

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

離散非線性系統積分型類滑模控制器之設計與
研究

Study of Integral-Type Quasi-Sliding Mode Controller for a
Class of Discrete-Time Nonlinear Systems

研究 生：王士昕

指導教授：梁耀文 博士

中華民國 九十八年八月

離散非線性系統積分型類滑模控制器之設計與研究

研究生：王士昕

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系碩士班



本篇論文將積分型滑模控制設計從連續非線性不確定系統推廣到不確定項滿足匹配條件(matching condition)的離散非線性不確定系統，而所設計的順滑面主要具備兩項優點：1.使得動態系統的狀態一開始就位在順滑面上，系統會具有較為強健(robust)的特性。2.當狀態位於順滑面上時，整個動態系統會等效於原始的無干擾系統(nominal system)，因此可以根據設計者的不同需求來控制此無干擾系統。同時配合所採用的控制器，能有效的抵抗雜訊的干擾，並且明確的找到其類滑模帶(Quasi-Sliding Mode Band，QSMB)的範圍。

Study of Integral-Type Quasi-Sliding Mode Controller for a Class of Discrete-Time Nonlinear Systems

Student : Shih-Hsin Wang

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this thesis, we extend the design of integral-type sliding mode control from a continuous-time nonlinear uncertain system to a class of discrete-time nonlinear uncertain system, in which the uncertainty satisfies the matching condition. The selected sliding surface has two main futures. First, the initial states locate on the sliding surface from beginning, so that the robustness of the system can be improved. Second, when the states remain on the sliding surface, the uncertain system behaves the same as the nominal system has, therefore, the engineer may perform their optimal design with respect to the nominal system according to requirements. Furthermore, the integral-type sliding surface is also combined with the quasi-sliding mode controller, to find out the quasi-sliding mode band (QSMB).

誌 謝

本篇論文的完成要感謝很多人了，有你們的幫助我才能有所精進，希望日後你們能繼續給予我指教與鼓勵！

首先要感謝我的指導教授梁耀文博士在專業領域上的指導，使我在這兩年的學習中受益良多，除此之外老師對於日常生活以及人生處世方面，也不吝提供許多寶貴的意見，相信對於往後的人生規劃必有所助益，也要感謝口試委員鄭治中博士、陳俊宏博士和吳章銘博士給予指正與寶貴的建議，使本論文更加完備。

接下來要感謝邱紹偉學長、許益銘學長、陳丞昶學長以及徐聖棟學長在我遇到困難時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學家榮、立偉在研究上給予的支持與協助，而學弟源廷、旭志、宜展也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對我的幫助，使我能夠更專心於研究，以及感謝其他的同學，你們曾給予我幫助，陪我度過這兩年的日子，充實我的研究生活。

最後我感謝我的家人無時無刻的包容與鼓勵，在這將這論文獻給你們，謝謝你們對我的支持，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，非常謝謝你們！

目 錄

	頁 次
中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii

Chapter 1 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機	4
1.3 論文架構	4
Chapter 2 預備知識	6
2.1 離散型滑模控制(discrete-time sliding mode control)條件	6
2.2 離散型滑模控制特性	10
2.3 類滑模之定義	14
2.4 積分型順滑函數之定義	15
Chapter 3 針對離散非線性系統之積分型類滑模(IQSM)控制	18
3.1 系統描述	18
3.2 順滑面之選取	19
3.3 類滑模控制器設計	21
3.3.1 非線性逼近	21
3.3.2 修正型非線性逼近	23

3.4 無干擾系統控制器設計.....	25
Chapter 4 應用範例模擬之比較與分析.....	31
4.1 拖車系統(trailer-truck model)	32
4.2 非線性迫近控制器、修正型非線性迫近控制器以及無干擾系統控制器之設計.....	34
4.3 收斂區間與可估計上界區間之估計.....	43
4.4 當考慮干擾雜訊時，拖車系統使用積分型順滑面和一般線性降階型順滑面設計方式之模擬比較.....	51
Chapter 5 結論與未來研究方向.....	56
5.1 結論.....	56
5.2 未來研究方向.....	57
參考文獻.....	58

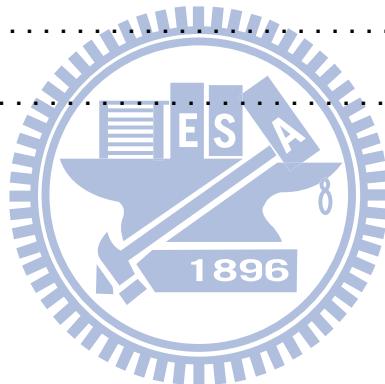


表 目 錄

表 4.1 拖車參數設定.....	31
表 4.2 第一種情況不考量雜訊時，收斂至 $\ x\ \leq 0.01$ 的時間與成本函數.....	37
表 4.3 第二種情況不考量雜訊時，收斂至 $\ x\ \leq 0.01$ 的時間與成本函數.....	38
表 4.4 第三種情況不考量雜訊時，收斂至 $\ x\ \leq 0.01$ 的時間與成本函數.....	40
表 4.5 第四種情況不考量雜訊時，收斂至 $\ x\ \leq 0.01$ 的時間與成本函數.....	41
表 4.6 第一種情況考量雜訊時，收斂至 $\ x\ \leq 0.12$ 的時間、成本函數和誤差總合..	52
表 4.7 第二種情況考量雜訊時，收斂至 $\ x\ \leq 0.12$ 的時間、成本函數和誤差總合..	53

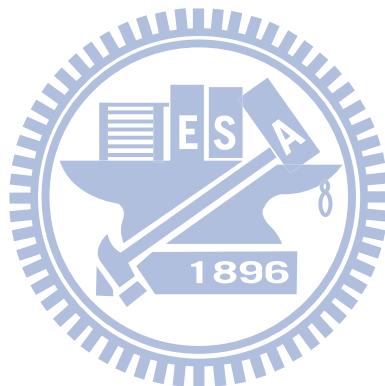
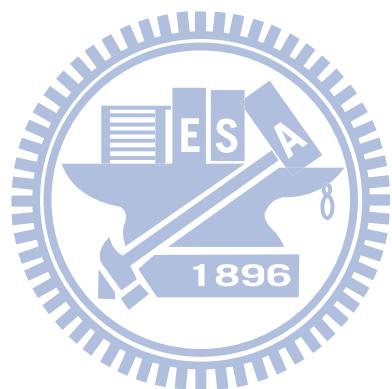


圖 目 錄

圖 2.1 採用離散型滑模條件(2-2)時，順滑變數 $s[k]$ 可能呈現之軌跡圖.....	7
圖 2.2 離散型滑模條件(2-3)式以及(2-5)式之軌跡收斂圖.....	9
圖 2.3 連續順滑模態控制之系統軌跡.....	11
圖 2.4 理想的離散順滑模態控制之系統軌跡.....	12
圖 2.5 實際的離散順滑模態控制之系統軌跡.....	13
圖 3.1 根據(3-12)式所描述之 $s_d[k]$ 的圖形.....	22
圖 4.1 拖車示圖.....	32
圖 4.2 第一種情況不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖.....	37
圖 4.3 第一種情況不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖.....	38
圖 4.4 第二種情況不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖.....	39
圖 4.5 第二種情況不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖.....	39
圖 4.6 第三種情況不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖.....	40
圖 4.7 第三種情況不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖.....	41
圖 4.8 第四種情況不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖.....	42
圖 4.9 第四種情況不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖.....	42
圖 4.10 當系統軌跡在順滑面上後，整個拖車系統的固定點.....	45
圖 4.11 拖車系統在順滑變數 $s[k] = 0$ 時之整個狀態空間的收斂區間估計.....	46
圖 4.12 拖車系統在整個狀態空間的可估計成本函數上界區間.....	47
圖 4.13 可估計上界區間 Ω_h 投影在 $x_1 - x_2$ 平面之圖形.....	48
圖 4.14 可估計上界區間 Ω_h 投影在 $x_1 - x_3$ 平面之圖形.....	48
圖 4.15 可估計上界區間 Ω_h 投影在 $x_2 - x_3$ 平面之圖形.....	49
圖 4.16 初始值不在 Ω_c 內且無雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖..	50
圖 4.17 初始值不在 Ω_c 內且無雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖.....	50
圖 4.18 第一種情況考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖.....	52
圖 4.19 第一種情況考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖.....	53
圖 4.20 第二種情況考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖.....	54

圖 4.21 第二種情況考慮雜訊時，拖車系統狀態 $\mathbf{x}[k]$ 之軌跡圖..... 54



CHAPTER 1

緒論

在第一小節中，將簡略說明順滑模態控制發展的歷史，以及演進過程中重要的理論貢獻。而第二小節則談論我們從何種角度去切入與改善一些現有的理論，以及所希望達到的成果。最後第三小節則約略概述整篇論文的架構為何。

1.1 研究背景



順滑模態控制(Sliding Mode Control)法則起源於可變結構系統(Variable Structure System, VSS)理論[1]，而這種系統約於 1950 年代被提出，是一種在不同的切換條件(switch condition)下，將系統結構切換到不同的子結構上，因此被稱為可變結構系統。而在發展與應用這種理論的過程中，前蘇聯的學者與工程師在將技術應用於馬達系統上時，發現了一個重要特性-順滑模態，並且藉由此種特性進而控制系統。而於 1970 年代，學者 V. I. Utkin 發表了關於可變結構系統的設計與分析[2]，以及順滑模態的理論與應用[3]等重要相關著作，成為許多研究者重要的參考資料。一般而言，順滑模態控制在設計時有兩個主要步驟：(1) 設計一個順滑函數(sliding function)，使得當閉迴路系統到達順滑模態(sliding mode)時(即系統狀態落在超平面(hyper plane)或順滑面(sliding plane)上)，能展現所需要的動態行為；(2) 設計一個不連續的控制力，使得系統動態能維持在順滑

面上。而順滑模態控制擁有響應快速、良好的暫態特性以及對於系統不定值(uncertainties)與外部干擾(disturbances)具有強健性(robustness)等優點。

同時大部分的控制策略都是應用在離散控制系統上，加上隨著晶片製造技術的日益提升，帶動了微處理器的低價與廣泛運用，於是離散型(discrete)滑模系統理論與控制器的設計，在近十幾年來其研究的重要性逐漸增加。而研究方向被歸類為兩種，第一種是聚焦在如何將連續時間的滑模控制轉換到離散時間系統，並且保留切換條件，最初所提出的離散型滑模控制是將連續型滑模的充要條件，直接轉換成為差分不等式的離散型滑模條件[4]。Milosavljevic認為上述的離散型滑模條件，配合將切換法則或狀態誤差做離散化處理之後，幾乎無法得到理想的順滑模態，而是成為所謂的類滑模(Quasi-Sliding Mode, QSM)[5]，而Milosavljevic雖然有提到關於迫近條件的重要性，但卻沒更進一步說明。Sarpturk等學者則指出且同時修正上述離散型滑模條件的不足[6]，也提出控制輸入必須要有上、下邊界值，以確保系統軌跡的收斂與穩定。Furuta則是採用離散的Lyapunov function取得一離散型滑模條件[7]，以期達到漸近穩定(asymptotically stable)，且為了對抗系統的不定值，利用切換區(switching region)內外不同的回授增益做為切換條件。Spurgeon則提出在有限範圍不定值(bounded uncertainties)的假設下，簡單的線性控制搭配適當的順滑面，將會比複雜的非線性控制搭配不合適的順滑面有著更好的效能表現[8]。W. Gao等人[12]則是將離散型滑模系統軌跡分類為三種模式，並且定義該軌跡擁有三項特性，同時提出新的迫近條件來彌補Milosavljevic、Sarpturk以及Furuta等人所提出離散滑模條件的不足，確保系統軌跡能在有限的時間內進入類滑模帶，而在進入類滑模帶後的每個取樣時間點，以一之字形的移動(zigzagging motion)來回的穿越過順滑面，並且維持在類滑模帶內。在文獻[9]中，Bartoszewicz則是重新制定了類滑模的定義，並提出了另一迫近條件，使得系統軌跡去對想要的順滑變數軌跡去做追蹤(tracking)的動作。S.-D. Xu等人[15]則是將Bartoszewicz所提出的概念，配合一些假設條件，使應用範圍推廣到離散非線性系統上。而第二種方式則是利由等效控制(equivalent control)設計和建立雜訊觀

察器(disturbance observer)，但K. Abidi認為在第一種方式之中，從保持強健性的角度，高頻率的切換在理論上有其需要性，不過在實際應用上則會受限於許多物理現制，如處理器的運算速度、類比轉數位或數位轉類比的時間延遲等，而針對一線性離散時間取樣系統使用不連續的控制力，將使得系統軌跡在順滑面附近為 $O(T)$ 的範圍內形成切跳(chattering)現象。V. I.. Utkin在[11]提出一假設，當雜訊能被量測到時，且具有平滑(smooth)和有界(bounded)的特性時，利用等效控制的方式，將使得系統軌跡維持在順滑面附近為 $O(T^2)$ 的範圍內，而系統狀態則維持在離固定點 $O(T)$ 的範圍內。K. Abidi等人[17]則將積分型順滑面的概念引入線性離散取樣時間系統，配合等效控制的概念，使得系統軌跡維持在順滑面附近為 $O(T^2)$ 的範圍內，而系統狀態則維持在離固定點 $O(T^2)$ 的範圍內。

順滑模態控制擁有許多優點，可以廣泛的運用在各式各樣的系統中[9-14]，在實務上，由於數位電腦技術的蓬勃發展，針對離散系統的滑模控制，其所扮演的角色重要性逐漸增加，也引起了學術界各方的研究[9,11-14]。對於離散系統而言，由於有限的取樣時間，所以當系統受到外部干擾時，系統軌跡只會在順滑面附近擾動，而非整個維持在順滑面上，因此所謂類滑模(quasi-sliding mode)的概念[9,12,14]將會被介紹以及深入的探討。對於實際系統來說，非線性現象廣泛存在於自然界中，線性行為只是在平衡狀態附近的近似結果，而實際的機械系統、電子系統、通信系統、自動控制系統、電力系統中都存在著各種非線性因素，如型變力、摩擦力、磁場力、電子元件的非線性特性等等，因此實際的系統絕大多數都是非線性系統。在大部分的情況下，線性理論無法說明非線性系統中複雜的物理現象，而這些實際現象卻頻繁地出現在現代工程技術中，假如想確實分析和有效地解決一些有一定難度的科學和技術問題，又想迴避非線性科學、迴避非線性現象，而僅僅限於線性方法與線性思維是不可能的。

1.2 研究動機

在文獻[17]之中，K. Abidi 等人將積分型順滑面的概念成功應用在離散線性系統上，雖然能使系統軌跡維持在順滑面附近為 $O(T^2)$ 的範圍內，但並非為一個明確的範圍，而所設計的順滑面也無法直接應用於離散非線性系統上。因此我們想要直接對最原始的離散非線性系統去分析，另外也考量了雜訊的干擾，接著參照在 W-J. Cao 等人在連續非線性系統中[16]，以及 K. Abidi 等人在離散線性系統中所提出的積分型順滑面之設計方式，結合 S.-D. Xu 等人[15]針對離散非線性系統所提出之類滑模控制(quasi-sliding mode control)的概念，進而去設計我們的穩定控制器，而此種控制器具備了積分型順滑面與類滑模控制器的優點，如能根據成本函數(cost function)去設計對應的控制力、與一般順滑面的設計方式相比更具有強健性，以及能明確找出類滑模帶(QSMB)。



1.3 論文架構

此篇論文最主要是探討一離散非線性系統的類滑模控制，先設計出穩定的積分型順滑面之後，接著採用 S.-D. Xu 等人所設計的類滑模控制器，此控制器不但能達成所要求的效能，此外還具備了強健性比一般順滑模態控制更好的優點。在第二章中，我們最主要是介紹類滑模與積分型順滑面相關之定義。在第三章中，我們則是針對一離散非線性系統，提出如何設計穩定的積分型順滑面，也說明了 S.-D. Xu 等人所提出的兩種類滑模控制器，各別為非線性迫近控制器以及修正型非線性迫近控制器。其中也證明當雜訊變化的不激烈時，修正型非線性迫近控制器的類滑模帶寬比非線性迫近控制器的類滑模帶寬更小，所以修正型非線性迫近控制器具備了更好的強健性。在第四章中，則針對離散化之後的拖車系統，探討

其固定點(fixed point)與收斂區間(domain of attraction)之估計。也將積分型順滑面與一般的順滑面設計方式，配合兩種類滑模控制器去做比較以及分析，並將模擬的結果與第三章的理論做個對應。最後在第五章，則是對此篇論文做一個總結以及提供一些未來可研究之方向。



CHAPTER 2

預備知識

第一小節將談論離散型滑模控制的演進，包括各方學者所提出對於迫近條件的改善方式。而第二小節則考量在系統中應用 Gao 所提出的離散型滑模控制，定義出系統響應的三種模式，以及說明系統軌跡該具備的三種特性。在第三小節中，則分別說明 Gao 與 Bartoszewicz 兩位學者對於類滑模各自的定義，也提到他們對於類滑模帶(QSMB)的定義。最後第四小節則會說明，積分型順滑函數在連續非線性系統與離散線性系統中各自的設計方式，以及所具備的優點為何。



2.1 離散型滑模控制(discrete-time sliding mode control)條件

最初的離散型滑模控制條件是直接修改連續型滑模(continuous-time sliding mode)存在的充要條件(sufficient and necessary condition) ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \dot{s} < 0 \quad (2-1)$$

當作離散型滑模存在的充要條件。然後從(2-1)式中，可以直接推得離散型滑模條件，如(2-2)式所示，

$$s[k] \cdot [s[k+1] - s[k]] < 0 \quad (2-2)$$

不過在文獻中 Milosavljevic 提出，離散化後得到的系統，配合(2-2)式的條件難以得到理想的順滑模態，反而呈現所謂的類滑模(quasi sliding mode)。而類滑模有別於順滑模態，原因為離散系統只能在取樣點上做控制，在兩取樣點之間的時段則無法作用，所以即使在此時段不探討雜訊的作用，系統軌跡也因為控制能力有限，使得系統軌跡無法維持在順滑面上，而是在順滑面的附近移動，這種情況就被稱做為類滑模。同時 Milosavljevic 也指出(2-2)式的條件做為離散系統的滑模條件時，存在一些問題，如圖 2.1 所示，系統軌跡會呈現震盪發散的狀況。

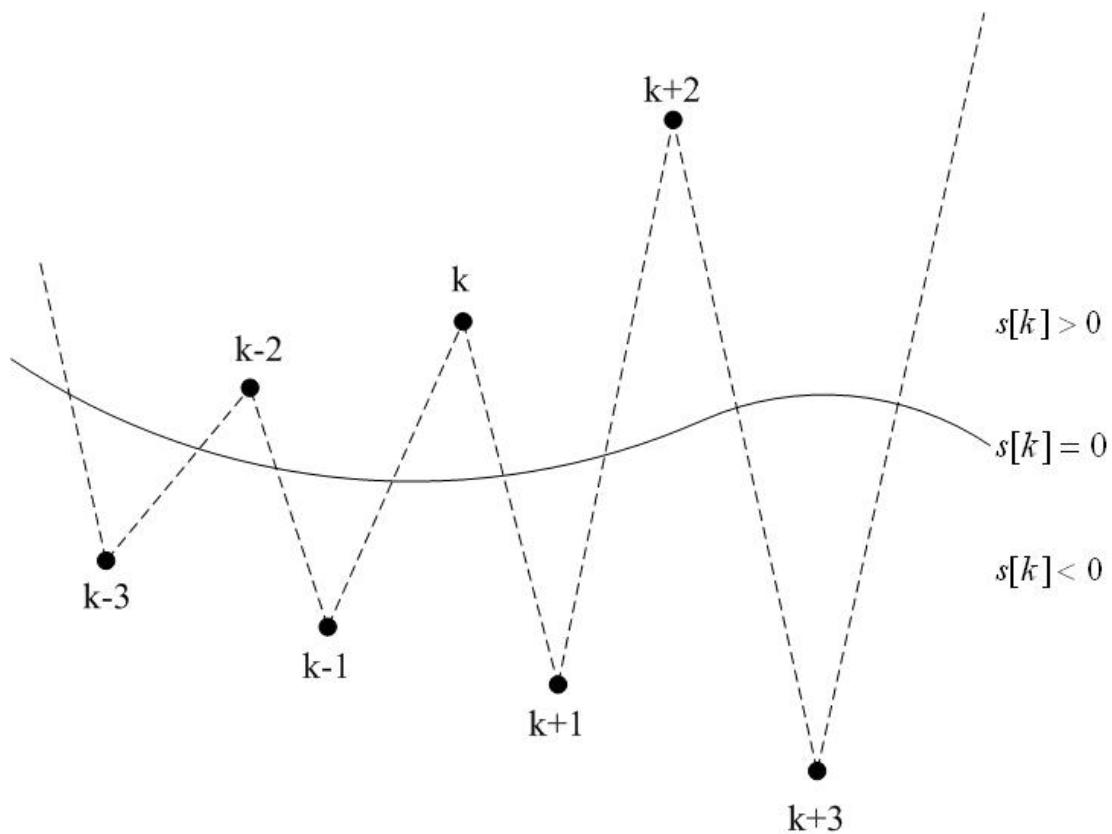


圖 2.1 採用離散型滑模(2-2)式的條件時，順滑變數 $s[k]$ 可能呈現之軌跡圖

針對(2-2)式的不足，Sarpturk 等人提出以下的修正條件，

$$|s[k+1]| < |s[k]| \quad (2-3)$$

進而將(2-3)式轉換成如(2-4)式所示，

$$\begin{aligned} [s[k+1] - s[k]] \cdot \text{sgn}(s[k]) &< 0 \\ [s[k+1] + s[k]] \cdot \text{sgn}(s[k]) &> 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

而 Furuta 則是利用離散 Lyapunov function 的方式獲得一離散滑模條件，在此定

義 Lyapunov function 為 $V[k] := \frac{1}{2}[s[k]]^2$ ，Furuta 提出以下的離散滑模條件，

$$s[k] \cdot \Delta s[k+1] < -\frac{1}{2}(\Delta s[k+1])^2 \quad (2-5)$$

其中 $\Delta s[k+1] = s[k+1] - s[k]$



將(2-5)式進一步推導可得到(2-6)式，

$$[s[k+1]]^2 < [s[k]]^2 \quad (2-6)$$

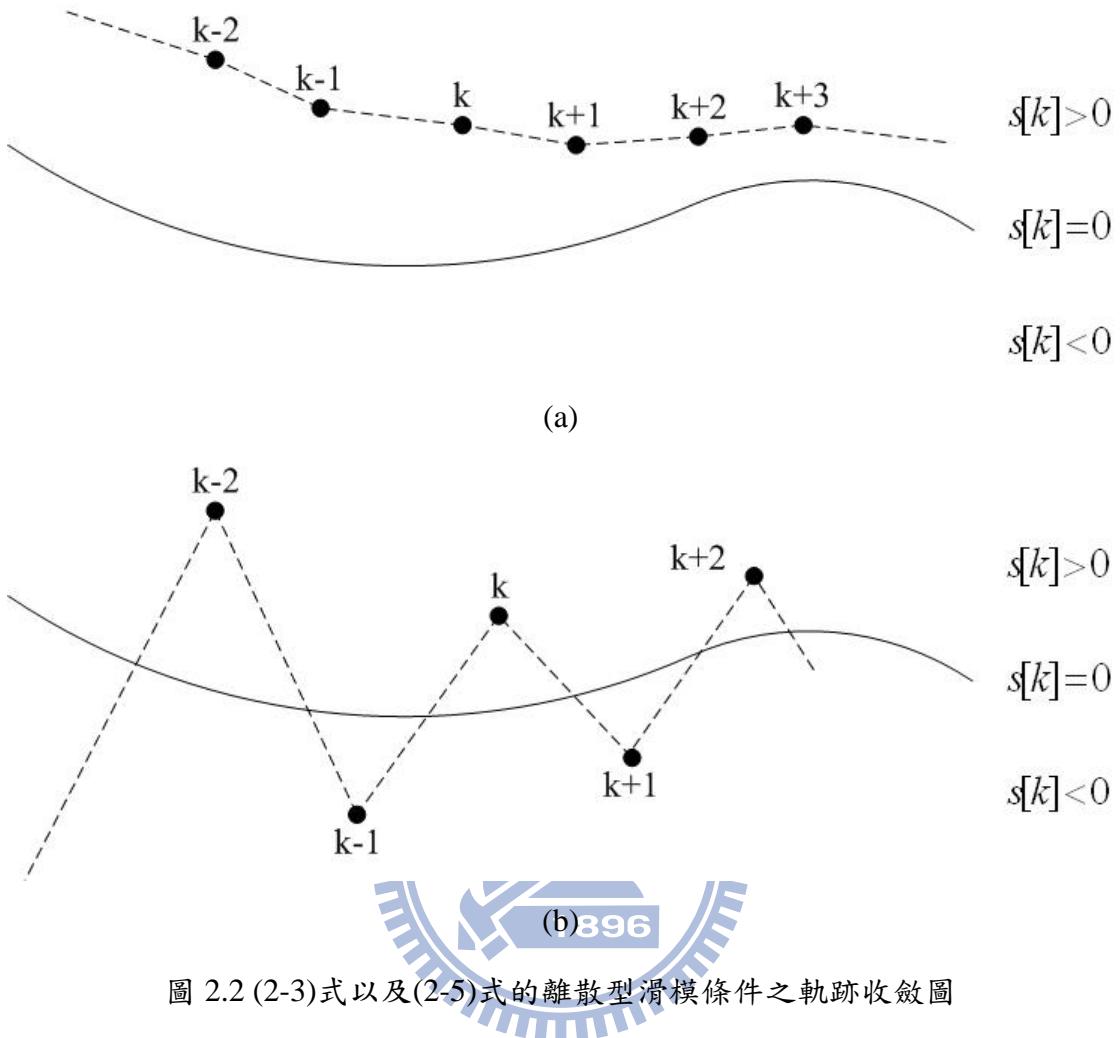
而(2-6)式等效於 $V[k+1] < V[k]$ ，

針對(2-3)式以及(2-5)式，此兩種條件皆能保證系統軌跡收斂，但只限定在於順滑面附近，否則系統軌跡可能會有這兩種現象：

(1)軌跡會以極緩慢的收斂速度往順滑面逼近。

(2)軌跡也可能會延著順滑面不斷的來回切跳。

如圖 2.2(a)與圖 2.2(b)所示，因此(2-3)式以及(2-5)式皆非適當的逼近條件。



實際上，迫近條件可以分成兩個部份來探討：

- (1)往順滑面迫近的方向條件。
- (2)系統軌跡與順滑面之間的距離遞減條件。

為了使系統軌跡不至於發生如上述般緩慢的收斂，因此 Gao 在文獻[12]中，提出以下迫近條件，

$$s[k+1] = (1 - q \cdot T) \cdot s[k] - \varepsilon \cdot T \cdot \text{sgn}(s[k]) \quad (2-7)$$

其中 $q > 0$ ， $\varepsilon > 0$ ， $1 - q \cdot T > 0$ ， T 為取樣時間。

在(2-7)式中，可自行選取 q 、 T 和 ε ，來達到所想要的收斂速度，也可以看出此迫近條件有符合方向條件以及距離遞減條件。而 Bartoszewicz 在文獻[9]中，也提出另一種迫近條件，

$$s[k+1] = s_d[k+1] \quad (2-8)$$

此迫近條件為預設有一想要的順滑變數軌跡 $s_d[k]$ ，再根據此迫近條件(2-8)使得系統軌跡 $s[k]$ 去追蹤(tracking) $s_d[k]$ 。因此可以根據自己的需求去設計 $s_d[k]$ ，進而得到所想要的順滑變數軌跡 $s[k]$ 。

2.2 離散型滑模控制特性

首先考慮單輸入的連續系統，



$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u \quad (2-9)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是系統狀態向量， $u \in \mathbb{R}^1$ 是控制輸入， A 以及 \mathbf{b} 都是有著適當維度的矩陣。而要完成一個順滑模態的控制器，通常包含下列兩個步驟：

步驟 1：決定順滑函數 $s(\mathbf{x})$ ，使得系統軌跡在順滑面 $s(\mathbf{x})=0$ 上是穩定的。

步驟 2：決定控制法則使得迫近條件 $\dot{s} < -\sigma \cdot |s|$ 能夠被滿足。

步驟 2 也說明不管系統狀態的初始值在哪，系統軌跡都會往順滑面的方向前進，並且在有限的時間內到達順滑面。

順滑模態控制的系統響應，一般來說包含三種模式，各別為到達模態(Reaching Mode, RM)、順滑模態(Sliding Mode, SM)、穩態模態(Steady-state Mode, SS)，

如圖 2.3(以二階系統為例)所示：

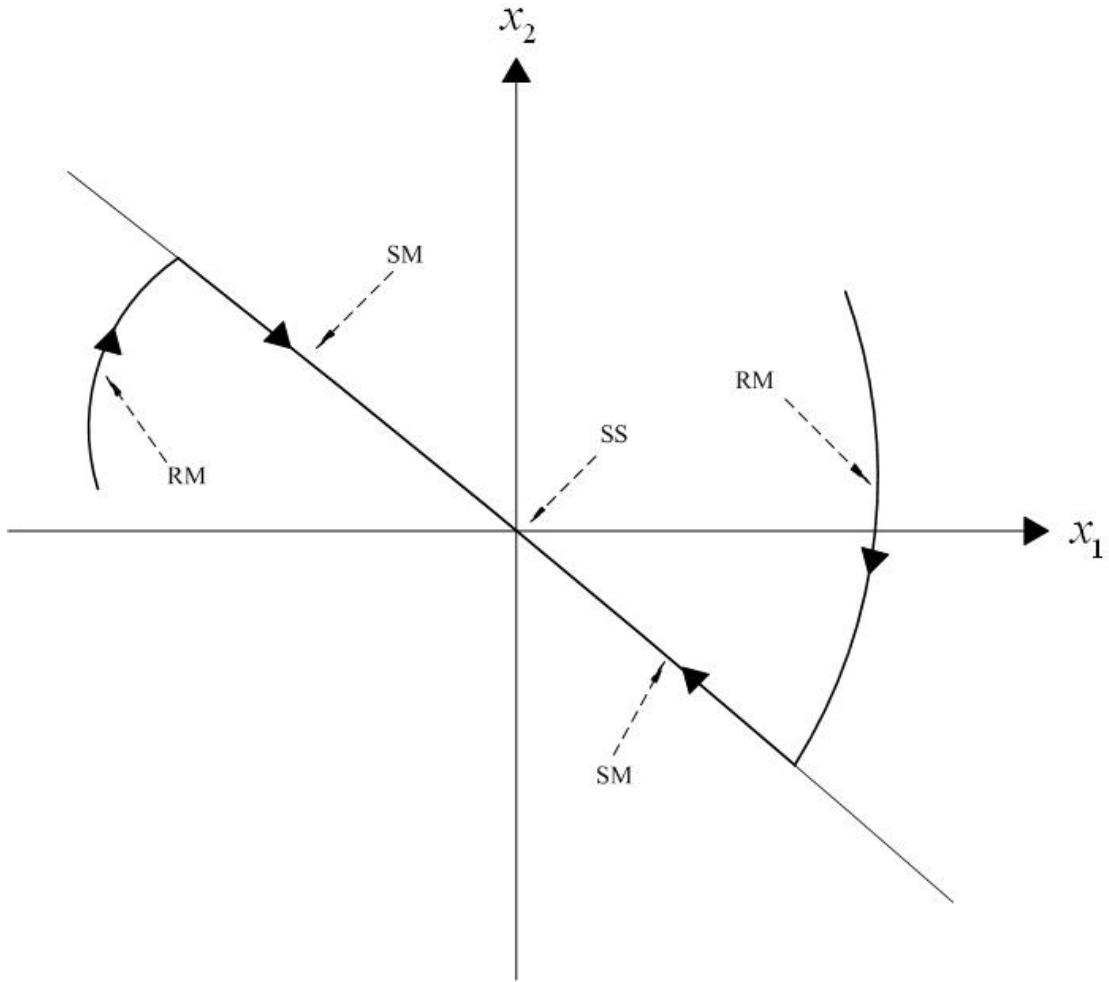


圖 2.3 連續順滑模態控制之系統軌跡

接下來考慮單輸入的離散系統，

$$\mathbf{x}[k+1] = A \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{b} \cdot u[k] \quad (2-10)$$

其中 $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^n$ 是系統狀態向量， $u[k] \in \mathbb{R}^1$ 是控制輸入， A 以及 \mathbf{b} 都是有著適當維度的矩陣。當離散滑模控制應用在系統(2-10)時，也能將整個系統響應分成到達模態、順滑模態以及穩態模態三種。不過由於離散型的順滑模態控制特性與連續

型的有所不同，而根據 Gao 的說明，在實際的狀況下，系統軌跡在往順滑面迫近時，很少會落在順滑面上，因此離散滑模控制系統的順滑面又稱之為理想順滑面。所以對於離散滑模控制系統，Gao 將系統軌跡分成兩種情況來討論。

第一種是理想的系統軌跡，如圖 2.4(以二階系統為例)所示。如果希望系統軌跡能如圖 2.4 所描述的一樣，則必須符合以下兩種條件：

(1) 系統軌跡在切換的時候，它必須能夠剛好落在順滑面上。

(2) 當系統軌跡在順滑面上之後，必須使得系統軌跡能夠維持在順滑面上。

但是在實際的應用中，上述的兩種條件很難達成。

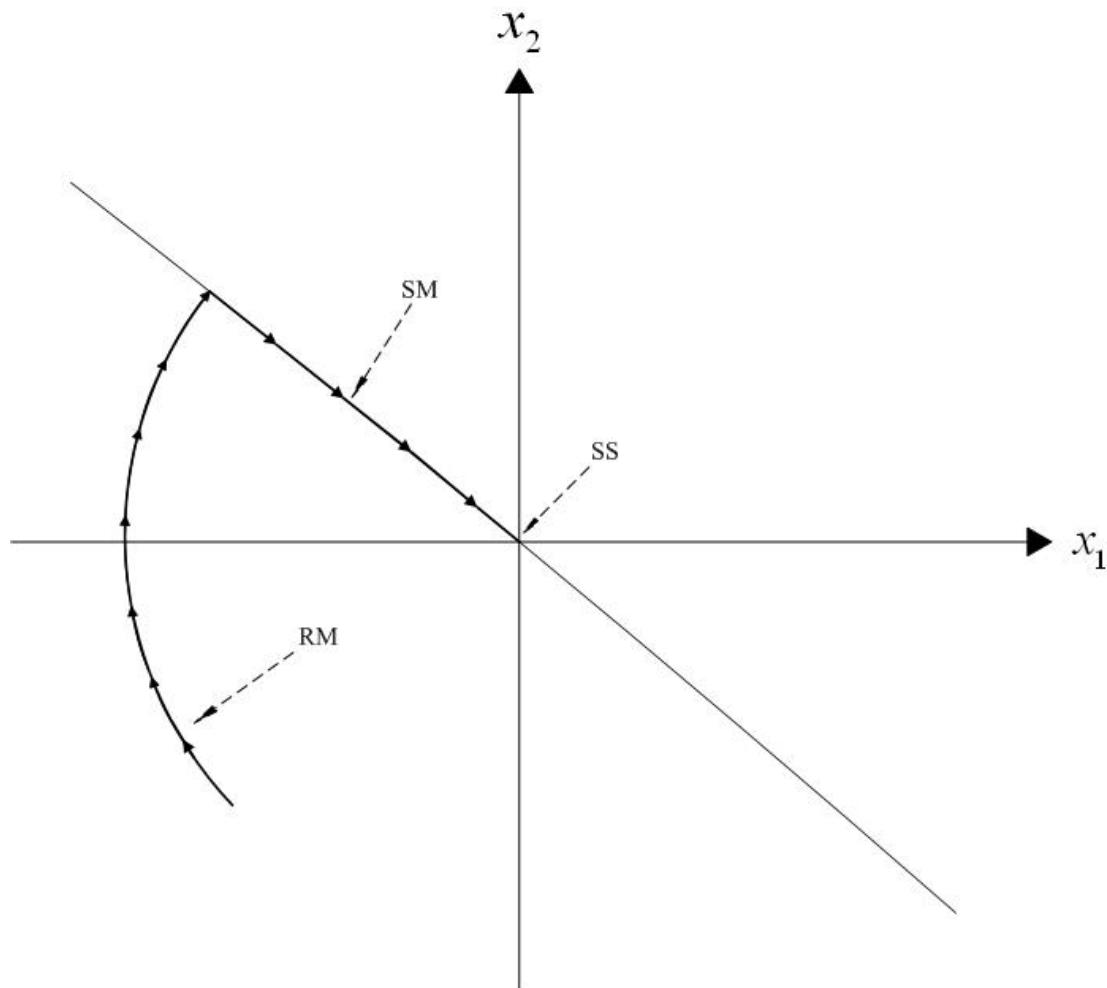


圖 2.4 理想的離散順滑模態控制之系統軌跡

第二種則是實際的系統軌跡，如圖 2.5(以二階系統為例)所示。從圖 2.5 中，可知實際系統的軌跡在切換時，很少會落在順滑面上，而是在順滑面的附近以之字形方式移動。

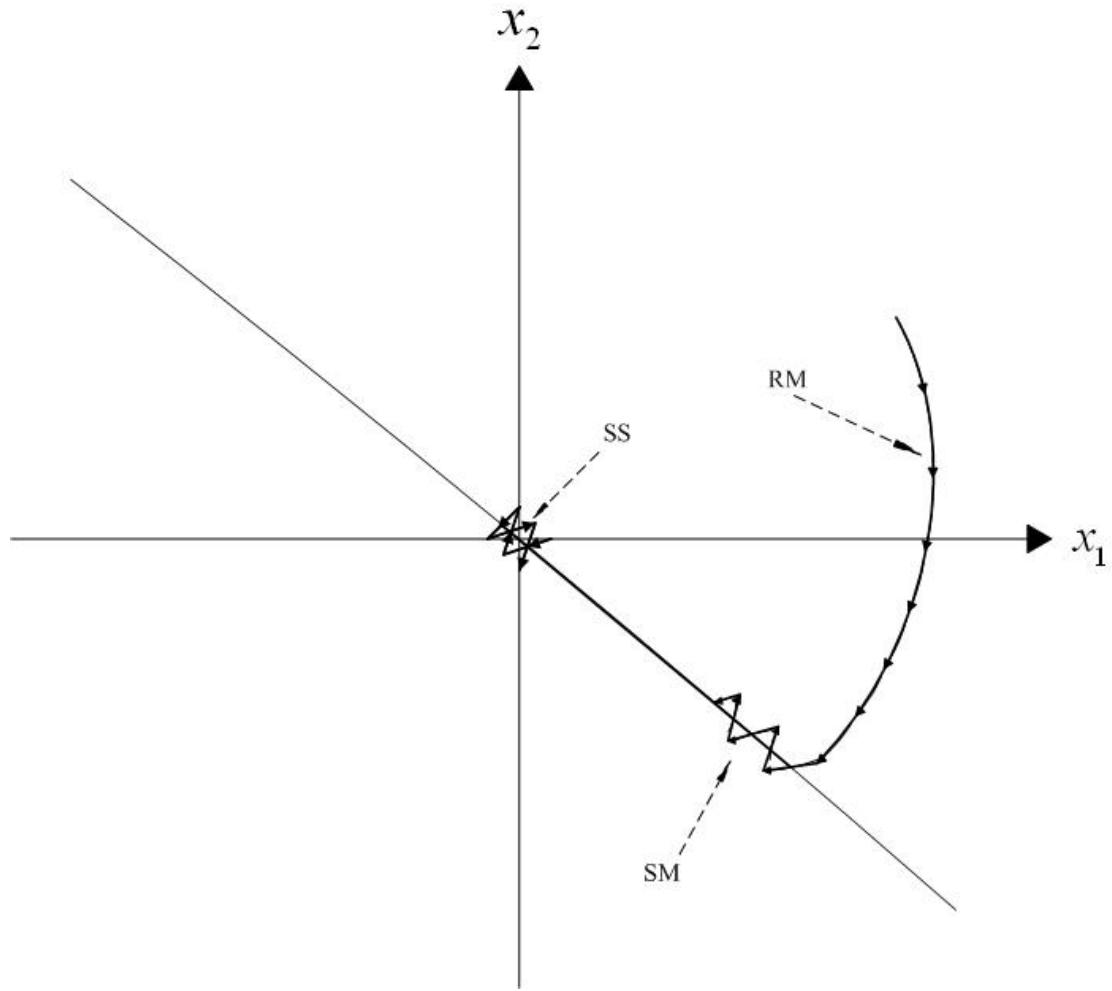


圖 2.5 實際的離散順滑模態控制之系統軌跡

因此 Gao 認為離散滑模控制系統應具備以下三種特性：

特性 1：對於任意的初始值，系統軌跡將會單調地往順滑面移動，直到穿越過順滑面。

特性 2：一但系統軌跡穿越過順滑面之後，在接下來的每個取樣時間點，它將會不斷的來回穿越順滑面，並且在順滑面附近形成一之字形的移

動。

特性 3：這一之字形的軌跡到順滑面之間的距離將不會再增加，而是會保持在一個明確的範圍裡。

2.3 類滑模之定義

針對單輸入離散線性系統(2-10)，Gao 提出了下列類滑模的定義：

定義 1：只要離散順滑模態控制的系統軌跡能夠滿足特性 2 和特性 3 就稱之為類滑模(Quasi-Sliding Mode，QSM)，在特性 3 中，之字形的軌跡到順滑面之間的大小則稱之為類滑模帶(Quasi-Sliding Mode Band，QSMB)，並且定義如下，



定義 2：當 $\Delta=0$ 時，類滑模又稱之為理想類滑模(Ideal Quasi-Sliding Mode，IQSM)。

定義 3：當系統軌跡滿足特性 1、特性 2 以及特性 3 時，可以說此離散順滑模態控制系統滿足了迫近條件。

然而 Bartoszewicz 重新定義了類滑模的觀念，最主要不同的地方為在 Gao 原本的定義中，系統軌跡必須具備特性 1 和特性 2。而 Bartoszewicz 則是提出系統軌跡並不需要來回的穿越過順滑面，但是若由於雜訊的影響，使得系統軌跡穿越過了順滑面是被允許的，因此只需讓系統軌跡與順滑面之間的距離能夠維持在一個範圍內即可，接下來介紹新的類滑模定義：

定義 4：當系統(2-10)受到系統不定值以及外部干擾的影響時，系統軌跡會一

直保持在順滑面附近，使得系統軌跡滿足

$$|s(x[k])| \leq \varepsilon \quad (2-12)$$

其中 ε 是一個正的常數，也被稱之為類滑模帶寬(quasi-sliding-mode band width)。

而這樣的定義可以避免系統軌跡發生切跳現象，並且降低控制器所需要消耗的能量，能更進一步的改善類滑模控制的效能。

定義 5：只要當 $k \geq 0$ 時，系統滿足下列條件，


$$\begin{aligned} s[k] > \varepsilon &\Rightarrow -\varepsilon \leq s[k+1] < s[k] \\ s[k] < -\varepsilon &\Rightarrow s[k] < s[k+1] \leq \varepsilon \\ |s[k]| &\leq \varepsilon \Rightarrow |s[k+1]| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (2-13)$$

就可以此離散順滑模態控制系統滿足了迫近條件。

2.4 積分型順滑函數之定義

考慮一連續非線性系統，

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(t) \quad (2-14)$$

其中 $\mathbf{x} \in \Re^n$ 是系統狀態向量， $\mathbf{u} \in \Re^m$ 是控制輸入， \mathbf{f} 以及 \mathbf{B} 都是有著適當維度的矩陣。在此介紹一些連續積分型順滑函數相關定義。在文獻中，W.-J. Cao 提出下列連續積分型順滑函數的定義：

$$s(x, t) = D\mathbf{x}(t) - D\mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t [Df(x, \tau) + DB\kappa(x, \tau)] d\tau = 0 \quad (2-15)$$

這種型式的順滑函數具有兩種優點：

1. 使得順滑函數的動態軌跡維度與狀態空間的維度相等，讓系統軌跡一開始就位在順滑面上，去除了到達模態。一般而言，而當系統軌跡處在到達模態的狀態下，對於雜訊的不敏感性(insensitivity)較差，導致無法確保整個系統完整響應的不敏感性，因此這樣的設計方式，會使得系統會具有較為強健的特性。

2. 當狀態位於順滑函數上時，整個動態系統會等效於一個無干擾系統，且可以根據不同需求來設計控制力 $\kappa(x)$ ，在順滑模態上增加了

一個設計的自由度。

但使用此種類型的順滑函數也相對的有一些限制條件，如必須滿足 $DB(x, t)$ 是 uniformly invertible，且 $\dot{x}(t) = f(x, t) + B(x, t)u(t)$ 必須是全域漸進可穩定的系統等條件。

接下來考慮一離散線性系統，

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[k] \quad (2-16)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 是系統狀態向量， $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ 是控制輸入， \mathbf{A} 以及 \mathbf{B} 都是有著適當維度的矩陣，且系統(2-16)為一可控制的(controllable)系統。在此介紹離散積分型順滑函數的相關定義。在文獻中，Khalid 設計出以下的離散積分型順滑函數：

$$\begin{aligned}s[k] &= \mathbf{Dx}[k] - \mathbf{Dx}[0] + \boldsymbol{\varepsilon}[k] \\ \boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{\varepsilon}[k-1] + \mathbf{Ex}[k]\end{aligned}\quad (2-17)$$

其中 $\mathbf{E} = -\mathbf{D}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n - \mathbf{BK})$ ，且存在矩陣 \mathbf{K} ，使得矩陣 $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ 的特徵直接在單位圓內。而(2-17)式是根據文獻[17]中所提出的連續積分型順滑函數推導得來，

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Dx}(t) - \mathbf{Dx}(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{Ex}(\tau) d\tau = 0 \quad (2-18)$$

而這樣順滑函數僅具有上述的第一個優點，也因此所推導出來的離散積分型順滑函數，也僅具有第一種優點。所以我們將在第三章中，說明如何設計(2-17)式中新的離散積分型順滑函數，卻具有(2-15)式中連續積分型順滑函數的兩項優點，並且將此新的順滑函數應用在離散非線性類滑模控制系統上。



CHAPTER 3

針對離散非線性系統之積分型類滑模(Integral –Type Quasi-Sliding Mode , IQSM)控制



在本章節將依序介紹所考慮的系統動態，順滑面的選取方式以及控制器的設計方式，其中第一小節說明所考慮的非線性系統型式，以及在設計控制器時需要考量的假設條件。第二小節則會解說離散非線性積分型順滑面的設計方式以及所擁有的特性優點為何。第三小節則會說明所採用的兩種類滑模控制器設計方式以及它們的優點和針對的情形為何。第四小節則介紹針對無干擾系統，如何設計滿足我們需求的控制器。

3.1 系統描述

考慮一離散非線性系統，如下所示：

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{u}[k] + \mathbf{d}[k] \quad (3-1)$$

其中 $\mathbf{x}[k] \in \Re^n$ 是系統狀態向量， $\mathbf{u}[k] \in \Re^m$ 是控制輸入向量， $\mathbf{d}[k] \in \Re^n$ 是干擾雜訊， $\mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$ 、 $\mathbf{G}(\mathbf{x}[k])$ 都是有著適當維度的平滑函數(smooth function)，此外還必須滿足 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 。在此，一個向量 $\mathbf{a} = (a_1 \cdots a_n)^T \geq \mathbf{0}$ ，即表示向量 \mathbf{a} 中的每一個分量 $a_i \geq 0$ 。

而我們的目標是希望，除了能降低雜訊對於系統的影響外，並且能根據成本函數(cost function)來設計我們的穩定控制器，使得系統能達到良好的效能。因此對於系統(3-1)的分析，我們擬定了下列的假設：

假設一： 存在控制力 $\mathbf{u}[k]$ ，使得 $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{u}[k]$ 為一個局部漸進可穩定的系統。

假設二： $\mathbf{d}[k]$ 滿足匹配條件(matching condition)，所以 $\mathbf{d}[k]$ 可以改寫成 $\mathbf{d}[k] = \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \bar{\mathbf{d}}[k]$ 。

假設三： 存在常數矩陣 $\mathbf{D} \in \Re^{m \times n}$ ，使得對於所有的狀態向量， $\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k])$ 是一個非奇異矩陣(nonsingular matrix)。

假設四： 令 $\mathbf{L}[k] = \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}[k]$ ， $\mathbf{L}_l \leq \mathbf{L}[k] \leq \mathbf{L}_u$ ，其中 \mathbf{L}_l 和 \mathbf{L}_u 都是常數向量，並且 \mathbf{L}_l 和 \mathbf{L}_u 各別代表了 $\mathbf{L}[k]$ 的下限(lower bound)與上限(upper bound)。

3.2 順滑面之選取

在設計順滑面的過程中，當滿足假設二時，就能改寫(3-1)式如(3-2)式所示，

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot (\mathbf{u}[k] + \bar{\mathbf{d}}[k]) \quad (3-2)$$

對此系統，首先我們選取一個積分型順滑面，

$$\begin{aligned}\mathbf{s}[k] &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[k] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[0] - \boldsymbol{\varepsilon}[k] \\ \boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{\varepsilon}[k-1] + \mathbf{D} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{x}[k-1]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k-1]) \cdot \boldsymbol{\kappa}[k-1] - \mathbf{x}[k-1]\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}[0] = 0\end{aligned}\quad (3-3)$$

這一類型順滑面的特性為 $\mathbf{s}[0] = 0$ ，也就是一開始無論起始位置為何系統軌跡已在順滑面上，消除了到達模態，系統會更加強健，當系統軌跡在順滑面上之後，從理想類滑模控制[12]中，我們知道它必須滿足下式，

$$\mathbf{s}[k+1] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{eq}} = \mathbf{s}[k] = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-4)$$

從(3-2)式、(3-3)式以及(3-4)式中，我們可以推得

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[0] - \boldsymbol{\varepsilon}[k+1] \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{eq}} = \mathbf{s}[k] = \mathbf{0} \quad (3-5)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot [\mathbf{u}[k] + \bar{\mathbf{d}}[k] - \boldsymbol{\kappa}[k]] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[0] - \boldsymbol{\varepsilon}[k] + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[k] = 0 \quad (3-6)$$

其中， $\boldsymbol{\kappa}[k]$ 是根據一些特殊要求所設計得到的控制力，如根據 LQR 設計得來，後面將介紹如何得到此控制力，接著當假設三滿足時，從(3-6)式中，由等效控制(equivalent control)得知 \mathbf{u}_{eq} 如(3-7)式所示：

$$\mathbf{u}_{eq}[k] = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]))^{-1} \{ \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot (\boldsymbol{\kappa}[k] - \bar{\mathbf{d}}[k]) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[0] + \boldsymbol{\varepsilon}[k] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[k] \} \quad (3-7)$$

再將(3-7)式代回(3-2)式，我們可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]))^{-1} \{ \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{\kappa}[k] + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[0] + \mathbf{\epsilon}[k] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[k] \} \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]))^{-1} \{ \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{\kappa}[k] - \mathbf{s}[k] \} \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{\kappa}[k] - \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]))^{-1} \mathbf{s}[k] \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{\kappa}[k]
\end{aligned} \tag{3-8}$$

從(3-8)式中，我們可以很清楚的得知，當系統軌跡在順滑面上時，可以將整個系統(3-2)等效為原始的無干擾系統(nominal system) $\mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{\kappa}[k]$ 。不過這是在理想情況下我們能知道 $\bar{\mathbf{d}}[k]$ 的值，但在實際情況下我們無法得到 $\bar{\mathbf{d}}[k]$ 之值，所以將會在下一個小節介紹一種控制器來減低 $\bar{\mathbf{d}}[k]$ 的影響，同時，在第四小節也會介紹另一種控制器來滿足我們的要求。

3.3 類滑模控制器設計

針對系統(3-1)我們要如何去設計類滑模控制器呢？對此我們提供了兩種控制法則，這兩種控制器各別為非線性迫近(nonlinear approach)與修正型非線性迫近(modified nonlinear approach)兩種。

3.3.1 非線性迫近

從假設四中，我們另外定義了 \mathbf{L}_0 以及 δ_L ，如(3-10)式所示。在這裡， $\|\cdot\|$ 是一個向量範數(vector norm)。

$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_l + \mathbf{L}_u) , \quad \delta_L = \frac{1}{2}\|\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_l\| \tag{3-10}$$

首先，我們詳細指明我們所想要的順滑變數軌跡 $\mathbf{s}_d[k]$ ，接著我們要設計一控制

器，去使得整個系統(3-2)的順滑變數 $s[k]$ 能去對 $s_d[k]$ 做追蹤的動作，在此我們採用了下列逼近條件[9]:

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{L}[k] - \mathbf{L}_0 + \mathbf{s}_d[k+1] \quad (3-11)$$

其中 $s_d[k]$ 是一個適當的已知函數，而 $s_d[k]$ 的一種標準型式[9]如下所示，

$$\mathbf{s}_d[k] = \begin{cases} \frac{k^* - k}{k^*} \mathbf{s}[0] & \text{if } k < k^* \\ \mathbf{0} & \text{if } k \geq k^* \end{cases}, \quad \text{其中 } k^* \text{ 是一個正整數} \quad (3-12)$$

k^* 的選取可以根據設計者的要求，看希望系統軌跡能在第幾步時到達順滑面而去決定，而且 k^* 的選取也取決於系統軌跡上順滑面的收斂速度以及控制器所能提供的能量大小。當 k^* 選取較大時，系統軌跡會較慢上順滑面，並且控制器每一步所消耗的能量會較小；反之，當 k^* 選取較小時，系統軌跡會較快上順滑面，控制器每一步所消耗的能量也會相對較大。對於(3-12)式的形式， $s_d[k]$ 的圖形如圖3.1所示。

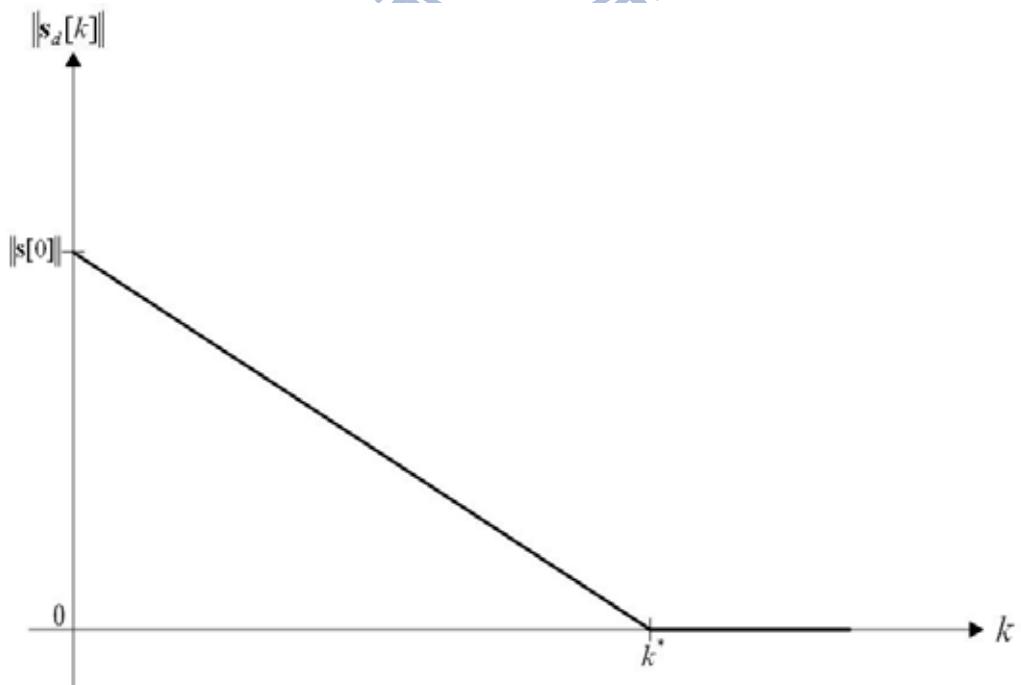


圖3.1 根據(3-12)式所描述之 $s_d[k]$ 的圖形

但由於所選取的順滑面為積分型的型式，其特性為在起始點時 $s[0]=0$ ，因此 $k^*=0$ 。現在我們要去設計控制器，使得系統軌跡能如同追進條件(3-11)所描述的一樣，所以我們針對系統(3-2)去計算 $s[k+1]$ ，接著我們可以得到下式，

$$\begin{aligned}s[k+1] &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot [\mathbf{u}[k] + \bar{\mathbf{d}}[k] - \mathbf{k}[k]] + s[k] \\ &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot [\mathbf{u}[k] - \mathbf{k}[k]] + s[k] + \mathbf{L}[k]\end{aligned}\quad (3-13)$$

接著我們將(3-13)式代入(3-11)式，我們可以推得，

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot [\mathbf{u}[k] - \mathbf{k}[k]] + s[k] = -\mathbf{L}_0 \quad (3-14)$$

從(3-14)式中，我們可以推得控制器的形式如(3-15)式所示，

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{k}[k] - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]))^{-1} \cdot (s[k] + \mathbf{L}_0) \quad (3-15)$$

我們將(3-15)式以及(3-2)式代入(3-3)式，我們可以推得下式，

$$\|\mathbf{s}[k+1]\| = \|\mathbf{L}[k] - \mathbf{L}_0\| \leq \delta_L \quad (3-16)$$

藉由(3-16)式，我們可以得知類滑模帶寬的大小將會小於等於 δ_L ，在這另外註明的是，當 $\mathbf{L}[k] \equiv \mathbf{0}$ 時，系統的漸近穩定特性仍然能被保證。

3.3.2 修正型非線性追近

如果 $\mathbf{L}[k]$ 的變化不激烈，被限制如同(3-17)式，

$$\|\mathbf{L}[k+1] - \mathbf{L}[k]\| \leq \Delta_L \quad (3-17)$$

其中 Δ_L 是一個已知的常數，並且符合 $\Delta_L < \delta_L$

然後我們可以採用修正型的控制器，去使得類滑模帶寬更進一步的降低，接著我

們採用此修正型迫近條件

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{L}[k] - \mathbf{L}_0 - \sum_{i=0}^k (\mathbf{s}[i]) \quad (3-18)$$

再將(3-13)式代入(3-18)式中，我們可以推得，

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot [\mathbf{u}[k] - \mathbf{k}[k]] + \mathbf{s}[k] = -\mathbf{L}_0 - \sum_{i=0}^k (\mathbf{s}[i]) \quad (3-19)$$

從(3-19)式中，我們可以推得修正型控制器如下所示，



$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{k}[k] - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]))^{-1} \cdot \left(\mathbf{s}[k] + \mathbf{L}_0 + \sum_{i=0}^k (\mathbf{s}[i]) \right) \quad (3-20)$$

接下來將證明，採用修正型控制器時，系統的類滑模帶寬能更進一步的降低。

我們將(3-20)式和(3-2)式代入(3-3)式，再藉由數學歸納法知道了 $\mathbf{s}[1] = \mathbf{L}[0] - \mathbf{L}_0$ 、

$$\mathbf{s}[2] = \mathbf{L}[1] - \mathbf{L}_0 - \mathbf{s}[1] = \mathbf{L}[1] - \mathbf{L}[0] \quad , \quad \mathbf{s}[3] = \mathbf{d}[2] - \mathbf{d}_0 - \mathbf{s}[1] - \mathbf{s}[2] = \mathbf{L}[2] - \mathbf{L}[1] \quad , \quad \dots ,$$

因此推得(3-21)式成立，

$$\mathbf{s}[i] = \mathbf{L}[i-1] - \mathbf{L}[i-2] \quad \text{for } 2 \leq i \leq k \quad (3-21)$$

由根據修正型迫近條件(3-18)得知，

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{L}[k] - \mathbf{L}_0 - \sum_{i=0}^k \mathbf{s}[i] = \mathbf{L}[k] - \mathbf{L}_0 - \mathbf{s}[0] - \mathbf{s}[1] - \sum_{i=2}^k \mathbf{s}[i] \quad (3-22)$$

然後將(3-21)式代入(3-22)式得到，

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{L}[k] - \mathbf{L}_0 - (\mathbf{L}[0] - \mathbf{L}_0) - \sum_{i=2}^k (\mathbf{L}[i-1] - \mathbf{L}[i-2]) \quad (3-23)$$

從(3-23)式中可以推得下式，

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{L}[k] - \mathbf{L}[k-1] \quad (3-24)$$

所以系統狀態必定滿足下列不等式：

$$\|\mathbf{s}[k+1]\| = \|\mathbf{L}[k] - \mathbf{L}[k-1]\| \leq \Delta_L \quad (3-25)$$

我們將(3-16)式與(3-25)式相比，因為 $\Delta_L < \delta_L$ ，所以這也意謂著，採用修正型非線性迫近控制器的類滑模帶寬比採用非線性迫近控制器的類滑模帶寬更小，因此也說明了修正型非線性迫近控制器具備了較好的穩健性。

3.4 無干擾系統控制器設計

針對系統(3-8)我們要如何去設計符合需求的控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 呢？對此我們提供了一種考量 LQR 問題的控制器設計方式，根據[18]中，考慮一成本函數(cost function)如(3-26)式所示：

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k] \quad (3-26)$$

其中 $\mathbf{Q} \geq 0, \mathbf{R} > 0$ 且 $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$

此時可定義 Discrete Hamiltoian function 如(3-27)式所示[19]：

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) - V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) \quad (3-27)$$

其中 $V(\mathbf{x})$ 定義為平衡點 $\mathbf{x} = 0$ 周圍的一局部平滑正定函數(locally smooth positive definite function)。

假設五：考慮(3-8)式的系統，假設在平衡點 $\mathbf{x} = 0$ 周圍存在 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ ，使得下列不等式成立：

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \leq 0 \quad (3-28)$$

其中 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ 為(3-29)式的解：

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{R} = 0 \quad (3-29)$$

而滿足(3-28)式和(3-29)式的解，即是最佳化問題中 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs inequality 的次佳解(suboptimal solution)。若將假設五中(3-28)式的條件改寫為只考慮等於零時，此時問題即是去尋求 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs equality 的解，同時也是最佳解(optimal solution)，但是這樣的解在大部分的非線性系統中，是很難直接求得。而為什麼在連續系統中，其 Hamiltoian function 不帶有 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ 的資訊，但在離散系統中卻有，將在註解一做個說明。

註解一：針對連續非線性系統而言，考量如何找出最佳化問題的解時，假設考慮的系統與成本函數如下：

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \quad (3-30)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3-31)$$

而所對應的 u^* 和 Hamilton-Jacobi inequality 如同下式，

$$u^*(x) = -R^{-1} \cdot g(x)^T \nabla_x^T V(x) \quad (3-32)$$

$$\nabla_x V(x) f(x) + x^T Q x - \frac{1}{2} \nabla_x V(x) g(x) R^{-1} g^T(x) \nabla_x^T(x) \leq 0 \quad (3-33)$$

其中 $\nabla_x V(x)$ 定義為 $V(x)$ 的梯度(gradient)。一般而言，在連續系統中我們可以先解出(3-33)式中的 $\nabla_x V(x)$ 再代入(3-32)式進而求出 u^* 。但在離散系統中就(3-28)式而言，我們無法直接解出 $V(x)$ ，這也是因此為何(3-28)式會帶有 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ 的資訊。所以在此將會提供如何去求出 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs inequality 的解。

如同在文獻[20]中，假設 $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_v \mathbf{x}$, $\mathbf{Q}_v > 0$ 時，則在 $\mathbf{x} \in \Re^n$ 的範圍內皆為正定函數，其中 \mathbf{Q}_v 的解法如下，將(3-27)式重新改寫成

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T H_2 \mathbf{x} + \sum_{k=3}^{\infty} H_k \mathbf{x}^{[k]} = H^{[2]} + H^{[3]} + H^{[4]} + o(\|\mathbf{x}\|^4) \quad (3-34)$$

其中 $\mathbf{x}^{[k]} = [x_1^k \ x_1^{k-1} x_2 \cdots x_1^{k-1} x_n \ x_1^{k-2} x_2^2 \ x_1^{k-2} x_2 x_3 \cdots x_1^{k-2} x_2 x_n \cdots x_n^k]^T$ ，且

$$H_2 = L_f^T \mathbf{Q}_v L_f - \mathbf{Q}_v - L_f^T \mathbf{Q}_v \mathbf{G}(0) \cdot (\mathbf{G}(0)^T \mathbf{Q}_v \mathbf{G}(0) + \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{G}(0)^T \mathbf{Q}_v L_f + \mathbf{Q} \quad (3-35)$$

其中 L_f 和 $\mathbf{G}(0)$ 分別代表 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 其泰勒展開式的一次項與常數項。因此為了滿足假設五的條件， H_2 必須是負定的，接著藉由解出滿足 $H_2 < 0$ 的 \mathbf{Q}_v ，在尋找出滿足(3-28)式的範圍，假設五即可成立。那麼如何找出滿足 $H_2 < 0$ 的 \mathbf{Q}_v ？可以將這個問題看做是找到一個 \mathbf{Q}_v ，使得 $H_2 + \mathbf{Q}_d = 0, \mathbf{Q}_d > 0$ ，因此(3-35)式可轉換成下式，

$$L_f^T \mathbf{Q}_v L_f - \mathbf{Q}_v - L_f^T \mathbf{Q}_v \mathbf{G}(0) \cdot \left(\mathbf{G}(0)^T \mathbf{Q}_v \mathbf{G}(0) + \mathbf{R} \right)^{-1} \cdot \mathbf{G}(0)^T \mathbf{Q}_v L_f + \hat{\mathbf{Q}} = 0 \quad (3-36)$$

其中 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_d$ ，而(3-36)式為一線性 Riccati equation，我們可利用 MATLAB 中的 dare 指令解出我們所要的 \mathbf{Q}_v ，而第 k 個時刻的 Discrete Hamiltonian function 則如下所示，

CUHK

$$H(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}^*[k]) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) \cdot \mathbf{u}^*[k]) - V(\mathbf{x}[k]) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}^*[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[k] \right)$$

$$= V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[k]) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}^*[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[k] \right) \quad (3-37)$$

此時可從(3-29)式推得 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ 如下，

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) &= -\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{Q}_v \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \\ \Rightarrow \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) &= -\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_v \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_v \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3-38)$$

此時的 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ 即是我們所需要的控制力 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 。

而利用上述方式所求得 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs inequality 的解，能幫我們估計出成本函數的上界，如下定理一所述。

定理一：當假設五成立，而系統軌跡也落在滿足假設五的範圍內時，加上所應用之控制力如(3-38)式所示，針對(3-8)式的系統而言，那麼系統即可達到局部漸進穩定，並且可以得到成本函數的上界如下：

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \left(\mathbf{x}[i]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[i] + \mathbf{u}^*[i]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[i] \right) \leq V(\mathbf{x}[0]) \quad (3-39)$$

證明：當假設五成立時，由(3-37)式和(3-28)式我們可得下以下結果，

$$V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[k]) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}^*[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[k] \right) \leq 0 \quad (3-40)$$

此時我們可以將 $V(x)$ 視為一個 Lyapunov 候選函數(candidate)，由(3-40)式可推出下式：

$$V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[k]) \leq -\frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}^*[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[k] \right) \quad (3-41)$$

因此我們可知道當系統軌跡落在滿足假設五的範圍內，系統是局部漸進可穩定的。同時我們將(3-41)式的結果推論到每一個時刻，如下所示：

$$\Rightarrow \begin{cases} V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[k]) \leq -\frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}^*[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[k] \right) \\ V(\mathbf{x}[k]) - V(\mathbf{x}[k-1]) \leq -\frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[k-1]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k-1] + \mathbf{u}^*[k-1]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[k-1] \right) \\ \vdots \\ V(\mathbf{x}[1]) - V(\mathbf{x}[0]) \leq -\frac{1}{2} \left(\mathbf{x}[0]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[0] + \mathbf{u}^*[0]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[0] \right) \end{cases} \quad (3-42)$$

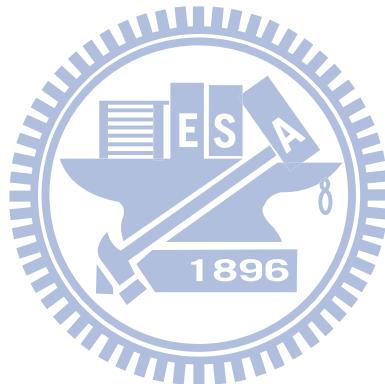
將(3-42)式內所有式子相加可得(3-43)式：

$$V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[0]) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k (\mathbf{x}[i]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[i] + \mathbf{u}^*[i]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[i]) \quad (3-43)$$

當 $k+1 \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}[k+1] \rightarrow 0$ 時，(3-43)式則變成下式：

$$V(\mathbf{x}[0]) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{x}[i]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[i] + \mathbf{u}^*[i]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}^*[i]) = J \quad (3-44)$$

此時 $V(\mathbf{x}[0])$ 即成本函數之上界。



CHAPTER 4

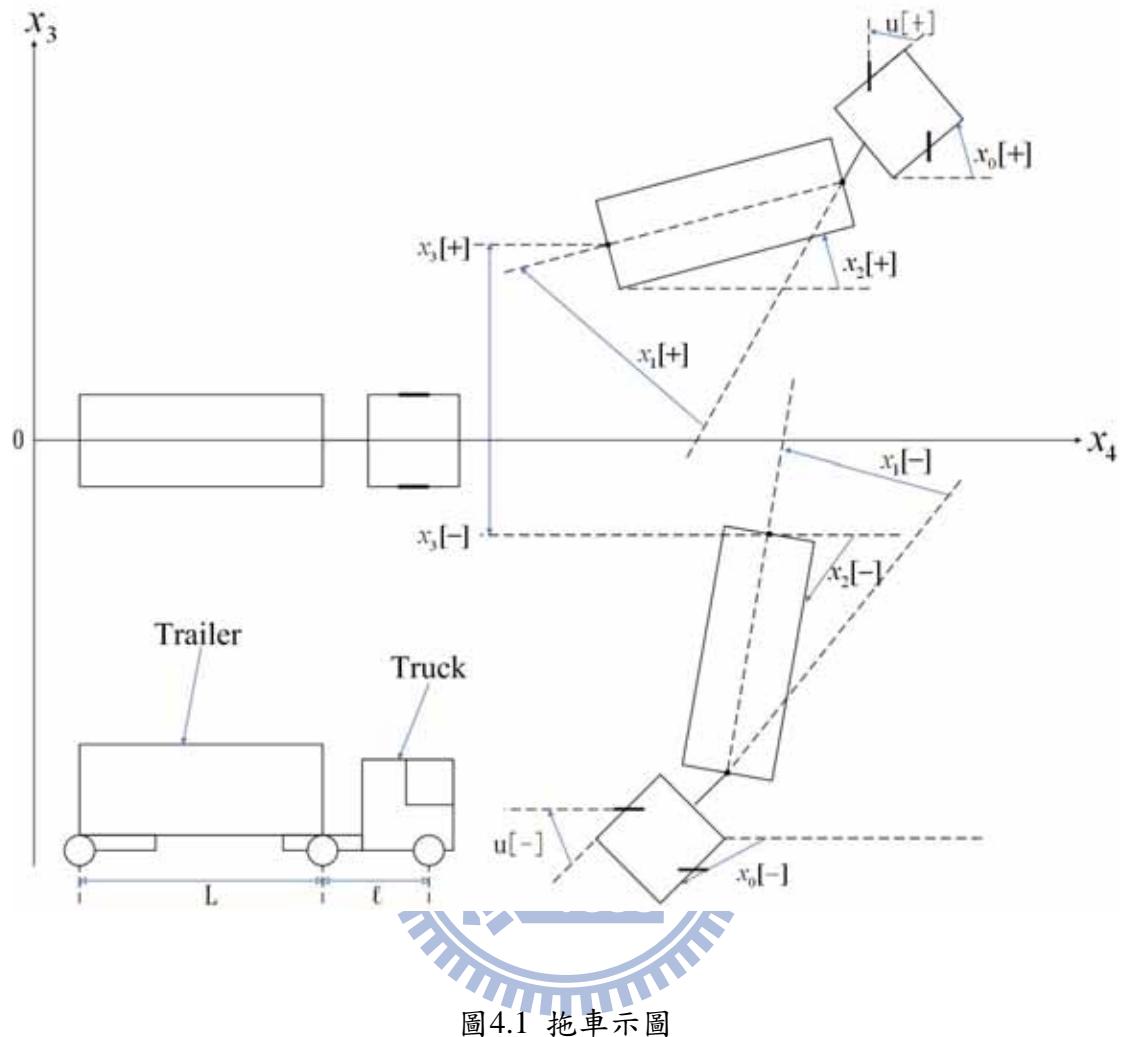
應用範例模擬之比較與分析

在本章節中，將介紹如何把上一章節中所提出的理論應用在實際系統中，其中第一小節會說明實際考量的系統為何，以及介紹其各項參數的設定。而第二小節則會說明在考量無外部干擾的情況下，積分型順滑面與一般線性降階型順滑面的設計方式，在考量的系統中其效能比較，以及優缺點的分析。接著第三小節將解釋如何找出滿足假設五的區間範圍。最後第四小節則會考慮外部干擾的影響，分析兩種順滑面設計方式其模擬結果。

4.1 拖車系統(trailer-truck model)

圖 4.1 呈現出整個拖車系統的架構，我們可以推得拖車連續的動態如下所示：

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(t) &= \frac{\eta}{\ell} \cdot \tan(u(t)) \\ x_1(t) &= x_0(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\eta}{L} \cdot \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= \eta \cdot \cos(x_1(t)) \cdot \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_4(t) &= \eta \cdot \cos(x_1(t)) \cdot \cos(x_2(t))\end{aligned}\tag{4-1}$$



在拖車系統(4-1)中，參數之意義如下：

ℓ :卡車(truck)的長度

L :掛車(trailer)的長度

η :倒車移動的速度

各狀態之意義如下：

$x_0(t)$:卡車的角度

$x_1(t)$:卡車和掛車的角度差

$x_2(t)$:掛車的角度

$x_3(t)$:掛車後端的垂直位置

$x_4(t)$:掛車後端的水平位置

$u(t)$:前輪操縱角度

將系統(4-1)整理成如下的動態方程式:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{\eta}{L} \cdot \sin(x_1(t)) + \frac{\eta}{\ell} \cdot \tan(u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\eta}{L} \cdot \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= \eta \cdot \cos(x_1(t)) \cdot \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_4(t) &= \eta \cdot \cos(x_1(t)) \cdot \cos(x_2(t))\end{aligned}\quad (4-2)$$

接著我們對拖車系統(4-2)離散化，在文獻[21]中提出針對拖車系統離散化之後的動態，如(4-3)式所示，其中 T 為取樣時間。

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= x_1[k] - \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) + \frac{\eta \cdot T}{\ell} \cdot \tan(u[k]) \\ x_2[k+1] &= x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) \\ x_3[k+1] &= x_3[k] + \eta \cdot T \cdot \cos(x_1[k]) \cdot \sin\left(\frac{x_2[k] + x_2[k+1]}{2}\right) \\ x_4[k+1] &= x_4[k] + \eta \cdot T \cdot \cos(x_1[k]) \cdot \cos\left(\frac{x_2[k] + x_2[k+1]}{2}\right)\end{aligned}\quad (4-3)$$

針對拖車系統，最主要的控制目的為在拖車做後退移動的時，利用控制前輪旋轉的角度，使得整個拖車最終能夠位於水平線($x_3 = 0$)上。換句話說，也就是去控制拖車，使得 $x_1 \rightarrow 0$ 、 $x_2 \rightarrow 0$ 和 $x_3 \rightarrow 0$ 。因此，在這只要探討系統(4-3)的三個方程式即可，所以將要分析的系統動態如下所示:

$$\begin{aligned}
 x_1[k+1] &= x_1[k] - \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) + \frac{\eta \cdot T}{\ell} \cdot \tan(u[k]) \\
 x_2[k+1] &= x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) \\
 x_3[k+1] &= x_3[k] + \eta \cdot T \cdot \cos(x_1[k]) \cdot \sin\left(\frac{x_2[k] + x_2[k+1]}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-4}$$

對於離散化之後的拖車系統(4-4) ，我們將參數設定如表4.1。

表 4.1 拖車參數設定

ℓ	卡車的長度	0.087[m]
L	掛車的長度	0.13[m]
η	倒車移動的速度	-0.1[m/sec]
T	取樣時間	0.5[sec]

4.2 非線性迫近控制器、修正型非線性迫近控制器以及無干擾系統控制器之設計

在此我們考慮雜訊的干擾，因此我們所要探討的拖車系統如下所示，

$$\begin{aligned}
 x_1[k+1] &= x_1[k] - \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) + \frac{\eta \cdot T}{\ell} \cdot \tan(u[k]) + d[k] \\
 x_2[k+1] &= x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) \\
 x_3[k+1] &= x_3[k] + \eta \cdot T \cdot \cos(x_1[k]) \cdot \sin\left(x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{2L} \cdot \sin(x_1[k])\right)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

其中 $d_l \leq d[k] \leq d_u$ ，並且 d_l 和 d_u 各別代表了 $d[k]$ 的下限(lower bound)與上限

(upper bound)。

對於此系統，我們只要讓 $\mathbf{x}[k] = (x_1[k], x_2[k], x_3[k])^T$ ， $\mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) = \left(\frac{\eta \cdot T}{\ell}, 0, 0 \right)^T$ ，

$\bar{\mathbf{u}}[k] = \tan(u[k])$ ， $\mathbf{d}[k] = (d[k], 0, 0)^T$ ，就可將系統(4-7)轉換成系統(3-1)的形式。

首先在第三章假設三裡，要設計一常數矩陣 \mathbf{D} ，使得 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}[k])$ 為一個非奇異矩陣，在此可取 $\mathbf{D} = (1, 1, 1)$ 。而取 $\bar{\mathbf{d}}[k] = \frac{\ell}{\eta \cdot T} \cdot d[k]$ ，則假設二成立。又 $\mathbf{L}[k] = \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}[k] = d[k]$ ，所以 $d_l \leq \mathbf{L}[k] \leq d_u$ ，假設四因此成立。而由(3-3)式可得其積分型順滑面如(4-6)所示，

$$\mathbf{s}[k] = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[k] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}[0] - \boldsymbol{\varepsilon}[k] = x_1[k] + x_2[k] + x_3[k] - x_1[0] - x_2[0] - x_3[0] - \boldsymbol{\varepsilon}[k] \quad (4-6)$$

接著根據 3.3.1 節的步驟，可以得到非線性迫近控制器如下所示：

$$u[k] = \tan^{-1} \left(\boldsymbol{\kappa}[k] - \left(\frac{\eta \cdot T}{\ell} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{s}[k] + \mathbf{L}_0) \right) \quad (4-7)$$

再根據 3.3.2 節的步驟，可以得到修正型非線性迫近控制器如下所示：

$$u[k] = \tan^{-1} \left(\boldsymbol{\kappa}[k] - \left(\frac{\eta \cdot T}{\ell} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{s}[k] + \mathbf{L}_0 + \sum_{i=0}^k \mathbf{s}[i] \right) \right) \quad (4-8)$$

在此特別註明的是，當系統不考慮雜訊時，非線性迫近控制器與修正型非線性迫近控制器是相同的。

最後根據 3.4 節的步驟，考量一成本函數如下，

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_{31}[k] \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_{31}[k] \end{bmatrix} + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k] \quad (4-9)$$

其中取 $\mathbf{R} = 1$ ，而 \mathbf{Q} 分別為 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 這兩種情況做討論

且取

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_{31}[k] \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_v \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_{31}[k] \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

從(3-36)式可解出 \mathbf{Q}_v ，其中 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_d$, $\mathbf{Q}_d > 0$ ，不同的 \mathbf{Q}_d 會使得滿足(3-28)式的範圍大小，也隨之不同，也會使得(3-39)式中 $V(\mathbf{x}[0])$ 隨之不同。而我們將以 \mathbf{Q}_d 分別為以下兩種情況進行討論，

$$1. \mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2. \mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後可由(3-38)式得到所需要的控制力 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 。在下一小節將討論如何估計出收斂區間與滿足(3-28)式的範圍大小。

由於非線性迫近控制器以及修正型非線性迫近控制器各別應用於拖車系統(不考慮雜訊)時，其結果是相同的，因此在模擬過程中只需要考慮採用其中一種控制器即可，而模擬結果將與[15]中一般線性降階型順滑面設計方式做個比較，初始值 $\mathbf{x}[0]$ 設為 $[0 \ 0.5 \ 0.32]^T$ ，可以得到模擬結果如圖4.2到圖4.9所示，其中我們將積分型順滑面的模擬圖標記為IQSMC，一般線性降階型順滑面的模擬圖標記為QSMC(其中(3-12)式中 $s_d[k]$ 其 k^* 設定為1)，從圖4.3、圖4.5、圖4.7以及圖4.9中我們可以得知，當系統不考慮干擾雜訊時，控制器都有使系統狀態穩定，而對於

這兩種順滑面設計方式，我們比較其收斂時間($\|\mathbf{x}\| \leq 0.01$)以及成本函數(J)。

第一種情況： $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{Q_d} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $V(\mathbf{x}[0]) = 3.0534$

表 4.2 第一種情況不考量雜訊時，收斂至 $\|\mathbf{x}\| \leq 0.01$ 的時間與成本函數

	收斂至 $\ \mathbf{x}\ \leq 0.01$ 的時間	$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{100} \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k]$
積分型順滑面	27 秒	2.2373
一般線性降階型 順滑面	33.5 秒	2.2906

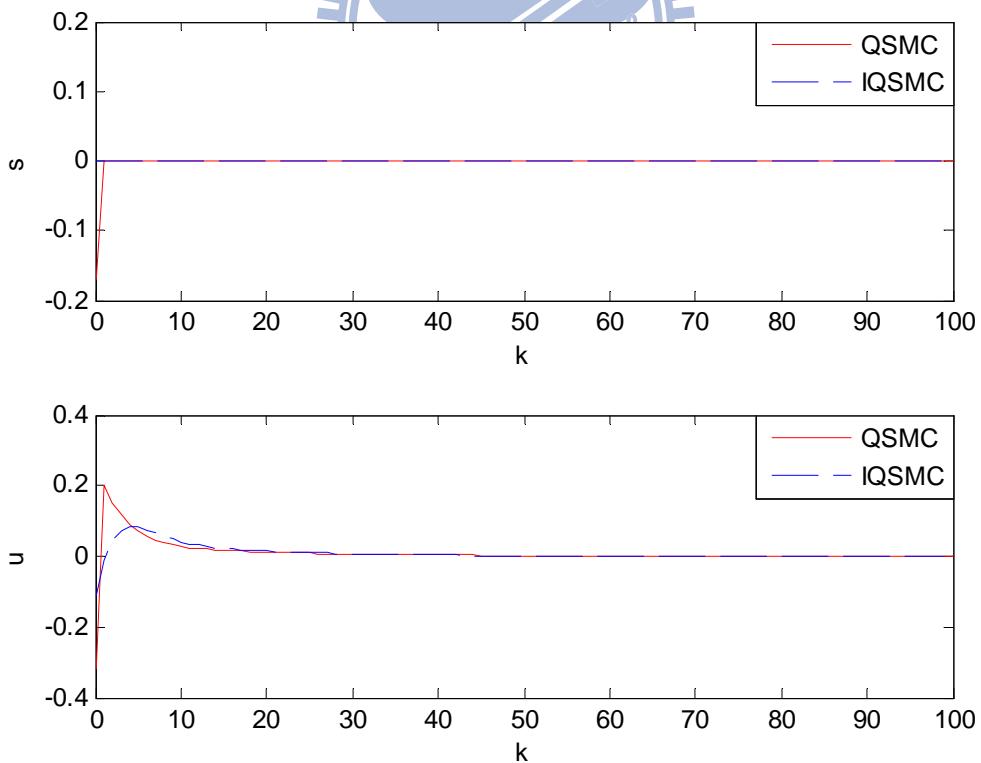


圖4.2 第一種情況不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

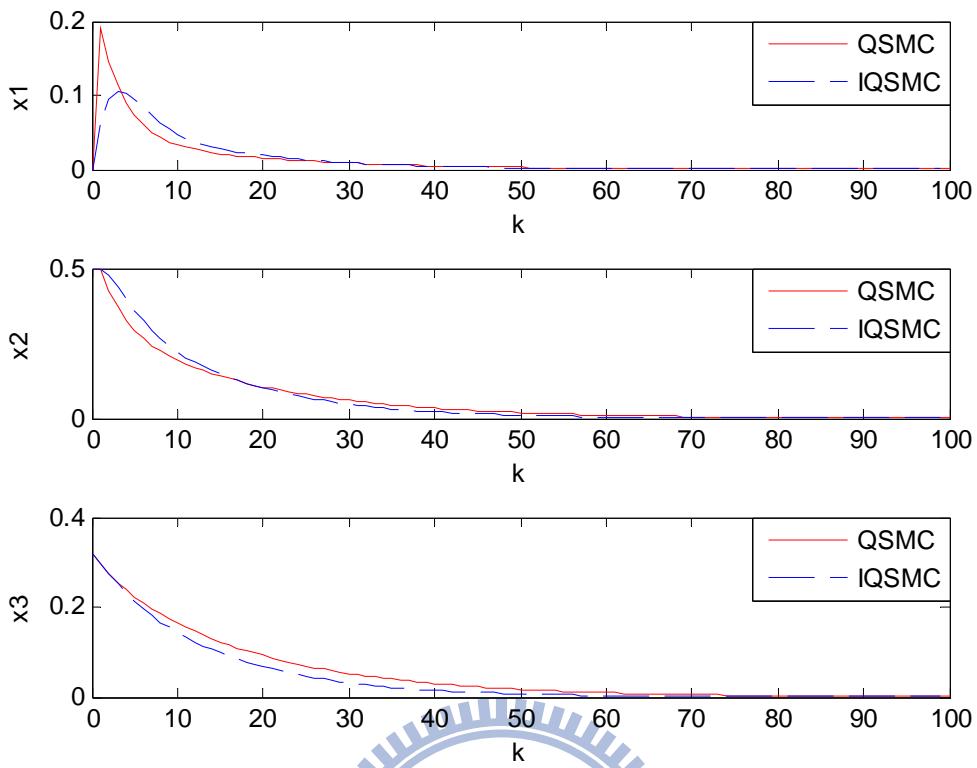


圖4.3 第一種情況不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $\mathbf{x}[k]$ 之軌跡圖

第二種情況： $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V(\mathbf{x}[0]) = 3.4848$

表 4.3 第二種情況不考量雜訊時，收斂至 $\|\mathbf{x}\| \leq 0.01$ 的時間與成本函數

	收斂至 $\ \mathbf{x}\ \leq 0.01$ 的時間	$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{100} \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k]$
積分型順滑面	23.5 秒	2.6882
一般線性降階型 順滑面	33.5 秒	2.8927

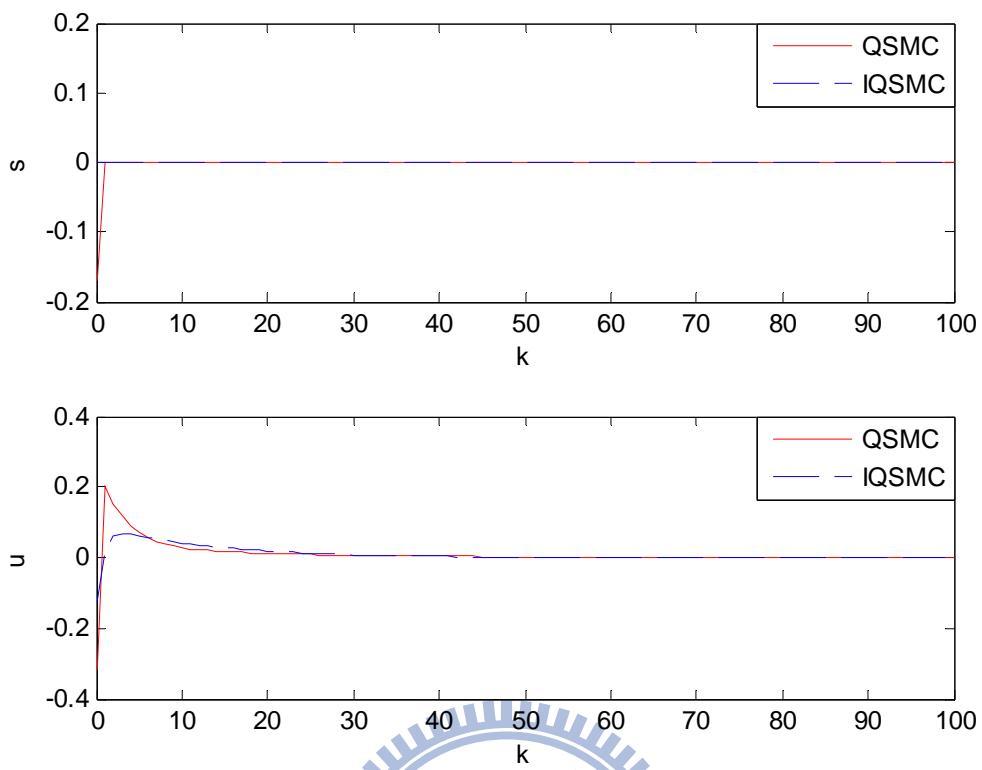


圖4.4 當不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

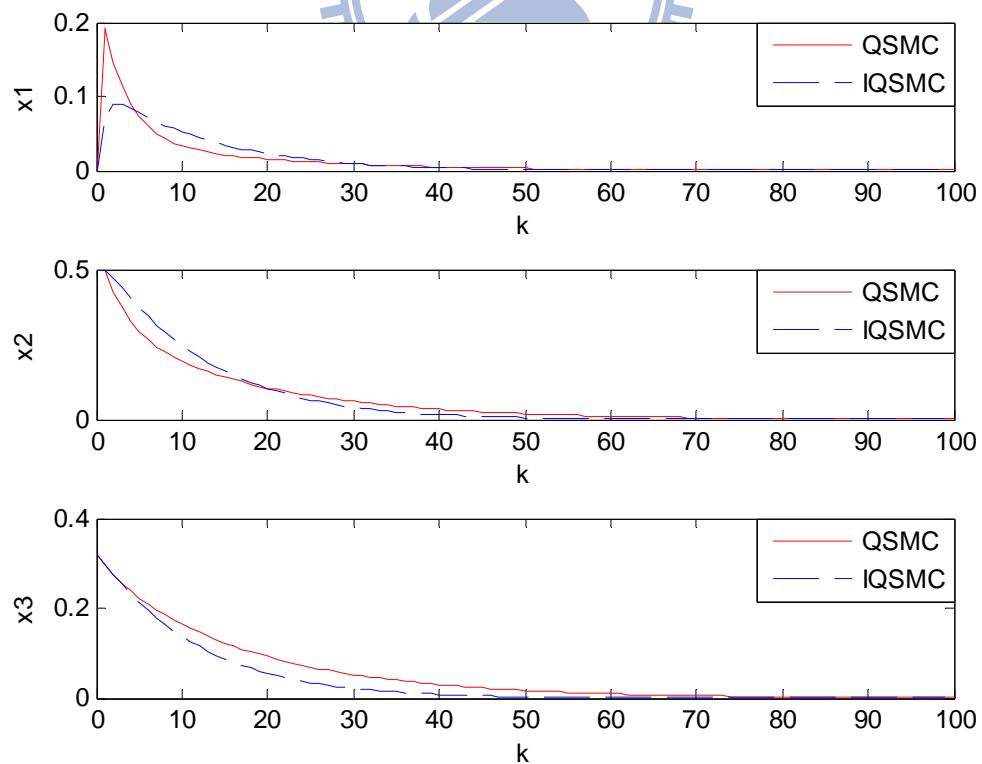


圖4.5 當不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖

第三種情況： $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $V(\mathbf{x}[0]) = 7.2948$

表 4.4 當不考量雜訊時，收斂至 $\|\mathbf{x}\| \leq 0.01$ 的時間與成本函數

	收斂至 $\ \mathbf{x}\ \leq 0.01$ 的時間	$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{100} \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k]$
積分型順滑面	49 秒	2.4331
一般線性降階型 順滑面	33.5 秒	2.2906

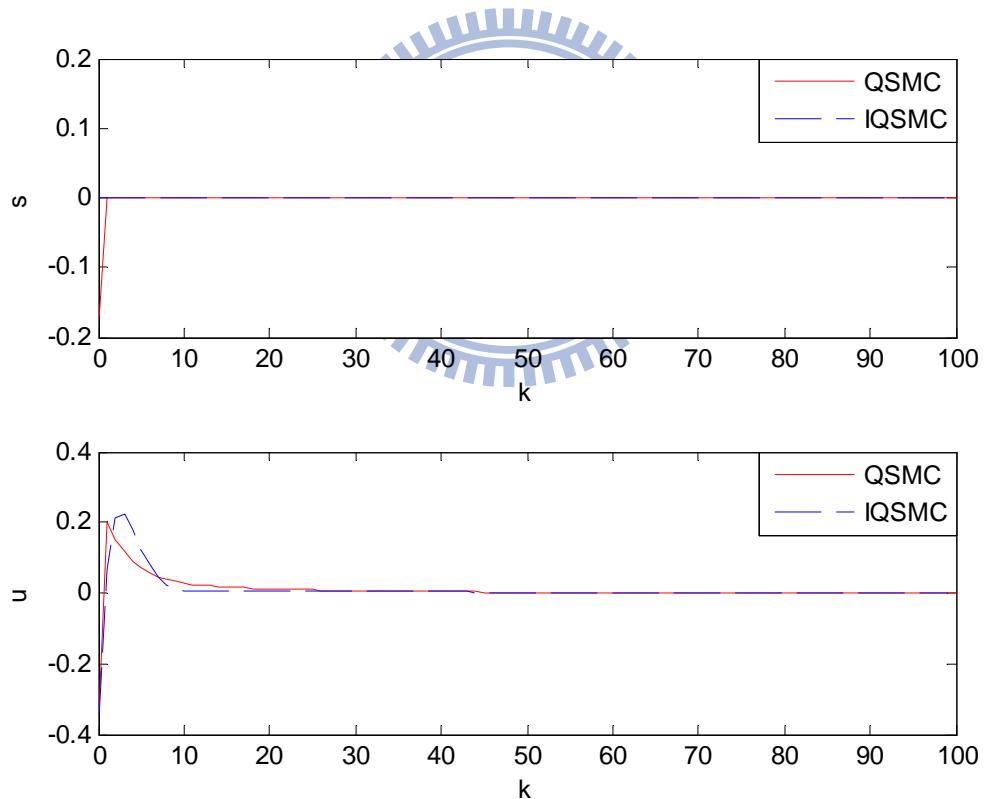


圖4.6 當不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

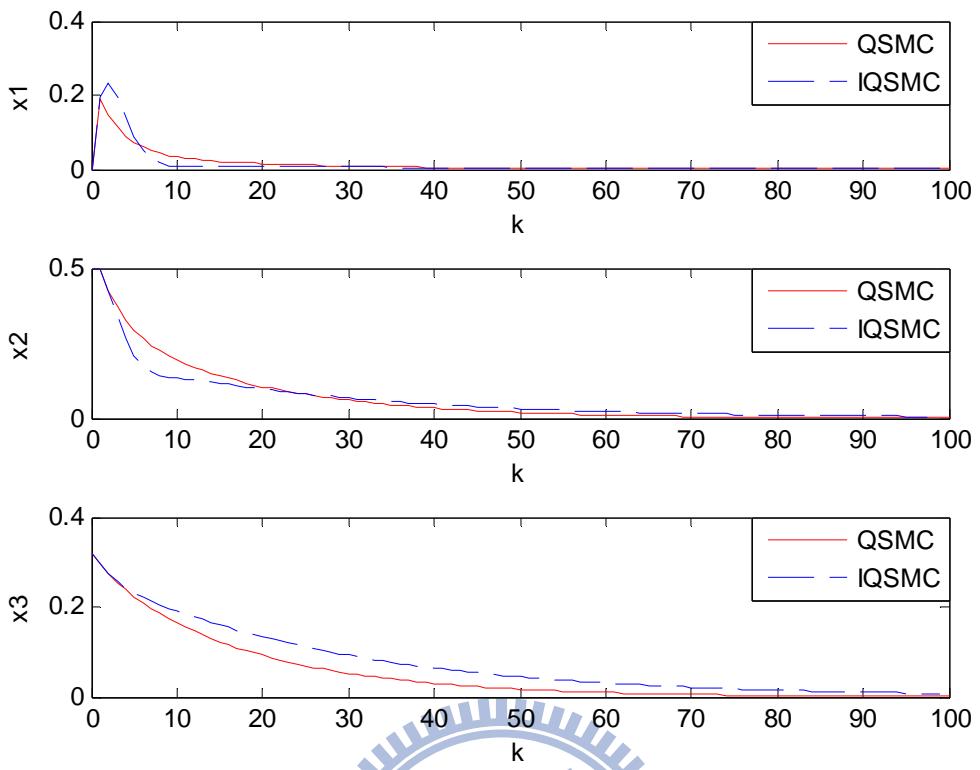


圖4.7 當不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖

第四種情況： $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V(x[0]) = 7.7338$

表 4.5 當不考量雜訊時，收斂至 $\|x\| \leq 0.01$ 的時間與成本函數

	收斂至 $\ x\ \leq 0.01$ 的時間	$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{100} \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k]$
積分型順滑面	28 秒	2.6779
一般線性降階型 順滑面	33.5 秒	2.8927

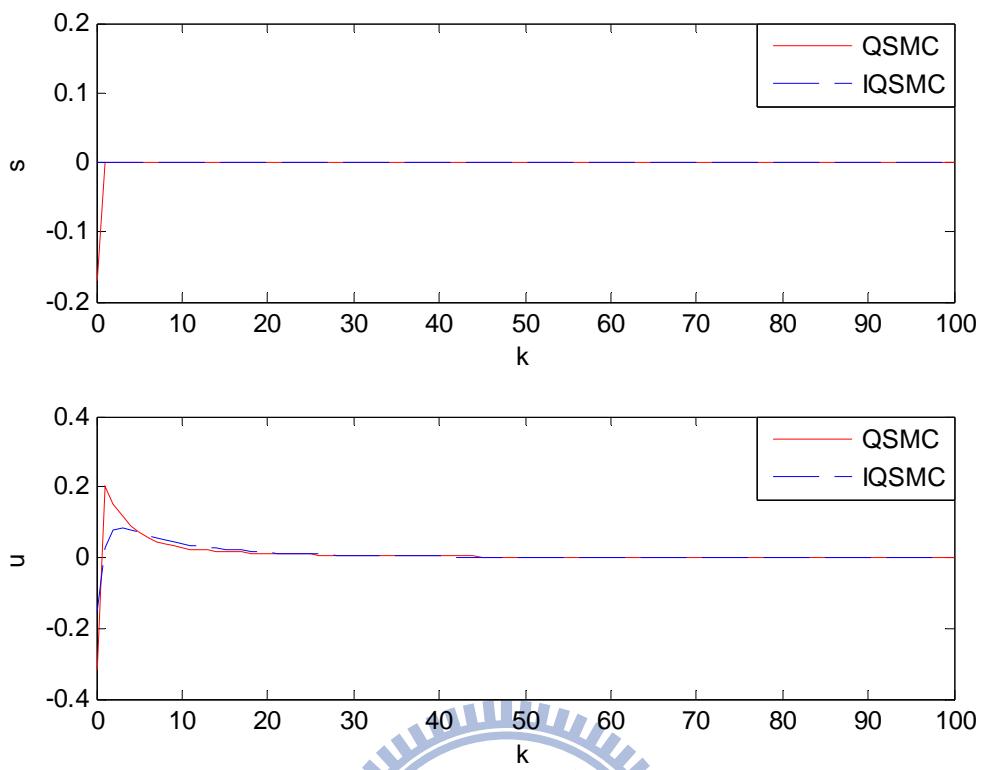


圖4.8 當不考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

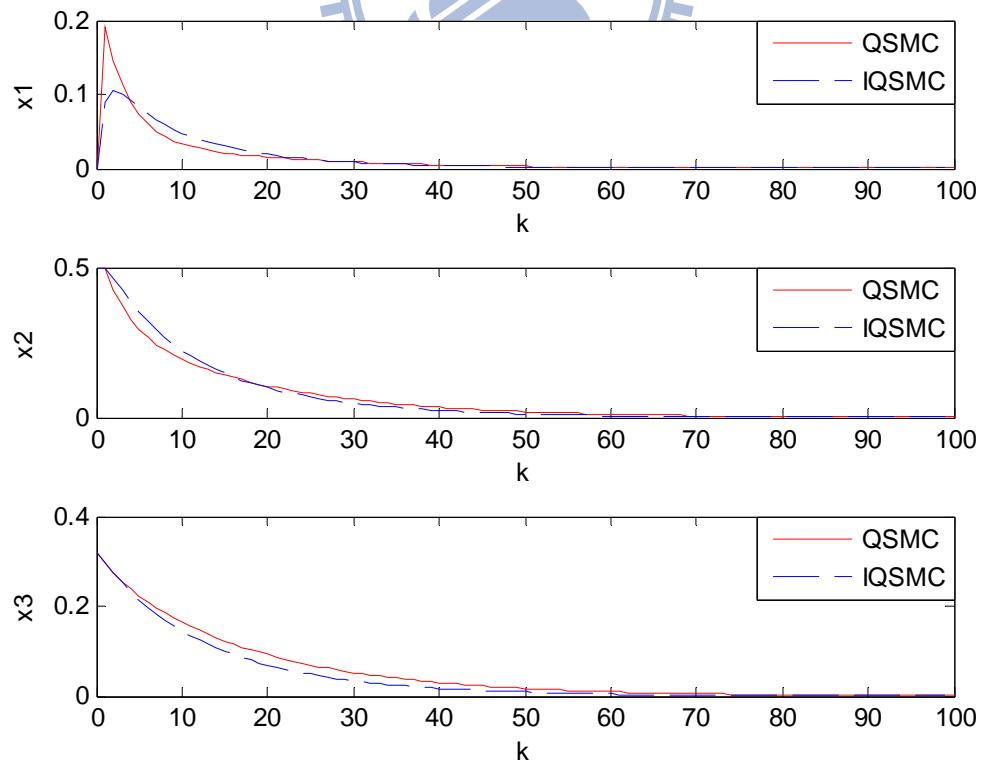


圖4.9 當不考慮雜訊時，拖車系統狀態 $\mathbf{x}[k]$ 之軌跡圖

從第一種情況和第三種情況，我們可以發現不管是何種順滑面設計方式，其成本函數都小於 $V(\mathbf{x}[0])$ ，但 \mathbf{Q}_d 的不同，使得各自的成本函數不一定優於對方，造成這種現象的原因，為設計所需要的控制力 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 時，並非從 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs equality 所得到的解，只有從 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs equality 得到的解，才能使成本函數達到最好，但在第三章裡也曾說明，並非所有的非線性系統都可以容易求得 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs equality 的解，所以只能退而求其次，求取其 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs inequality 的解，所以得到的控制力 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 並非最好的控制力，但是這樣的控制力至少能讓我們估計出成本函數的上界為多少。另外，從第二種情況和第四種情況，我們可以得知在針對 LQR 型的成本函數設計控制力與順滑面時，由於積分型順滑面並不需要做降階的動作(如從 3 維空間降階轉換到 2 維空間設計順滑面)，而一般線性降階型順滑面則是在順滑面上對成本函數去設計相對應的控制力，因此能針對的系統和成本函數會比積分型順滑面的限制會來得多，而從表 4.3 和表 4.5 中，積分型順滑面其成本函數表現比一般線性降階型順滑面為佳。

4.3 收斂區間與可估計上界區間之估計

在此針對拖車系統(4-4)(不考慮干擾雜訊的時候)，類滑模控制器(i.e.，非線性迫近控制器以及修正型非線性迫近控制器)的設計如下式：

$$u[k] = \tan^{-1} \left(- \left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_v \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_v \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\eta \cdot T}{\ell} \right)^{-1} \cdot \mathbf{s}[k] \right) \quad (4-11)$$

其中因為沒有干擾雜訊，所以系統狀態會一直保持在順滑面上，因此 $\mathbf{s}[k] = 0$ 。但不同的 \mathbf{Q}_d 會得到不同的 \mathbf{Q}_v ，因此所得到的 $u[k]$ 也相對不同，考量在上一節中採取的第一種 \mathbf{Q}_d 所得到的 \mathbf{Q}_v 帶入(4-11)式中，可得到下式，

$$u[k] = \tan^{-1} (1.1567 \cdot f11 - 0.70724 \cdot f22 + 0.81881 \cdot f33) \quad (4-12)$$

$$f11 = x_1[k] - \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k])$$

$$\text{其中 } f22 = x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k])$$

$$f33 = x_3[k] + \eta \cdot T \cdot \cos(x_1[k]) \cdot \sin\left(x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{2L} \cdot \sin(x_1[k])\right)$$

將(4-12)式帶入到拖車系統(4-4)中，可以得到下列動態方程式，

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] - \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) + \left(\frac{\eta \cdot T}{\ell} \right) \cdot (1.1567 \cdot f11 - 0.70724 \cdot f22 + 0.81881 \cdot f33) \\ x_2[k+1] &= x_2[k] + \frac{\eta \cdot T}{L} \cdot \sin(x_1[k]) \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$x_3[k+1] = x_3[k] + \eta \cdot T \cdot \cos(x_1[k]) \cdot \sin\left(\frac{x_2[k] + x_2[k+1]}{2}\right)$$

接下來要找出系統軌跡在順滑面上後，整個拖車系統的固定點 \bar{x} ，其中 \bar{x} 為(4-13)式的解。然後我們限制 $x_1[k]$ 、 $x_2[k]$ 以及 $x_3[k]$ 的範圍在-10 到 10 之間，我們可以找到整個拖車系統的固定點如圖 4.10 所示。

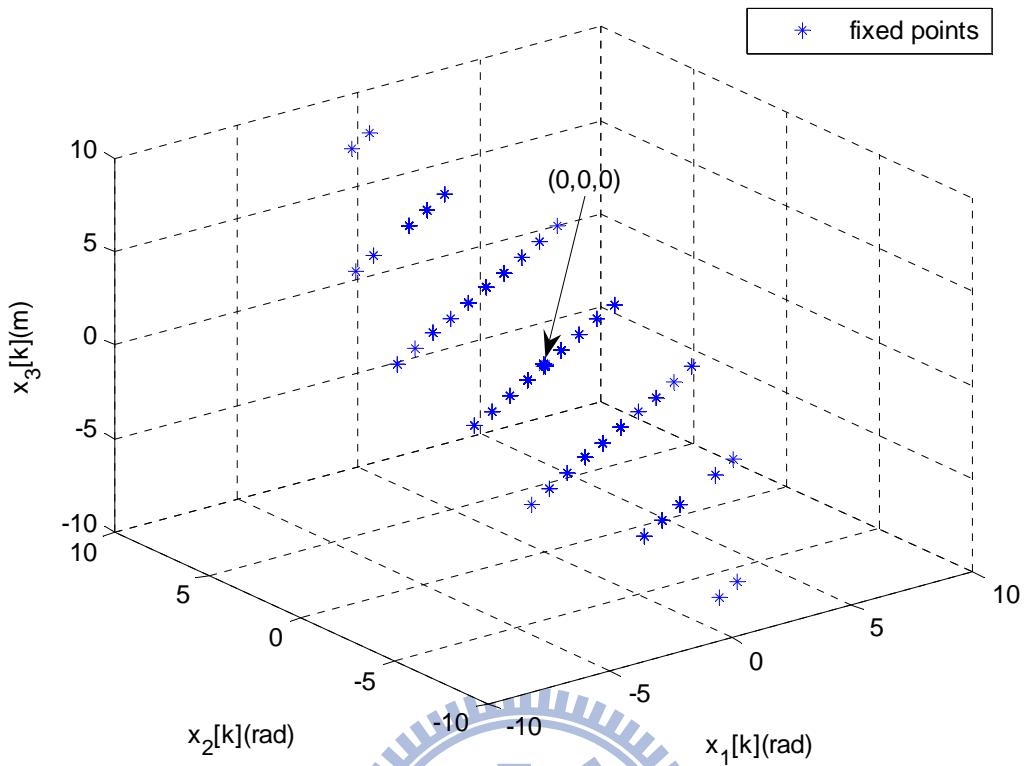


圖4.10 當系統軌跡在順滑面上後，整個拖車系統的固定點

現在了解了拖車系統的固定點，接下來如果要得到拖車系統在順滑變數 $s[k] = 0$ 時之收斂區間估計，因此要先知道拖車系統(4-4)在原點的Lyapunov function，而(4-10)式即是拖車系統在原點的Lyapunov function，

其中 $\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 6.004 & -3.671 & 4.2501 \\ -3.671 & 5.9276 & -6.785 \\ 4.2501 & -6.785 & 36.55 \end{bmatrix}$

此 Lyapunov function 的變化為

$$\begin{aligned} \Delta V[k] &= V[k+1] - V[k] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}[k+1]^T \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{x}[k]) \end{aligned} \quad (4-14)$$

現在找到一個open ball

$$E_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\|_2 < r = 3.9774 \right\} \quad (4-15)$$

使得 $\Delta V[k]$ 在 E_1 內是負定的。因此可以找到此收斂區間的估計為

$$\Omega_c = \left\{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^3 \mid V[k] \leq c \right\} \quad (4-16)$$

其中 $c = 34.276 < \lambda_{min}(\mathbf{Q}_v) \cdot r^2$

現在知道了降階系統(4-13)的收斂區間估計 Ω_c ，如圖4.11所示。

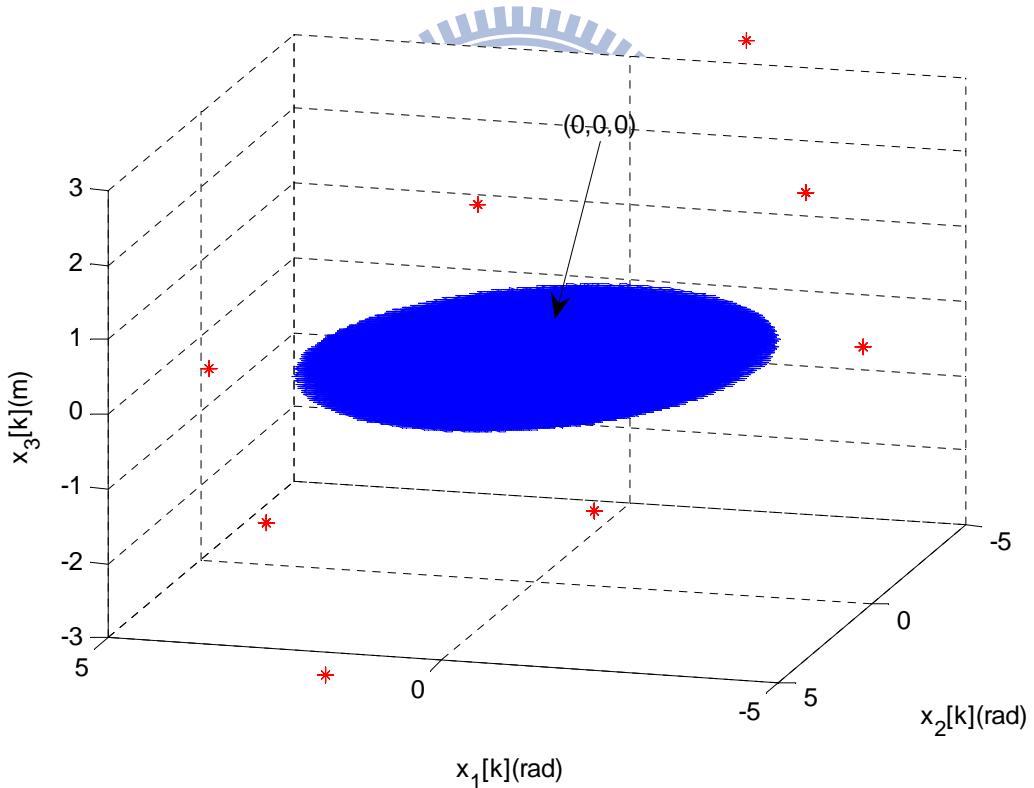


圖4.11 拖車系統在順滑變數 $s[k] = 0$ 時之整個狀態空間的收斂區間估計

同樣的想要找出滿足(3-28)式的範圍大小，也是利用一樣的方式，找到一個open ball

$$E_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^3 \mid \|\mathbf{x}\|_2 < r = 1.3454 \right\} \quad (4-15)$$

使得在 E_2 內 $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \leq 0$ 是成立的。因此可以找到此可估計上界區間的為

$$\Omega_h = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^3 \mid H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \leq 0 \right\} \quad (4-16)$$

現在知道了降階系統(4-13)的可估計上界區間 Ω_h ，如圖4.12所示。

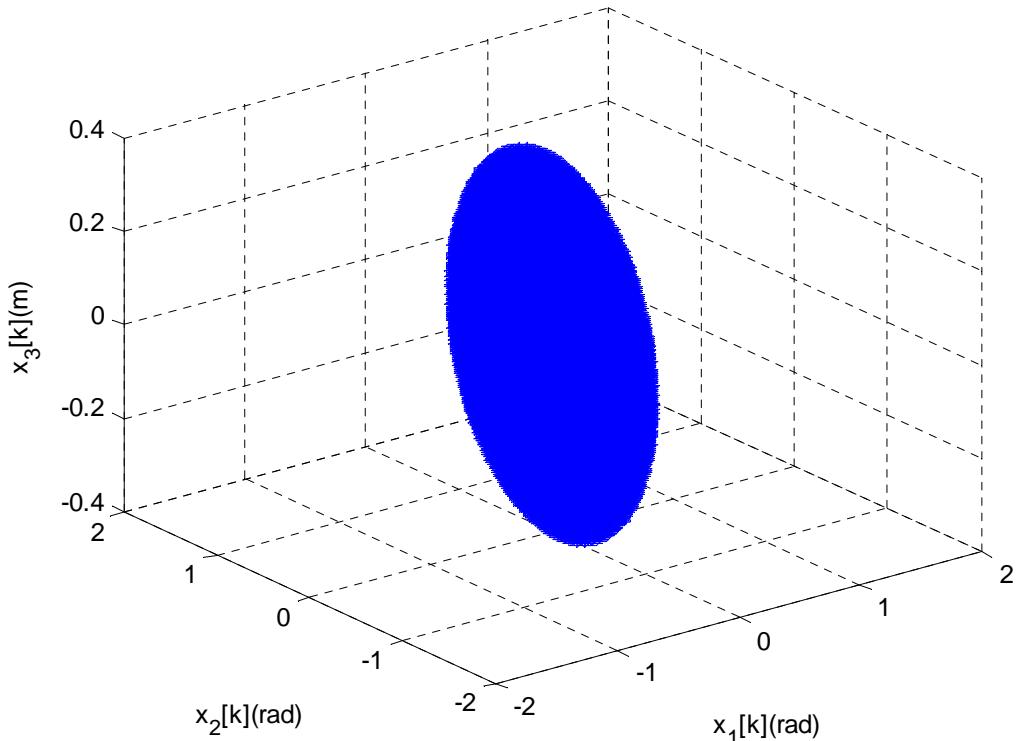


圖4.12 拖車系統在整個狀態空間的可估計成本函數上界區間

由(3-28)式和(4-14)式我們可發現， Ω_h 為 Ω_c 所包覆，因此只要初始點落在 Ω_h 內，除了保證能估計出成本函數的上界，也能保證狀態能收斂到平衡點。在上一小節的模擬結果中，我們也能看到這樣的現象。接下來我們將 Ω_h 投影在 $x_1 - x_2$ 平面、 $x_1 - x_3$ 平面以及 $x_2 - x_3$ 平面上，我們可以得到圖4.13、圖4.14以及圖4.15。

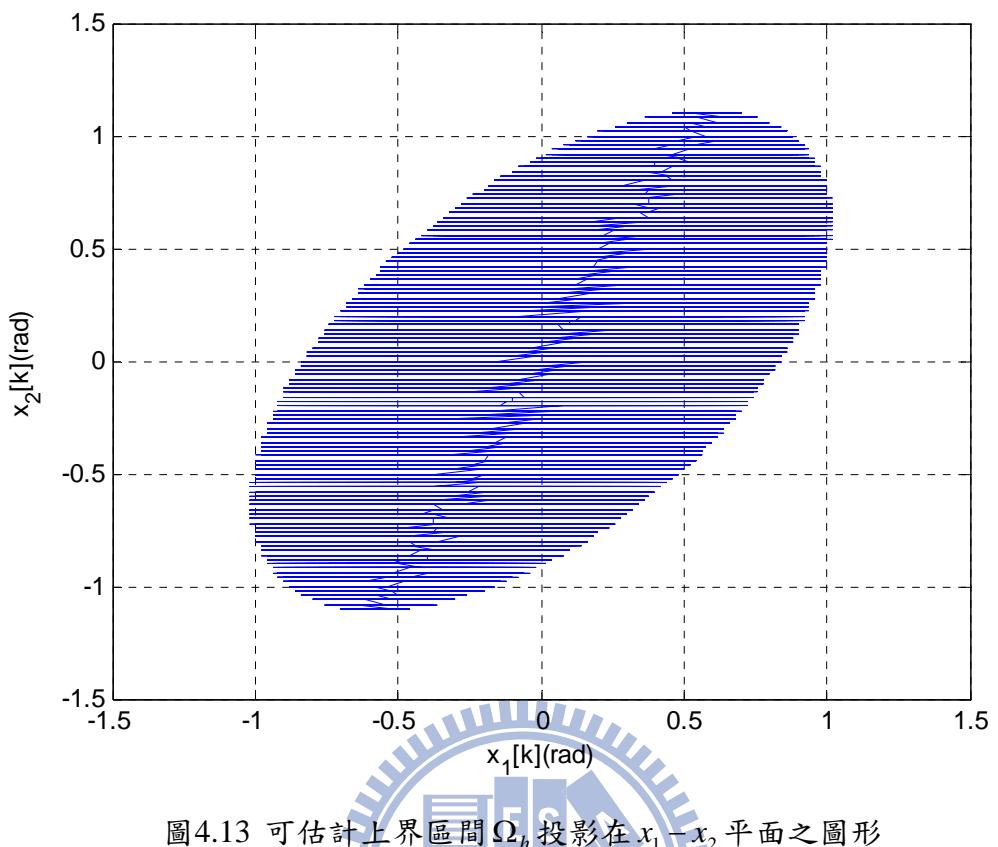


圖4.13 可估計上界區間 Ω_h 投影在 $x_1 - x_2$ 平面之圖形

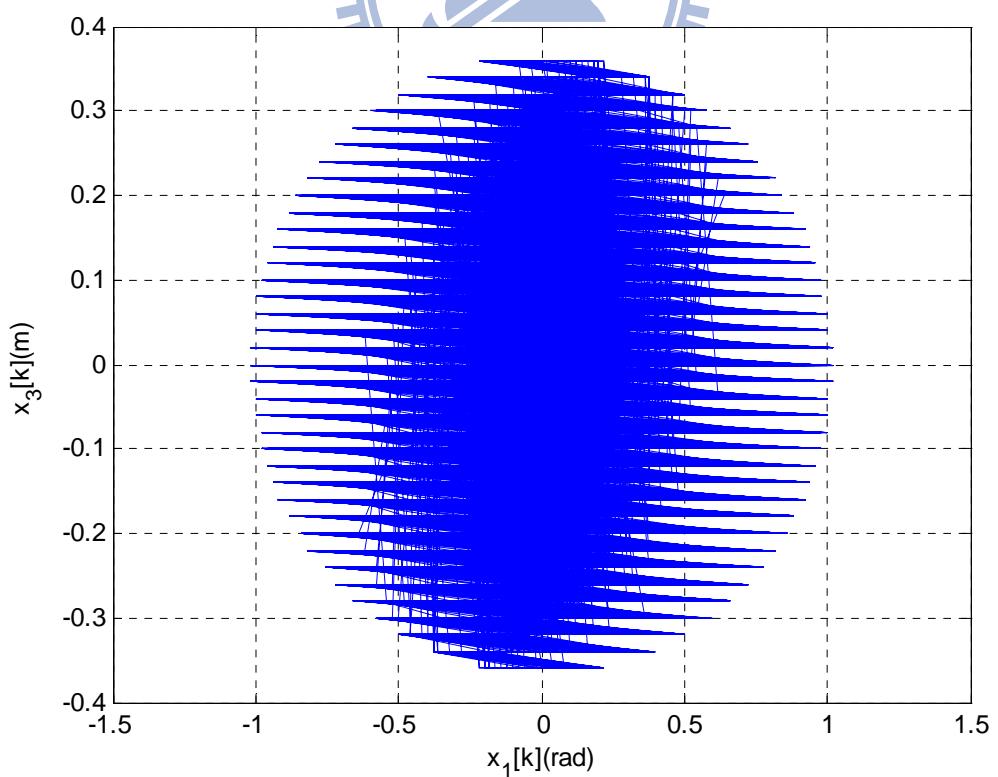


圖4.14 可估計上界區間 Ω_h 投影在 $x_1 - x_3$ 平面之圖形

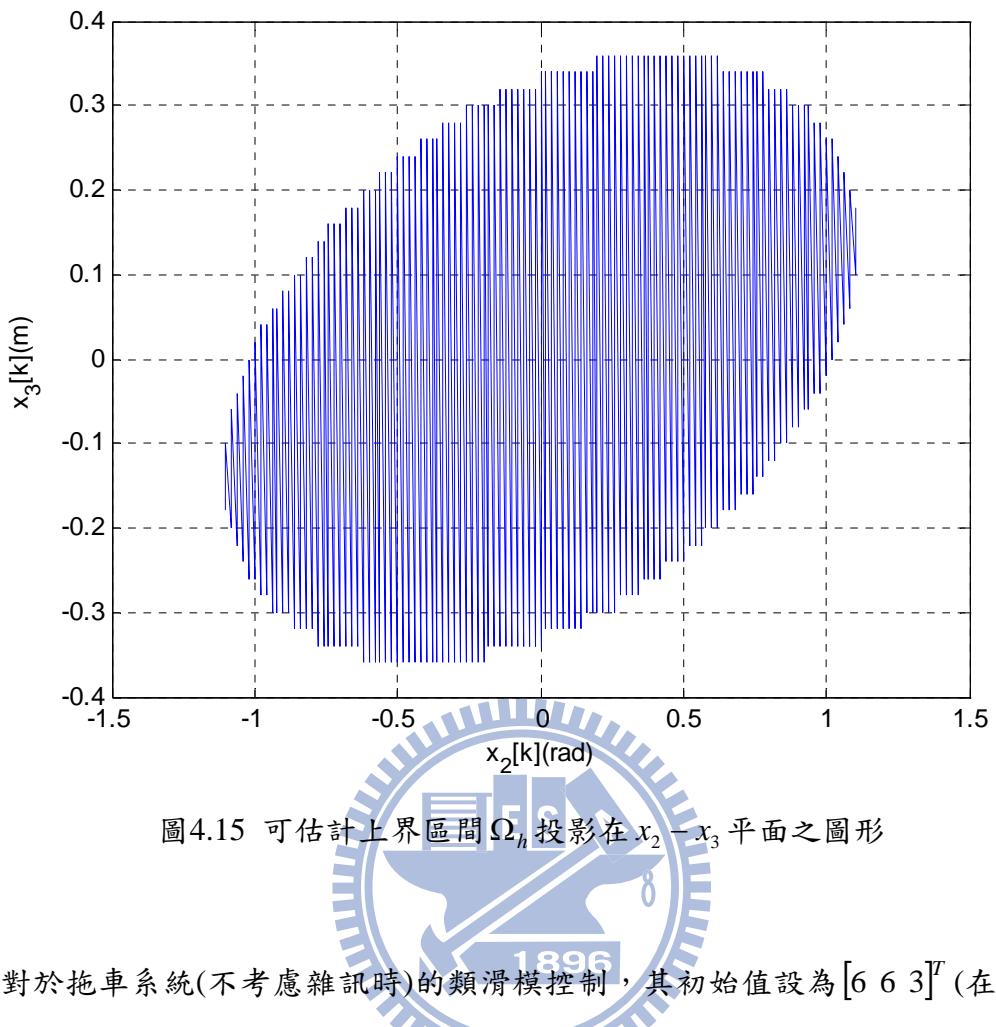


圖4.15 可估計上界區間 Ω_h 投影在 $x_2 - x_3$ 平面之圖形

對於拖車系統(不考慮雜訊時)的類滑模控制，其初始值設為 $[6 \ 6 \ 3]^T$ (在 Ω_c 以外)，我們可以得到模擬結果如圖 4.16 和圖 4.17 所示，其中非線性逼近控制器的模擬圖被標記為 IQSMC，從圖 4.16 和圖 4.17 中，可以得知當初始值在收斂區間的估計 Ω_c 以外時，系統狀態的確不會收斂而是跑到圖 4.11 中的一個固定點。所以只要得知此類滑模控制系統的收斂區間後，當初始值落在收斂區間外時，可先採用另一控制法則，使得系統軌跡先進入到收斂區間內，接著再採用類滑模控制器去控制系統以達到所希望的效能。

目前類滑模控制器的設計以及收斂區間的估計都是針對拖車系統在不考慮干擾雜訊的時候，但類滑模控制器最主要的就是要展現其穩健性，因此在下一小節中，將會針對拖車系統在干擾雜訊的影響之下，去分析比較積分型順滑面和一般線性降階型順滑面，分別使用非線性逼近控制器和修正型非線性逼近控制器的效能。

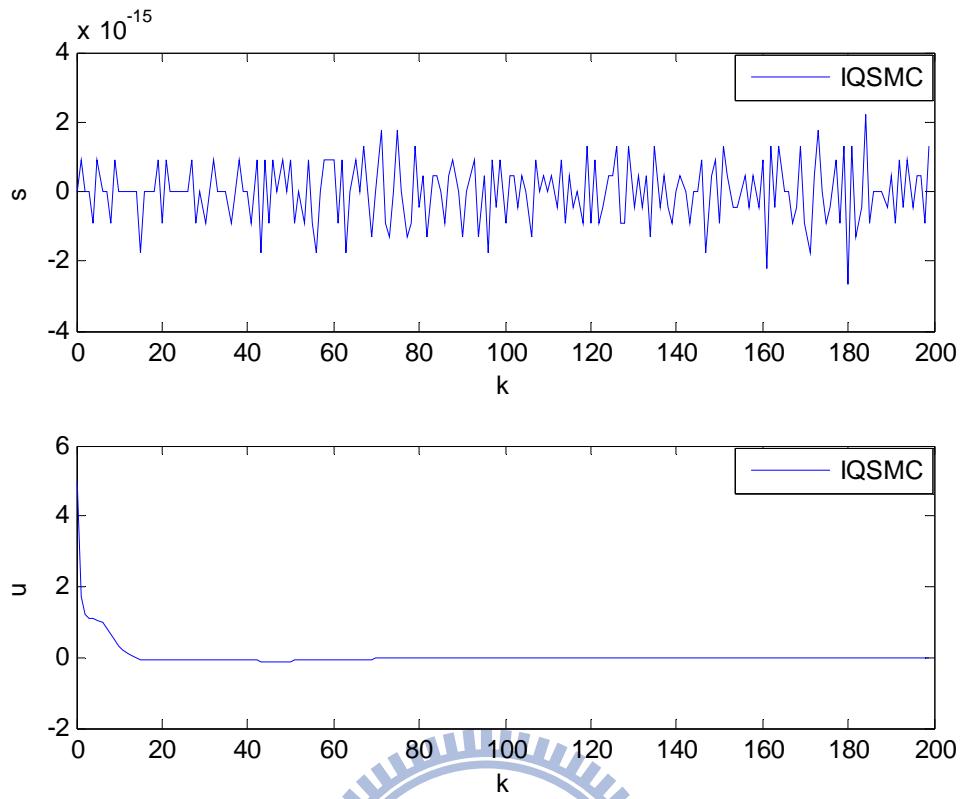


圖4.16 初始值不在 Ω_c 內且無雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

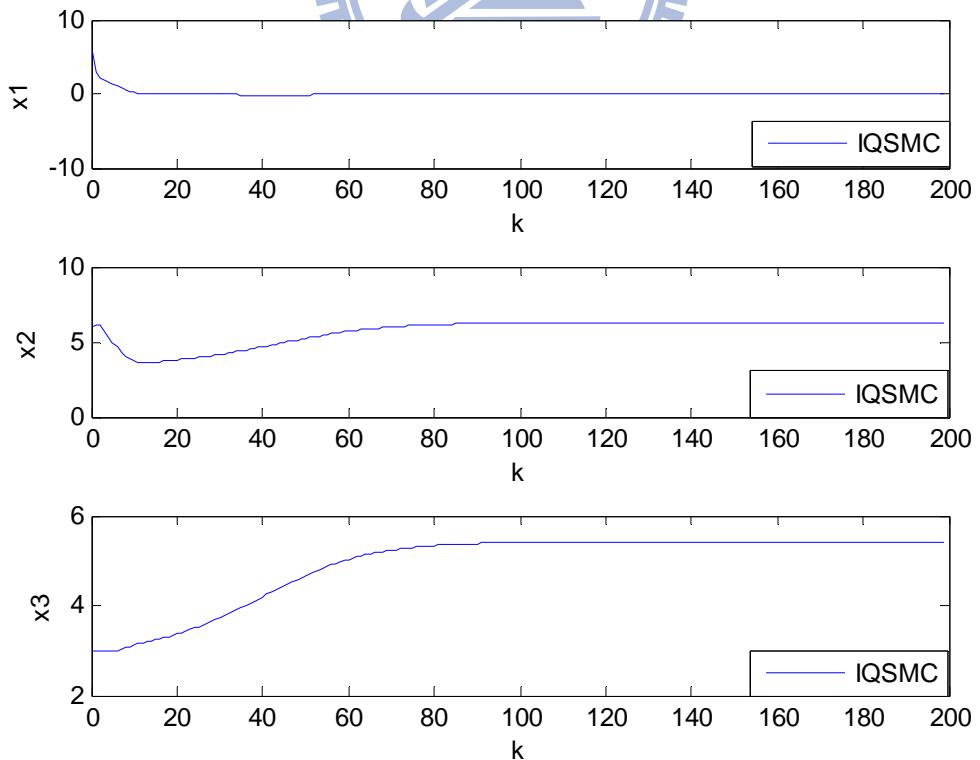


圖4.17 初始值不在 Ω_c 內且無雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖

4.4 當考慮干擾雜訊時，拖車系統使用積分型順滑面和一般線性降階型順滑面設計方式之模擬比較

為了證明使用積分型順滑面設計方式比一般線性降階型順滑面設計方式更具穩健性，因此我們假設 $d[k] = 0.1\sin(0.1k) + 0.04\sin(0.2k) + 0.01\sin(0.5k)$ 。從這假設的雜訊中，我們可以得到下列參數，

$$d_l = -0.12, d_u = 0.12, d_0 = 0, \delta_L = 0.12, \Delta_L = 0.023 \quad (4-17)$$

其中(4-17)式裡的各項參數分別為假設四中、(3-10)式和(3-17)式的定義。

以下將使用積分型順滑面和一般線性降階型順滑面的設計方式，分別配合非線性迫近控制器以及修正型非線性迫近控制器應用於拖車系統(考慮雜訊時)，其模擬結果如圖 4.18 到圖 4.21，其中積分型順滑面的模擬圖標記為 IQSMC，一般線性降階型順滑面的模擬圖標記為 QSMC，將比較其收斂時間($\|x\| \leq 0.12$)、成本函

數($J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{200} \mathbf{x}[k]^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}[k]$)以及誤差總和(total error: $\sum_{k=0}^{200} e[k]^T \cdot e[k]$)，

其中 $e[k] = [x_1[k] \ x_2[k] \ x_3[k]]^T$ ，而各項參數與使用的類滑模控制器設定如下，

第一種情況： $\mathbf{x}[0] = [0 \ 0.5 \ 0.32]^T$ ， $\mathbf{R} = 1$ ， $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

且使用非線性迫近控制器

表 4.6 第一種情況考量雜訊時，收斂至 $\|x\| \leq 0.12$ 的時間、成本函數和誤差總和

	收斂至 $\ x\ \leq 0.12$ 的時間	J	誤差總和
積分型順滑面	12.5 秒	6.0368	2.7427
一般線性降階型 順滑面	28.5 秒	7.9737	4.3843

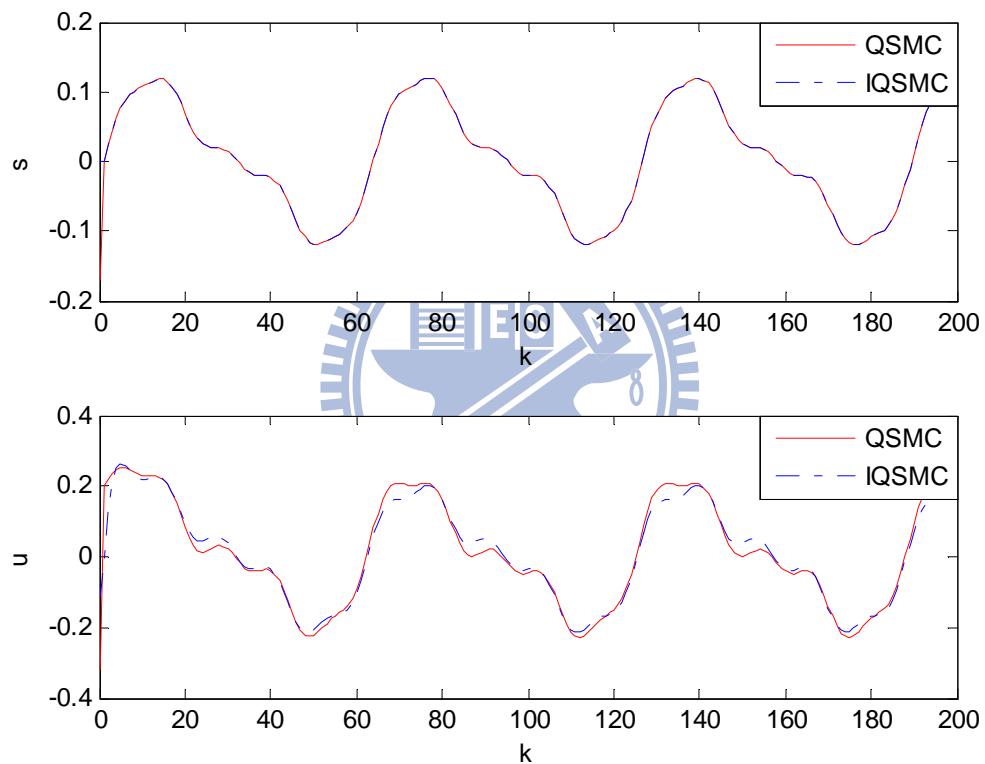


圖4.18 第一種情況考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

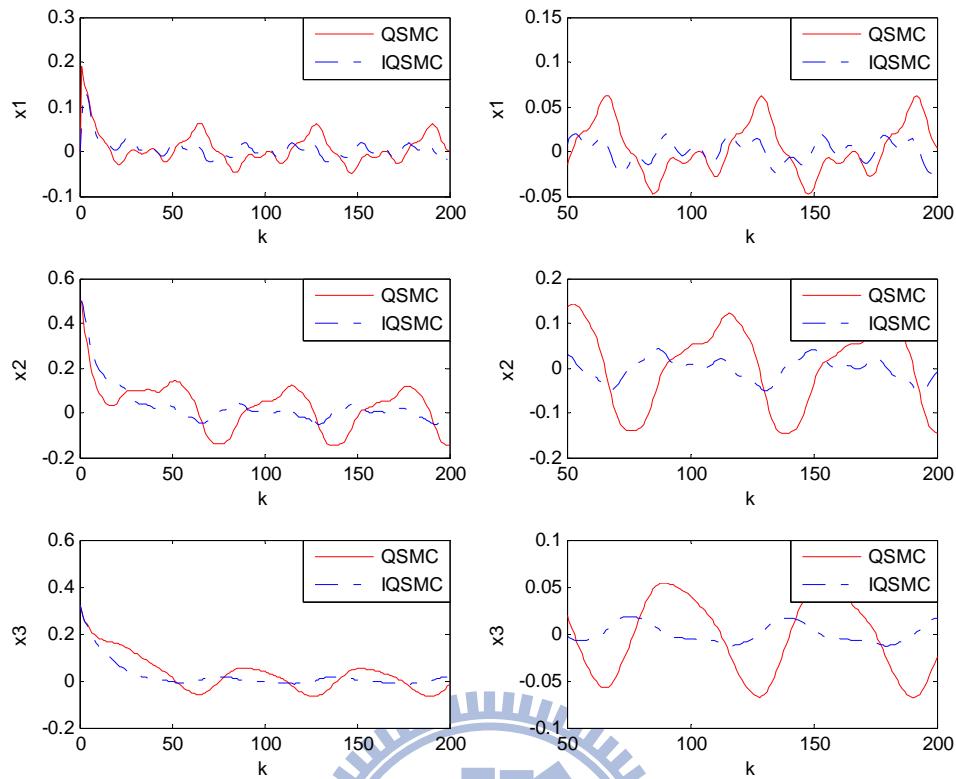


圖4.19 第一種情況考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖

第二種情況： $x[0] = [0 \ 0.5 \ 0.32]^T$ ， $R = 1$ ， $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $Q_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

且使用修正型非線性逼近控制器

表 4.7 第二種情況考量雜訊時，收斂至 $\|x\| \leq 0.12$ 的時間、成本函數和誤差總和

	收斂至 $\ x\ \leq 0.12$ 的時間	J	誤差總和
積分型順滑面	10.5 秒	6.0485	2.627
一般線性降階型 順滑面	12.5 秒	5.9721	2.5247

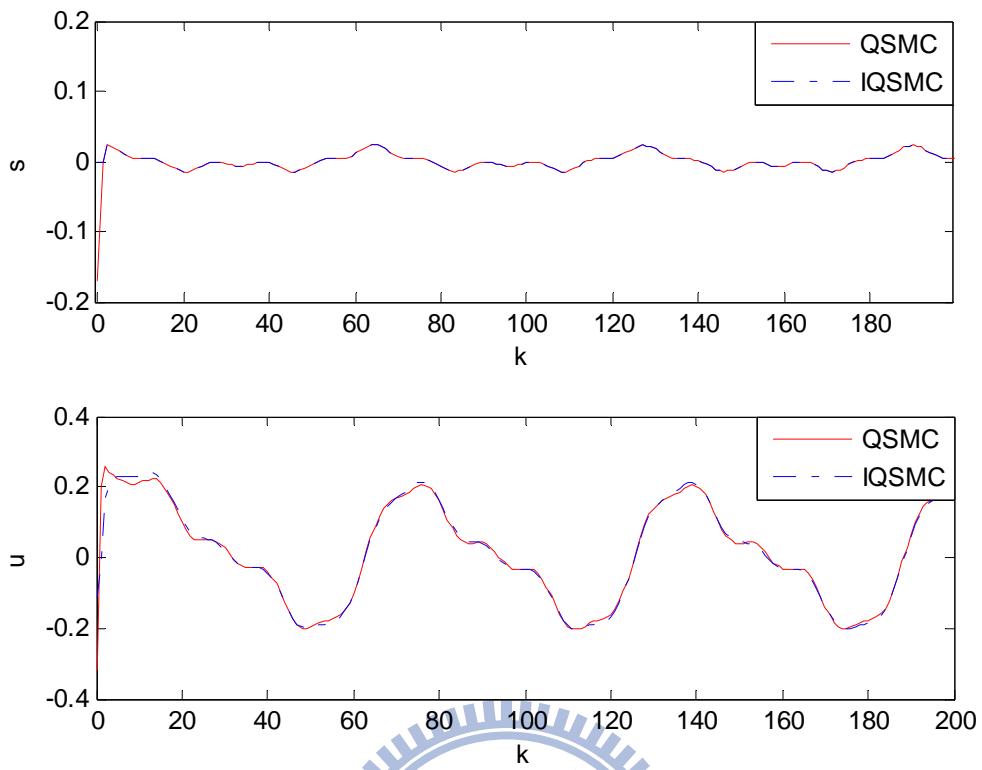


圖4.20 當考慮雜訊時，控制器 $u[k]$ 與順滑變數 $s[k]$ 之軌跡圖

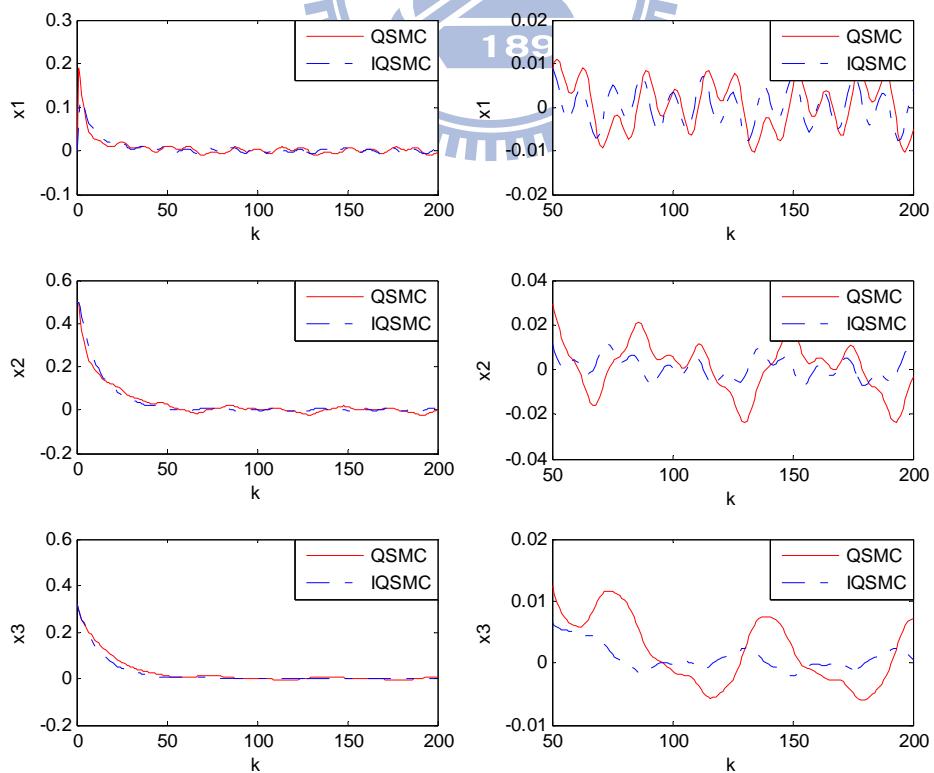
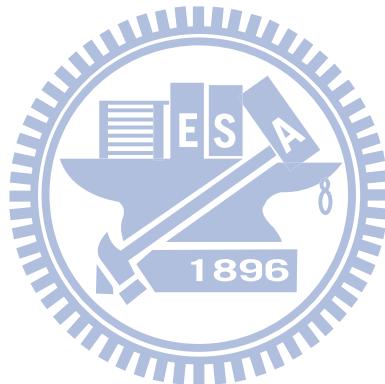


圖4.21 當考慮雜訊時，拖車系統狀態 $x[k]$ 之軌跡圖

從圖4.18到圖4.21中，可發現由於雜訊的影響，所以系統狀態都有呈現出震盪的現象，然而可以很清楚的得知，採用積分型順滑面的設計方式，不管是配合非線性迫近控制器，還是修正型非線性迫近控制器，其狀態震盪的振幅明顯都比一般線性降階型順滑面設計方式小，但順滑變數和使用的控制力振幅大小卻差不多。而從表4.7和表4.6，可得知採用積分型順滑面的設計方式，除了收斂速度較快，但誤差總合卻不一定較低，不過這是由於取樣時間不夠長，因積分型順滑面設計方式將導致狀態振幅較小，在一定時間過後其誤差總合一定會優於一般線性降階型順滑面設計方式。而在第二種情況時，積分型順滑面其成本函數並無優於一般線性降階型順滑面，從圖4.20中，雖然我們可看見這兩種設計方式的控制力曲線很接近，但實際上積分型順滑面的控制力些微較大，因此造成成本函數較大，但如同4.2小節末所討論的，當考量更一般的系統或成本函數時，積分型順滑面對於次佳解的求取則能做更完整的考量。



CHAPTER 5

結論與未來研究方向

5.1 結論

在此論文中，我們將 W.-J. Cao 所提出的積分型順滑面的設計方式從連續非線性系統推廣到了離散非線性系統，並且結合了 S.-D. Xu 等人應用於非線性系統中的類滑模控制器。而針對離散非線性系統所設計的積分型順滑面，在第三章中我們證明其與在連續非線性系統的積分型順滑面一樣，能使得系統更加強健，同時也能根據成本函數對控制力加以設計，不過也由於 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs equality 的解並不容易求出，使得所設計的控制力並不能使成本函數達到最好的狀況，但如果應用於能求解出 Discrete Hamilton-Jacobi-Issacs equality 的系統，此時就能使成本函數達到最好。除此之外，由於 S.-D. Xu 使用一般線性降階型順滑面所針對的系統需要做降階的動作，所採取的方式是在平衡點上對系統做線性化動作，進而找出其順滑面，再利用最佳化理論去設計在順滑面上所採用的控制器，但是在設計上所考量的成本函數中，其狀態變數的維度也隨著減少，因此會降低其應用範圍，而若採取積分型順滑面的設計方式就不具有這樣的問題了。而在第四章中，提到在考量雜訊的情況下，從圖 4.19 和圖 4.21 中可以佐證我們所提及的積分型順滑面的好處，其強健性確實會比一般線性降階型順滑面來得較佳。

5.2 未來研究方向

1. 當積分型類滑模穩定控制系統的初始值在所估計的收斂區間外時，可能會使得系統狀態收斂至其它固定點，所以當初始值落在收斂區間外時，我們可先用另一控制法則，使得系統軌跡先進入到收斂區間內，接著再採用積分型類滑模穩定控制器去控制系統。
2. 在文獻[16]中，W.-J. Cao 等人曾探討當系統存在不滿足匹配條件的雜訊時，如何分析在不同的情況下系統軌跡會如何移動。而 F. Castanos 等人也在文獻[22]中，提及如何設計 \mathbf{D} 能使得不滿足契合條件的雜訊對系統的影響達到最小。這些都是針對連續非線性系統所做的探討，去研究這理論與現象在離散非線性系統中是否成立，也是一門重要的工作。



參考文獻

- 1 陳永平，張浚林，可變結構控制設計，全華科技圖書，2006年7月。
- 2 Vadim I. Utkin, “Variable Structure Systems with Sliding Modes,” IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-22, No.2, pp. 212-222, April 1977.
- 3 Vadim I. Utkin, Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems, Moscow: Nauka, 1974(in Russian); published in English by Mir, Moscow, 1978.
- 4 Y. Dote and R. G. Hoft, Microprocessor based sliding mode controller for dc motor drivers, presented at the Industrial Applications Society Annual Meeting, Cincinnati, OH, 1980.
- 5 C. Milosavljevic, “General conditions for the existence of a quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems,” Automatic Remote Control, Vol. 46, pp. 307-314, 1985.
- 6 Sami Z. Sarpturk, Yorgo Istepanopoulos, and Okyay Kaynak, ”On the Stability of Discrete-Time Sliding Mode Control Systems,” IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-32, No.10, pp. 930-932, October 1987.
- 7 Katsuhisa Furuta, ”Sliding mode control of a discrete system,” System & Control Letters, Vol. 4, pp. 145-152, 1990.
- 8 S. K. Spurgeon, ”Hyperplane design techniques for discrete-time variable structure control systems,” International Journal of Control, Vol. 55, No. 2, pp. 445-456, 1992.

- 9 A. Bartoszewicz, "Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies," IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol. 45, No. 4, pp. 633-637, August 1998.
- 10 Y.-W. Liang, S.-D. Xu, and C.-L. Tsai, "Study of VSC reliable designs with application to spacecraft attitude stabilization," IEEE Trans. Control Systems Technology, Vol. 15, No. 2, pp. 332-338, March 2007.
- 11 V. I. Utkin, "Sliding mode control in discrete-time and difference systems," in Variable Structure and Lyapunov Control, A. S. I. Zinober, ed., London, U.K., Springer-Verlag, pp. 87-107, 1994.
- 12 W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control systems," IEEE Trans. Industrial Electronics, 42, pp. 117-122, 1995.
- 13 Y. Zheng, G. M. Dimirovski, Y. Jing, and M. Yang, "Discrete-time sliding mode control of nonlinear systems," Proc. American Control Conference, New York City, USA, July 11-13, pp. 3825-3830, 2007.
- 14 S. Janardhanan and B. Bandyopadhyay, "Multirate feedback based quasi-sliding mode control of discrete-time systems," IEEE Trans. Automatic Control, 52, pp. 499-503, 2007.
- 15 S.-D. Xu, Y.-W. Liang and S.-W. Chiou, "Discrete-time quasi-sliding-mode control for a class of nonlinear control systems," Electronics Letters, Vol. 44, No. 17, pp. 1008-1010, 2008.
- 16 W.-J. Cao and J.-X. Xu, "Nonlinear Integral-Type Sliding Surface for Both Matched and Unmatched Uncertain Systems," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 49, No. 8, pp. 1355-1360, August 2004.
- 17 Khalid Abidi, Jian-Xin Xu, and Yu Xinghuo, "On the Discrete-Time Integral Sliding-Mode Control," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 52, No. 4, pp. 709-715, April 2007.

- 18 Y.-W. Liang, D.-C. Liaw and T.-C. Lee, " Reliable control of nonlinear systems, " IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 45, No. 4, pp. 706-710, April 2000.
- 19 J. Huang, "Algorithm to solve the discrete HJI equation arising in the L2 gain optimization problem," International Journal of Control, Vol. 72, No. 1, pp. 49-57, Jan 1999.
- 20 D.-C. Liaw and Y.-W. Liang, " Quadratic polynomial solutions of the Hamilton-Jacobi inequality in reliable control design," IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E81-A, No. 9, pp. 1860-1866, 1998.
- 21 K. Tanaka and H. O. Wang, "Fuzzy Controller and Observer Design for Backing Control of a Trailer-Truck," Engng Applic. Artif. Intell. Vol. 10, No. 5, pp.441-452, 1997.
- 22 F. Castanos and L. Fridman, "Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations, " IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 51, No. 5, pp. 853-715, May 2006.

