

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

應用 CLF 於二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研



Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order

Polynomial Systems using CLF technique

研究生：吳家榮

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十八年八月

應用 CLF 於二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究

Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order

Polynomial Systems using CLF technique

研究生：吳家榮

Student : Chia-Jung Wu

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Yew-Wen Liang

國立交通大學電機與控制工程學系



Submitted to Department of Electrical and Control Engineering
College of Electrical Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Electrical and Control Engineering
June 2008
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年八月

應用 CLF 於二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究

研究生：吳家榮

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

摘要

本論文探討單輸入單輸出之二次多項式系統之穩健輸出追蹤及內部狀態穩定化議題，所探討的不確定因素來自系統本身的一個參數的估計值與真實值間的誤差。先利用預備回授(preliminary feedback)使無干擾系統(nominal system)達到輸出追蹤並找出對應的平衡點，再利用控制李亞普諾夫(Control Lyapunov Function)理論設計控制律，使系統在有參數不確定因素下達成輸出追蹤並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，同時達到穩健輸出與內部狀態穩定的性能表現。所提出的方法改善了論文[1]利用可變結構控制技術來設計輸出追蹤律但無法保證其內部狀態穩定之缺點。所獲得的結果也應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究。模擬結果驗證了所設計穩健控制律之有效性。

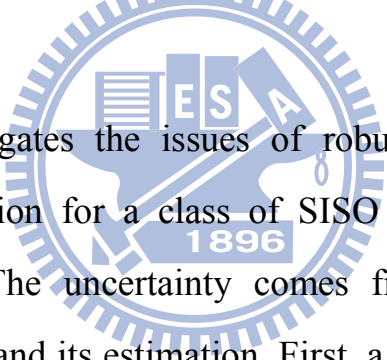
Study of Robust Output Tracking for a Class of 2nd-Order Polynomial Systems using CLF technique

Student : Chia-Jung Wu

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The logo of National Chiao Tung University is a circular seal. It features a gear-like outer border. Inside the seal, there is a stylized building or structure. The letters 'E', 'S', and 'A' are prominently displayed in the center, with '1896' written below them. The seal is semi-transparent and overlaid on the abstract text.

This thesis investigates the issues of robust output tracking and internal state stabilization for a class of SISO uncertain second-order polynomial systems. The uncertainty comes from a parameter error between the true value and its estimation. First, a preliminary feedback is employed to achieve both output tracking performance and stability of the associated equilibrium point for the nominal system. Second, we design an additional controller using a known Control Lyapunov Function such that the output tracking performance and the internal system stabilization can simultaneously be achieved. The proposed scheme improves the design of [1] in which the internal states might be unstable during the output tracking procedure. The analytical results are also applied to a tap-changer control based power system for voltage regulation. Simulation results demonstrate the use and the benefits of the proposed scheme.

誌 謝

本篇論文能夠順利完成，實在要感謝很多人關心與協助。首先，要感謝我的指導教授梁耀文博士，感謝老師細心與耐心的指導以及對我的鼓勵，使我在這兩年的學習中受益良多，除此之外老師對於日常生活以及做人處事的道理也不吝提供幫助與提供正確且良好的觀念，對於往後的人生將有很大的助益。也要感謝系上曾給予協助的老師，同時，也要感謝口試委員廖德誠博士、吳章銘博士和徐聖均博士給予指正與寶貴的建議，使本論文更加完備。

接下來要感謝徐聖棟學長，徐益銘學長，邱紹偉學長及陳丞昶學長在我遇到困難時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學士昕，立偉陪伴了我兩年研究所生活，在我心情低落的時候能夠協助我，並且在學業及生活上給我很大的支持與幫助，而學弟源廷，宜展，旭志也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對於我的幫助，使我的論文研究能夠更加順利。感謝所有我認識的朋友，有你們的陪伴讓我的研究所生活過得多采多姿且充滿快樂的回憶。

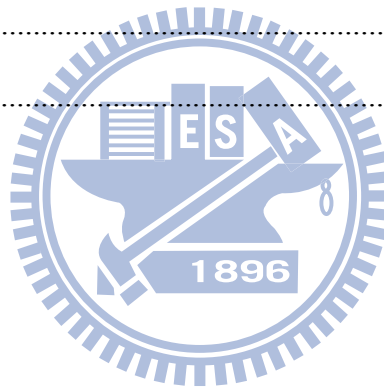
最後要感謝我的家人對我的包容，不管發生什麼事總是支持我，給我最大的鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謹將此論文獻給所有我愛的人，謝謝你們!

目錄

頁次	
中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii

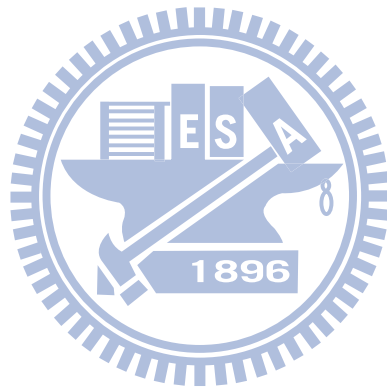
Chapter1 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機:	2
1.3 論文架構	3
Chapter2 預備知識	5
2.1 控制李亞普諾夫函數	5
2.2 切換式系統	7
2.3 電力系統模型	10
2.4 VSC 設計控制律達到二項式之穩健輸出追蹤	14
Chapter 3 二次多項式系統之穩健輸出追蹤	17
3.1 問題描述	18
3.2 控制律設計	18
Chapter 4 應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究	27
4.1 系統動態方程式	28

4.2	控制律設計	30
4.2.1	系統平衡點分析:.....	30
4.2.2	穩定點分析:.....	32
4.2.3	控制律設計	34
4.2.4	模擬結果	46
4.3	VSC 與 CLF 兩種控制律的比較.....	49
4.3.1	VSC 控制律設計	49
4.3.2	VSC 與 CLF 兩種控制律的比較.....	51
Chapter 5	結論與未來研究方向	91
5.1	結論	91
5.2	未來研究方向	92
參考文獻	93



表目錄

表 4.1	CLF 與 VSC 控制律的性能比較.....	55
表 4.2	CLF 與 VSC 控制律的性能比較.....	55



圖目錄

圖 2.1 原始切換法則	9
圖 2.2 新的切換法則	9
圖 2.3 電力系統模型(a)原始電力系統模型加上變壓器(b)戴維寧等效	11
圖 3.1 $a > 0, \Delta > 0$, (3.10)示意圖	25
圖 3.2 $a < 0, \Delta < 0$, (3.10)示意圖	25
圖 3.3 $a < 0, \Delta < 0$, (3.10)示意圖	26
圖 3.4 收斂區域示意圖	26
圖 4.1 u_0 為正值, 平衡點與 u_0 對 Q_{10} 的變化	31
圖 4.2 u_0 為負值, 平衡點與 u_0 對 Q_{10} 的變化	31
圖 4.3 (a)左邊三圖代表平衡點為 x_{01} 控制律為 u_{01} , Q_{10} 對三個特徵值的影響 ...	33
圖 4.4 $e_4 = 0, b = 0$ 發生的區域	56
圖 4.5 $a \approx 0$ 的切換法則	56
圖 4.6 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9, \Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -0.3$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。	57
圖 4.7 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9, \Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -0.1$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。	57
圖 4.8 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9, \Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區	

面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等

高曲面，藍色區域以上則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。..... 58

圖 4.9 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 2$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區

面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等

高曲面，藍色區域以上則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。..... 58

圖 4.10 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = 0.3$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，兩個

黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得

$\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面，兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得

$\dot{e}_3 < 0$ 的區域。..... 59

圖 4.11 黃色曲面在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = 0.1$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，兩個黃

色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得

$\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面，兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得

$\dot{e}_3 < 0$ 的區域。..... 59

圖 4.12 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 0$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色

區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的

等高曲面，藍色區域以下則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。... 60

圖 4.13 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 2$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色

區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的

等高曲面，藍色區域以下則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。... 60

圖 4.14 黃色曲面代表在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -10^{-3}$ 時，將(4.22)式代入 \dot{e}_4 所

得 $\dot{e}_4 = 0$ 的等高曲面，兩個黃色曲面所夾的是 $\dot{e}_4 > 0$ 的區域，藍色區面

代表將(4.29)式代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面，兩個藍色曲面所夾的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。..... 61

圖 4.15 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -10^{-3}$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域，藍色曲面代表將(4.22)式代入 \dot{e}_4 所得 $\dot{e}_4 = 0$ 的等高曲面，兩個藍色曲面所夾的是 $\dot{e}_4 > 0$ 的區域。... 61

圖 4.16 綠色線內部代表當 $e_3 = 0$ 、 $e_4 = 0$ ，控制律為 $u = u_0$ 時， e_1 、 e_2 的收斂範圍，當 $Q_{10} = 9$ 62

圖 4.17 綠色線內部代表當 $e_3 = 0$ 、 $e_4 = 0$ ，控制律為 $u = u_0$ 時， e_1 、 e_2 的收斂範圍，當 $Q_{10} = 11$ 62

圖 4.18 $Q_{10} = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，初始電壓為正值，(a) Q_1 值，(b) 狀態 x_1 ，(c) 狀態 x_2 ，(d) 狀態 x_3 ，(e) 狀態 x_4 (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值。..... 63

圖 4.19 $a \approx 0$ 時新的切換法則..... 63

圖 4.20 $Q_{10} = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，初始電壓為正值，(a) Q_1 值，(b) 狀態 x_1 ，(c) 狀態 x_2 ，(d) 狀態 x_3 ，(e) 狀態 x_4 (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值，(g) 狀態誤差 e_1 ，(h) 狀態誤差 e_2 ，(i) 狀態誤差 e_3 ，(j) 狀態誤差 e_4 ，(k) 切換信號，(l) u 值。..... 64

圖 4.21 $Q_{10} = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，初始電壓為負值，(a) Q_1 值，(b) 狀態 x_1 ，(c) 狀態 x_2 ，(d) 狀態 x_3 ，(e) 狀態 x_4 (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值，(g) 狀態誤差 e_1 ，(h) 狀態誤差 e_2 ，(i) 狀態誤差 e_3 ，(j) 狀態誤差 e_4 ，(k) 切換信號，(l) u 值。..... 65

圖 4.22 $Q_{10} = 11 + 0.2\sin(t)$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ，(a) Q_1 值，(b) 狀態 x_1 ，(c) 狀態 x_2 ，(d) 狀態 x_3 ，(e) 狀態 x_4 (負載電壓值)，(f) 變壓器調節值，(g) 狀態誤差 e_1 ，(h) 狀態誤差 e_2 ，(i) 狀態誤差 e_3 ，(j) 狀態誤差 e_4 ，(k) 切換信號，(l) u 值。..... 66

圖 4.23 Q_{10} 在11~11.5之間變化， $\Delta Q_1 = 0$ ，(a) Q_1 值，(b) 狀態 x_1 ，(c) 狀態 x_2 ，

(d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值 , (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號 , (l) u 值。 67

圖 4.24 $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, (a) Q_1 值 , (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值 , (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號 , (l) u 值。 68

圖 4.25 $Q_{10} = 10$, ΔQ_1 在 $-0.2 \sim 0.2$ 之間變動 , (a) Q_1 值 , (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值 , (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號 , (l) u 值。 69

圖 4.26 $Q_{10} = 10 + 0.2\sin(t)$, $\Delta Q_1 = 0.1\sin(3t)$, (a) Q_1 值 , (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值 , (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號 , (l) u 值。 70

圖 4.27 Q_{10} 在 $10 \sim 10.5$ 之間變化 , ΔQ_1 在 $-0.1 \sim 0.1$ 之間變動 , (a) Q_1 值 , (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值) , (f) 變壓器調節值 , (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號 , (l) u 值。 71

圖 4.28 $\Delta Q_1 = 0$ 時 , 狀態 x_1 、 x_3 、 x_4 滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域 , 72

圖 4.29 $Q_{10} = 10$ 時 , 狀態 x_1 、 x_3 、 x_4 滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域 73

圖 4.30 黃色曲面是在當 $a > 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 0$ 時 , $\Delta = 0$ 的等高曲面 , 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域 , 黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域 , 藍色曲面以上為滿足 Ω^* 的區域 , 藍色曲面以下為不滿足 Ω^* 的區域。 74

圖 4.31 黃色曲面是在當 $a > 0$ ，當 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 0$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以上為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以下為不滿足 Ω^* 的區域。 74

圖 4.32 黃色曲面是在當 $a > 0$ ， $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 2$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以上為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以下為不滿足 Ω^* 的區域。 75

圖 4.33 黃色曲面是在當 $a > 0$ ， $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 2$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以上為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以下為不滿足 Ω^* 的區域。 75

圖 4.34 黃色曲面是在當 $a < 0$ ， $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 0$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。 76

圖 4.35 黃色曲面是在當 $a < 0$ ， $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 0$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。 76

圖 4.36 黃色曲面是在當 $a < 0$ ， $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 2$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。 77

圖 4.37 黃色曲面是在當 $a < 0$ ， $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 2$ 時， $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域

域，藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域，藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。..... 77

圖 4.38 $Q_{10} = 11.5$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x} = [0.28, 3, -0.028, 0.8]$ 在滿足 Ω^* 的區域內使用 VSC 設計的控制律無法達成電壓調節的例子，(a) 狀態 x_1 ，(b) 狀態 x_2 ，(c) 狀態 x_3 ，(d) 狀態 x_4 78

圖 4.39 $Q_{10} = 11.5$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x} = [0.28, 3, -0.028, 0.8]$ 使用 4.2 節設計的控制律並在其收斂範圍的系統狀態圖，(a) 狀態 x_1 ，(b) 狀態 x_2 ，(c) 狀態 x_3 ，(d) 狀態 x_4 78

圖 4.40 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_1 比較圖 79

圖 4.41 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_2 比較圖 79

圖 4.42 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_3 比較圖 80

圖 4.43 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_4 比較圖 80

圖 4.44 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ， u 值比較圖 81

圖 4.45 使用 CLF 控制律的切換信號 81

圖 4.46 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_1 放大比較圖 82

圖 4.47 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_2 放大比較圖 82

圖 4.48 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_3 放大比較圖 83

圖 4.49 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_4 放大比較圖 83

較圖	83
圖 4.50 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ， u 值放大比較圖	84
圖 4.51 放大比較時使用 CLF 控制律的切換信號.....	84
圖 4.52 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_1 比較圖	85
圖 4.53 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_2 比較 圖	85
圖 4.54 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_3 比較 圖	86
圖 4.55 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_4 比較 圖	86
圖 4.56 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ， u 值比較圖	87
圖 4.57 使用 CLF 控制律的切換信號.....	87
圖 4.58 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態 x_1 模擬時 間 1 秒比較圖	88
圖 4.59 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，狀態模擬時間 1 秒比較圖	88
圖 4.60 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，模擬時間 1 秒比較圖	89
圖 4.61 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ，模擬時間 1 秒比較圖	89
圖 4.62 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ 、初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$ ， u 值模擬時間 1 秒比較圖	90
圖 4.63 模擬時間 1 秒時使用 CLF 控制律的切換信號.....	90

Chapter 1

緒論



1.1 研究背景

由於某些實際系統無法經由單一回授使系統穩定，必須透過控制律切換來使系統穩定，例如：在[2]、[3]、[4]中所提的非完整系統，經由 Brockett's condition[2]、[5]可知無法使用單一回授使其穩定，在[6]使用了切換式系統的概念來解決這問題。若系統需要兩組控制器輸入切換來達到穩定的目的，我們可以將第一組控制律與受控體當作一個系統，將第二組控制律與受控體當作另一個系統，此種形式也是屬於切換式系統的一種。

由於有些實際系統其系統動態方程式是多項式的形式，像是磁浮系統[7]、電磁震盪器 (electromagnetic oscillator) [8]之研究，其系統動態方程式是以二次多項式呈現，所以多項式系統已逐漸引起大家的注意。

針對多項式系統的研究，文獻[7]、[9]-[10]都有探討。文獻[7]針對一個自由度的磁浮系統(Levitation system)，其系統形式為一個單輸入的二次多項式系統，在某些條件下利用二階順滑模式控制(sliding mode control)設計控制律，使系統達到穩定的效果。文獻[9]針對單輸入的多項式系統利用控制李亞普諾夫函數(Control Lyapunov Function, CLF) 探討使系統穩定的條件及對應穩定控制律的建構，並將其結果應用到穩定磁浮系統上[7]。文獻[10]將文獻[9]的結果推廣到多輸入的二次多項式系統，利用 CLF 找出使系統穩定得條件及對應之穩定的控制律的建構，並能將使系統穩定的控制律作參數化，並探討片段連續的穩定控制律之存在條件及設計。此外文獻[9]及[10]都不考慮系統不確定因素(model uncertainty)及外在干擾(external disturbance)。

1.2 研究動機



針對單輸入單輸出具有不確定因素之二次多項式系統在非控系統不存在平衡點的情況下，論文[1]透過可變結構控制理論設計控制律，使系統達到穩健輸出追蹤的目的，但系統內部狀態在輸出追蹤過程中可能因不滿足達成輸出追蹤所需的假設條件而造成系統不穩定的現象發生。

在本論文中，我們將針對單輸入單輸出具有參數不確定因素之二次多項式系統在非控系統不存在平衡點的狀況下，先針對無干擾系統利用預備回授使系統達到輸出追蹤並找出對應的平衡點，接著在設計控制律使系統在有參數不確定因素下達成輸出追蹤並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，如此則可以達到穩健輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。

在本論文中，我們也將針對二項式系統輸出追蹤及內部狀態穩定化所獲得的結果應用到以變壓器控制之電力系統中[11]之電壓調節上，此電力系統原始模型

是由 Dobson 和 Chiang[17]所提出，系統模型中包含發電機、無限匯流排與非線性負載，並且系統會呈現有電壓崩潰的現象 [12-13,16-17]，其電壓崩潰發生於鞍點分歧處(saddle node bifurcation)附近[17-18]。發生電壓崩潰現象的原因可歸納於電力系統操作在穩定邊界，負載損耗增加所造成[13,18]。為了使系統能達到電壓調節的目的，因此我們在原始系統加入控制點，在原始系統加入一個變壓器(tap changer)。當負載損耗有所變化時，利用調整變壓器來達到電壓保持穩定值，避免電壓崩潰的發生。對於變壓器用於電力系統的效果，在文獻[15,19-21]有被討論。

我們將針對二項式系統輸出追蹤及內部狀態穩定化所獲得的結果應用到以變壓器控制之電力系統之電壓調節問題。在論文[1]利用可變結構控制設計來設計以變壓器控制之電力系統的控制律，在滿足適當假設條件下，論文[1]證明電壓調節的功能，但是在電壓調節過程中系統內部狀態可能會不滿足其所提出之假設條件，造成不穩定的現象發生。在本論文中，我們針對以變壓器控制之電力系統中之無干擾系統，先利用預備回授使系統達到電壓調節並找出對應的平衡點，再在以控制李亞普諾夫函數的理論所設計的控制律，使系統在有參數不確定因素時達成電壓調節並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，達到同時電壓調節與維持內部狀態穩定的功能。

1.3 論文架構

此篇論文主要可分為下列四章，第二章介紹控制李亞普諾夫的理論，以及切換式系統的概念，然後介紹 Dobson 和 Chiang[17]所提出的電力系統，在原始系統模型中加入一個變壓器[11]之後得到的系統模型，接著介紹在論文[1]針對單輸入單輸出的二次多項式系統，系統相對階數為一階，以可變結構設計控制律，達

到輸出追蹤的目的。第三章針對單輸入單輸出的二次多項式系統，系統相對階數為一階，先針對無干擾系統利用預備回授使系統達到輸出追蹤並找出對應的平衡點，在以控制李亞普諾夫的理论設計控制律，使系統在有參數不確定因素下達成輸出追蹤並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，同時達到輸出追蹤及內部狀態穩定的目的。第四章將第三章介紹的控制律應用於變壓器調節的電力系統，以電力系統的變壓器為控制輸入點，調整變壓器匝數比來達到電壓調節的目的並使內部狀態穩定，並且比較以第三章設計出的控制律與可變結構控制律兩者的效能。第五章是將此篇論文作一個總結，並且提供一些未來的研究方向。



Chapter 2

預備知識



2.1 控制李亞普諾夫函數

考慮一個非線性系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{且} \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

要判斷系統(2.1)平衡點在原點的穩定度，我們可以使用李亞普諾夫函數 (Lyapunov function) 來判斷系統在原點的穩定度，給定一個連續可微的純量函數 $V(\mathbf{x})$ ，若為系統(2.1)的李亞普諾夫函數，必須滿足下列兩個條件：

$$\text{條件 1: } V(\mathbf{0}) = 0 \text{ 且 } V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \psi, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\text{條件 2: } \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \psi, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

其中 ψ 為原點的鄰域，由李亞普諾夫直接方法(Lyapunov Direct Method)，我們可以得到原點為區域漸進穩定，在原點的鄰域 ψ 的狀態都會收斂到原點，但是由李亞普諾夫直接方法(Lyapunov Direct Method)來判斷系統在平衡點穩定度，只能在系統只包含狀態變數。在系統包含狀態和未知控制律時，是不是能用李亞普諾夫理論來判斷系統是否可以被穩定化，在 Artstein 和 Sontag[22]將李亞普諾夫函數(Lyapunov Function)的概念推廣到控制李亞普諾夫函數，將李亞普諾夫理論的概念推廣到系統包含未知控制律時，系統是否可以被穩定化。

考慮一個非線性控制系統如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.2)$$

我們可以使用控制李亞普諾夫函數判斷(2.2)式系統是否可被穩定化，給定一個正定且連續可微的純量函數 $V(\mathbf{x})$ ，若 $V(\mathbf{x})$ 為系統(2.2)的控制李亞普諾夫函數，必須滿足下列兩個條件：

條件 3: $V(\mathbf{0}) = 0$ 且 $V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \psi, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

條件 4: $\inf_{\mathbf{u}} \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \psi, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

若可以找到控制李亞普諾夫函數，則針對空間每一點狀態一定可以找到控制力使控制李亞普諾夫函數遞減。針對非線性仿射系統(affine system) [23]，由[24] Sontag 提出，若能找到控制李亞普諾夫函數，Sontag 提出建構連續控制律使控制李亞普諾夫遞減，達到狀態收斂到平衡點的目的。我們以下面例子說明

考慮一個非線性系統如下：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.3)$$

我們選取平滑純量函數 $V(x)$ ，並且可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\ &= a(x) + b(x)u \end{aligned}$$

其中 $a(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$ 、 $b(x) = \nabla V(x) \cdot g(x)$ ，我們利用下面條件

由文獻[24]，針對(2.3)式為非有理項(ration case)，若存在平滑控制李亞普諾夫函數 $V(x)$ ，若 $V(x)$ 滿足小控制特性(small control property)，我們可以建構連續控制律為

$$u = -\frac{a(x) + \sqrt{a^2(x) + b^4(x)}}{b(x)} \quad (2.4)$$

控制律選取如(2.4)式可以使控制李亞普諾夫函數 $V(x)$ 遞減，達到狀態收斂的目的。

一般而言對於實際系統我們沒有一套建構控制李亞普諾夫函數的方法，但對於一些特殊系統，我們知道如何建構控制李亞普諾夫函數，這也是目前在使用控制李亞普諾夫函數常遇到的問題。



2.2 切換式系統

切換式系統一般來說是指系統包含數個子系統及有一套切換規則切換這數個子系統，其子系統可由微分方程式或差分方程式來表示。為何要研究切換式系統，其動機有很多，像是模糊控制(fuzzy control)，適應性控制(adaptive control)，可變結構控制(variable structure control)這種有多重模式的控制技術，可以將切換式系統的概念應用上去，除此之外，在[2]、[3]、[4]中所提到的非完整系統(nonholonomic control system)這類型的系統，經由 Brockett's condition[2]、[5]可知無法只用單一回授控制使其穩定，在[6]中使用切換式系統的概念來解決這問題。

對同一個系統來說，若需要兩個控制律切換才能使系統穩定，我們可以將第一個控制律與受控體當作為一個子系統，將第二個控制律與受控體當作為一個子

系統，此種形式也是切換式系統的一種。

對於切換式系統，切換律選取是相當重要的，從[25]中，我們可以知道若子系統都為穩定，但切換律選取不當導致整體系統會不穩定。對於切換式系統，若子系統都不穩定，從[26]我們也可以知道對於不穩定之系統之間是有可能經過切換達到穩定的目的。

目前對於切換式系統穩定性分析大多都是使用李亞普諾夫函數(Lyapunov function)來分析，這是一個使用能量觀點來分析系統是否穩定的理論，也是一種常被用來討論系統穩定性的方法。

若子系統之間穩定切換律存在，卻可能出現有限時間內無限次切換的現象(zeno)，這是我們不想要的，所以我們希望建構有限時間進行有限次切換(nonzeno)之切換律，並且在這個切換律下達成穩定的目的，Decarlo 提出改善 zeno 的切換策略[26]，我們以下面這個例子來說明 Decarlo 所提的切換策略

考慮以下切換式系統:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad , \quad i = \{1,2\} \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$$

此時系統包含兩個子系統且子系統為線性系統，控制目標是希望透過適當切換律使系統狀態收斂到原點。

一般切換式系統常會碰到如圖 2.1 之切換狀況，即系統可能在某一切換面上進行來回不斷切換，這種在切換面上發生有限時間內無限次切換的現象(zeno)，雖然仍可能會使系統狀態收斂到原點，但是我們這種現象通常不是我們不想要的。假設選擇切換面一或切換面二作為系統的切換面，皆會在切換面上進行來回不斷切換，在[26]，Decarlo 提出改善 zeno 的切換策略，切換概念如圖 2.2 所示，切換面一為子系統一切換到子系統二的切換點，切換面二為子系統二切換到子系統一的切換點，並且在切換面一與切換面二所夾的區域無論使用子系統一或子系統二

皆會使狀態往原點收斂，如此一來可改善 zeno 現象並使系統狀態收斂到原點。

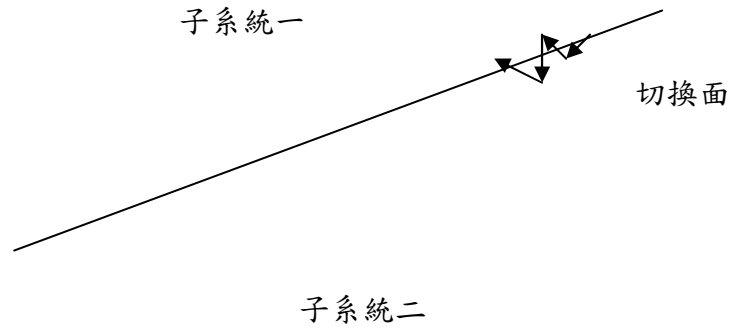


圖 2.1: 原始切換法則

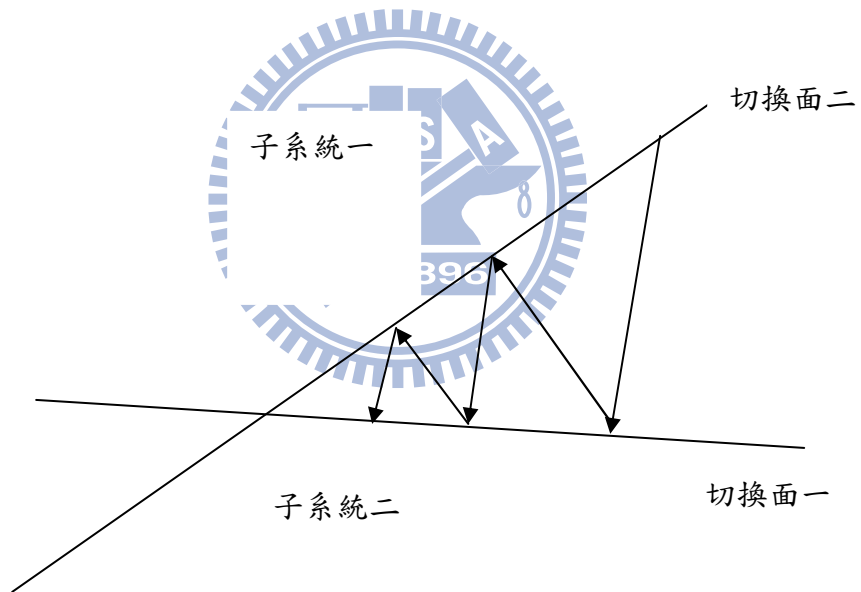


圖 2.2: 新的切換法則

2.3 電力系統模型

本節中，我們主要是研究 Dobson 和 Chiang [17] 的電力系統數學模型。利用 Dobson 和 Chiang 的模型，並且在原始模型中加入一個變壓器 (tap changer)[11]，以變壓器的匝數比作為控制器輸入，達到電壓調節的目的。

在電力系統模型中，主要包含了無限匯流排、非線性負載、變壓器、負載平衡電容與發電機，其模型描述可以分為負載模型與電力系統模型兩大部分，其描述如下：

負載模型：非線性負載模型的表示是採用於 Walve[27]，並且在[17]將其化簡，其非線性模型是描述在感應馬達動態與 PQ 負載在並聯情況之下。而馬達與 PQ 負載所組成的非線性模型，表示如下：

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw}\delta + K_{pv}(V + TV\dot{V}) \quad (2.5)$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw}\delta + K_{qv}V + K_{qv2}V^2 \quad (2.6)$$

在此， P_0 與 Q_0 分別代表馬達中所消耗的有效功率與無效功率， P_1 與 Q_1 是表示為 PQ 負載的消耗功率。

電力系統模型：原始模型中加入變壓器的圖形表示於圖 2.3(a)。在模型中，發電機的動態方程式可利用搖擺方程式 (swing equation) 獲得，表示如下：

$$M\ddot{\delta}_m = -d_m\omega + P_m + E_m V Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin\theta_m \quad (2.7)$$

在此， M 、 d_m 與 P_m 分別表示發電機的慣量、阻尼與機械功率。在模型中，包含一個負載平衡電容 C ，來使電壓能提升到標么值為 1.0 的附近。為了方便使用，我們利用戴維寧等效將 C 、 Y_0 、 E_0 化簡，其表示如下：

$$E'_0 = E_0 / \left(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2C Y_0^{-1} \cos\theta_0\right)^{1/2}$$

$$Y'_0 = Y_0 \left(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2 C Y_0^{-1} \cos \theta_0 \right)^{1/2}$$

$$\theta'_0 = \theta_0 + \arctan \left\{ \frac{C Y_0^{-1} \sin \theta_0}{1 - C Y_0^{-1} \cos \theta_0} \right\}$$

明顯地，利用戴維寧等效結果 $E'_0 Y'_0$ 與 $E_0 Y_0$ 是相同的，其等效圖形表示於圖 2.3(b)。

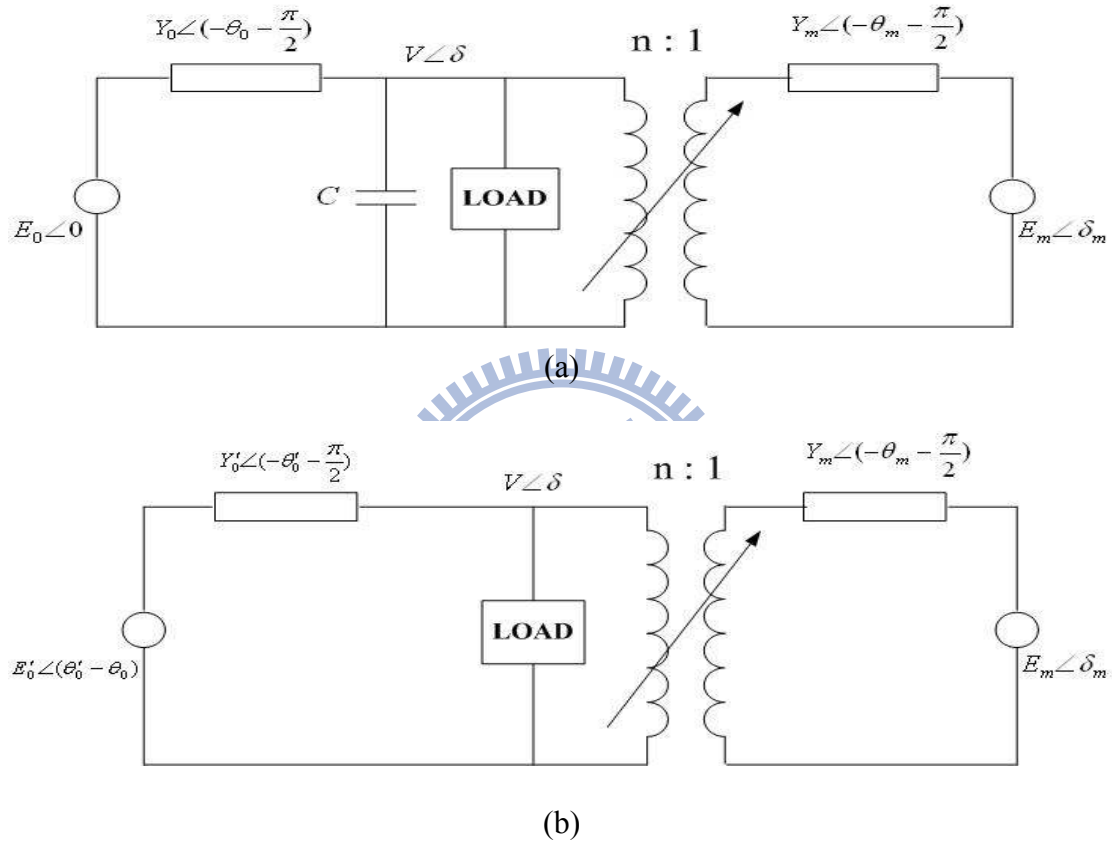


圖 2.3: 電力系統模型(a)原始電力系統模型加上變壓器(b)戴維寧等效

計算其網路中所消耗功率，在網路中無效功率損耗與有效功率損耗可以表示

如下：

$$P(\delta_m, \delta, V) = E'_0 Y'_0 V \sin(\delta + \theta_0) - \frac{1}{n} E_m Y_m V \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + \left(Y'_0 \sin \theta'_0 + \frac{1}{n^2} Y_m \sin \theta_m \right) V^2 \quad (2.8)$$

$$Q(\delta_m, \delta, V) = E'_0 Y'_0 V \cos(\delta + \theta_0) + \frac{1}{n} E_m Y_m V \cos(\delta - \delta_m - \theta_m) - \left(Y'_0 \cos \theta'_0 + \frac{1}{n^2} Y_m \cos \theta_m \right) V^2 \quad (2.9)$$

由(2.5)-(2.7)以及(2.8)-(2.9)，我們可以得到電力系統的動態方程式如下：

$$\dot{\delta}_m = \omega \quad (2.10)$$

$$M \dot{\omega} = -d_m \omega + P_m + \frac{1}{n} E_m Y_m V \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin \theta_m \quad (2.11)$$

$$K_{qw} \dot{\delta} = -K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1 \quad (2.12)$$

$$K_{qw} K_{pv} \dot{V} = K_{pw} K_{qv2} V^2 + (K_{pw} K_{qv} - K_{qw} K_{pv}) V + K_{qw} (P(\delta_m, \delta, V) - P_0 - P_1) - K_{pw} (Q(\delta_m, \delta, V) - Q_0 - Q_1) \quad (2.13)$$

我們的系統參數是採用於[17]，其參數值如下：

負載參數

$$K_{pw} = 0.4, K_{pv} = 0.3, K_{qw} = -0.03, K_{qv} = -2.8, K_{qv2} = 2.1, T = 8.5, P_0 = 0.6,$$

$$Q_0 = 1.3, P_1 = 0$$

網路與發電機參數

$$Y_0 = 20.0, \theta_0 = -5.0, E_0 = 1.0, C = 12.0, Y'_0 = 8.0, \theta'_0 = -12.0, E'_0 = 2.5,$$

$$Y_m = 5.0, \theta_m = -5.0, E_m = 1.0, P_m = 1.0, d_m = 0.05, M = 0.3$$

全部的參數以標么值(per unit value)為單位，其角度以度數表示。

我們令 $x_1 = \delta_m$, $x_2 = \omega$, $x_3 = \delta$, $x_4 = V$, $u = \frac{1}{n}$, 由(2.10)-(2.13) , 我們

可將動態方程式表示為

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.14)$$

$$\dot{x}_2 = 1.8807 - 0.1667x_2 + [16.6667x_4 \sin(0.0873 - x_1 + x_3)]u \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & 43.3333 - 93.3333x_4 + 334.1297x_4^2 - 666.6667x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ & + 33.3333Q_1 - [166.6667x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3)]u \\ & + 166.0325x_4^2u^2 + d_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ & + 7.8431x_4 \sin(0.0873 - x_3) - 5.2288Q_1 \\ & + [26.1438x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3) + 1.9608x_4 \sin(0.0873 + x_1 - x_3)]u \\ & - 26.2152x_4^2u^2 + d_4 \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 $\mathbf{d} = (0, 0, d_3, d_4)^T$ 代表系統可能具有的不確定因素或外在干擾。有兩種類型的 \mathbf{d} 在文獻[17,23]中提到，其中一種起因於負載的變動，也就是 Q_1 隨著電力的需求所產生的變動；另一種則來自於動態感應馬達模型的參數。

2.4 VSC 設計控制律達到二項式之穩健輸出追蹤

考慮一個非線性系統如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{d} \quad (2.18)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 為系統狀態變數， $u \in \mathcal{R}$ 為控制輸入， $y \in \mathcal{R}$ 為控制輸出及 $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$ 為模型的不確定因素或外部雜訊。假設 $\mathbf{f}(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_1(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_2(\cdot)$ 及 $h(\cdot)$ 為平滑向量場。因為動態方程式(2.18)中有 u^2 項，我們可以得知此動態方程式不是非線性仿射系統 (nonlinear affine system)。在本章中，我們將利用可變結構控制設計出一個控制器 u ，使得系統輸出即使在有不確定因素與外部雜訊干擾的情況下，依然可以達到所要的輸出值 $y_d(t)$ ，完成 $y(t) \rightarrow y_d(t)$ 當 $t \rightarrow \infty$ 。

針對(2.18)-(2.19)，由論文[1]可以利用可變結構控制設計出一個控制律，使系統輸出即使在有不確定因素與外部雜訊干擾下，依然可以達到所要的輸出值，完成 $y(t) \rightarrow y_d(t)$ 當 $t \rightarrow \infty$ 。

我們選定順滑面為

$$s(t) = y(t) - y_d(t) = 0 \quad (2.20)$$

若系統狀態到達順滑面並且維持在順滑面上，則輸出追蹤就可以達成，因此控制器必須有到達順滑平面與保持在順滑平面的控制能量。

我們選擇控制器為

$$u = u^{eq} + u^{re} \quad (2.21)$$

其中 u^{re} 要使得系統狀態在有限時間到達順滑面， u^{eq} 要使系統狀態保持在順滑面中。從(2.18)-(2.20)我們可以得到

$$\dot{s} = \nabla h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla h \cdot \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \nabla h \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \nabla h \cdot \mathbf{d} - \dot{y}_d$$

$$= \alpha u^2 + \beta u + \gamma + \nabla h \cdot \mathbf{d} \quad (2.22)$$

其中 ∇h 為 $h(\mathbf{x})$ 的梯度向量， $\alpha = \alpha(\mathbf{x}) = \nabla h \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ ， $\beta = \beta(\mathbf{x}) = \nabla h \cdot \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ ，

$\gamma = \gamma(\mathbf{x}) = \nabla h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dot{y}_d$ ，並利用下面假設

假設 2.1 在控制期間 $\alpha = \nabla h \cdot \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \neq 0$

假設 2.2 存在一個非負函數 $\kappa(\mathbf{x}, t)$ ，且 $|\nabla h \cdot \mathbf{d}| \leq \kappa(\mathbf{x}, t)$

假設 2.1 代表系統(2.18)-(2.19)的相對階數為 1，並且 u^2 永遠不會消失。除此之外，我們也藉由假設 2.2 限制 \mathbf{d} 的上限。

為了保持系統狀態維持在順滑平面， u^{eq} 是選擇無雜訊存在時滿足 $\dot{s}(t) = 0$

當 $\nabla h \cdot \mathbf{d} = 0$ ，由(2.22)可得

$$u^{eq} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} \quad (2.23)$$

其中

$$\Delta^* = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad (2.24)$$

滿足(2.23)的 u^{eq} 有兩個，在此我們先選取

$$u^{eq} = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} \quad (2.25)$$

u^{eq} 的選取是為了系統狀態在有限時間到達順滑面，系統必須滿足迫近條件

$$s(t)\dot{s}(t) \leq -\eta|s(t)| \quad (2.26)$$

其中 η 為正數，我們利用下面假設

假設 2.3 函數 $\frac{\Delta^*}{4 \cdot |\alpha|} - \kappa(\mathbf{x}, t)$ 為正值。並且存在一個正數 η ，使得在控制期間

$$W(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta^*}{4 \cdot |\alpha|} - k(\mathbf{x}, t) - \eta \geq 0 \quad (2.27)$$

假設 2.3 意味著(2.22)拋物線極值的絕對值必須大於不確定因素或外在干擾的上限值 $\kappa(\mathbf{x}, t)$ ，也就是 Δ^* 不會因 \mathbf{d} 的大小變動導致 $\Delta^* \leq 0$

在此，我們選取 u^{re} 為

$$u^{re} = \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2 \cdot |\alpha|} \text{sgn}(s(t)) \quad (2.28)$$

由論文[1]，我們知道在滿足假設 2.3 系統將滿足迫近條件，在有限時間到達順滑面。由上述的討論我們可以得到控制律為

$$u = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2 \cdot |\alpha|} \text{sgn}(s(t)) \quad (2.29)$$

若我們在(2.23)式選擇 u^{eq} 為正號，由論文[1]我們可以得到控制律為


$$u = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2 \cdot |\alpha|} \text{sgn}(s(t)) \quad (2.30)$$

因此，我們有下列的結果

定理 2.1 若系統(2.18)-(2.19)滿足假設 2.1、2.2 及 2.3，控制律選定為(2.29)或(2.30)，則系統將可達成輸出追蹤 $y(t) \rightarrow y_d$ 之性能。

Chapter 3

二次多項式系統之穩健輸出追蹤



要使二次多項式系統達到穩健輸出追蹤，論文[1]利用可變結構控制來設計控制律及提出所需的假設條件，但是在輸出追蹤的過程中系統狀態可能不滿足所提出的假設條件。為了要使系統達到穩健輸出及維持內部狀態穩定，本論文先針對無干擾系統(nominal system)利用預備回授(preliminary feedback)使系統達到輸出追蹤並找出對應的平衡點，本論文所討論的不確定因素來自系統本身一個參數的估計值與真實值之間的誤差，即此參數會隨時間改變並且此參數可由參數估計值與參數不確定因素組成，對應的無干擾系統的平衡點可能隨估測參數變化而變化，接著再設計控制律使系統在有參數不確定因素下達成輸出追蹤並使系統狀態收斂到無干擾系統的平衡點，如此則同時可以達到穩健輸出追蹤及內部狀態穩定的目的。

在本章中，我們將探討使二次多項式系統達到穩健輸出追蹤的方法。在 3.1 節中，我們介紹考慮的系統形式，以及希望達到的控制目標。在 3.2 節中，我們介紹控制律的設計及需要滿足的假設條件。

3.1 問題描述

考慮如下之單輸入單輸出之二次多項式系統：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}(t) \quad (3.1)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 為系統狀態變數， $u \in \mathbb{R}$ 為控制輸入， $y \in \mathbb{R}$ 為系統輸出， $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^n$ 為系統其中一個參數且會隨時間改變，假設 $\mathbf{p}(t)$ 可寫成如下型式 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0(t) + \mathbf{d}(t)$ ，其中 $\mathbf{d}_0(t)$ 代表我們事先可以預測或是量測到的系統參數， $\mathbf{d}(t)$ 為系統參數的不確定因素。假設 $\mathbf{f}(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_1(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_2(\cdot)$ 為平滑向量場。由於系統動態方程式有 u^2 項，我們可以得知此動態方程式不是非線性仿射系統(nonlinear affine system)[23]。主要的控制目標是設計控制器使系統在具有參數不確定因素的情況下，依然可以達到所要的輸出值 y_d ，完成 $y(t) \rightarrow y_d$ ，且 y_d 為常數，當 $t \rightarrow \infty$ ，及內部動態要維持穩定。

3.2 控制律設計

考慮無干擾系統之動態方程式如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}_0(t) \quad (3.3)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

由於 $\mathbf{d}(t)$ 一般是無法預測的，先針對無干擾系統設計預備控制律使無干擾系統達到輸出追蹤下並找出對應的平衡點，此時系統必須滿足下列的(3.5)與(3.6)式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0)u_0 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0)u_0^2 + \mathbf{p}_0(t) = 0 \quad (3.5)$$

$$h(\mathbf{x}_0) - y_d = 0 \quad (3.6)$$

我們要解滿足(3.5)與(3.6)的解，此時有 $n+1$ 個方程式與 $n+1$ 個變數，假設滿足(3.5)與(3.6)的解的解存在，則我們可以解得滿足輸出追蹤對應的平衡點 \mathbf{x}_0 與控制律 u_0 ，由於系統已知的估測參數 $\mathbf{p}_0(t)$ 會隨著時間改變，對應滿足輸出追蹤的平衡點 \mathbf{x}_0 與控制律 u_0 會隨著 $\mathbf{p}_0(t)$ 改變。接著我們希望在有參數不確定因素 $\mathbf{d}(t)$ 的情況下，我們能設計控制律使系統狀態收斂到平衡點 \mathbf{x}_0 達到輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。

設計控制器為：

$$u = u_0(t) + v \quad (3.7)$$

其中 $u_0(t)$ 為針對無干擾系統使系統達到輸出追蹤對應解出的預備回授， v 為使系統狀態在有系統參數不確定因素下能克服參數不確定因素使系統達到輸出追蹤及系統狀態收斂到平衡點 \mathbf{x}_0 的控制律。

定義狀態誤差為：

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t) \quad (3.8)$$

其中 $\mathbf{x}_0(t) = [x_{10} \quad x_{20} \quad \cdots \quad x_{n0}]^T$ 為針對無干擾系統利用預備回授達成輸出追蹤下對應解出之平衡點， $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ 為系統狀態。

由(3.1)-(3.2)與(3.7)-(3.8)，我們可將原始系統動態方程式整理為：

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{new}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}_{1new}(\mathbf{e}, t)v + \mathbf{g}_{2new}(\mathbf{e}, t)v^2 + \mathbf{d}(t) \quad (3.9)$$

其中

$$\mathbf{f}_{new}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) + \mathbf{g}_1(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))u_0(t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))u_0^2(t) + \mathbf{p}_0(t) - \frac{d\mathbf{x}_0(t)}{dt}$$

$$\mathbf{g}_{1new}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) + 2\mathbf{g}_2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))u_0(t)$$

$$\mathbf{g}_{2new}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{g}_2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))$$

其中 $\frac{dx_0(t)}{dt}$ 代表無干擾系統的平衡點隨時間的變化率，由於參數估計值隨時間變化率 $\frac{dp_0(t)}{dt}$ 我們可以獲得，且無干擾系統的平衡點對參數估計值的變化率 $\frac{\partial x_0(t)}{\partial p_0(t)}$ 我們也可以求得，所以 $\frac{dx_0(t)}{dt}$ 我們可以透過鍊鎖律(chain rule)得知。

接著我們針對(3.9)式的動態方程式，設計控制律 v 使在有系統參數不確定因素情形下使 $e \rightarrow 0$ ，則可以達到穩健輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。

一般我們要使狀態誤差收斂到原點，我們可以選取控制李亞普諾夫函數，並設計控制律使控制李亞普諾夫函數遞減，來達到系統狀態誤差收斂的目的，但可能找不到平滑(smooth)或連續的控制律使控制李亞普諾夫函數遞減，本論文將使用切換控制律來達到控制李亞普諾夫函數遞減的目的。

針對(3.9)式的系統，我們選取控制李亞普諾夫函數

$$V = \frac{1}{2} e^T P e \quad (3.10)$$


由(3.9)式與(3.10)式可得

$$\dot{V} = av^2 + bv + c + e^T P d(t) \quad (3.11)$$

其中 $a = a(e, t) = e^T P g_{2_{new}}$ ， $b = b(e, t) = e^T P g_{1_{new}}$ ， $c = c(e, t) = e^T P f_{new}$ ，且 a 、 b 可能在某些區域等於零。

當 a 不為零時，(3.11)式等號右邊為 v 的二次多項式，我們可以在滿足一些假設條件下設計控制律 v 使系統之控制李亞普諾夫函數遞減，當 a 為零且 b 不為零時，(3.11)式等號右邊為 v 的一次多項式，我們可以設計另一個控制律 v 使控制李亞普諾夫函數遞減，當 a 、 b 等於零， v 不會出現在(3.11)中， v 無法決定 \dot{V} 的正負號，若此時不加控制($v=0$)仍能使落在 a 、 b 等於零區域的狀態誤差會收斂到原點，則系統狀態誤差即可達到收斂到原點的目標。

我們利用下面假設

假設 3.1 假設存在正定矩陣 \mathbf{P} ，可使得 $a = 0$ 發生在 $h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d = 0$

假設 3.2 存在非負函數 $\rho(\mathbf{e}, t)$ ，使得 $|\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d}| \leq \rho(\mathbf{e}, t)$

假設 3.1 代表(3. 11)式等號右邊的 v^2 項在 $h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d = 0$ 會消失，此時為非線性仿射系統。除此之外，假設 3.2 說明了 $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d}(t)$ 上限。

因為 $a = 0$ 發生在 $h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d = 0$ ，我們以 $|h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d| \leq \varepsilon_1$ 作為控制律切換的分界點，其中 ε_1 為很小的值，即以 $|h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d| \leq \varepsilon_1$ 為 $a \approx 0$ 的情形，代表 $a \approx 0$ 時(3. 11)等號右邊可以近似為 v 的一次多項式。除此之外， b 可能在使 $h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d = 0$ 的某些子區域等於零，我們以 $|b| \leq \varepsilon_2$ 作為控制律切換分界點，其中 ε_2 為很小的值，以 $|b| \leq \varepsilon_2$ 為 $b \approx 0$ 的情形，當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 時，代表無法透過 v 改變 \dot{V} 的正負號，此時若控制律選取為 $v = 0$ 仍能使落在 a 、 b 等於零區域的狀態誤差會收斂到原點，則系統狀態誤差即可達到收斂到原點的目標。

當 $a \neq 0$ ，在(3. 11)式，等號右邊是 v 的二次多項式形式，且一般來說 \mathbf{d} 是無法預測的，考慮 \dot{V} 在最差情況下，由(3. 11)式及假設 3.2 可得

$$\dot{V} = av^2 + bv + c + \rho(\mathbf{e}, t) \quad (3. 12)$$

定義 Δ 為(3. 12)式的判別式

$$\Delta = b^2 - 4a(c + \rho(\mathbf{e}, t)) \quad (3. 13)$$

由於 a 、 b 可能在某些區域等於零，我們可分為四個情形討論分別為 $a > 0$ 、 $a < 0$ 、 $a \approx 0$ 且 $b \neq 0$ 、 $a \approx 0$ 且 $b \approx 0$ 的情況，設計適當的控制律及對應穩定的條件。

考慮 $a > 0$ 的情況:

當 $a > 0$ 時，(3. 11)的拋物線頂點高度不會因不確定因素或外在干擾的上限值 $\rho(\mathbf{e}, t)$ 而出現大於等於 0，才能設計控制律使 $\dot{V} < 0$ ，如圖 3.1 所示。我們利用下面的假設 3.3 並設計控制律。

假設 3.3 當 $a > 0$ ，在 $|h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d| = \varepsilon_1$ 的鄰域存在不變集合(invariant set)且滿足 $\Delta > 0$ ，我們將這個不變集合以 Ω_1 表示。

控制律選取

一般來說 \mathbf{d} 是無法預測的，我們選取 v 使得 $\dot{V} < 0$ ，我們選取 v 為

$$v = -\frac{b}{2a} \quad (3. 14)$$

由假設 3.3，在 Ω_1 這不變集合裡，使用(3. 14)的控制律使控制李亞普諾夫函數遞減，達到狀態誤差收斂的目的。

考慮 $a < 0$ 的情況:

當 Δ 為負值且 $a < 0$ ，代表此時拋物線頂點的高度不會因為 \mathbf{d} 的大小變動而使拋物線頂點高度大於等於零，此時拋物線開口向下，此時任意的 v 皆可使 $\dot{V} < 0$ ，如圖 3.2 所示，所以，我們將控制律選取如(3. 15)可使 $\dot{V} < 0$ 。當 Δ 為正值且 $a < 0$ ，代表此時拋物線頂點的高度不會因為 \mathbf{d} 的大小變動而使拋物線頂點高度小於等於零，此時拋物線開口向下，我們一定可以找到 v 使 $\dot{V} < 0$ ，我們將控制律選取如(3. 16)可使 $\dot{V} < 0$ ，如圖 3.3 所示，我們利用下面的假設 3.4 並設計控制律。

假設 3.4 當 $a < 0$ ，在 $|h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d| = \varepsilon_1$ 的鄰域存在不變集合，我們將這個不變集合以 Ω_2 表示

當 $a < 0$ ，控制律選取

一般來說 \mathbf{d} 是無法預測的，當 Δ 為負值，我們選 v 使 $\dot{V} < 0$ ，我們選取 v 為(3.15)式

$$v = -\frac{b}{2a} \quad (3.15)$$

一般來說 \mathbf{d} 是無法預測的，當 Δ 為正值，我們選 v 使得 $\dot{V} < 0$ ，我們選取 v 為(3.16)式，並利用下面假設 3.5

$$v = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \text{sgn}(a) \quad (3.16)$$

由假設 3.4，在 Ω_2 這不變集合裡，使用(3.15)或(3.16)的控制律可使控制李亞普諾夫函數遞減，達到狀態誤差收斂的目的。

考慮 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ 的情況：

當 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ ， \dot{V} 可以進似成 v 的一次多項式形式，我們利用下面假設 3.5 並設計控制律。

假設 3.5 當 $a \approx 0$ ，在 $|h(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) - y_d| \leq \varepsilon_1$ 區域存在不變集合使狀態不會進入 $a > 0$ 、 $\Delta < 0$ 造成狀態誤差發散的情形，我們將此不變集合以 Ω_3 表示並且 $\Omega_3 \cap \Omega_1 \subseteq \Omega_3$ 、 $\Omega_3 \cap \Omega_2 \subseteq \Omega_3$ ，如圖 3.4 所示。

當 $a \approx 0$ ，由(3.11)可以得到

$$\dot{V} \approx bv + c + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d} \quad (3.17)$$

當 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ ，由(3.17)式我們選取控制律 v 為

$$v = \frac{-c - \rho(\mathbf{e}, t) - 0.5|b|}{b} \quad (3.18)$$

當 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ ，由假設 3.1、假設 3.2 以及(3.18)控制律選取，不會因 \mathbf{d} 的大小

變動而使 $\dot{V} \geq 0$ 。

假設 3.5 代表使用(3. 18)的控制律在 Ω_3 這不變集合內能維持 $a \approx 0$ ，且使控制李亞普諾夫函數遞減，使落在 Ω_3 區域的狀態誤差收斂。

考慮 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 的情況:

當 $a = 0$ 、 $b = 0$ 時，無法透過 v 改變 \dot{V} 的正負號，我們利用下面假設 3.6 並設計控制律。

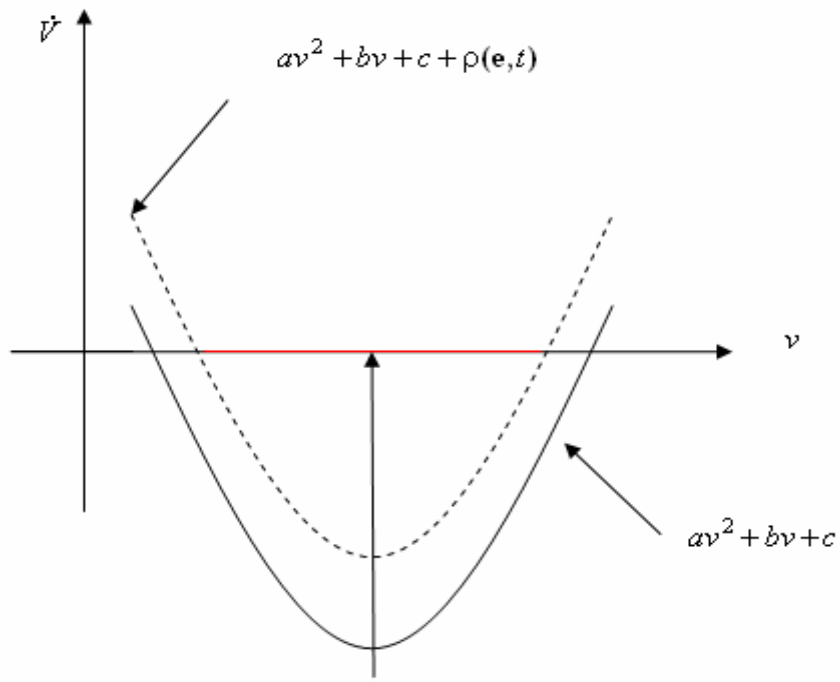
假設 3.6 當 $a = 0$ 、 $b = 0$ ，控制律選取(3. 19)，在此情況下系統狀態誤差會收斂到原點。

當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ ，我們選取的控制律 v 為

$$v = 0 \quad (3. 19)$$

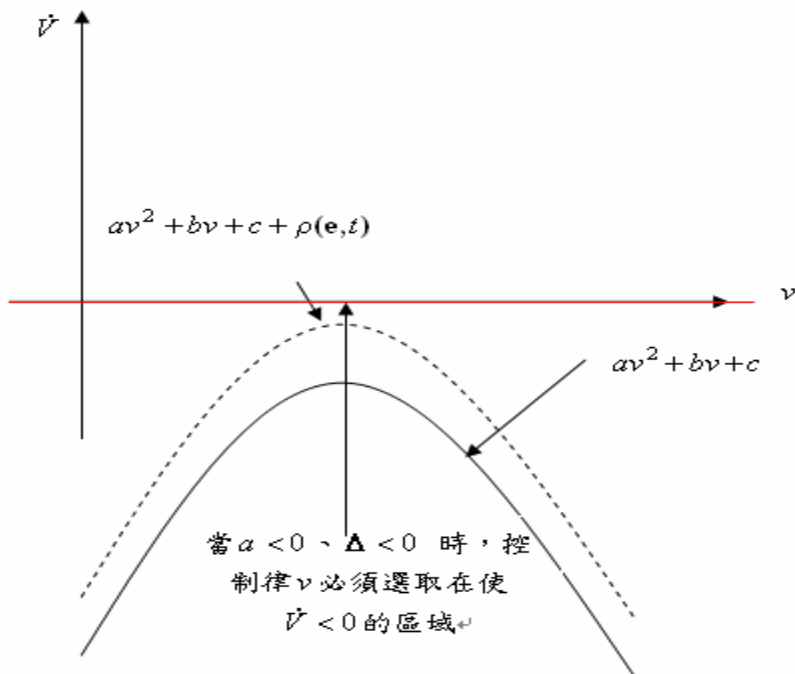
假設 3.6 代表當 $a = 0$ 、 $b = 0$ 時，無法透過 v 改變 \dot{V} 的正負號，此時若控制律選取為 $v = 0$ 仍能使落在 a 、 b 等於零區域的狀態誤差會收斂到原點，則系統狀態誤差即可達到收斂到原點的目標。

定理 3.1 在系統(3. 9)滿足假設 3.1、3.2，在 $a > 0$ 滿足假設 3.3，控制律選取為(3. 14)，在 $a < 0$ 滿足假設 3.4，控制律選取為(3. 15)或(3. 16)， $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ 滿足假設 3.5，控制律選取為(3. 18)，在 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 滿足假設 3.6，控制律選取為(3. 19)，則在 $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ 的區域我們可以達到使狀態誤差收斂到原點之目的，因此系統將可以達到輸出追蹤與內部狀態穩定的目的。



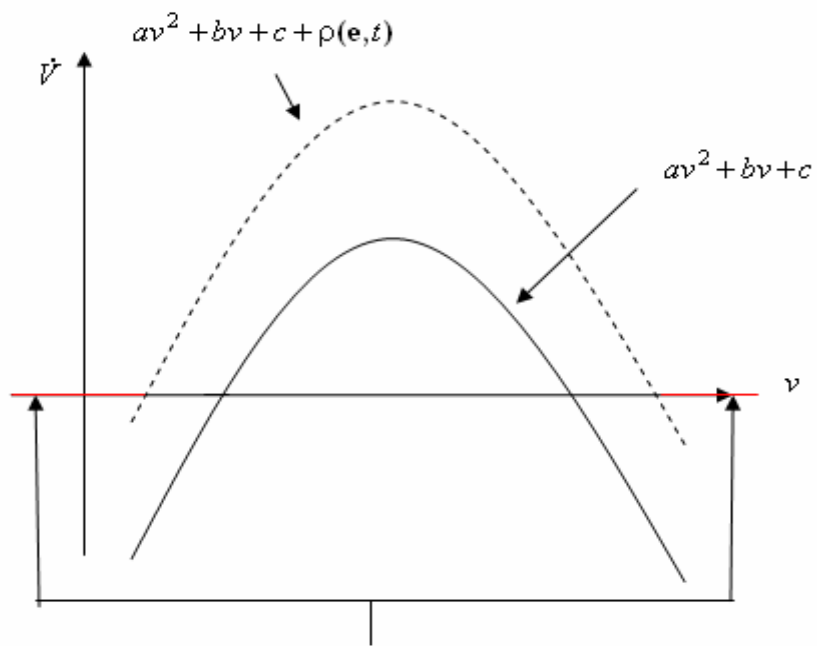
當 $a > 0$ 時，控制律 v 必須
選取在使 $\dot{v} < 0$ 的區域。

圖 3.1: $a > 0, \Delta > 0$, (3.10) 示意圖



當 $a < 0, \Delta < 0$ 時，控
制律 v 必須選取在使
 $\dot{v} < 0$ 的區域。

圖 3.2: $a < 0, \Delta < 0$, (3.10) 示意圖



當 $a < 0$ 時，控制律 v 必須
選取在使 $\dot{V} < 0$ 的區域。

圖 3.3: $a < 0, \Delta < 0$, (3.10) 示意圖

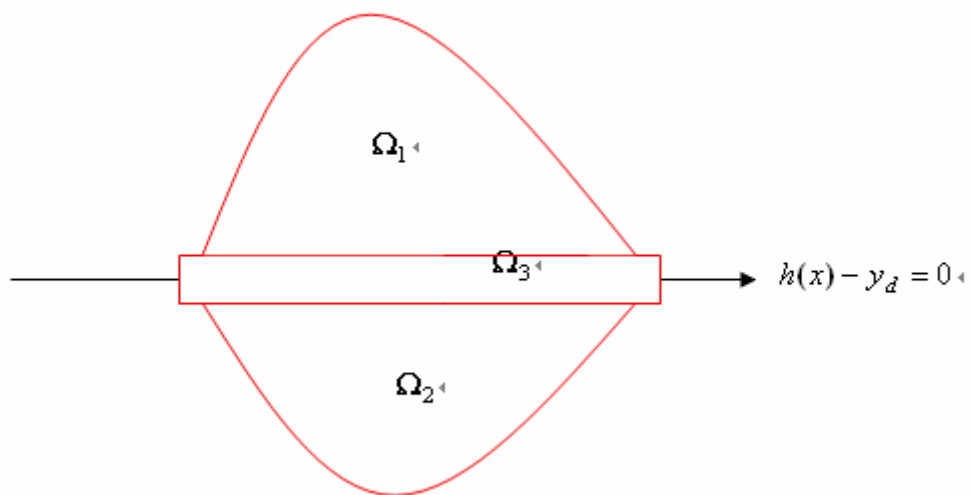


圖 3.4: 收斂區域示意圖

Chapter 4

應用於變壓器控制之電力系統的電壓調節研究



在本章中我們將應用 3.2 節中設計的控制律於 Dobson 和 Chiang[17]的電力系統模型，在原始模型中加入一個變壓器[11]，如 2.3 節所介紹的電力系統模型，以變壓器為控制輸入點，藉由調整變壓器的匝數比，使系統負載電壓能穩定在我們希望的電壓值，來達到電壓調節的功能及內部狀態穩定的目的。在 4.1 節中，為在 Dobson 和 Chiang 的電力系統模型加入變壓器，推導系統動態方程式表示式。在 4.2 節中，我們將 3.2 節中針對單輸入單輸出的二次多項式系統設計的控制律應用於電力系統中，設計出適合的控制律，應用於電力系統使系統達到電壓調節與維持內部狀態穩定的目的，並且討論可以達到電壓調節與內部狀態穩定的範圍，並分析模擬結果。在 4.3 節中，我們將 3.2 節設計出的控制律與 VSC 設計出的控制律作一些效能的比較。

4.1 系統動態方程式

在 2.3 節中，將 Dobson 和 Chiang [17] 的電力系統模型加入一個變壓器[11]，經過參數的選取與整理得到(2.17)-(2.20)式，在本論文中，我們假設 \mathbf{d} 只來自於 Q_1 的變動，我們可將(2.17)-(2.20)表示成如下的形式

我們可將(2.17)-(2.20)表示成如下的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}(t) \quad (4.1)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ f_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{1,1}(\mathbf{x}) \\ g_{1,2}(\mathbf{x}) \\ g_{1,3}(\mathbf{x}) \\ g_{1,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{2,1}(\mathbf{x}) \\ g_{2,2}(\mathbf{x}) \\ g_{2,3}(\mathbf{x}) \\ g_{2,4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.3333Q_1 \\ -5.2288Q_1 \end{pmatrix}$$

$$f_1(\mathbf{x}) = x_2$$

$$f_2(\mathbf{x}) = 1.8807 - 0.1667x_2$$

$$f_3(\mathbf{x}) = 43.3333 - 93.3333x_4 + 334.1297x_4^2 - 666.6667x_4 \cos(0.0873 - x_3)$$

$$f_4(\mathbf{x}) = -7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4 \cos(0.0873 - x_3) \\ + 7.8431x_4 \sin(0.0873 - x_3)$$

$$g_{1,1}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{1,2}(\mathbf{x}) = 16.6667x_4 \sin(0.0873 - x_1 + x_3)$$

$$g_{1,3}(\mathbf{x}) = -166.6667x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3)$$

$$g_{1,4}(\mathbf{x}) = 26.1438x_4 \cos(0.0873 + x_1 - x_3) + 1.9608x_4 \sin(0.0873 + x_1 - x_3)$$

$$g_{2,1}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{2,2}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_{2,3}(\mathbf{x}) = 166.0325x_4^2$$

$$g_{2,4}(\mathbf{x}) = -26.2152x_4^2$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

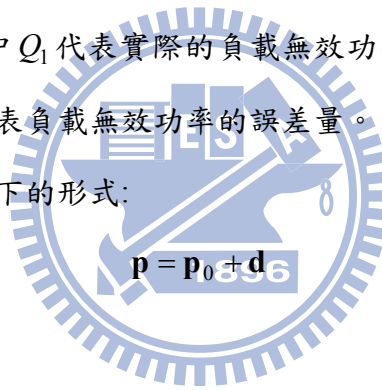
$$p_3 = 33.3333Q_1$$

$$p_4 = -5.2288Q_1$$

其中 Q_1 為系統中的一個參數，代表負載的無效功率消耗，我們可以將 Q_1 以

$Q_1 = Q_{10} + \Delta Q_1$ 表示，其中 Q_1 代表實際的負載無效功率消耗， Q_{10} 代表量測的負載無效功率消耗， ΔQ_1 代表負載無效功率的誤差量。

則我們可以將 \mathbf{d} 表示成如下的形式：



其中

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.3333Q_{10} \\ -5.2288Q_{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.3333\Delta Q_1 \\ -5.2288\Delta Q_1 \end{pmatrix}$$

則電力系統可以表示成如下的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}_0 + \mathbf{d} \quad (4.2)$$

在此，我們選擇系統電壓為系統輸出

$$y = x_4 \quad (4.3)$$

我們定義電壓調節值 $y_d \equiv 1$

4.2 控制律設計

4.2.1 系統平衡點分析:

考慮無干擾系統如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u^2 + \mathbf{p}_0 \quad (4.4)$$

由於控制目標是讓負載電壓固定穩定在 1，我們針對無干擾系統設計預備控制律 u_0 使負載電壓固定在 1，並找出對應之平衡點 \mathbf{x}_0 ，則必須滿足下列(4.5)-(4.8)

$$0 = x_{20} \quad (4.5)$$

$$0 = 1.8807 - 0.1667x_{20} + 16.6667\sin(0.0873 - x_{10} + x_{30})u_0 \quad (4.6)$$

$$0 = 284.1297 - 666.6667\cos(0.0873 - x_{30}) + 33.3333Q_{10} - 166.6667\cos(0.0873 - x_{10} + x_{30})u_0 + 166.0325u_0^2 \quad (4.7)$$

$$0 = -45.6059 + 104.5752\cos(0.0873 - x_{30}) + 7.8431\sin(0.0873 - x_{30}) - 5.2288Q_{10} + [26.1438\cos(0.0873 + x_{10} - x_{30}) + 1.9608\sin(0.0873 + x_{10} - x_{30})]u_0 - 26.2152u_0^2 \quad (4.8)$$

由(4.5)-(4.8)中，要解得符合的平衡點 \mathbf{x}_0 與 u_0 並非容易，且 \mathbf{x}_0 與 u_0 的值會隨 Q_{10} 值變化而變化，由(4.9)可以得知 $x_{20} = 0$ ，我們利用”AUTO”來求得(4.10)-(4.13)的平衡點與 u_0 。經由”AUTO”計算後，我們可以得到兩組平衡點與 u_0 為正的解，分別為 $\{x_{01} = [x_{011}, 0, x_{013}]^T, u_{01}\}$ 及 $\{x_{02} = [x_{021}, 0, x_{023}]^T, u_{02}\}$ ，我們將兩組平衡點與 u_0 分別以實現與虛線來表示如圖 4.1 所示，同時也可以得到兩組平衡點與 u_0 為負的解，我們將兩組平衡點與 u_0 分別以實現與虛線來表示如圖 4.2 所

示，但 u_0 為負，由於控制輸入點為變壓器匝數比倒數， u_0 為負得到負的匝數比與實際系統不符，故選用 u_0 為正的解。由圖 4.1 我們可以觀察在 $Q_{10} \geq 12.45$ 就無平衡點與 u_0 存在。接下來我們將利用系統線性化來判斷所得的平衡點是否為穩定的平衡點。

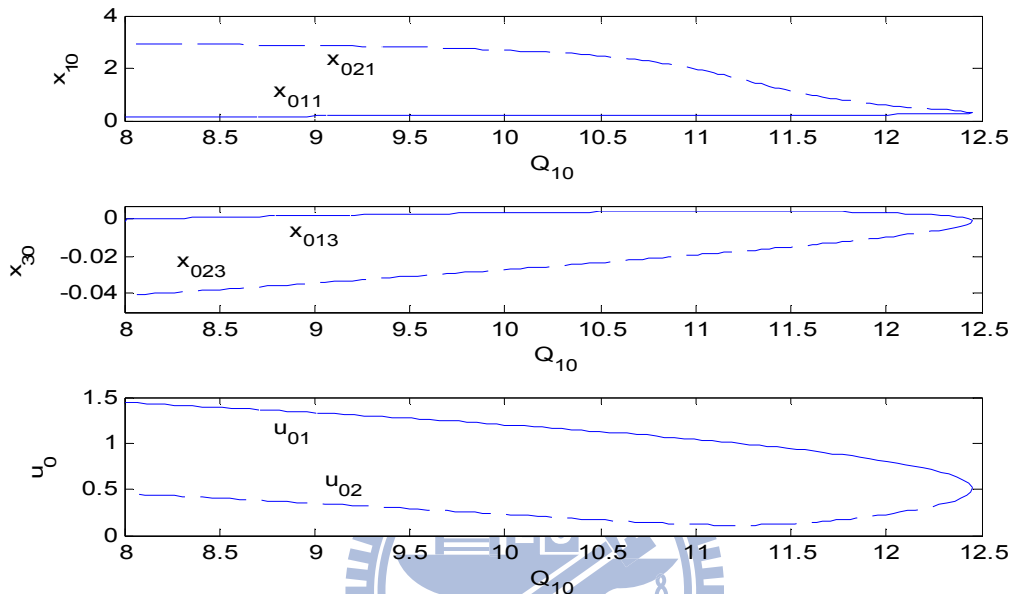


圖 4.1: u_0 為正值，平衡點 x_0 與 u_0 對 Q_{10} 的變化

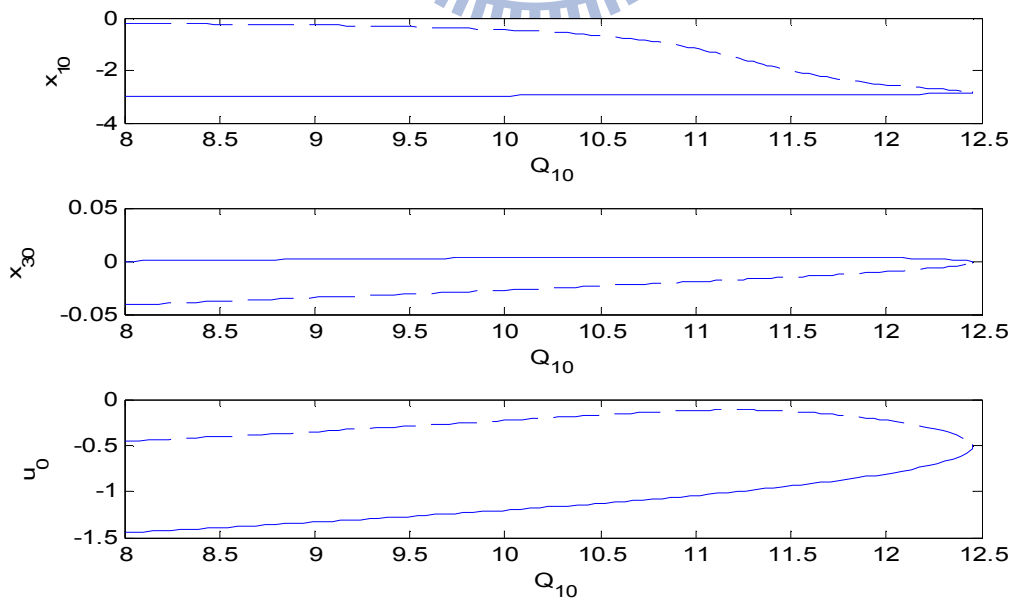


圖 4.2: u_0 為負值，平衡點與 u_0 對 Q_{10} 的變化

4.2.2 穩定點分析:

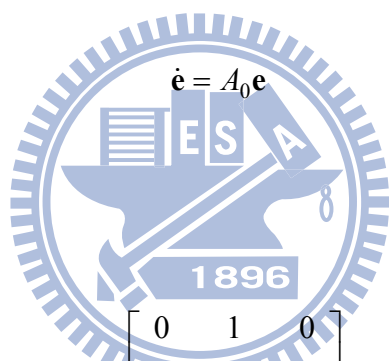
利用 4.2.1 所得的平衡點與 u_0 進行線性化分析，來判斷系統在 $x_4 = 1$ 是否有穩定平衡點存在，我們令 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$ ，在此

$$e_1 = x_1 - x_{10}$$

$$e_2 = x_2 - x_{20}$$

$$e_3 = x_3 - x_{30}$$

其中 (x_{10}, x_{20}, x_{30}) 分別代表 (x_1, x_2, x_3) 的平衡點將系統(4. 5)-(4. 8)對平衡點進行線性化，可得

$$\dot{\mathbf{e}} = A_0 \mathbf{e} \quad (4.9)$$


$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

在此

$$a_{21} = -16.6667 \cos(0.0873 - x_{10} + x_{30}) u_0$$

$$a_{22} = -0.1667$$

$$a_{23} = 16.6667 \cos(0.0873 - x_{10} + x_{30}) u_0$$

$$a_{31} = 16.6667 \sin(0.0873 + x_{10} - x_{30}) u_0$$

$$a_{31} = 16.6667 \sin(0.0873 + x_{10} - x_{30}) u_0$$

$$a_{33} = -666.6667 \sin(0.0873 - x_{30}) - 166.6667 \sin(0.0873 + x_{10} - x_{30}) u_0$$

將由 4.2.1 節所得的平衡點 x_{01} 、 x_{02} 與控制律 u_{01} 、 u_{02} 分別帶入(4. 9)，其中

平衡點為 x_{01} 控制律為 u_{01} 時，所得到 A_0 特徵值的實部對 Q_{10} 變化如圖 4.3(a) 所示，由圖 4.3(a) 我們可以知道特徵值實部皆在左半平面，故加入 u_{01} 所得的平衡點 x_{01} 為一個穩定平衡點；當平衡點為 x_{02} 控制律為 u_{02} 時，所得到 A_0 特徵值的實部對 Q_{10} 變化如圖 4.3(b) 所示，由圖 4.3(b) 我們可以知道當 $Q_{10} \leq 11.2$ 特徵值實部皆在右半平面，故當 $Q_{10} \leq 11.2$ 加入 u_{02} 所得的平衡點 x_{02} 為一個不穩定平衡點。

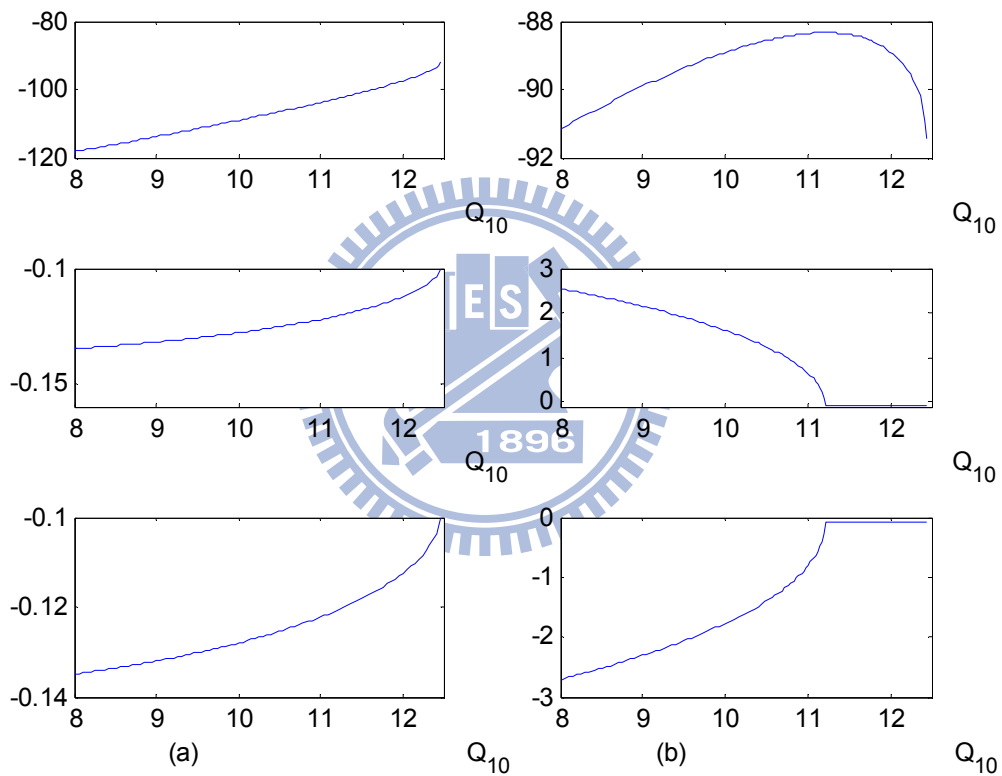


圖 4.3: (a) 左邊三圖代表平衡點為 x_{01} 控制律為 u_{01} ， Q_{10} 對三個特徵值的影響
 (b) 右邊三圖代表平衡點為 x_{02} 控制律為 u_{02} ， Q_{10} 對三個特徵值的影響

4.2.3 控制律設計

在 4.2.1 節中，我們設計預備控制律使無干擾系統滿足輸出追蹤並找出對應的平衡點，在 4.2.2 節中，我們利用線性化技術探討系統平衡點的穩定度。接下來我們將 3.2 節針對單輸入單輸出的二次多項式系統設計控制律的方法，設計控制律使系統在有參數不確定因素 \mathbf{d} 下，達到電壓調節與系統狀態收斂到無干擾系統的平衡點，如此則可同時達到輸出追蹤與內部狀態穩定的功能。

我們設計控制律為

$$u = u_0(t) + v \quad (4.10)$$

其中 u_0 為針對無干擾系統使達到輸出追蹤對應解出的預備回授，且 u_0 的值會隨 Q_{10} 值變化而變化， v 為使系統在有不確定因素下能克服參數不確定因素使系統達到輸出追蹤及系統狀態收斂到平衡點 \mathbf{x}_0 的控制律。

定義狀態誤差為

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t) \quad (4.11)$$

其中 $\mathbf{x}_0(t) = [x_{10} \ 0 \ x_{30} \ 1]$ 為針對無干擾系統使達到輸出追蹤下對應解出之平衡點，且 $\mathbf{x}_0(t)$ 的值會隨 Q_{10} 變化， \mathbf{x} 為系統狀態

由(4.10)、(4.11)，我們可將(4.2)重新整理得到

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_{new}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}_{1new}(\mathbf{e}, t)v + \mathbf{g}_{2new}(\mathbf{e}, t)v^2 + \mathbf{d} \quad (4.12)$$

其中

$$\mathbf{f}_{new}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) + \mathbf{g}_1(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))u_0 + \mathbf{g}_2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))u_0^2 + \mathbf{p}_0 - \frac{d\mathbf{x}_0(t)}{dt}$$

$$\mathbf{g}_{1new}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t)) + 2\mathbf{g}_2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))u_0(t)$$

$$\mathbf{g}_{2new}(\mathbf{e}, t) = \mathbf{g}_2(\mathbf{e} + \mathbf{x}_0(t))$$

$$\mathbf{f}_{new}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} f_{new,1}(\mathbf{e}, t) \\ f_{new,2}(\mathbf{e}, t) \\ f_{new,3}(\mathbf{e}, t) \\ f_{new,4}(\mathbf{e}, t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_{1new}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} g_{1new,1}(\mathbf{e}, t) \\ g_{1new,2}(\mathbf{e}, t) \\ g_{1new,3}(\mathbf{e}, t) \\ g_{1new,4}(\mathbf{e}, t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_{2new}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} g_{2new,1}(\mathbf{e}, t) \\ g_{2new,2}(\mathbf{e}, t) \\ g_{2new,3}(\mathbf{e}, t) \\ g_{2new,4}(\mathbf{e}, t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

$$f_{new,1}(\mathbf{e}, t) = e_2 - \frac{dx_{10}(t)}{dt}$$

$$f_{new,2}(\mathbf{e}, t) = 1.8807 - 0.1667e_2 + 16.6667(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))u_0(t)$$

$$f_{new,3}(\mathbf{e}, t) = 284.1297 + 574.9261e_4 + 334.1297e_4^2 - 666.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t))$$

$$- 166.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t)$$

$$+ 166.0325(e_4 + 1)^2 u_0^2(t) + 33.3333Q_{10} - \frac{dx_{30}(t)}{dt}$$

$$f_{new,4}(\mathbf{e}, t) = -45.6059 - 91.6693 e_4 - 53.0961 e_4^2 + 104.5752 (e_4 + 1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t))$$

$$+ 7.8431(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_3 - x_{30}(t))$$

$$+ 26.1438(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t)$$

$$+ 1.9608(e_4 + 1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t)$$

$$- 26.2152(e_4 + 1)^2 u_0^2(t) - 5.2288Q_{10}$$

$$g_{1new,1}(\mathbf{e}, t) = 0$$

$$g_{1new,2}(\mathbf{e}, t) = 16.6667(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))$$

$$g_{1new,3}(\mathbf{e}, t) = -166.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) + 332.065(e_4 + 1)^2 u_0(t)$$

$$g_{1new,4}(\mathbf{e}, t) = 26.1438(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))$$

$$+ 1.9608(e_4 + 1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) - 52.4304(e_4 + 1)^2 u_0(t)$$

$$g_{2new,1}(\mathbf{e}, t) = 0$$

$$g_{2new,2}(\mathbf{e}, t) = 0$$

$$g_{2new,3}(\mathbf{e}, t) = 166.0325(e_4 + 1)^2$$

$$g_{2new,4}(\mathbf{e}, t) = -26.2152(e_4 + 1)^2$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = 33.3333\Delta Q_1$$

$$d_4 = -5.2288\Delta Q_1$$

由 4.1.1 小節我們可以知道 x_{10} 、 x_{30} 、 u_0 會隨 Q_{10} 變化如圖 4.1 所示，我們可以利用曲線契合(curve fitting)得到 x_{10} 、 x_{30} 對 Q_{10} 的函數，並且 Q_{10} 對時間的變化我們一般可以量測的到，由鍊鎖律(chain rule)我們可以得知 $\frac{dx_{10}(t)}{dt}$ 、 $\frac{dx_{30}(t)}{dt}$ 。

由於(4. 12)式，我們可以知道 $\dot{e}_1 = e_2 - \frac{dx_{10}(t)}{dt}$ ，由圖 4.1 若 Q_{10} 變動不大則 $\frac{dx_{10}(t)}{dt}$ 很小，則 $\dot{e}_1 \approx e_2$ ，若能使 $e_1 + e_2$ 收斂到零，則可以使 e_1 、 e_2 收斂到零。

我們定義 $\mathbf{z}(\mathbf{e}) = [e_1 + e_2 \quad e_3 \quad e_4]^T$

並且可以得到

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{e}) = \mathbf{f}'_{new}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}'_{1new}(\mathbf{e}, t)v + \mathbf{g}'_{2new}(\mathbf{e}, t)v^2 + \mathbf{d}' \quad (4. 13)$$

其中

$$\mathbf{f}'_{new}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} f'_{new,1}(\mathbf{e}, t) \\ f'_{new,2}(\mathbf{e}, t) \\ f'_{new,3}(\mathbf{e}, t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}'_{1new}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} g'_{1new,1}(\mathbf{e}, t) \\ g'_{1new,2}(\mathbf{e}, t) \\ g'_{1new,3}(\mathbf{e}, t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}'_{2new}(\mathbf{e}, t) = \begin{pmatrix} g'_{2new,1}(\mathbf{e}, t) \\ g'_{2new,2}(\mathbf{e}, t) \\ g'_{2new,3}(\mathbf{e}, t) \end{pmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{d}' = \begin{pmatrix} \Delta d'_1 \\ \Delta d'_2 \\ \Delta d'_3 \end{pmatrix}$$

$$f'_{new,1}(\mathbf{e}, t) = e_2 + 1.8807 - 0.1667e_2 + 16.6667(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))u_0(t) - \frac{dx_{10}(t)}{dt}$$

$$f'_{new,2}(\mathbf{e}, t) = 284.1297 + 574.9261e_4 + 334.1297e_4^2 - 666.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) - 166.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t) + 166.0325(e_4 + 1)^2 u_0^2(t) + 33.3333Q_{10} - \frac{dx_{30}(t)}{dt}$$

$$f'_{new,3}(\mathbf{e}, t) = -45.6059 - 91.6693e_4 - 53.0961e_4^2 + 104.5752(e_4 + 1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) + 7.8431(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) + 26.1438(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t) + 1.9608(e_4 + 1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t) - 26.2152(e_4 + 1)^2 u_0^2(t) - 5.2288Q_{10}$$

$$g'_{1new,1}(\mathbf{e}, t) = 16.6667(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))$$

$$g'_{1new,2}(\mathbf{e}, t) = -166.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) + 332.065(e_4 + 1)^2 u_0(t)$$

$$g'_{1new,3}(\mathbf{e}, t) = +26.1438(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) + 1.9608(e_4 + 1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) - 52.4304(e_4 + 1)^2 u_0(t)$$

$$g'_{2new,1}(\mathbf{e}, t) = 0$$

$$g'_{2new,2}(\mathbf{e}, t) = +166.0325(e_4 + 1)^2$$

$$g'_{2new,3}(\mathbf{e}, t) = -26.2152(e_4 + 1)^2$$

$$d'_1 = 0$$

$$d'_2 = +33.3333\Delta Q_1$$

$$d'_3 = -5.2288\Delta Q_1$$

首先，我們選取控制李亞普諾夫函數：

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \quad (4.14)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10^{-8} & & \\ & 10^{-4} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

並且可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{z}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{P} [\mathbf{f}'_{new}(\mathbf{e}, t) + \mathbf{g}'_{1new}(\mathbf{e}, t)v + \mathbf{g}'_{2new}(\mathbf{e}, t)v^2 + \mathbf{d}'] \\ &= av^2 + bv + c + \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{d}' \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中 $a = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{g}'_{2new}(\mathbf{e}, t)$ ， $b = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{g}'_{1new}(\mathbf{e}, t)$ ， $c = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{f}'_{new}(\mathbf{e}, t)$ 。一般來說 \mathbf{d}' 是無法預測的。

其中

$$a = (0.01660325e_3 - 26.2152e_4)(e_4 + 1)^2$$

$$b = +26.1438e_4(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))$$

$$+ 1.9608e_4(e_4 + 1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) - 52.4304e_4(e_4 + 1)^2 u_0(t)$$

$$- 166.6667 * 10^{-4} e_3(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t)) + 332.065e_3(e_4 + 1)^2 u_0(t)$$

$$+ 16.6667 * 10^{-8} (e_1 + e_2)(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))$$

$$c = e_4 \{-45.6059 - 91.6693e_4 - 53.0961e_4^2 + 104.5752(e_4 + 1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t))\}$$

$$+ 7.8431(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_3 - x_{30}(t))$$

$$+ 26.1438(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t)$$

$$\begin{aligned}
& +1.9608(e_4 + 1)\sin(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t) \\
& - 26.2152(e_4 + 1)^2 u_0^2(t) - 5.2288Q_{10} \} \\
& + 10^{-4} e_3 \{ 284.1297 + 574.9261e_4 + 334.1297e_4^2 - 666.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 - e_3 - x_{30}(t)) \\
& - 166.6667(e_4 + 1)\cos(0.0873 + e_1 + x_{10}(t) - e_3 - x_{30}(t))u_0(t) \\
& + 166.0325(e_4 + 1)^2 u_0^2(t) + 33.3333Q_{10} - \frac{dx_{30}(t)}{dt} \} \\
& + 10^{-8} (e_1 + e_2) \{ e_2 + 1.8807 - 0.1667e_2 \\
& + 16.6667(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10}(t) + e_3 + x_{30}(t))u_0(t) - \frac{dx_{10}(t)}{dt} \} \\
\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{d}' & = 33.333 * 10^{-4} e_3 \Delta Q_1 - 5.2288 e_4 \Delta Q_1
\end{aligned}$$

由 a 的形式且 e_3 代表負載電壓的相角誤差， e_3 的值介在 $0 \sim 2\pi$ ，可知 $a = 0$ 發生在 $e_4 = 0$ ，滿足假設 3.1。

$$\begin{aligned}
\text{由 } |\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{d}'| & = |33.333 * 10^{-4} e_3 \Delta Q_1 - 5.2288 e_4 \Delta Q_1| \\
& \leq (33.3333 * 10^{-4} |e_3| + 5.2288 |e_4|) |\Delta Q_1|
\end{aligned}$$

定義 $\rho(\mathbf{e}, t) = (33.3333 * 10^{-4} |e_3| + 5.2288 |e_4|) |\Delta Q_1|$ 則滿足假設 3.2

考慮 \dot{V} 最差情況下，由(4.15)可得

$$\dot{V} = av^2 + bv + c + \rho(\mathbf{e}, t) \quad (4.16)$$

定義 Δ 為(4.20)式的判別式

$$\Delta = b^2 - 4a(c + \rho(\mathbf{e}, t)) \quad (4.17)$$

因為 $a = 0$ 發生在 $e_4 = 0$ ，我們以 $|e_4| = \varepsilon_1$ 當控制律切換的分界點， ε_1 為很小的值，以 $e_4 < -\varepsilon_1$ 為 $a > 0$ 的情形， $e_4 > \varepsilon_1$ 為 $a < 0$ 的情形， $|e_4| \leq \varepsilon_1$ 為 $a \approx 0$ 的情形，在此

我們選取 $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ，代表 $a \approx 0$ 時，(4.16)式等號右邊可以近似 v 的一次多項式，此時我們需要切換控制律使控制李亞普諾夫函數遞減。

當 $a \approx 0$ ，其中 b 可能在某些區域發生等於 0，當 $e_4 = 0$ 時， $b = 0$ 發生在 $e_3 = 0$ 如圖 4.4 所示，我們以 $|b| = \varepsilon_2$ 當控制律切換的分界點， ε_2 為很小的值，以 $|b| \leq \varepsilon_2$ 為 $b \approx 0$ 的情形，以 $|b| > \varepsilon_2$ 為 $b \neq 0$ 的情形。

當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 時，代表此時無法透過 v 改變 \dot{V} 的正負號，且此時 $e_3 \approx 0$ 、 $e_4 \approx 0$ ，此時控制律選取為 $v = 0$ ，若系統狀態誤差在此情況下會收斂到原點，則可以達到狀態誤差收斂到原點的目的。

當 $a \approx 0$ ，系統則在 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 的情形與 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ 的情形，在這兩種情況下作切換，達到狀態誤差收斂到原點的目標，如圖 4.5 所示

由於 a 、 b 可能在某些區域等於零，我們可分為四個情形討論分別為 $a > 0$ 、 $a < 0$ 、 $a \approx 0$ 且 $b \neq 0$ 、 $a \approx 0$ 且 $b \approx 0$ 的情況，設計適當的控制律及對應穩定的條件。

考慮 $a > 0$ 的情形：

當 $a > 0$ ，控制律選取

一般來說 \mathbf{d}' 是無法預測的，我們選取 v 使得 $\dot{V} < 0$ ，我們選取 v 為

$$v = -\frac{b}{2a} \quad (4.18)$$

當 $a > 0$ ，必須在滿足 $\Delta > 0$ 的限制我們才可以設計控制律使控制李亞普諾夫函數遞減，若在滿足 $\Delta > 0$ 的區域內存在某個區域 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ ，且 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ 為不變集合，則 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ 為可達成使狀態誤差收斂的區域。

由(4.13)、(4.16)及(4.17)的形式，我們可以知道滿足 $\Delta > 0$ 將受到 e_1 、 e_2 、 e_3 、

e_4 、 Q_{10} 及 ΔQ_1 的影響，因此，若選定 Q_{10} ， ΔQ_1 值不同，則滿足 $\Delta > 0$ 的狀態區域 e_1 、 e_2 、 e_3 、 e_4 的區域也會不同。

當 $a > 0$ ，必須再滿足 $\Delta > 0$ ，才能設計控制律使控制李亞普諾夫函數遞減，達到狀態誤差收斂的目的，令 $\Omega(\mathbf{e}, t) = \{\mathbf{e} \mid \Delta(\mathbf{e}, t) > 0\}$ ，若 $\Omega(\mathbf{e}, t)$ 內存在不變子集合 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ ，則 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ 為 $a > 0$ 時可達成狀態誤差收斂的區域。

我們以下面這個例子來說明，考慮 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_4 = -0.3$ ，我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，如圖 4.6 所示。在圖 4.6 中，圖形在 e_1 的方向上是週期的，因此我們擷取範圍在 $-\pi \sim \pi$ 來表示，圖中黃色的曲面代表的是 $\Delta(\mathbf{e}, t) = 0$ 的等高曲面，兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，以外則是 $\Delta(\mathbf{e}, t) < 0$ 的區域，我們可以知道 e_3 要介在某個範圍才能使 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ ，藍色的曲面代表的是將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得到 $\dot{e}_3 = 0$ 的圖形，兩個藍色區面所夾的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的圖形，以外則是 $\dot{e}_3 > 0$ 的圖形，因此我們可以發現在 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 區域內存在不變集合，同樣的方式當 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_4 = -0.1$ ，從圖 4.7 可以發現滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域的區域會變大， e_3 範圍越大，在 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域仍存在不變集合，並且 $e_4 \rightarrow 10^{-3}$ 滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 範圍越大，在 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域依然存在不變

集合。接著考慮 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_2 = 0$ ，我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，如圖 4.8 所示。在圖 4.8 中，圖形在 e_1 的方向上是週期的，因此我們擷取範圍在 $-\pi \sim \pi$ 來表示，圖中黃色的曲面代表的是 $\Delta(\mathbf{e}, t) = 0$ 的等高曲面，黃色曲面以上是 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，以下則是 $\Delta(\mathbf{e}, t) < 0$ 的區域，我們可以知道 e_3 要介在某個範圍 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ ，藍色的曲面代表的是將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得到 $\dot{e}_3 = 0$ 的圖形，藍色曲面以上的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的圖形，以下則是 $\dot{e}_3 > 0$ 的圖形，因此我們可以發現在 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 區域存在不變集合，

同樣的方式當 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_2 = 2$ ，從圖 4.9 可以發現滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域幾乎沒有什麼變化，在 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 依然存在不變集合。

因此當 $a > 0$ ，我們可以在 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域估計出不變集合 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ ，且在 $\Omega_1(\mathbf{e}, t)$ 這不變集合裡，由於控制李亞普諾夫函數會遞減，達到狀態誤差收斂的目的。

考慮 $a < 0$ 的情形：

一般來說 \mathbf{d}' 是無法預測的，當 $\Delta < 0$ ，我們選 v 使 $\dot{V} < 0$ ，我們選取 v 為

$$v = -\frac{b}{2a} \quad (4.19)$$

一般來說 \mathbf{d}' 是無法預測的，當 $\Delta > 0$ ，我們選 v 使得 $\dot{V} < 0$ ，我們選取 v 為

$$v = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \text{sgn}(a) \quad (4.20)$$

當 $a < 0$ ，我們一定可以找到控制律使控制李亞普諾夫函數遞減，若在滿足 $a < 0$ 的區域內存在某個區域 $\Omega_2(\mathbf{e}, t)$ ，且 $\Omega_2(\mathbf{e}, t)$ 為不變集合，則 $\Omega_2(\mathbf{e}, t)$ 為可達成使狀態誤差收斂的區域。

我們以下面這個例子來說明，考慮 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1=0.2$ ， $e_4=0.3$ ，我們可以在空間中畫出滿足 $\Omega(\mathbf{e}, t)$ 的區域如圖 4.10 所示。在圖 4.9 中，圖形在 e_1 的方向上是週期的，因此我們擷取範圍在 $-\pi \sim \pi$ 來表示，圖中黃色的曲面代表的是 $\Delta(\mathbf{e}, t) = 0$ 的等高曲面，兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，以外則是 $\Delta(\mathbf{e}, t) < 0$ 的區域，在 $\Delta(\mathbf{e}, t) < 0$ 的區域，我們可以選取控制律 $v = -\frac{b}{2a}$ 使控制李亞普諾夫函數

遞減，我們將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 ，藍色的曲面代表的是將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得到

$\dot{e}_3 = 0$ 的圖形，兩個藍色區面所夾的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的圖形，以外則是 $\dot{e}_3 > 0$ 的圖形，因此我們可以發現在 $a < 0$ 區域存在不變集合，同樣的方式當 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1=0.2$ ， $e_4=0.1$ ，從圖 4.11 可以發現滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域的區域會變大， e_3 範圍越大，仍存在不變集合。接著考慮 $Q_{10}=9$ ， $\Delta Q_1=0.2$ ， $e_2=0$ ，我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，如圖 4.12 所示。在圖 4.12 中，圖形在 e_1 的方向上是週期

的，因此我們擷取範圍在 $-\pi \sim \pi$ 來表示，圖中黃色的曲面代表的是 $\Delta(\mathbf{e}, t) = 0$ 的等高曲面，黃色曲面以下是 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域，以上則是 $\Delta(\mathbf{e}, t) < 0$ 的區域，我們可以知道 e_3 要介在某個範圍 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ ，藍色的曲面代表的是將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得到 $\dot{e}_3 = 0$ 的圖形，藍色區面以下的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的圖形，以上則是 $\dot{e}_3 > 0$ 的圖形，因此我們可以發現在 $a < 0$ 區域存在不變集合，同樣的方式當 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_2 = 2$ ，從圖 4.13 可以發現滿足 $\Delta(\mathbf{e}, t) > 0$ 的區域幾乎沒有什麼變化，在 $a < 0$ 依然存在不變集合。

因此當 $a < 0$ ，我們可以在 $a < 0$ 的區域估計出不變集合 $\Omega_2(\mathbf{e}, t)$ ，且在 $\Omega_2(\mathbf{e}, t)$ 這不變集合裡，由於控制李亞普諾夫函數會遞減，達到狀態誤差收斂的目的。

考慮 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ 的情形：

由(4.16)可以得到



$$\dot{V} \approx bv + c + \rho(\mathbf{e}, t) \quad (4.21)$$

選取控制律為：

$$v = \frac{-c - \rho(\mathbf{e}, t) - 0.5|b|}{b} \quad (4.22)$$

當 $a \approx 0$ ，我們需要估計收斂範圍，避免系統狀態誤差進入 $a > 0$ 、 $\Delta < 0$ ，造成狀態誤差發生發散的情形。我們以下面這個例子說明，考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_4 = -10^{-3}$ ，我們將(4.292)式控制律代入 \dot{e}_4 、 \dot{e}_3 ，可以在空間中畫出 \dot{e}_4 相關的圖形如圖 4.14 所示，圖中黃色曲面代表的是 $\dot{e}_4 = 0$ 的等高曲面，兩個黃色曲面所夾的是 $\dot{e}_4 > 0$ 的區域，以外則是 $\dot{e}_4 < 0$ 的區域，我們可以發現 e_3 要在某個範圍才能使 $\dot{e}_4 > 0$ ，圖中藍色區面代表的是 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面，兩個藍色區域所夾的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域，接著同樣考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ， $e_4 = -10^{-3}$ ，我們我們將(4.29)

式控制律代入 \dot{e}_4 ，可以在空間中畫出 \dot{e}_4 的圖形如圖 4.15 所示，圖中藍色曲面代表的是 $\dot{e}_4 = 0$ 的等高曲面，兩個藍色曲面所夾的是 $\dot{e}_4 > 0$ 的區域，圖中黃色曲面代表的是 $\Delta = 0$ 的等高曲面，兩個黃色曲面所夾是 $\Delta > 0$ 的區域，因此我們可以估計出集合 $\Omega_3(\mathbf{e}, t)$ 使其內之狀態不會進入 $a > 0$ 、 $\Delta < 0$ 造成狀態誤差發生發散的情形，並且使 $\Omega_3(\mathbf{e}, t) \cap \Omega_2(\mathbf{e}, t) \subseteq \Omega_3$ 、 $\Omega_3(\mathbf{e}, t) \cap \Omega_1(\mathbf{e}, t) \subseteq \Omega_3$ 。

考慮 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 的情形：

選取控制律為：

$$v = 0 \quad (4.23)$$

當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ ，代表此時無法透過 v 改變 \dot{V} 的正負號，此時控制律選取為 $v = 0$ ，若系統狀態誤差會收斂到原點，則可達到狀態收斂誤差收斂到原點的目標，當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 代表 $e_4 \approx 0$ 、 $e_3 \approx 0$ 。

接著我們讓 $e_4 = 0$ 、 $e_3 = 0$ ，判斷 $v = 0$ 此時系統是否為穩定

考慮 Q_{10} 固定，此時系統可表示為：

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\dot{e}_2 = 1.8807 - 0.1667e_2 + 16.6667(e_4 + 1)\sin(0.0873 - e_1 - x_{10} + e_3 + x_{30})u_0$$

我們可將此時系統表示為

$$\ddot{e}_1 + 0.1667\dot{e}_1 - 1.8807 - 16.6667\sin(0.0873 - e_1 - x_{10} + x_{30})u_0 = 0 \quad (4.24)$$

我們考慮 $Q_{10} = 8$ ，此時 $x_{10} = 0.16535$ ， $x_{30} = -1.51541 \times 10^{-3}$ ， $u_0 = 1.44444$ ，將

此時 x_{10} 、 x_{30} 、 u_0 值代入(4.28)，可得

$$\ddot{e}_1 + 0.1667\dot{e}_1 - 1.8807 - 24.087405\sin(-0.07957 - e_1) = 0 \quad (4.25)$$

針對(4.25)且 $|e_1| \leq \frac{\pi}{2} - 0.07957$ 選取李亞普諾夫函數：

$$V = \frac{1}{2}\dot{e}_1^2 + \int_0^{e_1} [-1.8807 - 24.07405\sin(-0.07957 - y)]dy + 24.07405\cos(-0.07957)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{e}_1^2 - 1.8807e_1 - 24.07405\cos(-0.07957 - e_1) + 24.07405\cos(-0.07957)$$

並且可得

$$\dot{V} = -0.1667(\dot{e}_1)^2 \leq 0$$

$\dot{V} = 0$ 發生在 $\dot{e}_1 = 0$ ，當 $\dot{e}_1 = 0$ 、 $|e_1| \leq \frac{\pi}{2} - 0.07957$ ，由(4.25)我們可以得到

$$\ddot{e}_1 = 1.8807 + 24.087405\sin(-0.07957 - e_1) \neq 0 \text{ 除了在 } e_1 = 0, \text{ 當 } |e_1| \leq \frac{\pi}{2} - 0.07957,$$

系統狀態誤差會收斂到 $e_1 = \dot{e}_1 = 0$ 。

同樣方式，針對 Q_{10} 固定，我們可以證明當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ ，系統為區域穩定，並且收斂範圍會隨 Q_{10} 增加而縮小。我們針對 $Q_{10} = 9$ 與 $Q_{10} = 11$ 可以畫出 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 系統的收斂範圍如圖 4.16 與 4.17 所示。

因此在 $\Omega_1(\mathbf{e}, t) \cup \Omega_2(\mathbf{e}, t) \cup \Omega_3(\mathbf{e}, t)$ 的區域狀態誤差且 e_1 、 e_2 落在當 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 的收斂範圍裡，則即使在有不確定因素下依然可以使狀態誤差收斂到原點，代表系統在有不確定因素下達成輸出追蹤的目的並且能夠收斂到無干擾系統的平衡點。

4.2.4 模擬結果

為了方便起見，我們將 $a > 0$ 時的系統搭配前述的控制律((4.18)式)，我們以系統一表示；將 $a < 0$ 的系統搭配前述的控制律((4.19)式或(4.20)式)，我們以系統二表示；將 $a \approx 0$ 、 $b \neq 0$ 的系統搭配前述的控制律((4.22)式)，我們以系統三表示；將 $a \approx 0$ 、 $b \approx 0$ 搭配前述的控制律((4.23)式)，我們以系統四表示。但是若按照前面的切換法則，可能在系統三與系統四之間產生切跳現象，我們舉下面例子說明，考慮 $\Delta Q_1 = 0$ 的情形，當 $Q_{10} = 11$ 時，我們選定初始值 $\mathbf{x}_0 = [0.6, 0.5, 0.3, 1.3]$ 進行模擬，如圖 4.18 所示。為了減輕切跳現象，我們重新定義 $a \approx 0$ 時系統三與系統四之間的切換法則，當在系統三時，當 $|b| < \varepsilon_2$ 則切換到系統四，當在系統四時當 $|b| > \varepsilon_3$ ，則切換到系統三，其中 ε_3 為很小的值且 $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$ ，如圖 4.19 所示。

在此選取 $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $\varepsilon_3 = \sqrt{5} * 10^{-3}$ 。

首先考慮 $\Delta Q_1 = 0$ 的情形，當 $Q_{10} = 11$ 時，我們選定初始狀 $\mathbf{x}_0 = [0.6, 0.5, 0.3, 1.3]$ 進行模擬，此時使無干擾系統電壓固定在 1，所得的平衡點與 u_0 皆為固定值，觀察初始電壓誤差為正值，觀察是否能達到電壓調節並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，模擬結果如圖 4.20 所示。圖 4.20(a)是控制過程中的 Q_1 值，圖 4.20(b)- 4.20(e)分別是狀態的變化情形，圖 4.20(f)是控制過程中的變壓器變化顯示，圖 4.20(g)- 4.20(j)分別是狀態的變化情形，圖 4.20(k)是控制過程中的切換信號，圖 4.20(l)是控制過程中的 u 值，由 4.20(e)我們可以看出電壓由 1.3 收斂於 1，達到電壓調節的目的，而且由 4.20(g)- 4.20(i)可以看出狀態與無干擾系統平衡點誤差會逐漸收斂到 0，達到內部狀態穩定的功能。接下來，一樣在 $Q_{10} = 11$ ，我們選定初始值 $\mathbf{x}_0 = [0.5, 0.2, 0.1, 0.9]$ ，觀察初始電壓誤差為負值，模擬結果如圖 4.21 所示，由 4.21(e)可以看出電壓由 0.9 收斂於 1，達到電壓調節的目的，並且由 4.21(g)- 4.21(i)，可以看出狀態與無干擾系統平衡點誤差會逐漸

收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。接下來我們考慮 Q_{10} 隨著時間改變時，此時使無干擾系統的負載電壓固定在 1，所得的平衡點與 u_0 值會隨著 Q_{10} 變化而變化，此時所得的無干擾系統的平衡點與 u_0 值會隨時間改變，觀察系統動態變化情形。圖 4.22，我們設定 $Q_{10} = 10 + 0.2\sin(t)$ ，選定初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.5, 0.2, 0.1, 1.1]$ ，由 4.22(e)，我們可以觀察電壓由 1.1 收斂到 1，由 4.22(g)- 4.22(i) 可以觀察到狀態與無干擾系統的平衡點的誤差會逐漸收斂到 0，達到內部狀態穩定的功能。在圖 4.23 中，我們使 Q_{10} 在 $t = 3 \sim 3.5$ 時，由 11 上升到 11.5，當 $t = 6.5 \sim 7$ ，在由 11.5 下降到 11，選定初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.3, 0.2, 0.1, 0.9]$ ，由 4.23(e)，我們可以看出電壓由 0.9 收斂到 1，由 4.23(g)- 4.23(i) 可以觀察到狀態與標稱平衡點的誤差會逐漸收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。

接下來我們考慮 Q_{10} 值固定及 $\Delta Q_1 \neq 0$ 進行模擬。首先選擇 $Q_{10} = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0.2$ ，選定初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4, 0.3, 0.2, 1.3]$ ，模擬結果如圖 4.24 所示，圖 4.24(a) 是控制過程中的 Q_1 值，圖 4.24(b)- 4.24(e) 分別是狀態的變化情形，圖 4.24(f) 是控制過程中的變壓器變化顯示，圖 4.24(g)- 4.24(j) 分別是狀態的變化情形，圖 4.24(k) 是控制過程中的切換信號，圖 4.24(l) 是控制過程中的 u 值，由於 Q_{10} 值固定，為了無干擾系統電壓固定在 1，所得的平衡點與 u_0 皆為固定值，模擬結果如圖 4.24 所示，由圖 4.24 (e)，我們可以觀察到電壓從 1.3 收斂到 1，達到電壓調節的目的，由 4.24(g)- 4.24(i) 可以觀察到狀態與無干擾系統的平衡點的誤差會逐漸收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。接下來，我們考慮 ΔQ_1 會隨著時間變動的情形，選定 $Q_{10} = 10$ ， ΔQ_1 在 $-0.2 \sim 0.2$ 隨機變動，初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.2, 0.3, 0.2, 1.3]$ ，模擬結果如圖 4.25 所示，由 4.25 (e)，可以看出電壓從 1.3 收斂到 1，達到電壓調節的目的，由 4.25(g)- 4.25(i) 可以觀察到狀態與平衡點誤差也逐漸收斂到 0，達到內部狀態穩定的目的。

接下來我們考慮 Q_{10} 隨著時間改變時且 ΔQ_1 會隨著時間變動，此時使無干擾系統的負載電壓固定在 1，所得的平衡點與 u_0 值會隨著 Q_{10} 變化而變化，此時所

得的無干擾系統的平衡點與 u_0 值會隨時間改變，觀察系統動態變化情形。圖 4.26，我們設定 $Q_{10} = 10 + 0.2\sin(t)$ ， $\Delta Q_1 = 0.1\sin(3t)$ ，選定初始狀態 $x_0 = [0.3, 0.2, 0.1, 0.9]$ ，由 4.26(e)，我們可以觀察電壓由 0.9 收斂到 1，由 4.26(g)-4.26(i)可以觀察到系統狀態與無干擾系統的與平衡誤差收斂到 0，達到電壓調節與內部狀態穩定的目的。

在圖 4.27 中，我們使 Q_{10} 在 $t = 3 \sim 3.5$ 時，由 10 上升到 10.5，當 $t = 6.5 \sim 7$ ，在由 10.5 下降到 10， ΔQ_1 在 $-0.1 \sim 0.1$ 隨機變動，選定初始狀態 $x_0 = [0.6, 0.5, 0.3, 1.3]$ ，由圖 4.27(e)，我們可以觀察電壓由 1.3 收斂到 1，由圖 4.27(g)-4.27(i)可以觀察到系統狀態與無干擾系統的與平衡誤差收斂到 0，達到電壓調節與內部狀態穩定的目的。

由以上模擬結果，我們設計的控制律在系統具有參數不確定因素情形下，依然可以達到輸出追蹤並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，同時達到輸出追蹤與維持內部狀態穩定的目的。



4.3 VSC 與 CLF 兩種控制律的比較

4.3.1 VSC 控制律設計

由於電壓調節值 $y_d = 1$ 。由(2.23)、(4.3)可得到順滑平面為

$$s(t) = x_4 - 1$$

並且可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{x}_4 \\ &= f_4(\mathbf{x}) + g_{1,4}(\mathbf{x}) + g_{2,4}(\mathbf{x})u^2 + p_{40} + d_4 \\ &= \alpha u^2 + \beta u + \gamma + d_4 \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中 $\alpha = g_{2,4}(\mathbf{x})$ ， $\beta = g_{1,4}(\mathbf{x})$ ， $\gamma = f_4(\mathbf{x}) + p_{40}$ 。一般來說 \mathbf{d} 是無法預測的，定義 Δ^* 為二次多項式(4.30)的判別式

$$\Delta^* = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad (4.27)$$

由(4.2)式可以知道 $\alpha = -26.2152x_4^2$ ，由 α 的形式可知道在控制期間 α 會小於 0，除非發生電壓崩潰的情況，滿足假設 2.1。 $|\nabla h \cdot d_4| = |d_4| \leq 5.2288|\Delta Q_1| = \kappa(\mathbf{x}, t)$ 滿足假設 2.2，我們知道若存在某個正數 η ，使控制期間 $\frac{\Delta^*}{4 \cdot |\alpha|} - \kappa(\mathbf{x}, t) - \eta > 0$ ，則可以滿足假設 2.3。因此，根據定理 2.1，有兩種控制律可以達到控制目的，在此我們選取控制律為

$$u = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta^*}}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta^*}}{2 \cdot |\alpha|} \text{sgn}(s(t)) \quad (4.28)$$

由(4.27)式，我們可以知道

$$\begin{aligned}
 \Delta^* &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\
 &= x_4^2 \left\{ [26.1438\cos(0.0873 + x_1 - x_3) + 1.9608\sin(0.0873 + x_1 - x_3)]^2 \right. \\
 &\quad + 104.8608[-7.0327 + 14.5229x_4 - 53.0961x_4^2 + 104.5752x_4\cos(0.0873 - x_3) \\
 &\quad \left. + 7.8431x_4\sin(0.0873 - x_3) - 5.2288Q_{10}] \right\} \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

由定理 2.1 可知道，系統要達成輸出電壓調節，必須滿足假設 2.1-2.3，由定理 2.1 可知道系統要達成輸出電壓調節，必須滿足假設 2.1-2.3，我們由假設 2.2 與(4.2)式可以得到 $|\nabla h \cdot \mathbf{d}| = |-5.2288\Delta Q_1| \leq 5.2288|\Delta Q_1|$ ，若設定假設 2.3 中之 $\eta = 0$ ，使不等式(2.30)變成如下的形式

$$W(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta^*}{4 \cdot |\alpha|} - 5.2288|\Delta Q_1| > 0 \quad (4.30)$$

由(4.2)與(4.29)式的形式，我們可以知道滿足(4.30)式將只受到 x_1 、 x_3 、 x_4 、 Q_{10} 及 ΔQ_1 值的影響，因此，若選定 Q_{10} ， ΔQ_1 值不同，則滿足(4.30)式的狀態變數 x_1 、 x_3 、 x_4 的區域也會不同，定義滿足(4.30)的區域為 $\Omega^*(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{x} | W(\mathbf{x}, t) > 0\}$ ，

選定 Q_{10} 及 ΔQ_1 值後，可以在空間中畫出滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.28-4.29 所示。圖 4.28(a)是 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ 時，狀態 x_1 、 x_3 與 x_4 滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，因為在 x_1 方向上，圖形是週期性的，因此我們擷取 $x_1 = -\pi \sim \pi$ 的區域來表示。圖 4.28(b)是 $Q_{10} = 11$ ， $\Delta Q_1 = 0$ 時，狀態 x_1 、 x_3 與 x_4 滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 。由圖 4.28 可以觀察到，當 Q_{10} 值愈大時，狀態滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域愈小，也就是系統狀態滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域會愈小。圖 4.29(a)是 $Q_{10} = 10$ ， $\Delta Q_1 = 0$ 時，狀態 x_1 、 x_3 與 x_4 滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域。圖 4.29(b)是 $Q_{10} = 10$ ， $\Delta Q_1 = 1$ 時，狀態 x_1 、 x_3 與 x_4 滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$

的區域。由圖 4.29 可以觀察到，當 ΔQ_1 值愈大時，狀態滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域愈小，也就是系統狀態可能滿足假設 2.3 的區域會愈小。

4.3.2 VSC 與 CLF 兩種控制律的比較

本節中我們將探討在 $\Delta Q_1 = 0$ 與 $\Delta Q_1 \neq 0$ 時，應用 4.2 節設計的控制律與應用 VSC 設計的控制律，在條件相同的環境下作性能的比較。首先，我們比較兩種控制律可以達到電壓調節的範圍，我們以下面例子說明。首先考慮 $a > 0$ 的情形，考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ， $x_2 = 0$ 的情況下，我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.30 所示，黃色曲面代表的是 $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色曲面以上是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色曲面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以上代表滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，以下則是不滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，同樣的方式考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ 的情況下，我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.31 所示，接著我們考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ ， $x_2 = 0$ 在空間中畫出滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.32 所示，同樣方式考慮我們考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ ， $x_2 = 2$ 在空間中畫出滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.33 所示，由圖 4.30-圖 4.33，我們發現當 $a > 0$ 時滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域幾乎一樣。接著我們考慮 $a < 0$ 的情形，考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ， $x_2 = 0$ 的情況下，我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.34 所示，黃色曲面代表的是 $\Delta = 0$ 的等高曲面，黃色曲面以下是 $\Delta > 0$ 的區域，黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域，藍色曲面以下代表滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，以上則是不滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，同

樣的方式考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ 的情況下，當 $a < 0$ 我們可以在空間中畫出滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.35 所示，我們發現當 $a < 0$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ 時滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域幾乎重合，接著考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ ， $x_2 = 0$ 在空間中畫出當 $a < 0$ 滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.36 所示，同樣方式考慮我們考慮 $Q_{10} = 9$ ， $\Delta Q_1 = 0.3$ ， $x_2 = 2$ 在空間中畫出當 $a < 0$ 滿足 $\Delta > 0$ 及 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，如圖 4.37，由圖 4.36-圖 4.37 可以發現當 $a < 0$ 、 $\Delta Q_1 \neq 0$ 時滿足 $\Delta > 0$ 的區域會比滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域來的大。

雖然使用 VSC 在滿足假設 2.3 條件下，可以使系統達到電壓調節的目的，但內部狀態可能無法無時滿足假設 2.3 條件。系統要達到電壓調節目的必須滿足假設 2.3，會影響 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的狀態只有 x_1 、 x_3 與 x_4 ，不包含 x_2 。由系統的動態方程式可以知道 $\dot{x}_1 = x_2$ ，因此，當系統的初始狀態在 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 區域內的邊界附近時，此時若 x_2 夠大的話，系統狀態有可能會跑出滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，造成不穩定的情況發生。使用 4.2 節的控制律，我們可以估計出使收斂區域，使系統達到電壓調節與內部狀態穩定的功能。考慮下面例子，我們選定 $Q_{10} = 11.5$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ ，初使狀態選擇 $\mathbf{x} = [0.28, 3, -0.028, 0.8]$ ，初始狀態滿足 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域內及 4.2 節設計的控制率的收斂範圍內進行比較，使用 VSC 的控制律，狀態在經過一段時間之後，就會跑出 $\Omega^*(\mathbf{x}, t)$ 的區域，隨即發生電壓崩潰的狀況，如圖 4.38 所示。但是使用 4.2 節控制律卻能夠達成電壓調節與內部狀態穩定的功能，如圖 4.39 所示。

在電力系統電壓調節中，使用 VSC 控制律為了避免高頻切換的產生，我們將控制律(4.35)式中的 $\text{sgn}(s(t))$ 以 $\text{sat}\left(\frac{s(t)}{\varepsilon}\right)$ 取代，且取 $\varepsilon = 10^{-2}$ 進行模擬。此外，我們使用 CLF 控制律使系統達到電壓調節與內部狀態穩定的目的，在此我們選

取 $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ 、 $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ 、 $\varepsilon_3 = \sqrt{5} * 10^{-3}$ 進行數值模擬。

接下來，考慮 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0$ ，選定初始狀態 $\mathbf{x} = [0.4, 0.3, 0.1, 0.8]$ ，此時為了使無干擾系統達到電壓調節，所得的平衡點 $\mathbf{x}_0 = [0.18453, 0, 0.0041, 1]$ 及 $u_0 = 1.2025$ ，應用 4.2 節介紹的控制律進行模擬。另外此時經由” MATLAB” 計算可以得到系統應用 VSC 控制的平衡點 $\hat{\mathbf{x}} = [0.18454, 0, 0.00326, 1]$ ，接著我們針對這兩種控制律作效能比較，定義輸出電壓的收斂時間為

$$t_f = \min \left\{ t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.001, \forall t \geq t^* \right\} \quad (4.31)$$

也就是狀態 x_4 最後一次進入 $|x_4(t) - 1| < 0.001$ 的區域後就永遠在此區域內的時間點。比較應用兩種控制律使電壓收斂到我們希望的電壓值所花費的時間、在模擬期間最大的控制力、花費的能量總合、負載電壓與 1 的誤差平方總和以及狀態誤差平方總合。模擬結果如圖 4.40-圖 4.51 所示，實線代表使用 CLF 設計的控制律，虛線代表使用 VSC 設計出的控制律，圖 4.40-4.43 分別為四個狀態的圖形，圖 4.34 為 u 值，圖 4.45 為使用 CLF 控制律的切換信號。圖 4.46-4.49 分別為四個狀態的模擬時間 1 秒的圖形，圖 4.50 為模擬時間 1 秒的 u 值，圖 4.51 為模擬時間 1 秒使用 CLF 控制律的切換信號。我們將比較結果整理如表 4.1 所示，其中 t_f 為收斂時間， T 為模擬時間， $\|u(t)\|_{\infty}$ 其模擬期間最大的控制力， $\int_0^T u(t)^2 dt$ 為花費的能量總和， $\int_0^T (x_4(t) - 1)^2 dt$ 為負載電壓與 1 的誤差平方總和， $\int_0^T (\mathbf{e}(t))^T \mathbf{e}(t) dt$ 狀態與平衡點誤差平方總合。

由圖 4.40-圖 4.51 及表 4.1 的比較，我們可以發現，在 $\Delta Q_1 = 0$ 的情況下，我們先利用預備回授使無干擾系統達到電壓調節並找出對應的平衡點，在以 CLF 設計的控制律使系統狀態收斂到無干擾系統的平衡點，可以在非常短時間內調節到我們希望的電壓值，狀態與平衡點的誤差平方上與使用 VSC 設計的控制律差不了多少。因此，從比較結果來看，我們使用 CLF 設計的控制律在電壓收斂時間、

負載電壓與 1 的平方誤差都有非常優異的表現，此外兩者的控制律剛開始幾乎一樣，但在 $t = 0.054$ 秒時，使用 CLF 設計出的控制律的 u 值突然從 0.36 跳到 1.23，這是因為此時從系統一切換到系統三，之後一段時間維持在系統三，到 $t = 0.09$ 從系統三切換到系統四，之後一直維持在系統四，所以控制律並不平滑。

接下來我們考慮 $\Delta Q_1 \neq 0$ 的情況下，在 $Q_{10} = 10$ 、 $\Delta Q_1 = 0.2$ ，比較兩種控制律的表現。選擇初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4, 0.3, 0.1, 0.8]$ ，輸出電壓收斂時間為(4.31)式，模擬結果如圖 4.52-圖 4.63 所示，實線代表使用 CLF 設計的控制律，虛線代表使用 VSC 設計出的控制律，圖 4.52-4.55 分別為四個狀態的圖形，圖 4.56 為 u 值，圖 4.57 為使用 CLF 控制律的切換信號。圖 4.58-圖 4.61 分別為四個狀態的模擬時間 1 秒的圖形，圖 4.62 為模擬時間 1 秒的 u 值，圖 4.63 為模擬時間 1 秒使用 CLF 控制律的切換信號。由圖 4.52-圖 4.63 及表 4.2 的比較，我們可以發現，在 $\Delta Q_1 = 0.2$ 的情況下，我們先利用預備回授使無干擾系統達到電壓調節並找出對應的平衡點，在以 CLF 設計的控制律使系統狀態在有負載不確定因素下收斂到無干擾系統的平衡點，可以在非常短時間內調節到我們希望的電壓值，狀態與平衡點的誤差平方上與使用 VSC 設計的控制律差不多。此外，我們使用 CLF 設計的控制律在有不確定因素或外在干擾下，電壓收斂時間、負載電壓與 1 的平方誤差都有非常優異的表現，另外兩者的控制律剛開始幾乎一樣，但在 $t = 0.058$ 秒時，使用 CLF 的 u 值突然從 0.36 跳到 0.7，這是因為此時從系統一切換到系統三，之後一段時間維持在系統三，但此時控制律很不規則，到 $t = 0.1$ 從系統三切換到系統四，之後一直維持在系統四。

比較兩種控制律，由以上結果觀察，使用 4.2 節設計的控制律改善了使用 VSC 設計的控制律，在電壓調節過程中但無法保證內部狀態穩定的缺點，並且保留 VSC 響應速度快，對於系統不確定因素較不敏感的優點。

表 4.1：CLF 與 VSC 控制律的性能比較

	CLF	VSC
t_f	0.056	0.056
$\ u(t)\ _{\infty}$	1.4283	1.2144
$\int_0^T u(t)^2 dt$	14.375	14.294
$\int_0^T (x_4(t) - 1)^2 dt$	0.00046	0.0046
$\int_0^T (\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t)) dt$	1.6677	1.6755

$t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.001, \forall t \geq t^*\}$ ， $\|u(t)\|_{\infty}$ 為模擬期間最大的控制力，

$\int_0^T u(t)^2 dt$ 為模擬期間花費的能量總和， $\int_0^T (x_4(t) - 1)^2 dt$ 為模擬期間狀態 x_4 與 1 的誤差總和， $\int_0^T (\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t)) dt$ 為狀態誤差平方總合。

表 4.2：CLF 與 VSC 控制律的性能比較

	CLF	VSC
t_f	0.056	0.056
$\ u(t)\ _{\infty}$	2.0101	1.1863
$\int_0^T u(t)^2 dt$	14.332	13.612
$\int_0^T (x_4(t) - 1)^2 dt$	0.00054	0.00054
$\int_0^T (\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t)) dt$	1.6039	1.6342

$t_f = \min\{t^* \mid |x_4(t) - 1| < 0.001, \forall t \geq t^*\}$ ， $\|u(t)\|_{\infty}$ 為模擬期間最大的控制力，

$\int_0^T u(t)^2 dt$ 為模擬期間花費的能量總和， $\int_0^T (x_4(t) - 1)^2 dt$ 為模擬期間狀態 x_4 與 1 的誤差總和， $\int_0^T (\mathbf{e}(t)^T \mathbf{e}(t)) dt$ 為狀態誤差平方總合。

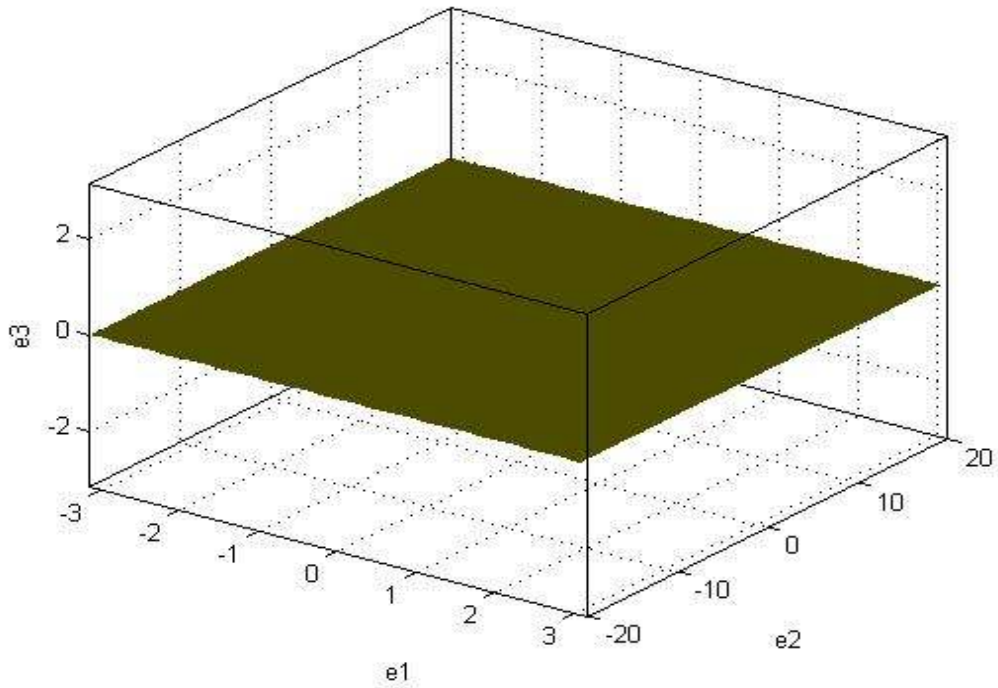


圖 4.4: $e_4 = 0, b = 0$ 發生的區域

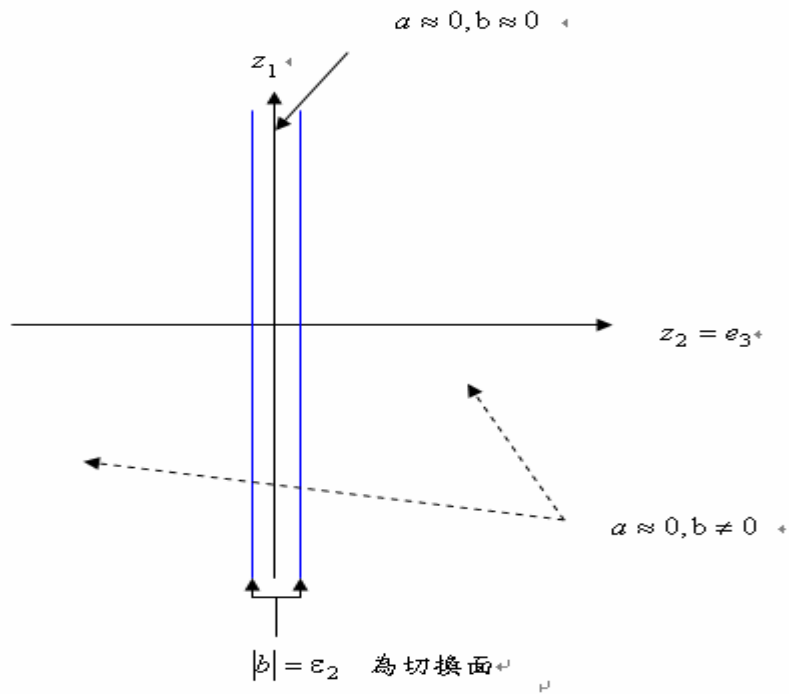


圖 4.5: $a \approx 0$ 的切換法則

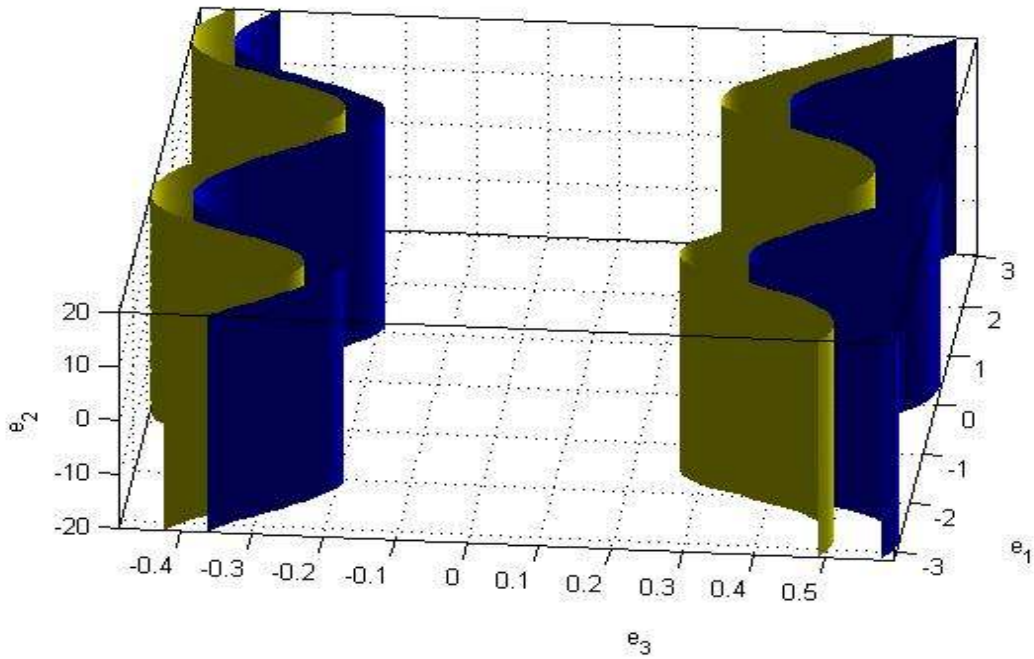


圖 4.6: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -0.3$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

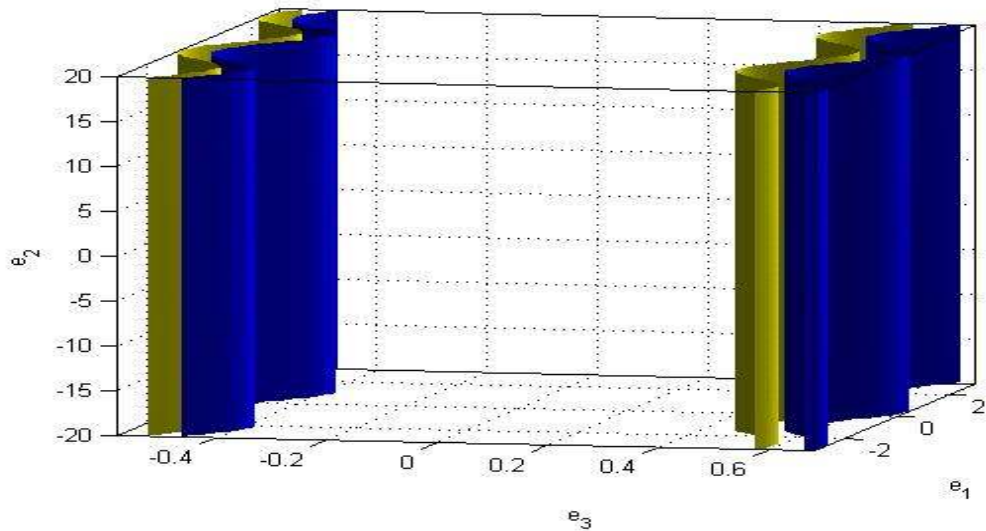


圖 4.7: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -0.1$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

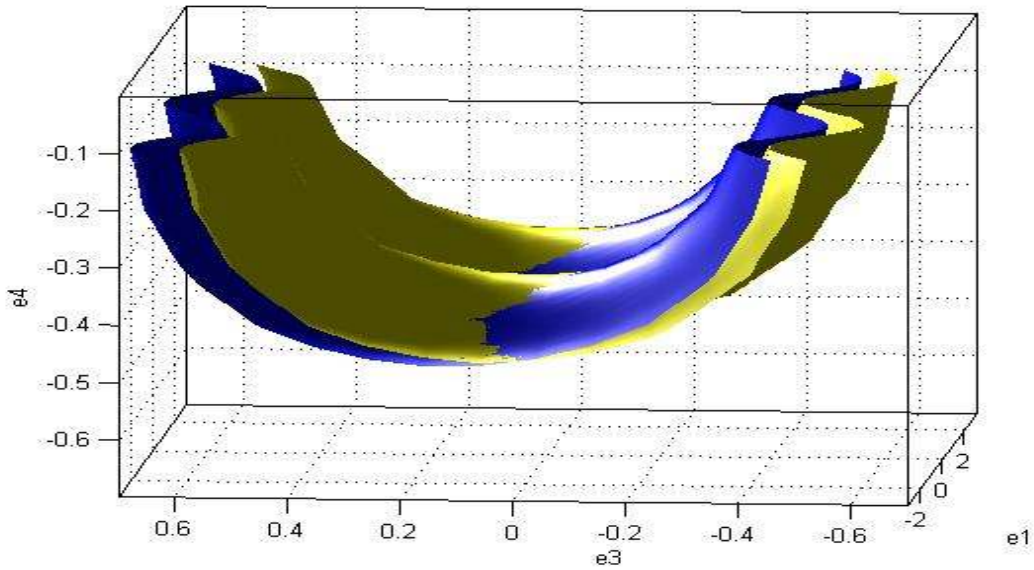


圖 4.8: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 藍色區域以上則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

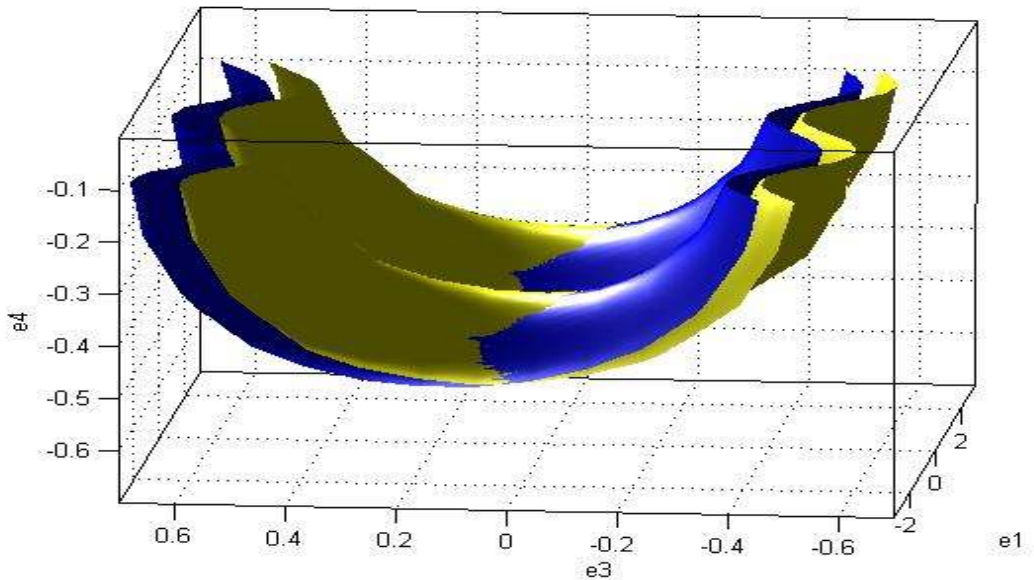


圖 4.9: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 2$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 藍色區域以上則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

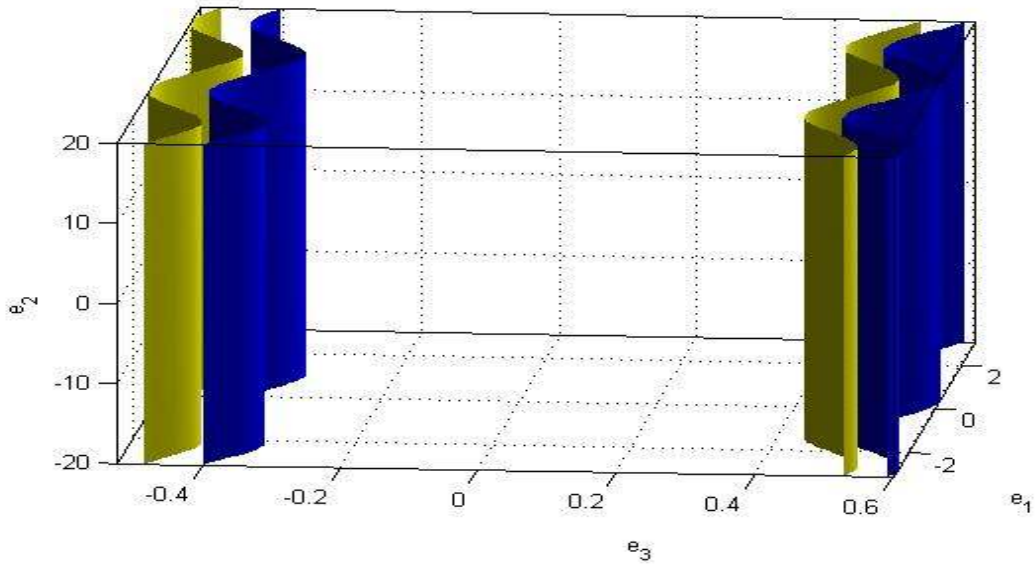


圖 4.10: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = 0.3$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

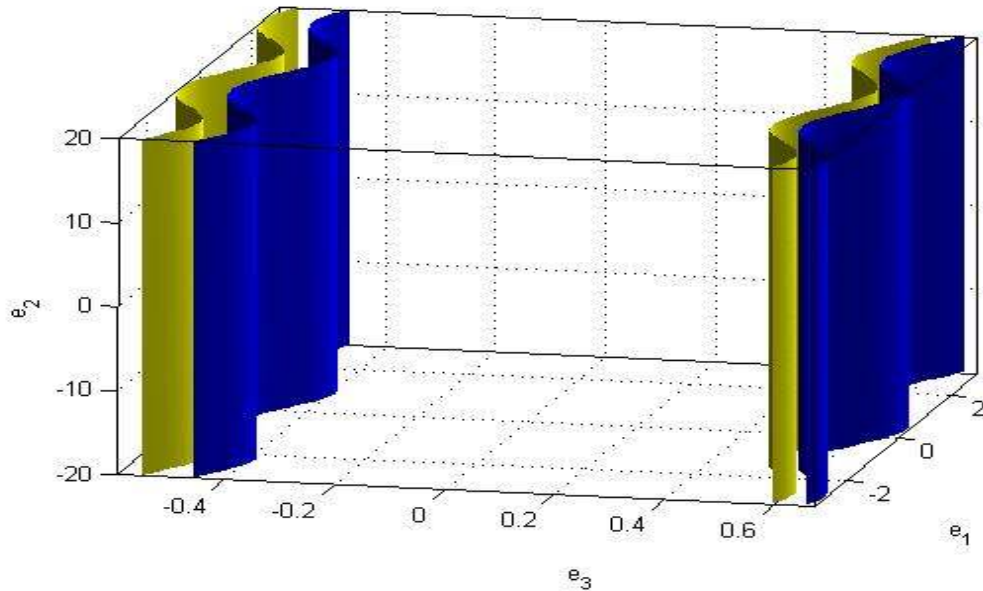


圖 4.11: 黃色曲面在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = 0.1$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的區域為 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

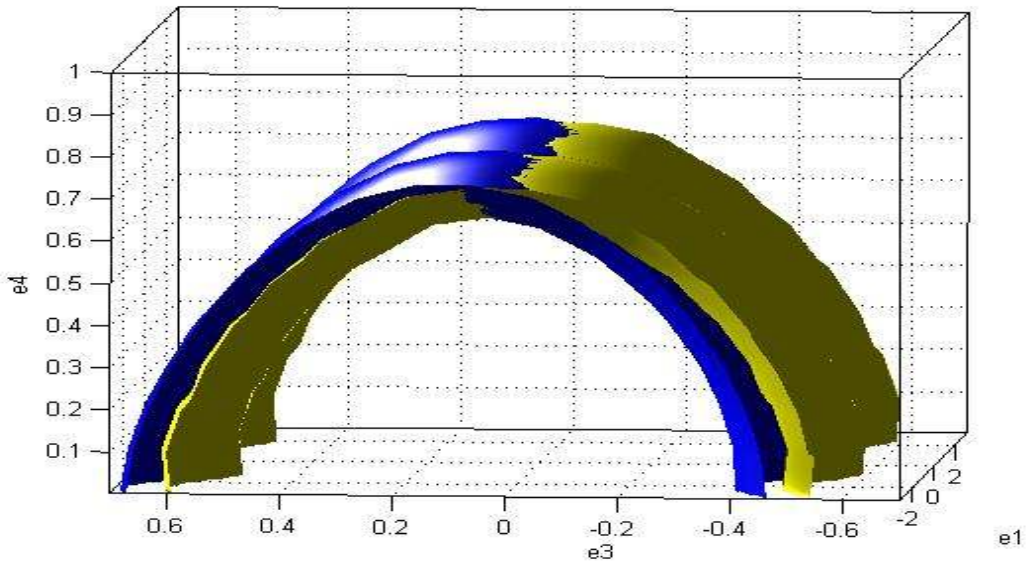


圖 4.12: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 藍色區域以下則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

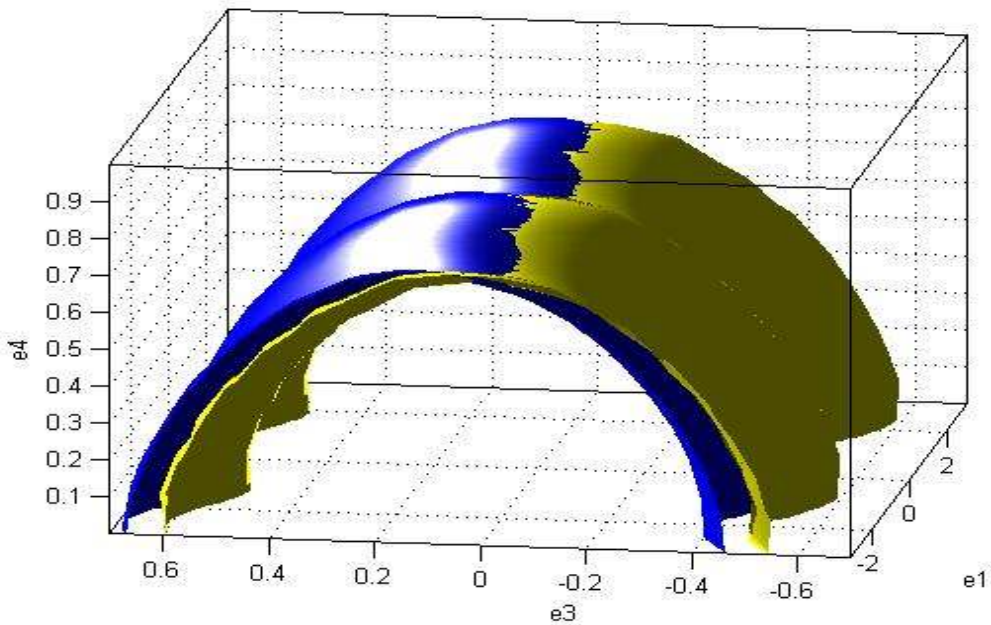


圖 4.13: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_2 = 2$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面為將 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 藍色區域以下則是 $v = -\frac{b}{2a}$ 代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

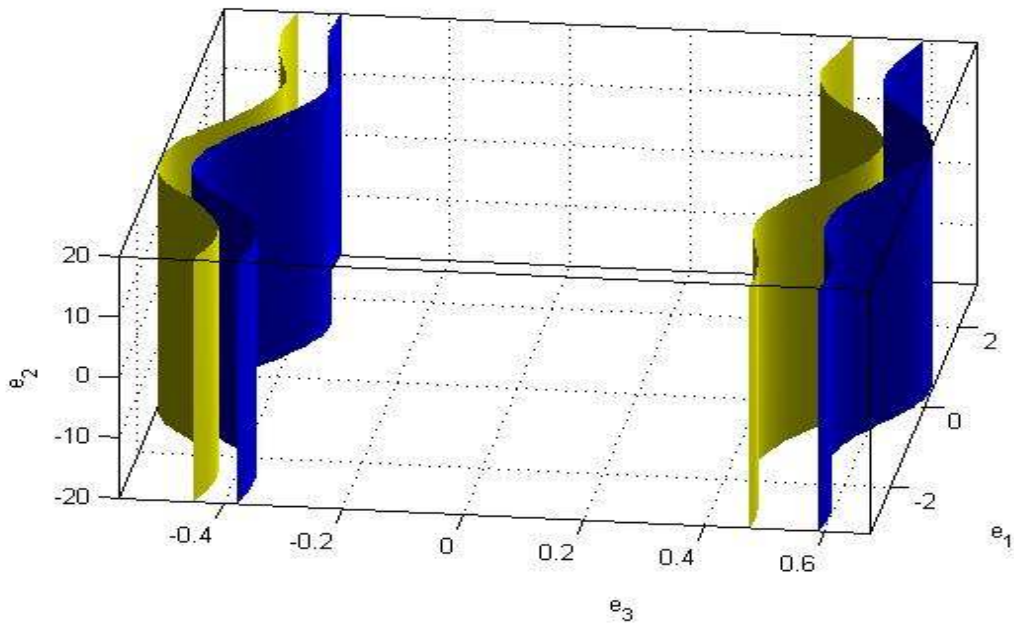


圖 4.14: 黃色曲面代表在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -10^{-3}$ 時, 將(4.22)式代入 \dot{e}_4 所得 $\dot{e}_4 = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的是 $\dot{e}_4 > 0$ 的區域, 藍色區面代表將(4.22)式代入 \dot{e}_3 所得 $\dot{e}_3 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的是 $\dot{e}_3 < 0$ 的區域。

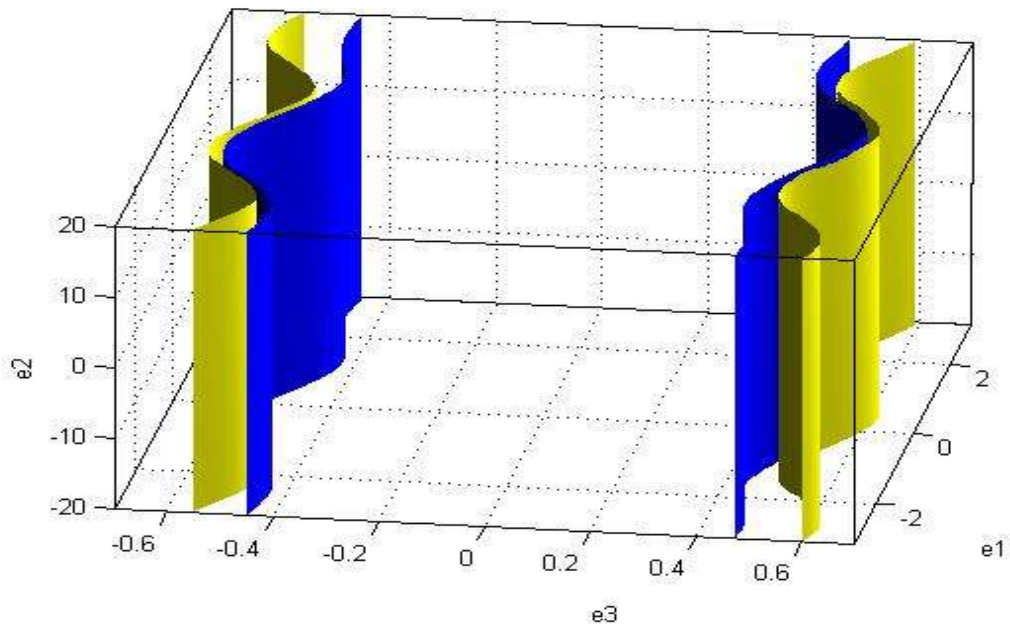


圖 4.15: 黃色曲面是在 $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.2$ 及 $e_4 = -10^{-3}$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 兩個黃色曲面所夾的區域是 $\Delta > 0$ 的區域, 藍色曲面代表將(4.22)式代入 \dot{e}_4 所得 $\dot{e}_4 = 0$ 的等高曲面, 兩個藍色曲面所夾的是 $\dot{e}_4 > 0$ 的區域。

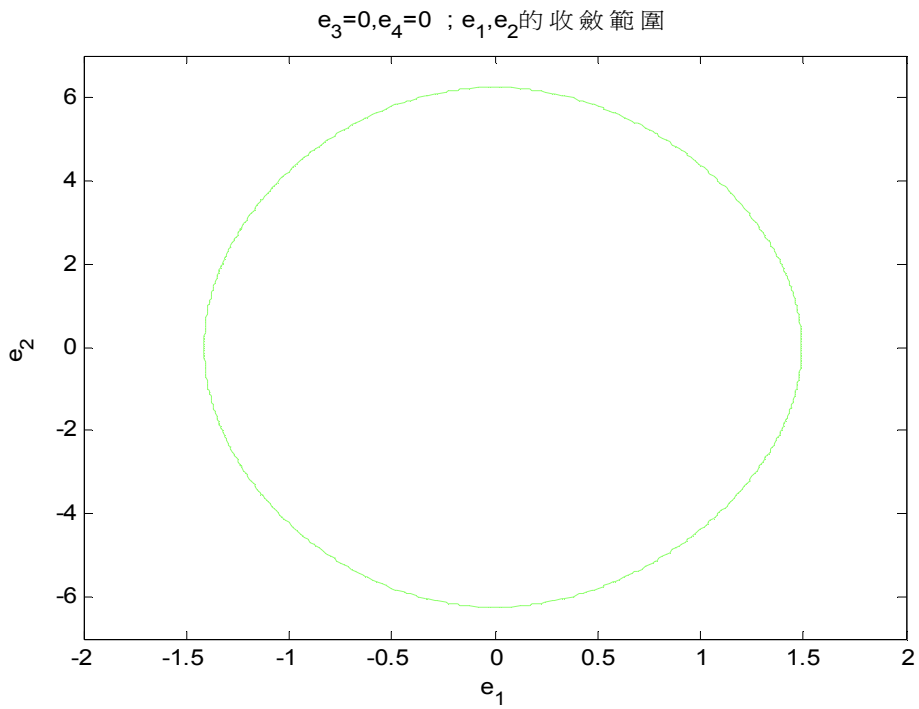


圖 4.16: 黑色線內部代表當 $e_3 = 0$ 、 $e_4 = 0$ ，控制律為 $u = u_0$ 時， e_1 、 e_2 的收斂範圍，當 $Q_{10} = 9$

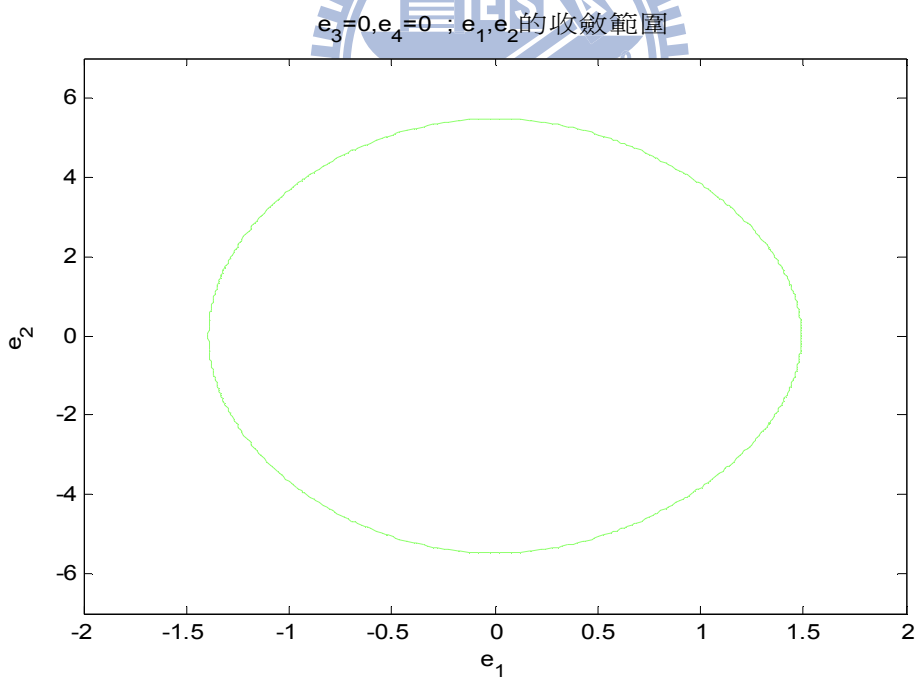


圖 4.17: 黑色線內部代表當 $e_3 = 0$ 、 $e_4 = 0$ ，控制律為 $u = u_0$ 時， e_1 、 e_2 的收斂範圍，當 $Q_{10} = 11$

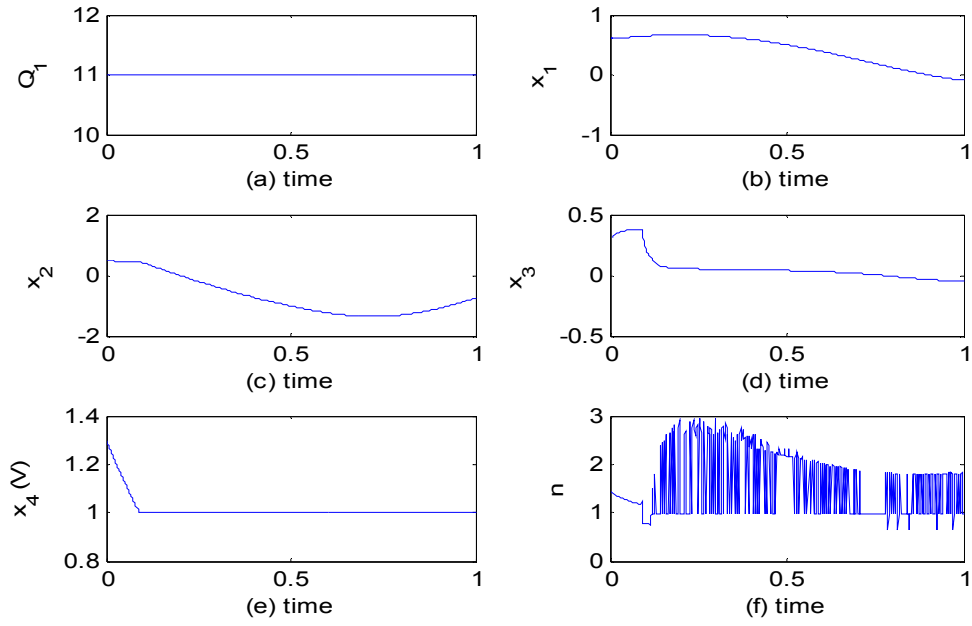


圖 4.18: $Q_{10} = 11$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始電壓為正值, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值。

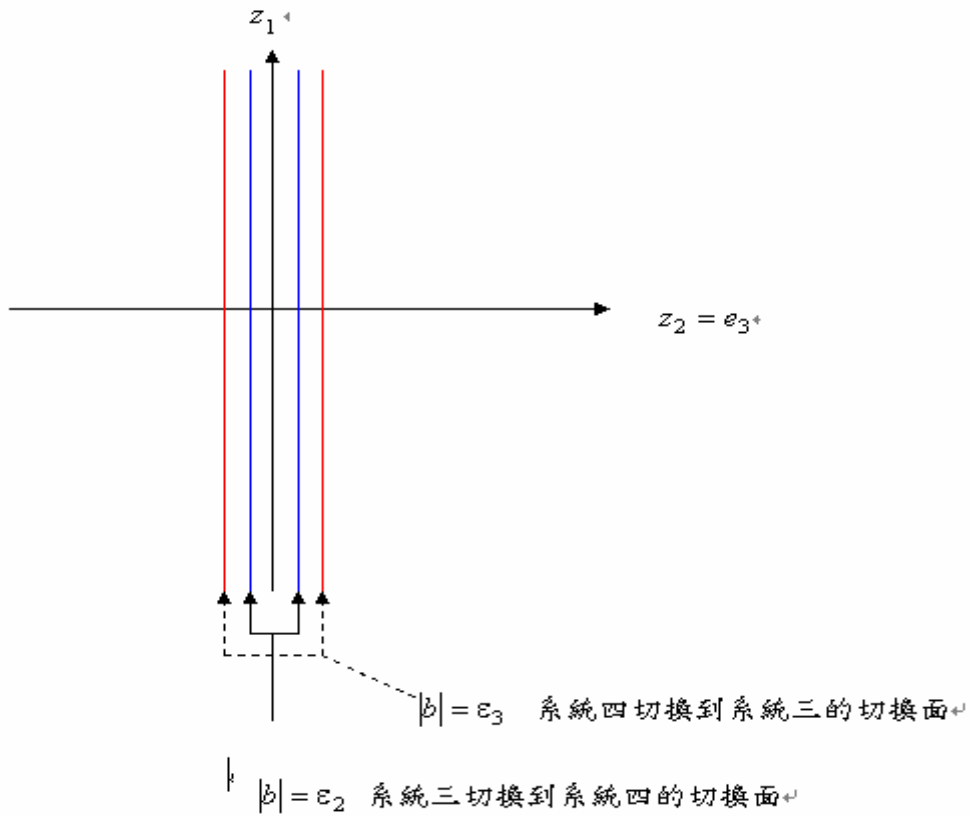


圖 4.19: $a \approx 0$ 時新的切換法則

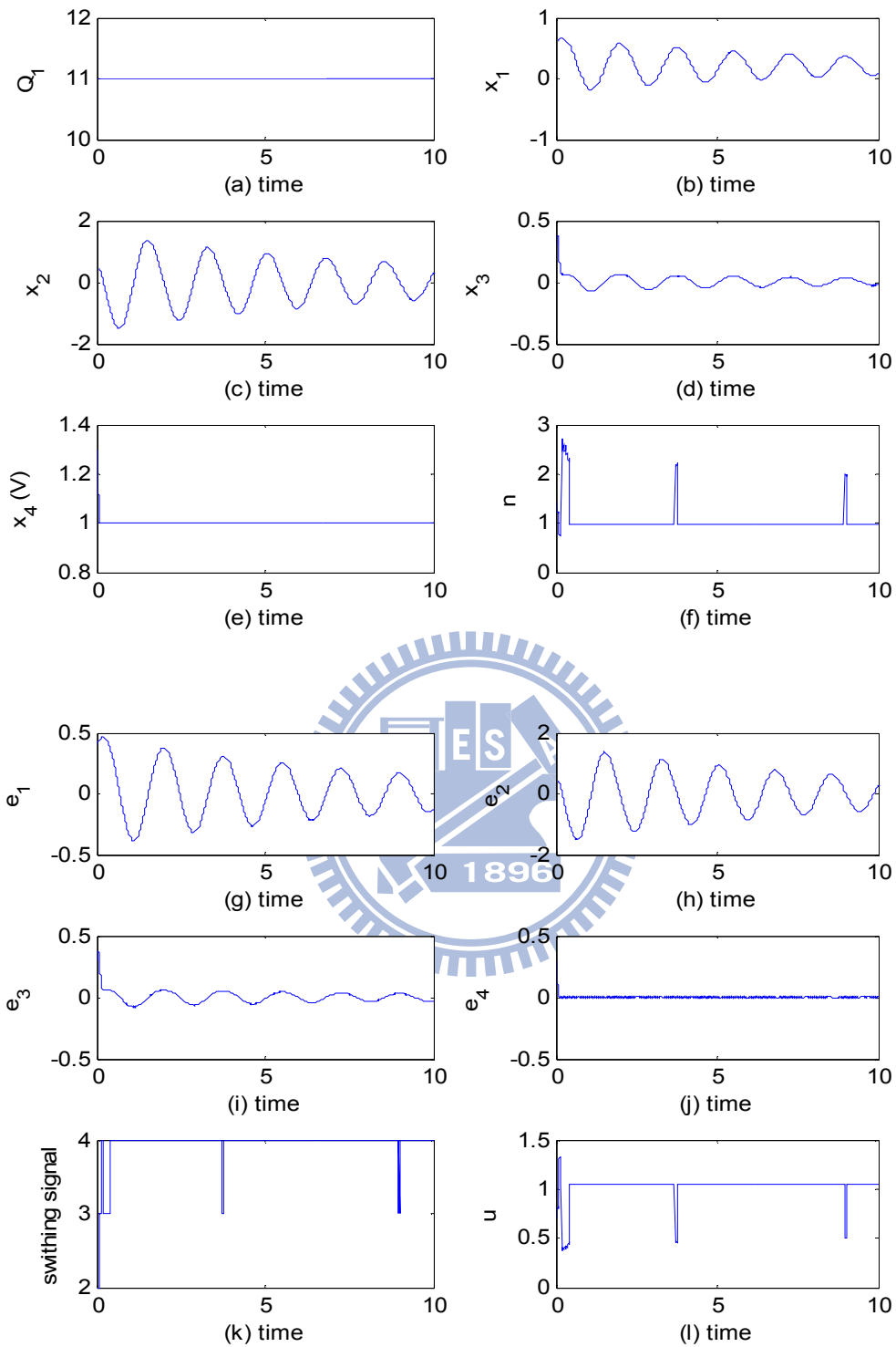


圖 4.20: $Q_{10} = 11$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始電壓為正值, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

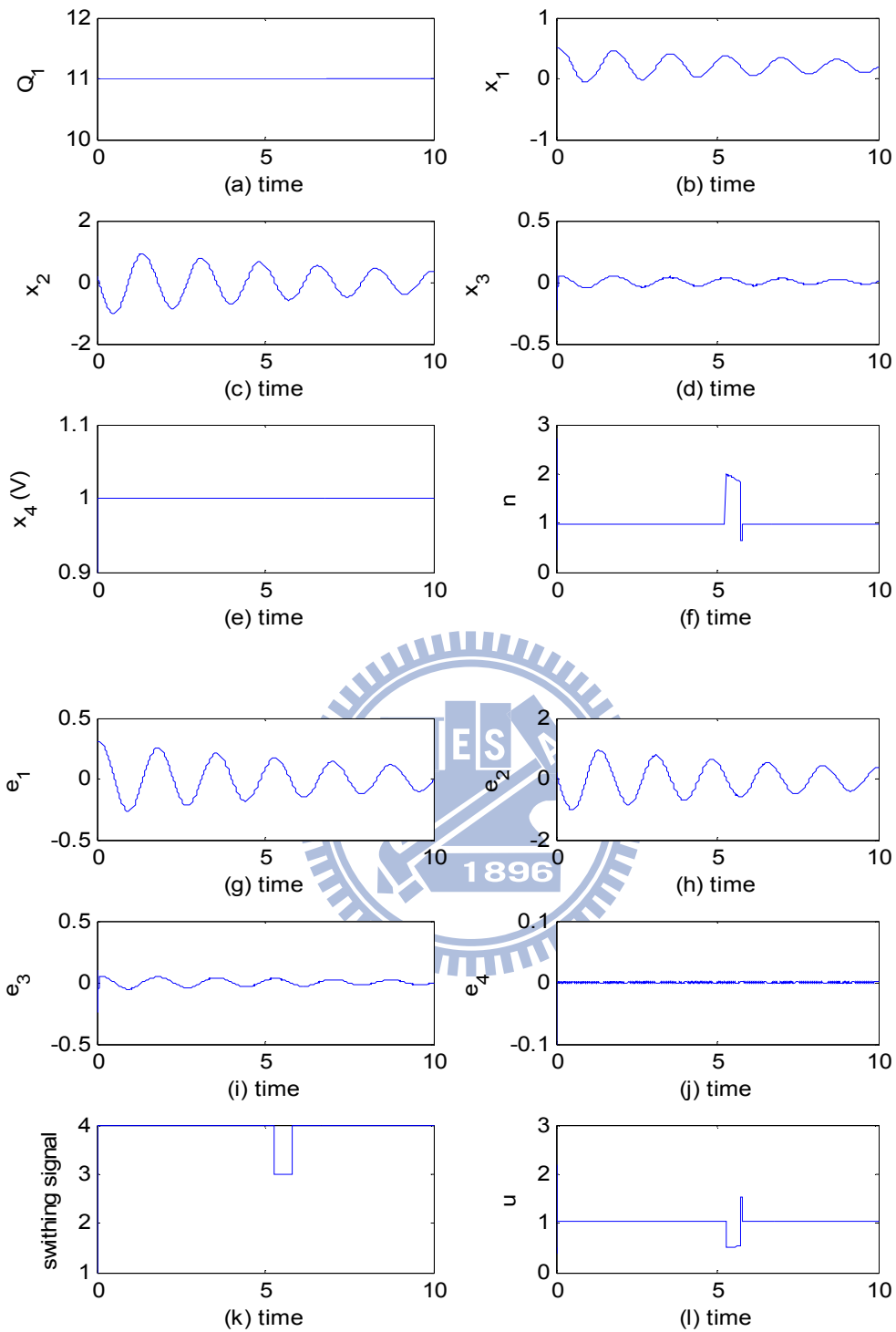


圖 4.21: $Q_{10} = 11$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始電壓為負值, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

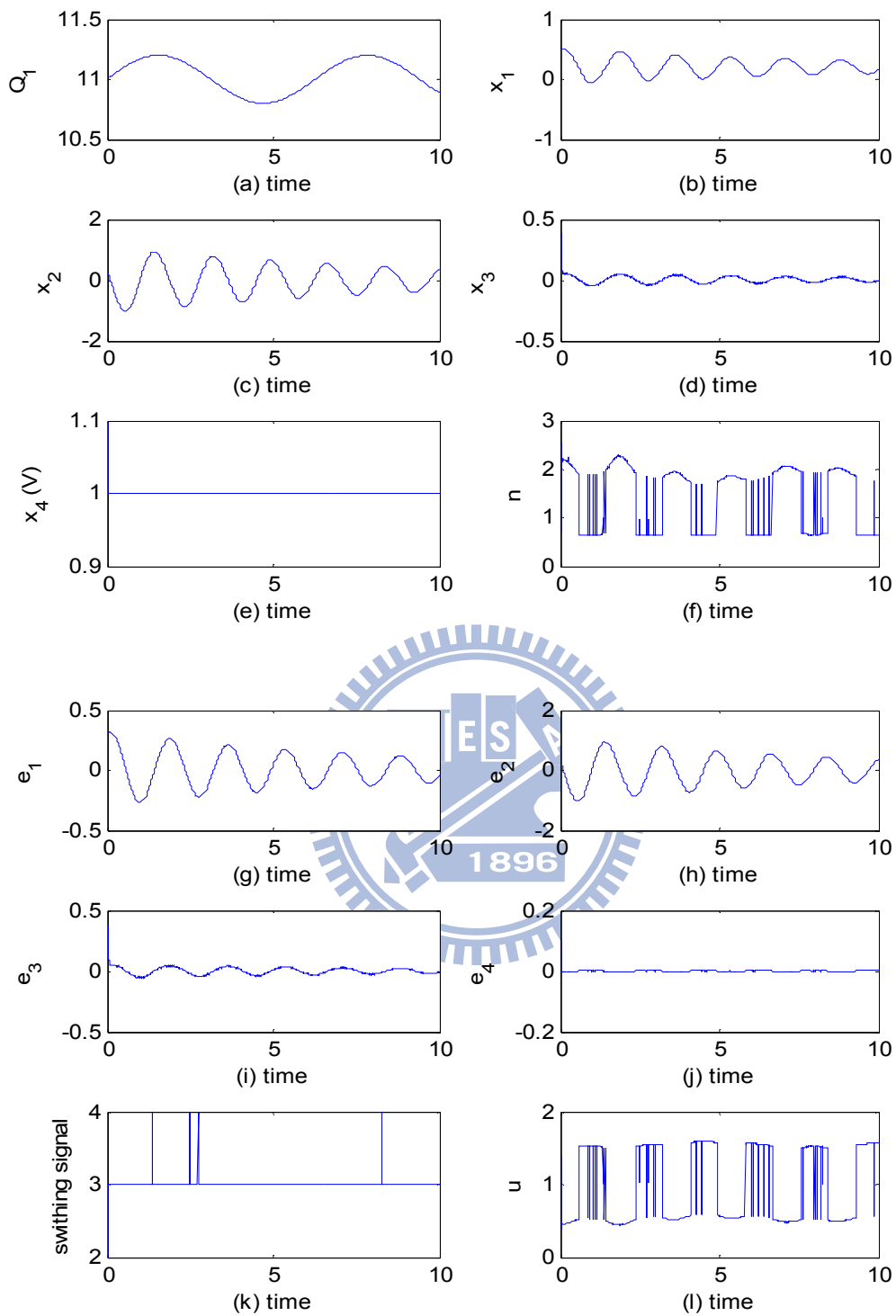


圖 4.22: $Q_{10} = 11 + 0.2\sin(t)$, $\Delta Q_1 = 0$, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

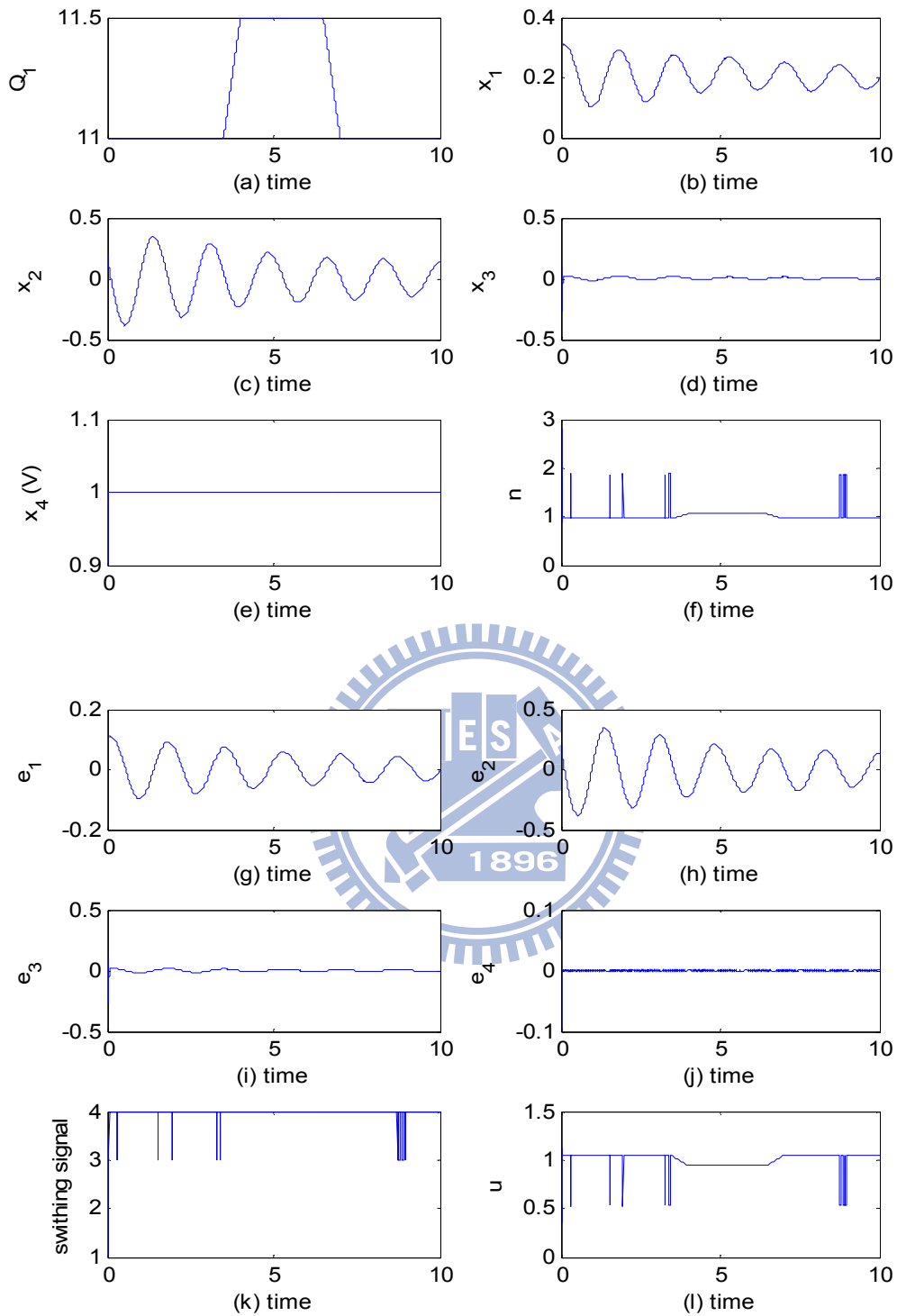


圖 4.23: Q_{10} 在 11~11.5 之間變化, $\Delta Q_1 = 0$, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

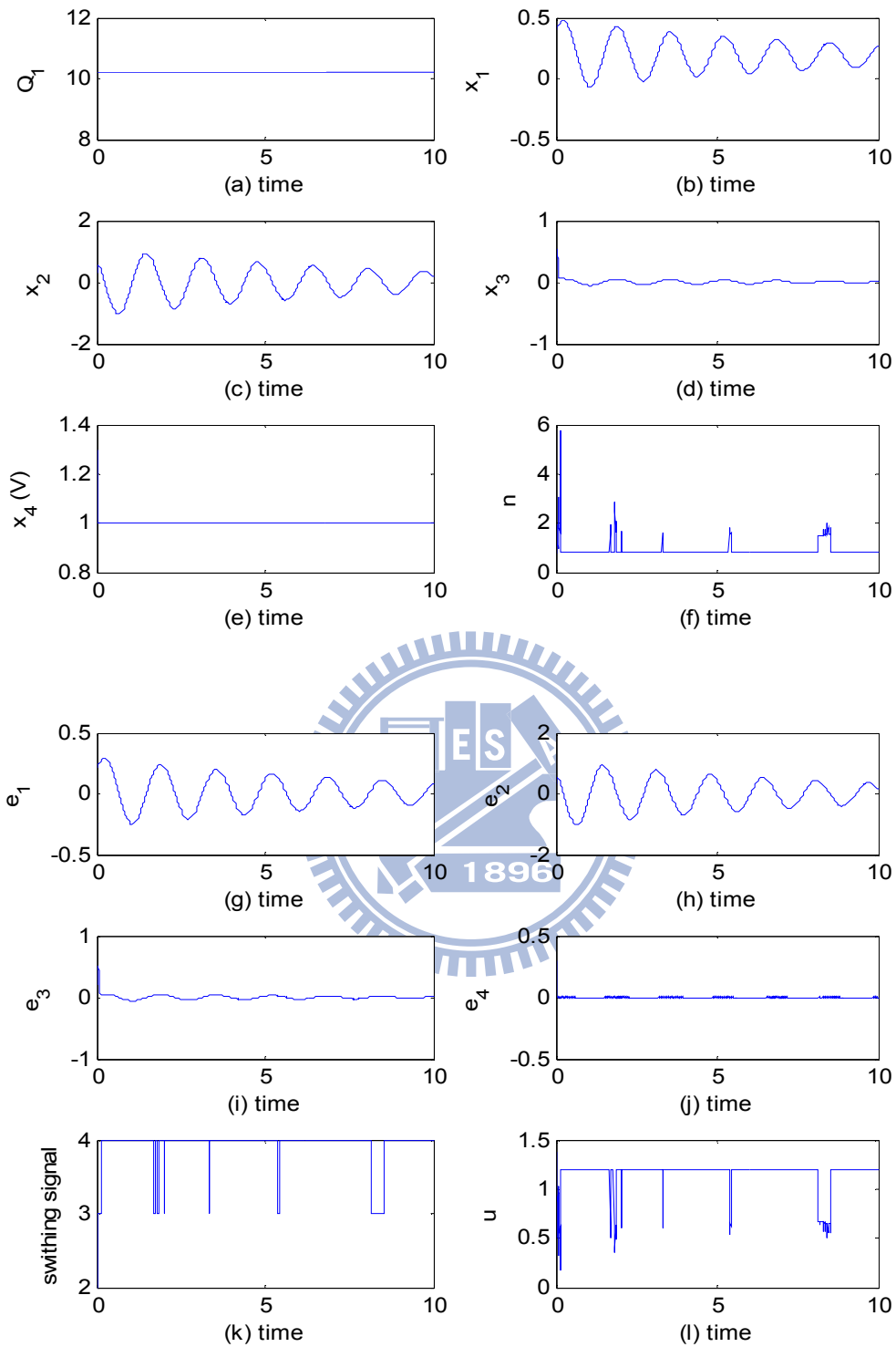


圖 4.24: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

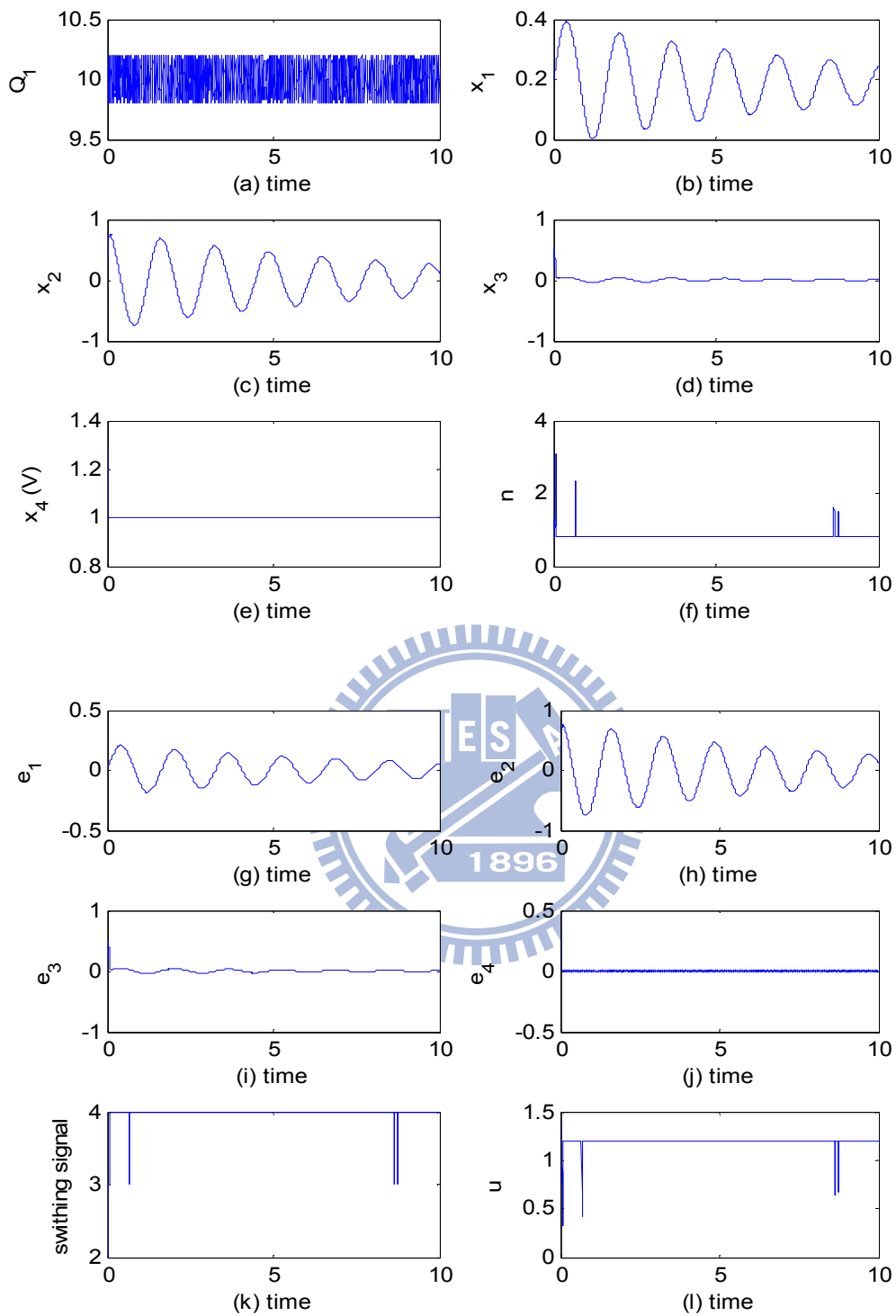


圖 4.25: $Q_{10} = 10$, ΔQ_1 在 $-0.2 \sim 0.2$ 之間變動, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

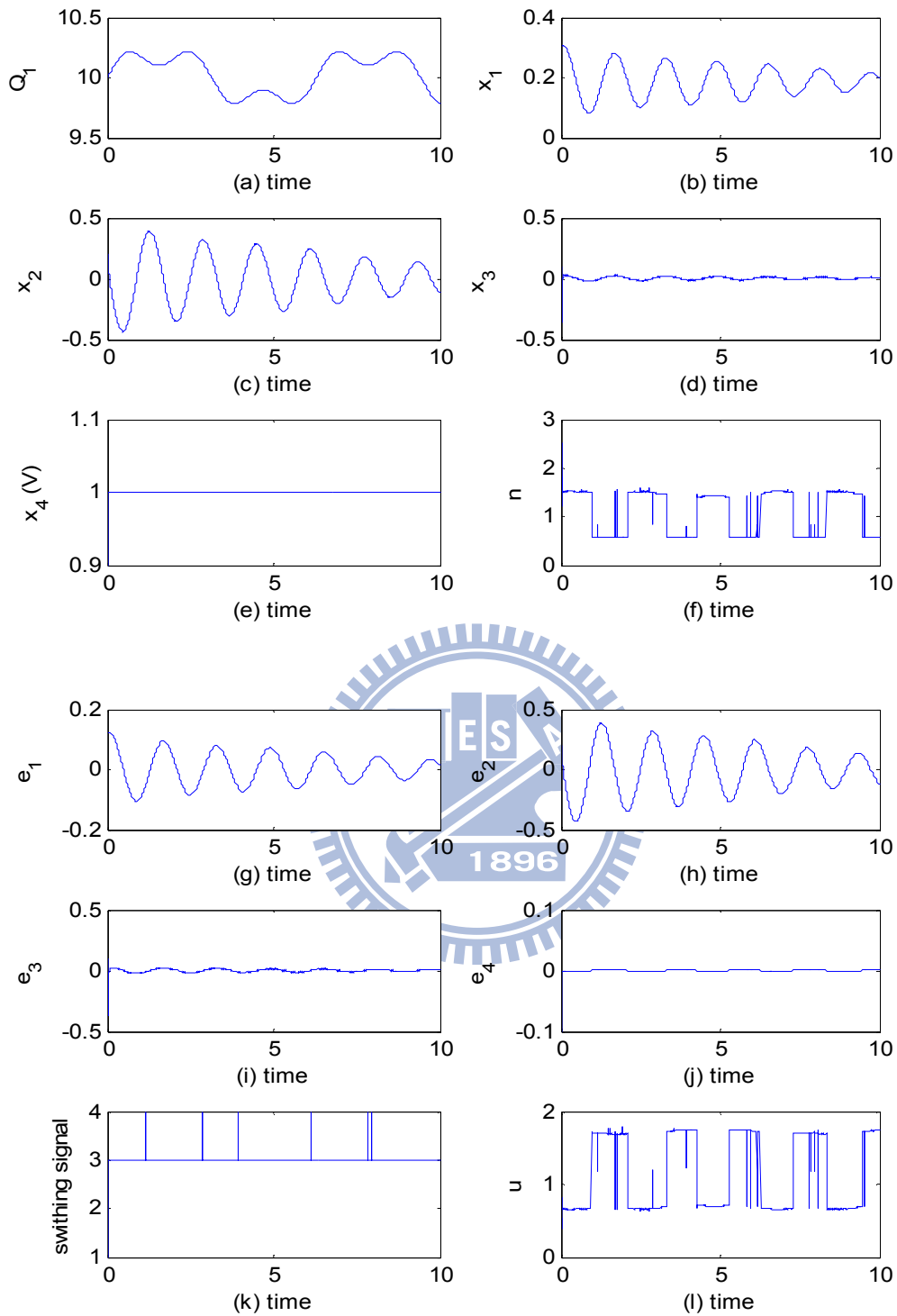


圖 4.26: $Q_{10} = 10 + 0.2\sin(t)$, $\Delta Q_1 = 0.1\sin(3t)$, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

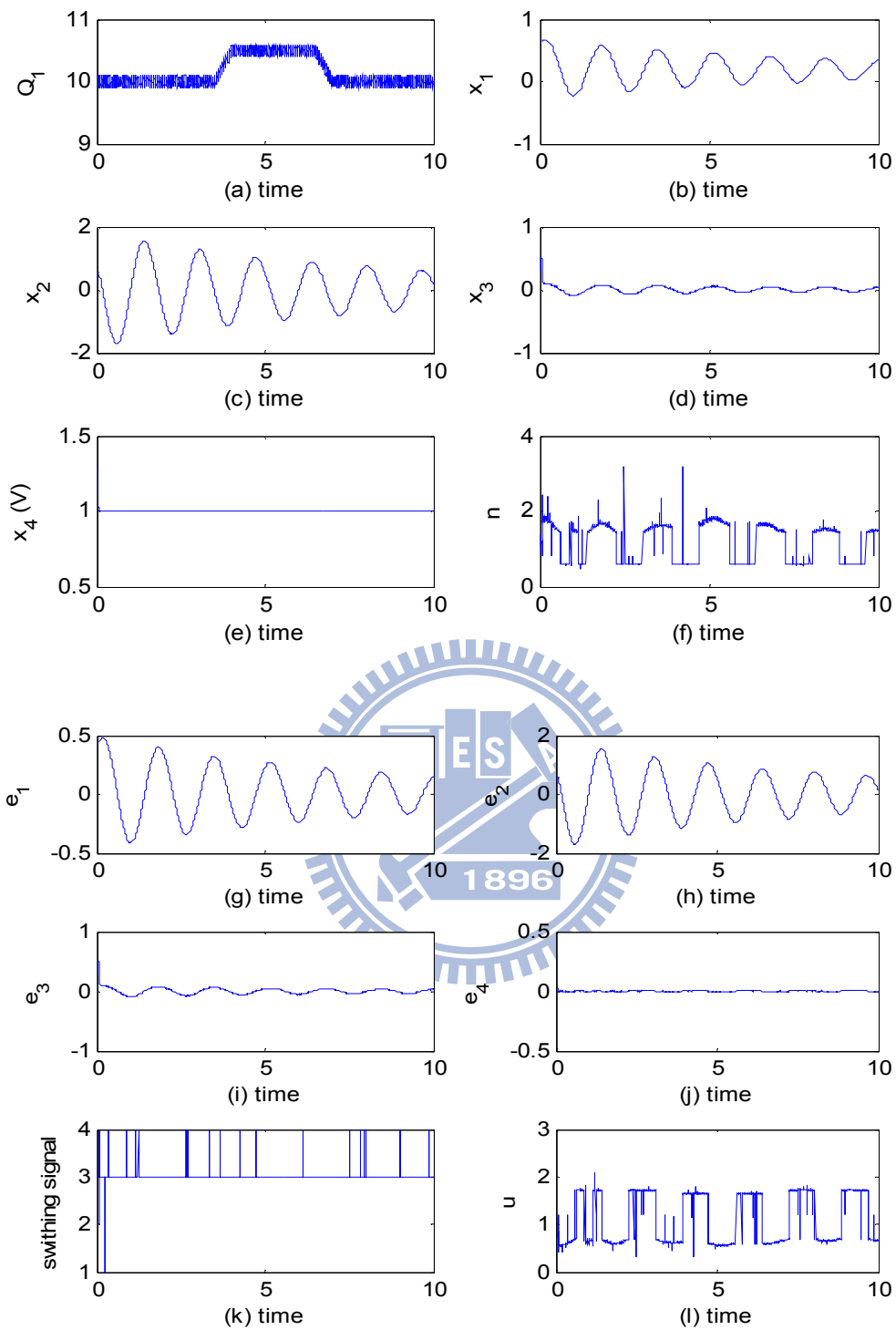


圖 4.27: Q_{10} 在 10~10.5 之間變化, ΔQ_1 在 -0.1~0.1 之間變動, (a) Q_1 值, (b) 狀態 x_1 , (c) 狀態 x_2 , (d) 狀態 x_3 , (e) 狀態 x_4 (負載電壓值), (f) 變壓器調節值, (g) 狀態誤差 e_1 , (h) 狀態誤差 e_2 , (i) 狀態誤差 e_3 , (j) 狀態誤差 e_4 , (k) 切換信號, (l) u 值。

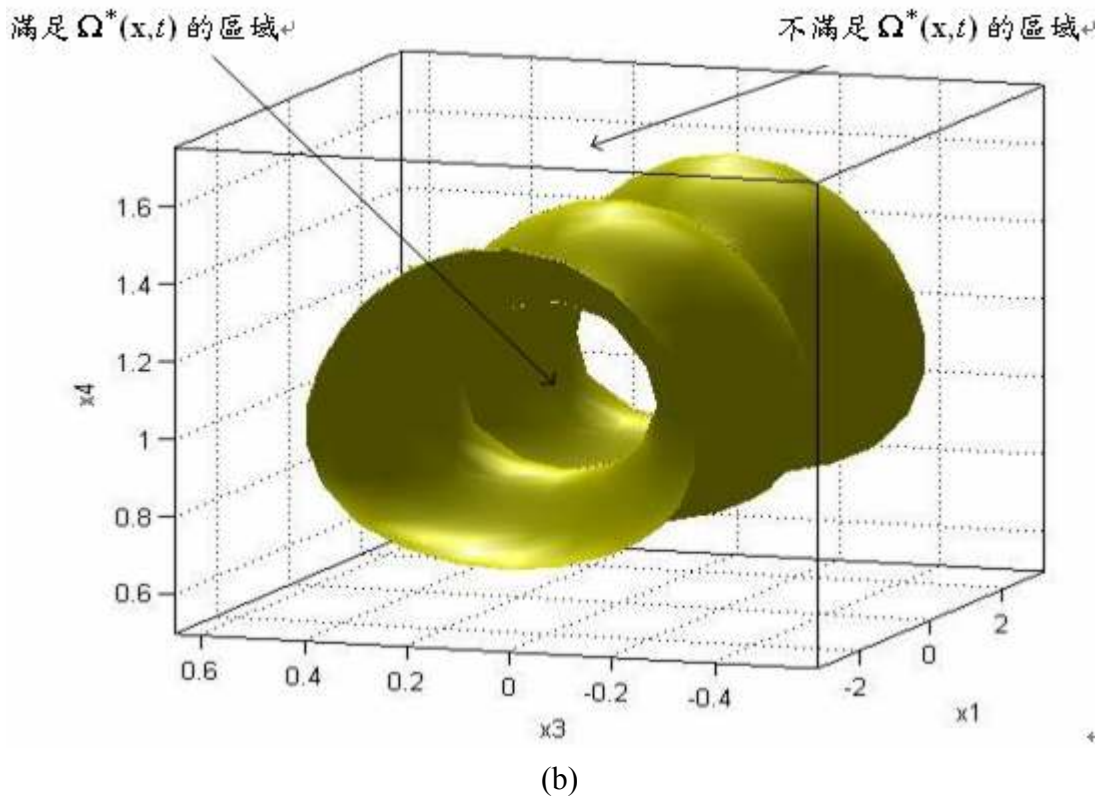
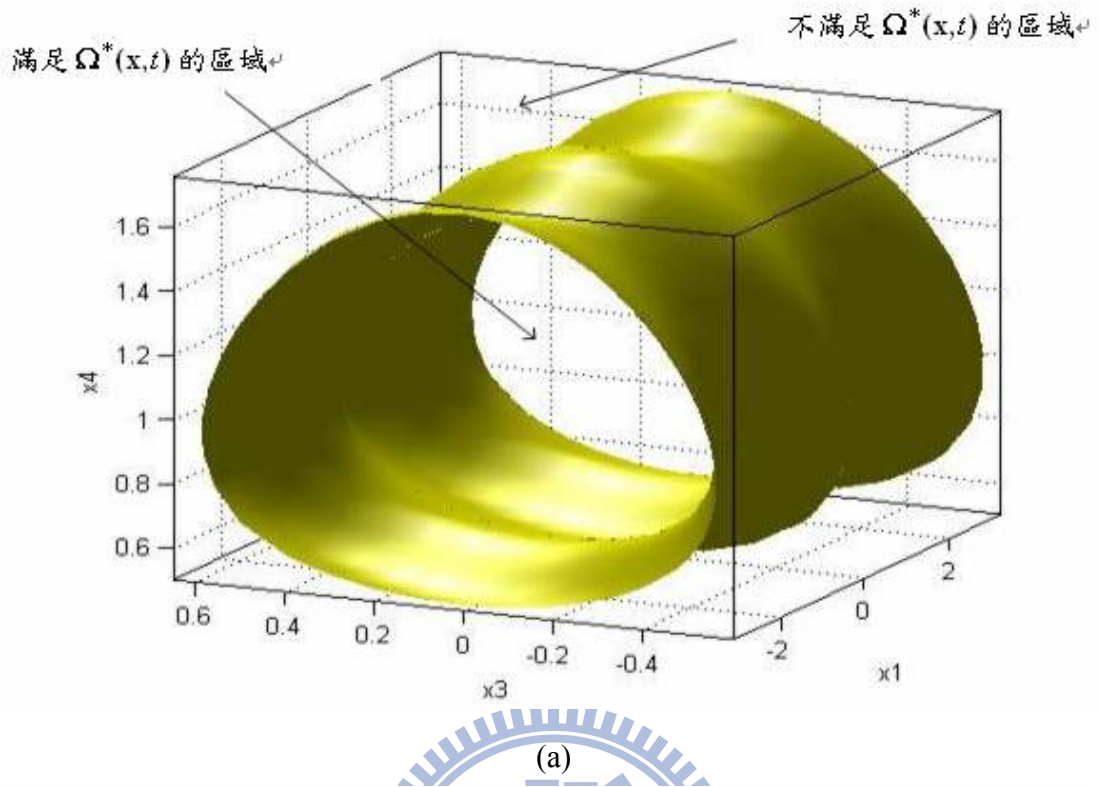
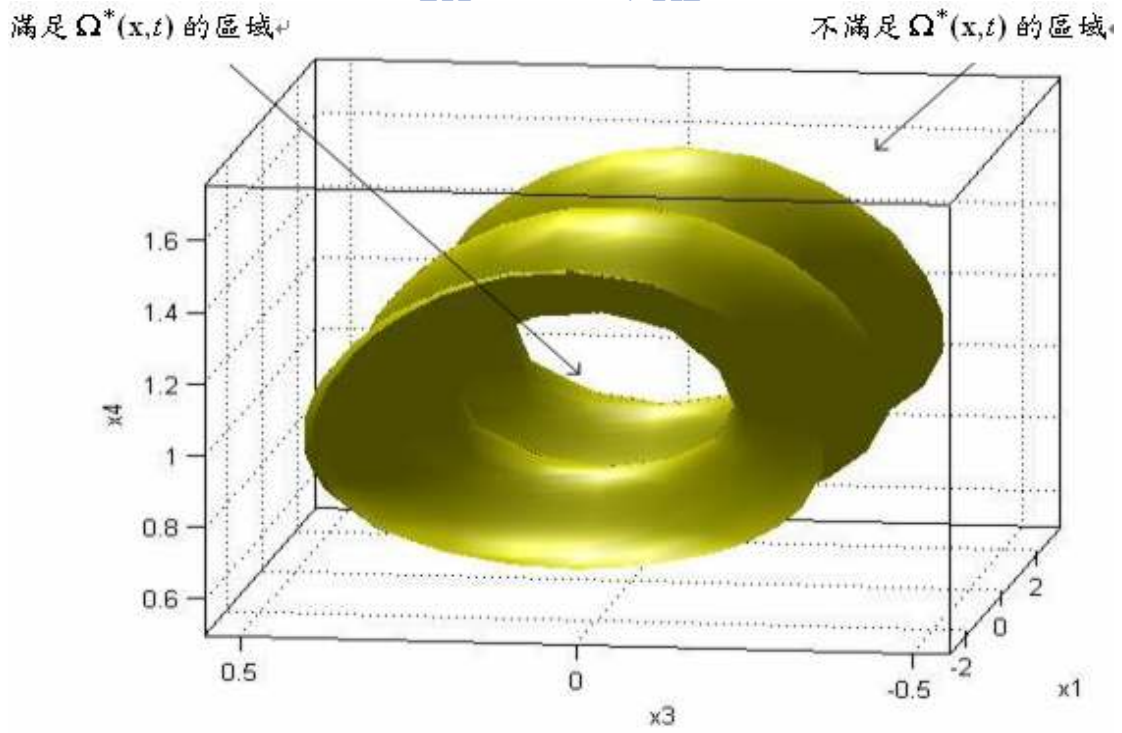
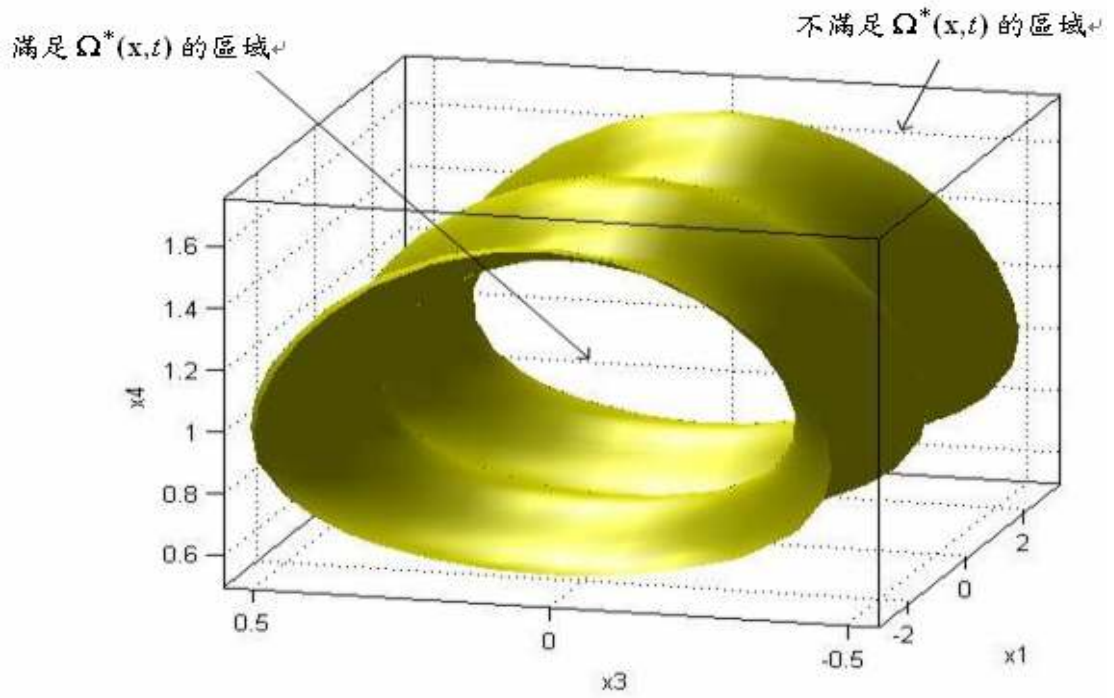


圖 4.28: $\Delta Q_1 = 0$ 時，狀態 x_1 、 x_3 、 x_4 滿足 $\Omega^*(x,t)$ 的區域，

(a) $Q_{10} = 9$ ，(b) $Q_{10} = 11$ 。



(b)

圖 4.29: $Q_{10} = 10$ 時，狀態 x_1 、 x_3 、 x_4 滿足 $\Omega^*(x,t)$ 的區域

(a) $\Delta Q_1 = 0$ ，(b) $\Delta Q_1 = 1$ 。

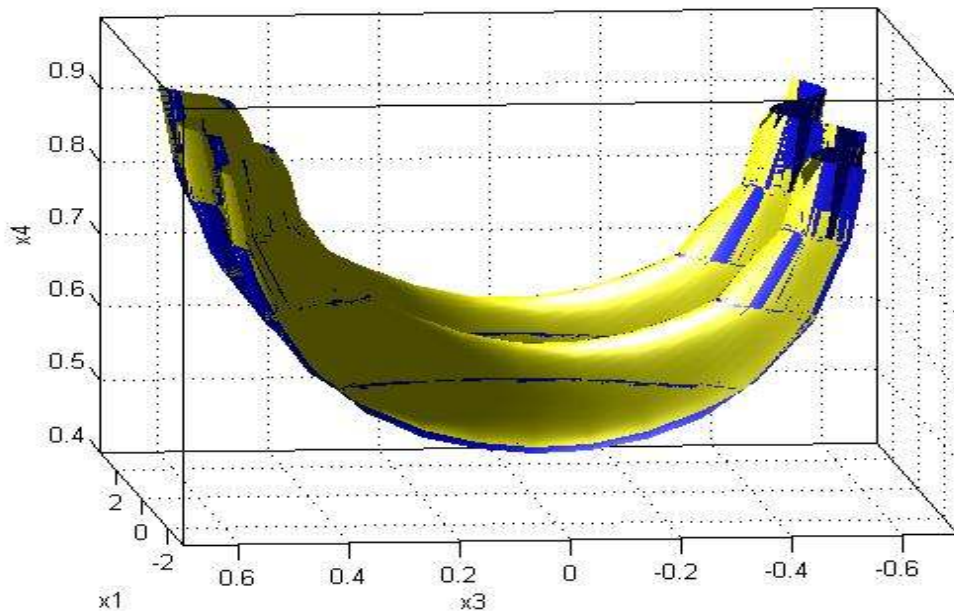


圖 4.30: 黃色曲面是在當 $a > 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面上方為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面下方為不滿足 Ω^* 的區域。

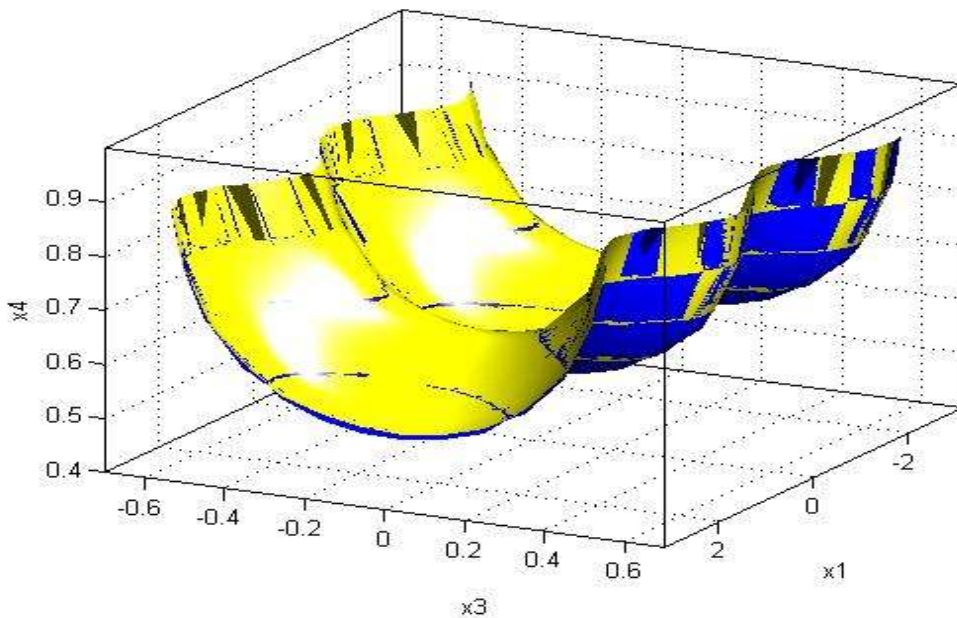


圖 4.31: 黃色曲面是在當 $a > 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面上方為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面下方為不滿足 Ω^* 的區域。

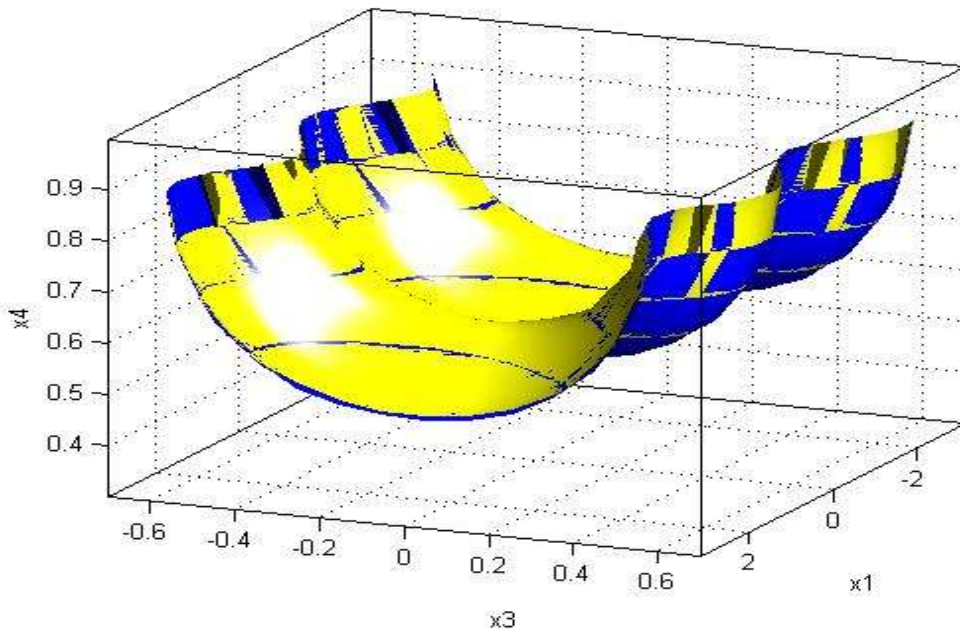


圖 4.32: 黃色曲面是在當 $a > 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 2$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面以上為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面以下為不滿足 Ω^* 的區域。

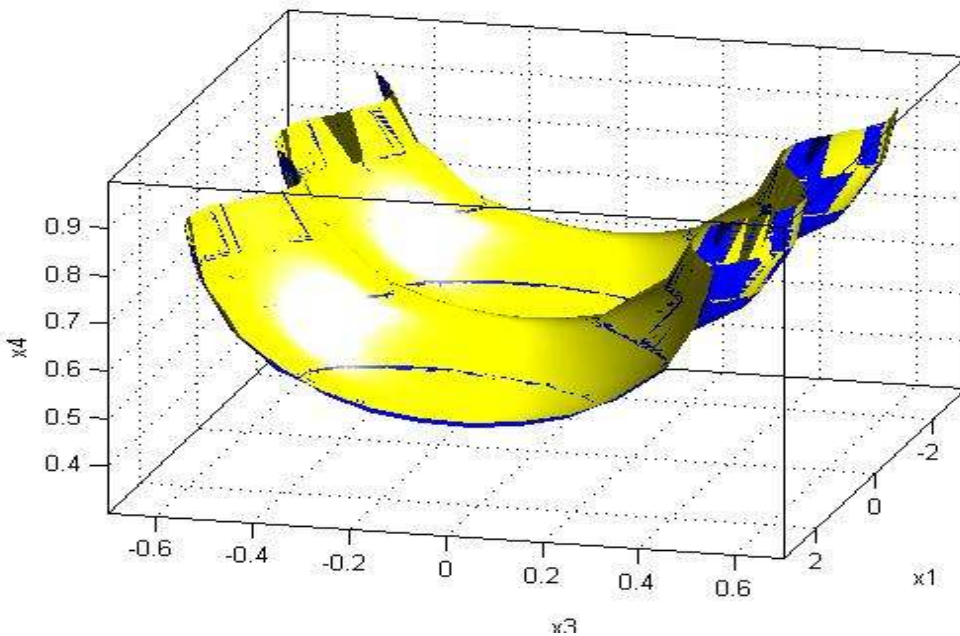


圖 4.33: 黃色曲面是在當 $a > 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 2$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以上則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色區面以下則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面以上為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面以下為不滿足 Ω^* 的區域。

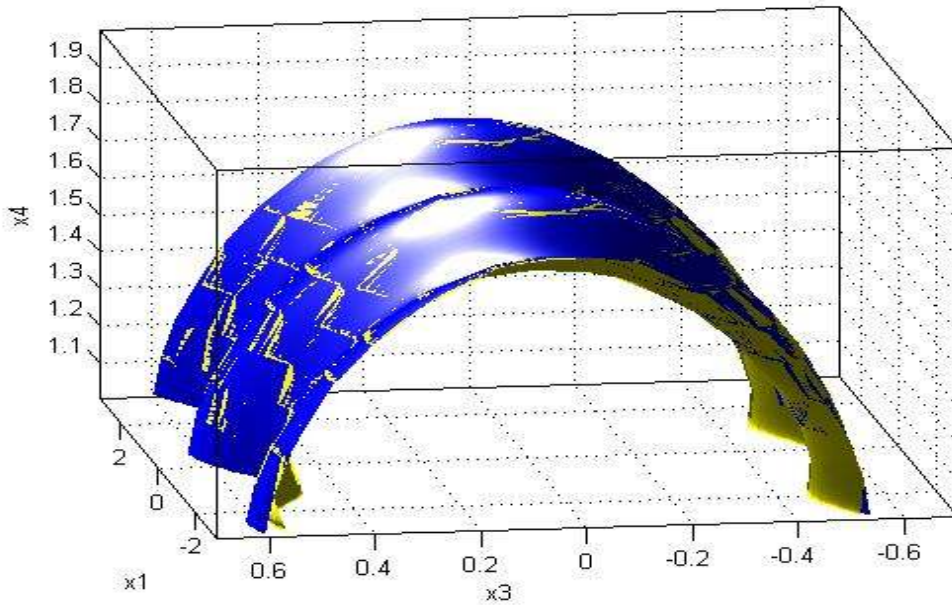


圖 4.34: 黃色曲面是在當 $a < 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。

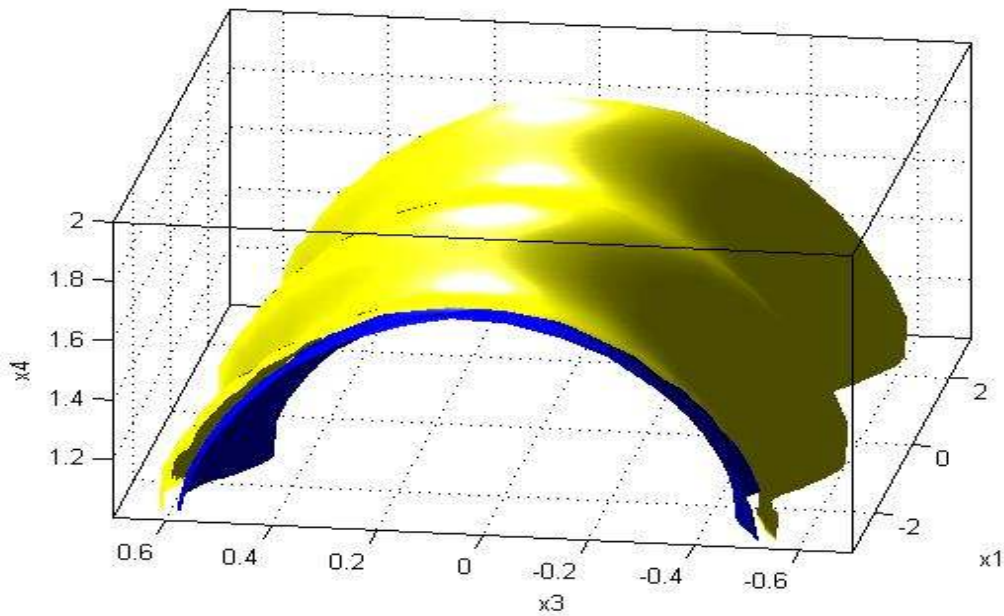


圖 4.35: 黃色曲面是在當 $a < 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 0$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。

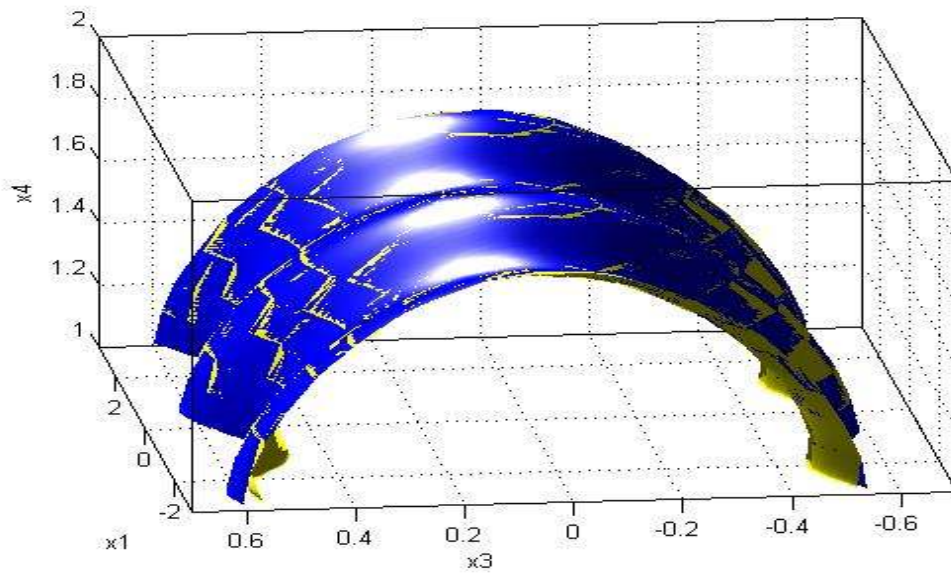


圖 4.36: 黃色曲面是在當 $a < 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0$ 及 $x_2 = 2$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。

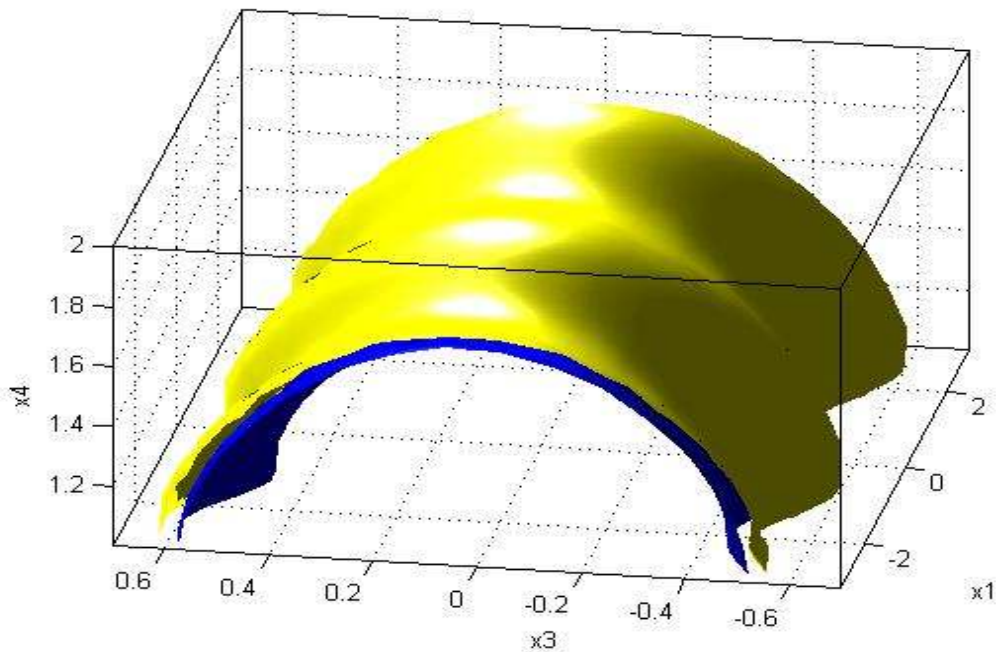


圖 4.37: 黃色曲面是在當 $a < 0$, $Q_{10} = 9$, $\Delta Q_1 = 0.3$ 及 $x_2 = 2$ 時, $\Delta = 0$ 的等高曲面, 黃色區面以下則是 $\Delta > 0$ 的區域, 黃色曲面以上則是 $\Delta < 0$ 的區域, 藍色曲面以下為滿足 Ω^* 的區域, 藍色曲面以上為不滿足 Ω^* 的區域。

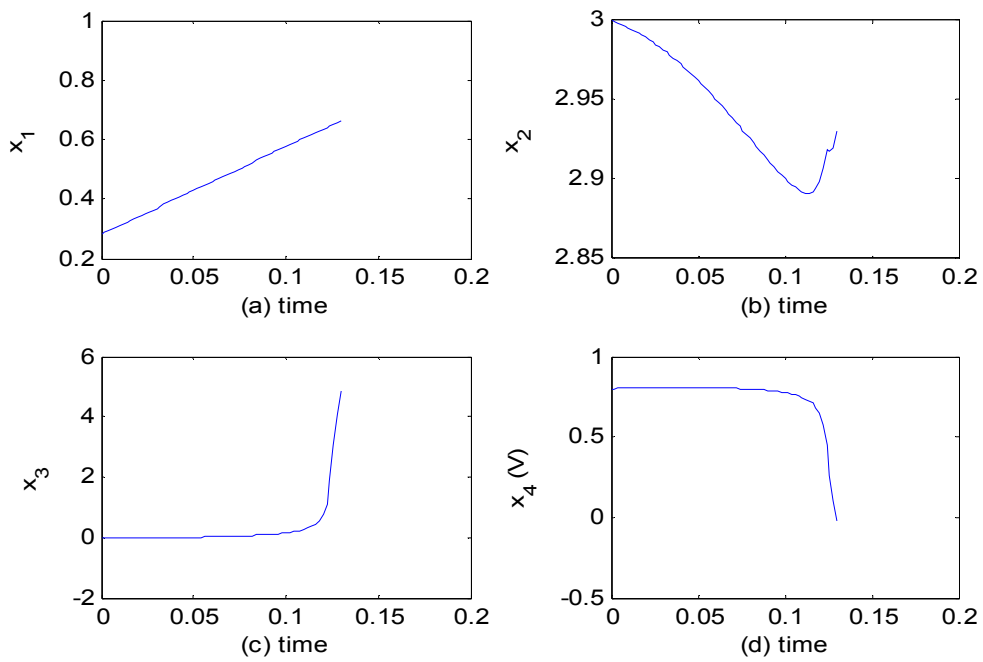


圖 4.38: $Q_{10} = 11.5$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x} = [0.28, 3, -0.028, 0.8]$ 在滿足 Ω^* 的區域內使用 VSC 設計的控制律無法達成電壓調節的例子，(a) 狀態 x_1 ，(b) 狀態 x_2 ，(c) 狀態 x_3 ，(d) 狀態 x_4

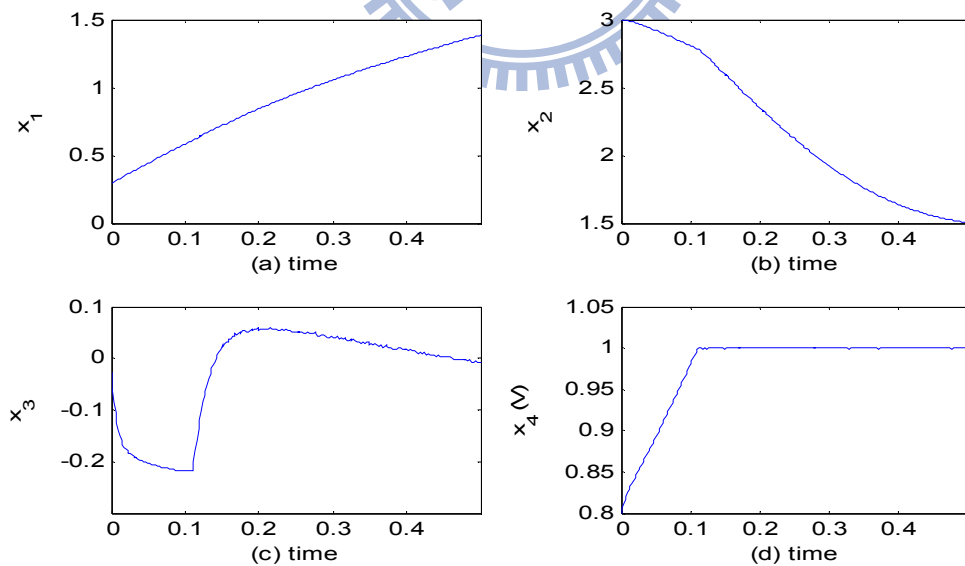


圖 4.39: $Q_{10} = 11.5$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x} = [0.28, 3, -0.028, 0.8]$ 使用 4.2 節設計的控制律並在其收斂範圍的系統狀態圖，(a) 狀態 x_1 ，(b) 狀態 x_2 ，(c) 狀態 x_3 ，(d) 狀態 x_4

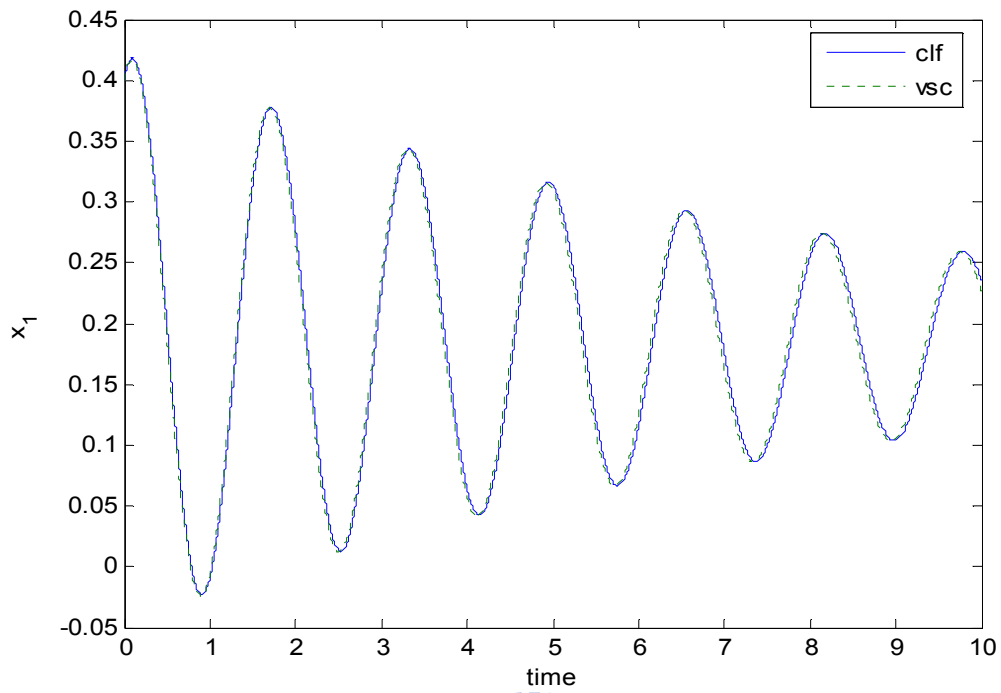


圖 4.40: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_1 比較圖

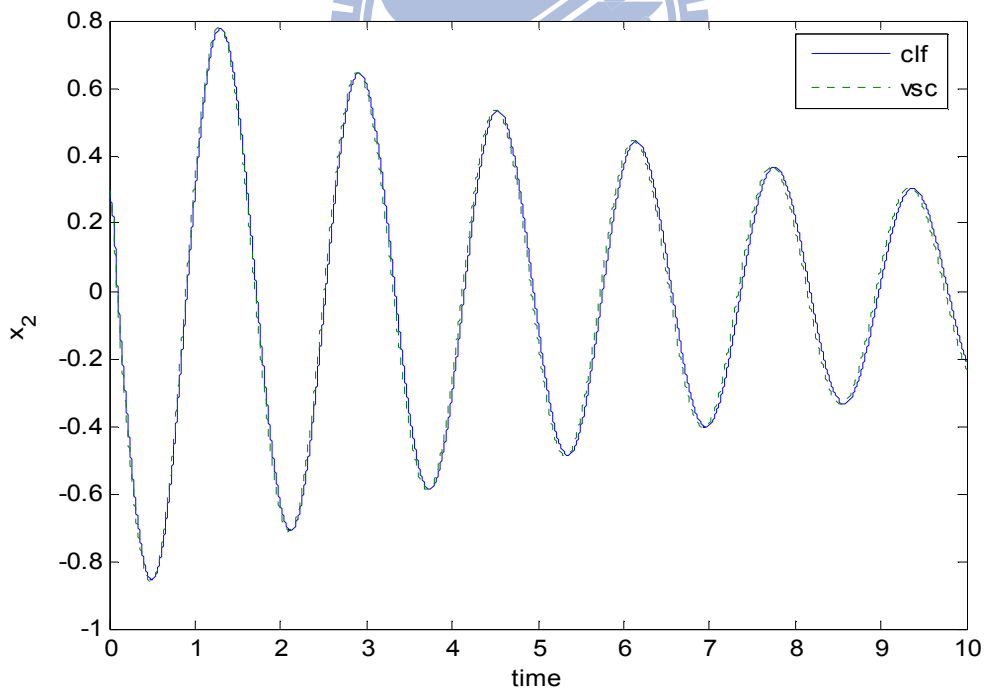


圖 4.41: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_2 比較圖

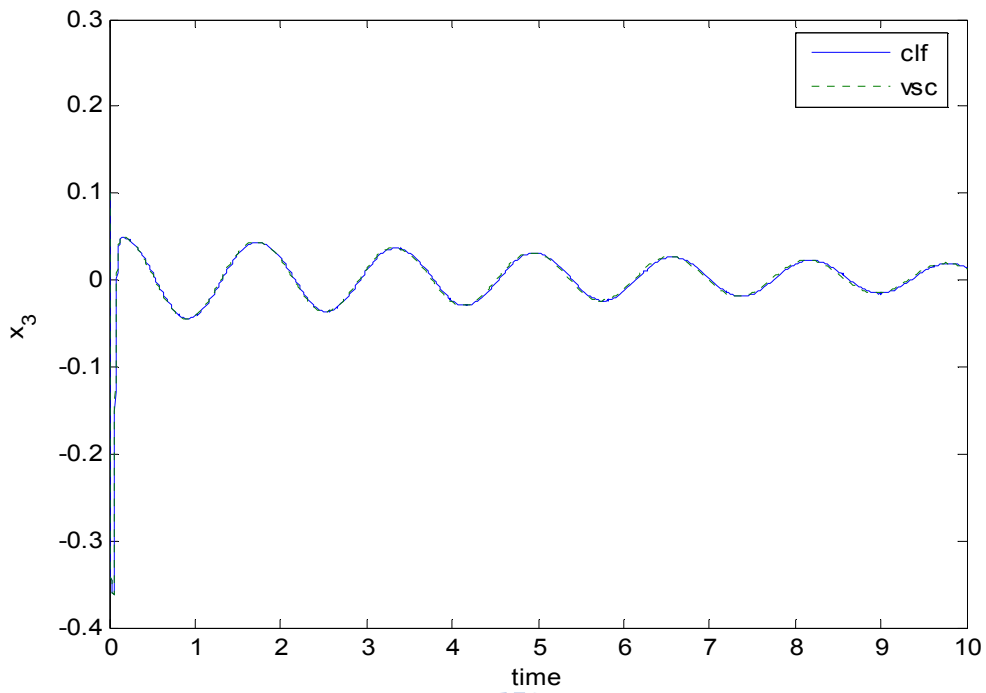


圖 4.42: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_3 比較圖

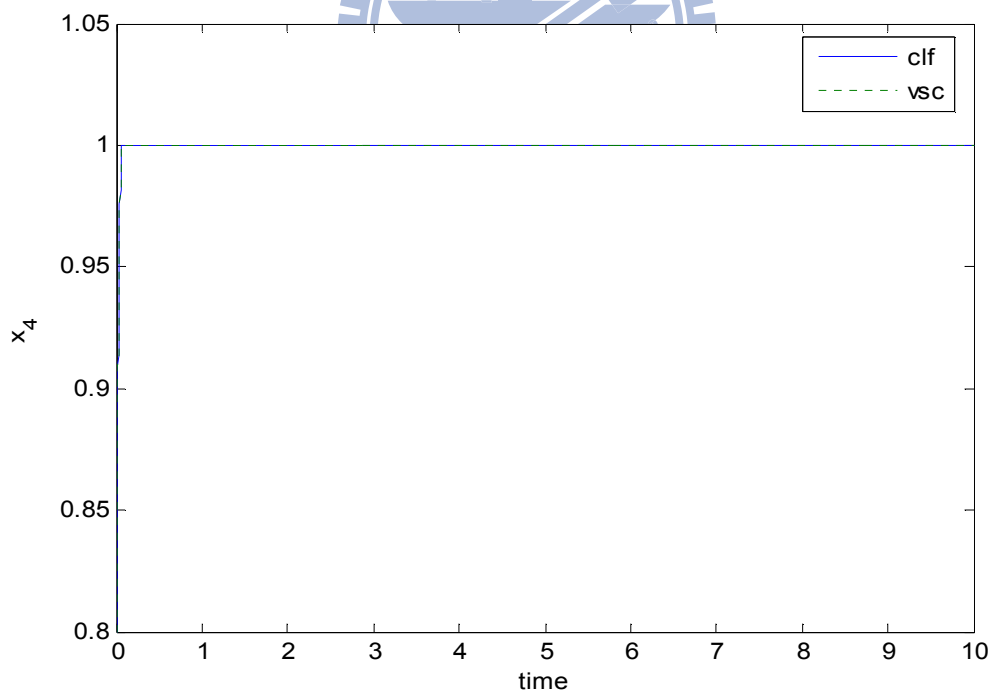


圖 4.43: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_4 比較圖

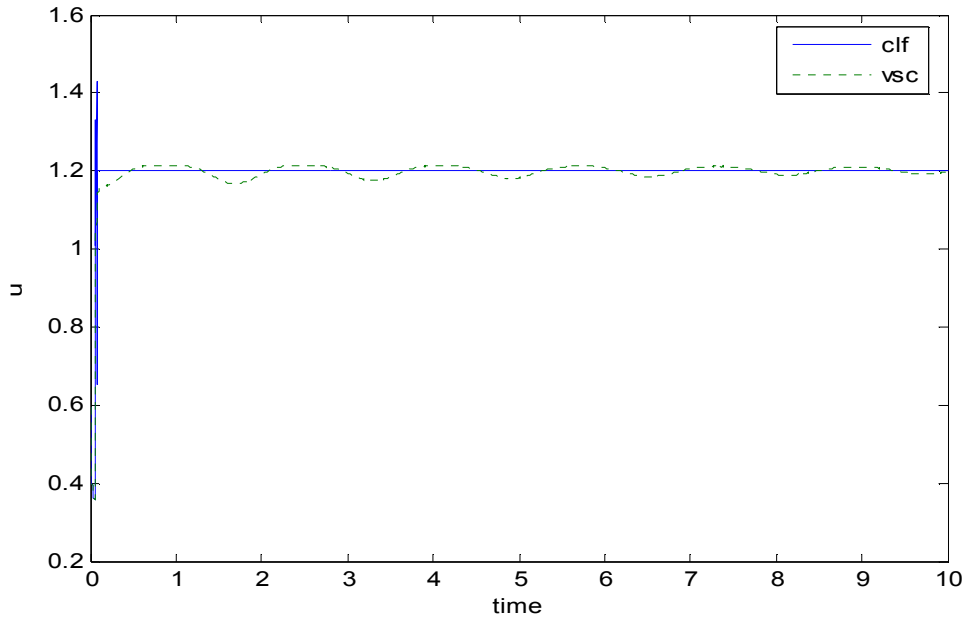


圖 4.44: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, u 值比較圖

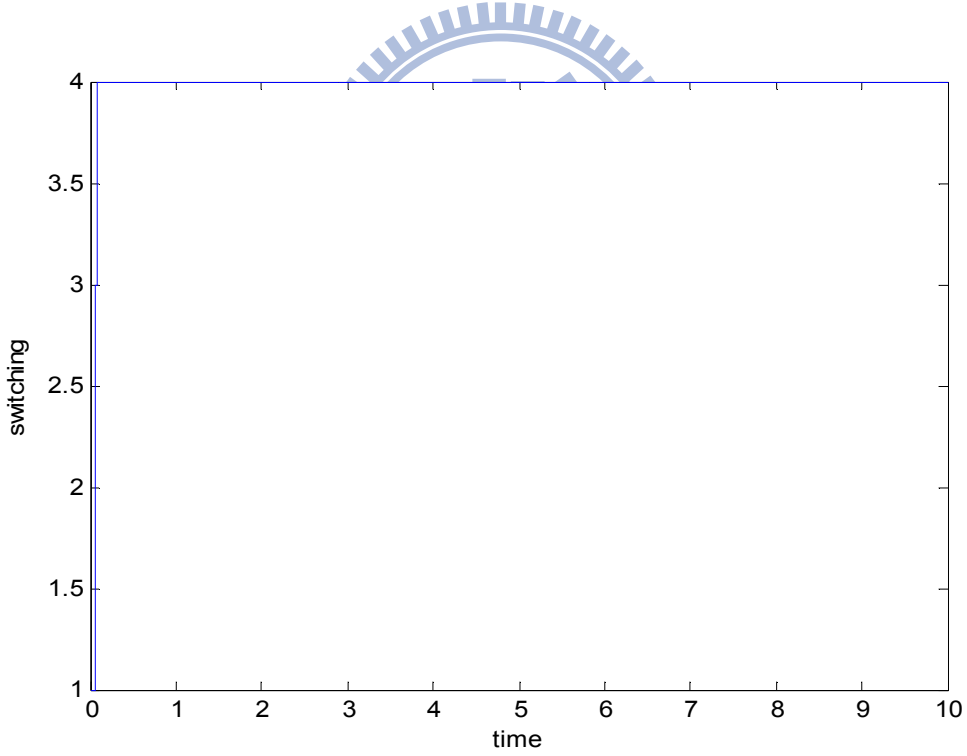


圖 4.45: 使用 CLF 控制律的切換信號

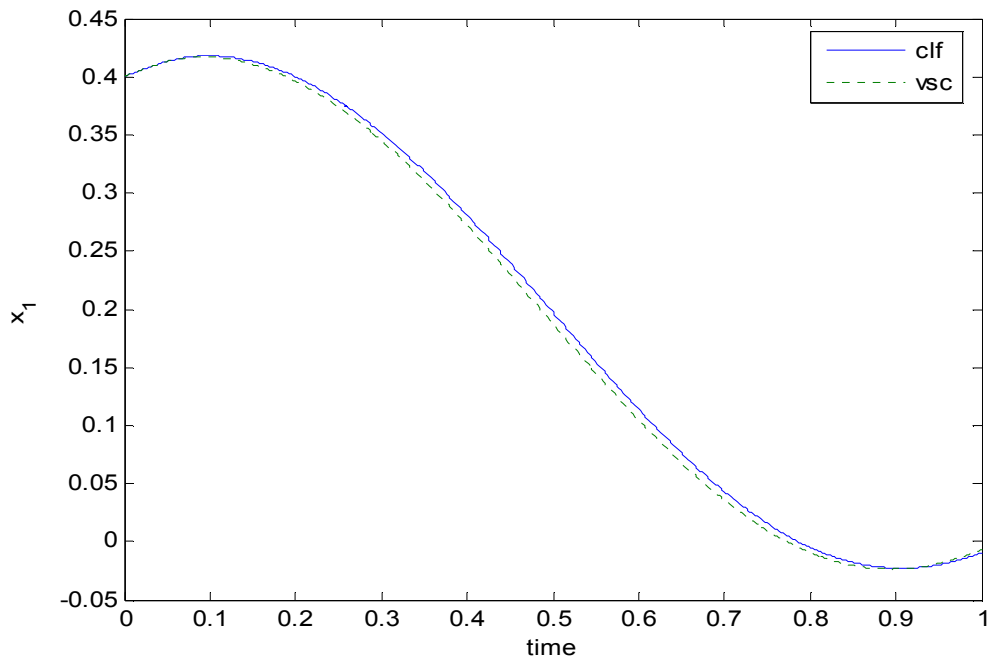


圖 4.46: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_1 放大比較圖

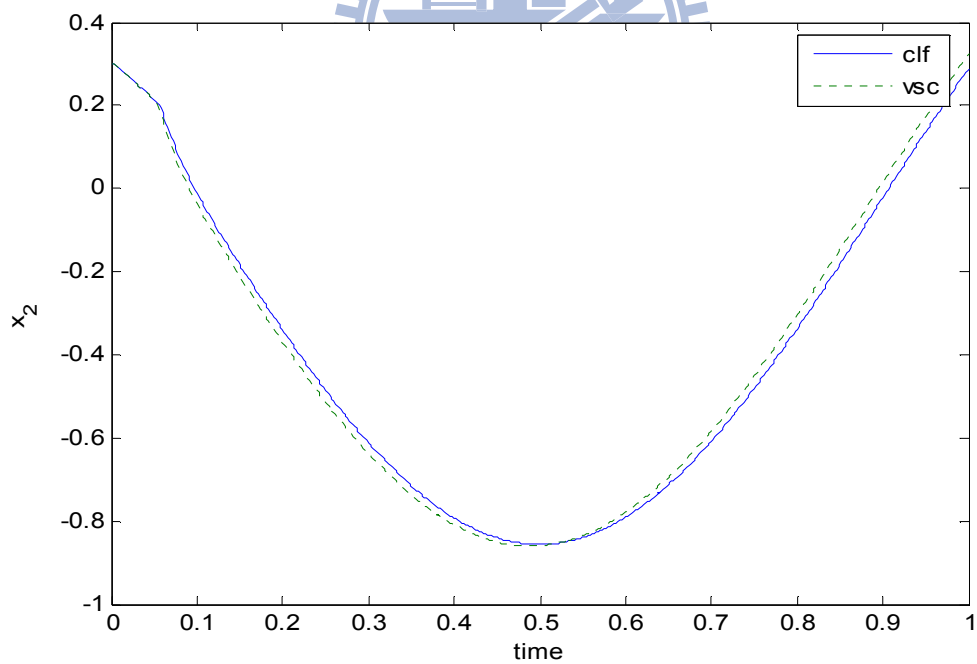


圖 4.47: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_2 放大比較圖

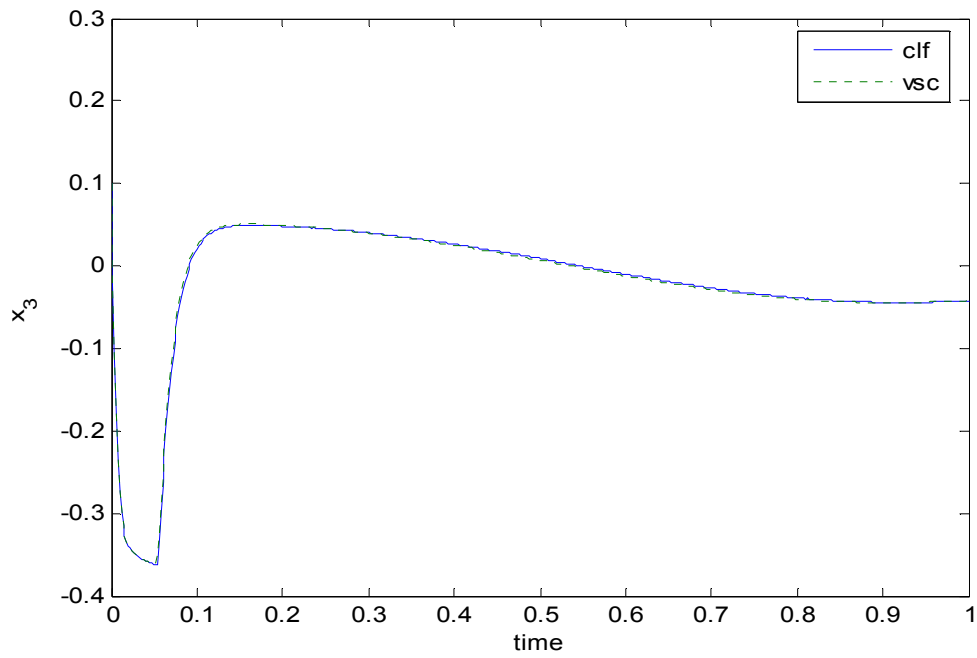


圖 4.48: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_3 放大比較圖

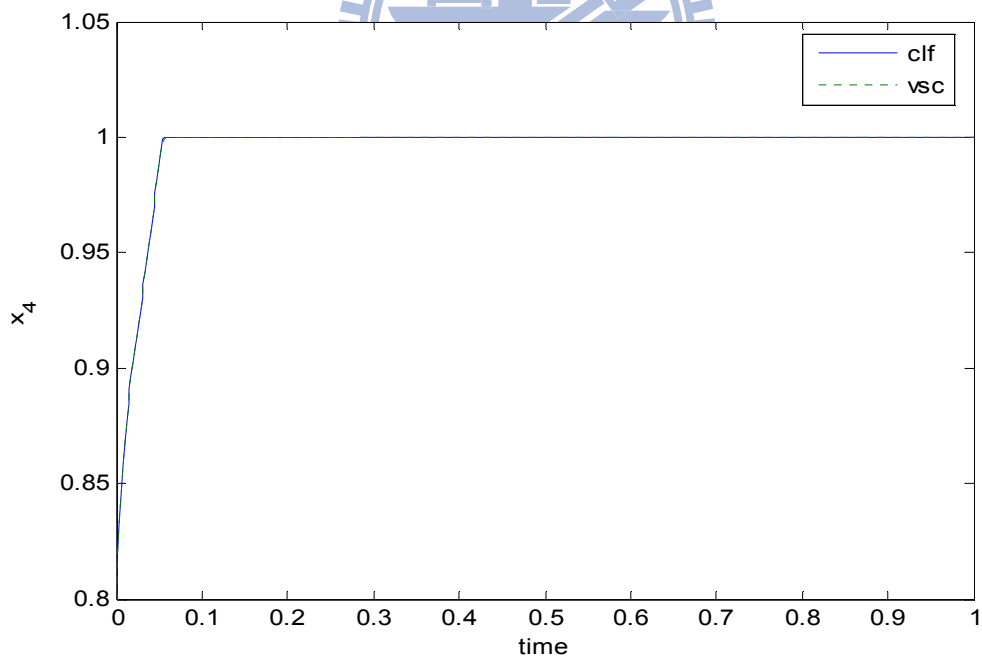


圖 4.49: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_4 放大比較圖

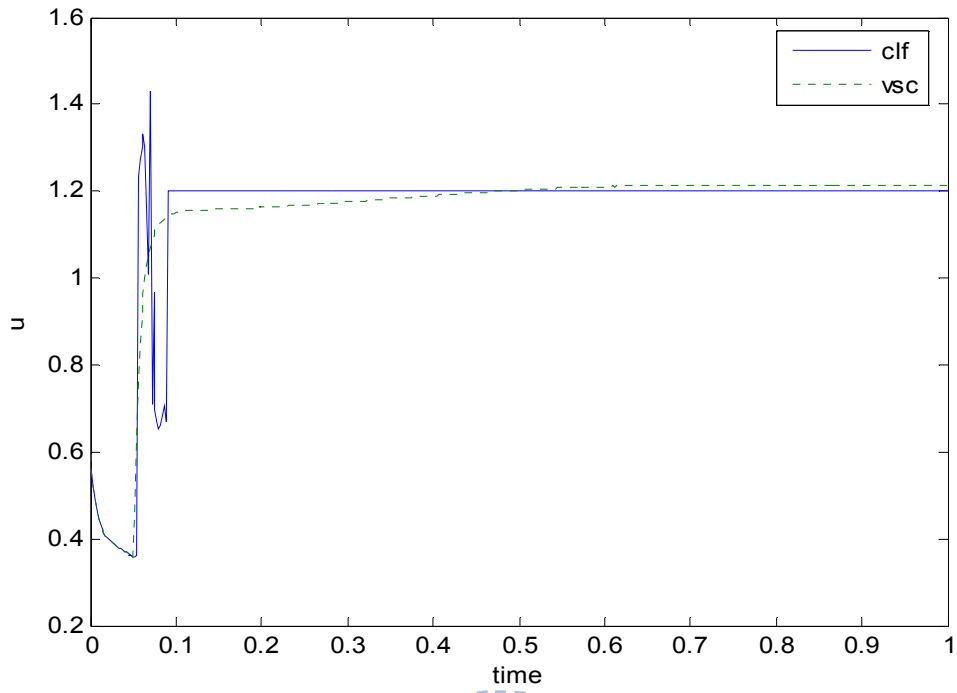


圖 4.50: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0$, 初始狀態 $x_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, u 值放大比較圖

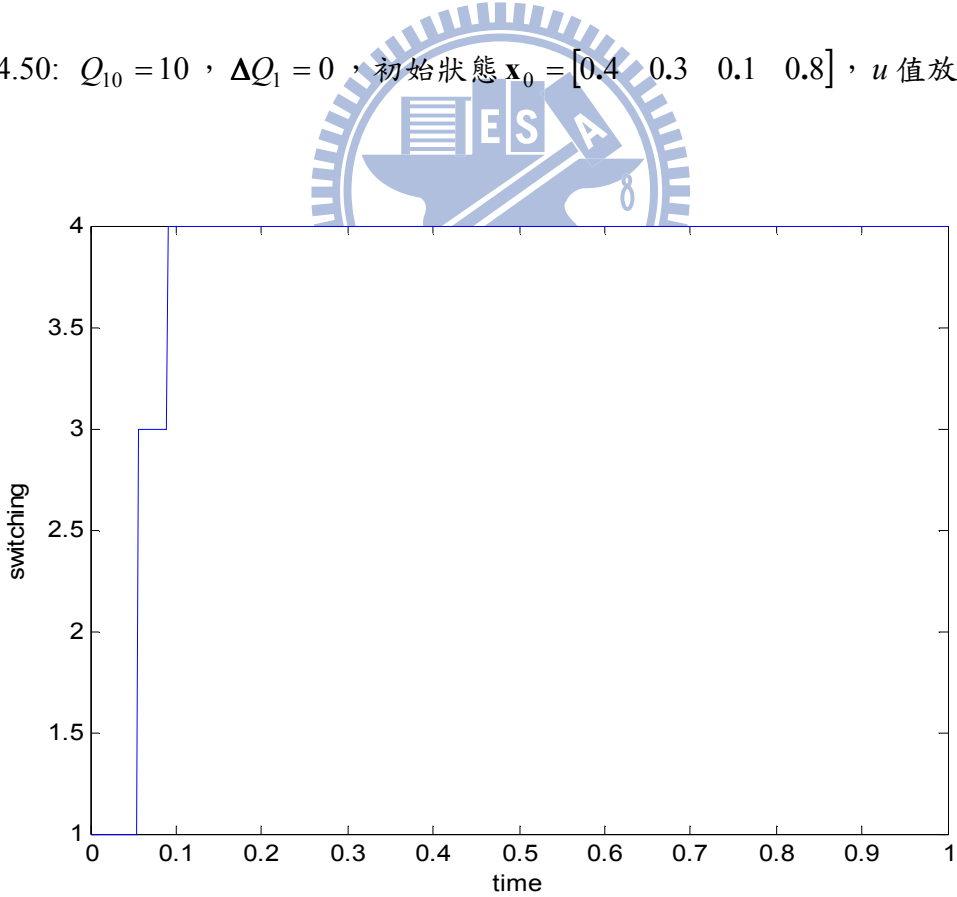


圖 4.51: 放大比較時使用 CLF 控制律的切換信號

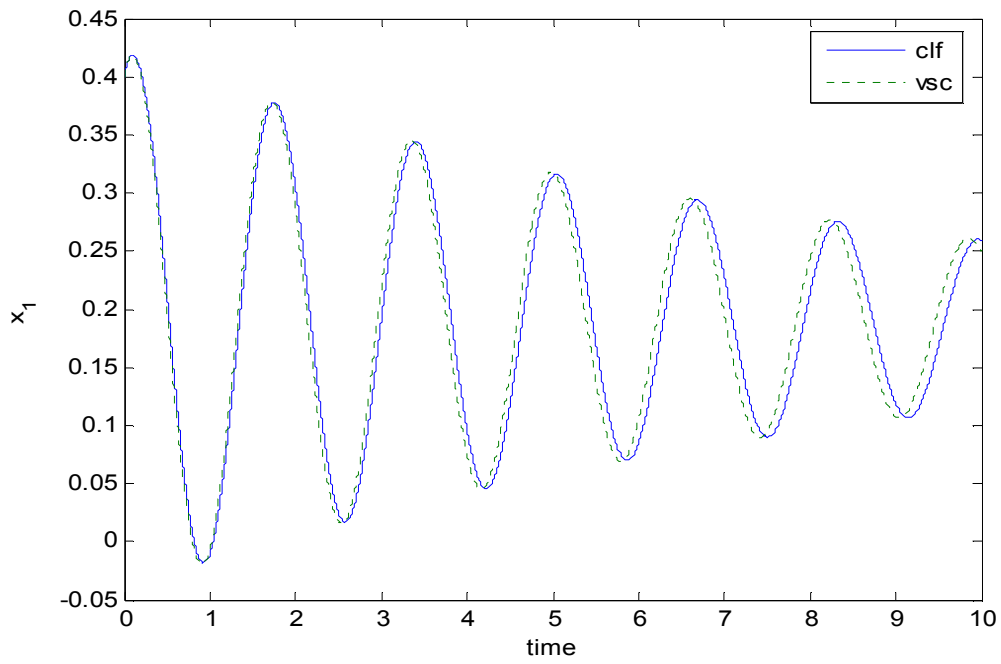


圖 4.52: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_1 比較圖

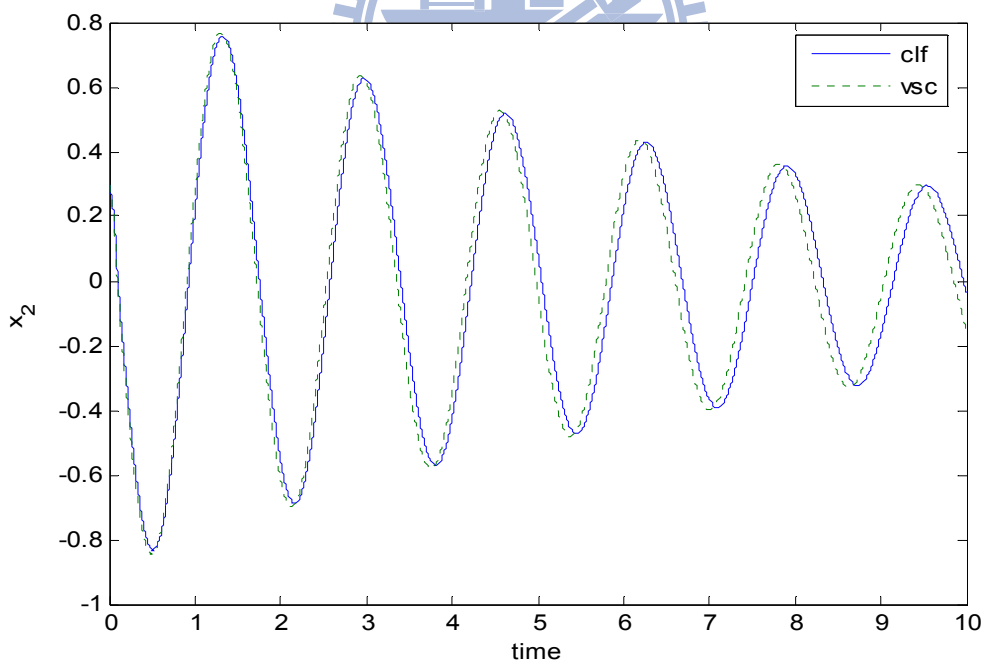


圖 4.53: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_2 比較圖

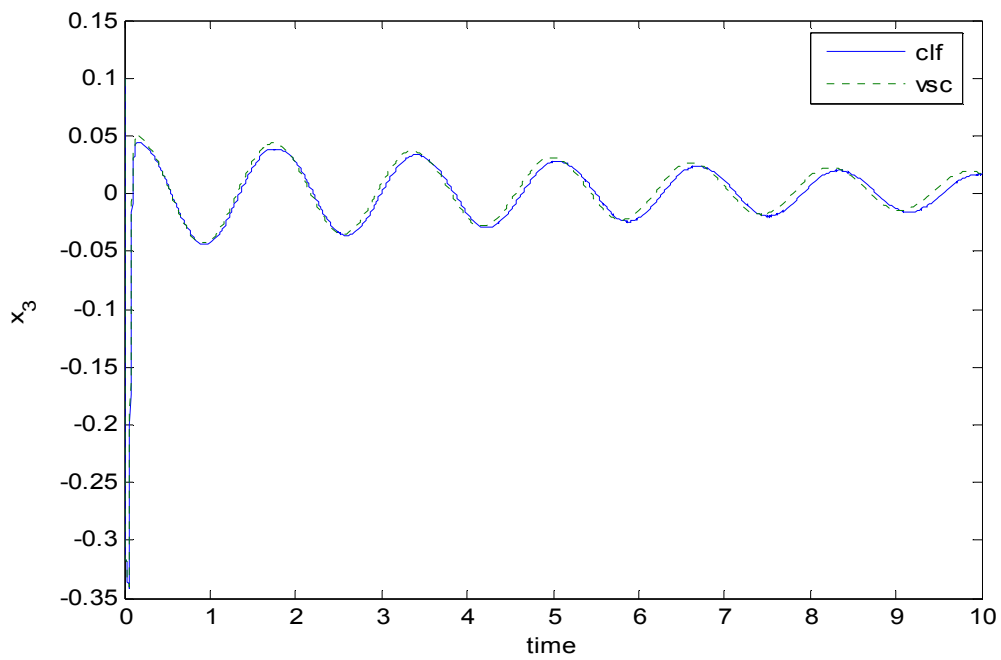


圖 4.54: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_3 比較圖

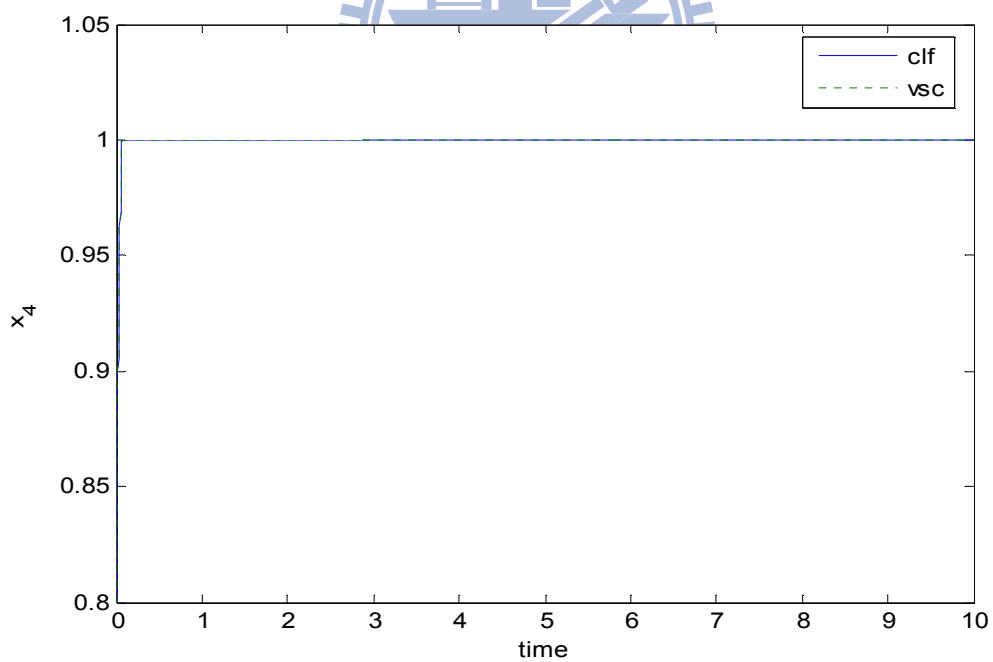


圖 4.55: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_4 比較圖

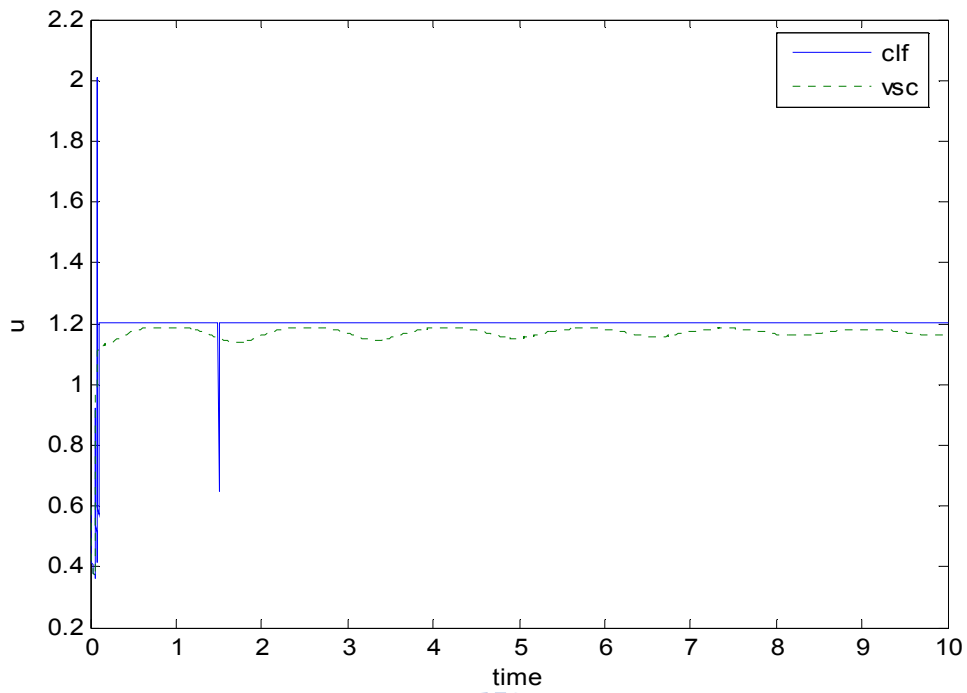


圖 4.56: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, u 值比較圖

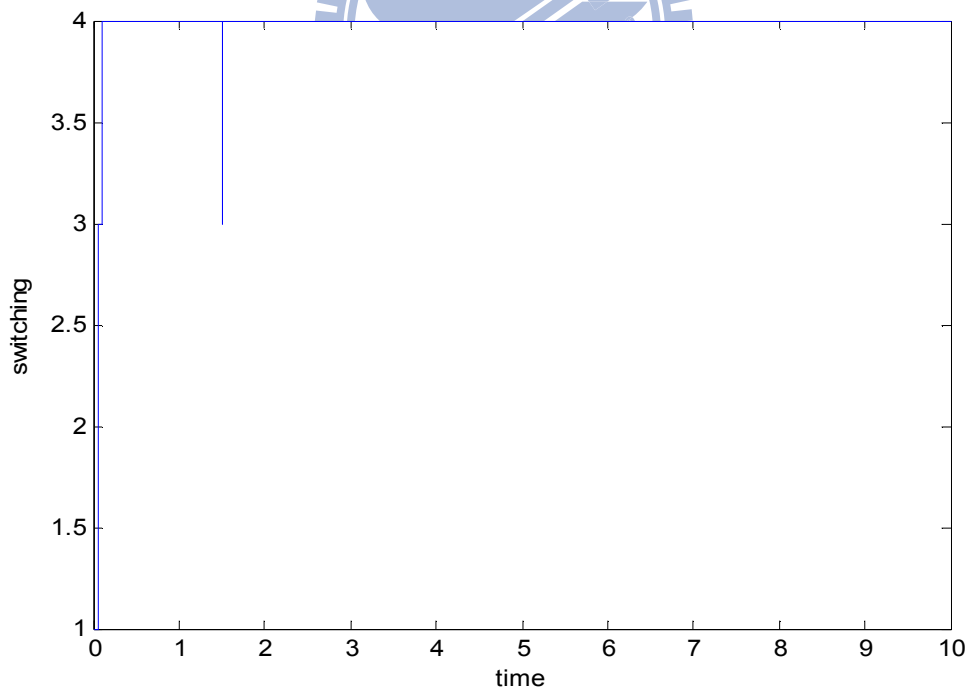


圖 4.57: 使用 CLF 控制律的切換信號

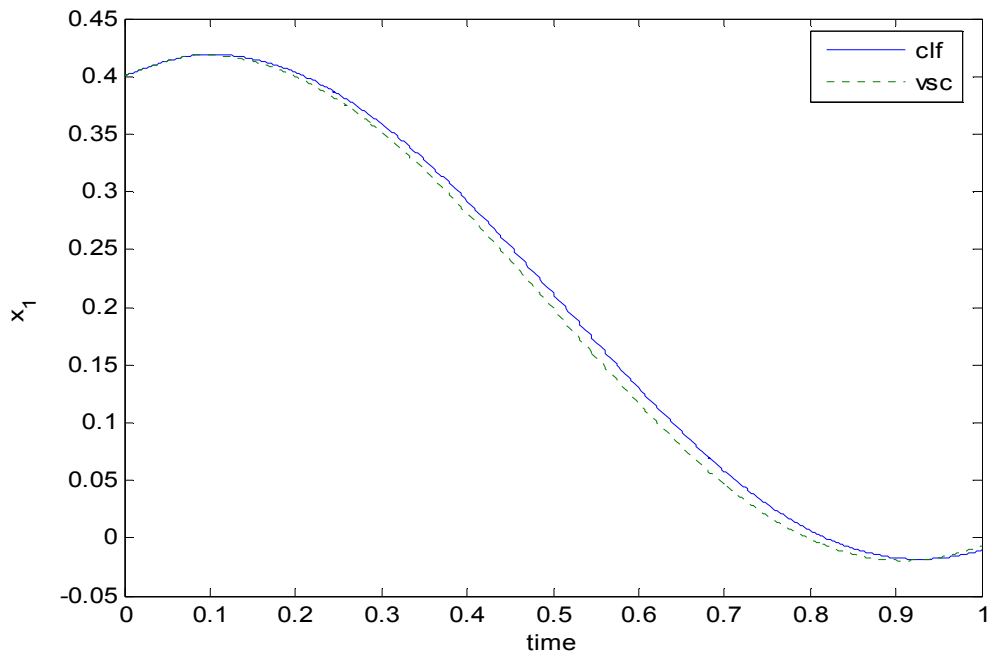


圖 4.58: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態 x_1 模擬時間 1 秒比較圖

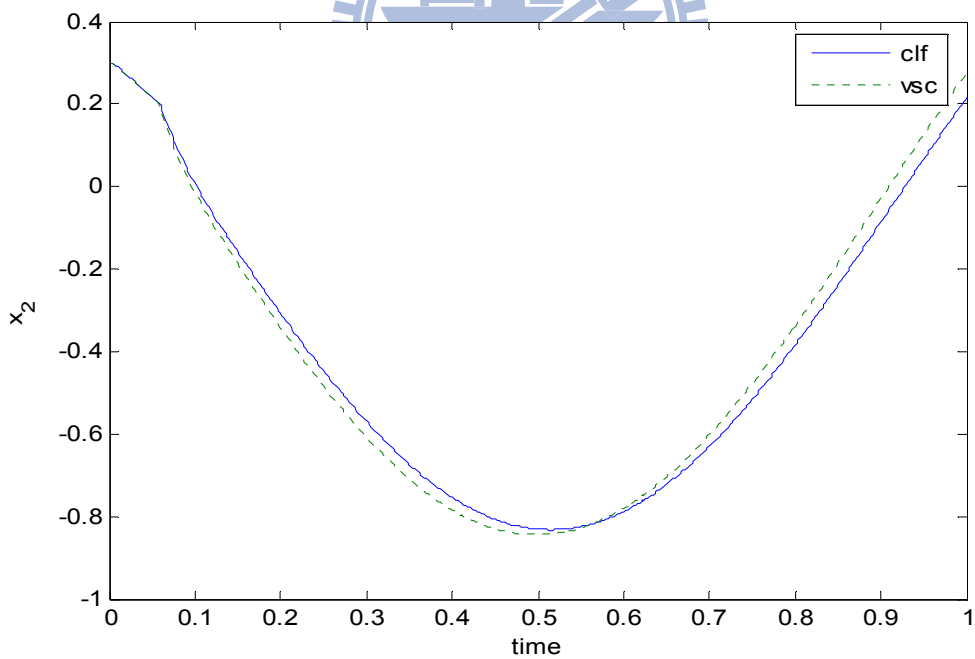


圖 4.59: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 狀態模擬時間 1 秒比較圖

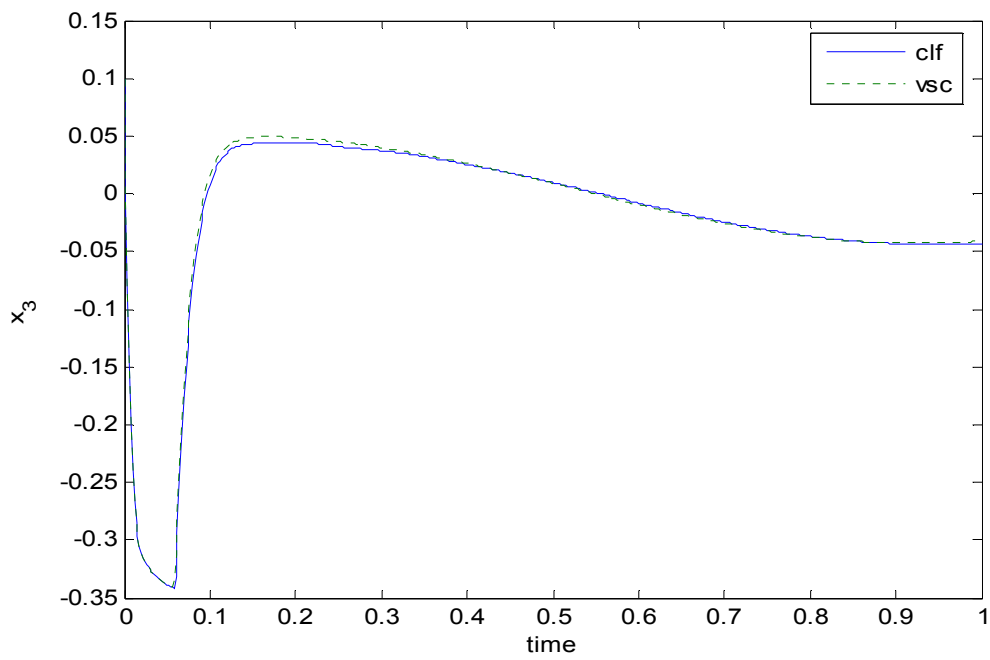


圖 4.60: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 模擬時間 1 秒比較圖

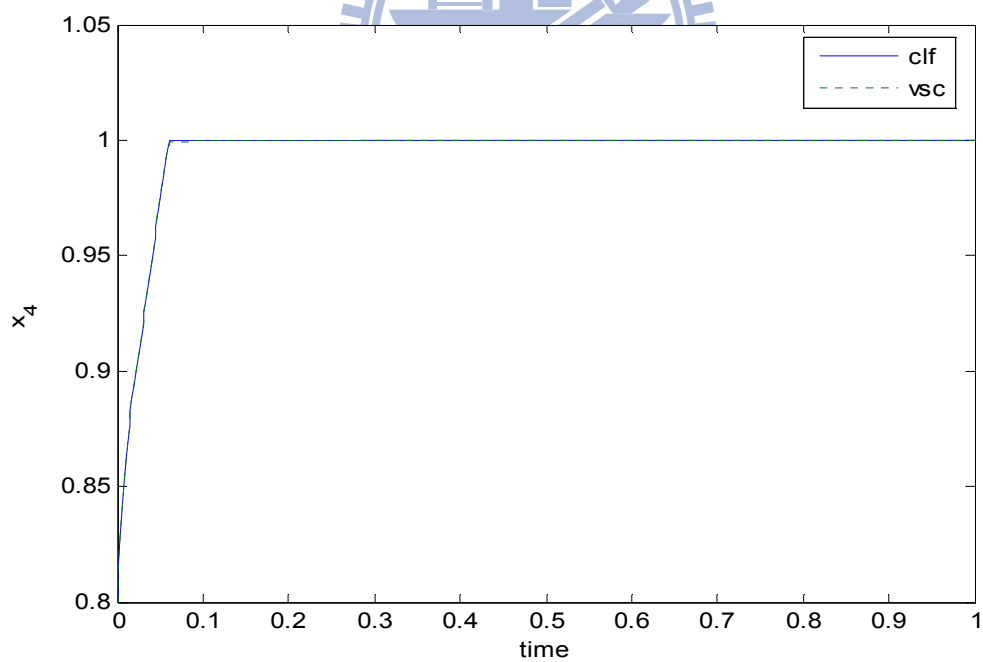


圖 4.61: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $\mathbf{x}_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, 模擬時間 1 秒比較圖

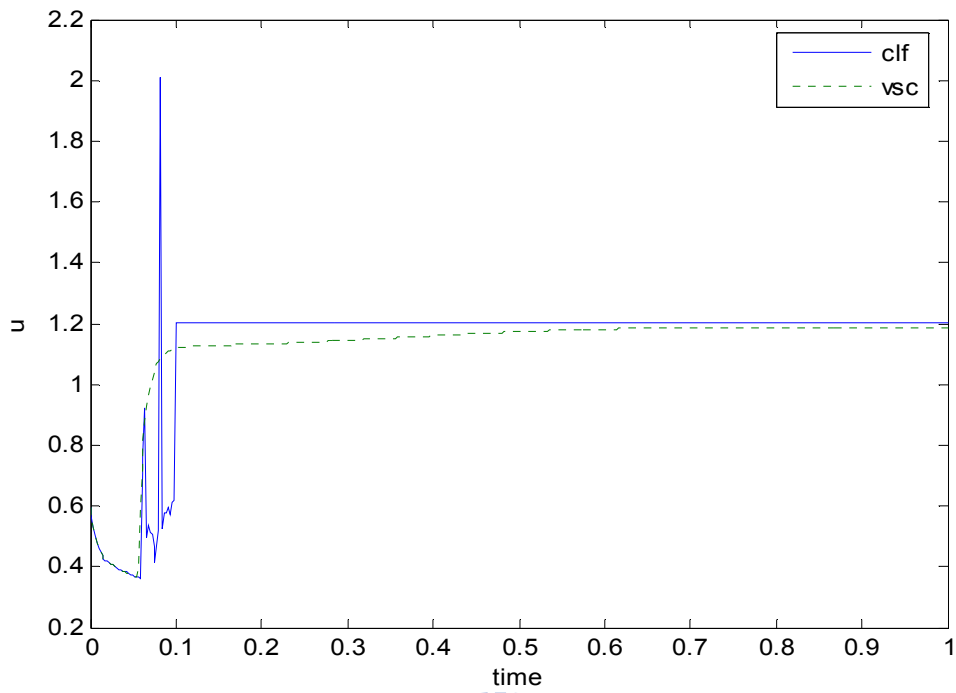


圖 4.62: $Q_{10} = 10$, $\Delta Q_1 = 0.2$, 初始狀態 $x_0 = [0.4 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.8]$, u 值模擬時間 1 秒比較圖

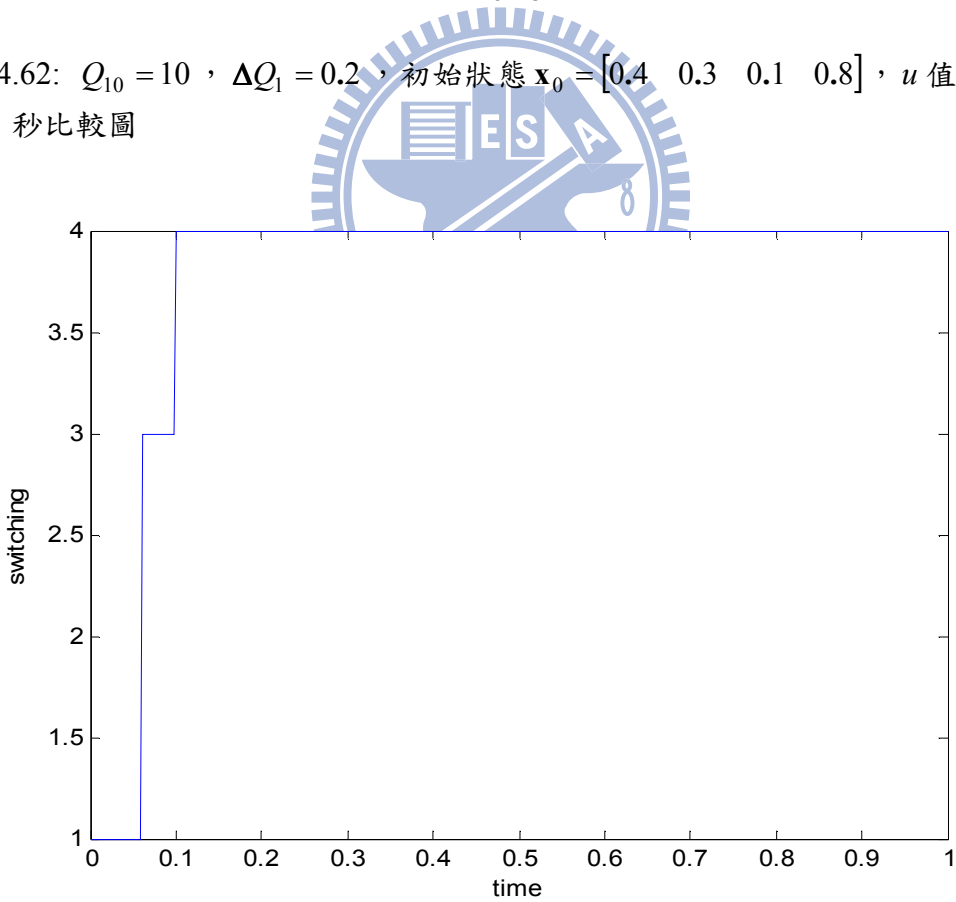


圖 4.63: 模擬時間 1 秒時使用 CLF 控制律的切換信號

Chapter 5

結論與未來研究方向

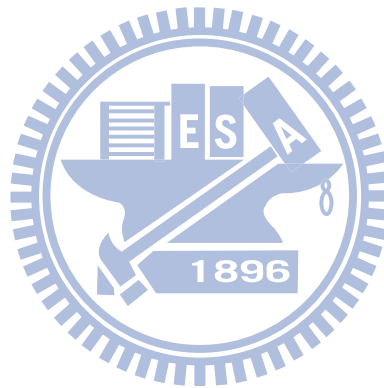
5.1 結論



在本論文中，我們針對單輸入單輸出具有不確定因素的二次多項式系統，系統相對階數為一階時，探討使系統同時能達到輸出追蹤與內部狀態穩定化的議題。所提出的設計方法改善了論文[1]利用可變結構控制技術來達到穩健輸出追蹤時所需的假設條件，其所需的假設條件在輸出追蹤的過程中可能無法有效維持，造成系統不穩定現象發生的問題。此外，再本論文中所探討的系統不確定因素來自系統本身一個參數的估計值與實際值的誤差，且此參數會隨時間改變。控制律設計為先針對無干擾系統利用預備回授使系統達到輸出追蹤並找出對應的平衡點，對應的標稱平衡點也會隨時間改變，再以控制李亞普諾夫理論設計出適合的控制律，使系統在有參數不確定因素達成輸出追蹤的目的並使狀態收斂到無干擾系統的平衡點，如此則可以同時達到穩健輸出追蹤與內部狀態穩定的功能。

5.2 未來研究方向

1. 在本論文中，對於系統控制器存在輸入二次項時，所設計的控制器利用於系統相對階數為一階，當用於相對階數為高階時，是否可以設計出適當的控制律。
2. 對於電力系統的電壓調節，是否能使用高階順滑模控制達成電壓調節的目的。
3. 我們可以估計使狀態收斂到滿足輸出追蹤的區域，但對於系統狀態不落在估計的收斂區域，是否能設計控制律使狀態進入估計的收斂區域。



參考文獻

- [1] 許益銘, "二次多項式系統之穩健輸出追蹤之研究," 交通大學電機與控制所碩士論文, 2008.
- [2] D. Liberzon, Switching in systems and control, Boston, MA: Birkhauser, 2003.
- [3] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu, and N. H. McClamroch, "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, pp. 1746-1757, 1992.
- [4] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems," IEEE Control systems magazine, vol. 15, pp. 20-36, 1995.
- [5] R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, eds. "Asymptotic stability and feedback stabilization," in Differential Geometric Control theory, Birkhauser, pp. 181-191, 1989.
- [6] J. P. Hespanha and A. S. Morse, "Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching," Automatica, vol. 35, pp. 385-393, 1999.
- [7] O. Bethoux, T. Floquet, and J. P. Barbot, "Advanced Sliding Mode Stabilization of a Levitation System," presented at the Eur. Control Conf., Cambridge, U. K., 2003.
- [8] H. S. Sane, D. S. Bernstein, and W. Corning-IntelliSense, "Robust nonlinear control of the electromagnetically controlled oscillator," in Proc. Amer. Control Conf., Anchorage, AK, May 8-10, 2002, pp. 809-814.
- [9] E. Moulay and W. Perruquetti, "Stabilization of nonaffine systems: a

- constructive method for polynomial systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, pp. 520-526, 2005.
- [10] J. Zhong, D. Cheng, and X. Hu, “Constructive stabilization for quadratic input nonlinear systems,” Automatica, vol. 44, pp. 1996-2005, 2008.
- [11] D. C. Liaw, K. H. Fang, and C. C. Song, “Bifurcation analysis of power systems with tap changer,” Proc. 2005 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control (ICNSC’05), Tucson, Arizona, U.S.A., pp. 283-288, 2005
- [12] E. H. Abed, A. M. A. Hamdan, H. C. Lee, and A. G. Parlos, “On bifurcations in power system models and voltage collapse,” Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 6, pp. 3014-3015, Dec. 5-7 1990.
- [13] B. H. Lee and K. Y. Lee, “A study on voltage collapse mechanism in electric power systems,” IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 3, pp. 966-974, 1991.
- [14] W. Xu, Y. Mansour, B. C. Hydro, and B. C. Burnaby, “Voltage stability analysis using generic dynamic load models,” IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 479-493, 1994.
- [15] P. Kundur, Power System Stability and Control, New York: McGraw-Hill, 1994.
- [16] E. H. Abed, J. C. Alexander, H. Wang, A. M. A. Hamdan, and H. C. Lee, “Dynamic bifurcations in a power system model exhibiting voltage collapse,” IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Vol. 5, pp. 2509-2512, May 3-6 1992.
- [17] I. Dobson, H. D. Chiang, J. S. Thorp, and L. Fekih-Ahmed, “A model of voltage collapse in electric power systems,” Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 3, pp. 2104-2109, Dec 7-9 1988.

- [18] H. D. Chiang, I. Dobson, R. J. Thomas, J. S. Thorp, and L. Fekih-Ahmed, "On voltage collapse in electric power systems," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 2, pp. 601-611, 1990.
- [19] J. H. Choi and J. C. Kim, "Advanced voltage regulation method of power distribution systems interconnected with dispersed storage and generation systems," IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 16, No. 2, pp. 329-334, 2001.
- [20] H. Ohtsuki, A. Yokoyama, and Y. Sekine, "Reverse action of on-load tap changer in association with voltage collapse," IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 1 pp. 300-306, 1991.
- [21] C. A. Smith, M. A. Redfern, and S. Potts, "Improvement in the performance of on-load tap changer transformers operating in series," IEEE Power Engineering Society General Meeting, vol. 3, pp. 1905-0910, July. 13-17 2003.
- [22] Z. Artstein, "Stabilization with relaxed controls," Nonlinear Anal., Theory, Meth., applicat., vol. 7, no. 11, pp. 1163-1173, 1983.
- [23] A. Bacciotti, Local stabilizability of nonlinear control systems, World Scientific, 1992.
- [24] E. D. Sontag, "A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization," Syst. Control Lett., vol. 13, pp. 117-123, 1989.
- [25] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," IEEE Control systems magazine, vol. 19, pp. 59-70, 1999.
- [26] M. A. Wicks, P. Peleties, and R. A. DeCarlo, "Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems," Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake, Buena Vista, vol, 4, pp. 3492-3497, December, 1994.

- [27] K. Walve, "Modelling of power system components at severe disturbances," International conference on Large High Voltage Electric Systems, CIGRE pp. 18-38, 1986.
- [28] W. W. Price, H. D. Chiang, H. K. Clark, C. Concordia, D. C. Lee, J. C. Hsu, S. Ihara, C. A. King, C. J. Lin, and Y. Mansour, "Load representation for dynamic performance analysis," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 8, pp. 472-482, 1993.

