誤差等方式來改善控制效果，但仍需要有速度回授資訊才能進行控制，所以本論文在控制器的設計中要探討如何解決僅有位置回授的問題。在錯誤診斷的文獻中，也提出許多能夠正確的偵測甚至診斷錯誤類型的文獻，但在實際應用上，仍需進一步改善效能與降低計算量。因此本論文所設計的階層式錯誤診斷便是用來解決多模型估測法計算量過大之問題，使這套診斷系統能應用於即時控制平台上，快速而正確地診斷出系統的錯誤。



第三章 機械手臂動態模型與控制器設計

本章節中將分為兩大部份，第一部份會介紹論文中所使用的兩軸機械手臂系統，其包含了動力學及致動器(馬達)的模型，並將兩個模型歸納整理出完整的機械手臂動態模型。第二部分為控制器的設計，有計算力矩控制器及僅需位置回授的新型控制器。計算力矩控制器是已經被廣為使用的控制器，主要是將非線性項參數代入系統消掉後，再設計一組 PID 控制器來做控制，但是其所需的回授資訊包含角速度訊號，本論文實驗平台沒有速度感測器，因此只能透過差分的方式或設計一組觀察器來得到角速度的訊號，因此本論文將會比較這兩種控制方式所得出的結果。觀察器的設計部分，由於本論文的實驗平台為二軸機械手臂，是一個非線性系統，故選用非追蹤型卡曼濾波器(Unscented Kalamn Filter，簡稱 UKF)來當作這個系統的觀察器。

僅需位置回授的控制器是一種新的控制方法，它只需回授角度資訊，不需要使用差分的方式得到速度回授資訊，因為一般而言，差分會造成雜訊放大。同時，配合適當的非線性控制器，即可達到較計算力矩控制器優異的控制效果。計算力矩控制器是一個已經被廣泛使用的控制器[1][2]，在此做為與第二個控制器比較的對照組，以便觀察其結果差異。

3.1 機械手臂的動力學模型

兩軸平面機械手臂如圖 1 所示，在本論文中稱 Link1 為大軸，Link2 為小軸。由 Lagrangian Equation[1]可得到機械手臂的動力學方程式：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

其詳細內容如下

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 為手臂的質量慣性矩陣， $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 為向心力及柯氏力項矩陣， $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 為重力項向量， $\mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}})$ 為摩擦項向量， $\boldsymbol{\tau}$ 為致動器傳至兩軸上的扭力。此處假設摩擦項 $\mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}})$ 為庫倫摩擦力與黏滯摩擦力，黏滯摩擦力為黏滯摩擦係數 \mathbf{b} 乘上角速度，庫倫摩擦力為庫倫摩擦係數 \mathbf{f}_c 乘上角速度的方向性，摩擦係數皆設為常數。

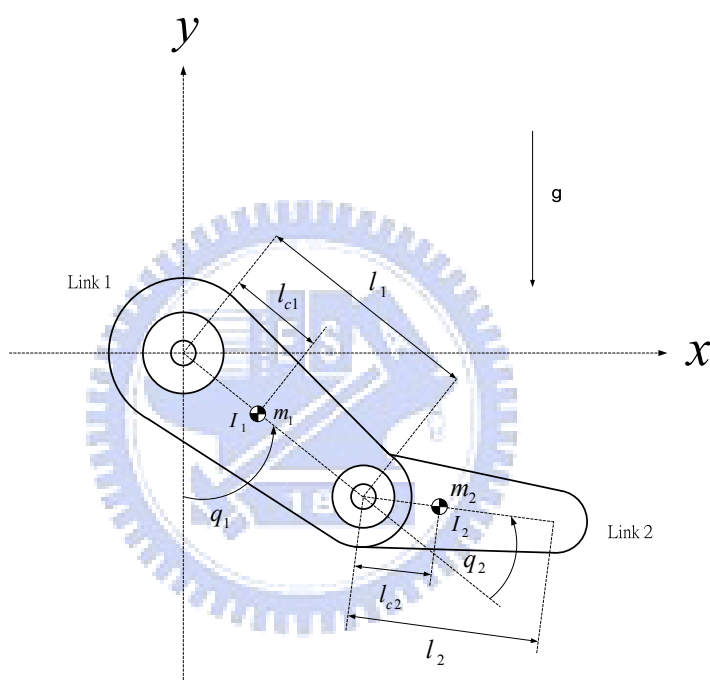


圖 1 兩軸平面機械手臂示意圖

在此系統中，角度 \mathbf{q} 與扭力 $\boldsymbol{\tau}$ 為可量測之已知狀態，角速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 及角加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 為未知狀態。動力學模型的動態方程式可表示成下列型式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (5)$$

接著考慮致動器的部分。此兩軸機械手臂實驗系統的扭力是由兩顆直流馬達所供給，為了使控制更加準確，必須要將馬達的物理參數一併考慮進動力學模型之中。

典型的直流馬達驅動系統如圖 2 所示，一般可由二階線性微分方程式來表示其電氣機械等效電路模型，進而導出馬達電樞的輸入電壓 v 與輸出力矩 τ 之間的動態方程式，如(6)式所示[1]。

$$J_m \ddot{q} + f_m \dot{q} + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (6)$$

其中

J_m : 轉子的轉動慣量($kg \cdot m^2$)

K_a : 馬達力矩常數($N \cdot m/A$)

R_a : 電樞電阻(Ω)

K_b : 反電動勢常數($V \cdot s/rad$)

f_m : 轉子的摩擦係數($N \cdot m$)

τ : 在齒輪組後的負載軸力矩($N \cdot m$), 即機械手臂力矩

q : 負載軸的角度(rad)

r : 齒輪減速比率

v : 電樞電壓(V)

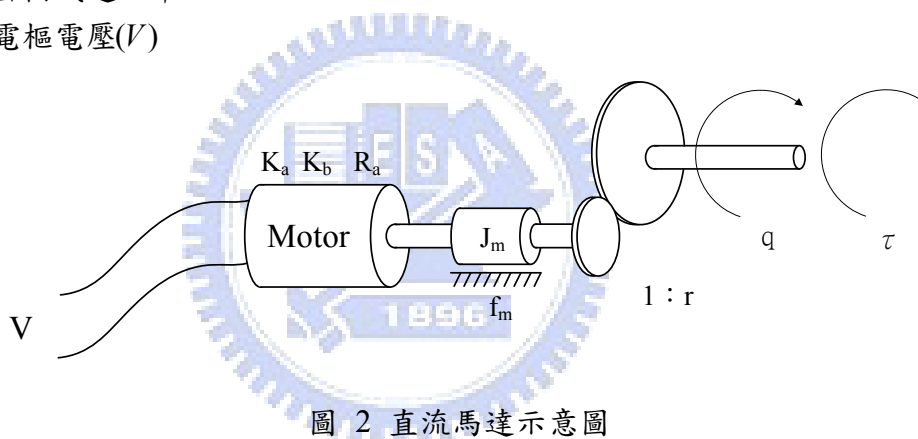


圖 2 直流馬達示意圖

若考慮此系統為兩軸機械臂，則可由(6)得

$$J \ddot{q} + F \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = K v \quad (7)$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} J_{m1} & 0 \\ 0 & J_{m2} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{m1} + \left(\frac{K_a K_b}{R_a} \right) & 0 \\ 0 & f_2 + \left(\frac{K_a K_b}{R_a} \right) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \left(\frac{K_a}{R_a}\right)\frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{K_a}{R_a}\right)\frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

將(7)式帶入(4)式後就可得到完整機械手臂動力學模型，如(8)式所示。

$$\left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{r}^2 \mathbf{J}}{\mathbf{r}^2 \mathbf{K}}\right) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\mathbf{r}^2 \mathbf{K}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{G}(\mathbf{q})}{\mathbf{r}^2 \mathbf{K}} + \frac{\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})}{\mathbf{r}^2 \mathbf{K}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (8)$$

最後將(8)重寫，得到(9)式的形式。

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (9)$$

其中

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1 r_1^2} (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2) + J_{m1} & \frac{1}{K_1 r_1^2} (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2) \\ \frac{1}{K_2 r_2^2} (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2) & \frac{1}{K_2 r_2^2} (m_2 l_{c2}^2 + I_2) + J_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1 r_1^2} (-m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2) & \frac{1}{K_1 r_1^2} (-m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) \\ \frac{1}{K_2 r_2^2} (m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1 r_1^2} [(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)] \\ \frac{1}{K_1 r_1^2} (m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1 r_1^2} (b_1 \dot{q}_1 + r_1^2 f_1) \\ \frac{1}{K_2 r_2^2} (b_2 \dot{q}_2 + r_2^2 f_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1)}{K_1 r_1^2} \\ \frac{f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2)}{K_2 r_2^2} \end{bmatrix}$$

3.2 計算力矩控制器

計算力矩的控制法則給定如下：

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_I \int \tilde{\mathbf{q}} dt] + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} \quad (10)$$

$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ 表示角度的誤差。計算力矩控制器主要分為線性部分及非線性部分，非線性的部分是透過參數估測所得出模型參數值代入後消掉。因此將(9)帶入(10)即可得到：

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_I \int \tilde{\mathbf{q}} dt) \quad (11)$$

因為 $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ 為正定矩陣，因此可整理出：

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_I \int \tilde{\mathbf{q}} dt = \mathbf{0} \quad (12)$$

此部分即為線性控制器的部分。其中 \mathbf{K}_v 、 \mathbf{K}_p 和 \mathbf{K}_I 為對稱正定的矩陣，在實現這個PID控制器時，會調整 \mathbf{K}_v 、 \mathbf{K}_p 和 \mathbf{K}_I 的值，透過一些調整PID參數的經驗法則，便可以在效能與穩定之間取一個平衡點，而不會因增益過大使得機械手臂的致動器飽和發生震動，或因增益過小使得誤差過大。計算力矩控制器系統方塊圖如下圖3所示。

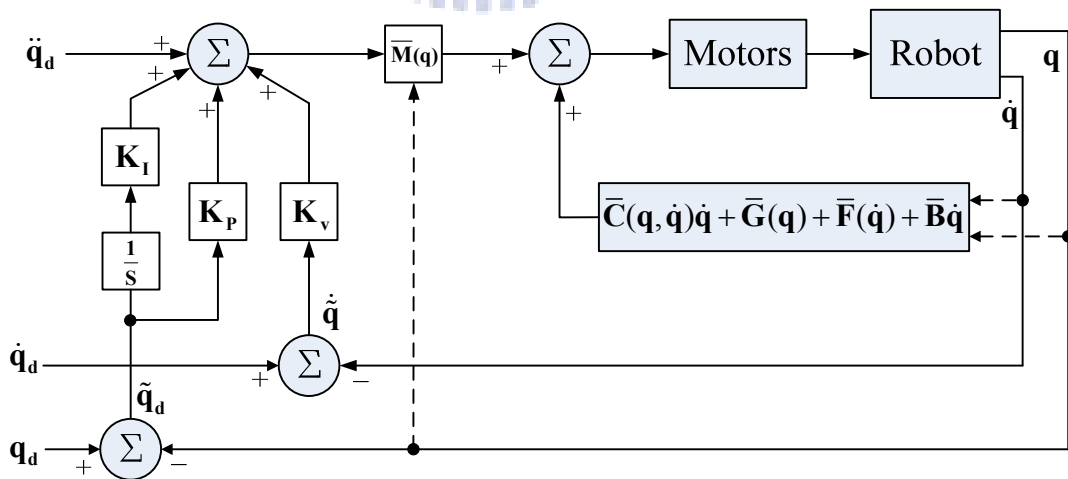


圖 3 計算力矩控制器系統方塊圖

3.3 觀察器設計

在線性系統中，最被廣泛應用的莫過於Rudolph E. Kalman 博士於1960年所發表的卡曼濾波器(Kalman Filter，簡稱KF)，此濾波器利用遞迴的方式，即透過狀態預測(predictor)和狀態修正(corrector)的反覆運算，求得在高斯雜訊下的最小均方誤差(Minimum mean Square error)解。

考慮一個線性系統：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)]$ 為處理雜訊的協方差矩陣， $\mathbf{R}(k) = \mathbf{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)]$ 為量測雜訊的協方差矩陣

卡曼濾波器演算法如下：

狀態估測

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k) &= \mathbf{E}\left\{[\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - \mathbf{x}(k+1)][\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - \mathbf{x}(k+1)]^T\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{A}[\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}(k)][\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}(k)]^T \mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\mathbf{G}^T\right\} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}(k)\mathbf{G}^T \end{aligned} \quad (15)$$

狀態修正

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k+1) &= [\mathbf{P}(k+1|k) + \mathbf{C}^T\mathbf{R}(k)^{-1}\mathbf{C}]^{-1} \\ &= [\mathbf{P}(k+1|k) + \mathbf{C}^T\mathbf{R}(k)^{-1}\mathbf{C}]^{-1} \\ &= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}^T[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}^T]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k+1|k) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{L}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k+1)\mathbf{C}^T\mathbf{R}(k)^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}+1) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) + \mathbf{L}(\mathbf{k}+1)[\mathbf{y}(\mathbf{k}) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{k})] \quad (18)$$

而根據上一節的介紹得知，本論文的實驗平台為二軸機械手臂，從動力學模型可以得知此系統為一個非線性系統，因此上述的 KF 並不適用，必須選擇非線性系統的觀察器。常應用於非線性系統的觀察器有擴展型卡曼濾波器(Extended Kalman filters，簡稱 EKF)，以及非蹤跡型卡曼濾波器(Unscented Kalman filters，簡稱 UKF)。擴展型卡曼濾波器(EKF)的做法是將非線性系統進行線性化，即對非線性系統進行一階近似的泰勒級數展開。但這樣無可避免地會產生線性化誤差，而且當系統過於剛性(Stiff)導致線性化假設不成立時，採用這種算法會導致濾波器性能下降，甚至造成發散。

非蹤跡型卡曼濾波器(UKF)是由 Simon J. Julier 與 Jeffrey K. Uhlmann[6]於 1997 年提出的，此濾波器直接使用系統的非線性模型，並利用「對輸入訊號進行高斯轉換近似比對非線性系統做近似來的容易」的概念，去計算一組權重取樣平均後，再去做狀態估測及修正。EKF 與 UKF 的效能比較如圖 4 所示。由此可看出，UKF 所估測出的結果明顯優於 EKF。因此在本論文中將會採用 UKF 作為錯誤估測系統的觀察器，下面將會詳細介紹 UKF 的內容及運算步驟。

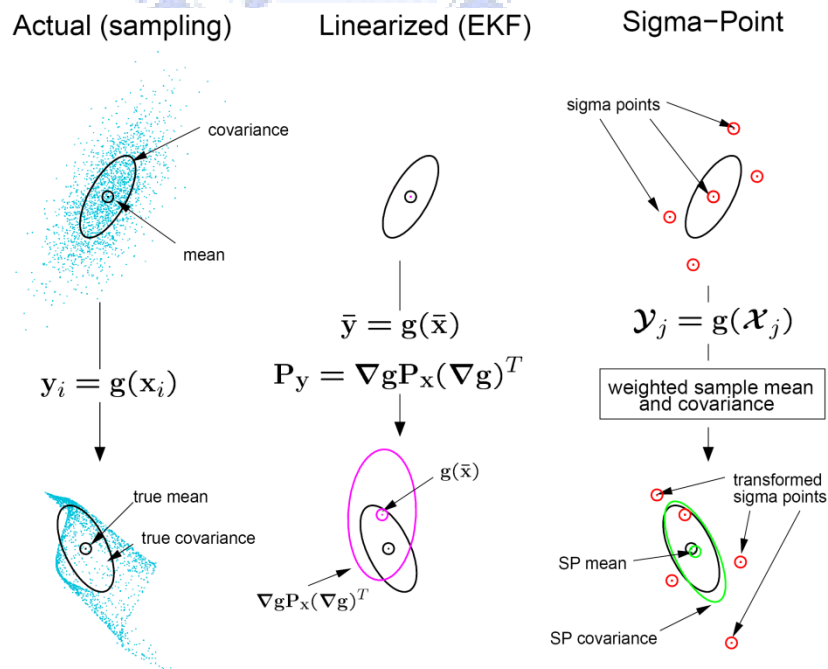


圖 4 UKF 與 EKF 效能比較圖

考慮非線性系統如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{w}(k)\end{aligned}\quad (19)$$

其中 f, h 皆為非線性轉換

$\mathbf{Q} = \mathbf{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)]$ 為處理雜訊的協方差矩陣， $\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)]$ 為量測雜訊的協方差矩陣

系統模型建立好之後，接著開始進行UKF主要的三個步驟：

1. Sigma-Point

UKF 與其他種類的卡曼濾波器不同的地方就是 Unscented 變換。Unscented 變換是一個計算隨機變數經非線性轉換之統計量的方法，且建立在近似一個機率分佈比近似一個任意的非線性函數簡單之原則上。而為了計算 Unscented 變換，必須先產生採樣點(Sigma -Points)。假設系統的狀態 $\mathbf{x}(k)$ 為 n 維，則須得到 $2n+1$ 的取樣點 χ_i 及權重 w_i ：

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \hat{\mathbf{x}}(k | k) \\ \chi_i &= \hat{\mathbf{x}}(k | k) + \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}(k | k)} \right)_i\end{aligned}\quad \mathbf{i} = 1, \dots, n \quad (20)$$

$$\begin{aligned}w_0 &= \frac{\kappa}{n + \kappa} \\ w_{i+n} &= \frac{1}{2(n + \kappa)}\end{aligned}\quad \mathbf{i} = 1, \dots, 2n \quad (21)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$ 為狀態 $\mathbf{x}(k)$ 在給定 $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k)$ 之條件下的條件期望值， $\mathbf{P}(k | k)$ 為在給定 $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k)$ 之條件下的條件協方差(conditional covariance)， κ 為尺度設計參數，做為微調之用。

2. 狀態估測

將取樣點(20)輸入非線性系統(19)式可得：

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_i &= \mathbf{f}(\chi_i, \mathbf{u}(k)) \\ \bar{\mathbf{y}}_i &= \mathbf{h}(\bar{\chi}_i)\end{aligned}\quad (22)$$

接著將權重(21)及(22)式所計算出之各取樣點所對應的狀態及輸出，分別帶到下列式中計算預測的狀態、輸出及協方差：

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{w}_i \bar{\chi}_i \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{w}_i \bar{y}_i \quad (24)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{w}_i (\bar{\chi}_i - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}))(\bar{\chi}_i - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}))^T + \mathbf{Q} \quad (25)$$

3. 狀態修正

使用權重(21)式與預測值(23)、(24)及(25)，計算輸出的協方差及互協方差：

$$\mathbf{P}_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{w}_i (\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) - \bar{y}_i)(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) - \bar{y}_i)^T + \mathbf{R} \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{xy} = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{w}_i (\bar{\chi}_i - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}))(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) - \bar{y}_i)^T \quad (27)$$

最後使用上面兩式(26)及(27)，加上最新的輸出值來計算修正後的狀態及協方差：

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}+1) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y}(\mathbf{k}+1) - \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k})) \quad (28)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}+1) = \mathbf{P}(\mathbf{k}+1|\mathbf{k}) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{xy}^T \quad (29)$$

整個UKF的架構如圖 5所示

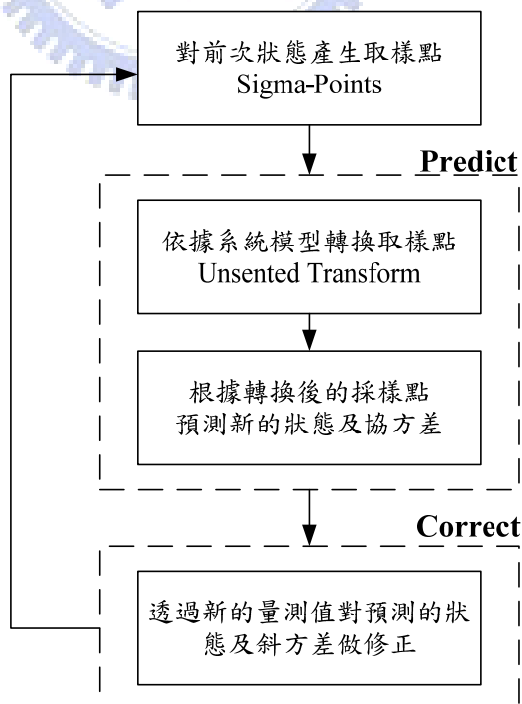


圖 5 UKF 流程圖

3.4 僅需位置回授的新型控制器

在 3.2 節中介紹了計算力矩控制器的控制方法，雖然簡單而且容易設計，但是它必需回授速度資訊是一大缺點。在一般的系統中，速度資訊通常由差分的方式產生，差分會把雜訊放大而使訊號發生大幅度的震盪，如圖 6 所示。此缺點會限制控制器增益的調整，降低控制器的效能，當增益調整過大時甚至會出現致動器飽和的現象。

有鑑於此，本論文提出一種新型控制器，此控制器尚未被應用於機械手臂的控制中。此控制器主要有三個部分，第一部分先將機械手臂動力學方程式(9)中的線性項及非線性項分別獨立出來，利用[3]中提出之設計位置回授控制器的方式，設計出關於線性項部份的控制器。第二部分則將剩餘的非線性項部份，則利用編碼器所量測得的角度以及命令角速度和角加速度，分別帶入非線性項動力學模型中，計算出應有的前饋補償命令。第三部分透過 Lyapunov method[4]設計一組非線性控制器，補償剩餘的誤差值。在此控制器的設計過程中，僅需回授角度的量測值，系統效能便能超越在前一節所介紹的計算力矩控制器。整個控制器的方塊圖如圖 7 所示。

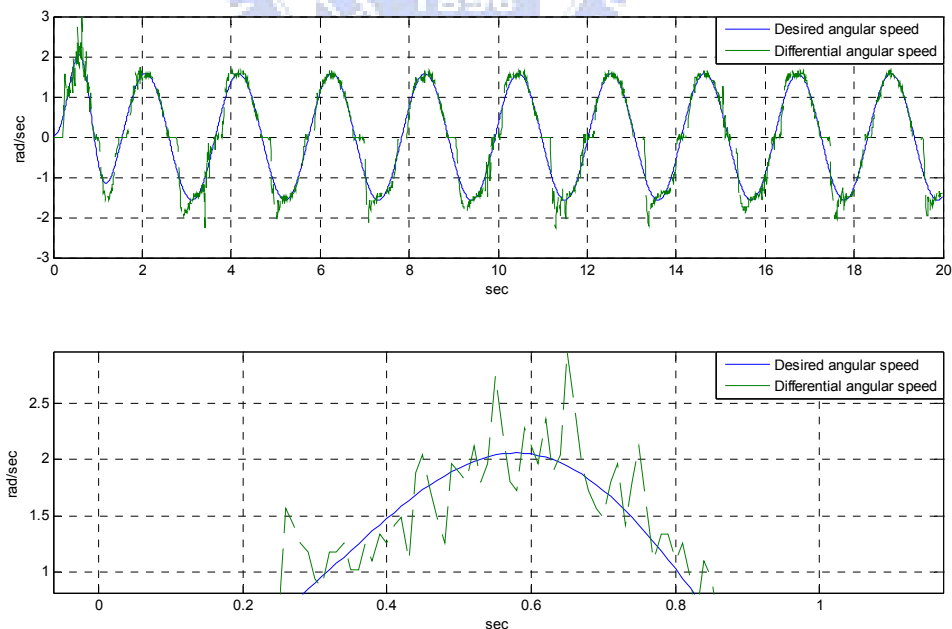


圖 6 差分角速度與命令軌跡，下圖為局部放大圖

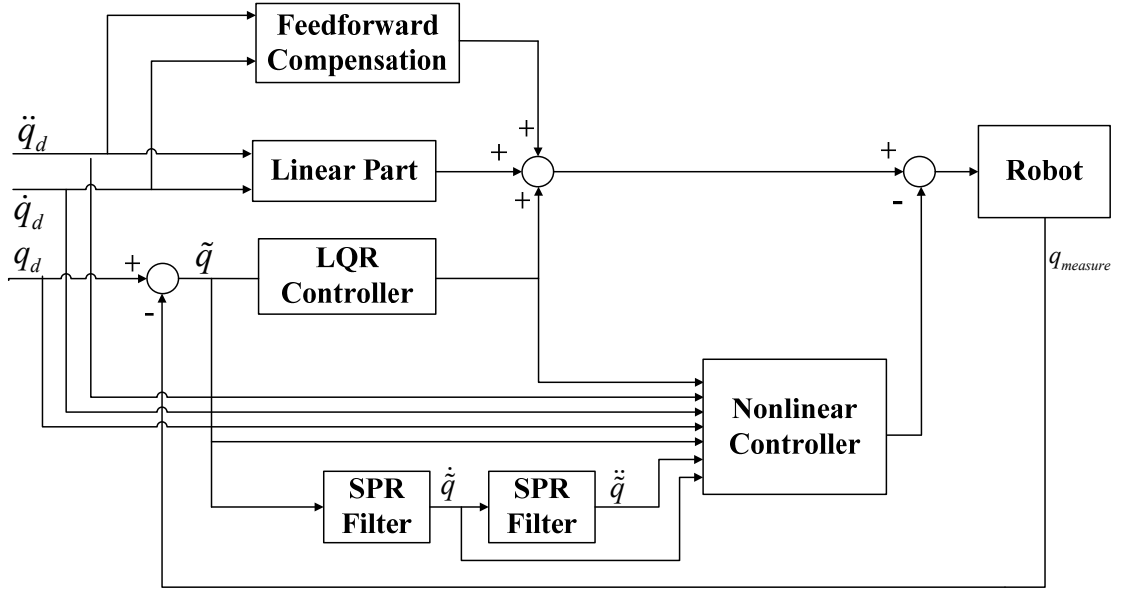


圖 7 不需要速度估測的控制器方塊圖

由(9)式中可以看出， $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ 矩陣內含有線性常數矩陣部分及非線性項部分，分別令為 $\bar{\mathbf{M}}_0$ 及 $\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q})$ ，並將 τ 拆成 τ_{Lin} 、 τ_{ff} 及 τ_{NL} ，可整理出：

$$\bar{\mathbf{M}}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} = \tau_{\text{Lin}} + \tau_{\text{ff}} + \tau_{\text{NL}} - (\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}})) \quad (30)$$

令 $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}})$ ，並將上式表示成動態方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\bar{\mathbf{M}}_0^{-1} \bar{\mathbf{B}} \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_0^{-1} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} (\tau_{\text{Lin}} + \tau_{\text{ff}} + \tau_{\text{NL}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})) \quad (31)$$

將(31)式的非線性項暫時忽略，只考慮線性項的部分便可整理成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \tau_{\text{Lin}} \quad (32)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (33)$$

其中 $\tau_{\text{ff}} = \bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q}) \ddot{q}_d + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{q}_d) \dot{q}_d + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{q}_d)$ ，主要的作用在於消除非線性動態 $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ 的前饋控制輸出。 τ_{Lin} 則是根據(32)式線性項部分所設計出的線性控制器輸

出，而 τ_{NL} 為非線性控制器輸出，其目的在使閉迴路系統有強健的穩定性。

此兩軸機械臂系統控制器的目的為角度追蹤，因此設角度及角速度的命令軌跡為 $\mathbf{x}_d = [q_{1d} \quad q_{2d} \quad \dot{q}_{1d} \quad \dot{q}_{2d}]^T$ ，線性組合部份的命令電壓 τ_d 為：

$$\tau_d = [\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{M}}_0] \begin{bmatrix} \dot{q}_{1d} \\ \dot{q}_{2d} \\ \ddot{q}_{1d} \\ \ddot{q}_{2d} \end{bmatrix} \quad (34)$$

而目前的系統狀態為 $\mathbf{x} = [q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$ ，所以可以得到角度及角速度的追蹤誤差 $\bar{\mathbf{x}} = [\tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \dot{\tilde{q}}_1 \quad \dot{\tilde{q}}_2]^T$ ，其中 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ ， $\tilde{\tau}_{Lin} = \tau_{Lin} - \tau_d$ 。最後改寫(32)得到新的狀態空間表示如(35)式所示，在此仍先暫時忽略非線性項，只考慮線性項的部分。

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\tau}_{Lin} \quad (35)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} \quad (36)$$

3.4.1 線性控制器的設計

此控制器的設計方法採用[3]中所提出的位置回授控制器設計，主要應用在車輛橫向運動的控制。在很多系統中，某些狀態難以量測，因此常在系統中設計觀察器去估測所要知道的狀態，並加上狀態回授控制器結合成輸出回授控制器來控制系統。雖然此種控制方式能夠保證系統穩定，卻不能保證系統的強健性依然良好，原因在於設計狀態回授控制器時，觀察器的動態特性沒有被考慮進去，使得外加的觀察器改變了原來狀態回授控制系統所導致。

因此，位置回授控制器[3]為了解決這個問題，提出了兩階段設計程序使狀態回授控制器轉換成輸出回授的控制器，而不會改變其閉迴路的特性。在此控制器的設計中，首先在(35)式所表示的受控廠前加上一個濾波器使其成為一個增大的受控廠，這個濾波器的作用主要是將增大的受控廠利用 LQ 方法(Linear quadratic methods)得到一個狀態回授控制器，最後再將此對增大受控廠設計的狀態回授控制器轉換成對

原來受控廠的輸出回授控制器。

第一階段

假設 $G(s)$ 是機械手臂動力學方程式有關於線性項(35)的轉移矩陣。加入一個濾波器 $\Lambda(s)$ 到電壓輸入端以增大受控廠 $G(s)$ 。如圖 8 所示。

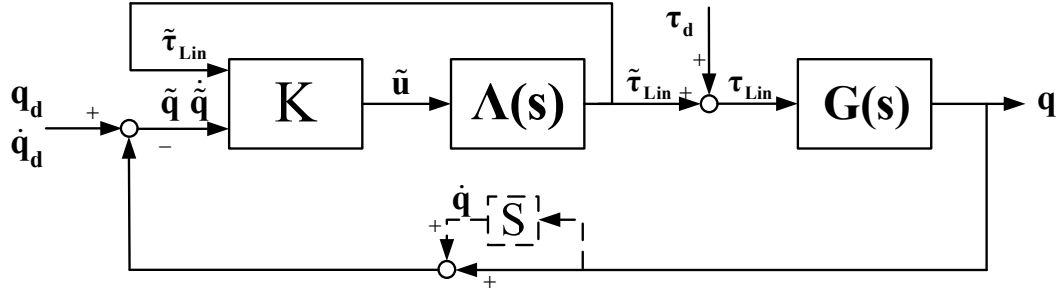


圖 8 增大的受控廠

其中

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1(s)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_2(s)} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$D(s) = s^r + \lambda_{r-1}s^{r-1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0$ ，係數 λ_r 是設計的參數。將 Λ 寫成如(18)式的可控制典型式(controllable canonical form)。

$$\dot{\tau}_{Lin} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \dots & -\lambda_{r-1} \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & -\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \dots & -\lambda_{r-1} \end{bmatrix} \tau_{Lin} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (38)$$

如果 $r > 1$ ，則必須計算 τ_{Lin} 的微分項，會大幅增加計算量。因此選擇 $r=1$ ，則

$D(s) = s + \lambda_0$ ，所以(38)式可以化簡為(39)式。

$$\dot{\tau}_{Lin} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \tau_{Lin} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A}_\tau \tau_{Lin} + \mathbf{B}_\tau \mathbf{u} \quad (39)$$

這個增大的受控廠的輸入是 \mathbf{u} ，輸出是 q 和 \dot{q} 。從(35)式和(39)式，可以得到它的狀態空間的表示為

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\tau}_{\text{Lin1}} \\ \tilde{\tau}_{\text{Lin2}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{M}}_0^{-1}\bar{\mathbf{B}} & -\bar{\mathbf{M}}_0^{-1} & -\bar{\mathbf{M}}_0^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\tau}_{\text{Lin1}} \\ \tilde{\tau}_{\text{Lin2}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (40)$$

觀察(40)式，可看到這個增大的受控廠依然可控制。因此選擇適當的狀態回授增益，可以任意分配閉迴路的特徵值。令狀態回授控制器的增益為 $\tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ ，則：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\tau}_{\text{Lin}} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_1\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}_3\tilde{\tau}_{\text{Lin}} \\ &= -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{13} & k_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} \\ k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{31} & k_{32} \\ k_{33} & k_{34} \end{bmatrix} \tilde{\tau}_{\text{Lin}} \end{aligned} \quad (41)$$

第二階段

由於系統中並不是所有狀態都可以由量測得到，因此必須將狀態回授轉換成輸出回授的形式。而 $\hat{\mathbf{u}}$ 及 $\hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin}}$ 分別表示 $\tilde{\mathbf{u}}$ 和 $\tilde{\tau}_{\text{Lin}}$ 的拉氏轉換。從圖 8 中，可以發現

$\hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin}} = \Lambda\hat{\mathbf{u}}$ ，所以(41)式的拉氏轉換可以表示為

$$\hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin}} = -\Lambda(s) \left(\mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix}^T + s\mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix}^T + \mathbf{K}_3 \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin1}} \\ \hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin2}} \end{bmatrix}^T \right) \quad (42)$$

將上式移項整理後，可以得到輸出狀態回授控制方程式：

$$\hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin}} = -[\Lambda^{-1}(s) + \mathbf{K}_3]^{-1} \left((\mathbf{K}_1 + s\mathbf{K}_2) \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix}^T \right) \quad (43)$$

(43)式展開可得：

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin1}} \\ \hat{\tilde{\tau}}_{\text{Lin2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + (\lambda_0 + \lambda_0 + k_{31} + k_{34})s + (\lambda_0 + k_{31})(\lambda_0 + k_4) - k_{32}k_{33}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned}
a_{11} &= k_{21}s^2 + [k_{11} + k_{21}(\lambda_0 + k_{34}) - k_{32}k_{23}]s + k_{11}(\lambda_0 + k_{34}) - k_{32}k_{13} \\
a_{12} &= k_{22}s^2 + [k_{12} + k_{14}(\lambda_0 + k_{34}) - k_{32}k_{24}]s + k_{12}(\lambda_0 + k_{34}) - k_{32}k_{14} \\
a_{21} &= k_{23}s^2 + [k_{13} + k_{23}(\lambda_0 + k_{31}) - k_{33}k_{21}]s + k_{13}(\lambda_0 + k_{31}) - k_{33}k_{11} \\
a_{22} &= k_{24}s^2 + [k_{14} + k_{24}(\lambda_0 + k_{31}) - k_{33}k_{22}]s + k_{14}(\lambda_0 + k_{31}) - k_{33}k_{12}
\end{aligned}$$

從(41)式到(44)式的轉換只有使用到運動學上的關係，不需要使用觀察器或速度估測器。透過這個線性控制器，並配合感測器量測到的角度、命令的角速度和角加速度代入機械手臂的動力學方程式中，再加上非線性項算出的應有的扭力，便完成了線性部分的控制設計。

增益矩陣 $[K_1, K_2, K_3]$ 的選擇會因為控制目標的不同而異，例如效能、強健性、致動器的限制等。在這裡應用 LQ 方法(Linear quadratic methods)來決定增益，考慮如圖 8 增大的受控廠，機械手臂的狀態為 $\tilde{\mathbf{x}}$ ，致動器所能提供的輸入為 $\tilde{\mathbf{u}}$ 。LQR(Linear quadratic regulator)控制器的成本函數(cost function)為

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}) dt \quad (45)$$

其中 $\mathbf{Q} \in R^{6 \times 6}$ 是半正定矩陣， \mathbf{R} 是正定矩陣，狀態回授的增益可以經由求出 J 的極小而產生。這個最佳化的增益 $[K_1 \quad K_2 \quad K_3] = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_{a1}^T \mathbf{P}$ ， \mathbf{P} 是正定矩陣，滿足 Riccati equation

$$\mathbf{A}_a^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_a - \mathbf{P} \mathbf{B}_{a1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_{a1}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (46)$$

3.4.2 非線性控制器的設計

在設計非線性控制器之前，先透過 Lyapunov function 來判斷系統是否穩定。根據 Lyapunov 全域穩定定理，系統能夠保證穩定須滿足下列條件：

1. $\mathbf{V}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ ， $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (positive definite)
2. $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ，when $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$ ， $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

因此將上一節中的系統中狀態 $\tilde{\mathbf{x}}$ 帶入 Lyapunov function：

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} \quad (47)$$

其中 \mathbf{P} 為滿足(46)式 Riccati equation 之正定矩陣。對(47)微分後可得到：

$$\dot{V} = \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} \quad (48)$$

由(31)及(40)式整理得出：

$$\dot{\tilde{x}} = A_a \tilde{x} + B_{a1}(-K\tilde{x}) + B_{a2}(\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL}) \quad (49)$$

其中 $B_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{M}_0^{-1} \end{bmatrix}$ 。將(49)式代入(48)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \tilde{x}^T (A_a - B_{a1}K)^T P + P(A_a - B_{a1}K) \tilde{x} + (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL})^T B_{a2}^T P \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P B_{a2} (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL}) \end{aligned} \quad (50)$$

根據Lyapunov's stability，若存在一線性非時變系統 $\dot{x} = Fx$ ，則此系統能夠穩定的充分必要條件為：

存在一組正定對稱矩陣 P 及 Q ， $P > 0$ 且 $Q > 0$ ，則 $F^T P + P F = -Q$

在(50)式中， $\dot{\tilde{x}} = (A_a - B_{a1}K)\tilde{x}$ 已在上一節中證明為一個穩定的線性系統，根據(46)的可知 A_a 、 B_{a1} 與 K 滿足 Riccati equation，則必定存在一組正定矩陣 Q 及 P ，因此(50)可以改寫為

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \tilde{x}^T (A_a^T P - P B_{a1} R^{-1} B_{a1}^T P + P A_a - P B_{a1} R^{-1} B_{a1}^T P) \tilde{x} + (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL})^T B_{a2}^T P \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P B_{a2} (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL}) \\ = & \tilde{x}^T (-P B_{a1} R^{-1} B_{a1}^T P - Q) \tilde{x} + (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL})^T B_{a2}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P B_{a2} (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL}) \\ = & -\tilde{x}^T \bar{Q} \tilde{x} + (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL})^T B_{a2}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P B_{a2} (\tau_{ff} - h(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_{NL}) \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $\bar{Q} = P B_{a1} R^{-1} B_{a1}^T P + Q$ 。觀察上式結果，可以發現 $\tilde{x}^T \bar{Q} \tilde{x}$ 必定會大於 0，因此現在必須針對後面兩項進行設計，使 Lyapunov function \dot{V} 必然小於 0。

首先，考慮一可控制(controllable)的線性非時變系統為：

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_\zeta \zeta + B_\zeta Z \\ \varphi &= C_\zeta \zeta \end{aligned} \quad (52)$$

其轉移函數為： $H(s) = C_\zeta (sI - A_\zeta)^{-1} B_\zeta$ ，並且符合嚴格正實(strictly positive-real-SPR)的條件。令 $Z = (P B_{a2})^T \tilde{x}$ 通過此 SPR 系統，並設計非線性控制器輸出

$\tau_{NL} = -\alpha(t)\varphi$ 。其中 $\tilde{\mathbf{x}}$ 包含速度誤差資訊，因此在設計過程中需要透過一些轉換將速度項取代掉：

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{P}\mathbf{B}_{a2})^T \tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{E}_3] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{Lin} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \mathbf{H}(s)\mathbf{Z}(s) \\ &= \mathbf{H}(s)[\mathbf{E}_1\tilde{\mathbf{q}} + s\mathbf{E}_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{E}_3\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{Lin}] \\ &= (\mathbf{H}(s)\mathbf{E}_1 + s\mathbf{H}(s)\mathbf{E}_2)\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(s)\mathbf{E}_3\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{Lin} \end{aligned} \quad (54)$$

從(54)可看出 $\mathbf{H}(s)\mathbf{E}_1 + s\mathbf{H}(s)\mathbf{E}_2$ 與 $\mathbf{H}(s)\mathbf{E}_3$ 都是真分，故 $\varphi(s)$ 可僅從角度與力矩資訊獲得。由於系統加入一 SPR 濾波器，因此須改寫 Lyapunov function(47)及(51)得：

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \alpha \zeta^T \Gamma \zeta + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss})^2 \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= -\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} + (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_{NL})^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_{NL}) \\ &\quad + \alpha \dot{\zeta}^T \Gamma \zeta + \alpha \zeta^T \Gamma \dot{\zeta} + \dot{\alpha} \zeta^T \Gamma \zeta + \dot{\alpha} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss}) \end{aligned} \quad (56)$$

其中 α_{ss} 為常數，目的在使 α 能收斂至 α_{ss} 。將(52)式代入(56)中重新整理：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= -\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} + \alpha \zeta^T (\mathbf{A}_\zeta^T \Gamma + \Gamma \mathbf{A}_\zeta) \zeta + \alpha \mathbf{Z}^T \mathbf{B}_\zeta^T \Gamma \zeta + \alpha \zeta^T \Gamma \mathbf{B}_\zeta \mathbf{Z} + \dot{\alpha} \zeta^T \Gamma \zeta \\ &\quad + (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}))^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})) - \alpha \varphi \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T \alpha \varphi + \dot{\alpha} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss}) \end{aligned} \quad (57)$$

在此引入 Kalman-Yakubovich-Popov 定理[5]，其論述如下：

若系統 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 為一個 $m \times m$ 的轉移矩陣，並且符合嚴格正實(strictly positivereal-SPR)的條件，則必存在兩個正定矩陣 \mathbf{P}_ζ 及 \mathbf{Q}_ζ ，使得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_\zeta + \mathbf{P}_\zeta \mathbf{A} &= -\mathbf{Q}_\zeta \\ \mathbf{P}_\zeta \mathbf{B} &= \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (58)$$

根據此定理便可將(57)重新化簡：

$$\dot{\mathbf{V}} = -\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} - \alpha \zeta^T \mathbf{Q}_\zeta \zeta + \dot{\alpha} \zeta^T \Gamma \zeta + \dot{\alpha} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss}) + (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h})^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h}) \quad (59)$$

對後兩項取範數

$$\|(\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h})^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T (\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h})\| \leq 2 \times \|(\boldsymbol{\tau}_{ff} - \mathbf{h})\| \|\mathbf{Z}\|$$

其中

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{\tau}_{fr} - \mathbf{h})\| &= \|(\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}_d)) - (\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}))\| \\
&= \|(\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d - \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}_d) - \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}))\| \\
&\leq \|\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q})\|\|\ddot{\mathbf{q}}\| + \|\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d - \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| + \|\bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}_d) - \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}})\| \\
&\leq \delta(t)
\end{aligned}$$

故可整理成：

$$\dot{\mathbf{V}} = -\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{x}} - \alpha\boldsymbol{\zeta}^T\mathbf{Q}_\zeta\boldsymbol{\zeta} + \dot{\alpha}\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\zeta} + \dot{\alpha}\mathbf{K}_\alpha(\alpha - \alpha_{ss}) + 2\delta\|\mathbf{Z}\| \quad (60)$$

由(60)式可看出第一項必定小於0，令存在一個 $\bar{\mathbf{g}}$ ，且 $\bar{\mathbf{g}} \geq 2\delta\|\mathbf{Z}\|$ 。接著將(60)剩餘項皆令其小於0：

$$\dot{\alpha}\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\zeta} + \bar{\mathbf{g}} + \dot{\alpha}\mathbf{K}_\alpha(\alpha - \alpha_{ss}) - \alpha\boldsymbol{\zeta}^T\mathbf{Q}_\zeta\boldsymbol{\zeta} \leq 0 \quad (61)$$

根據線性系統理論，若 \mathbf{A} 為 $n \times n$ 矩陣，則 $|\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|^2$ ，其中 $\|\mathbf{A}\| \geq \max(|\lambda|)$ 。

因此可進一步得到 $\alpha\boldsymbol{\zeta}^T\mathbf{Q}_\zeta\boldsymbol{\zeta} \leq \alpha\mathbf{K}_\beta\|\boldsymbol{\zeta}\|^2$ ， $\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\zeta} \leq \mathbf{K}_\gamma\|\boldsymbol{\zeta}\|^2$ 。將上述之上界代入(61)後移項整理可得：

$$\dot{\alpha} \leq \frac{\alpha\mathbf{K}_\beta\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - \bar{\mathbf{g}}}{\mathbf{K}_\gamma\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - \mathbf{K}_\alpha(\alpha_{ss} - \alpha)} \quad (62)$$

根據Lyapunov全域穩定定理，若系統為穩定，則 $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0$ 且 $\mathbf{V}(\mathbf{x}) > 0$ 。觀察(55)式，可知第一項及第三項都恆大於0，只要能夠保證 α 永遠大於0，就能符合Lyapunov全域穩定定理的條件。因此選定參數 $\mathbf{K}_\alpha > 0$ 及 $\alpha_{ss} > 0$ ，討論(55)式的兩種情形：

1. 若 $0 < \alpha < \alpha_{ss} - \frac{\mathbf{K}_\gamma}{\mathbf{K}_\alpha}\|\boldsymbol{\zeta}\|^2$

$\alpha\mathbf{K}_\beta\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 < \alpha_{ss}\mathbf{K}_\beta\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 < \varepsilon \times \alpha_{ss}\mathbf{K}_\beta\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 = \bar{\mathbf{g}}$ ，其中 ε 為略大於1的常數，而

$\bar{\mathbf{g}} = \max\{2\delta\|\mathbf{Z}\|, \varepsilon \times \alpha_{ss}\mathbf{K}_\beta\|\boldsymbol{\zeta}\|^2\}$ 。由此可知分子小於0，但在此希望 α 能夠趨近於

α_{ss} ，所以 $\dot{\alpha}$ 必須大於0。故 $\mathbf{K}_\gamma\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - \mathbf{K}_\alpha(\alpha_{ss} - \alpha) < 0$ ，並得到：

$$\alpha < \alpha_{ss} - \frac{\mathbf{K}_\gamma}{\mathbf{K}_\alpha} \|\zeta\|^2 \quad (63)$$

已知 $\dot{\mathbf{V}}(t) \leq 0, \forall t > 0$ ，則 $\mathbf{V}(t)$ 必為遞減函數，便可從(55)推得：

$$\frac{1}{2} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss})^2 \leq \mathbf{V}(t) \leq \mathbf{V}(\mathbf{0}) < \bar{\mathbf{V}} \quad (64)$$

其中 $\mathbf{V}(\mathbf{0})$ 為初始值，為一個已知常數，而 $\bar{\mathbf{V}}$ 為一個比 $\mathbf{V}(\mathbf{0})$ 恆大之定值。將(64)移項後可得：

$$0 < \alpha_{ss} - \sqrt{\frac{2\bar{\mathbf{V}}}{\mathbf{K}_\alpha}} \leq \alpha < \alpha_{ss} + \sqrt{\frac{2\bar{\mathbf{V}}}{\mathbf{K}_\alpha}} \quad (65)$$

又因為 $\bar{\mathbf{V}}$ 及 \mathbf{K}_α 為可自行設定之參數，因此可確保 α 恆大於 0。

2. 若 $\varepsilon \times \alpha_{ss} > \alpha > \alpha_{ss} - \frac{\mathbf{K}_\gamma}{\mathbf{K}_\alpha} \|\zeta\|^2$

則 $\mathbf{K}_\gamma \|\zeta\|^2 - \mathbf{K}_\alpha (\alpha_{ss} - \alpha) > 0$ ，又 $(\alpha_{ss} - \frac{\mathbf{K}_\gamma}{\mathbf{K}_\alpha} \|\zeta\|^2) \mathbf{K}_\beta \|\zeta\|^2 < \alpha \mathbf{K}_\beta \|\zeta\|^2 < \varepsilon \times \alpha_{ss} \mathbf{K}_\beta \|\zeta\|^2 = \bar{\mathbf{g}}$

所以 $\dot{\alpha}$ 小於 0 使得 α 趨近 α_{ss} 。

由上述的推導可以得知，當 $\bar{\mathbf{g}} = \max \{2\delta \|\mathbf{Z}\|, \varepsilon \times \alpha_{ss} \mathbf{K}_\beta \|\zeta\|^2\}$ 時，可以保證 α 能夠確

實落在下界 $\frac{\mathbf{K}_\gamma}{\mathbf{K}_\alpha} \|\zeta\|^2$ 及上界 $\varepsilon \times \alpha_{ss} \mathbf{K}_\beta \|\zeta\|^2$ 的區間中，並且 α 恆大於 0。因此最後可以得

到下列兩式，證明出此非線性控制器恆為穩定：

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \alpha \zeta^T \Gamma \zeta + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss})^2 > 0 \quad (66)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = -\tilde{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} - \alpha \zeta^T \mathbf{Q}_\zeta \zeta + \dot{\alpha} \zeta^T \Gamma \zeta + 2\delta \|\mathbf{Z}\| + \dot{\alpha} \mathbf{K}_\alpha (\alpha - \alpha_{ss}) < 0 \quad (67)$$

第四章 錯誤偵測與判別技術

在第二章中，介紹了在錯誤偵測與判別的一些種類與方法。而本論文在這裡所採用的是以模型為基礎的錯誤偵測和識別(Model-based FDI)。此方法主要是利用理論系統和實際系統間的輸出不同計來算其剩餘值(Residuals)，藉此判斷系統是否出錯。

本章分為四節，第一小節介紹以模型為基礎的錯誤偵測系統的三大區塊，分別是：建立錯誤系統模型、剩餘值產生和剩餘值評估。第二小節將介紹多模型組態，這部分就是系統的剩餘值評估，其中產生剩餘值的觀察器使用 3.3 節介紹的非追蹤型卡曼濾波器(Unscented Kalamn Filter，簡稱 UKF)。在此會介紹兩種多模型組態演算法，分別為二階廣義偽貝氏演算法(General Pseudo Bayesian of Order 2，簡稱 GPB-2)以及交互多模型法(Interacting Multiple Model，簡稱 IMM)，這兩種演算法的模型估測準確度大致相同，但複雜度以 GPB-2 較高，本論文將會討論這兩種演算法所呈現的結果。最後一節是階層式錯誤偵測與判別系統，其目的在於當系統正常運作時，僅運行錯誤偵測；當判斷系統有錯誤發生時，再啟動錯誤判別系統，以降低系統在正常運作時的運算負荷量。

4.1 以模型為基礎的錯誤偵測技術

以模型為基礎的錯誤偵測和識別(Model-based FDI)的定義為：「事先給定系統錯誤的描述以及系統的數學模型，並配合感測器所量測得到的系統輸入與輸出資訊，以藉此來進行系統狀態的確認」。做法分為三個步驟：

第一步為建立錯誤系統模型，在此的目的是要將系統預期會發生的各種錯誤以數學模型的方式來描述，例如運動學模型、動力學模型等等。也因此系統模型的精確與否，對於系統錯誤與偵測有相當大的影響。

第二是將感測器量測之實際訊號和經過數學模型的估測訊號相減產生剩餘值(Residual Generation)。所計算出的剩餘值必須能夠有某種程度的代表系統是否出錯。因此，剩餘值在系統正常運作的時候必須趨近於零，而在系統出錯時必須遠大於零。

理想的情況下，剩餘值的大小和系統的輸入和輸出無關，只與系統狀態有關。此步驟為最重要的一步，因為若產生的剩餘值能夠明確地表現系統的狀態，則下一步剩餘值評估(Residual Evaluation)的部份將容易設計。

第三步為剩餘值評估(Residual Evaluation)，其作法為對上一步所產生的剩餘值利用相似值(Likelihood)或決定法則(Decision Rule)進行評估，以確定系統是否真的有錯誤發生。一般的作法是設定一個門檻(threshold)對即時產生的剩餘值進行測試，也可對剩餘值進行移動平均(Moving Averages)再進行測試。其架構圖如圖 9 所示。

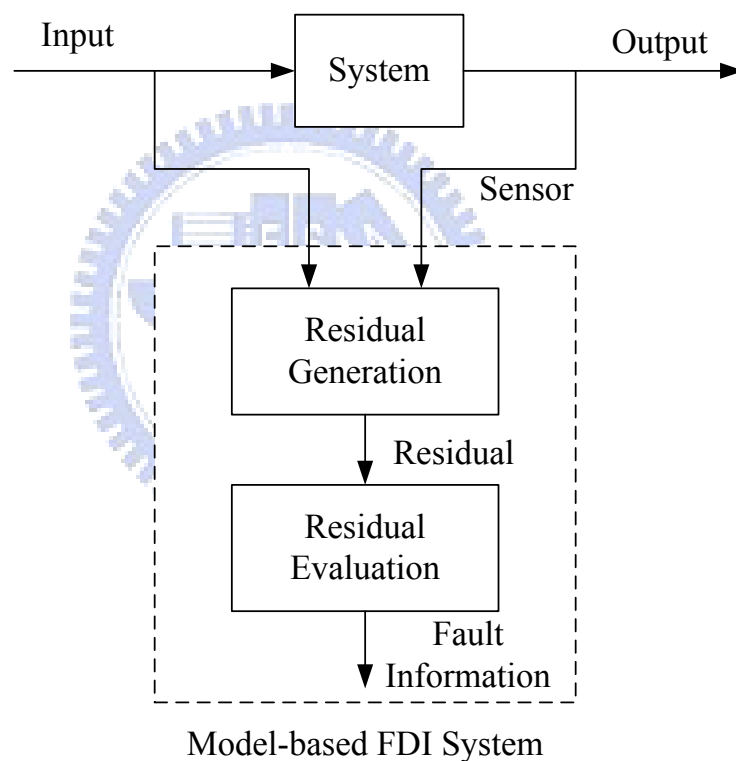


圖 9 Model-Based 錯誤偵測系統架構圖

4.2 多模型架構

多模型架構，顧名思義，就是指一個系統的行為是由兩個以上且有限數量的模型來加以描述。在錯誤診斷的應用中，乃透過同時運行數個錯誤系統描述模型來與實際系統輸出比較差異，藉此辨別系統此時與哪種錯誤系統描述模型最接近。所有的模型皆為互斥，而且其機率和為 1，因此在任意時間下，系統只會有一個機率最高的系統描述模型。而依據方法的不同又可分為兩種類型：

第一類：靜態多重模型 (Static Multiple Model)

所謂靜態多重模型是指在運行模型估測時，不會依估測的結果切換模型。在此模型下估測可推導如下[7]：

$$\begin{aligned}
 \mu_j(\mathbf{k}) &\triangleq \mathbf{P}\{M_j | Z^k\} = \mathbf{P}\{M_j | z(\mathbf{k}), Z^{k-1}\} \\
 &= \frac{\mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_j] \mathbf{P}\{M_j | Z^{k-1}\}}{\mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}]} \\
 &= \frac{\mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_j] \mathbf{P}\{M_j | Z^{k-1}\}}{\sum_{i=1}^r \mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_i] \mathbf{P}\{M_i | Z^{k-1}\}} \\
 &= \frac{\mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_j] \mu_j(\mathbf{k}-1)}{\sum_{i=1}^r \mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_i] \mu_i(\mathbf{k}-1)} \quad j=1, \dots, r
 \end{aligned} \tag{68}$$

其中 M_j : 第 j 個模型， $j=1, 2, \dots, r$

$z(\mathbf{k})$: 第 k 個時間點時的系統資訊，在此是指系統的輸入量測與輸出量測

Z^k : 到第 k 個時間點時為止的所有資訊 ($z(0), z(1), \dots, z(k)$)

$\mu_j(\mathbf{k})$: 第 k 個時間點時，系統在第 j 個模型下的機率

$\hat{x}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k})$: 由 $z(k)$ 估測第 k 個時間點估測到的第 j 個模型的狀態

$\mathbf{P}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k})$: 由 $z(k)$ 估測第 k 個時間點估測到的第 j 個模型的協方差

由(68)式可以觀察到分子項 $\mathbf{p}[z(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_j]$ ，所代表的意義是在第 $k-1$ 的時間點

時為止的所有資訊 Z^{k-1} 及經過第 k 個時間的第 j 個模型 $M_j(\mathbf{k})$ 下，第 k 個時間點所得到的輸出資訊為 $\mathbf{z}(\mathbf{k})$ 的機率。也因此，這項的值越高代表在這個時間點模型 $M_j(\mathbf{k})$ 的機率越高，也就是相似度(Likelihood)越高。在本論文中所使用的估測器為 UKF，它是對每個要估測的狀態點進行高斯近似，令其相似值為 $\Lambda_j(\mathbf{k}) \equiv p[\mathbf{z}(\mathbf{k}) | Z^{k-1}, M_j]$ $= N[\mathbf{v}_j(\mathbf{k}); \mathbf{0}, S_j(\mathbf{k})]$ ，其中 $\mathbf{v}_j(\mathbf{k})$ 為實際量測輸出與估測輸出之差值，又稱為革新值 (innovation)， $S_j(\mathbf{k})$ 為 covariance of innovation， $N[\mathbf{v}_j(\mathbf{k}); \mathbf{0}, S_j(\mathbf{k})]$ 意即 $\mathbf{v}_j(\mathbf{k})$ 的機率分布為高斯分布，相對應的 mean 為 0，covariance 為 $S_j(\mathbf{k})$ 。由此可得出此刻 k 的狀態機率分布函數為：

$$p[\mathbf{x}(\mathbf{k}) | Z^k] = \sum_{j=1}^r \mu_j(\mathbf{k}) N[\mathbf{x}(\mathbf{k}); \hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k}), P^j(\mathbf{k} | \mathbf{k})] \quad (69)$$

將每個狀態的機率合併就可以得到所估測的狀態及協方差：

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r \mu_j(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k}) \quad (70)$$

$$P(\mathbf{k} | \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r \mu_j(\mathbf{k}) \{P^j(\mathbf{k} | \mathbf{k}) + [\hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} | \mathbf{k})][\hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} | \mathbf{k})]^T\} \quad (71)$$

靜態多重模型估測之流程圖如下圖 10 所示

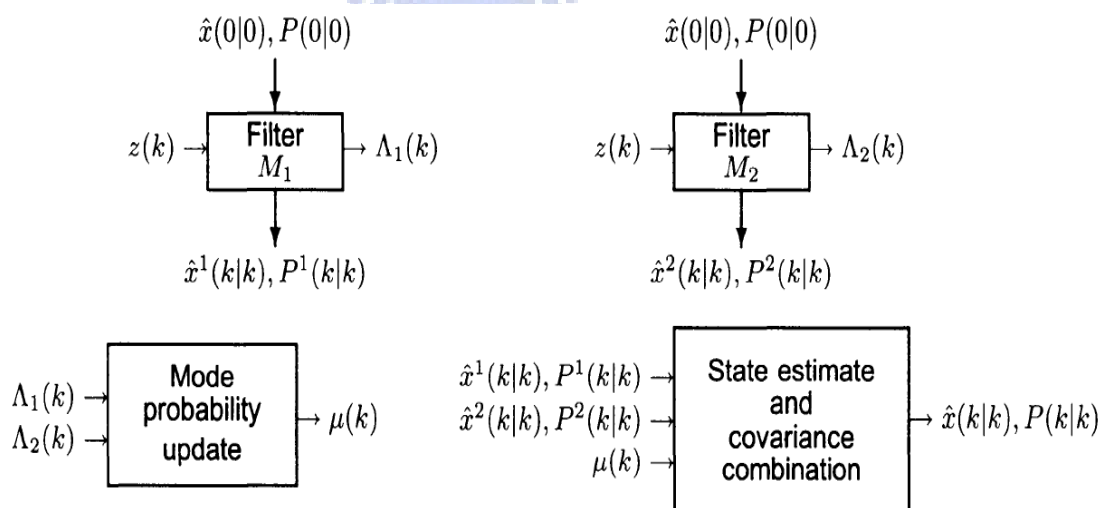


圖 10 靜態多重模型估測流程圖[7]

第二類：動態多重模型 (Dynamic Multiple Model)

而動態多重模型相較於靜態多重模型，則是在進行估測的時候多了模型切換的動作。定義動態多模型方程式：

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}[\mathbf{M}(k)]\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{v}[k-1, \mathbf{M}(k)] \quad (72)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H}[\mathbf{M}(k)]\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}[k, \mathbf{M}(k)] \quad (73)$$

其中 $\mathbf{F}[\mathbf{M}(k)]$ ， $\mathbf{H}[\mathbf{M}(k)]$ 為在 k 時間點的模型的系統轉移函數， $\mathbf{v}[k-1, \mathbf{M}(k)]$ ，

$\mathbf{w}[k, \mathbf{M}(k)]$ 為因為時間變動與不同模型下的處理雜訊和量測雜訊。

由於動態多重模型會切換模型，為了要套用靜態多重模型 (Static Multiple Model) 的公式，則記錄每一個 model 在時間上的切換順序 (l th mode history through time k)。將到時間 k 的第 l 個模型歷史紀錄表示為 $\mathbf{M}^{k,l} = \{\mathbf{M}_{i_{k,l}}, \dots, \mathbf{M}_{i_{1,l}}\}$ $l = 1, \dots, r^k$ ， $i_{k,l}$ 為第 l 個模型歷史紀錄在第 k 個時間點對應的模型索引，其值為 $1 \sim r$ 。定義模型間的切換事前機率：

$$\mathbf{P}\{\mathbf{M}_j(k) | \mathbf{M}^{k-1,s}\} = \mathbf{P}\{\mathbf{M}_j(k) | \mathbf{M}_i(k-1)\} = p_{ij} \quad (74)$$

其中 p_{ij} 為從 \mathbf{M}_i 切換到 \mathbf{M}_j 的機率。

接著就可以仿照靜態多重模型估測器 (Static Multiple Model Estimator) 的寫法，將給定 k 時間點之前之狀態估測 $\mathbf{x}(k)$ 的機率化為每一個模型歷史紀錄的機率乘上其對應的相似值 (Likelihood)：

$$\mathbf{p}\{\mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}^k\} = \sum_{l=1}^{r^k} \mathbf{p}\{\mathbf{x}(k) | \mathbf{M}^{k,l}, \mathbf{Z}^k\} \mathbf{p}\{\mathbf{M}^{k,l} | \mathbf{Z}^k\} \quad (75)$$

其中 $\mathbf{p}\{\mathbf{M}^{k,l} | \mathbf{Z}^k\}$ 為第 k 個時間點，系統在第 l 個模型歷史下的機率，仿照之前 Static Model 下即為 $\boldsymbol{\mu}^{k,l}$ ：

$$\begin{aligned}
\mu^{k,l} &= P\{M^{k,l} | Z^k\} \\
&= P\{M^{k,l} | z(k), Z^{k-1}\} \\
&= \frac{1}{c} p[z(k) | M^{k,l}, Z^{k-1}] P\{M^{k,l} | Z^{k-1}\} \\
&= \frac{1}{c} p[z(k) | M^{k,l}, Z^{k-1}] P\{M_j(k), M^{k-1,s} | Z^{k-1}\} \\
&= \frac{1}{c} p[z(k) | M^{k,l}, Z^{k-1}] P\{M_j(k) | M^{k-1,s}, Z^{k-1}\} \mu^{k-1,s} \\
&= \frac{1}{c} p[z(k) | M^{k,l}, Z^{k-1}] P\{M_j(k) | M^{k-1,s}\} \mu^{k-1,s} \\
&= \frac{1}{c} p[z(k) | M^{k,l}, Z^{k-1}] P\{M_j(k) | M_i(k-1)\} \mu^{k-1,s} \\
&= \frac{1}{c} p[z(k) | M^{k,l}, Z^{k-1}] p_{ij} \mu^{k-1,s}
\end{aligned} \tag{76}$$

其中 c 為正規化係數

將(76)代入(75)可得：

$$\begin{aligned}
p[x(k) | Z^k] &= \sum_{l=1}^{r^k} p[x(k) | M^{k,l}, Z^k] P\{M^{k,l} | Z^k\} \\
&= \sum_{l=1}^{r^k} p[x(k) | M^{k,l}, Z^k] \mu^{k,l}
\end{aligned} \tag{77}$$

由(77)可看動態模型的估測會因為模型的歷史數量不停的增加，造成濾波器數量無止境的增加，因此演算法需要改進，才能進行實際的應用。以下將介紹兩種近似估測法。

4.2.1 廣義偽貝氏法

廣義偽貝氏法(General Pseudo Bayesian)[7]主要是用來解決歷史資訊 Z^k 一直無限增長的問題，由(69)式即可看出。因此 GPB-1 在此使用前一個時刻所估測的狀態及協方差來近似取代歷史資訊：

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k) | Z^k] &= \sum_{j=1}^r p[\mathbf{x}(k) | M_j(k), Z^k] P\{M_j(k) | Z^k\} \\ &= \sum_{j=1}^r p[\mathbf{x}(k) | M_j(k), z(k), Z^{k-1}] \mu_j(k) \\ &\approx \sum_{j=1}^r p[\mathbf{x}(k) | M_j(k), z(k), \mathbf{x}(k-1 | k-1), P(k-1 | k-1)] \mu_j(k) \end{aligned} \quad (78)$$

而模型機率 μ_j 為：

$$\begin{aligned} \mu_j(k) &\triangleq P\{M_j(k) | Z^k\} = P\{M_j(k) | z(k), Z^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{c} p[z(k) | M_j(k), Z^{k-1}] P\{M_j(k) | Z^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^r P\{M_j(k) | M_i(k-1), Z^{k-1}\} P\{M_i(k-1) | Z^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^r p_{ij} \mu_i(k-1) \end{aligned} \quad (79)$$

其中 p_{ij} 為 M_i 切換到 M_j 的機率，只與前一刻的狀態有關。而 $c = \sum_{j=1}^r \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^r p_{ij} \mu_i(k-1)$ ，為正規化係數。最後將模型機率代回(70)式及(71)式即可得到新的估測狀態及協方差。(79)與靜態模型(68)最大的不同在於(79)須乘上模型間切換機率。

GPB-2 與 GPB-1 的原理相同，但訊號經過兩層的濾波器來進行估測。雖然計算出來的估測值會比 GPB-1 來準確。相對的，計算量也比 GPB-1 成長平方倍。(78)式將改寫為：

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k) | Z^k] &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r p[\mathbf{x}(k) | M_j(k), M_i(k-1), Z^k] P[M_i(k-1) | M_j(k), Z^k] P[M_j(k) | Z^k] \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r p[\mathbf{x}(k) | M_j(k), M_i(k-1), Z^k] \mu_{ij}(k-1 | k) \mu_j(k) \\ &\approx \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r p[\mathbf{x}(k) | M_j(k), M_i(k-1), \hat{\mathbf{x}}^i(k-1 | k-1), P^i(k-1 | k-1)] \mu_{ij}(k-1 | k) \mu_j(k) \end{aligned} \quad (80)$$

在每個時刻濾波器所得出的模型狀態估測為：

$$\hat{\mathbf{x}}^{ij}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) \triangleq \hat{\mathbf{x}}[\mathbf{k} | \mathbf{k}; \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}-1), \mathbf{P}^i(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}-1)] \quad (81)$$

$$\mathbf{P}^{ij}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) \triangleq \mathbf{P}[\mathbf{k} | \mathbf{k}; \mathbf{M}_i(\mathbf{k}), \mathbf{P}^i(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}-1)] \quad (82)$$

並可得到模型流整合機率 (Mode Sequence Merging Probability)：

$$\begin{aligned} \mu_{ij}(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}) &\triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}}\} \\ &= \mathbf{P}\{\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{z}(\mathbf{k}), \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}\} \\ &= \frac{1}{c_j} \mathbf{P}[\mathbf{z}(\mathbf{k}), \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}] \mathbf{P}\{\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}\} \\ &= \frac{1}{c_j} \mathbf{p}[\mathbf{z}(\mathbf{k}) | \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}] \mathbf{P}\{\mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}\} \mathbf{P}\{\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}\} \\ &= \frac{1}{c_j} \Lambda_{ij} \mathbf{p}_{ij} \mu_i(\mathbf{k}-1) \end{aligned} \quad (83)$$

其中 $c_j = \sum_{i=1}^r \Lambda_{ij}(\mathbf{k}) \mathbf{p}_{ij} \mu_i(\mathbf{k}-1)$ ， Λ_{ij} 代表在第 $\mathbf{k}-1$ 的時間點時為止的所有資訊 $\mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}$ 、經過第 $\mathbf{k}-1$ 個時間的第 i 個模型 $\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1)$ 及經過第 \mathbf{k} 個時間的第 j 個模型 $\mathbf{M}_j(\mathbf{k})$ 的條件下，第 \mathbf{k} 個時間點所得到的輸出資訊為 $\mathbf{z}(\mathbf{k})$ 的機率

將(81)式及(82)式透過模型流整合機率重新結合成新的模型狀態估測值：

$$\hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{x}}^{ij}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) \mu_{ij}(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}) \quad (84)$$

$$\mathbf{P}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^r \mu_{ij}(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}) \left\{ \mathbf{P}^{ij}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) + [\hat{\mathbf{x}}^{ij}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k})][\hat{\mathbf{x}}^{ij}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} | \mathbf{k})]^T \right\} \quad (85)$$

接下來就如同 GPB-1 的手法計算出新的模型機率：

$$\begin{aligned} \mu_j(\mathbf{k}) &\triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{z}(\mathbf{k}), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}\} \\ &= \frac{1}{c} \mathbf{P}[\mathbf{z}(\mathbf{k}), \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^r \mathbf{P} \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}), \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) \mid \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{k-1} \right] \mathbf{P} \left\{ \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) \mid \mathbf{Z}^{k-1} \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^r \mathbf{p} \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{k-1} \right] \mathbf{P} \left\{ \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) \mid \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{k-1} \right\} \boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{k}-1) \\
&= \frac{1}{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^r \Lambda_{ij} \mathbf{p}_{ij} \boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{k}-1) = \frac{\mathbf{c}_j}{\mathbf{c}}
\end{aligned} \tag{86}$$

其中 $\mathbf{c}_j = \sum_{i=1}^r \Lambda_{ij}(\mathbf{k}) \mathbf{p}_{ij} \boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{k}-1)$, $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j$

GPB-2 的(86)式與 GPB-1 的(79)式最大的不同在於(86)式須乘上模型間切換相似值。

最後即可得出新的狀態(State)和協方差(Covariance)

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r \hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) \boldsymbol{\mu}_j(\mathbf{k}) \tag{87}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r \boldsymbol{\mu}_j(\mathbf{k}) \left\{ \mathbf{P}^j(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) + \left[\hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) \right] \left[\hat{\mathbf{x}}^j(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{k} \mid \mathbf{k}) \right]^T \right\} \tag{88}$$

GPB-2 演算法的完整流程圖如圖 11 所示。

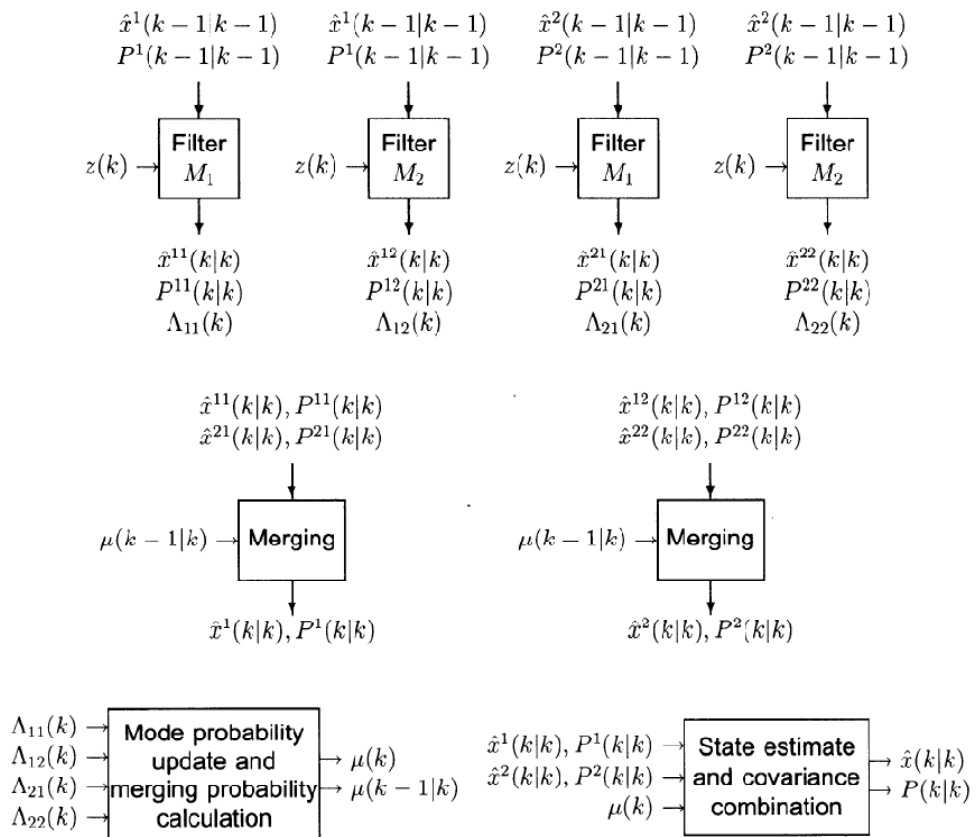


圖 11 GPB-2 流程圖[7]

4.2.2 交互多模型法

Blom 及 Bar-shalom 於 1988 年提出交互多模型法(Interacting Multiple Model, 簡稱 IMM)[8], 此演算法的估測性能與 GPB-2 演算法十分接近, 但運算複雜度卻小許多, 因此在工程應用上廣受歡迎。Blom 及 Bar-shalom 在論文中[8]針對 GPB-1、GPB-2 及 IMM 的估測性能比較圖如圖 12 所示, 縱軸為 RMS 誤差。

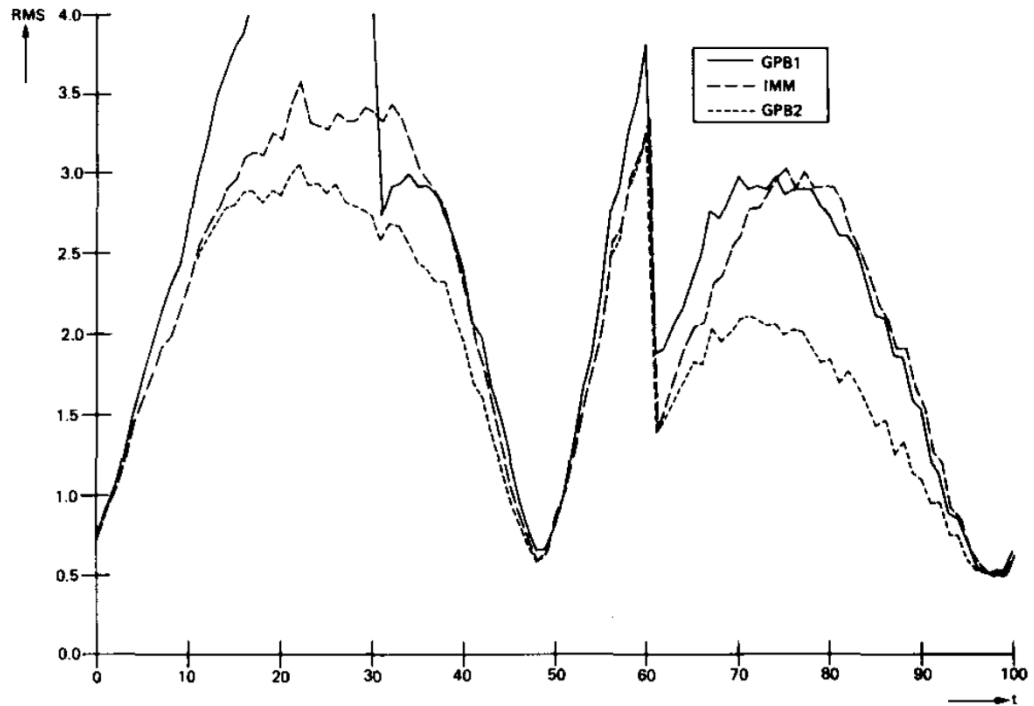


圖 12 GPB-1、GPB-2 及 IMM 的估測性能比較圖[8]

IMM 演算法主要分為四個步驟：

1. 計算混和機率(Caululation of mixing probability)

$$\begin{aligned}
 \mu_{ij}(\mathbf{k}-1 | \mathbf{k}-1) &\triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \mathbf{Z}^{k-1}\} \\
 &= \frac{1}{\bar{c}_j} \mathbf{P}[\mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{k-1}] \mathbf{P}\{\mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{Z}^{k-1}\} \\
 &= \frac{1}{\bar{c}_j} p_{ij} u_i(\mathbf{k}-1)
 \end{aligned} \tag{89}$$

其中 $\bar{c}_j = \sum_{i=1}^r p_{ij} \mu_i(\mathbf{k}-1)$ 。比較(89)式與(83)式可發現, (89)式是以 \mathbf{Z}^{k-1} 的條件下來計算模型混和機率, 而不是以 \mathbf{Z}^k , 因此不需要先經過濾波器即可求出混和機率。

2. 混合估測值(Mixing estimation)

透過上一步所計算出的模型混合機率可以得出混和初始化(mixed initial condition)的狀態及協方差：

$$\hat{\mathbf{x}}^{0j}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) = \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) \mu_{ij}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{0j}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) &= \sum_{i=1}^r \mu_{ij}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) \{ \mathbf{P}^{ij}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) + [\hat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) - \hat{\mathbf{x}}^{0j}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1)] \\ &\quad \cdot [\hat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1) - \hat{\mathbf{x}}^{0j}(\mathbf{k}-1|\mathbf{k}-1)]^T \} \end{aligned} \quad (91)$$

3. 模型條件濾波(Mode-matched filtering)

將(90)、(91)式所得到的混和初始化狀態及協方差，配合時刻 k 所得的量測資訊代入各模型濾波器，進行每個模型的狀態及協方差更新，並計算每個模型的相似值(likelihood)。

4. 模型機率更新(Mode probability update)

最後透過上一步所得到的相似值(likelihood)更新模型機率：

$$\begin{aligned} \mu_j(\mathbf{k}) &\triangleq \mathbf{P} \{ \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1} \} \\ &= \frac{1}{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^r \mathbf{P} [\mathbf{z}(\mathbf{k}) | \mathbf{M}_j(\mathbf{k}), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1}] \mathbf{P} \{ \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1} \} \\ &= \frac{1}{\mathbf{c}} \Lambda_j \sum_{i=1}^r \mathbf{P} \{ \mathbf{M}_j(\mathbf{k}) | \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1), \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1} \} \mathbf{P} \{ \mathbf{M}_i(\mathbf{k}-1) | \mathbf{Z}^{\mathbf{k}-1} \} \\ &= \frac{1}{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^r \Lambda_j \mathbf{P}_{ij} \mu_i(\mathbf{k}-1) \\ &= \frac{1}{\mathbf{c}} \Lambda_j(\mathbf{k}) \bar{\mathbf{c}}_j \end{aligned} \quad (92)$$

其中 $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^r \Lambda_j \bar{\mathbf{c}}_j$ 。IMM 演算法的完整流程圖如圖 13 所示。

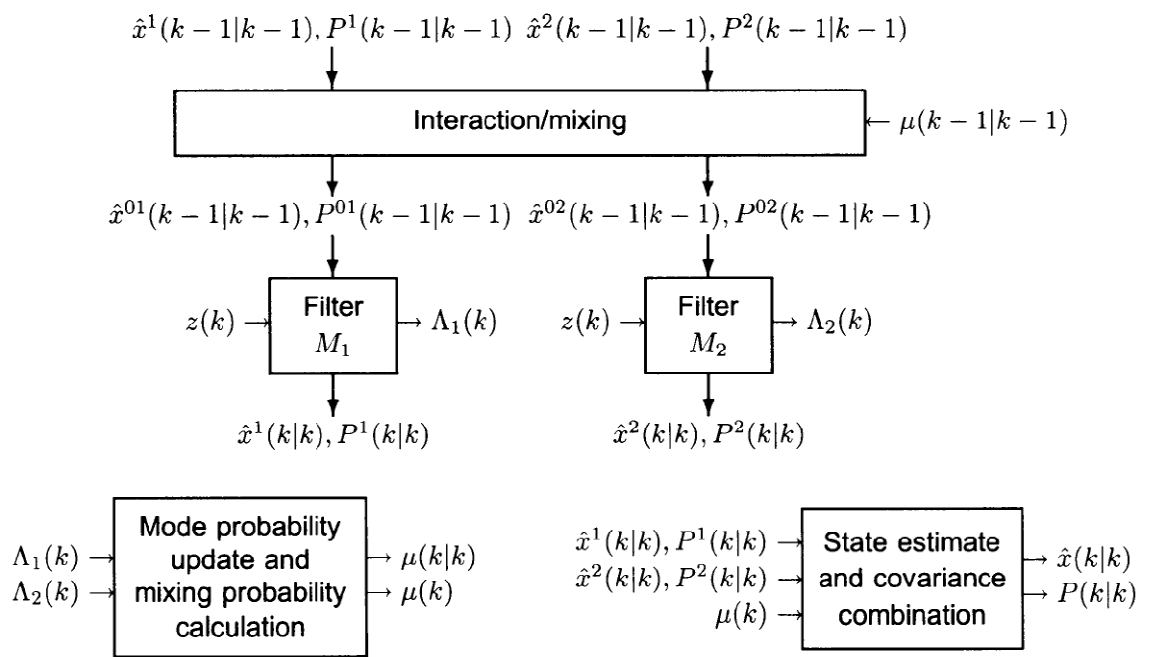


圖 13 IMM 流程圖[7]



4.3 階層式錯誤偵測與判別系統

在本論文的系統中，將錯誤診斷分為兩部份，分別為錯誤偵測與錯誤判別。錯誤偵測的功能在於判斷系統是否有錯誤發生，是錯誤診斷的第一步。當錯誤偵測系統判斷出有錯誤發生時，就會啟動第二步的錯誤判別系統，來判斷是系統的哪一部分發生錯誤。在此所針對的錯誤為二軸機械手臂致動器的錯誤，通常為卡住以及甩動。所謂卡住，就是指不管控制器送出多大的命令力矩給指定軸的致動器(馬達)，該軸的致動器仍維持固定的角度；而甩動是指不管控制器送出多大的命令力矩給指定軸的致動器(馬達)，該軸致動器的輸出力矩仍為零。在本論文的實驗平台軸上，由於減速機構摩擦力過大，導致即使輸出扭力為零，手臂仍然無法自由甩動，呈現靜止狀態，與卡住的情形很類似，很難從角度量測器的資訊判斷目前為卡住或是甩動，因此本論文僅判別致動器有無錯誤發生。以下將會介紹這兩種錯誤診斷系統所使用的錯誤模型以及完整的階層式錯誤偵測與判斷系統。

在錯誤偵測系統裡，使用兩種模型來做為系統正常及錯誤的模型，分別為動力學模型以及運動學模型。根據第三章的(9)式，可以將動力學方程式作離散化得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(k+1) \\ \dot{\mathbf{q}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \dot{\mathbf{q}}(k) \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(k) \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}(k))[\boldsymbol{\tau}_k - \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}(k), \dot{\mathbf{q}}(k))\dot{\mathbf{q}}(k) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}(k)) - \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}(k)) - \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}}(k)] \end{bmatrix} \quad (93)$$

接著為運動學模型(Kinematic Model)，此模型乃根據牛頓力學推導而成：

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(k+1) &= \mathbf{q}(k) + h \times \dot{\mathbf{q}}(k) + \mathbf{w}_1(k) \\ \dot{\mathbf{q}}(k+1) &= \frac{\mathbf{q}(k+1) - \mathbf{q}(k)}{h} + \mathbf{w}_2(k) \\ &= \frac{\mathbf{q}(k) + h \times \dot{\mathbf{q}}(k) + \mathbf{w}_1(k) - \mathbf{q}(k)}{h} + \mathbf{w}_2(k) \\ &= \dot{\mathbf{q}}(k) + \frac{1}{h} \mathbf{w}_1(k) + \mathbf{w}_2(k) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(k+1) \\ \dot{\mathbf{q}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & h\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \dot{\mathbf{q}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 1/h\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(k) \\ \mathbf{w}_2(k) \end{bmatrix} \quad (94)$$

其中 h 為取樣時間， $\mathbf{q}(k)$ 、 $\dot{\mathbf{q}}(k)$ 、 $\boldsymbol{\tau}_k$ 、 $\mathbf{w}_1(k)$ 、 $\mathbf{w}_2(k)$ 為角度、角速度、扭力及量測雜訊的第 k 個取樣值。從(93)可以看出，動力學模型將機械手臂的慣量、質量、

摩擦力等因素納入考慮，因此當系統正常運作時，動力學模型會比運動學模型來得準確；而運動學模型只考慮角度及角速度的資訊，不受致動器錯誤影響，故只要角度量測器不發生故障，運動學模型會永遠正確的呈現系統目前的狀態。然而，透過參數估測得到的動力學模型參數通常會有誤差，因此需將運動學模型的處理雜訊協方差矩陣 \mathbf{Q} 調大，以確保動力學模型所估測出來的狀態在系統正常運作的情形下，皆能比運動學模型來得準確。再者，以此兩種模型來進行錯誤偵測，即使機械手臂擴展到 n 軸，一樣只需使用這兩種模型來進行錯誤偵測，可以大幅降低計算量。其中運動學模型為線性方程式，故在錯誤偵測演算法中，可以使用卡曼濾波器來做估測來降低系統的運算量，不需使用 UKF 來做估測。

而錯誤判別系統，便是以錯誤偵測的原理做為基礎推廣而成。在上一段提到，當系統正確時，動力學模型會勝出；當錯誤發生時，則運動學模型會勝出。根據此原理，假設發生「大軸正常運作，小軸發生錯誤」，可以從(93)及(94)式得出此種錯誤模式的數學模型為：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(\mathbf{k}+1) \\ \mathbf{q}_2(\mathbf{k}+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(\mathbf{k}) \\ \mathbf{q}_2(\mathbf{k}) \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1(\mathbf{k}) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(\mathbf{k}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1(\mathbf{k}+1) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(\mathbf{k}+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1(\mathbf{k}) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(\mathbf{k}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \times \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}(\mathbf{k}))[\tau_k - \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}(\mathbf{k}), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{k}))\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}(\mathbf{k})) - \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{k})) - \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{k})] \\ 1/h\mathbf{I} \times w_{121}(k) + w_{221}(k) \end{bmatrix} \quad (95)$$

考慮本實驗平台為二軸機械手臂，在此定義上臂第一軸為大軸，下臂第二軸為小軸，並依照(95)整理出四種錯誤模型：

- 模型1. 大軸正常運作，小軸正常運作
- 模型2. 大軸正常運作，小軸發生錯誤
- 模型3. 大軸發生錯誤，小軸正常運作
- 模型4. 大軸發生錯誤，小軸發生錯誤

根據 GPB-2 演算法，若有四種系統描述模型，則需要同時運算 $16(4^2)$ 個濾波器，而 IMM 演算法也需要運算 4 個濾波器，這對即時作業系統是很大的負擔，在實作上也有困難。基於系統效能及估測準確度的衡量下，在此使用階層式的方法來達成錯

誤診斷系統。即在系統正常運作的情況下，僅運行錯誤偵測系統，也就是運行「模型 1」及「模型 4」的機率比較；當錯誤偵測系統判斷有錯誤發生時，代表「模型 1」的存在機率已經趨近於零，此時只需要運行「模型 2」、「模型 3」及「模型 4」來判斷是哪一軸發生了卡住的情形。使用此階層式的架構，不僅可以降低當系統正常運作時的運算負荷量，當系統發生錯誤時，GPB-2 只需同時運行 $9(3^2)$ 個濾波器，運算量降低了 43%；IMM 也只需要同時運行 3 個，運算量降低了 25%，對於在即時作業系統的實現上，有相當大的幫助。完整的階層式錯誤偵測與診斷流程圖如圖 14 所示。

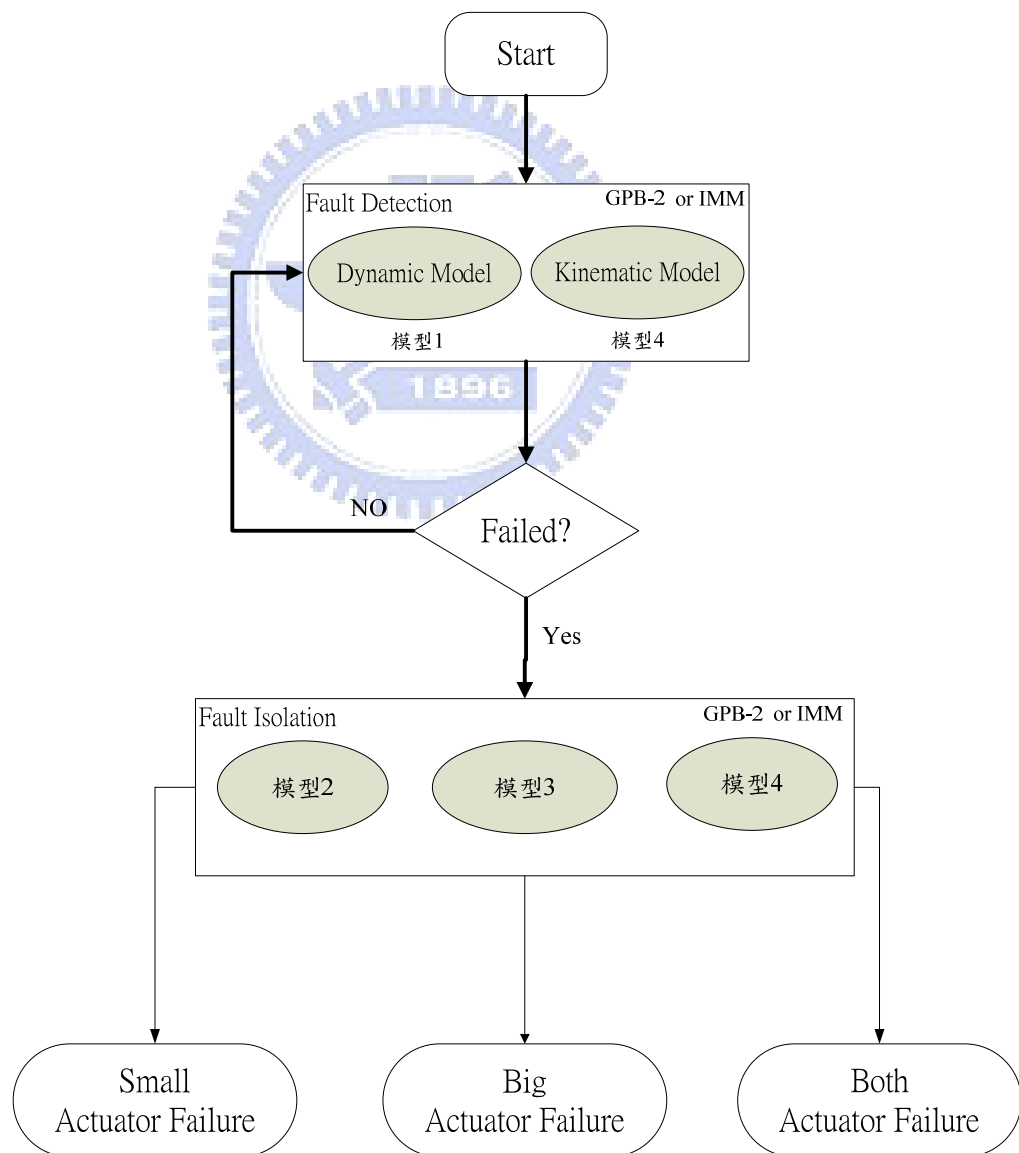


圖 14 階層式錯誤偵測與診斷系統流程圖

第五章 實驗結果與討論

本章將會呈現控制器與錯誤診斷系統的實驗結果。第一節介紹本實驗的測試平台、系統模型參數以及硬體方塊圖。第二節會先就 UKF 的速度估測效果與差分做比較，並將此兩項結果套入計算力矩控制器，觀察使用 UKF 做速度估測的控制效果是否確實比透過差分所得的速度項代入效果好。此外，本論文所提出的僅需位置回授之新型控制器也會進行不同軌跡的測試，與上述的兩種控制器作比較分析。控制器的強健性測試也會一併呈現，測試方法為小軸端加重負載。接著兩節會進行一連串的錯誤測試，錯誤的種類包含：「大軸發生錯誤，小軸正常」、「大軸正常，小軸發生錯誤」、「大軸及小軸同時發生錯誤」、「大軸先發生錯誤，小軸隨後錯誤」以及「致動器的驅動功率突然衰減或漸進指數衰減」等，來驗證本論文所設計的錯誤診斷系統是否都能夠正確的判斷出結果。

5.1 機械手臂硬體實驗平台

本論文建構的實驗平台為一平面機械手臂，硬體的實際情形如圖 15 所示。

手臂硬體部分：

兩軸上裝有含減速機構的直流馬達以及角度量測編碼器。兩臂的長度皆為 0.26 公尺，上臂大軸重 3.885 公斤，下臂小軸重 0.867 公斤。編碼器所採用的是每轉一圈(360°)能產生 2000 個脈波數目的 AB 相電壓型編碼器，此編碼器所送出的訊號能透過 DSP 的週邊電路 QEP (Quadrature-Encoder Pulse)解碼，獲得目前各軸的角度與旋轉方向。

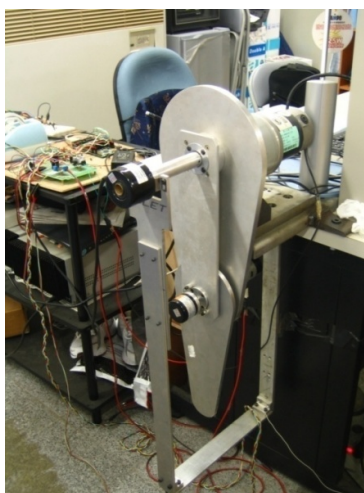


圖 15 二軸平面機械手臂

本實驗所採用的數位訊號處理器(DSP)為德州儀器(TI)所開發的 TMS320F28335，此晶片與在馬達控制中所常用的 DSP 晶片 TMS320F2812 大致相同，皆有 150MHz 的核心時脈及 PWM、QEP 等常用的周邊功能，較不一樣的地方在 F28335 擁有比 F2812 大兩倍的 Flash Memory 及 SRAM，並有 32bit 的浮點運算處理單元。使用 UKF 的 Code 分別放進 F28335 及 F2812 進行測試，發現兩者的 Clock Cycle 差了將近 20 倍。對於本實驗所需要大量記憶體及處理速度的錯誤診斷系統，有相當大的幫助。本實驗平台的系統方塊圖及硬體參數表如圖 16 及表 1、表 2 所示。

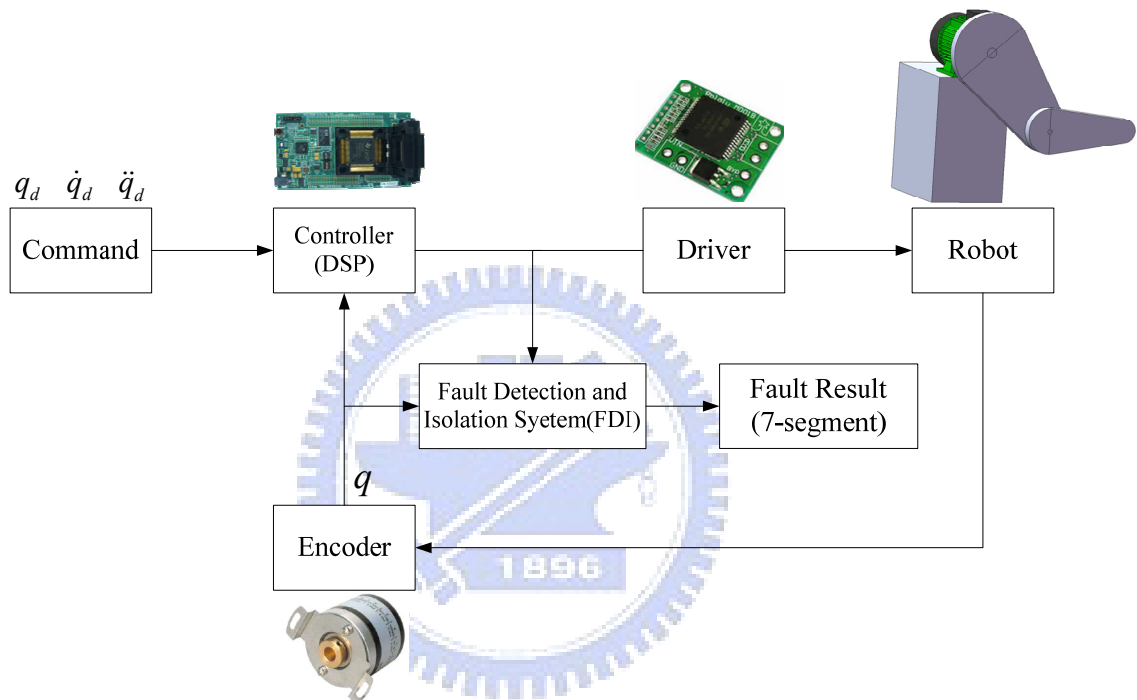


圖 16 二軸機械臂實驗平台硬體方塊圖

種類	數值	單位
上臂大軸的長度	0.26	m
下臂小軸的長度	0.26	m
上臂大軸的質量	3.885	kg
下臂小軸的質量	0.867	kg

表 1 機械手臂硬體參數

	工作電壓(Volts)	齒輪比	轉速 (rpm)	扭力 (N-m)
第一軸	24	1:50	50	25
第二軸	24	1:104	60	1.96

表 2 馬達及減速機構參數

有了硬體平台的參數及第三章介紹的完整動力學模型後，便可以利用線性最小平方參數估測法來做模型的參數估測。將(9)式改寫成線性參數化的形式：

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\Theta = \tau \quad (96)$$

其中 Θ 為欲求之為知參數，由(9)式中整理出 11 組未知參數：

$$\Theta_1 = [(I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \frac{1}{r_1^2} + J_m] \frac{1}{K_1}$$

$$\Theta_2 = (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \frac{1}{K_1}$$

$$\Theta_3 = l_{c2} \frac{1}{K_1}$$

$$\Theta_4 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \frac{1}{r_1^2} \frac{1}{K_1}$$

$$\Theta_5 = (f_1 + b_1 \frac{1}{r_1^2}) \frac{1}{K_1}$$

$$\Theta_6 = f_{c1} \frac{1}{r_1^2} \frac{1}{K_1}$$

$$\Theta_7 = (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \frac{1}{K_2}$$

$$\Theta_8 = l_{c2} \frac{1}{K_2}$$

$$\Theta_9 = J_{m_2} \frac{1}{K_2}$$

$$\Theta_{10} = (f_2 + b_2 \frac{1}{r_2^2}) \frac{1}{K_2}$$

$$\Theta_{11} = f_{c2} \frac{1}{r_2^2} \frac{1}{K_2}$$

接著使用最小平方法的公式及可求得估測值：

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{X} \quad (97)$$

$$\text{其中 } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{q}_m(1), \dot{\mathbf{q}}_m(1), \ddot{\mathbf{q}}_m(1)) \\ \vdots \\ \Phi(\mathbf{q}_m(N), \dot{\mathbf{q}}_m(N), \ddot{\mathbf{q}}_m(N)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tau_m(1) \\ \vdots \\ \tau_m(N) \end{bmatrix}, \text{ 下標 } m \text{ 表示其為量測值,}$$

大寫 N 表示其為第 N 筆的實驗資料， $\hat{\Theta}$ 是估測到的參數。從(96)式可知， $\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ 中

包含實驗中所量不到之加速度訊號，因此令一組濾波器 $H(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}$ ，其脈衝響應為

$\mathbf{h}(t) = \alpha e^{-(\beta t)}$ ，帶入(9)式中做卷積(Convolution)可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= \mathbf{h}(t) * \mathbf{v}(t) = \mathbf{h}(t) * [\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}(t)) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}(t)) + \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}}] \\ &= \mathbf{h}(t) * \left[\frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t)) - \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) \right] + \mathbf{h}(t) * [\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}(t)) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}(t)) + \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}}] \quad (98) \\ &= \mathbf{h}(t) * \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{h}(t) * [\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}(t)) + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\mathbf{q}}(t)) + \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t)] \end{aligned}$$

令 $\bar{M}(q)\dot{q}$ 為 $u(t)$ ，對其做拉式轉換：

$$h(t) * \dot{u}(t) \xrightarrow{L} H(s)(sU(s) - u(0)) = [sH(s) - h(0)]U(s) + h(0)U(s) - H(s)u(0) \quad (99)$$

再將上式做反拉式並代回(98)，即可消除加速度項

$$\begin{aligned} v_f &= h(t) * \frac{d}{dt} (\bar{M}(q(t))\dot{q}(t)) + h(t) * [\bar{C}(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + \bar{G}(q(t)) + \bar{F}(\dot{q}(t)) + \bar{B}\dot{q} - \dot{\bar{M}}(q(t))\dot{q}(t)] \\ &= \dot{h}(t) * (\bar{M}(q(t))\dot{q}(t)) + h(0) \times \bar{M}(q(t))\dot{q}(t) - h(t) \times \bar{M}(q(0))\dot{q}(0) \\ &\quad + h(t) * [\bar{C}(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + \bar{G}(q(t)) + \bar{F}(\dot{q}(t)) + \bar{B}\dot{q} - \dot{\bar{M}}(q(t))\dot{q}(t)] \\ &\equiv \Phi_f(q(t), \dot{q}(t))\Theta \end{aligned} \quad (100)$$

將上式的結果套入(99)式中即可得到參數估測的結果。在這裡所給定的電壓 τ 為亂數方波，主要的目的是因其週期呈現亂數的分佈，使得這個輸入訊號包含多種的頻率，能夠提供充分的資訊，亦可避免馬達因電壓的不足，使馬達落入死區(Dead-Zone)導致無法運轉。估測的結果如下表 4 所示：

參數	m	l	J	I	K	f	b	r
單位	kg	m	kg - m ²	kg - m ²	N - m / A	N - m	N - m	齒輪數 / 圈

表 3 參數單位對應表

參數代號	物理意義	參數估測值
Θ_1	$[(I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \frac{1}{r_1^2} + J_{m_1}] \frac{1}{K_1}$	0.333857649
Θ_2	$(I_2 + m_2 l_{c2}^2) \frac{1}{K_1}$	12.04300443
Θ_3	$l_{c2} \frac{1}{K_1}$	60.257776
Θ_4	$(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \frac{1}{r_1^2} \frac{1}{K_1}$	2.14498442
Θ_5	$(f_1 + b_1 \frac{1}{r_1^2}) \frac{1}{K_1}$	2.821907993
Θ_6	$f_{c1} \frac{1}{r_1^2} \frac{1}{K_1}$	1.5177074
Θ_7	$(I_2 + m_2 l_{c2}^2) \frac{1}{K_2}$	259.4561

Θ_8	$l_{c2} \frac{1}{K_2}$	1341.7
Θ_9	$J_{m2} \frac{1}{K_2}$	0.1652
Θ_{10}	$(f_2 + b_2 \frac{1}{r_2^2}) \frac{1}{K_2}$	1.2211
Θ_{11}	$f_{c2} \frac{1}{r_2^2} \frac{1}{K_2}$	1.62822

表 4 模型參數表



5.2 控制器實驗結果

這一節將針對計算力矩控制器及僅需速度回授的新型控制器作性能比較。實驗時間為 20 秒，取樣時間為 0.01 秒，分別測試兩種軌跡，軌跡 1 為一個具短暫暫態的單頻弦波，軌跡 2 為一個較軌跡 1 不規則的多頻弦波，比較這兩個在不同控制器下的效果：

$$\begin{aligned} \text{軌跡 1 : } \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{2d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2.0t^3}) + \frac{\pi}{9}(1 - e^{-2.0t^3}) \sin(\omega_1 t) \\ \frac{\pi}{3}(1 - e^{-2.0t^3}) + \frac{\pi}{6}(1 - e^{-2.0t^3}) \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix} \\ \text{軌跡 2 : } \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{2d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2.0t^3}) + \frac{\pi}{9}(1 - e^{-2.0t^3}) \sin(\omega_1 t) + \frac{\pi}{25}(1 - e^{-2.0t^3}) \sin(2\omega_2 t) \\ \frac{\pi}{3}(1 - e^{-2.0t^3}) + \frac{\pi}{6}(1 - e^{-2.0t^3}) \sin(\omega_2 t) + \frac{\pi}{25}(1 - e^{-2.0t^3}) \sin(\omega_1 t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2.1 UKF 估測器效果測試

在做計算力矩的控制器實驗之前，先對 UKF 的角速度估測效果進行測試，並將其估測出來的角速度資訊與差分速度進行比較。

軌跡 1 的實驗結果如圖 17 及圖 18 所示。由這兩張圖可以看出，透過差分的方式所得到的角速度跳動的幅度較大，因此若將控制增益調高，會發生致動器飽和的現象，而 UKF 所估測出來的角速度較沒有跳動的問題。在軌跡 2 的實驗中，大軸的角速度軌跡在接近定速的時候，差分所得到的角速度跳動的情形更加明顯，如圖 19 所示。

這兩個軌跡實驗都顯示出，UKF 在大軸的角速度估測上，對於每一個時刻的輸入電壓及量測角度的資訊所估測出的角速度狀態與命令角速度軌跡誤差較小，小軸的角速度估測誤差與差分角速度較接近，推斷原因可能在大軸的模型參數估測較為準確，使得 UKF 的估測準確度較高。在下一節會將這兩種角速度資訊代進計算力矩控制器的速度回授中進行測試，比較不同的回授資訊所得出的控制效果之好壞。

軌跡 1 :

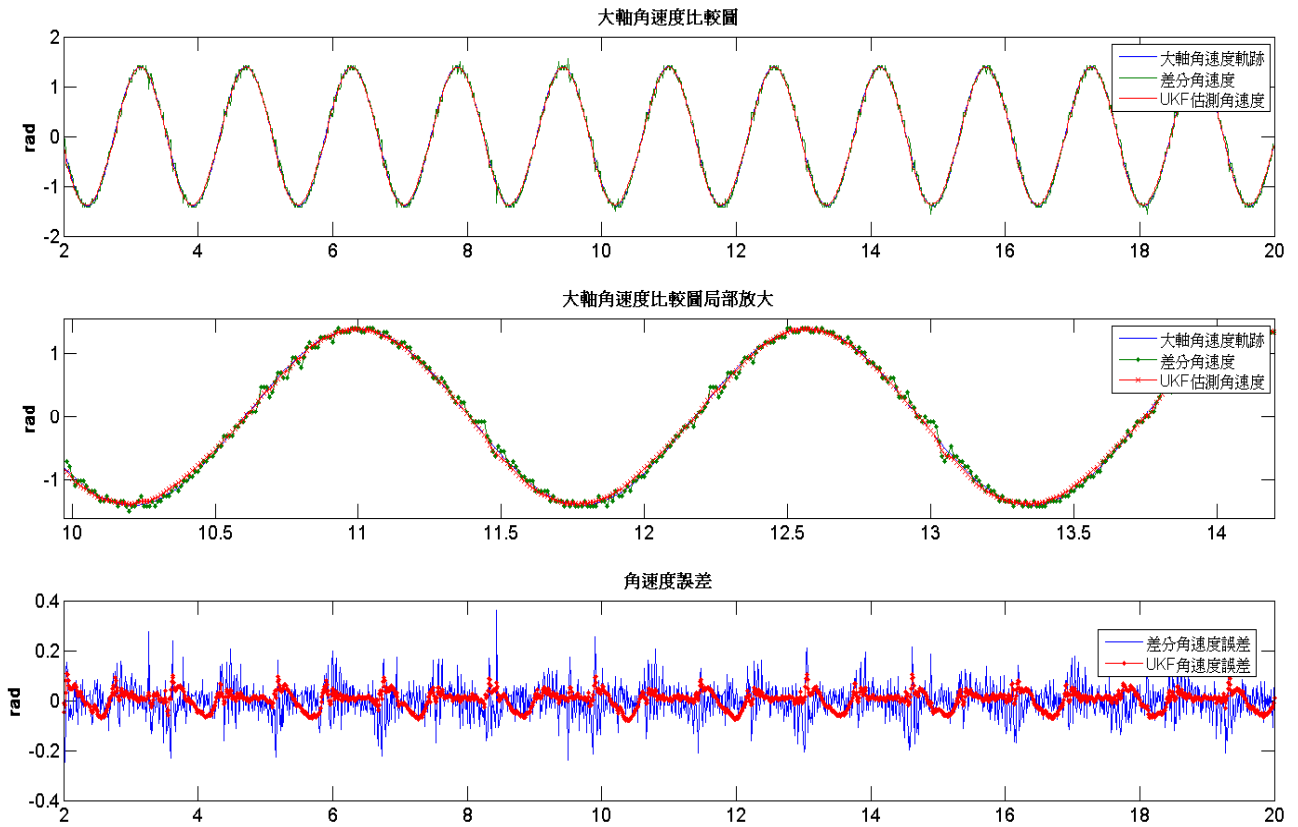


圖 17 大軸角速度比較圖(軌跡 1)

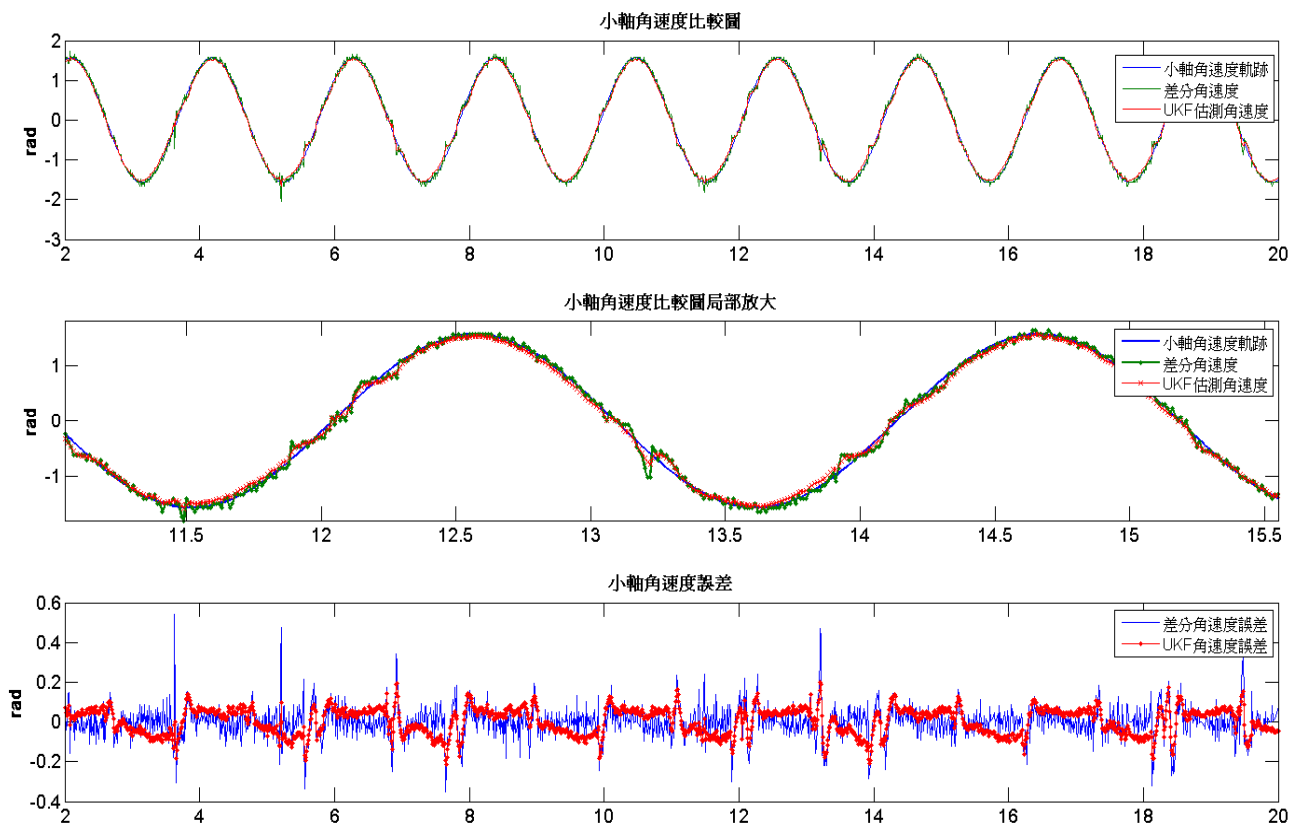


圖 18 小軸角速度比較圖(軌跡 1)

軌跡 2 :

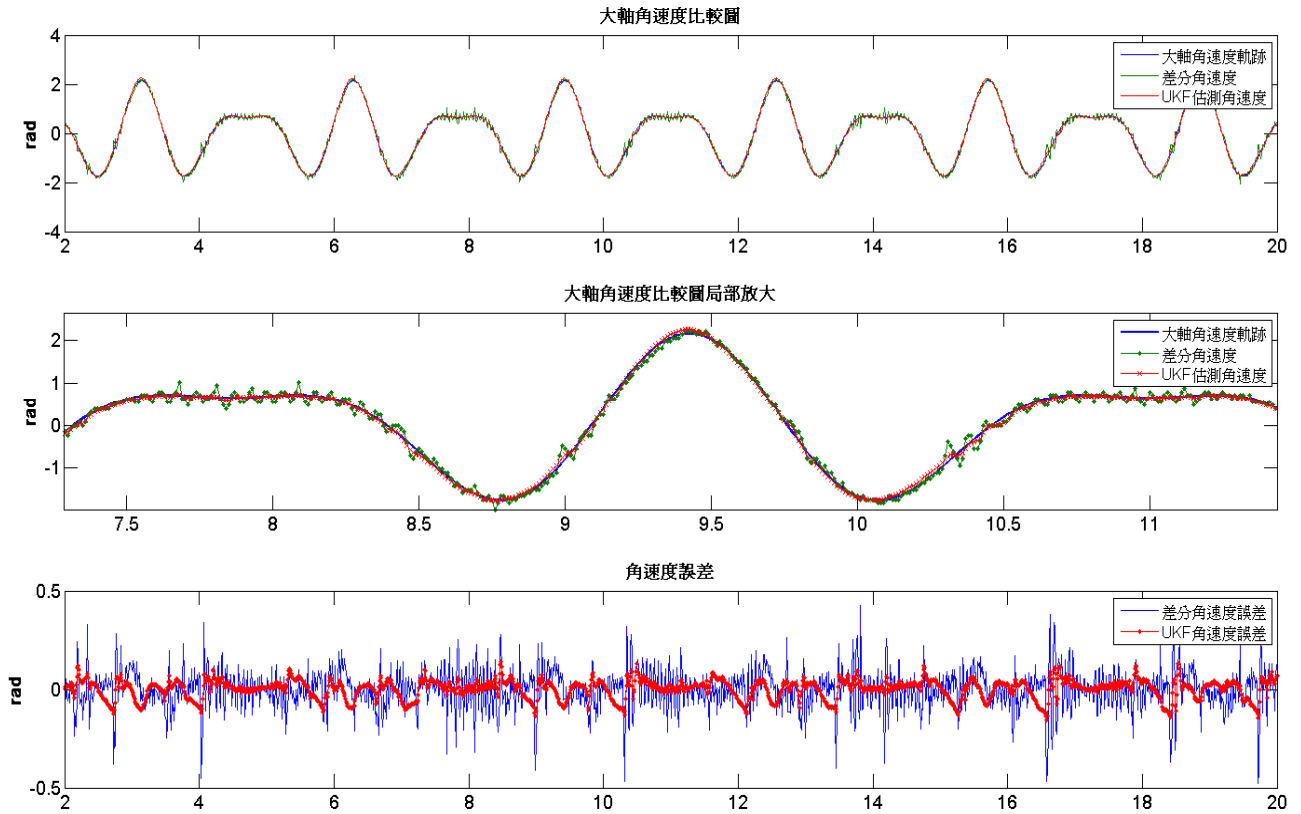


圖 19 大軸角速度比較圖(軌跡 2)

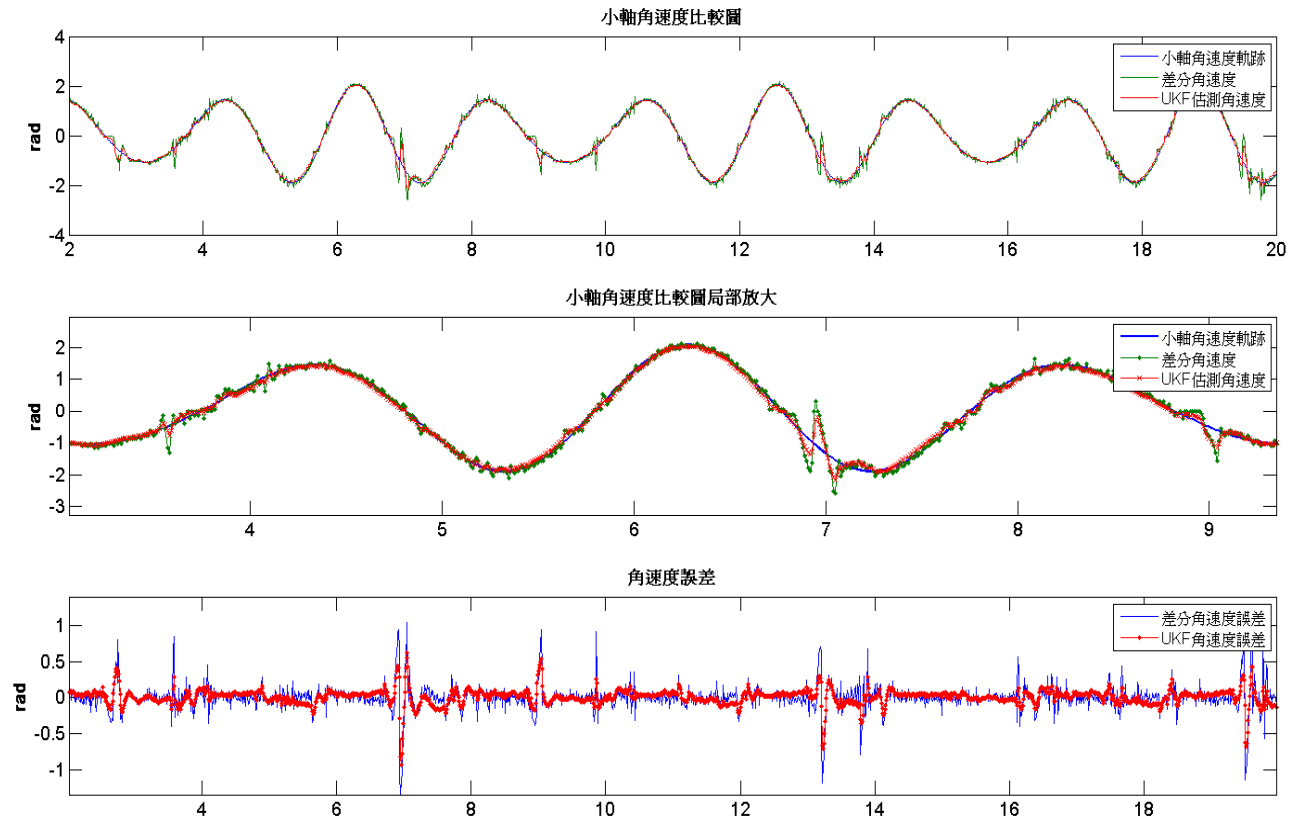


圖 20 小軸角速度比較圖(軌跡 2)

5.2.2 計算力矩控制器實驗結果

計算力矩控制器的實驗結果將分為兩部分來比較，第一部分為使用差分角速度帶回控制器中進行控制，第二部分為使用 UKF 所估測出來的角速度帶回控制器中進行控制。

由下面的實驗結果可以看出，使用 UKF 所估測的角速度代入所計算出來的電壓較平滑，差分的角速度所計算出來的電壓比較多毛邊，此毛邊便是差分速度項所反應出來的結果。此外，在上一節的結果得知 UKF 在大軸的角速度估測較準確，因此試著將大軸之控制增益調高，期待能夠降低誤差。從軌跡 1 的圖 25，以及軌跡 2 的圖 32 可以看出，UKF 的控制結果都略優於差分的結果。圖 28 可以明顯看到當使用差分速度項回授時，增益過高會使系統震盪造成誤差增大。

軌跡 1(差分角速度)，控制增益 $K_{V1} = 20$ $K_{P1} = 800$ $K_{I1} = 1.411$
 $K_{V2} = 15$ $K_{P2} = 600$ $K_{I2} = 0.3$

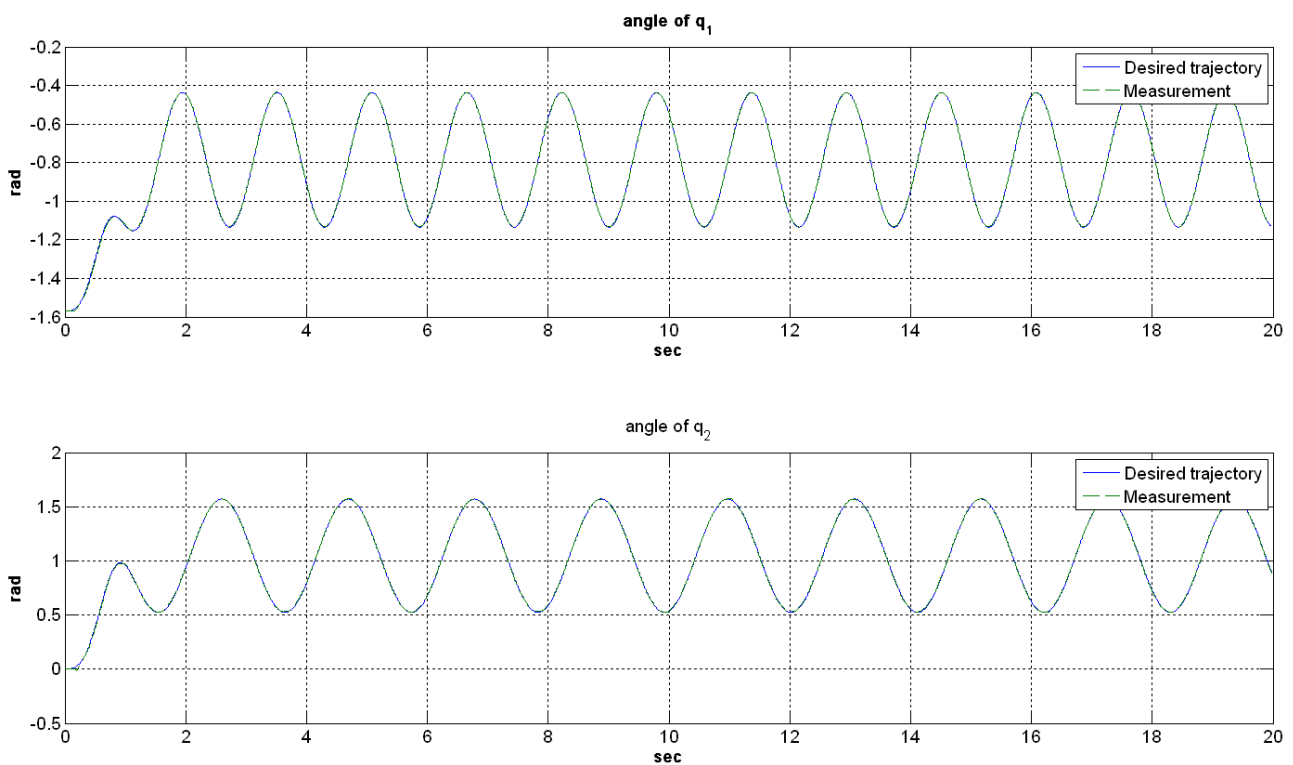


圖 21 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 1 差分)

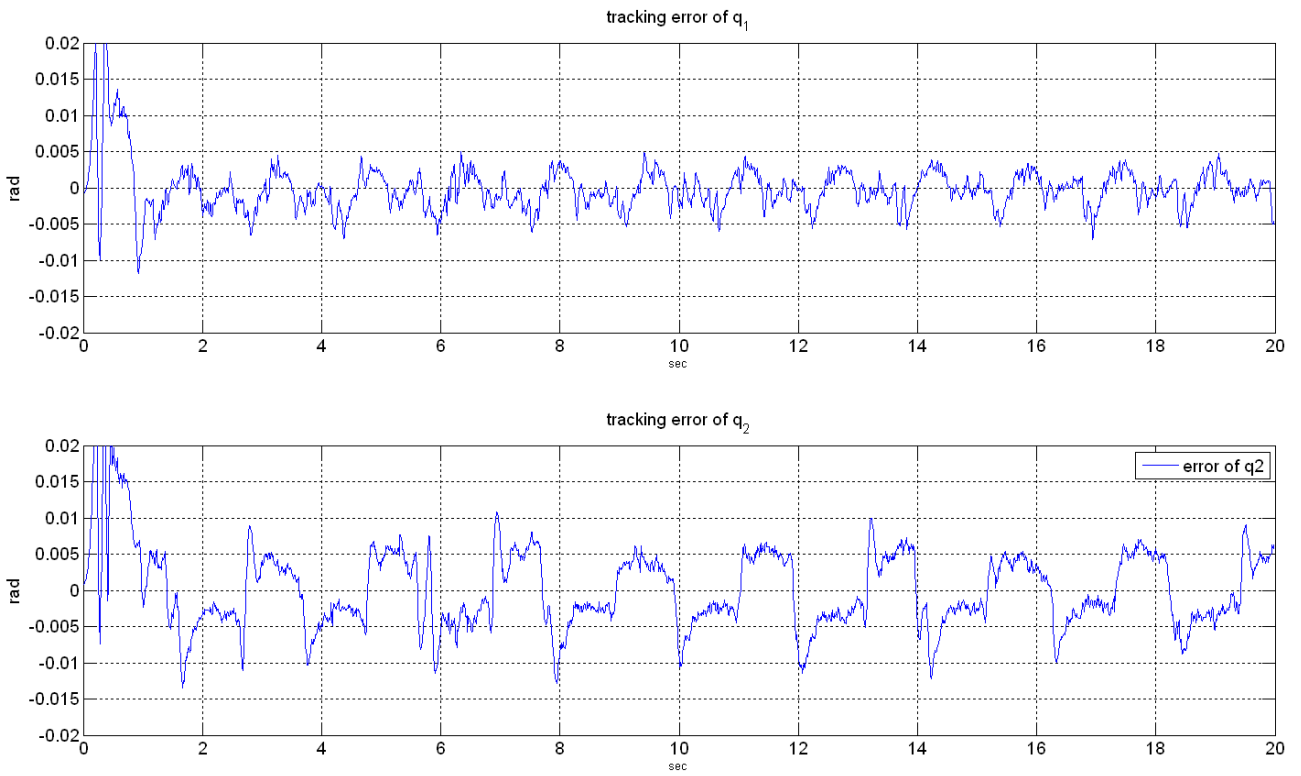


圖 22 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 1 差分)

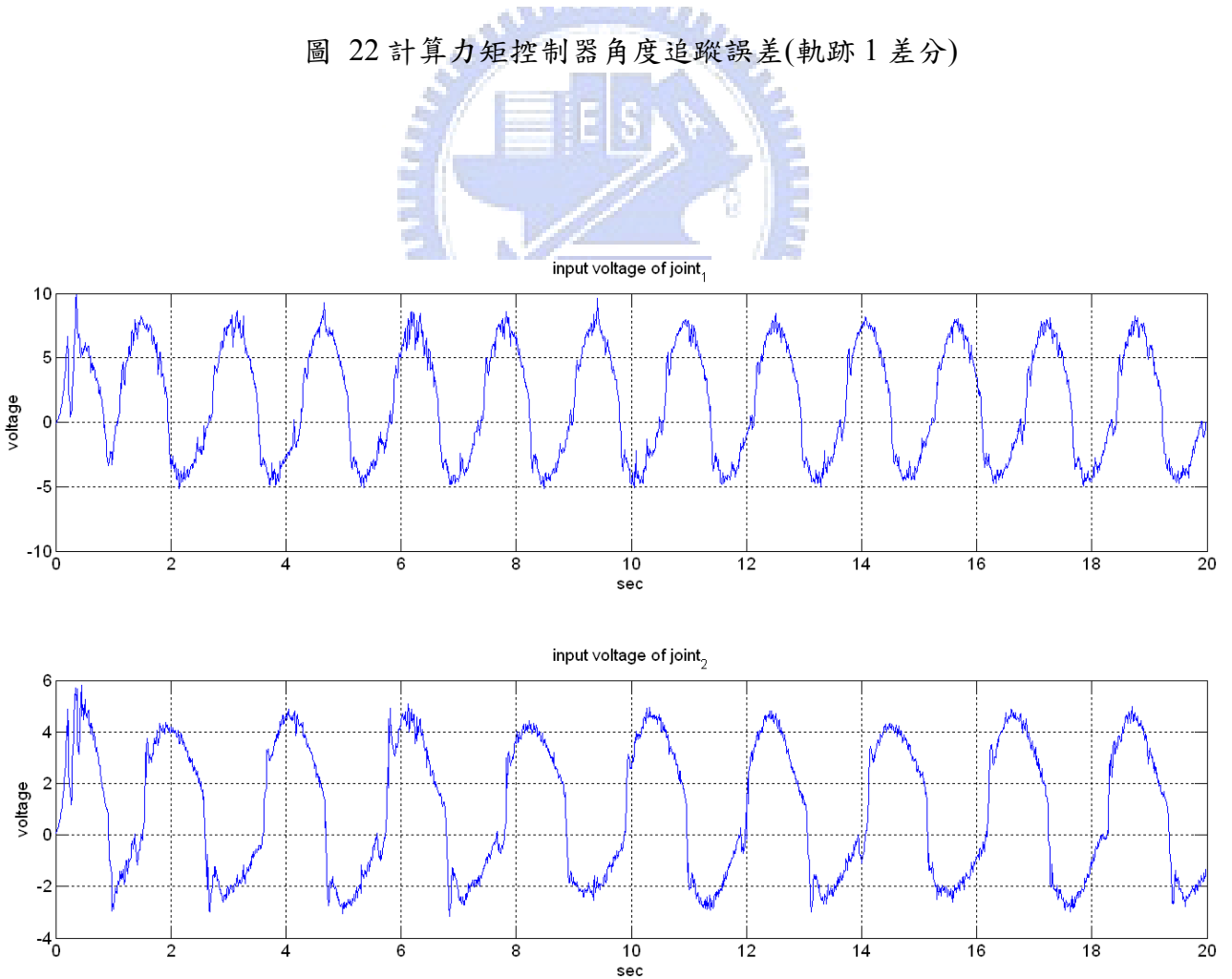


圖 23 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 1 差分)

軌跡 1(UKF 角速度) , 控制增益 $K_{v1} = 25$ $K_{p1} = 1000$ $K_{I1} = 0.3$
 $K_{v2} = 25$ $K_{p2} = 800$ $K_{I2} = 0.3$

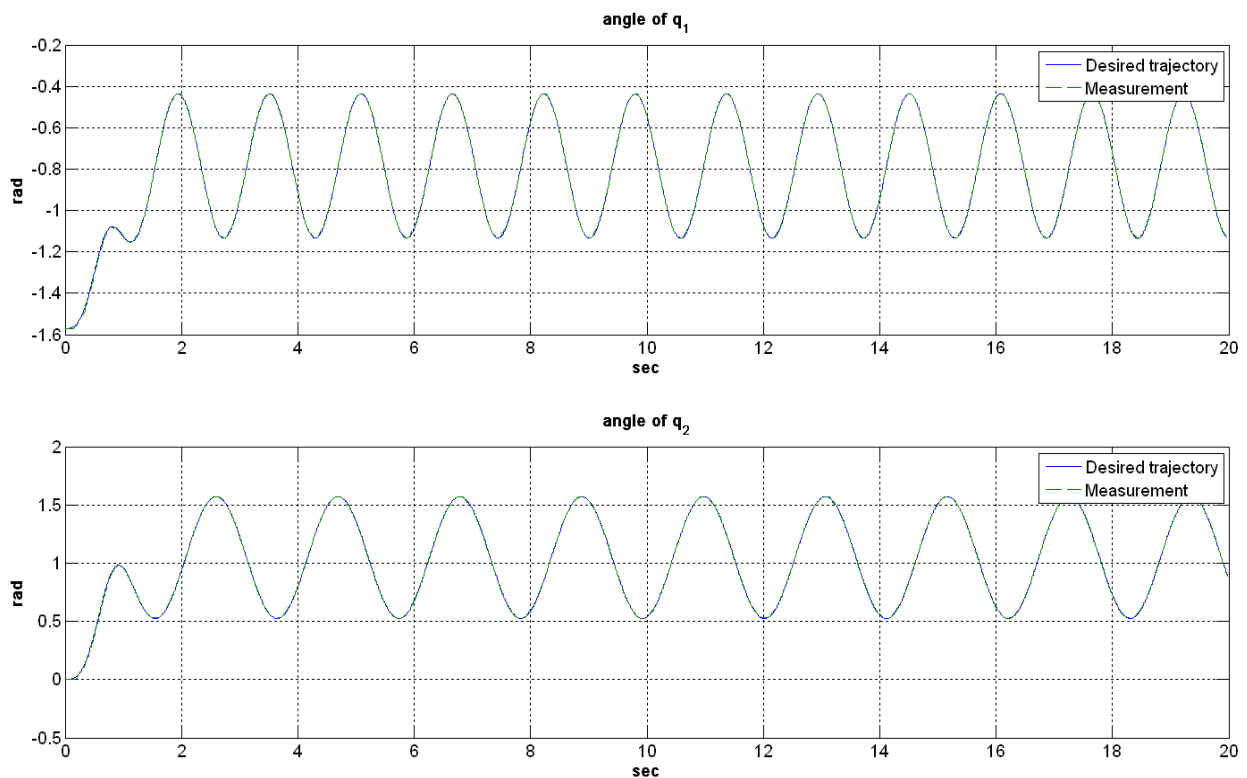


圖 24 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 1 UKF)

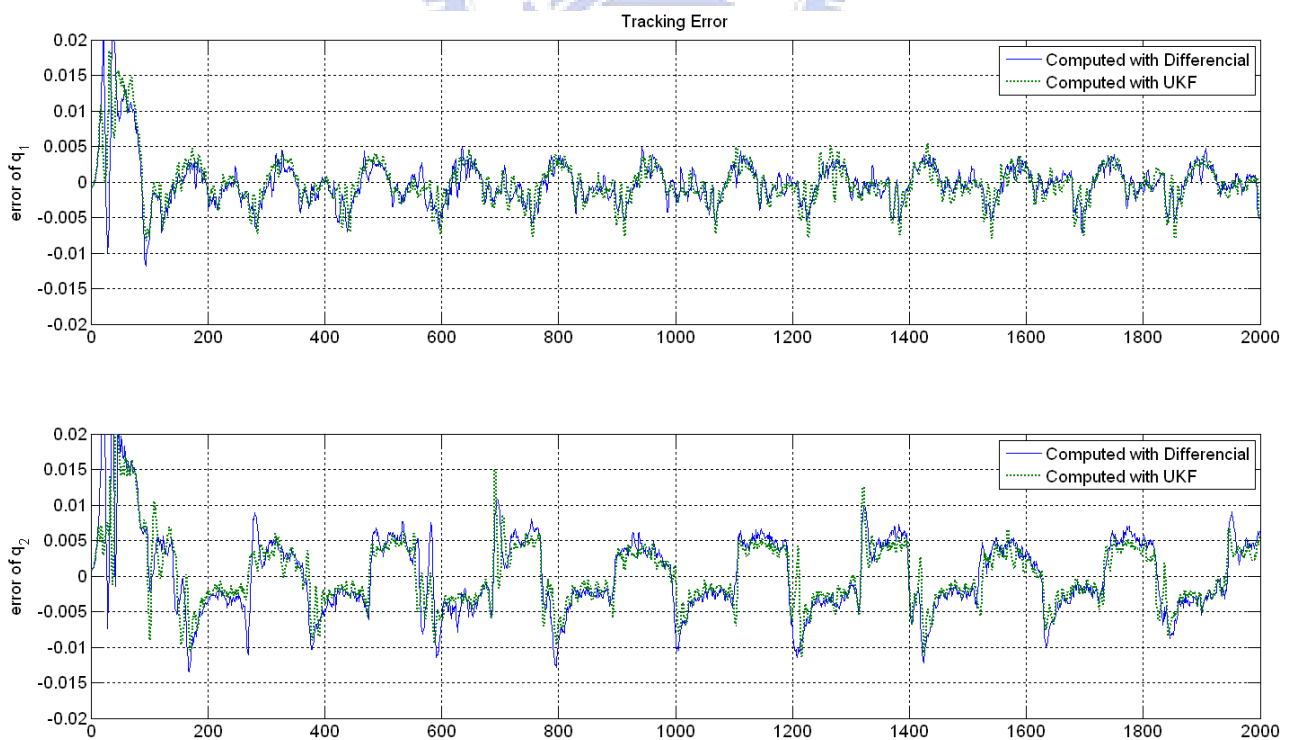


圖 25 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 1 UKF V.S 差分)

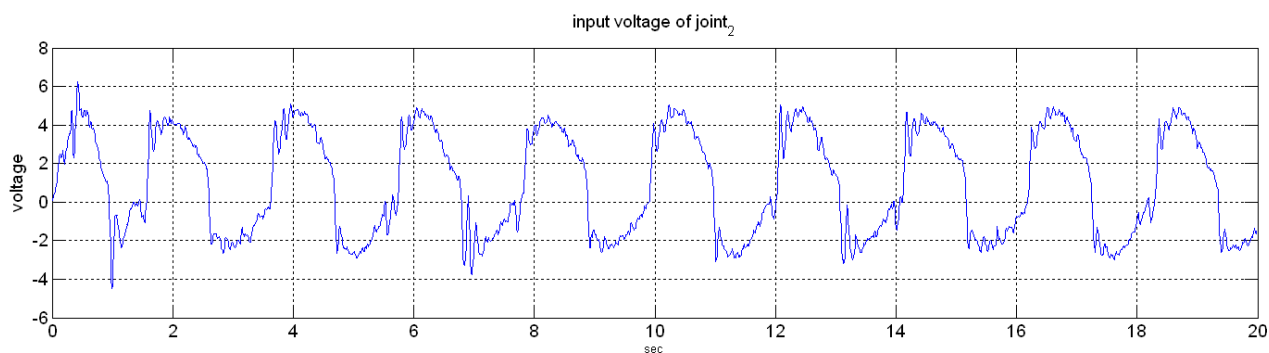
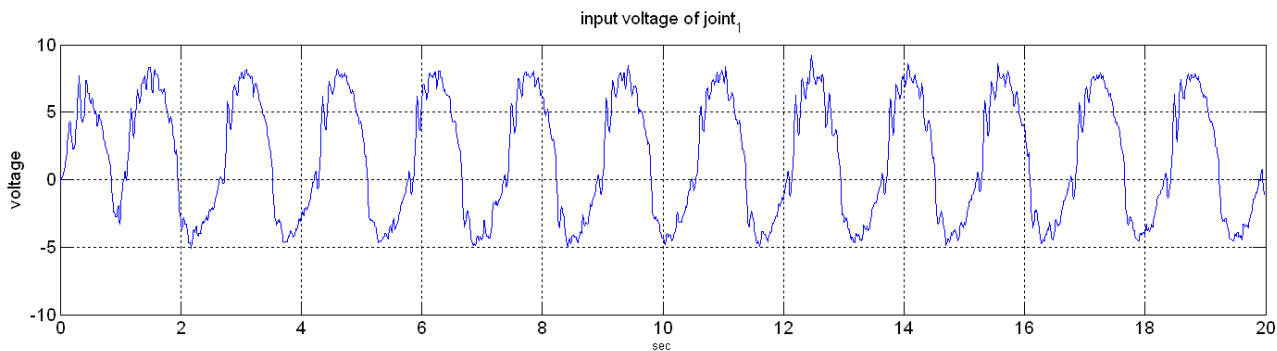


圖 26 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 1 UKF)

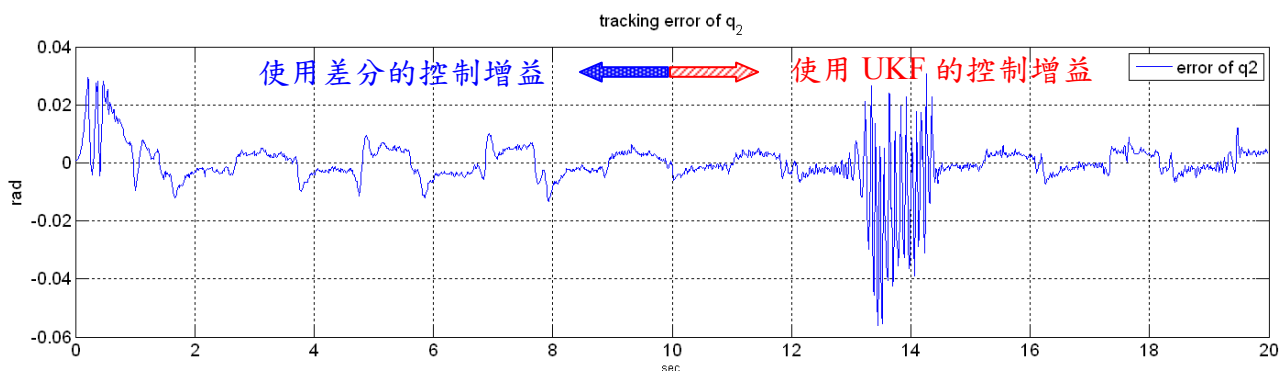
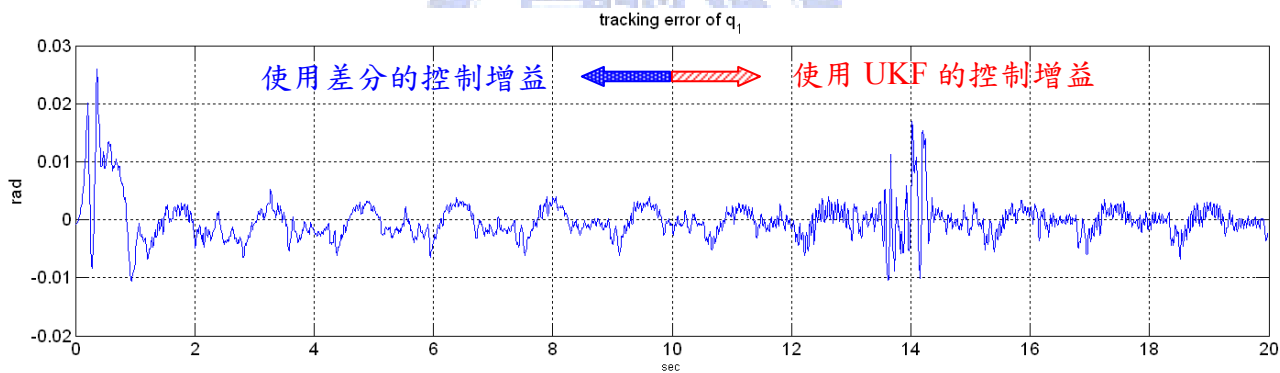


圖 27 計算力矩控制器，10 秒前使用差分增益，10 秒後使用 UKF 增益(軌跡 1 差分)

軌跡 2(差分角速度) ，控制增益 $K_{v1} = 30$ $K_{p1} = 800$ $K_{i1} = 1.411$
 $K_{v2} = 18$ $K_{p2} = 400$ $K_{i2} = 0.3$

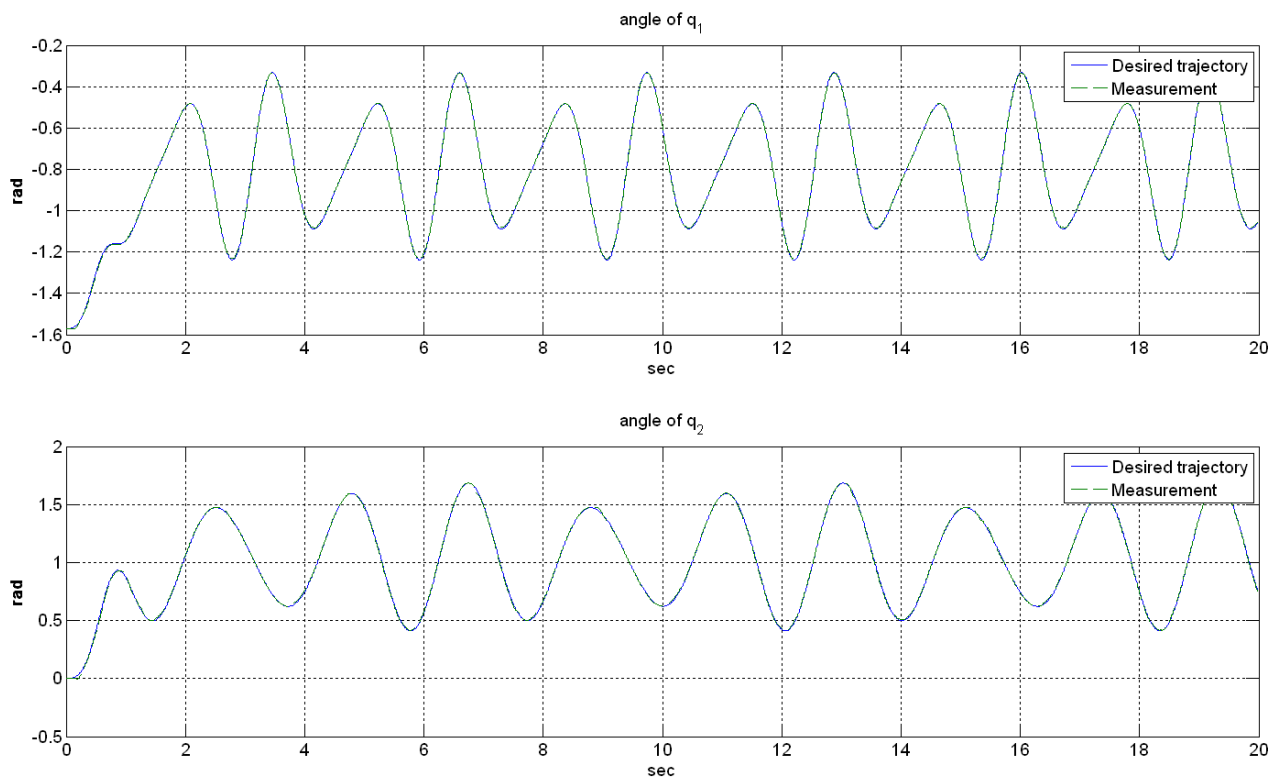


圖 28 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 2 差分)

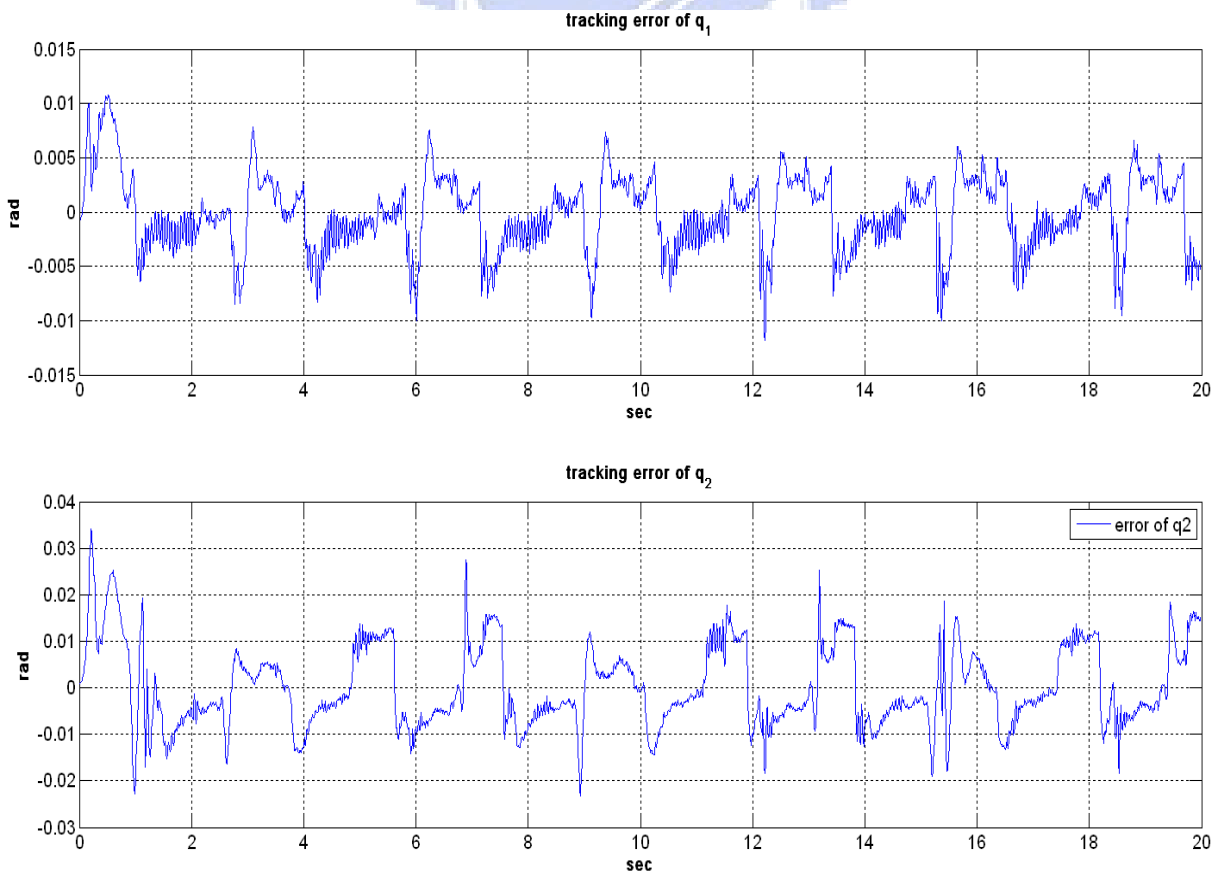


圖 29 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 2 差分)

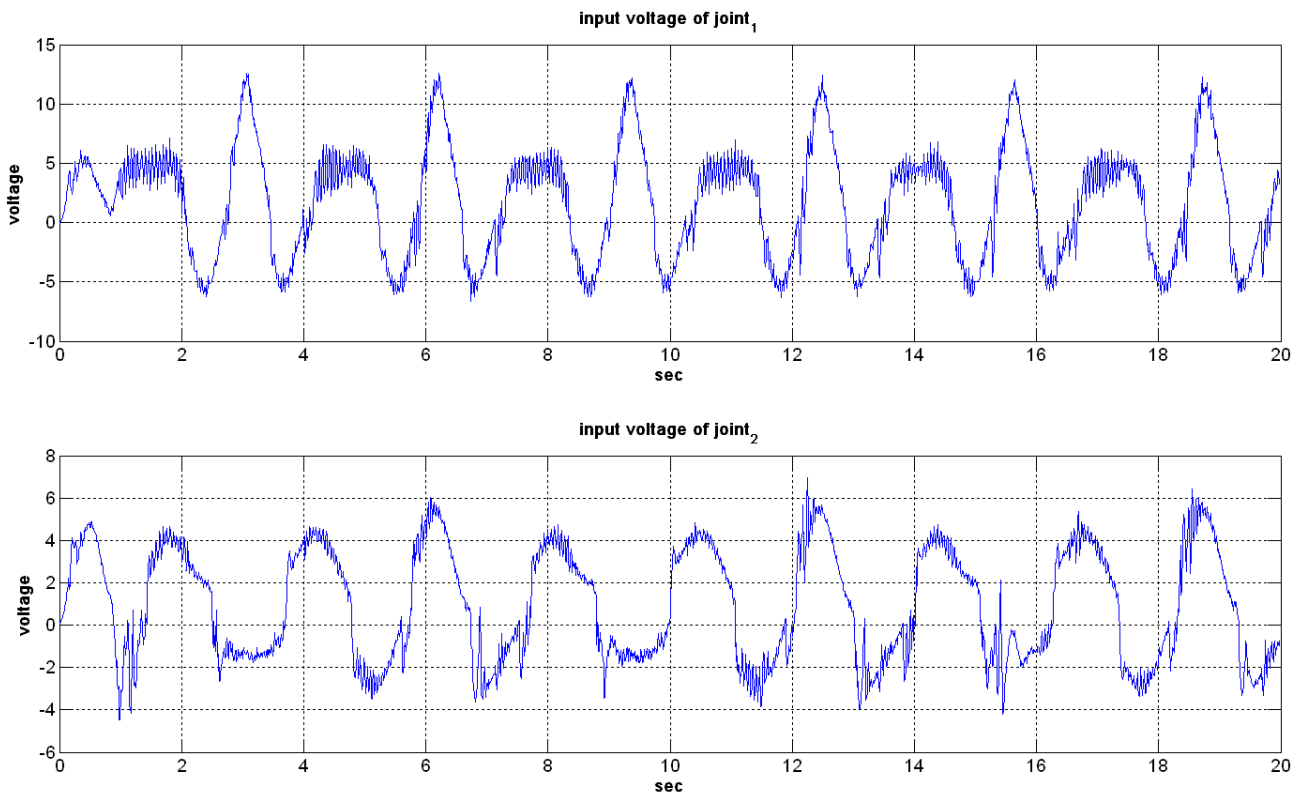


圖 30 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 2 差分)

軌跡 2(UKF 角速度) , 控制增益

$$K_{v1} = 30 \quad K_{p1} = 1200 \quad K_{I1} = 0.3$$

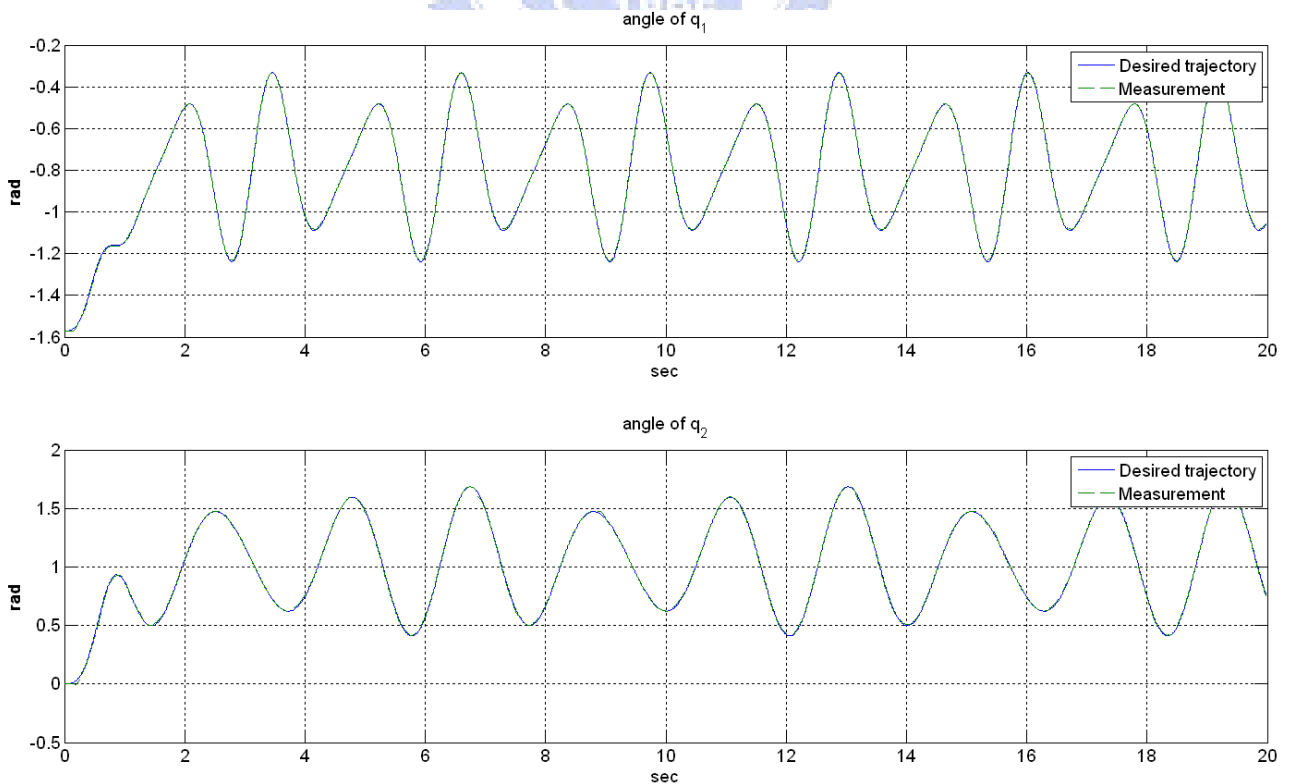
$$K_{v2} = 23 \quad K_{p2} = 800 \quad K_{I2} = 0.3$$


圖 31 計算力矩控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 2 UKF)

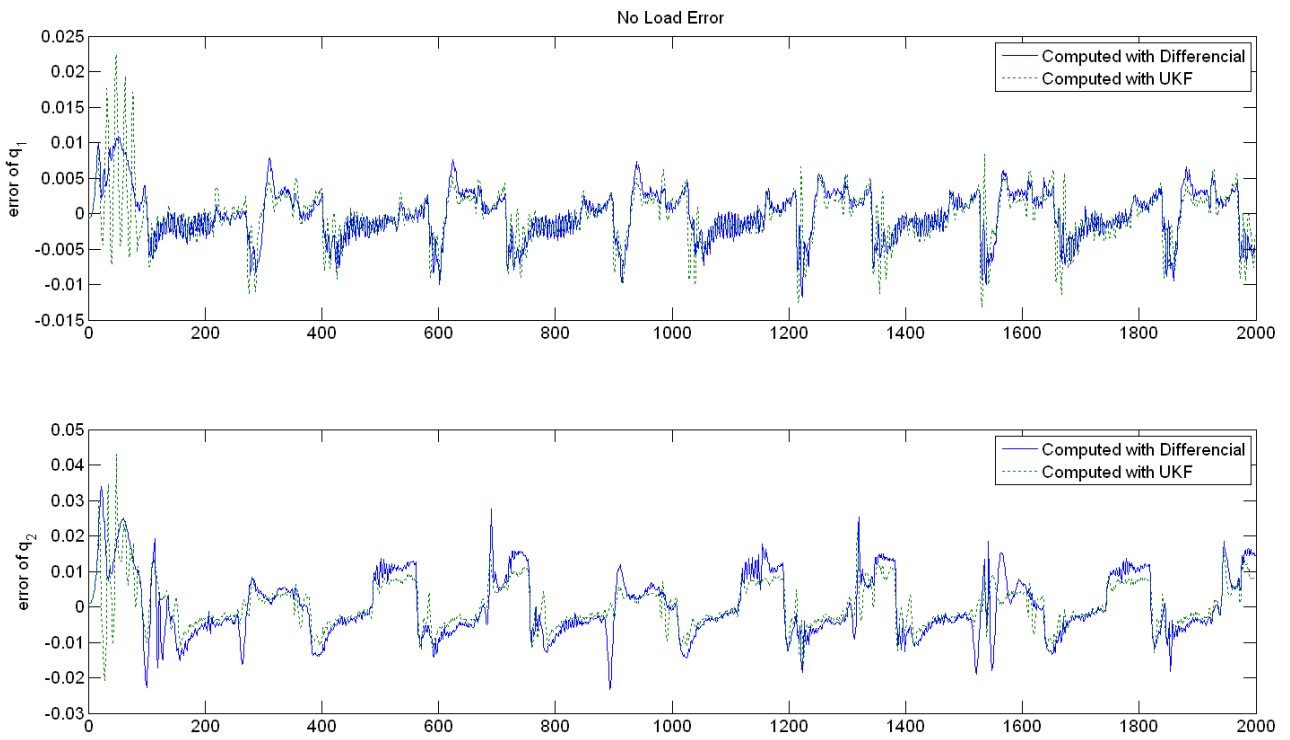


圖 32 計算力矩控制器角度追蹤誤差(軌跡 2 UKF V.S 差分)

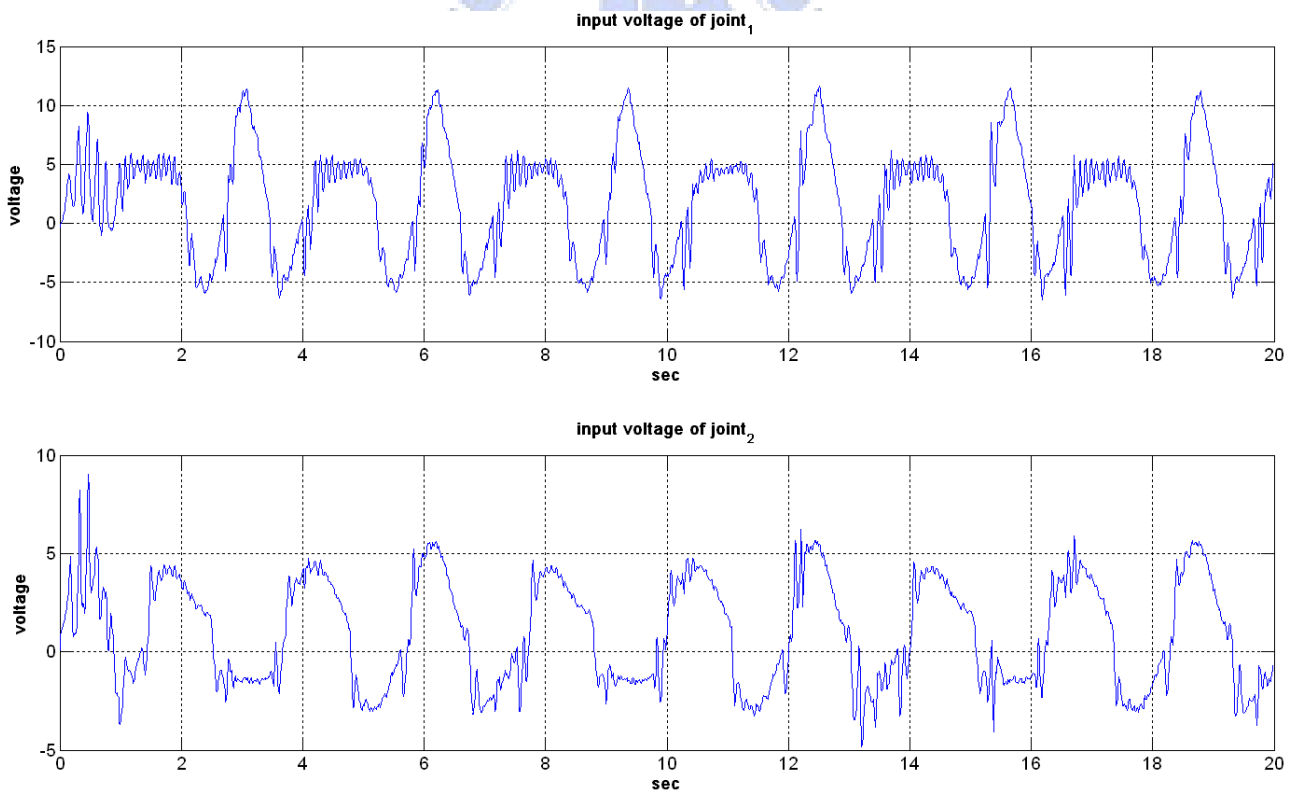


圖 33 計算力矩控制器兩軸輸入電壓(軌跡 2 UKF)

5.2.3 僅需位置回授的新型控制器實驗結果

僅需位置回授的新型控制器實驗結果如圖 35 至圖 40 所示。由圖 36 及圖 39 的結果顯示，此控制器的控制效果在兩種軌跡下，都較計算力矩控制器優異許多，而效果提升最主要的原因就是加入了非線性控制器的補償，前後差異如圖 34 所示。

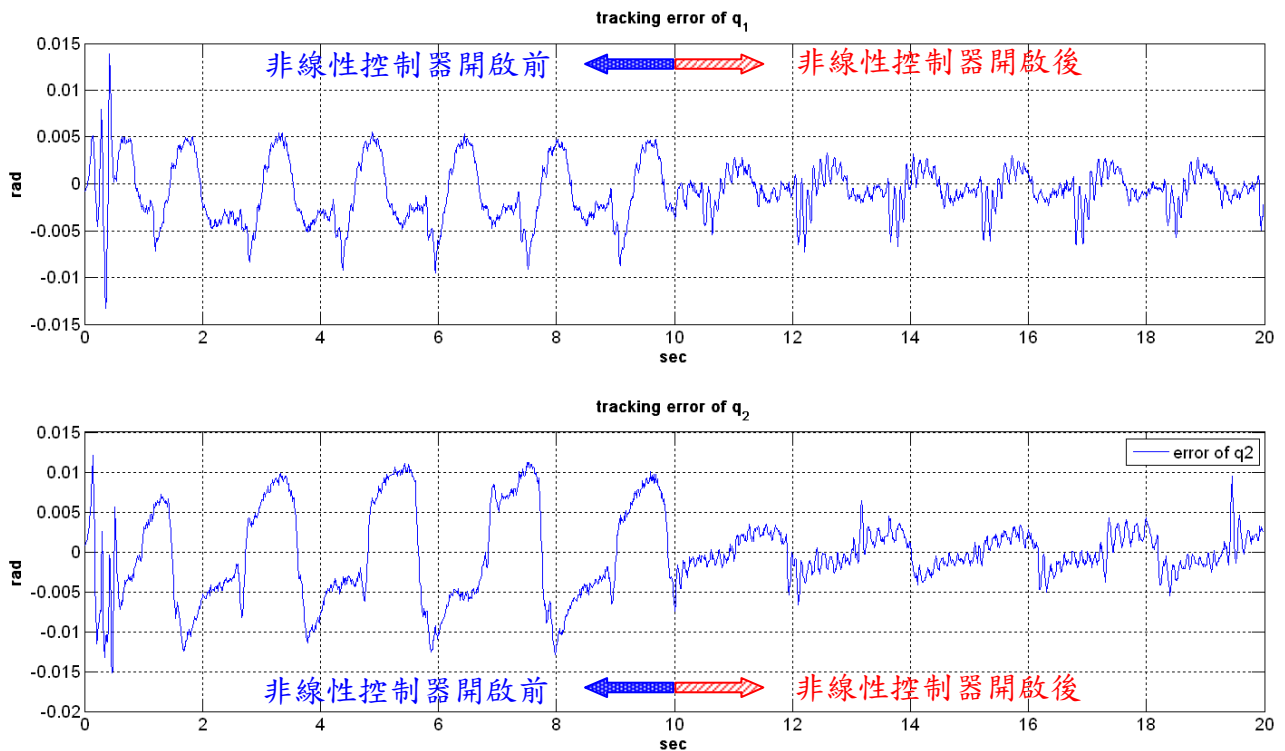


圖 34 非線性控制器開啟前及開啟後的比較

<p>軌跡 1 設計參數：$D(s) = s + 10$，$\alpha_{ss} = 2.5$</p> <p>$K_a = 2.5$，$R = \begin{bmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$</p> <p>$Q = \begin{bmatrix} 30000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$，</p> <p>LQR 增益矩陣為 $[K_1 \ K_2 \ K_3] =$</p> <p>$\begin{bmatrix} 8940.6 & -135.2 & 483.1 & -4.2 & 44.4 & -1 \\ 161.3 & 2998.8 & 20.6 & 209.7 & -0.4 & 38.1 \end{bmatrix}$</p>	<p>軌跡 2 設計參數：$D(s) = s + 10$，$\alpha_{ss} = 2.5$</p> <p>$K_a = 2.5$，$R = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$</p> <p>$Q = \begin{bmatrix} 30000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$，</p> <p>LQR 增益矩陣為 $[K_1 \ K_2 \ K_3] =$</p> <p>$\begin{bmatrix} 7997.2 & -92.1 & 442.8 & -2.9 & 42.2 & -0.9 \\ 95.2 & 1548.6 & 14 & 127.4 & -0.2 & 28 \end{bmatrix}$</p>
--	---

表 5 僅需位置回授的新型控制器設計參數表

軌跡 1

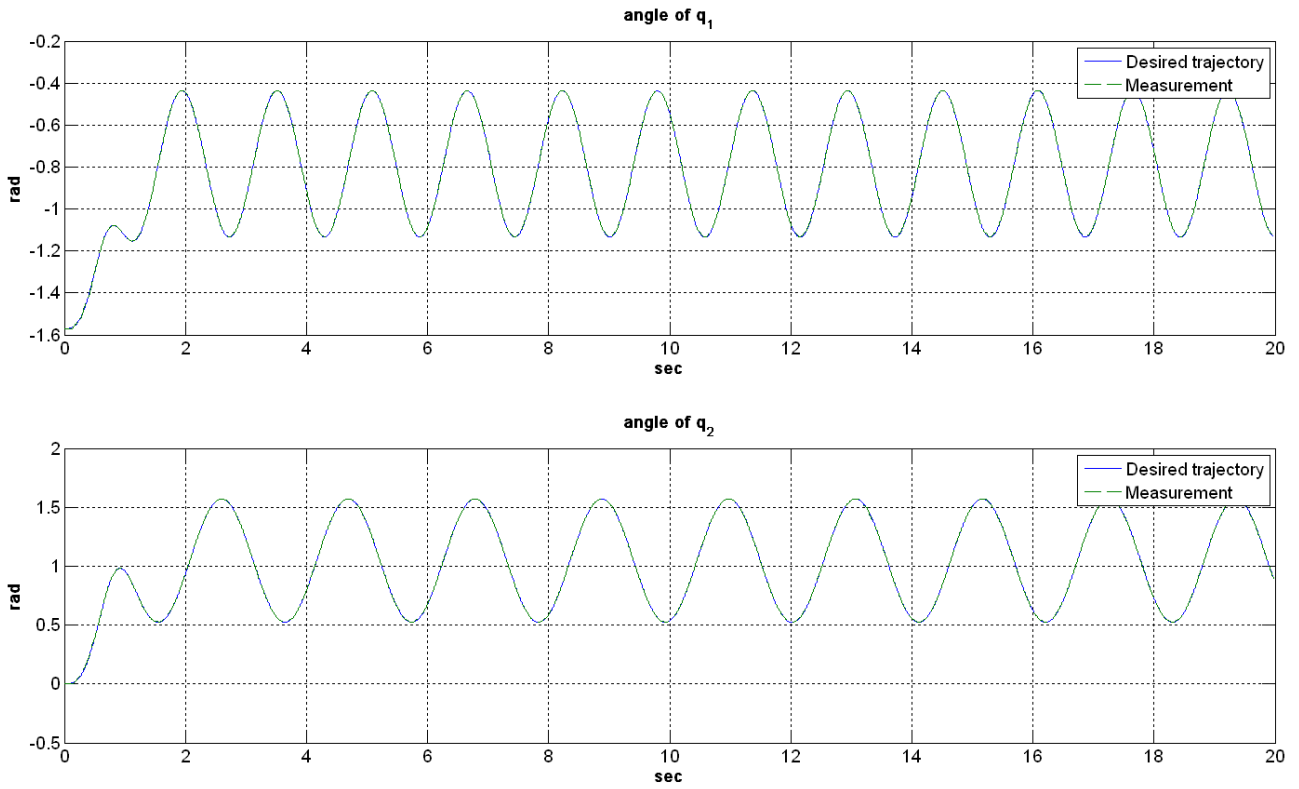


圖 35 僅需位置回授的新型控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 1)

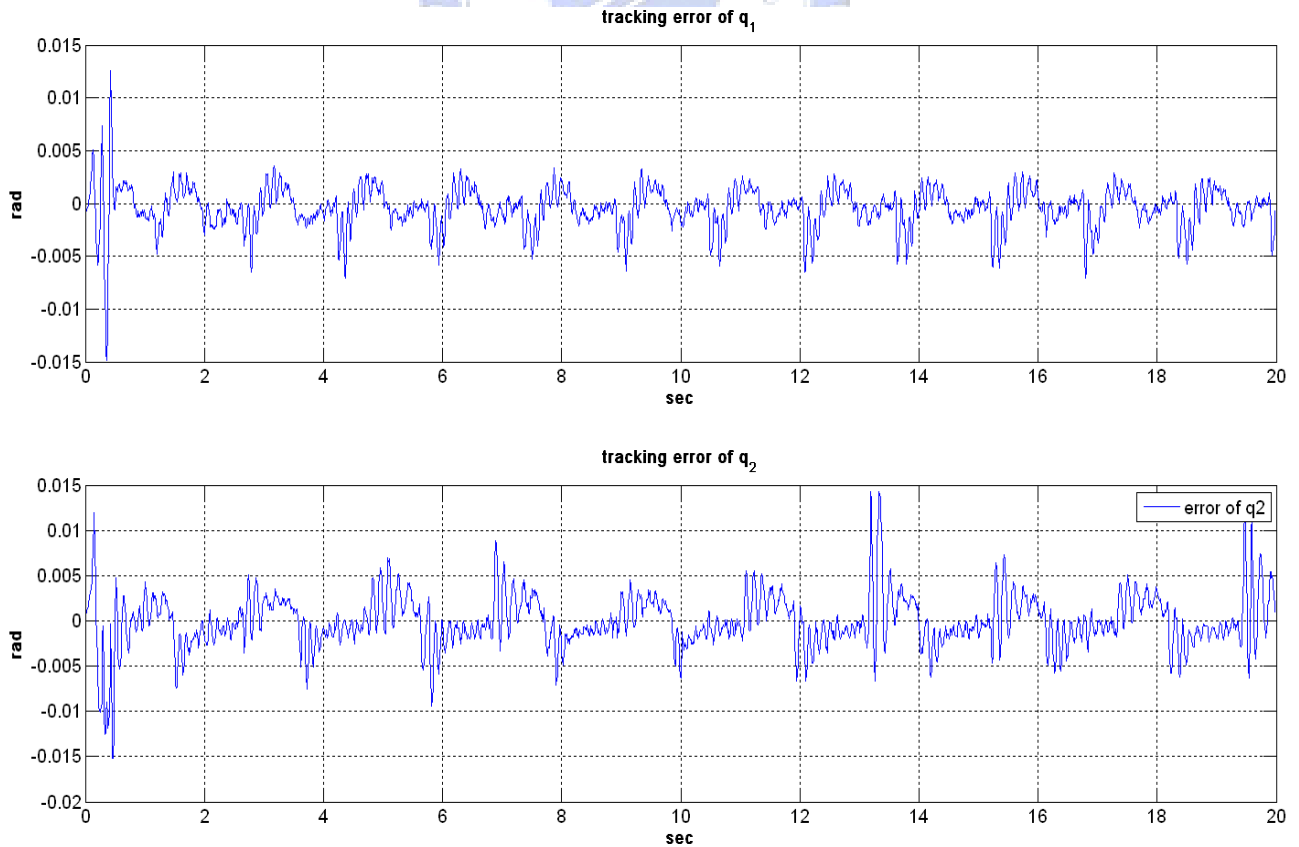


圖 36 僅需位置回授的新型控制器角度追蹤誤差(軌跡 1)

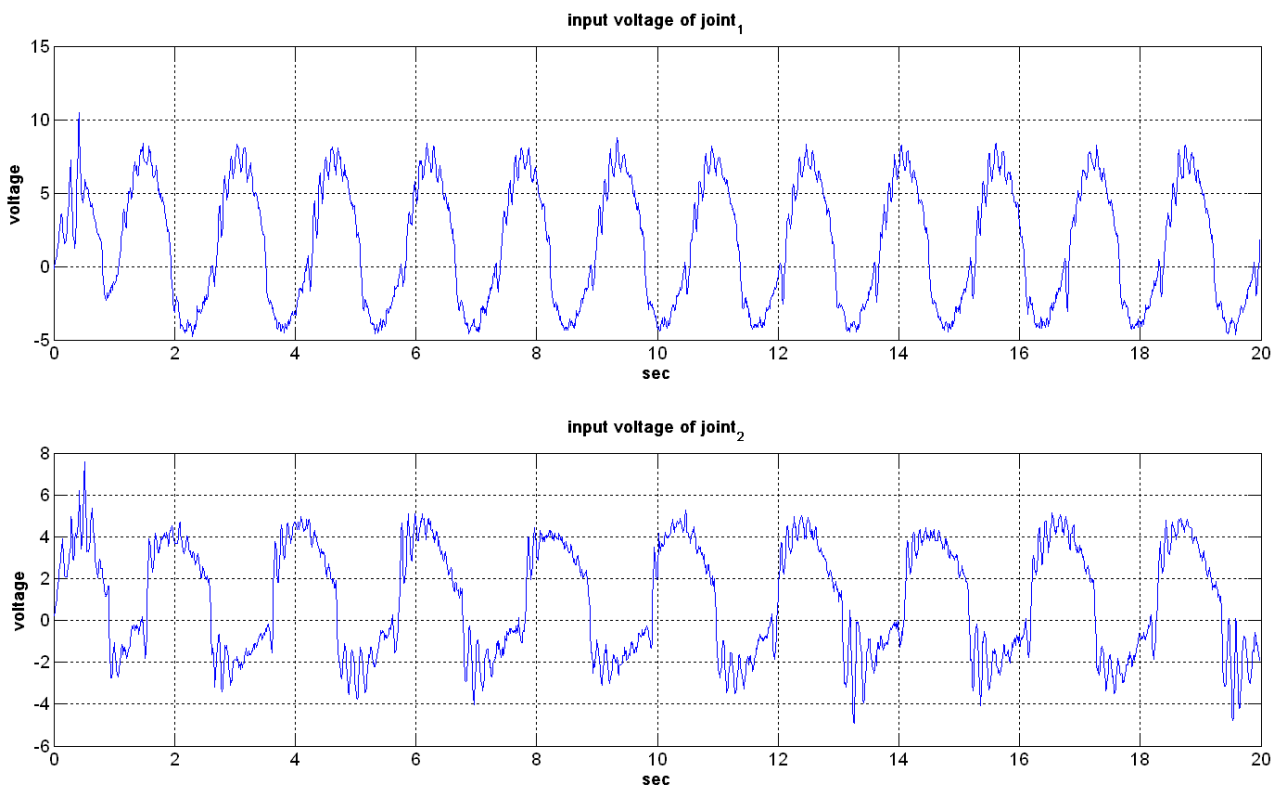


圖 37 僅需位置回授的新型控制器兩軸輸入電壓(軌跡 1)

軌跡 2

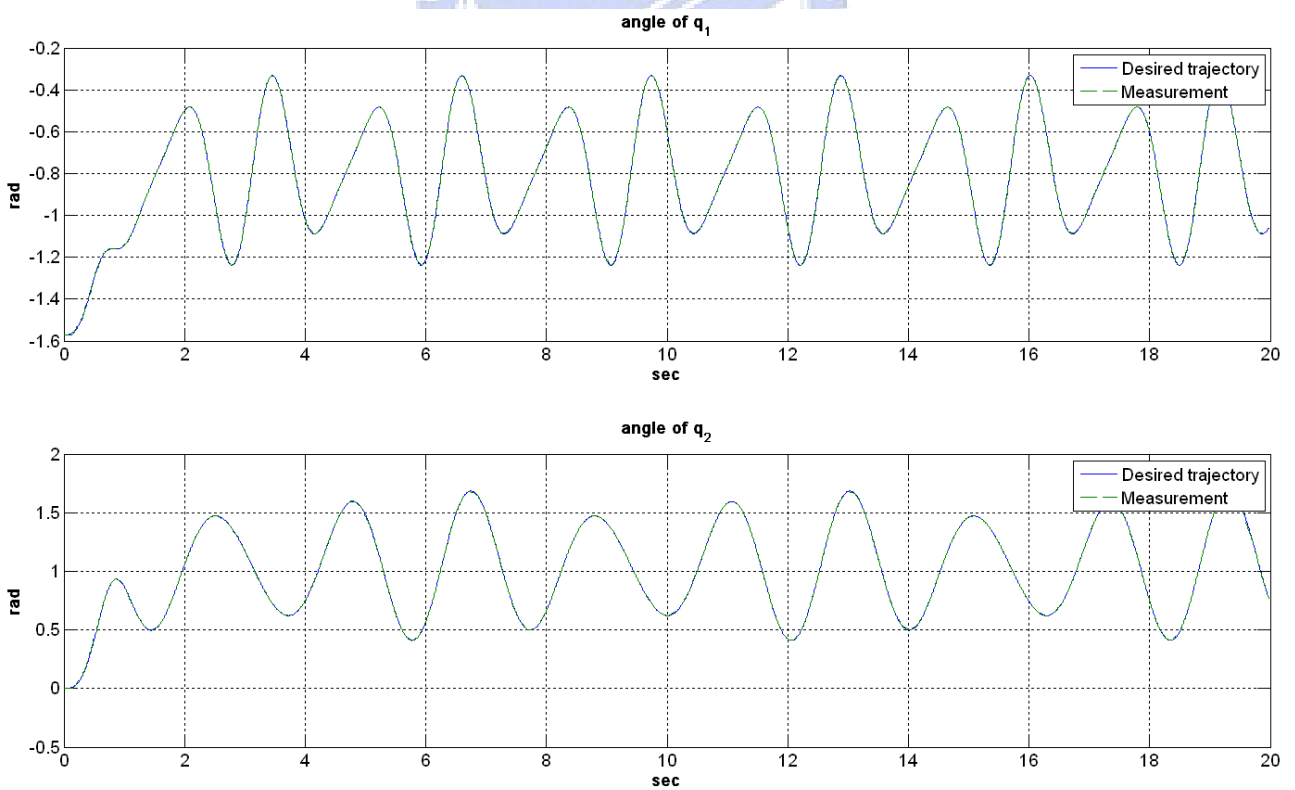


圖 38 僅需位置回授的新型控制器實驗結果，依序為上臂大軸及下臂小軸角度軌跡(軌跡 2)

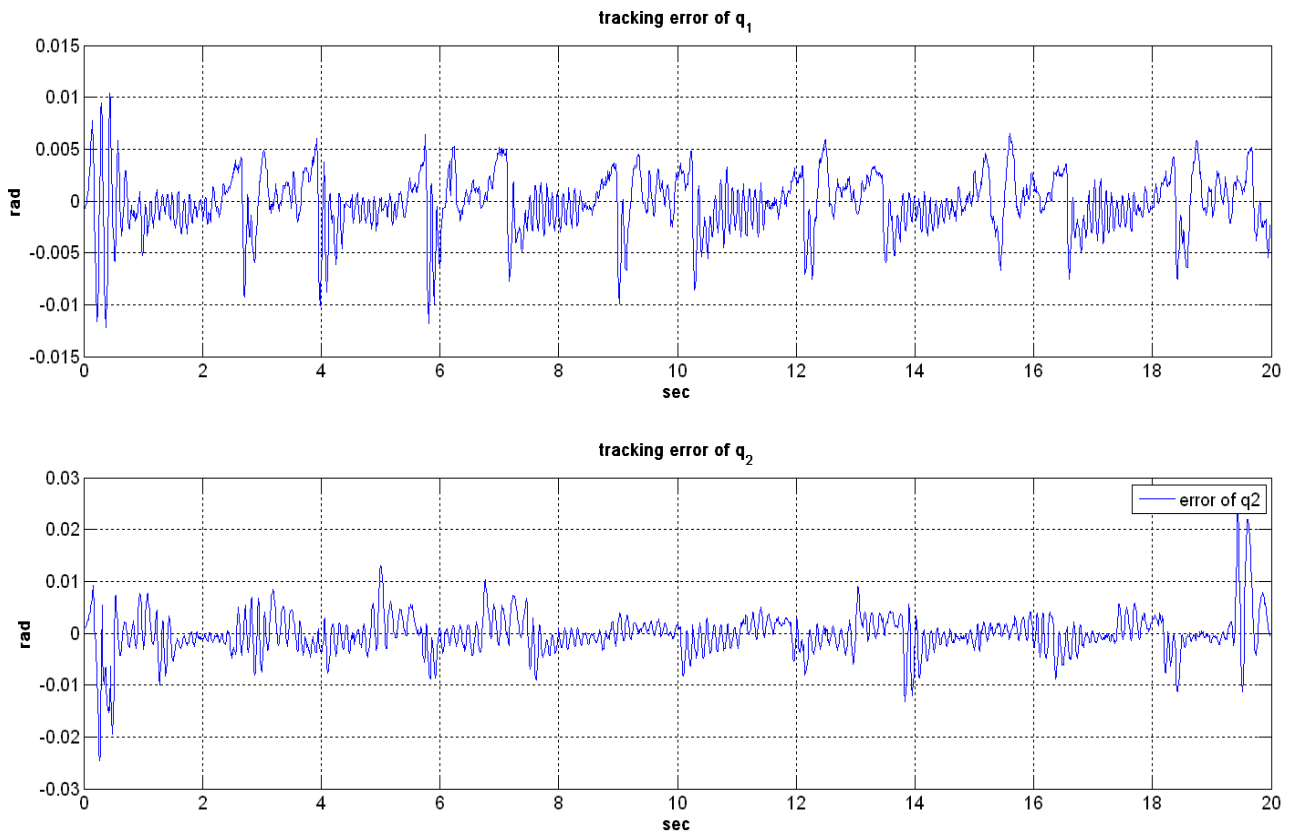


圖 39 僅需位置回授的新型控制器角度追蹤誤差(軌跡 2)

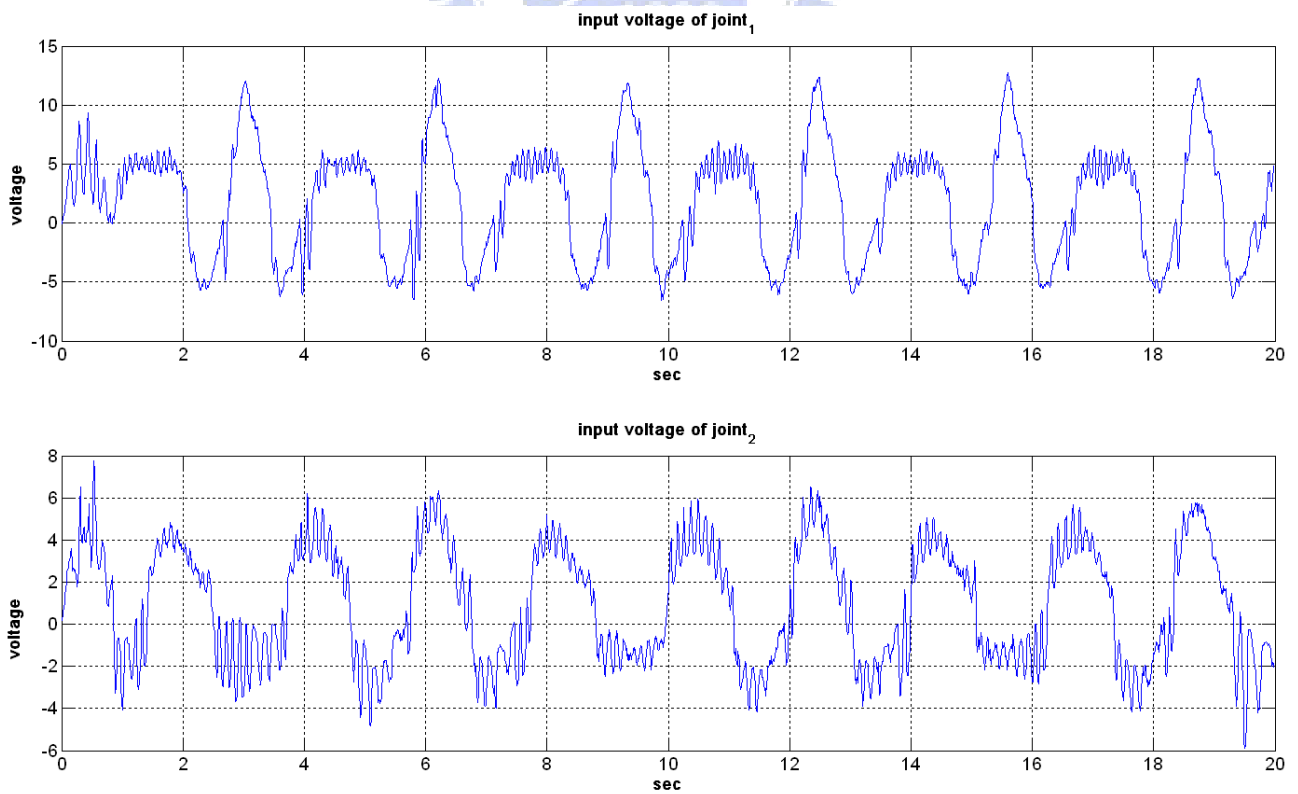


圖 40 僅需位置回授的新型控制器兩軸輸入電壓(軌跡 2)

5.2.4 性能分析與比較

三種控制器的性能比較如下面四張圖所示。從角度追蹤誤差之範數(1-Norm)長條圖可以很明顯的看出，僅需位置回授的新型控制器不論在軌跡 1 或軌跡 2 均有優異的效能，在小軸尤其明顯，原因在於小軸模型參數的估測較不準，而僅需位置回授控制器內的非線性控制器便是針對模型參數造成的誤差進行補償，因此相較於計算力矩控制器才会有如此顯著的效果。

軌跡 1：

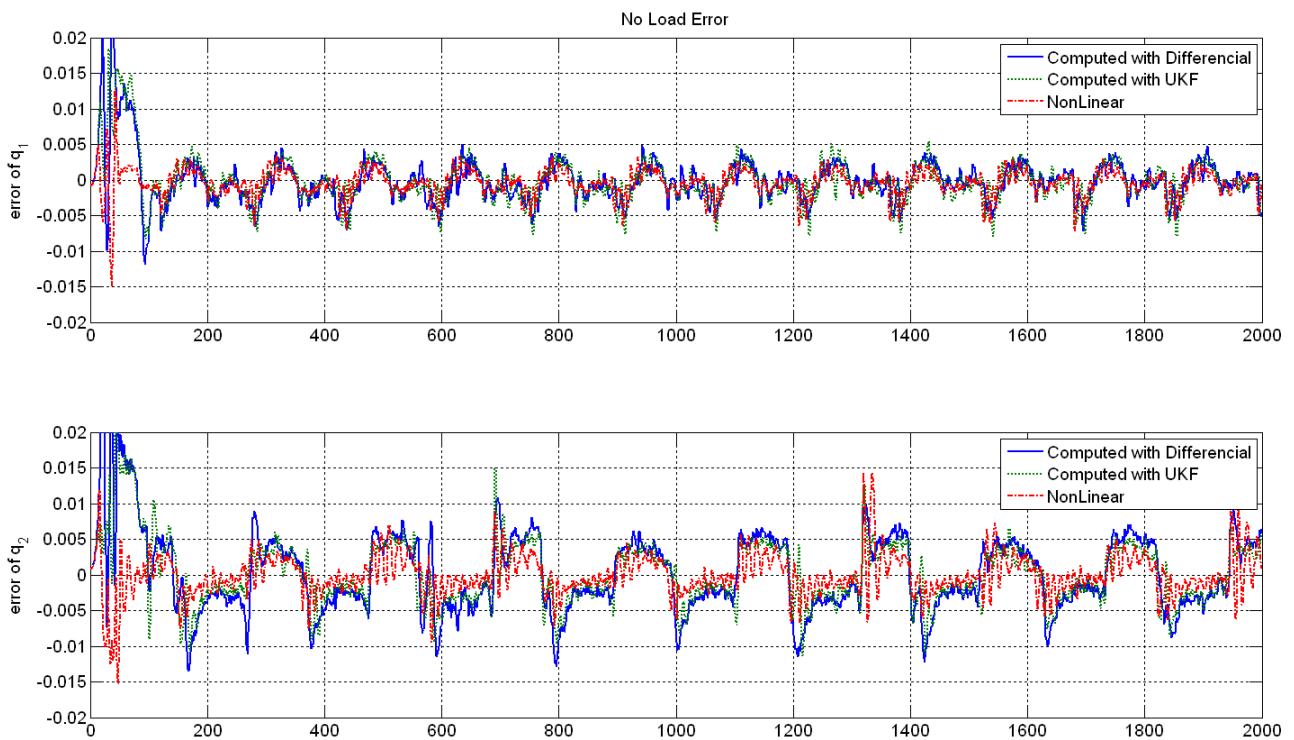


圖 41 計算力矩 (差分及 UKF)與僅需位置回授控制器的角度追蹤誤差比較圖(軌跡 1)

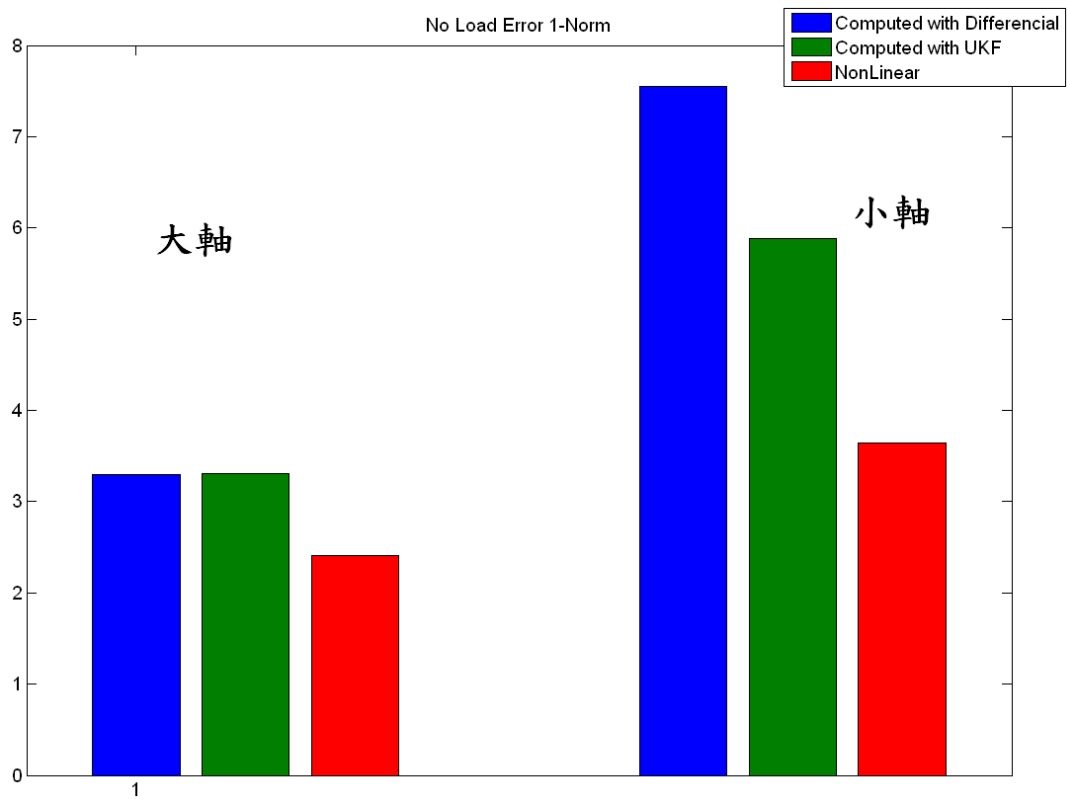


圖 42 角度追蹤誤差範數(1-Norm)比較圖(軌跡 1)

軌跡 2 :

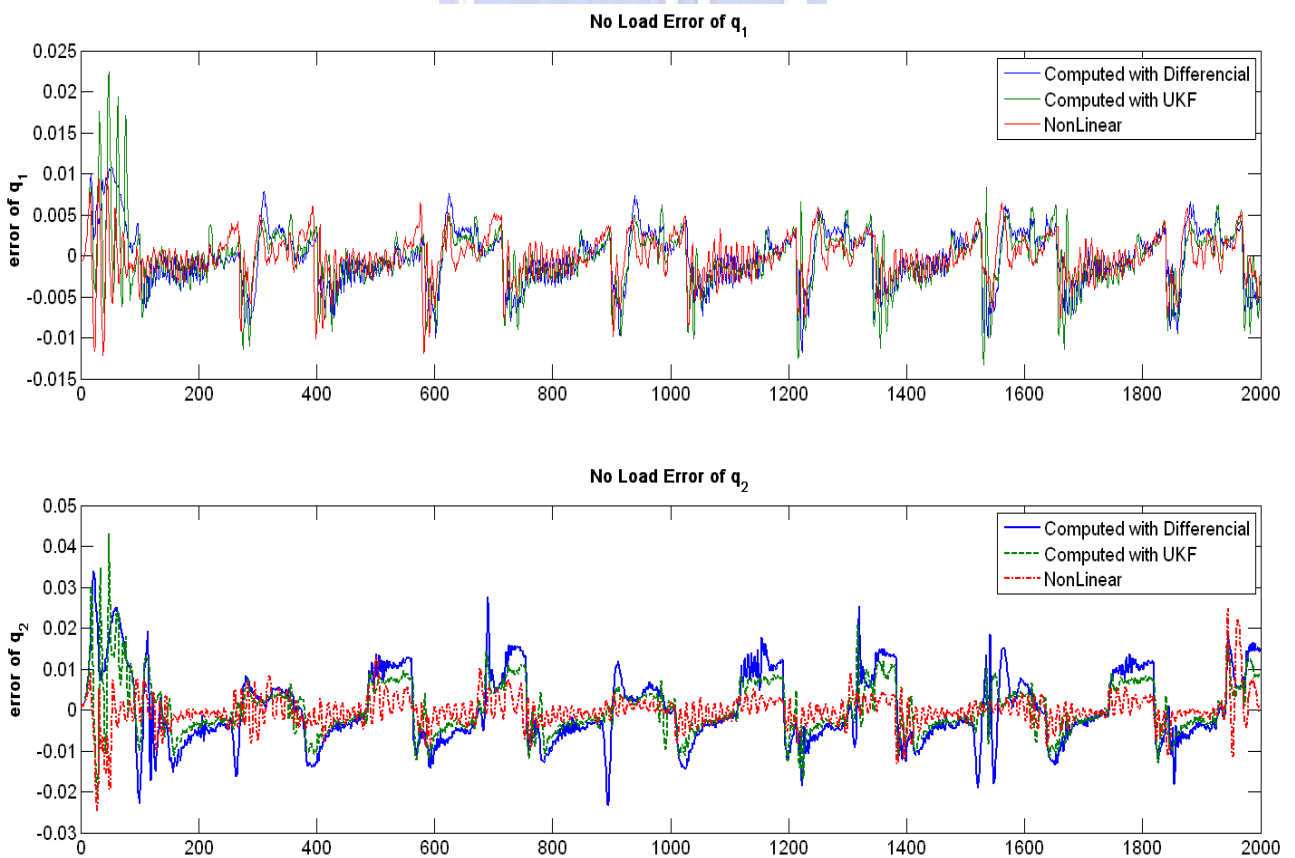


圖 43 計算力矩 (差分及 UKF)與僅需位置回授控制器的角度追蹤誤差比較圖(軌跡 2)

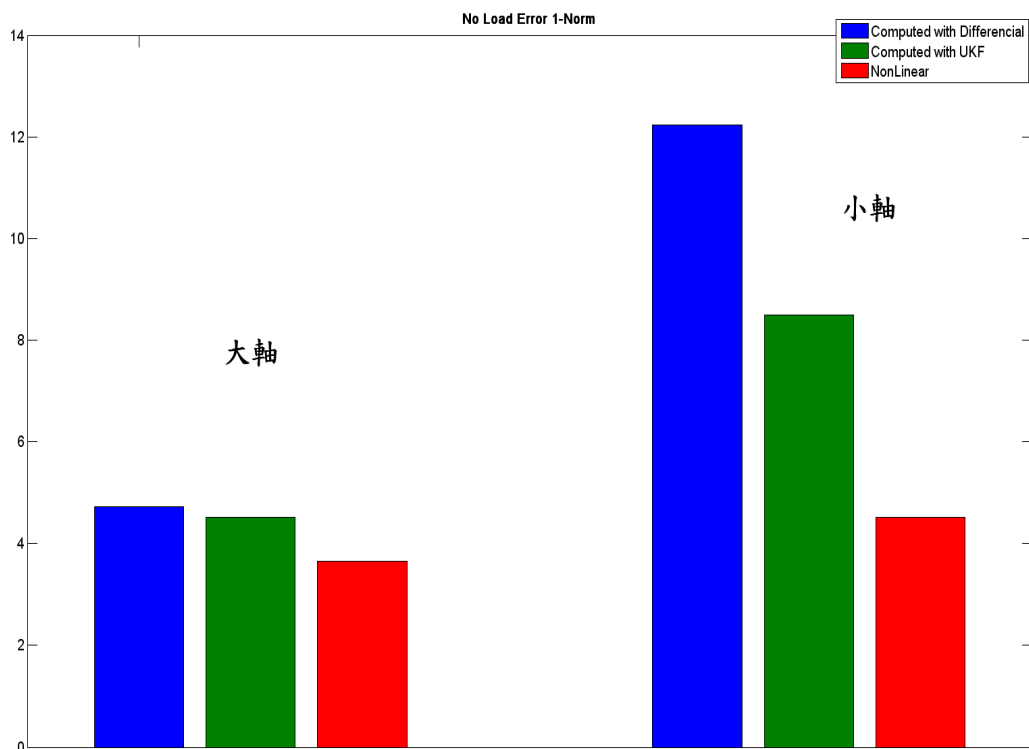


圖 44 角度追蹤誤差範數(1-Norm)比較圖(軌跡 2)



5.2.5 強健性測試

上述章節皆屬於無負載測試，在此於小軸末端加上負載，測試控制器的強健性。小軸重量為 867 克，測試負載分別為 144 克及 288 克，大約為小軸重量的 16% 及 32%。測試軌跡使用 **軌跡 1**，三種控制器角度誤差追蹤結果如圖 45、圖 47 及圖 49 所示。由結果可看出三種控制器都有不錯的強健度，角度追蹤誤差的變化比例也很相近。但僅需位置回授控制器在不同負載的測試中，角度追蹤誤差範數(1-Norm)仍是三種控制器中最低的。三種控制器角度誤差追蹤結果整理表如表 6 及表 7 所示。

軌跡 1，使用計算力矩控制器(差分)，測試負載：0g、144g、288g

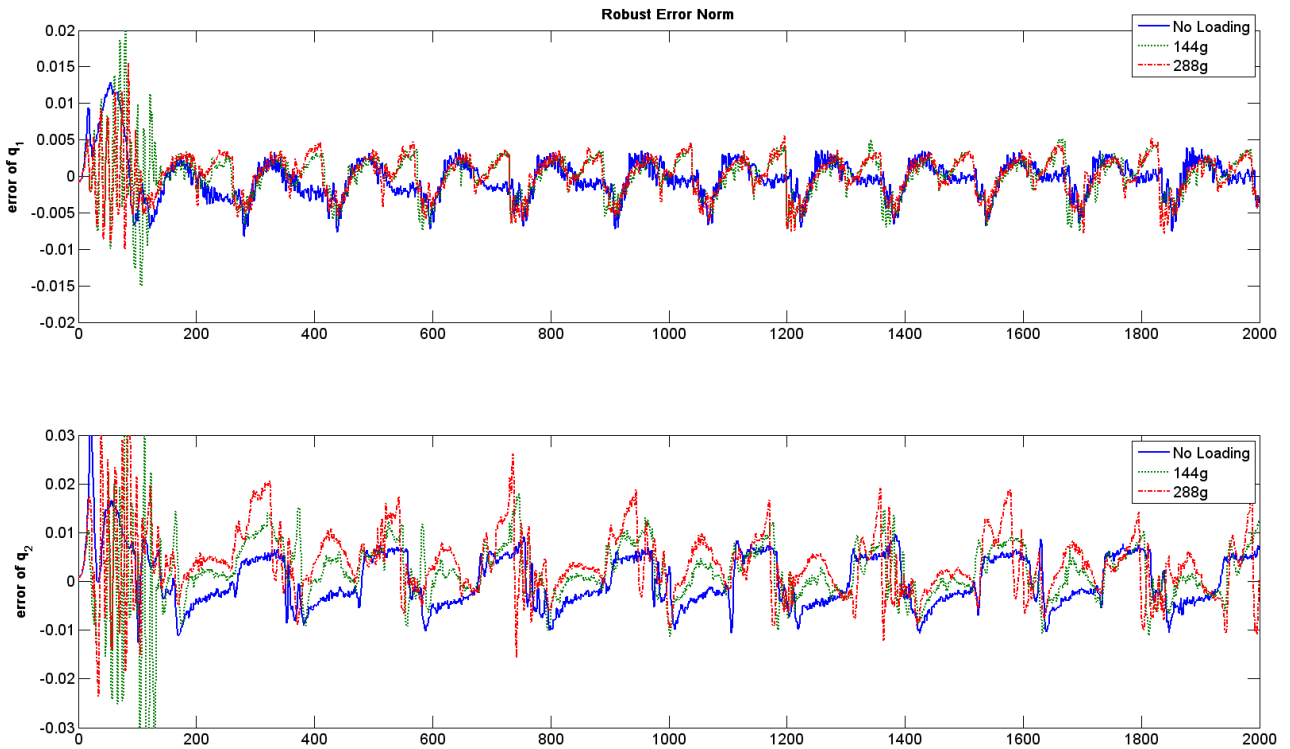


圖 45 計算力矩 (差分)強健性測試追蹤誤差比較圖

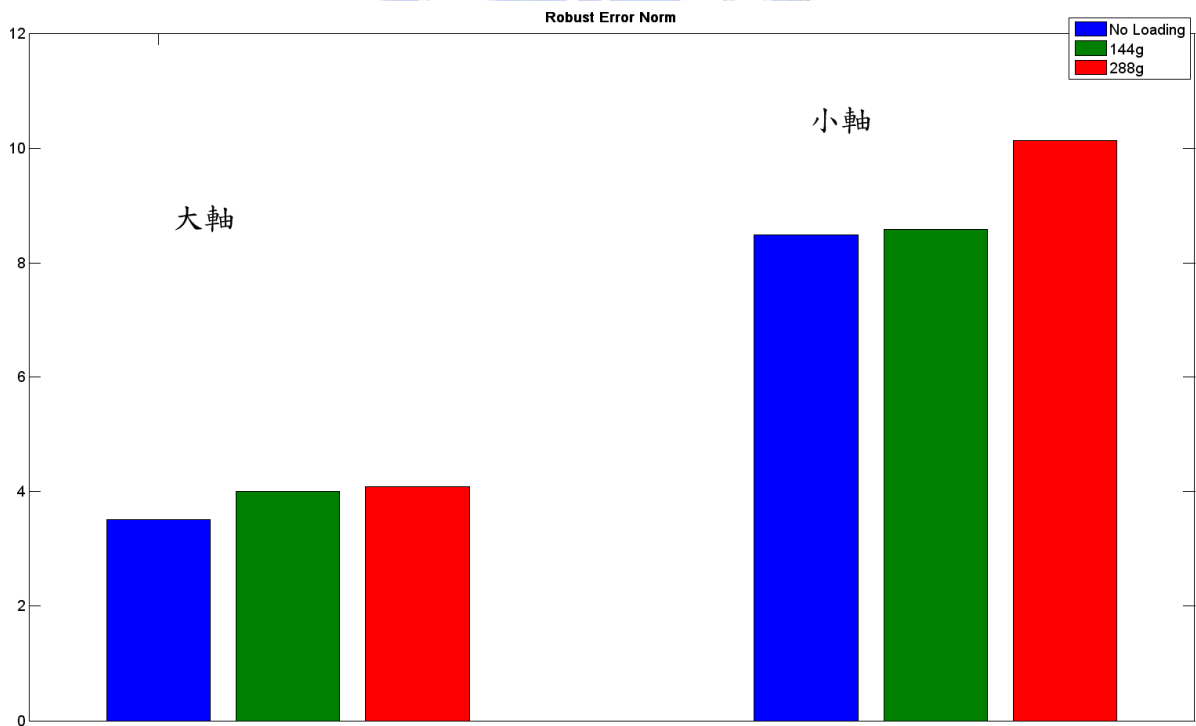


圖 46 計算力矩 (差分)強健性測試角度追蹤誤差範數(1-Norm)比較圖

軌跡 1，使用計算力矩控制器(UKF)，測試負載：0g、144g、288g

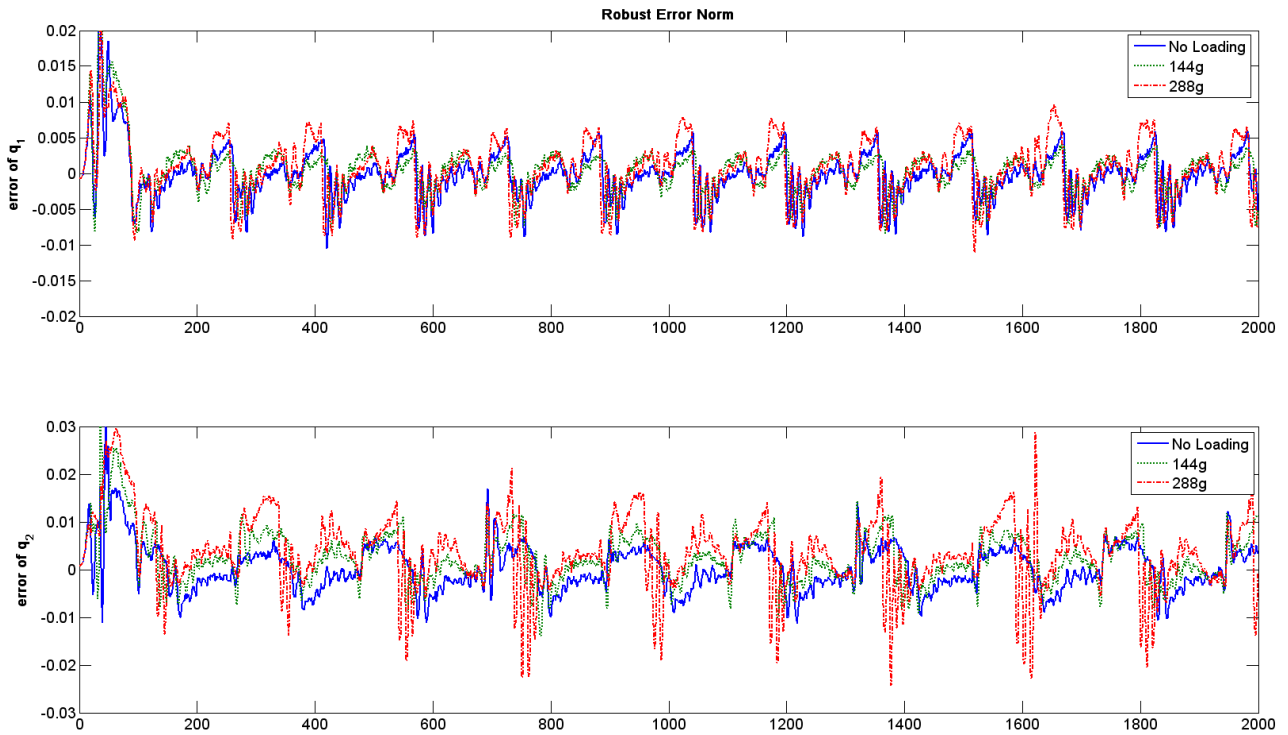


圖 47 計算力矩 (UKF)強健性測試追蹤誤差比較圖

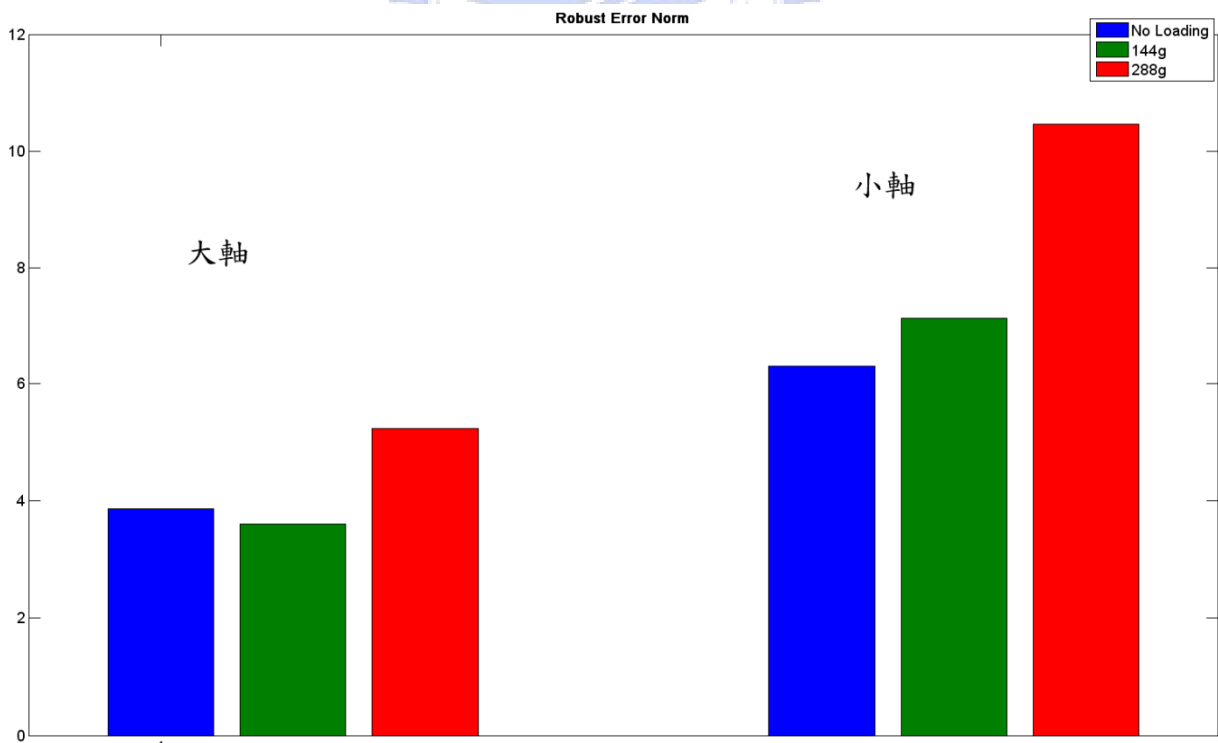


圖 48 計算力矩 (UKF)強健性測試角度追蹤誤差範數(1-Norm)比較圖

軌跡 1，使用僅需位置回授之新型控制器，測試負載：0g、144g、288g

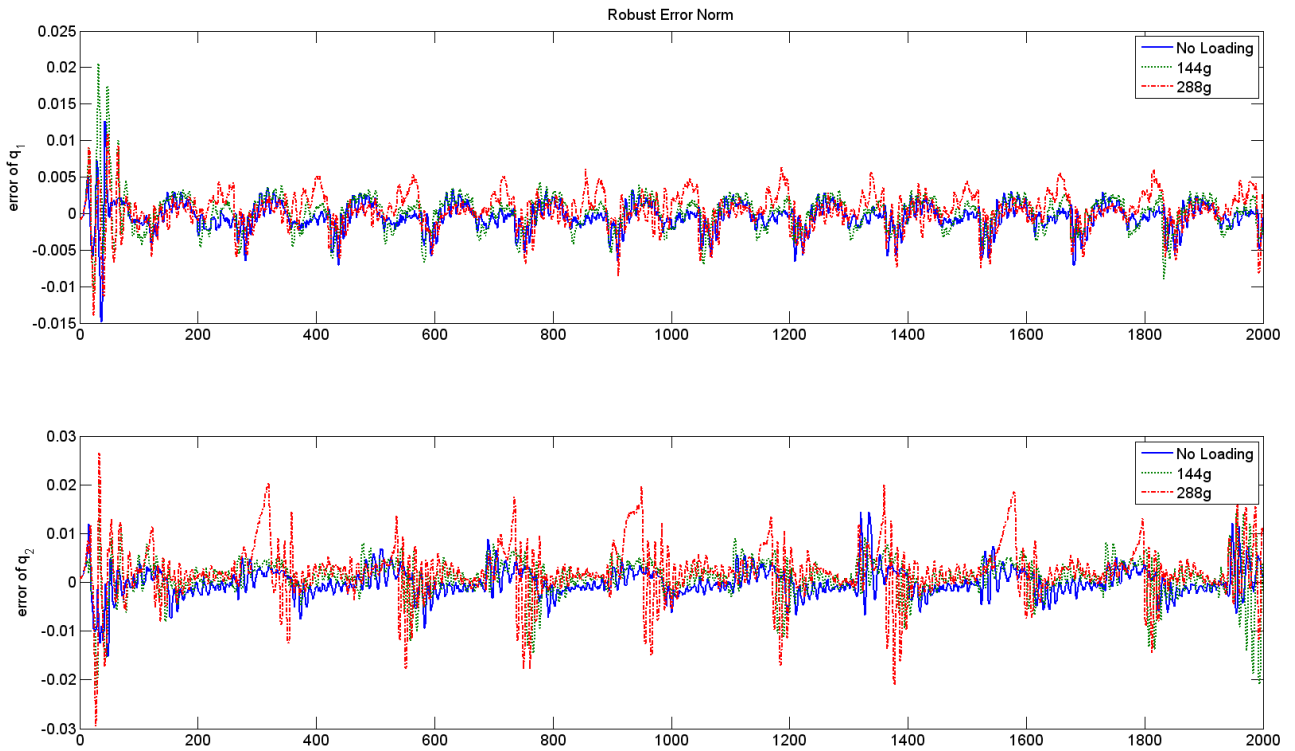


圖 49 僅需位置回授控制器的強健性測試角度追蹤誤差比較圖

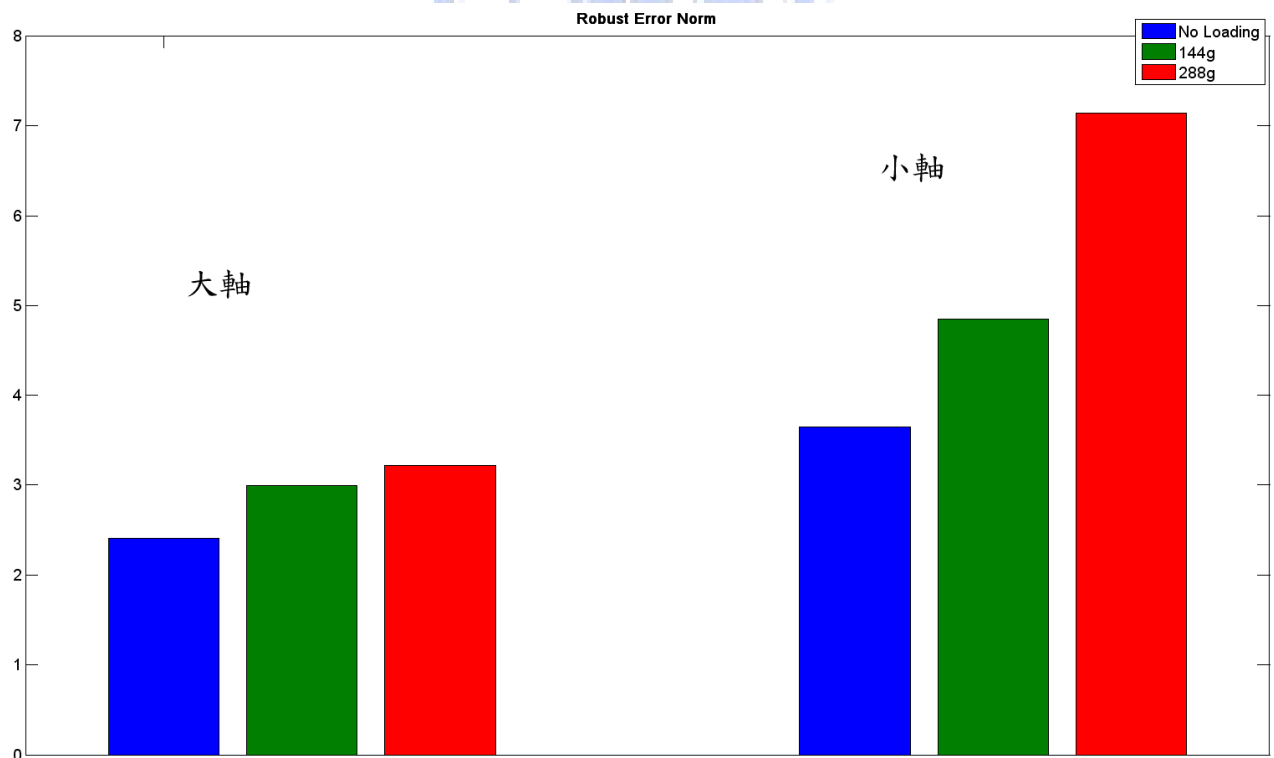


圖 50 僅需位置回授控制器的強健性測試角度追蹤誤差範數(1-Norm)比較圖

大軸：

控制器 負載	計算力矩控制器(差分) 1-Norm 值	計算力矩控制器(UKF) 1-Norm 值	僅需位置回授之新型控制器 1-Norm 值
0g	3.3	3.32	2.41
144g	4.01	3.6	2.99
288g	4.08	5.23	3.22

表 6 大軸在不同控制器下的強健性比較

小軸：

控制器 負載	計算力矩控制器(差分) 1-Norm 值	計算力矩控制器(UKF) 1-Norm 值	僅需位置回授之新型控制器 1-Norm 值
0g	7.55	5.89	3.65
144g	8.59	7.13	4.85
288g	10.1	10.5	7.14

表 7 小軸在不同控制器下的強健性比較



5.3 錯誤偵測實驗結果

錯誤偵測為階層式錯誤偵測與判別系統的前端，使用模型 1 及模型 4，即運動學模型和動力學模型的多模型架構(GPB-2 或 IMM)，來判斷系統運作正常與否。當錯誤發生時，運動學模型的機率會高於動力學模型。在錯誤偵測實驗中，量測雜訊 (Measurement Noise) 平均值皆設定為 0 標準差為 0.001 的高斯雜訊，動力學模型及運動學模型處理雜訊(Process Noise)分別為平均值為 0 標準差為 0.001 及 0.002 的高斯雜訊，錯誤偵測在系統運作 1 秒後啟動。

在錯誤偵測與錯誤判別實驗中，設計六種不同的錯誤形式，有突發性錯誤及漸進發生的錯誤，藉此驗證錯誤偵測與診斷系統對不同種錯誤判斷的強健性。由下面 3 個實驗結果可看出，GPB-2 及 IMM 所得到的效果相近，並且都能在 0.1 秒內正確的判斷出系統發生錯誤。

錯誤代號	錯誤描述	錯誤性質
Type 1	大軸發生卡住錯誤，小軸正常	突發性
Type 2	大軸正常，小軸發生卡住錯誤	突發性
Type 3	大軸小軸同時發生卡住錯誤	突發性
Type 4	大軸先時發生卡住錯誤，小軸接著也發生卡住錯誤	突發性
Type 5	大軸致動器輸出功率突然降低 40%，小軸正常	突發性
Type 6	大軸正常，小軸輸出功率 $\times e^{-0.0015(T-t_0)}$ 的指數衰減	漸進性

表 8 系統錯誤種類表

錯誤偵測實驗 1：大軸致動器發生突然卡住之錯誤(Type 1)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2。大軸致動器於 10 秒時發生卡住錯誤，小軸致動器正常運作。由圖 52 可看出從大軸發生錯誤到錯誤偵測系統判斷出系統出錯僅使用了 **0.04 秒**。

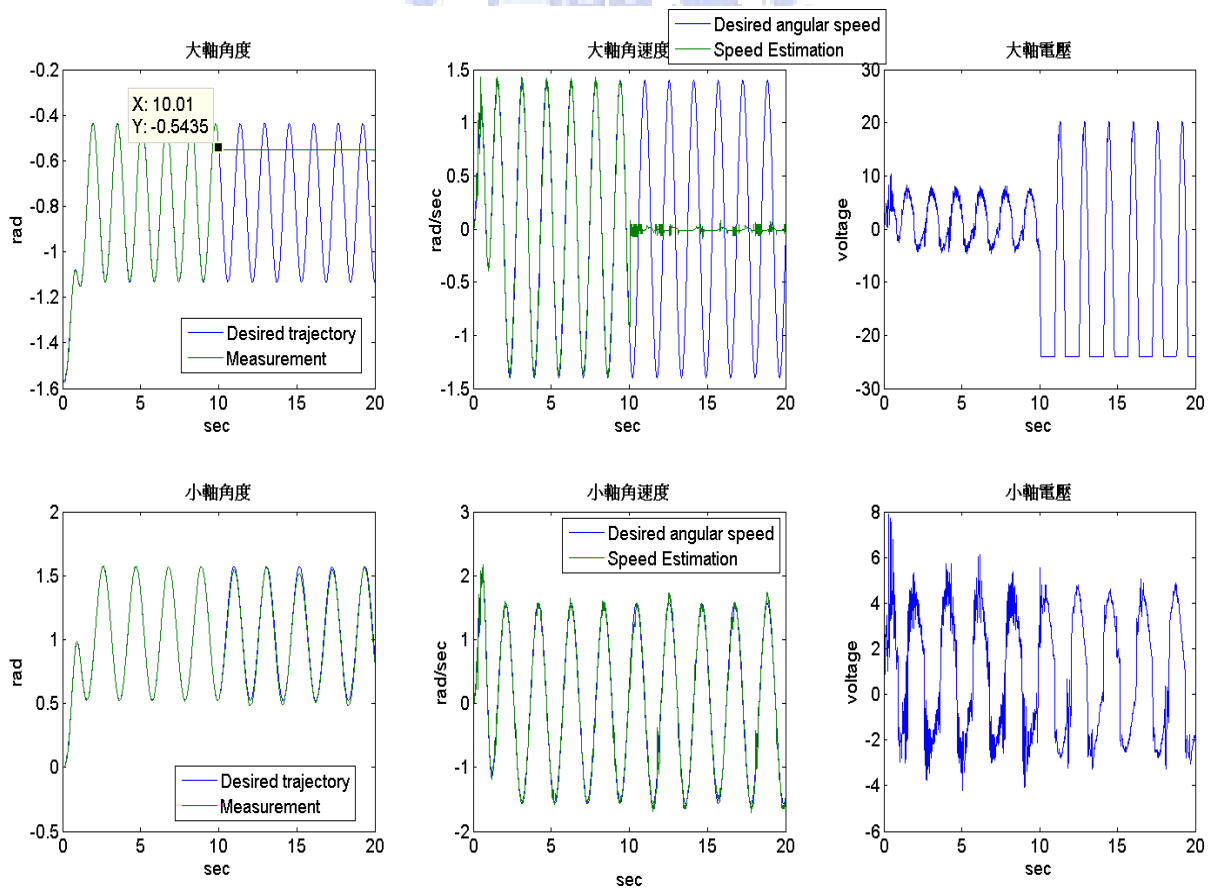


圖 51 實驗 1 的角度、角速度估測及輸出電壓

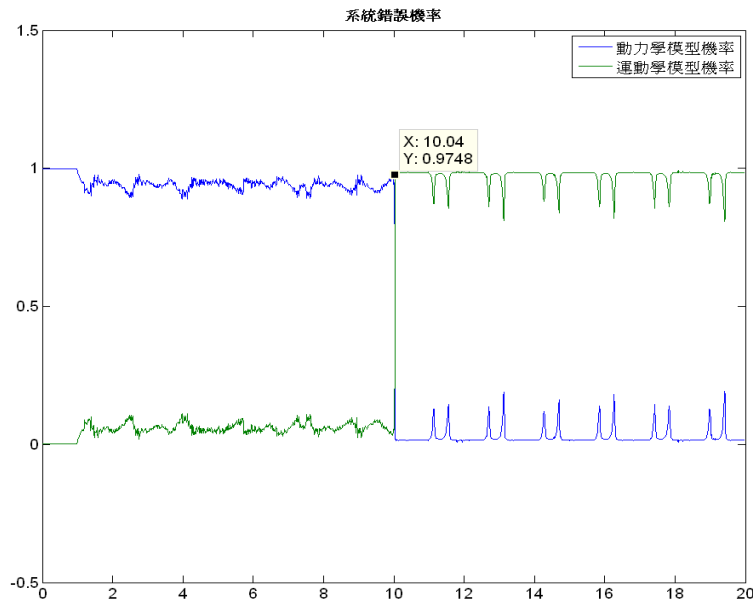


圖 52 實驗 1 動力學模型與運動學模型機率估測(模型 1 及模型 4)

錯誤偵測實驗 2：小軸致動器發生突然卡住之錯誤(Type 2)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 IMM。大軸致動器正常運作，小軸致動器於 10 秒時發生卡住錯誤。由圖 54 可看出從大軸發生錯誤到錯誤偵測系統判斷出系統出錯僅使用了 **0.06 秒**。與實驗 1 使用 GPB-2 演算法的結果相近。

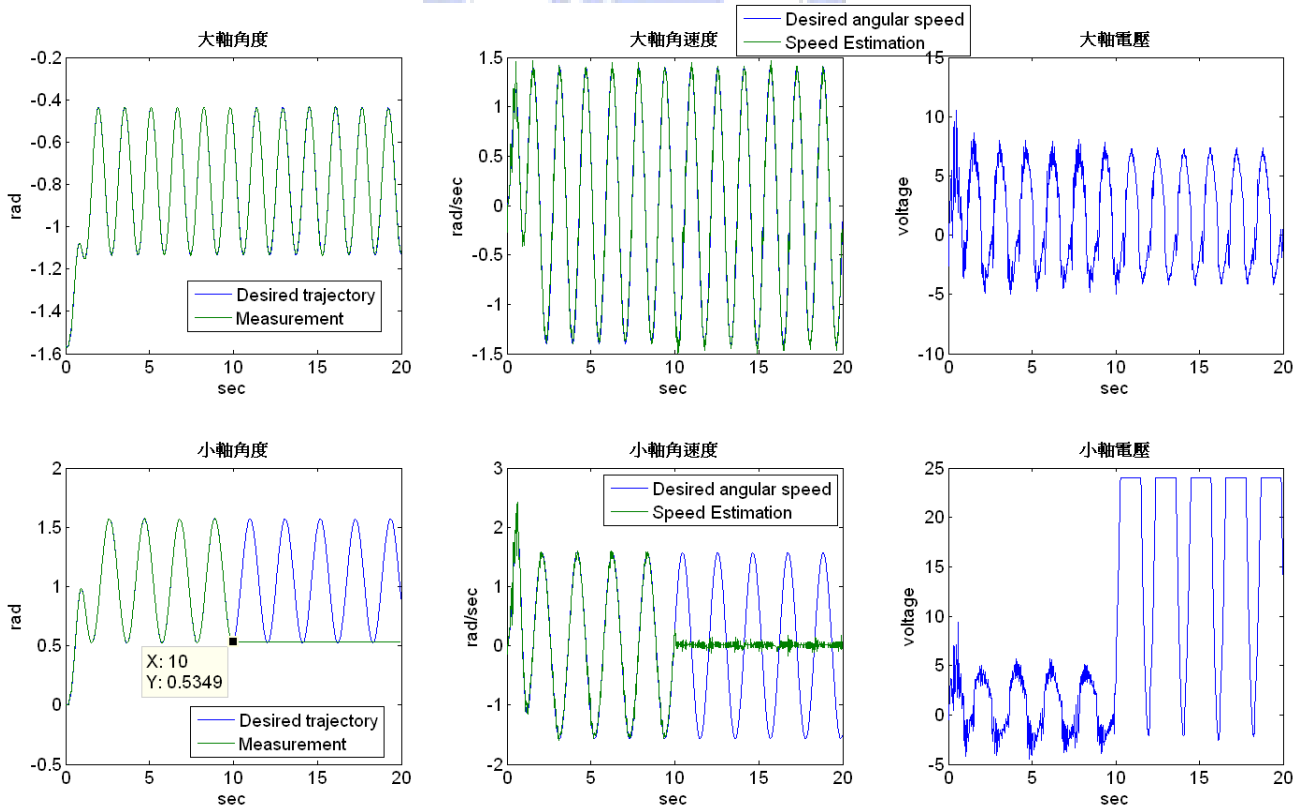


圖 53 實驗 2 的角度、角速度估測及輸出電壓

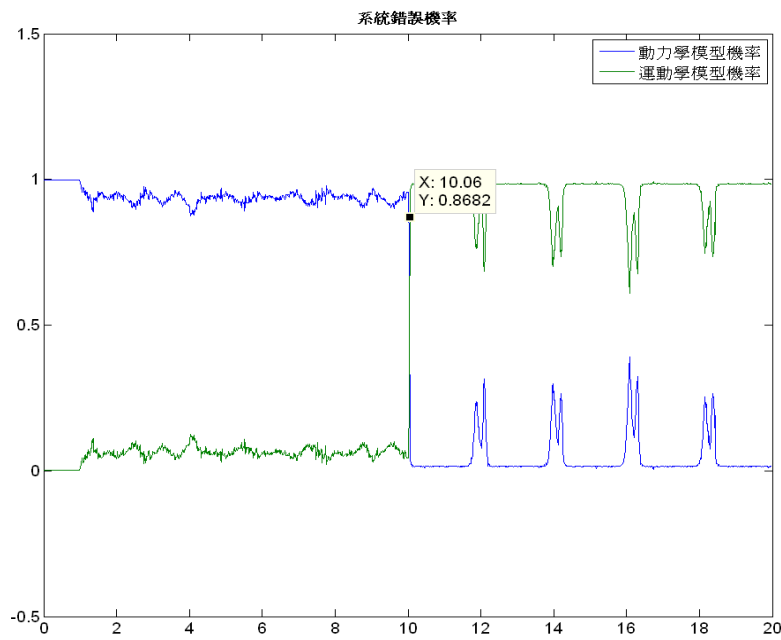


圖 54 實驗 2 動力學模型與運動學模型機率估測(模型 1 及模型 4)

錯誤偵測實驗 3：大軸與小軸致動器發生同時突然卡住之錯誤(Type 3)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2。大軸與小軸致動器同時於 7.2 秒時發生錯誤。由圖 56 可看出從大軸發生錯誤到錯誤偵測系統判斷出系統出錯僅使用了 0.06 秒。

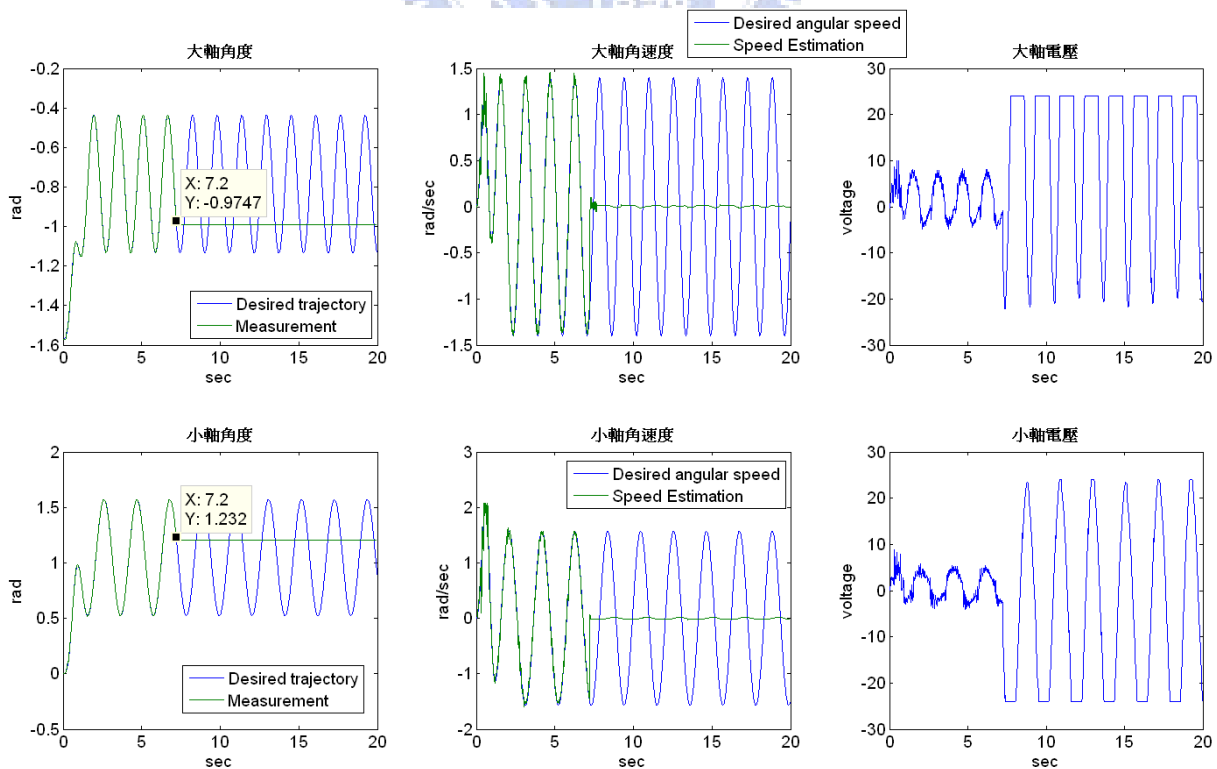


圖 55 實驗 3 的角度、角速度估測及輸出電壓

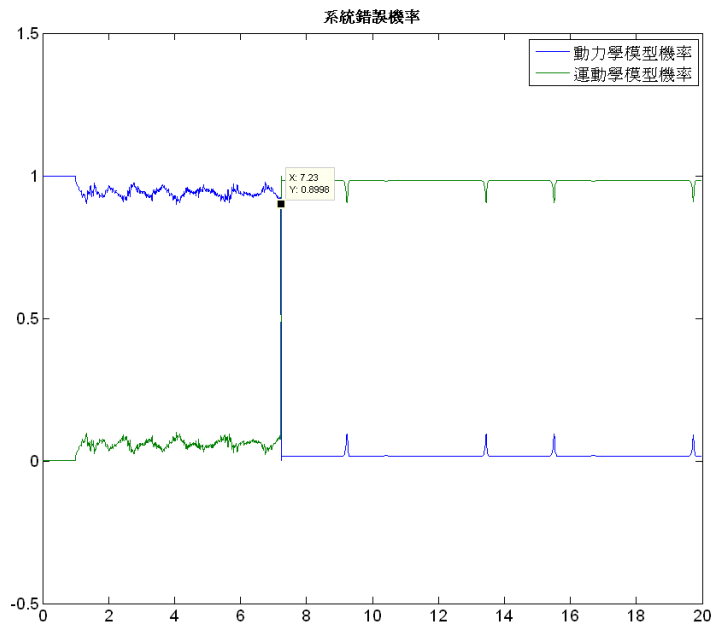


圖 56 實驗 3 動力學模型與運動學模型機率估測(模型 1 及模型 4)

5.4 錯誤判別實驗結果

錯誤判別為階層式錯誤偵測與判別系統的後端，使用模型 2、模型 3 及模型 4，即透過運動學模型和動力學模型於大軸與小軸的列組合，作為判斷大軸或小軸的運作正常與否的分類模型。在錯誤判別實驗中，量測雜訊平均值為 0 標準差為 0.001 的高斯雜訊，動力學模型及運動學模型處理雜訊分別為平均值為 0 標準差為 0.0023 及 0.003 的高斯雜訊，錯誤偵測在系統運作 1 秒後啟動。當錯誤偵測系統中的運動學模型機率大於 **0.75** 後，便啟動錯誤判別系統；而當錯誤判別系統內的任一模型機率大於 **0.75**，即判別系統發生該模型的錯誤種類。

透過表 8 的 6 種不同錯誤形式的實驗可看出，錯誤判別系統能夠有效的判斷出系統是否有錯誤發生，對於致動器突然靜止的錯誤，都能在 **0.15 秒**內判斷出來，對於較不明顯的錯誤或漸進衰減的錯誤，過了暫態反應期後也都能夠正確指出錯誤的種類。

錯誤判別實驗 1：大軸發生卡住錯誤(Type 1)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2，大軸致動器於 10 秒時發生錯誤，小軸致動器正常運作。

由圖 58 可看出從大軸發生錯誤到錯誤判別系統判斷出大軸出錯僅使用了 **0.08 秒**。

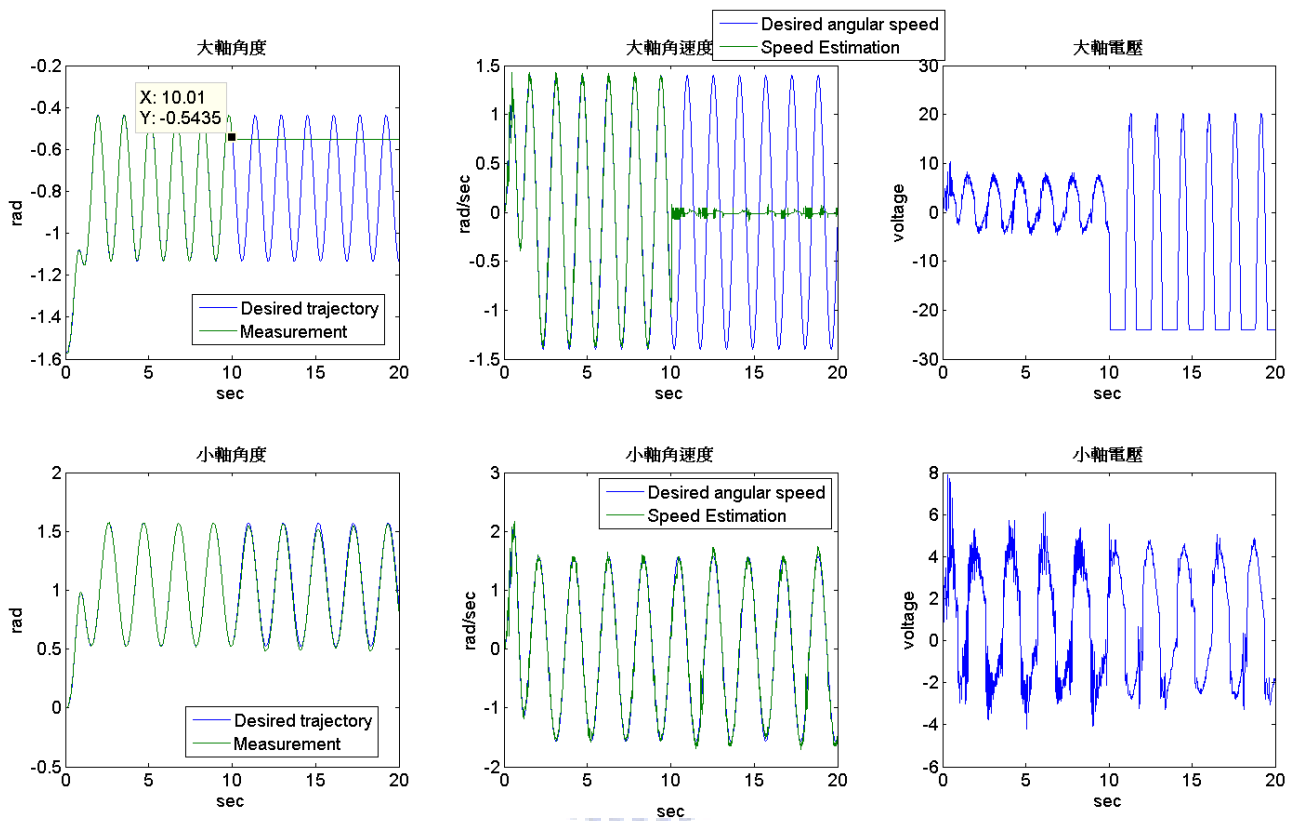


圖 57 實驗 4 的角度、角速度估測及輸出電壓

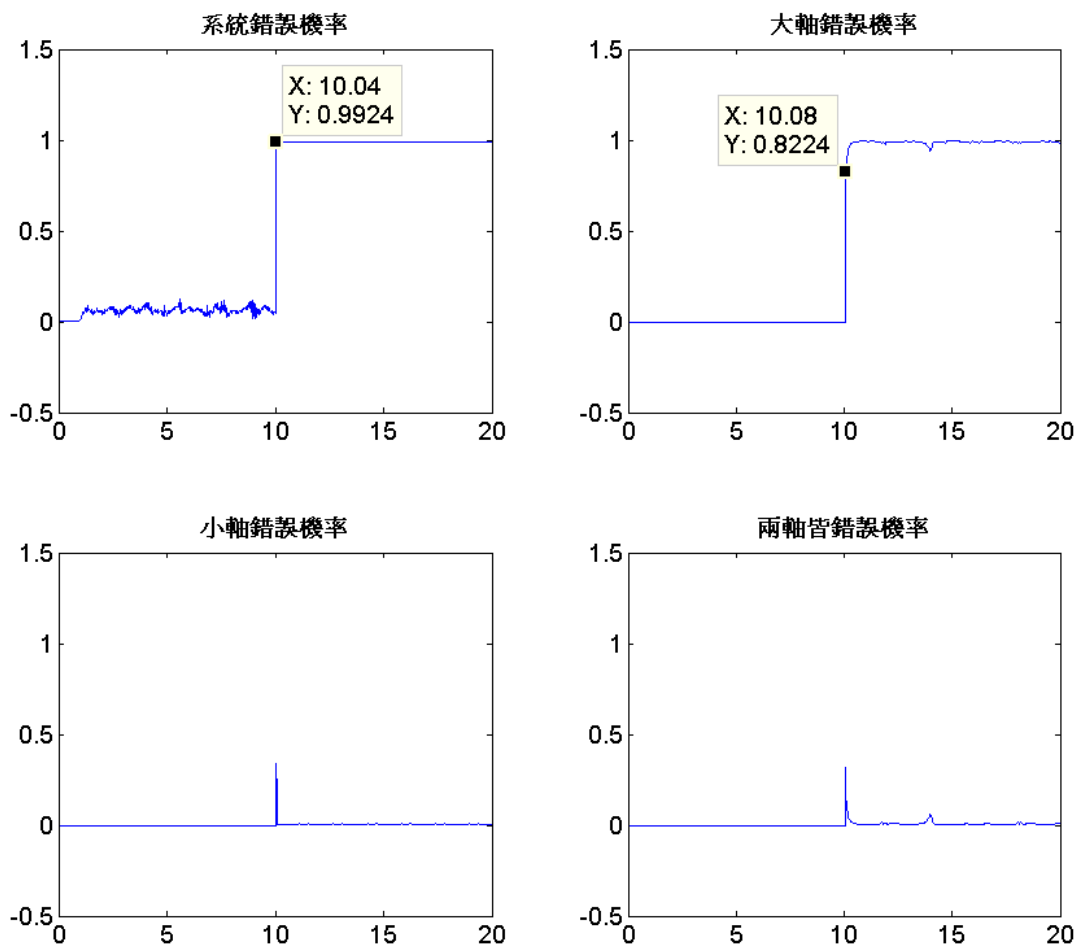


圖 58 實驗 4 各軸發生錯誤之機率估測

錯誤判別實驗 2：大軸發生錯誤(Type 1)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 IMM，大軸致動器於 8 秒時發生錯誤，小軸致動器正常運作。

由圖 60 可看出從大軸發生錯誤到錯誤判別系統判斷出大軸出錯使用了 **0.12 秒**，略遜於 GPB-2，原因在於 IMM 演算法只通過一次的濾波器，在估測效果上會比 GPB-2 差一些。

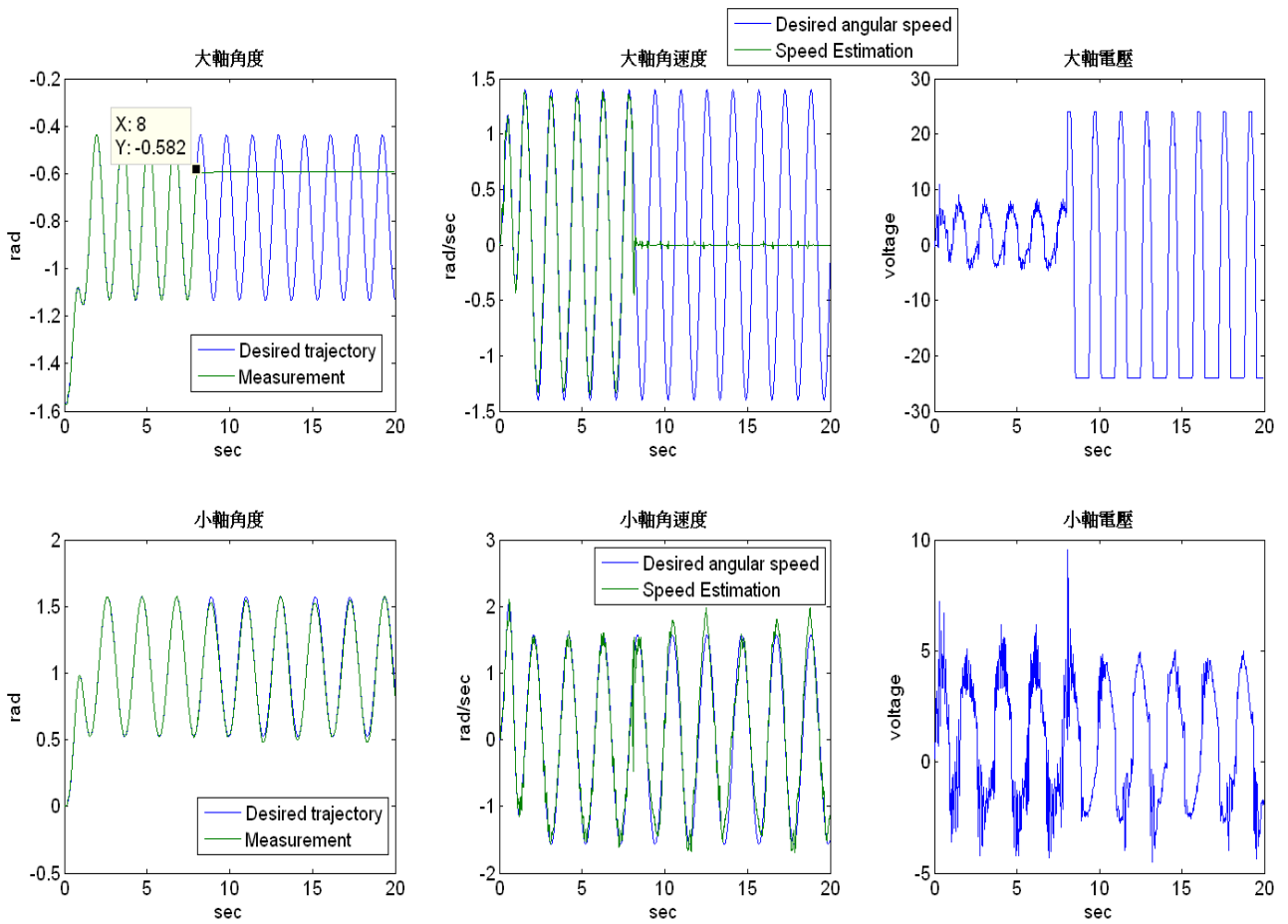


圖 59 實驗 5 的角度、角速度估測及輸出電壓

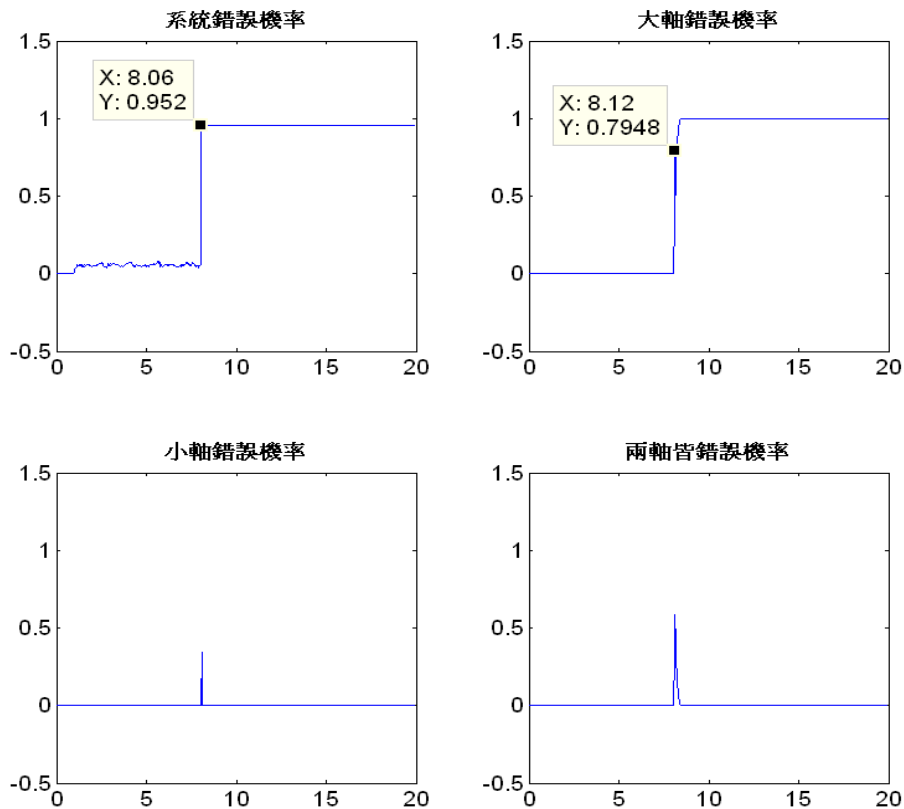


圖 60 實驗 5 各軸發生錯誤之機率估測

錯誤判別實驗 3：兩軸同時發生錯誤(Type 3)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2，大軸與小軸致動器同時於 7.2 秒時發生錯誤。由圖 62 可看出從兩軸同時發生錯誤到錯誤判別系統判斷出兩軸皆出錯僅使用了 0.08 秒。

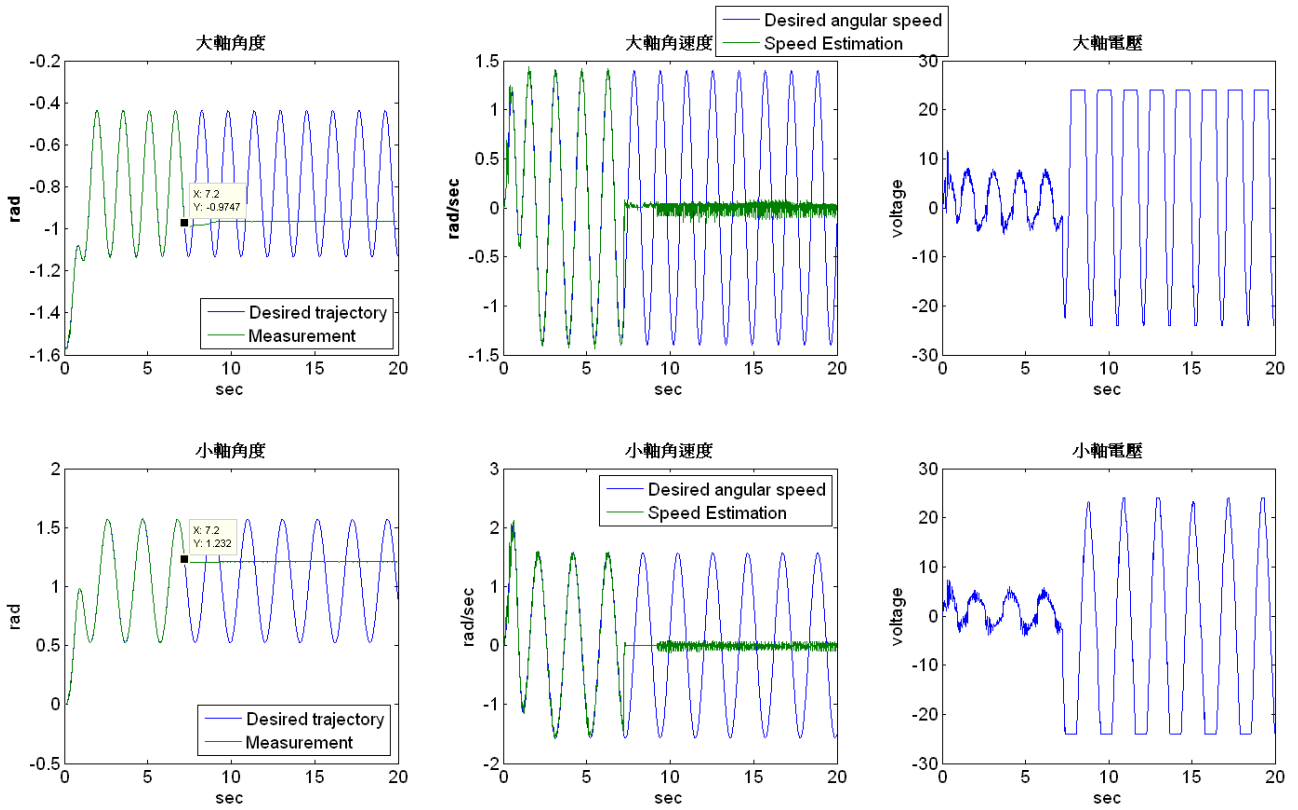


圖 61 實驗 6 的角度、角速度估測及輸出電壓

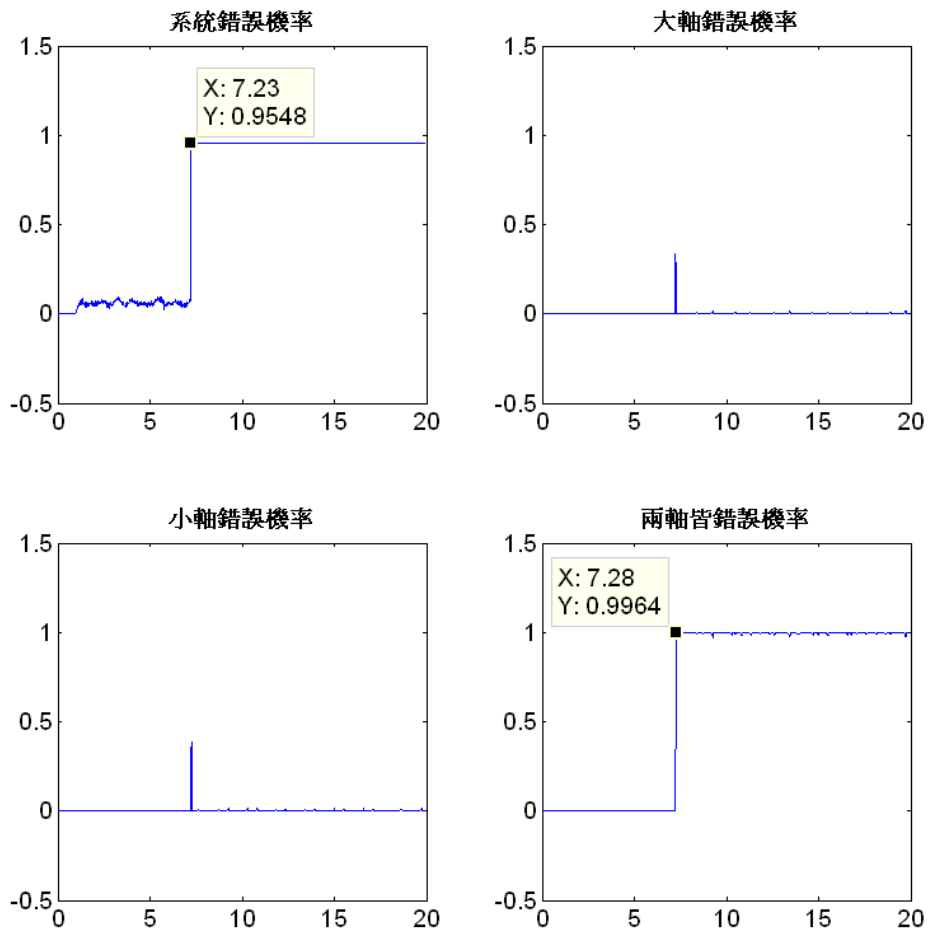


圖 62 實驗 6 各軸發生錯誤之機率估測

錯誤判別實驗 4：兩軸先後發生錯誤(Type 4)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2，大軸於 7 秒時先發生錯誤，小軸致動器接著於 13.5 秒時也發生錯誤。由圖 64 可看出大軸在發生錯誤後，過了 **0.08 秒** 被偵測出大軸發生錯誤；接著小軸發生錯誤後，過了 **0.11 秒** 被偵測出兩軸皆發生錯誤。

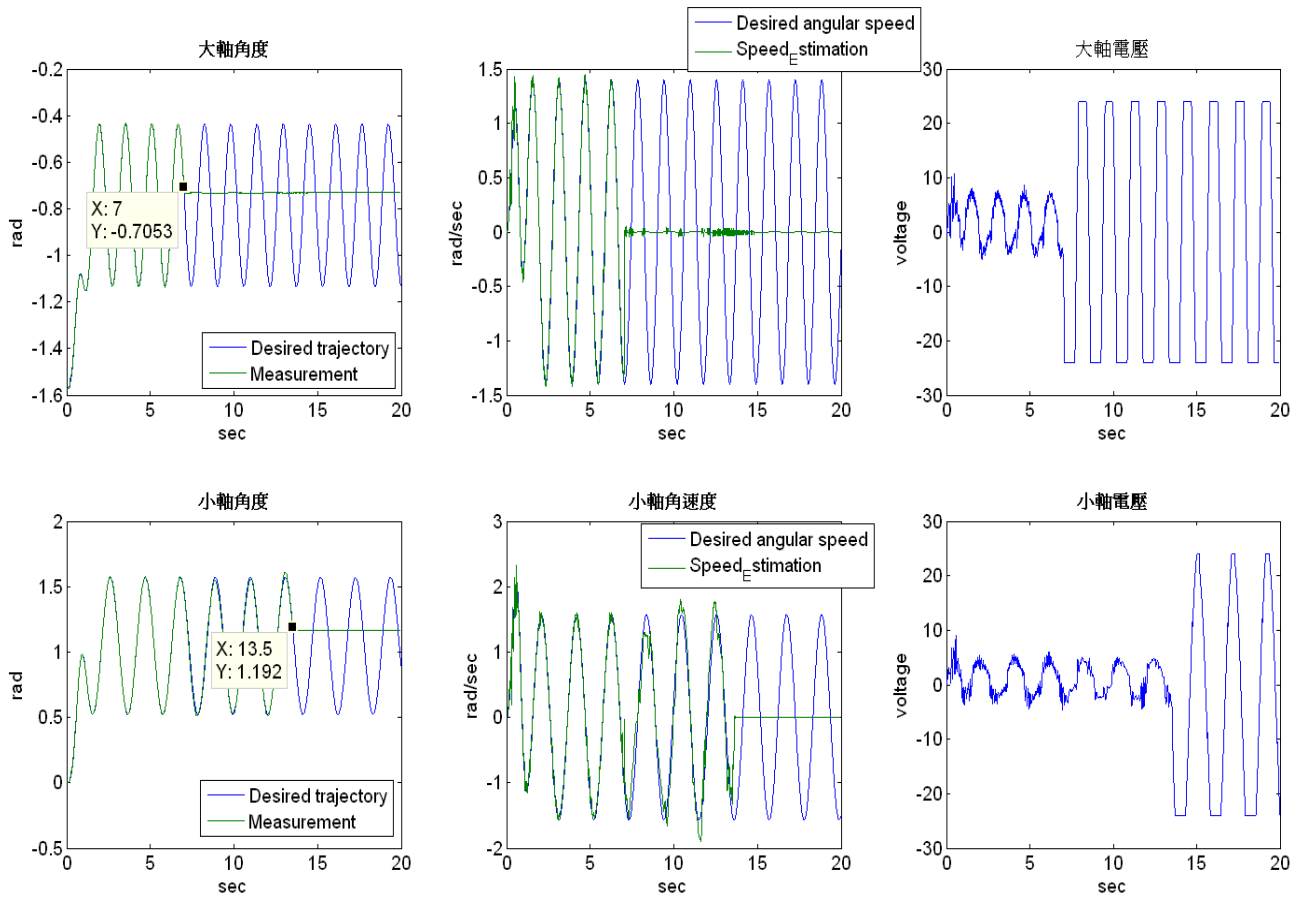


圖 63 實驗 7 的角度、角速度估測及輸出電壓

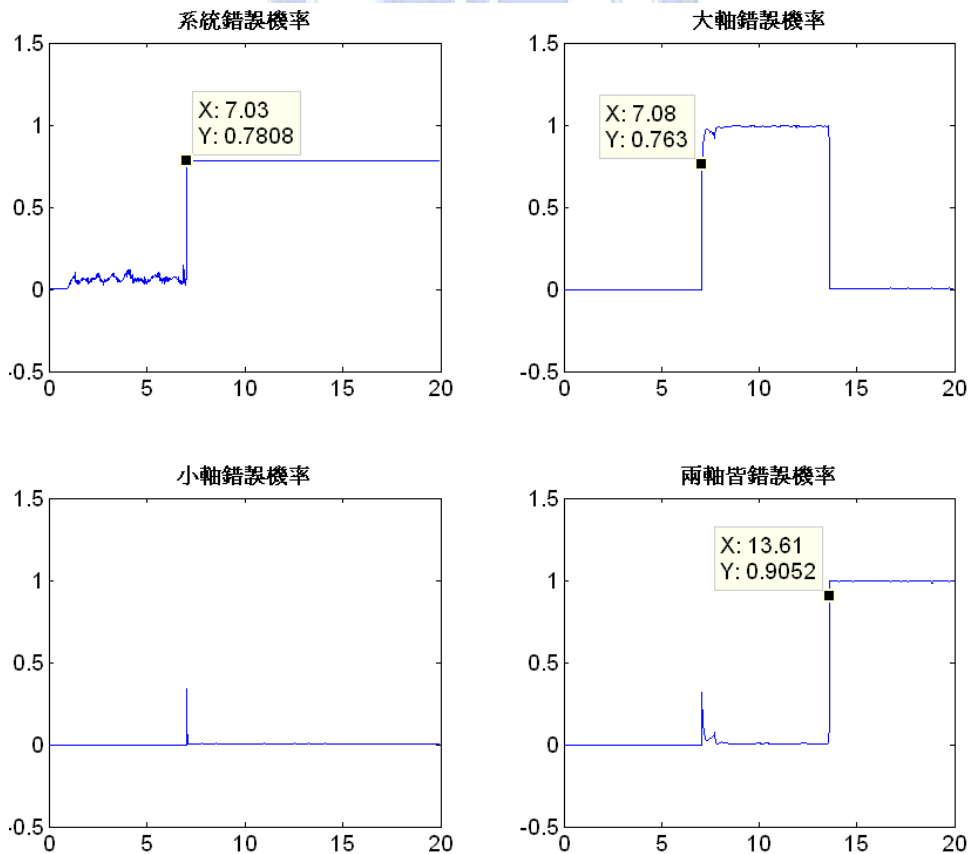


圖 64 實驗 7 各軸發生錯誤之機率估測

錯誤判別實驗 6：致動器輸出功率突然降低(Type 5)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2，大軸於 8 秒後致動器發生輸出功率瞬間降低，僅剩原來之 40%，小軸致動器正常運作。由圖 66 可看出大軸在發生輸出功率僅剩 40% 的錯誤後，過了 **0.37 秒** 被偵測出大軸發生錯誤。判別出大軸發生錯誤的時間較卡住錯誤長，原因在於控制器依然能夠及時反應，計算出相應需要增加的命令電壓，使得角度追蹤誤差還能在一定的誤差範圍之下，可以從圖 66 看出。因此，0.37 秒屬於還能夠被接受的範圍之內。

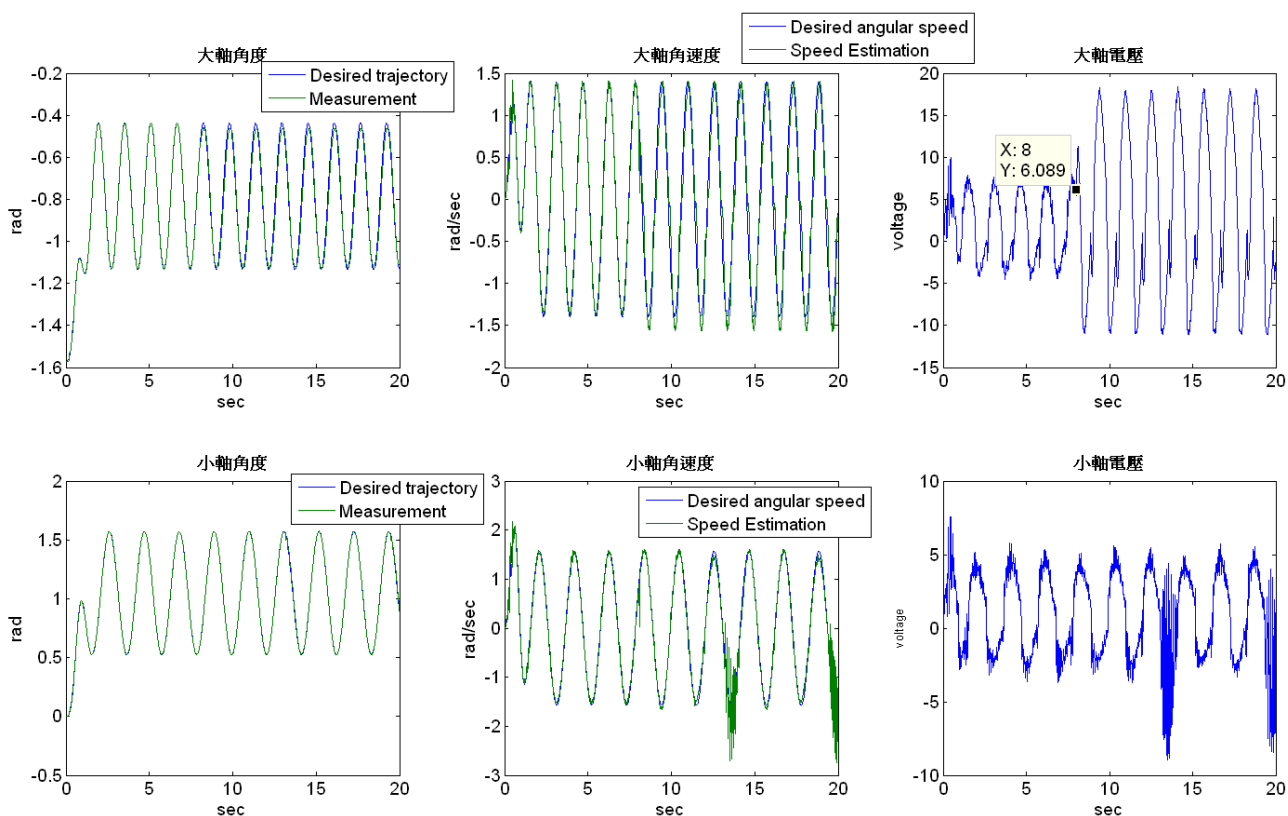


圖 65 實驗 8 的角度、角速度估測及輸出電壓

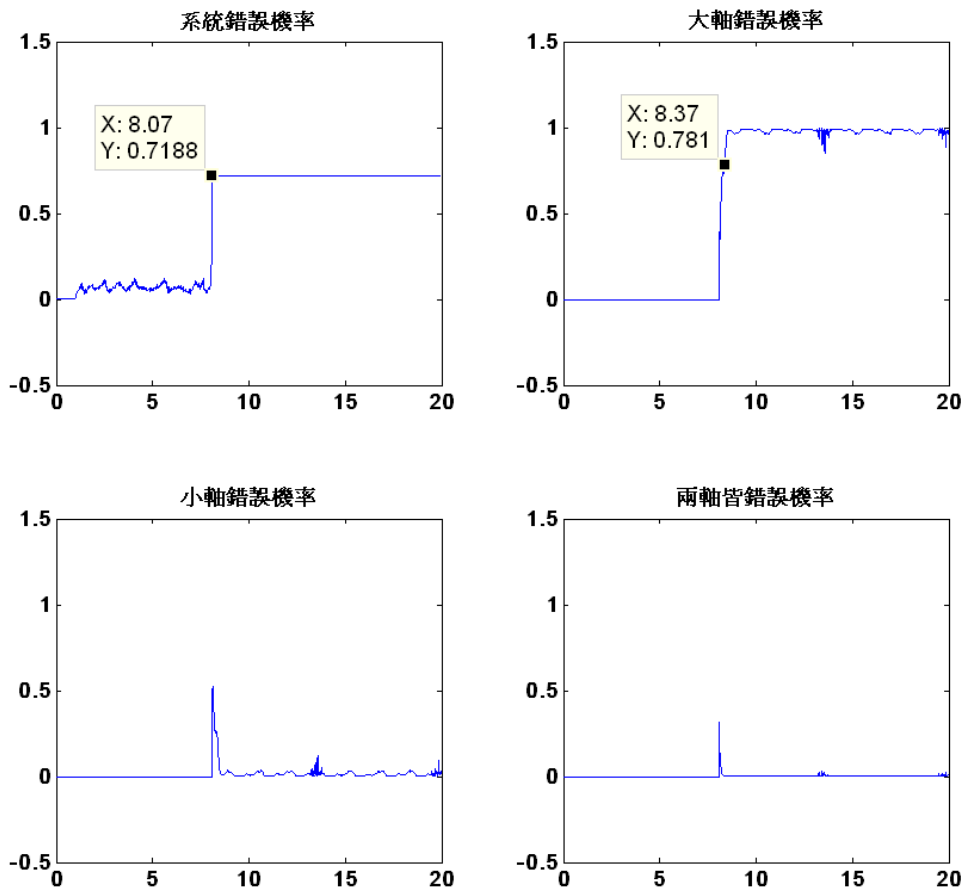


圖 66 實驗 8 各軸發生錯誤之機率估測

實驗 9：致動器輸出功率漸進衰減(Type 6)

軌跡 1，使用僅需位置回授控制器，多模型演算法為 GPB-2，大軸正常運作，小軸致動器於 7 秒後致動器發生(輸出功率 $\times e^{-0.0015(T-t_0)}$)的指數衰減。根據圖 66 的結果可看出，輸出功率大約衰減至 58%以下後，才完全被判定是小軸發生錯誤後，在完全確定錯誤種類前，有一段不確定期，因此系統若要增加此類的錯誤，必須提高錯誤種類的機率臨界值，並且要機率值維持一段時間後才能確定錯誤種類，也就是說，錯誤判別的強健性及偵測速度必須有所取捨才行。

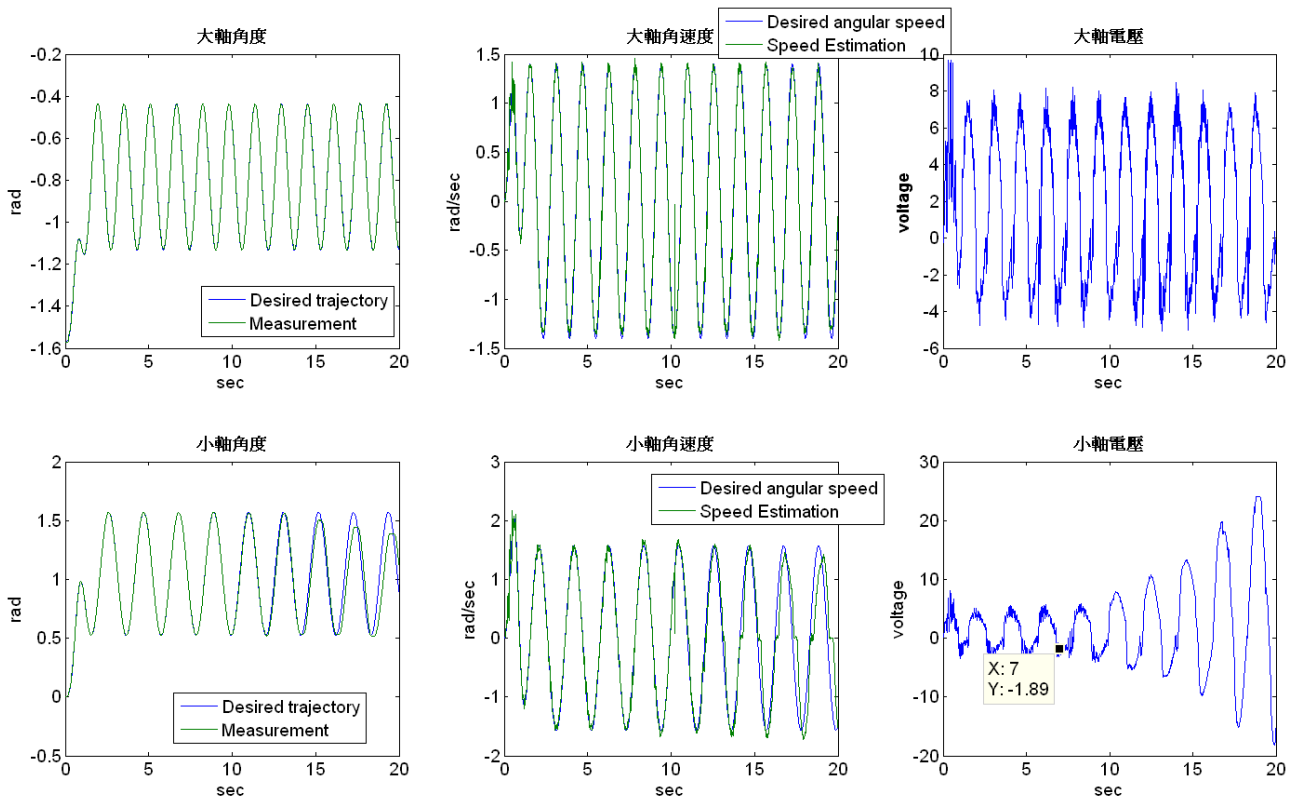


圖 67 實驗 9 的角度、角速度估測及輸出電壓

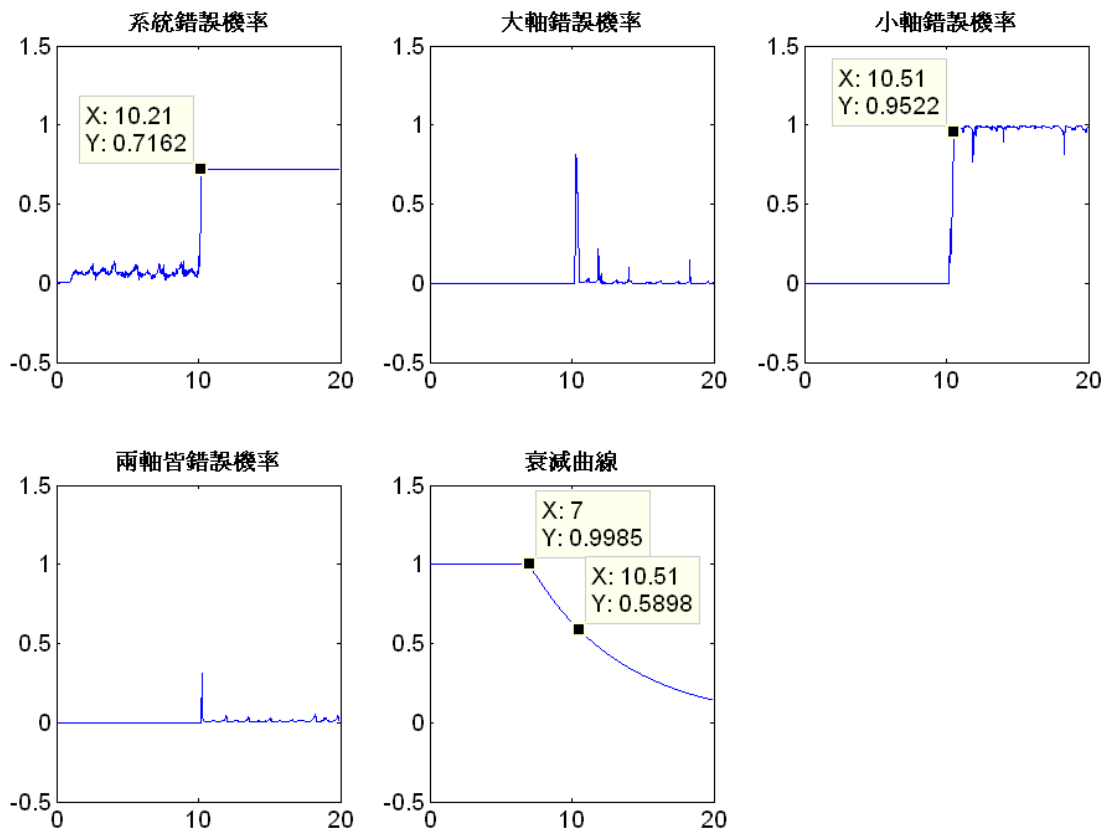


圖 68 實驗 9 各軸發生錯誤之機率估測及衰減曲線

錯誤偵測實驗

實驗代號	錯誤種類	錯誤發生到偵測出來的時間(秒)
實驗 1	Type 1	0.04
實驗 2	Type 2	0.06
實驗 3	Type 3	0.03

表 9 錯誤偵測實驗結果列表

錯誤判別實驗

實驗代號	錯誤種類	錯誤發生到偵測出來的時間(秒)	錯誤發生到判別出來的時間(秒)
實驗 1	Type 1	0.04	0.08
實驗 2	Type 2	0.06	0.12
實驗 3	Type 3	0.03	0.08
實驗 4	Type 4	0.03	0.08, 0.11(大軸錯誤, 兩軸錯誤)
實驗 5	Type 5	0.07	0.37
實驗 6	Type 6	3.21	3.51

表 10 錯誤判別實驗結果列表

透過前兩節的實驗，驗證了本論文所設計的階層式錯誤偵測與判別系統，能夠有效的判斷出表 8 所列的錯誤種類。當錯誤發生時，能夠透過多模型演算法，計算出輸入的命令電壓及角度量測資訊所對應的動力學模型與運動學模型輸出狀態，進而正確的切換到系統所對應的錯誤模型。

表 10 為六種錯誤形式的偵測時間結果表，針對突發性卡住的錯誤，階層式錯誤偵測與判別系統在軌跡 1 的測試中都能在 0.15 秒內正確的偵測並判斷出錯誤種類，對於突發性致動器驅動功率衰減 40% 以下時，也能在 0.4 秒內偵測出來，至於漸進衰減式的錯誤，也能在致動器功率衰減到的一程度以下後偵測出，可以顯示出階層式錯誤偵測與判別系統對於錯誤種類的強健性。

第六章 結論及未來工作

6.1 結論

本論文透過已建立的兩軸平面機械手臂，測試不同控制器的效能及強健性，並且在控制迴路中加入錯誤偵測與判別系統，完成一個具有良好控制效能及錯誤診斷的機械手臂控制系統。首先，針對機械手臂非線性系統的特性，使用非追蹤行卡曼濾波器(UKF)[6]來估測機械手臂的角速度，在實際的硬體上有不錯的估測效果。

有了良好的角速度之後，便可以將此估測值代入計算力矩控制器與透過差分的方式所得到的角速度進行比較。結果顯示，使用 UKF 所估測角速度所得出來的結果效果較使用差分的角速度優異一些，原因在於少了差分的跳動，控制增益能夠加大，使控制效果更好。

第三種控制器是僅需位置回授的新型控制器，概念為在受控場前加一級適當的濾波器消除速度資訊，搭配 Lyapunov 及 KYP Lemma[5]所設計的非線性控制器，便可得到一個只需要角度回授資訊，並具有良好性能的控制系統。從實驗結果可以看出，僅需位置回授的新型控制器

第二部分為錯誤偵測與判別。階層式錯誤偵測與判別系統的架構為多模型架構，透過事先建立好的多組錯誤模型，並使用 UKF 根據輸入電壓及角度量測資訊來估測每個錯誤模型應有的輸出及狀態，藉以判別模型的個別機率。判別演算法使用 GPB-2 及 IMM 兩種，在第五章的實驗結果中發現，GPB-2 相較於 IMM，有較良好的估測效果，但是計算複雜度卻是 IMM 的平方倍，因此使用上必須根據硬體運算速度的規格來做取捨。本論文所使用的硬體核心處理器為 TMS320F28335，是一款具有浮點運算處理單元的高效能 DSP，在優化全開的情況下能夠負荷以 GPB-2 為主的階層式錯誤偵測與判別演算法，因此本論文所呈現的結果大多都以 GPB-2 演算法為主。

總結來說，本論文在機器人即時控制平台上實現錯誤偵測與演算法，並提出一個在僅有位置回授資訊情況下，控制效果依然良好的新型控制器，不僅增加了安全性，也降低硬體成本，增加未來智慧型機器人能夠同時擁有安全與效能兼備的可能性。

6.2 未來工作

本研究使用的控制器及錯誤偵測與判別演算法在實驗平台上實驗都可以得到不錯的結果，但仍有一些需要加强的地方。

1. 動力學模型參數不夠準確，尤其是在摩擦力的部分，只簡單的假設其為庫倫與黏滯摩擦力。雖然非線性控制器能夠補償模型不準確的問題，但是補償程度有限，建立更完整的摩擦力模型將有助於控制器的效能提升。
2. 錯誤判別在致動器功率漸進衰減的錯誤上會有暫態的誤判，因此讓要降低錯誤判別系統的誤判情形，需要再加入額外的模型來判斷系統的錯誤種類。
3. 目前實驗平台上只裝有角度量測器，若此量測器發生錯誤，錯誤偵測與判別演算法便無法運作，因此未來可以加裝陀螺儀或加速規等感測器互相支援，以增加錯誤偵測與判別的強健度。



參考文獻

- [1] R. Kelly, V. Santibanez and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer, London, 2005.
- [2] J. J. Craig, P. Hsu and S. Sastry, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, 6, pp. 16-28, 1987.
- [3] Tesheng Hsiao, Masayoshi Tomizuka, "Design of Position Feedback Controllers for Vehicle Lateral Motion," *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, pp. 5855- 5860, Minneapolis, Minnesota, June 14-16, 2006.
- [4] R. E. Kalman and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov I: Continuous-Time Systems, " *Journal of Basic Engineering*, pp. 394-400, 1960
- [5] J. Collado, R. Lozano and R. Johansson, *Nonlinear and Adaptive Control, Tools and Algorithms for the User*, Imperial College Press, London, 2005.
- [6] Simon J. Julier Jeffrey K. Uhlmann , "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems," *Proceeding of Aerosense : the 11th International Symposium on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*, Orlando, Florida, p182-193, 1997.
- [7] K. P. Murphy, "*Learning Switching Kalman Filter Models*," Compaq Cambridge Research Lab Tech Report 98-10, 1998.
- [8] Blom, H. A. P., and Bar-Shalom, Y., "The interacting model algorithm for systems with Markovian switching coefficients," *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33** (Aug. 1988), 780—783.
- [9] J. J. E. Slotine, and W. Li. "On the adaptive Control of Robot Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, 6, pp. 49-59, 1987.
- [10] M. L. McIntyre, W. E. Dixon, D. M. Dawson, and I. D. Walker, "Fault Detection and Identification for Robot Manipulators", *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, New Orleans, April 2004

- [11] J. H. Shin and J. J. Lee, "Fault Detection and Robust Fault Recovery Control for Robot Manipulators with Actuator Failures", *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics & Automation Detroit, Michigan*, May 1999
- [12] H. Berghuis, H. Roebbers, H. Nijmeijer. "Experimental Comparison of Parameter Estimation- Methods in Adaptive Robot Control," *Automatica*, 31, pp. 1275-1285, 1995.
- [13] A. De Luca, R. Mattone, "An Identification Scheme for Robot Actuator Faults", *Intelligent Robots and Systems(IROS), IEEE/RSJ International Conference on Publication Date: 2-6*, pp.1127- 1131 , Aug 2005.
- [14] A. Tayebi and S. Islam, "Adaptive Iterative Learning Control for Robot Manipulators: Experimental Results," *Control Engineering Practice*, vol. 14, pp. 843-851, 2006

