

國立交通大學

電信工程研究所碩士班

碩士論文

二維度 LOD-FDTD 方法加上 Split-Field PML  
的穩定性分析

**The Stability Analysis of the 2-D LOD-FDTD Method with  
Split-Field PML**

研究生：劉家安

(Chia-An Liu)

指導教授：陳富強 博士

(Dr. Fu-Chiang Chen)

中華民國九十九年一月

二維度 LOD-FDTD 方法加上 Split-Field PML  
的穩定性分析

**The Stability Analysis of the 2-D LOD-FDTD Method with  
Split-Field PML**

研究生：劉家安

Student : Chia-An Liu

指導教授：陳富強 博士

Advisor : Dr. Fu-Chiarng Chen

國立交通大學  
電信工程研究所碩士班  
碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Communication Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Communication Engineering  
January 2010  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 九十九 年 一 月

# 二維度 LOD-FDTD 方法加上 Split-Field PML 的穩定性分析

學生：劉家安

指導教授：陳富強 博士

國立交通大學電信工程研究所碩士班

## 摘要

本論文先對有限時域差分法(FDTD)和局部單維有限時域差分法(LOD-FDTD)做基本的介紹與數學推導，而後針對 LOD-FDTD 來進行實驗與分析。第三章介紹對一維度 LOD-FDTD 的研究，其中推導出 LOD-FDTD 兩個時間程序的的差分方程式；而後進行實驗，模擬高斯波在一維空間的行進。最後運用 Sullivan 所提出的吸收邊界(Absorbing Boundary Conditions)來做為模擬的邊界條件。章末透過數學推導，以及觀察長時間後的行為，做為穩定性的分析。

第四章是本論文的核心所在，對 LOD-FDTD 方法在二維度的情形進行實驗與分析。在二維度的情況中，本論文運用 Berenger 所提出的分場完美吸收層(Split-Field Perfectly Matched Layer)做為邊界條件的設定。在二維度情況的分析中，本論文把各分量場轉換為矩陣型式，透過計算各層 PML 放大矩陣的特徵值，來判斷二維度 LOD-FDTD 中的穩定性，並觀察長時間的行為做為驗證。最後在第五章中，本論文亦提出了新的拆解三維馬克士威的方法，並把時間加以分割成三個程序。此種拆解是加上 Split-Field PML 的必要過程，預期將會對 LOD-FDTD 方法的實現有所貢獻。

# **The Stability Analysis of the 2-D LOD-FDTD Method with Split-Field PML**

Student: Chia-An Liu

Advisors: Dr. Fu-Chiarnng Chen

Institute of Communication Engineering  
National Chiao Tung University

## **Abstract**

In the first part of this thesis, we give a friendly introduction and simple mathematical derivation to the FDTD method and the LOD-FDTD method. After, we focus on the research of the LOD-FDTD method and begin with the 1D case. In the chapter 3, we deduct the difference equations of the two procedures, and then simulate a Gaussian pulse exciting and proceeding in the 1-D space. The Sullivan ABC is also applied here, as the boundary conditions of the simulation space. Last but not least, using mathematical deduction and observing the long-term behaviors to do the stability analysis.

The implementation of the 2-D LOD-FDTD method is presented in the chapter 4. It is not only the second part but also the highlight of this thesis. Since the deduction of the difference equations and the stability analysis in the 2-D case are both much more complicated than 1-D, we specially bring in the Berenger Split-Field PML as the boundary conditions of the simulation space. Finally, we transfer the fields into matrix forms and compute the eigenvalues of each PML, to know the stability of the 2-D LOD-FDTD method. Long-term behaviors observation is also utilized here, as a brief verification of the claim. Last, there also propose a new formulation of 3-D LOD-FDTD method in the chapter 5 by departing it into three updating procedures. It is a necessary process of adding split-field PML, and will contribute to the implementation of 3-D LOD-FDTD.

## 誌 謝

首先，我要感謝我的指導教授陳富強老師。老師面對事情的嚴謹態度，不論在學術上的研究，或是待人處事的方面，都使我受益良多，讓我對整个人生有全新的體悟。也感謝老師給了一個自由的研究空間，在這空間中我得以恣意揮灑，讓本論文的完成更加地順利。相信這段充實的日子，對我往後的生活或工作一定都會有莫大的幫助。

接著我想感謝實驗室的夥伴們。每當我生活或研究上遇到問題，同屆的 juby 和 salmax 往往能給我中肯的建議；阿南和碰哥學長，在你們的帶領下，我很快地適應了研究所的生活。還有，已畢業的王董、小潘、小莊、帥哥與小 k 學長，新的實驗室成員：政男學長、昌儒、佑俞、哲宇及佳聲學弟，和你們一起吃飯一起聊天的回憶，從來都是滿滿地歡笑，填滿了我研究所生涯中的點點滴滴。

最後感謝父母親長久以來的細心栽培，及哥哥的關懷打氣，在日常生活上給我無微不至的照料，在求學過程中給我盡其所能的支持，讓我毫無後顧之憂。也感謝我的女朋友佳玲，總能體諒我忙碌的研究生活，同時給我關心與鼓勵。感謝所有在期間幫助過我的人，僅以此論文的呈獻，表達我最誠摯的感激。

家安 謹誌

2010 年 1 月 於新竹交大

# 目 錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
目 錄 .....	iii
圖目錄 .....	v
表目錄 .....	vii
第一章 導論 .....	1
1.1 研究動機 .....	1
1.2 論文架構 .....	2
第二章 FDTD 及 LOD-FDTD 的基本介紹及理論推導 .....	3
2.1 簡介 .....	3
2.2 有限時域差分法(Finite Difference Time Domain) .....	3
2.2.1 馬克士威爾方程式的離散化 .....	3
2.2.2 穩定條件 .....	5
2.2.3 吸收邊界-完美吸收層(Perfectly Matched Layer) .....	6
2.2.4 波源分析 .....	11
2.3 局部單維有限時域差分法(Locally One-Dimensional FDTD) .....	13
2.3.1 馬克士威爾方程式的離散化 .....	13
2.3.2 放大係數與穩定性的分析 .....	18
第三章 一維度 LOD-FDTD 的實驗及穩定度分析 .....	21
3.1 簡介 .....	21
3.2 一維度 LOD-FDTD 的數學推導 .....	21

3.2.1	一維度 LOD-FDTD 第一時間程序的數學推導.....	22
3.2.2	一維度 LOD-FDTD 第二時間程序的數學推導.....	25
3.3	吸收邊界– Sullivan ABC (Absorbing Boundary Conditions) .....	25
3.4	模擬結果.....	28
3.4.1	高斯波行進至邊界的模擬.....	29
3.4.2	反射係數(Reflection Coefficient) .....	31
3.5	穩定性分析.....	33
3.5.1	放大係數.....	33
3.5.2	模擬長時間後的行為.....	36
3.6	心得與討論.....	37
第四章	二維度 LOD-FDTD 的實驗及穩定度分析.....	38
4.1	簡介.....	38
4.2	二維度 LOD-FDTD 的數學推導.....	38
4.2.1	二維度 LOD-FDTD 第一時間程序的數學推導.....	39
4.2.2	二維度 LOD-FDTD 第二時間程序的數學推導.....	42
4.3	吸收邊界- Berenger Split-Field PML (Perfectly Matched Layer) .....	45
4.4	模擬結果.....	47
4.4.1	高斯波行進至邊界的模擬.....	49
4.4.2	反射係數(Reflection Coefficient).....	52
4.5	穩定性分析.....	54
4.5.1	放大矩陣.....	54
4.5.2	討論放大矩陣的特徵值.....	57
4.6	心得與討論.....	62
第五章	三維度 LOD-FDTD 方法的實現.....	63
5.1	簡介.....	63
5.2	三維度 LOD-FDTD 的數學推導.....	63

5.2.1 三維度 LOD-FDTD 第一時間程序的數學推導.....	64
5.2.2 三維度 LOD-FDTD 第二時間程序的數學推導.....	70
5.2.3 三維度 LOD-FDTD 第三時間程序的數學推導.....	76
5.3 模擬結果.....	82
5.4 計算複雜度.....	82
5.5 心得與討論.....	84
第六章 結論.....	85
參考文獻.....	87





## 圖目錄

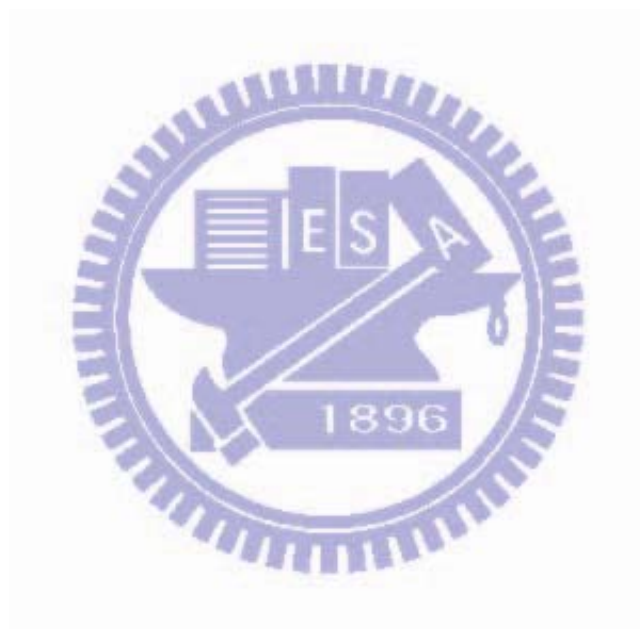
圖 2-1 Yee 網格與 TM、TE 場拆解.....	6
圖 2-2 平面波於真空-介質界面傳播示意圖.....	7
圖 2-3 二維空間中 PML 參數配置圖.....	11
圖 2-4 PML 吸收層中的參數配置.....	11
圖 3-1 電導函數分別對兩個場的分佈情形.....	27
圖 3-2 一維度 LOD-FDTD 模擬所使用的激發波源.....	28
圖 3-3 一維度情況下，LOD-FDTD 方法的模擬(觀察 $H_z$ 場).....	29
圖 3-4 一維度的模擬下，FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的比較(觀察 $H_z$ 場).....	30
圖 3-5 一維度 LOD-FDTD 所取的觀察點.....	31
圖 3-6 一維度 LOD-FDTD 的反射係數.....	32
圖 3-7 $H_z$ 場繼續往兩邊傳遞至吸收邊界.....	36
圖 3-8 觀察 $H_z$ 場在長時間後的行為.....	37
圖 4-1 二維度空間中 PML 的參數配置圖.....	46
圖 4-2 吸收邊界 PML 中的參數配置.....	46
圖 4-3 電導函數在 PML 層中的分佈情形.....	47
圖 4-4 二維度 LOD-FDTD 模擬所使用的激發波源.....	48
圖 4-5 二維度情況下，LOD-FDTD 方法的模擬(觀察 $H_z$ 場).....	49
圖 4-6 從俯視角度觀察二維度情況下 LOD-FDTD 方法的模擬(觀察 $H_z$ 場).....	50
圖 4-7 固定 X 座標為 60，觀察二維度情況下 LOD-FDTD 模擬的剖面(觀察 $H_z$ 場).....	50
圖 4-8 二維度的模擬下，FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的比較(觀察 $H_z$ 場剖面).....	51
圖 4-9 反射係數的觀察點(20,60).....	52
圖 4-10 二維度 LOD-FDTD 的反射係數.....	53
圖 4-11 垂直入射所取的觀察點(60,n), n = 1,2,...,10.....	57

圖 4-12 角落所取的觀察點(m,n), $m,n = 7,8,9,10$ .....	59
圖 4-13 $H_z$ 場在 2'000 個時間步之後的行為.....	60
圖 4-14 $H_z$ 場在 10'000 個時間步之後的行為.....	61
圖 4-15 $H_z$ 場在 100'000 個時間步之後的行為.....	61
圖 5-1 三維度空間中加上 dipole，固定 X 座標為 30 的剖面(觀察 $E_z$ 場) .....	83



## 表目錄

表 3-1 FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的差異最大值比較(觀察 time = 125 時) .....	30
表 4-1 FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的差異最大值(觀察 time = 125 時) .....	51
表 4-2 第一層到第十層 PML 的放大矩陣特徵值.....	58
表 4-3 角落 PML 的放大矩陣特徵值.....	60
表 5-1 三維度 LOD-FDTD 配合分場方法與其它三維度 FDTD 方法的計算複雜度.....	84



# 第一章 導論

## (Introduction)

### 1.1 研究動機

有限時域差分法 Finite-Difference Time-Domain (FDTD)，自從在 1966 年由 Kane S. Yee 所提出後[1]，就一直是模擬電磁波行為的一個非常重要的數值方法。舉凡微波電路、電磁干擾(EMI)、天線、遙控感測模擬(Remote Sensing)、電磁波能量吸收模擬(SAR) 都是其應用的範疇。

FDTD 屬於時域上的分析，可以直接地利用把馬克士威爾方程式(Maxwell's equation) 離散化，寫成差分方程式後即可實現，但相對地也就擁有許多的數學變化。像是 1999 年所提出的交換方向定置法 ADI-FDTD(Alternative-Direction Implicit FDTD)[2]，經過改良之後的 Envelope ADI-FDTD[3]，或是 2002 年所出現的 Crank-Nicolson-FDTD[4]，都是為了克服傳統 FDTD 所擁有的數學限制，才發展而成。

其中，2005 年才開始發展的局部單維有限時域差分法 LOD-FDTD (Locally-One-Dimensional FDTD)[6]也是其中一員。經由初步的數學推導，得知它不但可以克服傳統 FDTD 方法數學上的限制，同時也很可能比既有的 ADI-FDTD 方法擁有更穩定的計算。由於它是近年才被提出來的數值方法，所以現今仍存在許多可能性，許多特性還未被嚴謹地證實，還正在實驗的階段。

若能親身參與這個演進的歷史，當然就是吸引我開始做這個研究的主要動力。本研究中，將會提出 LOD-FDTD 方法在一維度以及二維度環境中的模擬，以及模擬後所得到的結論。重點會擺在邊界條件(Boundary Conditions)的設定方式，以及對於 LOD-FDTD 穩定性的分析(Stability Analysis)，因為這都是對一個數值方法而言很重要的議題。

## 1.2 論文架構

本論文大略可分為兩部分，第一部分為 LOD-FDTD 方法在一維度情形下的研究，第二部分為 LOD-FDTD 方法在二維度情形下的研究。在進入主要研究之前，我會先附一些基本理論的介紹，讓讀者先有一個完整的背景知識。整個主要實驗的流程，我會先推導出數學原理，也就是離散化馬克士威爾方程式後，所得的差分方程式，這是把理論透過程式碼來實現的依據；而透過程式的撰寫，我們可以取得模擬的結果，緊接著再進行反射係數(Reflection Coefficient)的量測，以及矩陣型式的轉換，來達到我們想要分析 LOD-FDTD 方法的穩定性的目標。

各個內容的細節，以下分為五個章節來做說明：

- 第一章 導論：粗略敘述本論文之研究動機，針對本論文內容作摘要整理。
- 第二章 FDTD 及 LOD-FDTD 的基本介紹及理論推導：簡單介紹 FDTD 和 LOD-FDTD 的一些原理和初步的數學推導。
- 第三章 一維度 LOD-FDTD 的實驗及穩定度分析：本章將會詳細介紹我們是如何地離散化方程式，做數學上的推導，包括模擬結果等等都會有嚴密的討論。
- 第四章 二維度 LOD-FDTD 的實驗及穩定度分析：所做的流程大概跟第三章相仿，只是但由於二維度的數學和分析都會複雜許多，所以本章也會介紹一些前章所沒有出現的分析技巧。
- 第五章 結論：將本論文所做的，利用 LOD-FDTD 方法在一維度和二維度上所做的實驗結果及分析，在此做個總結。章末會附上一些大略的未來發展方向，希望本研究能達到拋磚引玉之效，吸引先進們共同來努力完成。

## 第二章 FDTD 及 LOD-FDTD 的基本介紹及理論推導 (Brief Introduction and Mathematical Deduction to the FDTD and LOD-FDTD Method)

### 2.1 簡介

在本章的 2.2 中所提到的有限時域差分法(FDTD)，是可以拿來在時域上模擬電磁問題的數值方法。而後在 2.3 中所提到的局部單維有限時域差分法(LOD-FDTD)，則是本篇論文所要研究的數值方法，其內容也會在第三章及第四章中完整地呈現。

### 2.2 有限時域差分法(Finite Difference Time Domain)

有限時域差分法(FDTD)是由 Kane S. Yee 在 1966 年所提出的演算法[10]，在電磁學方面的研究上，FDTD 的使用相當廣泛，舉凡微波電路、電磁干擾(EMI)、天線、搖控感測模擬(Remote Sensing)、電磁波能量吸收模擬(SAR)都可以使用它來模擬。在電磁學上的 FDTD 應用，主要是架構在將馬克士威爾方程式(Maxwell's equation) 寫成差分方程式，進而將所有不同方向的電場、磁場離散化，因此我們可以算出模擬空間內任一位置的電場值、磁場值。由於 FDTD 屬於時域上的分析，若要得到頻域上的響應則必須經過富立業轉換(Fourier Transform) 的後處理。

#### 2.2.1 馬克士威爾方程式的離散化

由 Yee 所提出來的 FDTD 是針對有限的空間區域，將它劃分成許多的小區域，這些小區域稱它做單胞(cell)，如圖 2-1 所示，每個單胞上都分佈著各個方向的電場、磁場，這些電場、磁場都來自將馬克士威爾方程式的微分形式離散化後得到的分佈，以下便由兩個基本的旋度方程式開始分析：



$$\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla \times \bar{H} \quad (2.2)$$

首先，將(2.1)式、(2.2)式兩個向量方程式化為(2.3)式~(2.8)式的六個純量方程式：

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

其中  $\varepsilon$  代表介電係數(permittivity)，而  $\mu$  代表導磁係數(permeability)。

而 Yee 所提出的單胞便是將空間全部離散化，空間的離散化便是將空間根據  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  來做切割，因此被切割到的格子點座標  $(x, y, z) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ ，則  $(i, j, k)$  便是此位置在 Yee 網格中的空間座標，時間的離散化則是將時間根據所選擇的  $\Delta t$  來切割，則  $t_n = n\Delta t$ ，因此以  $z$  方向電場  $E_z$  為例，當我們標示為  $E_{z,i,j,k}^n$  時，所代表的是在位置  $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$  時間  $n\Delta t$  時的  $z$  方向電場。有了上述的離散法則，接著便是將上述六個純量方程式以中央差分的方式離散化，以下說明如何將空間時間離散化的通式， $F$  表示的是任意的場量函數：

- i. x 方向微分的離散化，
$$\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial x} = \frac{F_{i+1/2,j,k}^n - F_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x}$$
- ii. y 方向微分的離散化，
$$\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial y} = \frac{F_{i,j+1/2,k}^n - F_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y}$$
- iii. z 方向微分的離散化，
$$\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial z} = \frac{F_{i,j,k+1/2}^n - F_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z}$$
- iv. 時間  $t$  微分的離散化，
$$\frac{\partial F_{i,j,k}^n}{\partial t} = \frac{F_{i,j,k}^{n+1/2} - F_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

經由以上的離散化步驟，我們發現無論在空間或時間的離散中，都會出現有半個空間間隔與半個時間間隔的情況，所以可以知道當我們將它應用到(2.3)式~(2.8)式中，我們會得到電場與磁場在空間配置上有半個空間間隔的差距，而在時間的運算順序上半個時間間隔的差距，以下是(2.3)式~(2.8)式經過完整離散化後的表示：

$$Hx_{i,j,k}^{n+1/2} = Hx_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} (Ey_{i,j,k}^n - Ey_{i,j,k-1}^n) - \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} (Ez_{i,j,k}^n - Ez_{i,j-1,k}^n) \quad (2.9)$$

$$Hy_{i,j,k}^{n+1/2} = Hy_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} (Ez_{i,j,k}^n - Ez_{i-1,j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} (Ex_{i,j,k}^n - Ex_{i,j-1,k}^n) \quad (2.10)$$

$$Hz_{i,j,k}^{n+1/2} = Hz_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} (Ex_{i,j,k}^n - Ex_{i,j-1,k}^n) - \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} (Ey_{i,j,k}^n - Ey_{i-1,j,k}^n) \quad (2.11)$$

$$Ex_{i,j,k}^{n+1} = Ex_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} (Hz_{i,j,k+1}^{n+1/2} - Hz_{i,j,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} (Hy_{i,j,k+1}^{n+1/2} - Hy_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (2.12)$$

$$Ey_{i,j,k}^{n+1} = Ey_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} (Hx_{i,j,k+1}^{n+1/2} - Hx_{i,j,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} (Hz_{i+1,j,k}^{n+1/2} - Hz_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (2.13)$$

$$Ez_{i,j,k}^{n+1} = Ez_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} (Hy_{i+1,j,k}^{n+1/2} - Hy_{i,j,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} (Hx_{i,j+1,k}^{n+1/2} - Hx_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (2.14)$$

其中，我們在切割空間網格時並沒有半個網格的切割，因此空間上半個間隔的位置都已被其鄰近的整數的網格座標  $(i, j, k)$  所重新表示，而時間上的半個間隔雖然仍保留其表示方式，但它實際代表的意思是電場與磁場的疊代運算是依序來進行的。

以上是完整的全波模擬，包含六個場值，而隨著應用在 2D 的模擬時，我們可以將完整的 Yee 模型化簡為 TE 和 TM 兩種 2D 的模型[12]，如圖 2.1 下方所示，TE 包含的是  $Ex$ 、 $Ey$ 、 $H_z$  三個場量，TM 包含的是  $H_x$ 、 $H_y$ 、 $E_z$  三個場量，這兩個 2D 模型由於其相對應原始 Yee 網格的切面是不同的，所以其 2D 的空間配置大小是有稍微不同的，TM 與 TE 的模擬都將會在本篇論文中使用到。

## 2.2.2 穩定條件

在 FDTD 的模擬當中，我們必須決定空間分割  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  以及時間分割  $\Delta t$ ，不當的設定會造成數值的發散，因此為了確保模擬的數值收斂以及準確性，有以下的準則可做參考，首先必需決定最小波長，通常我們會以激發波源的截止頻率相對應的十分之



一波長或更小來當作空間分割  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ ，這樣的分割可以確保高頻的訊號不會因為一個波長中網格切割數目不夠而造成數值不準確。一旦空間分割決定，時間分割  $\Delta t$  就必須滿足 Courant criterion，即(2.15)式[11]，否則就會造成數值發散：

$$\Delta t \leq \frac{1}{v_{\max}} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1/2} \quad (2.15)$$

而  $v_{\max}$  代表的是模擬空間中可能發生的最快波速，一般都以光速  $c_0$  來代表。

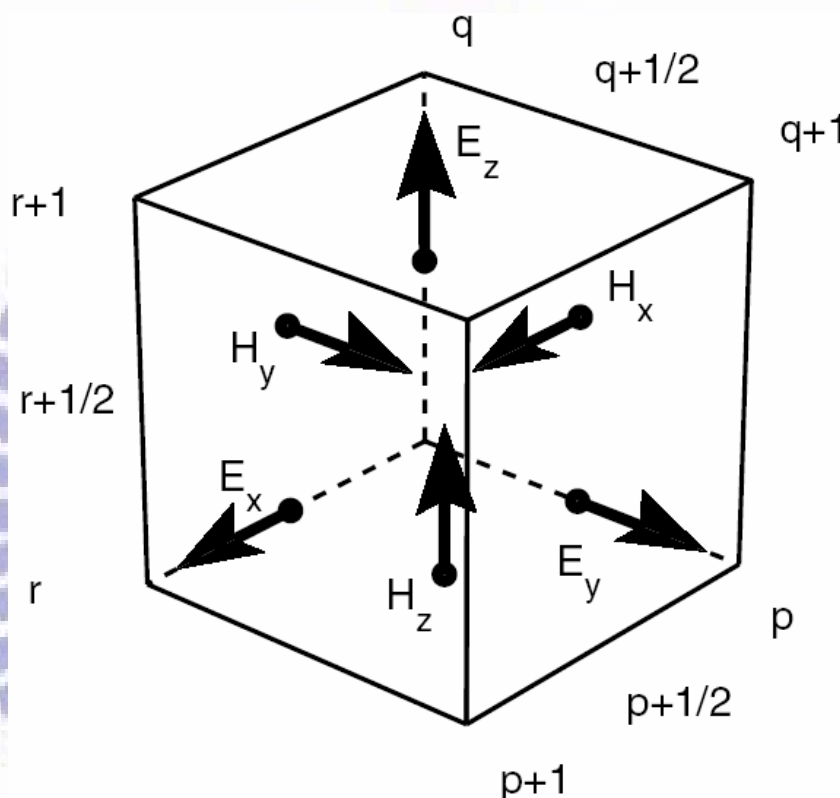


圖 2-1 Yee 網格

### 2.2.3 吸收邊界-完美吸收層 (Perfectly Matched Layer)

當我們分析的問題是在一個開放的環境底下時，因為 FDTD 只能針對有限的空間來做網格的切割，因此在面對開放環境的條件時，我們會將模擬環境設定在包含主要散射物體及激發波源的空間，而為了確保有開放空間的特性(及沒有反射波由邊界回來)，我們會使用吸收邊界來截斷電磁波，而近年來較常被拿來使用的是在 1994 年由 Berenger

所提出的完美吸收邊界(Perfectly Matched Layer)[13]，與以往 Mur 的吸收邊界[14]不同的是，PML 是藉由吸收邊界的厚度及導電係數  $\sigma$  的設定，來做物理上的吸收，而 Mur 的吸收邊界則是讓波在邊界上滿足特定的微分方程式，來達到數學上的吸收。在本篇論文中的模擬也都會使用 PML 來當作吸收邊界，以下便介紹 PML 的架構。

當我們考慮如圖 2.2 的情況，一個平面波垂直地由真空向介質傳播時，若要在真空與介質的界面處不造成反射，則真空中的波阻抗與介質中的波阻抗必須是相等的，(2.16) 式表示真空中的波阻抗與介質中的波阻抗，當它們相等時則會滿足(2.17)式。PML 便是利用這個特性來產生吸收邊界，當圖 2.2 的左側是我們的模擬空間而右側是吸收邊界時，波由真空打入介質時，由於阻抗匹配，並不會產生反射，再者，波進入介質之後，由於電導率  $\sigma$  與磁導率  $\sigma^*$  的存在，因此波會在介質中產生衰減，進而達到吸收的效果。

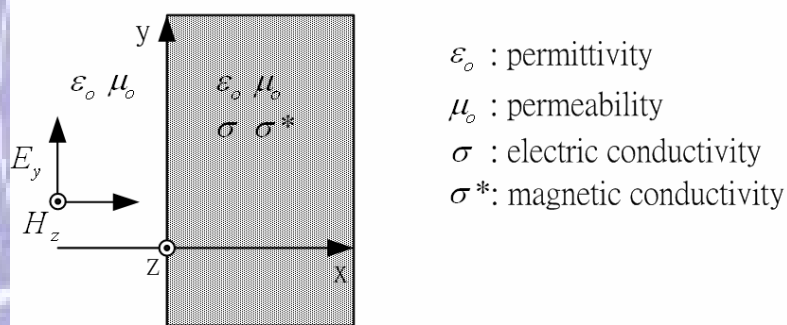


圖 2-2 平面波於真空-介質界面傳播示意圖

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad ; \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0 + \frac{\sigma^*}{j\omega}}{\epsilon_0 + \frac{\sigma}{j\omega}}} \quad (2.16)$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (2.17)$$

雖然上面的情況可以讓波被吸收，但也侷限在垂直入射的情況才能成立，因此為了滿足從各個角度入射都能得到好的吸收效果，Berenger 提出了新的電導率  $\sigma$  與磁導率

$\sigma^*$  的概念，將它們分成  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_x^* \sigma_y^* \sigma_z^*$ ，以  $\sigma_x$  為例，它會針對電場中往正 x 軸方向與負 x 軸方向傳播的成份來做吸收，我們此處強調成份的意思是當波傾斜入射到吸收邊界時，一定可以拆解成平行成份與垂直成份，而垂直成份是我們要吸收的。雖然利用了這樣的方式來吸收，但實際上這樣的吸收材料是不存在的。

為了滿足不同成份的場量由不同方向的電導率  $\sigma$  與磁導率  $\sigma^*$  來吸收，Berenger 進而將所有的場量做分解，如(2.18)式~(2.23)式所示：

$$E_x = E_{xy} + E_{xz} \quad (2.18)$$

$$E_y = E_{yx} + E_{yz} \quad (2.19)$$

$$E_z = E_{zx} + E_{zy} \quad (2.20)$$

$$H_x = H_{xy} + H_{xz} \quad (2.21)$$

$$H_y = H_{yx} + H_{yz} \quad (2.22)$$

$$H_z = H_{zx} + H_{zy} \quad (2.23)$$

上述的分量滿足的方程式如(2.24)式~(2.35)式所示：

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.24)$$

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.25)$$

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (2.26)$$

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.28)$$

$$\epsilon_o \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.29)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z * H_{xz} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x * H_{yx} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.32)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z * H_{yz} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.33)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x * H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$\mu_o \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y * H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.35)$$

上述十二個分解後的方程式若以 FDTD 的型式來表示時，則如(2.36)式~(2.47)式所

示：

$$E_{xy}^n{}_{i+1/2,j,k} = CaEx * E_{xy}^{n-1}{}_{i+1/2,j,k} + CbEx * (H_z^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{n-1/2}{}_{i+1/2,j-1/2,k}) \quad (2.36)$$

$$E_{xz}^n{}_{i+1/2,j,k} = CaEz * E_{xz}^{n-1}{}_{i+1/2,j,k} - CbEz * (H_y^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k-1/2}) \quad (2.37)$$

$$E_{yz}^n{}_{i,j+1/2,k} = CaEz * E_{yz}^{n-1}{}_{i,j+1/2,k} + CbEz * (H_x^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k-1/2}) \quad (2.38)$$

$$E_{yx}^n{}_{i,j+1/2,k} = CaEx * E_{yx}^{n-1}{}_{i,j+1/2,k} - CbEx * (H_z^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} - H_z^{n-1/2}{}_{i-1/2,j+1/2,k}) \quad (2.39)$$

$$E_{zx}^n{}_{i,j,k+1/2} = CaEx * E_{zx}^{n-1}{}_{i,j,k+1/2} + CbEx * (H_y^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} - H_y^{n-1/2}{}_{i-1/2,j,k+1/2}) \quad (2.40)$$

$$E_{zy}^n{}_{i,j,k+1/2} = CaEy * E_{zy}^{n-1}{}_{i,j,k+1/2} - CbEy * (H_x^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} - H_x^{n-1/2}{}_{i,j-1/2,k+1/2}) \quad (2.41)$$

$$H_{xy}^{n+1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} = CaHy * H_{xy}^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} - CbHy * (E_z^n{}_{i,j+1,k+1/2} - E_z^n{}_{i,j,k+1/2}) \quad (2.42)$$

$$H_{xz}^{n+1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} = CaHz * H_{xz}^{n-1/2}{}_{i,j+1/2,k+1/2} + CbHz * (E_y^n{}_{i,j+1/2,k+1} - E_y^n{}_{i,j+1/2,k}) \quad (2.43)$$

$$H_{yz}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} = CaHz * H_{yz}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} - CbHz * (E_x^n{}_{i+1/2,j,k+1} - E_x^n{}_{i+1/2,j,k}) \quad (2.44)$$

$$H_{yx}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} = CaHx * H_{yx}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j,k+1/2} + CbHx * (E_z^n{}_{i+1,j,k+1/2} - E_z^n{}_{i,j,k+1/2}) \quad (2.45)$$

$$H_{zx}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} = CaHx * H_{zx}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} - CbHx * (E_y^n{}_{i+1,j+1/2,k} - E_y^n{}_{i,j+1/2,k}) \quad (2.46)$$

$$H_{zy}^{n+1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} = CaHy * H_{zy}^{n-1/2}{}_{i+1/2,j+1/2,k} + CbHy * (E_x^n{}_{i+1/2,j+1,k} - E_x^n{}_{i+1/2,j,k}) \quad (2.47)$$

其中的係數分別是：

$$CaEi = \frac{1 - \frac{\sigma_i \Delta t}{2\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma_i \Delta t}{2\varepsilon_0}} ; \quad CbEi = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta i}}{1 + \frac{\sigma_i \Delta t}{2\varepsilon_0}} \quad i = x, y, z \quad (2.48)$$

$$CaHi = \frac{1 - \frac{\sigma_i^* \Delta t}{2\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_i^* \Delta t}{2\mu_0}} ; \quad CbHi = \frac{\frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta i}}{1 + \frac{\sigma_i^* \Delta t}{2\mu_0}} \quad i = x, y, z \quad (2.49)$$

圖 2.3 是 2D 的 PML 空間配置示意圖，其中 PML 只有在角落的地方如 A、B、C、D 處才有兩個方向的吸收，其餘的都是單方向的吸收。倘若只有一層的 PML 是不足以來作吸收的，所以需要多層的 PML 才能作有效的吸收，所以在滿足阻抗匹配的條件下，我們將 PML 設定成多層的結構，各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定都滿足與真空中的波阻抗匹配，但層與層間的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  是逐漸增加的，則波越往 PML 中傳，衰減地越快，關於 PML 的厚度及相對應各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定我們可以藉由決定一個最大的導電率  $\sigma_{\max}$ ，再根據  $\sigma_{\max}$  來分配各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$ ，關於  $\sigma_{\max}$  的決定如(2.50)所示，其中 M 代表的是  $\sigma_{\max}$  分配時的冪次，一般為 2~4，N 代表的是 PML 吸收層的厚度，一般為 4~16 層，R(0)代表的是預定的反射量大小， $c_0$  代表光速，而各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定，則必須滿足(2.51)式，而最邊緣處我們仍是用 PEC 層。由於 PML 厚度越厚對於記憶體暫存空間消耗越大，所以一般都取夠用即可，本篇論文的模擬都以 M=4，N=10，R(0)= $10^{-8}$  來設定 PML。

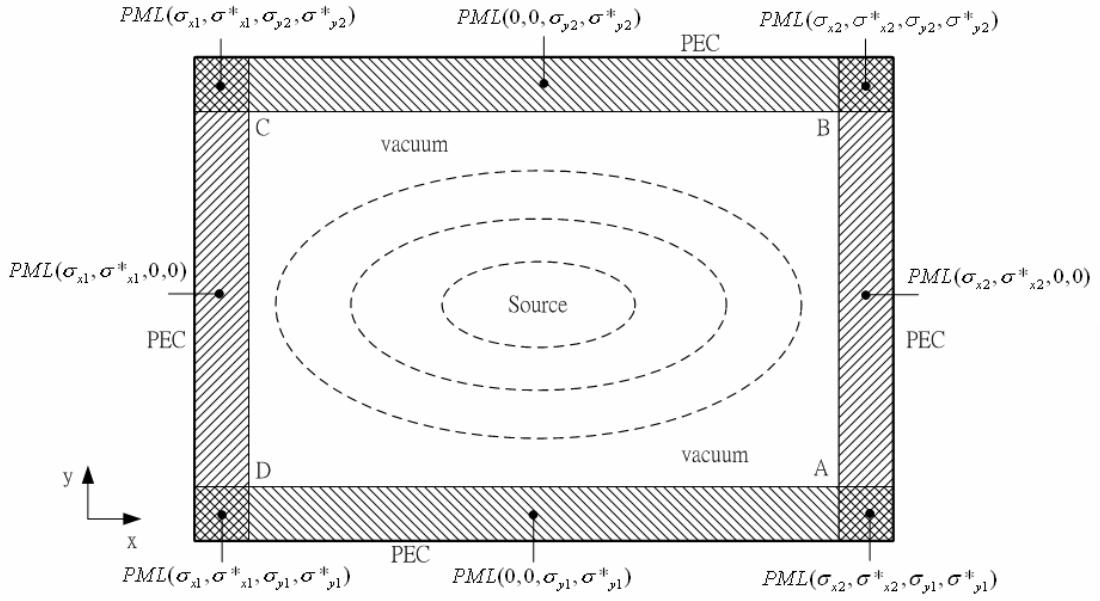


圖 2-3 二維空間中 PML 參數配置圖

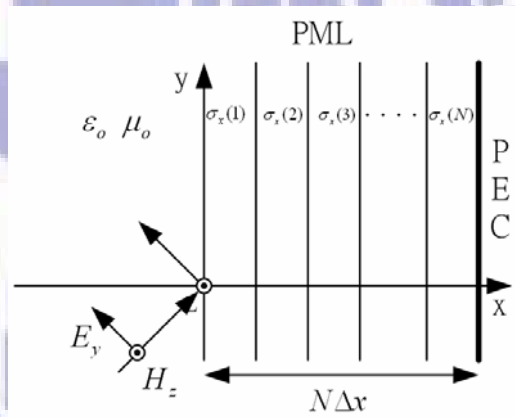


圖 2-4 PML 吸收層中的參數配置

$$\sigma_{\max} = -\frac{(M+1)\epsilon_o c_o}{2N\Delta x} \ln |R(0)| \quad (2.50)$$

$$\sigma_i(n) = \sigma_{\max} \left(\frac{N-n}{N}\right)^M ; \quad \sigma_i^*(n) = \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \sigma_i(n) \quad n = 1 \sim N ; i = x, y, z \quad (2.51)$$

## 2.2.4 波源分析

一般在 FDTD 中要將波源(Source)引入 FDTD 的計算時，有以下三種不同的型式：



- i. 硬性波源(Hard source)
- ii. 軟性波源(Soft source)
- iii. 穿透性波源(Transparent source)

以 2D 的 TE FDTD 模擬為例，若採用硬性波源的饋入，代表的即是強迫波源饋入點處的  $E_z$  場從頭到尾都必須滿足波源方程式，這個作法的優點是我們可以確保饋入到 FDTD 網格中的波形和我們給的波源方程式是相同的，但缺點是當反射波遇到波源點時，此時由於波源點仍必須滿足波源方程式，因此從反射波的觀點來看波源點就如同 PEC 一般，會造成多餘的反射。而軟性波源的饋入，則是在波源饋入點處的  $H_z$  場的疊代方程式後面加上波源方程式，我們可以發現，這個方法改善了硬性波源對於反射波而言是 PEC 的缺點，當波源完全饋入 FDTD 網格之後，波源點的  $H_z$  場疊代方程式仍滿足一般的疊代，所以反射波經過波源點時就不會再被反射了，但使用軟性波源時，就不再能保證波源點激發的  $E_z$  場會與波源方程式相同。除了以上兩種較常被拿使用的波源饋入方式，另外還有一種叫做穿透性波源的饋入[15]，它綜合了上述兩種波源饋入的優點，即饋入與給定的波源方程式相同的能量進入 FDTD 網格，此外，又保證當反射波遇到波源點時不會造成額外的反射，它採用的方式是以硬性波源的饋入方式在波源點激發一大小為 1 的脈衝(delta impulse)，記錄下每一時間步階時波源點四周磁場對波源點的貢獻，我們叫它作脈衝響應(impulse response)，接著我們要產生一修正方程式，由我們所要激發的波源與之前的脈衝響應彼此旋積(convolution)而得，而真正的模擬時，是使用軟性波源的饋入，但每一時間步階必須減掉一個與修正方程式相對應時間的修正項，因此我們可以預期饋入的的波形會與波源方程式相同，且不會造成多餘的反射，但是在 2D FDTD 的模擬時，由於修正項不易收斂到 0，而會維持在某一定值，所以在模擬經過一定的時間之後，容易造成數值的發散，並不理想，但在 3D FDTD 模擬時則不會有這個問題。綜合上述的優缺點，為了不要作太多的數學修正，所以在本論文中的波源都採硬性波源的饋入方式。

## 2.3 局部單維有限時域差分法(Locally One-Dimensional FDTD)

局部單維有限時域差分法(LOD-FDTD)是在 2005 年所被提出,改良 FDTD 的一個演算法。最原始的 FDTD 方法由於存在穩定條件的限制(Courant Stability Condition),但如果用了隱式(Implicit Difference Equations)的方式來拆解馬克士威爾方程式,由數學上來看,則可以跳脫穩定條件的限制。所以,事實上已有不少既定的改良方法被提出,像是 1999 年的交換方向定置法 ADI-FDTD(Alternative-Direction Implicit FDTD),或是在 2002 年的 Crank-Nicolson-FDTD,都是由 1966 年,最原始的有限時域差分法所長期演進而來。而本篇論文所要針對討論的,是 LOD-FDTD 方法。

### 2.3.1 馬克士威爾方程式(Maxwell's Equations)的離散化

我們以 2D-TE 的情況來做討論,也就是說,在以下的推導中,我只會考慮  $E_x$ 、 $E_y$ 、以及  $H_z$  三個場。

我們先來回顧一下馬克士威爾方程式：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \nabla \times \bar{H} \\ \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} \end{cases} \quad (2.52)$$



拆解方程式，並且對  $E_x$ 、 $E_y$ 、以及  $H_z$  三個場來討論：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

我們定義

$$U = (E_x \quad E_y \quad H_z)^T \quad (2.54)$$

把拆解後的馬客士威爾方程式寫成矩陣的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

再把矩陣拆開成兩個部分矩陣：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

所以我們可以重寫方程式為：

$$\frac{\partial}{\partial t}U = (A+B)U \quad (2.57)$$

離散化後可得：

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = (A+B)\left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}\right) \quad (2.58)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{A}{2}U^{n+1} + \frac{A}{2}U^n + \frac{B}{2}U^{n+1} + \frac{B}{2}U^n \quad (2.59)$$

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}A - \frac{\Delta t}{2}B\right)U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}A + \frac{\Delta t}{2}B\right)U^n \quad (2.60)$$

根據 LOD-FDTD 的分離法則，採用簡單的近似方法，忽略掉高次項，並且一次對一個方向來做處理，

當 time step = n 到 n+1/2 時：

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}A\right)U^{n+\frac{1}{2}} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}A\right)U^n \quad (2.61)$$

當 time step = n+1/2 到 n+1 時：

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}B\right)U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}B\right)U^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.62)$$

對於 time step = n 到 n+1/2 所做的運算，我們稱為「第一時間程序」，以下則繼續寫出第一時間程序的矩陣：

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}A\right)U^{n+\frac{1}{2}} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}A\right)U^n \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{-\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix}^n \quad (2.64)$$

最後把矩陣寫成第一時間程序的差分方程式：

$$\begin{cases} E_x^{n+\frac{1}{2}} = E_x^n \\ E_y^{n+\frac{1}{2}} = E_y^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} (H_z^{n+\frac{1}{2}} + H_z^n) \\ H_z^{n+\frac{1}{2}} = H_z^n - \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} (E_y^{n+\frac{1}{2}} + E_y^n) \end{cases} \quad (2.65)$$

對於 time step = n+1/2 到 n+1 所做的運算，我們稱為「第二時間程序」，以下則繼續寫出第二時間程序的矩陣：

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} B\right) U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} B\right) U^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.66)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

最後把矩陣寫成第二時間程序的差分方程式：

$$\begin{cases} E_x^{n+1} = E_x^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (H_z^{n+1} + H_z^{n+\frac{1}{2}}) \\ E_y^{n+1} = E_y^{n+\frac{1}{2}} \\ H_z^{n+1} = H_z^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} (E_x^{n+1} + E_x^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (2.68)$$

最後，我們可以利用以上的結論，簡短地推導一維度 LOD-FDTD 的差分方程。比二維度還單純的是，我們只需對  $E_y$  和  $H_z$  兩個場來討論即可，所以一維度的馬克士威爾方程式如下：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.69)$$

所以，在一維度 LOD-FDTD 的情形下，

當 time step = n 到 n+1/2 時：

$$\begin{cases} E_y^{n+\frac{1}{2}} = E_y^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} (H_z^{n+\frac{1}{2}} + H_z^n) \\ H_z^{n+\frac{1}{2}} = H_z^n - \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} (E_y^{n+\frac{1}{2}} + E_y^n) \end{cases} \quad (2.70)$$

當 time step = n+1/2 到 n+1 時：

$$\begin{cases} E_y^{n+1} = E_y^{n+\frac{1}{2}} \\ H_z^{n+1} = H_z^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.71)$$

### 2.3.2 放大係數與穩定性的分析

在本節中，我們利用傅利葉分析方法(Fourier Analysis，或名 von Neumann Analysis)，來討論以上所推導的差分方程中的放大係數，以及 LOD-FDTD 這個數值方法的穩定性。由於數學上的一些推導的計算上的問題，所以我們選擇在一維度的情形下來操作。

定義 time step = n 時的場向量為：

$$U^n = \begin{pmatrix} E_y^n & H_z^n \end{pmatrix}^T \quad (2.72)$$

而第一時間程序的運算所造成的放大係數為  $\xi_1$ ，第二時間程序為  $\xi_2$ ，亦即：

$$\begin{cases} U^{n+\frac{1}{2}} = \xi_1 U^n \\ U^{n+1} = \xi_2 U^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.73)$$

要做穩定性分析時，我們需把各個場寫成相位的型式：

$$\begin{cases} E_y^n(u) = E_{y0} \exp j\beta(u\Delta x) \\ H_z^n(u + \frac{1}{2}) = H_{z0} \exp j\beta((u + \frac{1}{2})\Delta x) \end{cases} \quad (2.74)$$

對 time step = n 到 n+1/2 的差分方程離散化，並給予各個場量座標：

$$\begin{cases} E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) = E_y^n(i) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{H_z^n(i+\frac{1}{2}) - H_z^n(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} \\ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) = H_z^n(i+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_y^n(i+1) - E_y^n(i)}{\Delta x} \end{cases} \quad (2.75)$$

把各個分量場代入相位型式：

$$\begin{cases} \xi_1 E_{y0} = E_{y0} - \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} \xi_1 H_{z0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} H_{z0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \\ \xi_1 H_{z0} = H_{z0} - \frac{\Delta t}{\Delta x \mu} \xi_1 E_{y0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x \mu} E_{y0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \end{cases} \quad (2.76)$$

目標是求出放大係數  $\xi_1$ ，把以上方程式整理後可得：

$$\begin{cases} (1 - \xi_1) E_{y0} = (1 + \xi_1) \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) H_{z0} \\ (1 - \xi_1) H_{z0} = (1 + \xi_1) \frac{\Delta t}{\Delta x \mu} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) E_{y0} \end{cases}$$

$$(1 - \xi_1)^2 = -(1 + \xi_1)^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2 \varepsilon \mu} \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \quad (2.77)$$

$$(1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)) \xi_1^2 - 2(1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)) \xi_1 + (1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)) = 0, \text{ where } S = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$$

代入一元二次方程式的公式解可得第一時間程序的放大係數：

$$\xi_1 = \frac{1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \pm 2jS \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)}{1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)} \quad (2.78)$$

而 time step = n+1/2 到 n+1 的差分方程：

$$\begin{cases} E_y^{n+1}(i) = E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) \\ H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}) = H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (2.79)$$

由於非常簡略，所以我們可以很快速地跑過以上的推導流程：

$$\begin{cases} E_{y0} = \xi_2 E_{y0} \\ H_{z0} = \xi_2 H_{z0} \end{cases} \quad (2.80)$$

可解得第二時間程序的放大係數：

$$\xi_2 = 1 \quad (2.81)$$

所以整個 LOD-FDTD 方法經過一次完整的運算後，可得總放大係數為：

$$\xi = \xi_1 \xi_2 = \frac{1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \pm 2jS \sin\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}{1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)} \quad (2.82)$$

進一步觀察放大係數的振幅：

$$|\xi| = \frac{\left| 1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \pm 2jS \sin\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \right|}{1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)} = 1 \quad (2.83)$$

由以上的推導，我們可以得到一些結論。把 LOD-FDTD 的總放大係數取絕對值來看的話，是恰好為 1 的，這類的數值方法，參考 Burden 所寫的數值分析第八版第五章 P.331 書籍[]，我們稱之為 Unconditionally Stable (或是 Weakly Stable)；即使 LOD-FDTD 的放大係數絕對值剛好為 1，但若要跟同為一維度 TE 情況下的 ADI-FDTD 方法比較的話，ADI-FDTD 的總放大係數的絕對值雖然也恰好為 1，但其中一個時間程序放大係數的絕對值是嚴格大於 1 的。所以，我們可以合理地做個猜測，預期 LOD-FDTD 方法的計算上，會比 ADI-FDTD 方法還要穩定。

# 第三章 一維度 LOD-FDTD 的實驗及穩定度分析

## (The Implementations of 1-D LOD-FDTD and the Stability Analysis)

### 3.1 簡介

在做一維度的 LOD-FDTD 模擬時，我們採用 Sullivan 所提出的吸收邊界 ABC (Absorbing Boundary Conditions) 來做為邊界條件的設定。由於在一維度中環境並不複雜，而 Sullivan 所設定的參數較為單純，故採用其方法，以讓實驗可以更方便地進行。在本章中我們先會重提馬克斯威爾方程式在一維環境中的拆解方法，緊接著引入 X-單方向的電導(Conductivities)設定來做為吸收邊界條件。跑出模擬的動畫後，我們先會觀察此模擬下的反射係數(Reflection Coefficient)。在一維度的實驗中，我們單純利用觀察長時間後分量場的變化來分析 LOD-FDTD 的穩定性，但在稍後第四章進入到二維度的實驗，數學的推導上會變得複雜許多，到時我們會再提出更精確的一些數學方法，來分析 LOD-FDTD 的穩定性。

### 3.2 一維度 LOD-FDTD 的數學推導

在做實驗之前，先設定我模擬的情況。以下在做一維度 LOD-FDTD 的所有實驗和分析時，我只會考慮  $E_y$  和  $H_z$  兩個場，以簡化所有的計算，讓我們的數學推導以及模擬上會更加地容易實現。



我們先來回顧一下 Maxwell's Equations :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma \bar{E} = \nabla \times \bar{H} \\ \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \sigma^* \bar{H} = -\nabla \times \bar{E} \end{cases} \quad (3.1)$$

拆解方程式，並且對  $E_y$  和  $H_z$  兩個場來討論：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x^e E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma_x^h H_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.2.1 一維度 LOD-FDTD 第一時間程序的數學推導

在第一時間程序中，time step = n 到 n+1/2，我們對 X-方向的運算來做處理：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x^e E_y = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (H_z^{n+\frac{1}{2}} + H_z^n) \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma_x^h H_z = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (E_y^{n+\frac{1}{2}} + E_y^n) \end{cases} \quad (3.3)$$

第一時間程序的差分方程式：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta t} + \sigma_x^e \frac{E_y^{n+1}(i) + E_y^{n+\frac{1}{2}}(i)}{2} \\ = -\frac{1}{2} \left( \frac{H_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+1}(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} + \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \\ \mu \frac{H_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})}{\Delta t} + \sigma_x^h \frac{H_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) + H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})}{2} \\ = -\frac{1}{2} \left( \frac{E_y^{n+1}(i+1) - E_y^{n+1}(i)}{\Delta x} + \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta x} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

由於電導會有  $\sigma_x^h = \frac{\mu}{\varepsilon} \sigma_x^e$  的關係，所以在以下的推導我們統一只用  $\sigma_x^e$  這個電導函數。

先分離各分量場：

$$\left\{ \begin{aligned} E_y^{n+1}(i) &= \frac{\varepsilon / \Delta t - \sigma_x^e(i) / 2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma_x^e(i) / 2} E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) \\ &- \frac{1/2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma_x^e(i) / 2} \left( \frac{H_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+1}(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} + \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \\ H_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) &= \frac{\mu / \Delta t - \mu \sigma_x^e(i+1/2) / 2\varepsilon}{\mu / \Delta t + \mu \sigma_x^e(i+1/2) / 2\varepsilon} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) \\ &- \frac{1/2}{\mu / \Delta t + \mu \sigma_x^e(i+1/2) / 2\varepsilon} \left( \frac{E_y^{n+1}(i+1) - E_y^{n+1}(i)}{\Delta x} + \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta x} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

在以上的式子中，我們已給予各個電導該有的座標，但方程式看起來仍過於複雜，所以我們繼續來做化簡的動作。

設定簡化方程式的參數：

$$\left\{ \begin{aligned} S_1 &= \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x} \\ S_2 &= \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

設定吸收邊界的參數，

考慮  $E_y$  場：

$$\left\{ \begin{aligned} gi3(i) &= \frac{2\varepsilon - \sigma_x^e(i)\Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i)\Delta t} \\ gi2(i) &= \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i)\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

考慮  $H_z$  場：

$$\begin{cases} fi3(i+\frac{1}{2}) = \frac{2\varepsilon - \sigma_x^e(i+\frac{1}{2})\Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i+\frac{1}{2})\Delta t} \\ fi2(i+\frac{1}{2}) = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i+\frac{1}{2})\Delta t} \end{cases} \quad (3.8)$$

把參數代入原差分方程後可得：

$$\begin{cases} E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) = gi3(i) * E_y^n(i) \\ -gi2(i) * S_1 * \left( \left( H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+1}(i-\frac{1}{2}) \right) + \left( H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}) \right) \right) \\ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) = fi3(i+\frac{1}{2}) * H_z^n(i+\frac{1}{2}) \\ -fi2(i+\frac{1}{2}) * S_2 * \left( \left( E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) \right) + \left( E_y^n(i+1) - E_y^n(i) \right) \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

最後，把不同的時間點整理在等號的兩邊，可得到  $E_y$  場完整的差分方程：

$$\begin{aligned} & -gi2(i) * S_1 * fi2(i+\frac{1}{2}) * S_2 * E_y^{n+\frac{1}{2}}(i-1) \\ & + (1 + 2 * gi2(i) * S_1 * fi2(i+\frac{1}{2}) * S_2) * E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) \\ & - gi2(i) * S_1 * fi2(i+\frac{1}{2}) * S_2 * E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1) \\ & = gi3(i) * E_y^n(i) \\ & - gi2(i) * S_1 * \left( H_z^n(i+\frac{1}{2}) - H_z^n(i-\frac{1}{2}) \right) \\ & - gi2(i) * S_1 * fi3(i+\frac{1}{2}) * \left( H_z^n(i+\frac{1}{2}) - H_z^n(i-\frac{1}{2}) \right) \\ & + gi2(i) * S_1 * fi2(i+\frac{1}{2}) * S_2 * \left( E_y^n(i+1) - 2E_y^n(i) + E_y^n(i-1) \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.2.2 一維度 LOD-FDTD 第二時間程序的數學推導

在第二時間程序中，time step =  $n+1/2$  到  $n+1$ ，我們想對 Y-方向的運算來做處理，但由於 Y-方向並沒有可處理的對象，所以可直接拆解馬克士威爾方程如下：

$$\begin{cases} E_y^{n+1} = E_y^{n+1/2} \\ H_z^{n+1} = H_z^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.11)$$

直接簡化差分方程，可得以下的結果：

$$\begin{cases} E_y^{n+1}(i) = E_y^{n+1/2}(i) \\ H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}) = H_z^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.3 吸收邊界 – Sullivan ABC (Absorbing Boundary Conditions)

前面已經推導過一維度 LOD-FDTD 的數學原理，但是吸收邊界的一些參數設定，則還沒有清楚的交代。在本節中，我們先採用 Sullivan 的一本書中所提及的方法[]。該本書雖是在探討 FDTD 方法，但其實對我在做 LOD-FDTD 的研究時，也有頗大的參考價值。給定對邊界的參數設定後，結尾我會簡單地說明這樣設定的意義。

前一節有提及，設定吸收邊界的參數，考慮  $E_y$  場，有以下兩個參數：

$$\begin{cases} gi3(i) = \frac{2\varepsilon - \sigma_x^e(i)\Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i)\Delta t} \\ gi2(i) = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i)\Delta t} \end{cases} \quad (3.13)$$

而考慮  $H_z$  場，則是以下兩個：

$$\begin{cases} fi3(i+\frac{1}{2}) = \frac{2\varepsilon - \sigma_x^e(i+\frac{1}{2})\Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i+\frac{1}{2})\Delta t} \\ fi2(i+\frac{1}{2}) = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma_x^e(i+\frac{1}{2})\Delta t} \end{cases} \quad (3.14)$$

這兩者皆以電導函數為調整上的基準，而在 Sullivan 的書中，他則是給了以下的設定。

先定義新的函數來隨著電導做變化：

$$xn_e(i) = \frac{\sigma(i)\Delta t}{2\varepsilon} = 0.33 * \left(\frac{i}{npml}\right)^3, i=1,2,\dots,npml \quad (3.15)$$

則  $E_y$  場的參數跟新函數則會有以下的關係式：

$$\begin{cases} gi2(i) = \frac{1}{1+xn_e(i)} \\ gi3(i) = \frac{1-xn_e(i)}{1+xn_e(i)} \end{cases} \quad (3.16)$$

相同的，我們也另外定義新的函數：

$$xn_h(i+\frac{1}{2}) = \frac{\sigma(i+\frac{1}{2})\Delta t}{2\varepsilon} = 0.375 * \left(\frac{i+1/2}{npml}\right)^3, i=0,1,\dots,(npml-1) \quad (3.17)$$

則  $H_z$  場的參數跟新函數則會有以下的關係式：

$$\begin{cases} fi2(i) = \frac{1}{1+xn_h(i+\frac{1}{2})} \\ fi3(i) = \frac{1-xn_h(i+\frac{1}{2})}{1+xn_h(i+\frac{1}{2})} \end{cases} \quad (3.18)$$

在此需要特別注意的是， $H_z$ 場存在於空間座標為 $n+\frac{1}{2}$ 的點上，所以該場的參數座標上，也必須隨著 $n+\frac{1}{2}$ 而做變動。此外，對於兩個場的參數設定上，我們皆以三次的速度在遞增電導函數，但在常數的部分，我們卻是給了不同的設定，像是 $E_y$ 場是0.33， $H_z$ 場的則是0.375。對於這兩個常數的由來，其實並沒有明確的數學推導，純粹是由不斷實驗中的經驗累積而得。而這樣的設定，也的確可以為邊界達到預期的吸收效果。

我們在實驗中將會取十層的吸收邊界( $npml=10$ )，最後附註一下電導的分佈圖，

對 $E_y$ 場討論：

$$\sigma(i) = \frac{2\varepsilon_0}{\Delta t} * 0.33 * \left(\frac{i}{npml}\right)^3, i = 1, 2, \dots, npml \quad (3.19)$$

對 $H_z$ 場討論：

$$\sigma\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\varepsilon_0}{\Delta t} * 0.375 * \left(\frac{i + 1/2}{npml}\right)^3, i = 0, 1, \dots, (npml - 1) \quad (3.20)$$

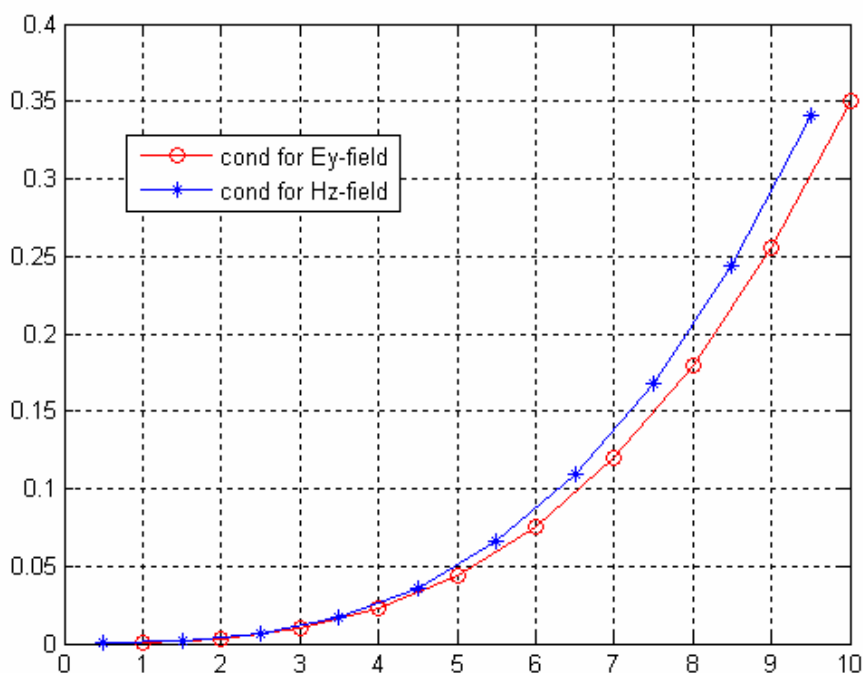


圖 3-1 電導函數分別對兩個場的分佈情形

### 3.4 模擬結果

首先，我們先對模擬環境有些基本的設定，

時間間隔上，我採用以下的數值：

$$\Delta t = 3.3333\text{E-}11 \quad (3.21)$$

空間間隔上，我採用以下的數值：

$$\Delta x = 1\text{E-}2 \quad (3.22)$$

經過這樣的設定，可以得到庫朗常數為：

$$\text{Courant Number} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 1 \quad (3.23)$$

環境上我設定為 200 個空間間隔寬，而波源我則設定為一個高斯波，從空間的正中間激發，並且模擬它行進到左右的邊界時，將會被完整地吸收：

$$\text{Source Pulse} = e^{-x^2/6} \quad (3.24)$$

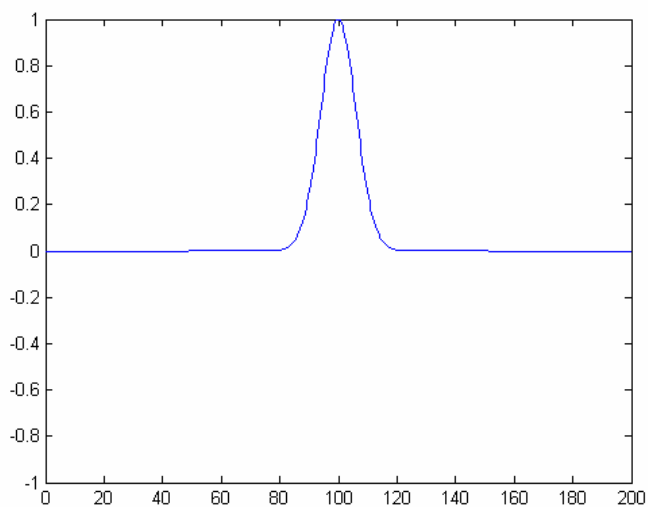


圖 3-2 一維度 LOD-FDTD 模擬所使用的激發波源

### 3.4.1 高斯波行進至邊界的模擬

此模擬是在寬為 200 的一維度環境下進行，在中央座標為 100 的點上，激發一個高斯波，經過 LOD-FDTD 方法的計算後，以穩定的速度向兩旁傳播過去。單獨模擬完 LOD-FDTD 方法後，會跟傳統的 FDTD 做個簡單的比較。

在模擬的左右兩個邊界上，我各設置了十層的吸收層。也就是預期波傳動到座標 10 及 190 時，將會產生被邊界吸收的行為。這在以下的內容，討論穩定性的章節中，會有更詳細的介紹。

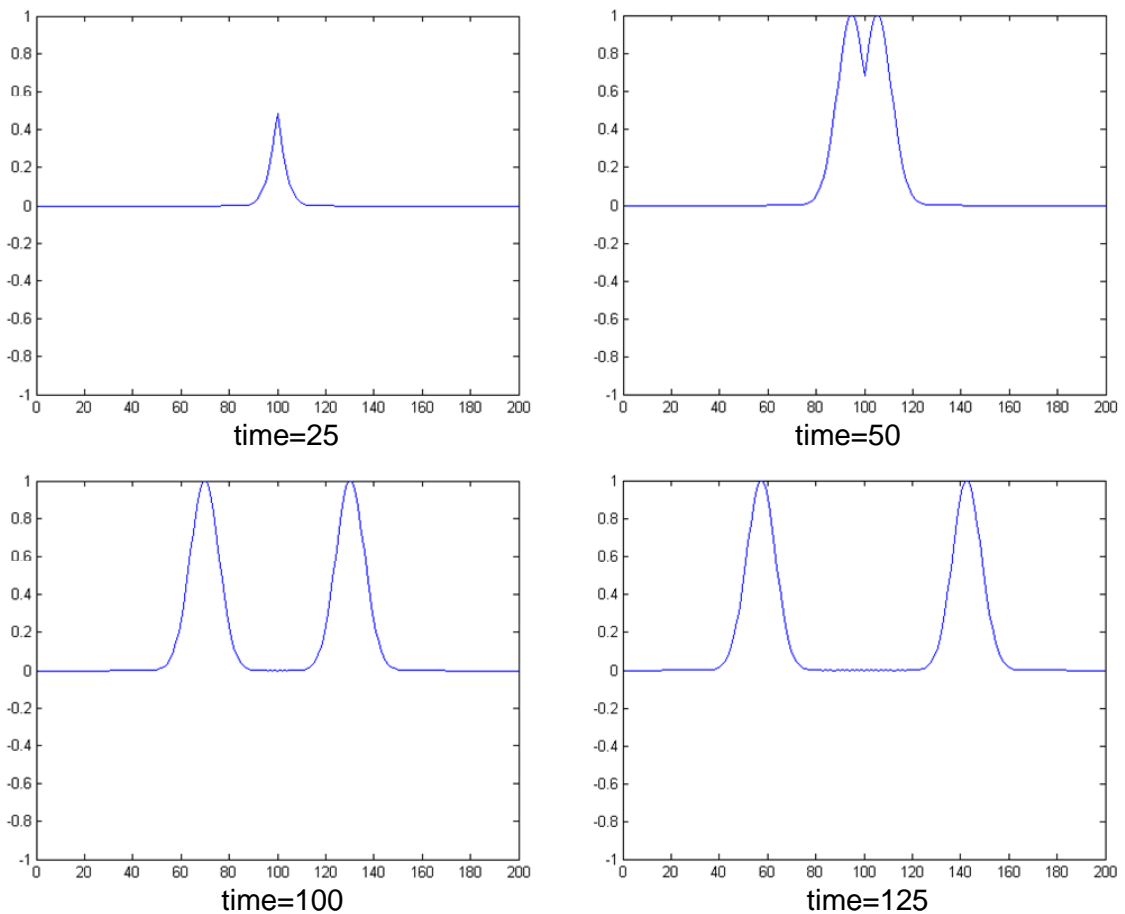


圖 3-3 一維度情況下，LOD-FDTD 方法的模擬(觀察  $H_z$  場)



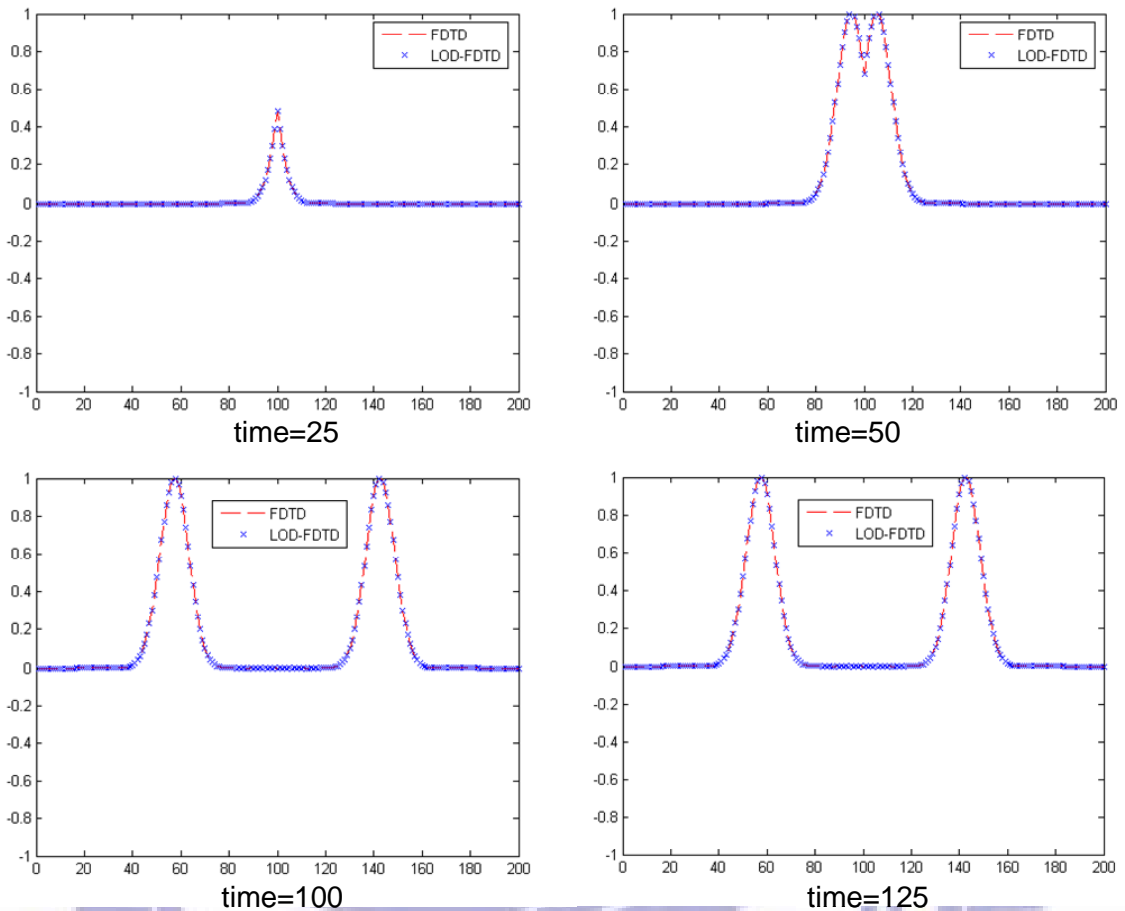


圖 3-4 一維度的模擬下，FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的比較(觀察  $H_z$  場)

定義：差異百分比 = 差異最大值 /  $\left( \frac{\text{Field of (FDTD)} + \text{Field of (LOD)}}{2} \right) * 100\%$  (3.25)

我們固定觀察 time step=125，發現差異最大值為發生在座標為 58 時：

	差異最大值(58)	差異百分比
FDTD	0.9932	0.01%
LOD-FDTD	0.9933	(0.0001)

表 3-1 FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的差異最大值比較(觀察 time = 125 時)

由上表可得知，LOD-FDTD 方法和 FDTD 方法模擬起來的行為是極為相同的，也更驗證了我們模擬的正確性。

### 3.4.2 反射係數(Reflection Coefficient)

對於一個數值模擬而言，在邊界條件設定完成後，我們通常會對該邊界的反射係數非常感興趣。所謂反射係數，故名思義，就是想觀察波行進到邊界後，所反彈回來的程度。由於邊界條件的設定最主要的目的，就是要完全吸收行進至邊界的各個波，以模擬整個無限大的空間，才有實質上的模擬意義。以下會先定義反射係數的計算方式，而後展示 Sullivan 的吸收邊界在一維度 LOD-FDTD 的反射係數結果，最後對於本數值方法的斂散性，做個簡單的評論。

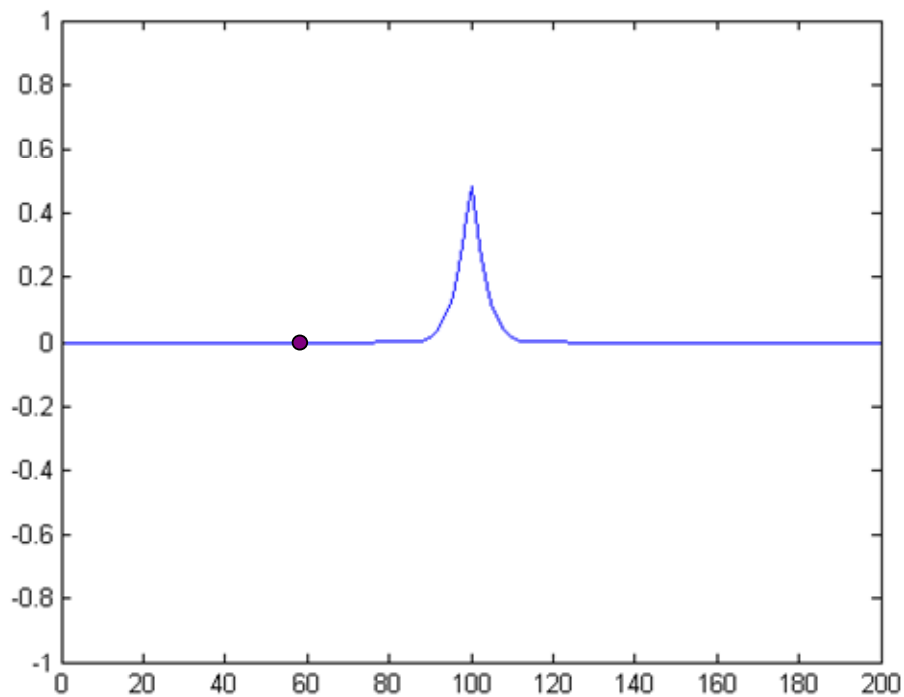


圖 3-5 一維度 LOD-FDTD 所取的觀察點

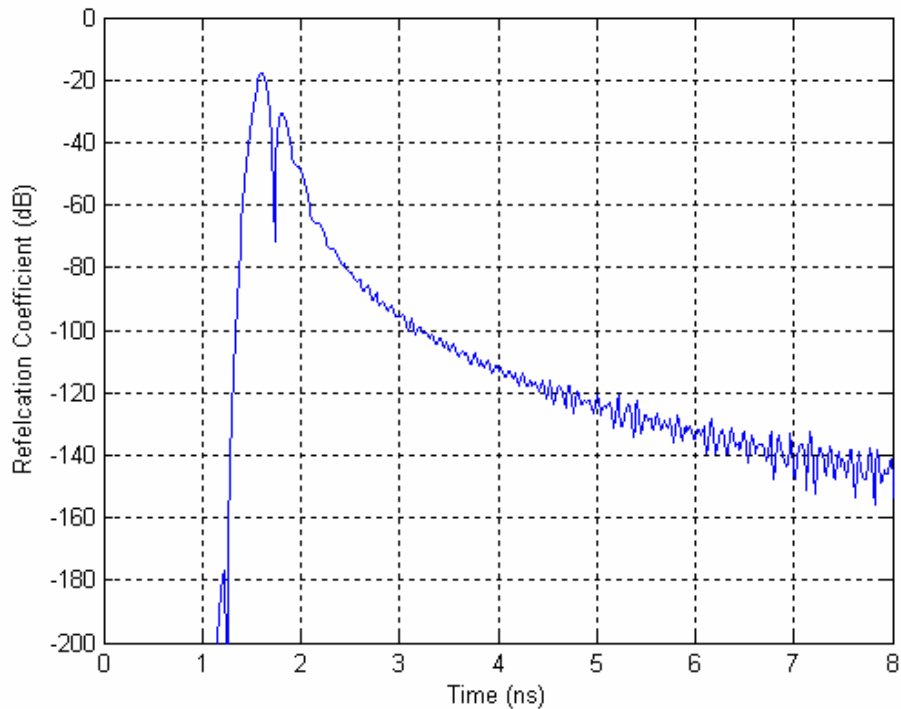
取好觀察點後，定義：

$$\text{反射係數 } R = 20 \log_{10} \left( \frac{|H^t - H_{ref}^t|}{\max |H_{ref}^t|} \right) \quad (3.26)$$

其中  $H^t$  為有吸收邊界的環境中，time step 為  $t$  時在觀察點的場量，而  $H_{ref}^t$  為一個沒有吸收邊界，但在足夠大的一個模擬環境(我設定寬為 1000 個空間間格)中，time step 為  $t$  時在觀察點的場量。

另外，幾次實驗下來的經驗告訴我們，觀察點取離激發波源的位置約 40 的地方，所觀察到的反射係數會是較有參考價值的。

以下是我們的實驗結果：



Note:  $\Delta t = 3.3333\text{E-}11$

圖 3-6 一維度 LOD-FDTD 的反射係數

### 3.5 穩定性分析

在一維度 LOD-FDTD 的穩定性分析中，由於計算上也並不複雜，加上在簡介中我也已經有拿一維度中的 TE 進行過穩定的數學推導。所以在此我只會再重現一下有關放大係數與穩定性的數學推導，再秀出 LOD-FDTD 長時間之後的模擬，是否會出現發散的情形。

#### 3.5.1 放大係數

在本節中，我們利用傅利葉分析方法(Fourier Analysis，或名 von Neumann Analysis)，來討論以上所推導的差分方程中的放大係數，以及 LOD-FDTD 這個數值方法的穩定性。我們選擇在一維度 TE 的情形下來操作。

定義 time step = n 時的場向量為：

$$U^n = \begin{pmatrix} E_y^n & H_z^n \end{pmatrix}^T \quad (3.27)$$

而第一時間程序的運算所造成的放大係數為  $\xi_1$ ，第二時間程序為  $\xi_2$ ，亦即：

$$\begin{cases} U^{n+\frac{1}{2}} = \xi_1 U^n \\ U^{n+1} = \xi_2 U^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.28)$$

要做穩定性分析時，我們需把各個場寫成相位的型式：

$$\begin{cases} E_y^n(u) = E_{y0} \exp j\beta(u\Delta x) \\ H_z^n(u + \frac{1}{2}) = H_{z0} \exp j\beta((u + \frac{1}{2})\Delta x) \end{cases} \quad (3.29)$$

對 time step = n 到 n+1/2 的差分方程離散化，並給予各個場量座標：

$$\begin{cases} E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) = E_y^n(i) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{H_z^n(i+\frac{1}{2}) - H_z^n(i-\frac{1}{2})}{\Delta x} \\ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) = H_z^n(i+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_y^n(i+1) - E_y^n(i)}{\Delta x} \end{cases} \quad (3.30)$$

把各個分量場代入相位型式：

$$\begin{cases} \xi_1 E_{y0} = E_{y0} - \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} \xi_1 H_{z0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} H_{z0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \\ \xi_1 H_{z0} = H_{z0} - \frac{\Delta t}{\Delta x \mu} \xi_1 E_{y0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x \mu} E_{y0} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \end{cases} \quad (3.31)$$

目標是求出放大係數  $\xi_1$ ，把以上方程式整理後可得：

$$\begin{cases} (1 - \xi_1) E_{y0} = (1 + \xi_1) \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) H_{z0} \\ (1 - \xi_1) H_{z0} = (1 + \xi_1) \frac{\Delta t}{\Delta x \mu} j \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) E_{y0} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$(1 - \xi_1)^2 = -(1 + \xi_1)^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2 \varepsilon \mu} \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)$$

$$(1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)) \xi_1^2 - 2(1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)) \xi_1 + (1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)) = 0, \text{ where } S = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$$

代入一元二次方程式的公式解可得第一時間程序的放大係數：

$$\xi_1 = \frac{1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) \pm 2jS \sin\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)}{1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)} \quad (3.33)$$

而 time step = n+1/2 到 n+1 的差分方程：

$$\begin{cases} E_y^{n+1}(i) = E_y^{n+\frac{1}{2}}(i) \\ H_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) = H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) \end{cases} \quad (3.34)$$

由於非常簡略，所以我們可以很快速地跑過以上的推導流程：

$$\begin{cases} E_{y0} = \xi_2 E_{y0} \\ H_{z0} = \xi_2 H_{z0} \end{cases} \quad (3.35)$$

可解得第二時間程序的放大係數：

$$\xi_2 = 1 \quad (3.36)$$

所以整個 LOD-FDTD 方法經過一次完整的運算後，可得總放大係數為：

$$\xi = \xi_1 \xi_2 = \frac{1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \pm 2jS \sin\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}{1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)} \quad (3.37)$$

進一步觀察放大係數的振幅：

$$|\xi| = \frac{\left| 1 - S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \pm 2jS \sin\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \right|}{1 + S^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)} = 1 \quad (3.38)$$

由以上的推導，我們可以得到一些結論。把 LOD-FDTD 的總放大係數取絕對值來看的話，是恰好為 1 的，這類的數值方法，參考 Burden 所寫的數值分析第八版第五章 P.331 書籍[]，我們稱之為 Unconditionally Stable (或是 Weakly Stable)；即使 LOD-FDTD 的放大係數絕對值剛好為 1，但若要跟同為一維度 TE 情況下的 ADI-FDTD 方法比較的話，ADI-FDTD 的總放大係數的絕對值雖然也恰好為 1，但其中一個時間程序放大係數的絕對值是嚴格大於 1 的。所以，我們可以合理地做個猜測，預期 LOD-FDTD 相對上會比 ADI-FDTD 還穩定。

### 3.5.2 模擬長時間後的行為

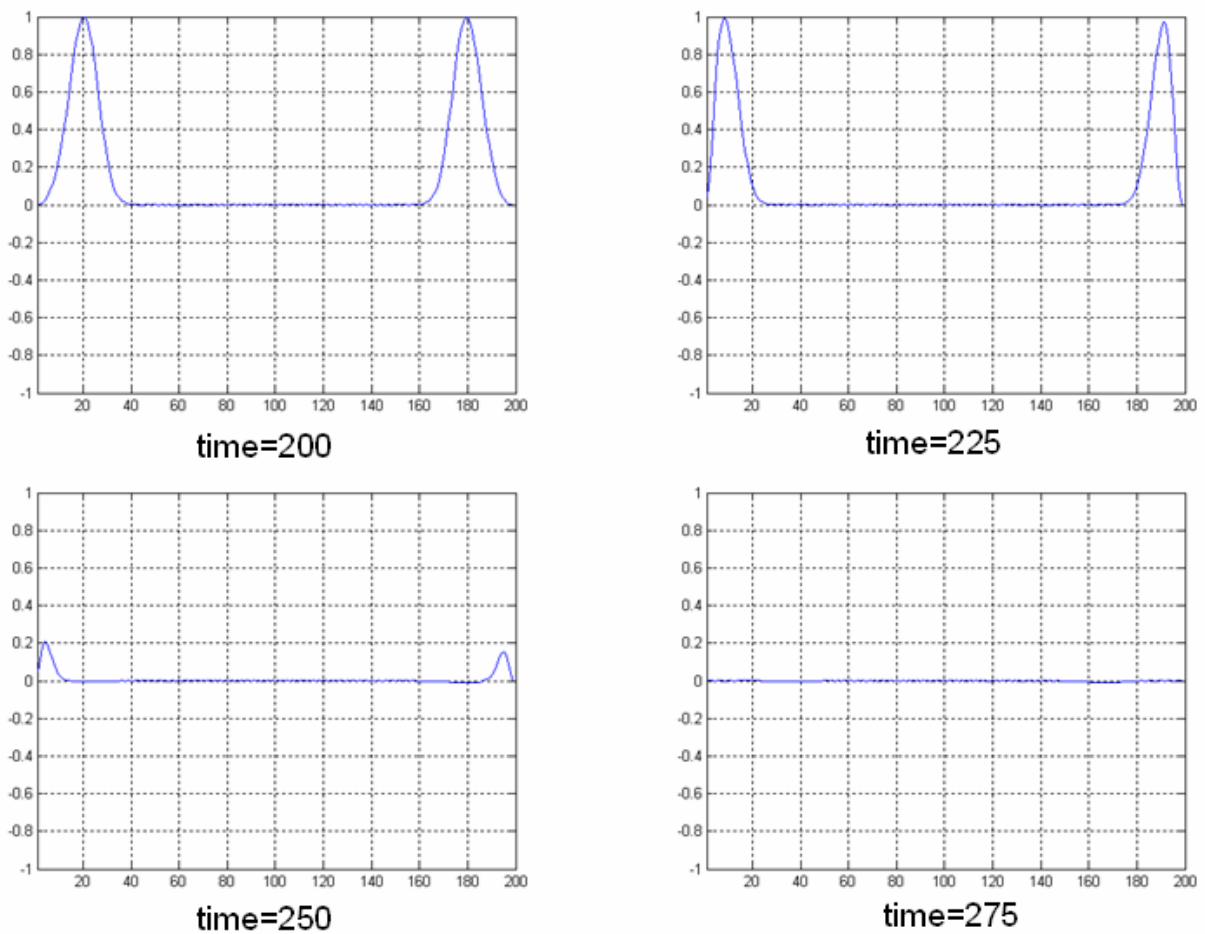


圖 3-7  $H_z$  場繼續往兩邊傳遞至吸收邊界

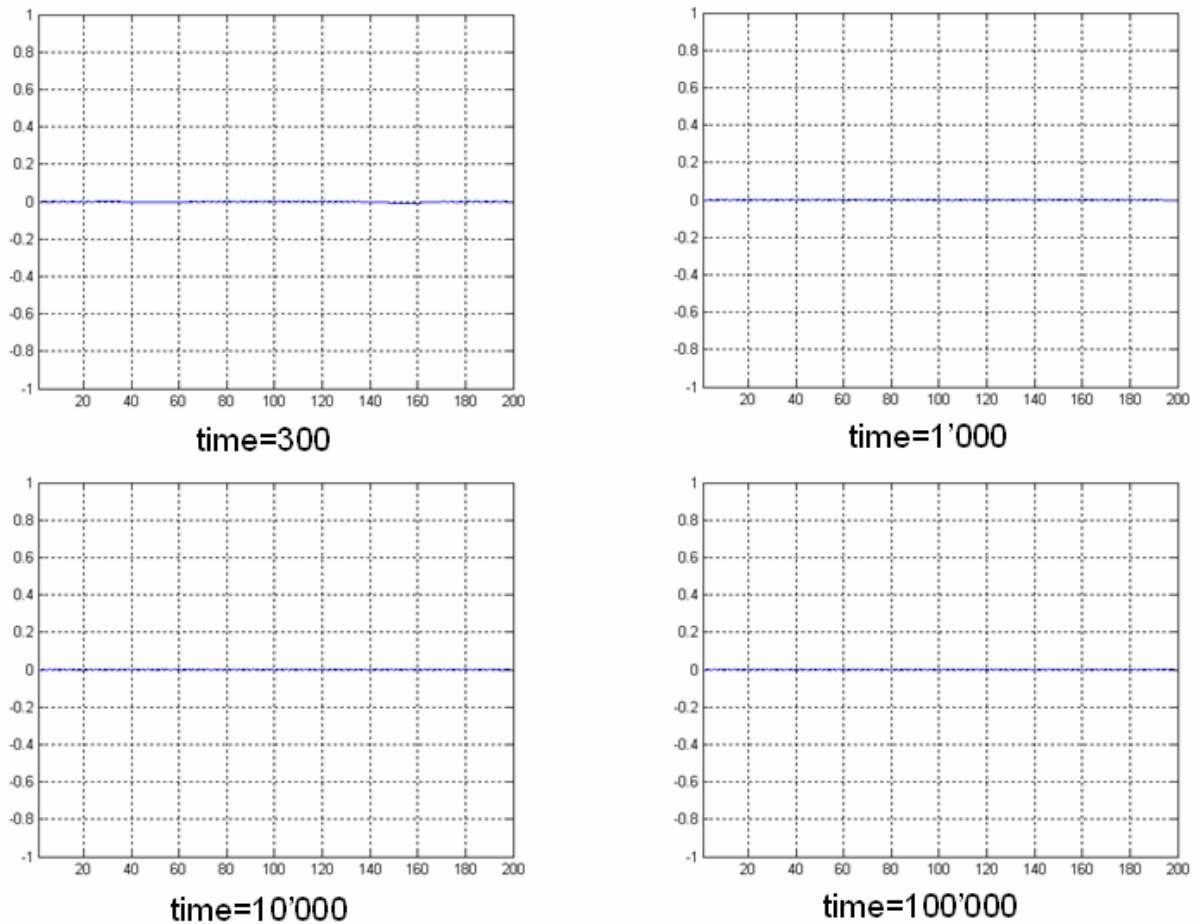


圖 3-8 觀察  $H_z$  場在長時間後的行為

所以我們可以得到一個結論，一維度的 LOD-FDTD 雖然在數學上得到的結果只是一個弱收斂的數值方法，但是它在一維度 TE 的模擬中，可以算到 100'000 個時間步，都還不會發散。

### 3.6 心得與討論

在本章中，我們推導了一維度 LOD-FDTD 的差分方程，也在模擬環境的四週加上 Sullivan 所提出的吸收邊界 ABC 後，成功地模擬出一個具有吸收效果的環境。接下來我們進一步觀察其長時間後的行為，發現在一維度 TE 的模擬中，LOD-FDTD 可以保證在 100'000 都不會發散，這表示其穩定性整體而言是不錯的。



## 第四章 二維度 LOD-FDTD 的實驗及穩定度分析

### (The Implementations of 2-D LOD-FDTD and the Stability Analysis)

#### 4.1 簡介

在做二維度的 LOD-FDTD 時，由於所設定的環境會比一維的情況還複雜許多，所以我們決定用 Jean-Pierre Berenger[]所提出的 Split-Field PML 來做為邊界條件的設定。在本章中我們先會介紹馬克斯威爾方程式在二維環境中的拆解方法，緊接著引入 X-和 Y-兩方向的電導(Conductivities)設定來做為吸收邊界條件。跑出模擬的動畫後，我們先會觀察此模擬下的反射係數(Reflection Coefficient)，以及推導出邊界的增益矩陣(Amplification Matrix)。最後，求得邊界各點增益矩陣的特徵值(Eigenvalues)，進而分析 LOD-FDTD 在二維度情境下的穩定性。

#### 4.2 二維度 LOD-FDTD 的數學推導

首先，在做這個實驗之前，先選擇我所模擬的是個 TE wave 的情況，也就是說，在做以下在做二維度 LOD-FDTD 的所有分析時，我只會考慮  $E_x$ 、 $E_y$ 、以及  $H_z$  三個場。其中  $H_z$  場經過 Split-Field 方法後，會拆解成  $H_z = H_{zx} + H_{zy}$  兩個分量場，讓我們的數學推導以及模擬上會更加地容易實現。

我們先來回顧一下 Maxwell's Equations :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma \bar{E} = \nabla \times \bar{H} \\ \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \sigma^* \bar{H} = -\nabla \times \bar{E} \end{cases} \quad (4.1)$$

拆解方程式，並且對  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_{zx}$ 、以及  $H_{zy}$  四個場來討論：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y^e E_x = \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x^e E_y = \frac{-\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^h H_{zx} = \frac{-\partial E_y}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^h H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases} \quad (4.2)$$

#### 4.2.1 二維度 LOD-FDTD 第一個時間程序的數學推導

在第一時間程序中，time step = n 到 n+1/2，我們對 X-方向的運算來做處理：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x^e E_y = \frac{-\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^h H_{zx} = \frac{-\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad (4.3)$$

第一時間程序的差分方程形式：

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left( \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j)}{\Delta t} \right) + \sigma_x^e \left( \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) + E_y^n(i, j)}{2} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \\
&\quad - \left( \frac{H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \\
&\quad \mu \left( \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} \right) + \sigma_x^h \left( \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{2} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

設定 Split-Field PML 的參數：

$$\begin{cases}
CaEy = \frac{\varepsilon / \Delta t - \sigma_x^e / 2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma_x^e / 2} = \frac{2\varepsilon - \sigma_x^e \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x^e \Delta t} \\
CbEy = \frac{1}{(\varepsilon / \Delta t + \sigma_x^e / 2)\Delta x} = \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon + \sigma_x^e \Delta t)\Delta x} \\
DaHzx = \frac{\mu / \Delta t - \mu\sigma_x^h / 2\varepsilon}{\mu / \Delta t + \mu\sigma_x^h / 2\varepsilon} = \frac{2\varepsilon - \sigma_x^h \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_x^h \Delta t} \\
DbHzx = \frac{1}{(\mu / \Delta t + \mu\sigma_x^h / 2\varepsilon)\Delta x} = \frac{2\varepsilon \Delta t}{\mu(2\varepsilon + \sigma_x^h \Delta t)\Delta x}
\end{cases} \tag{4.5}$$

把 Split-Field PML 的參數加入差分方程，經整理後可得：

$$\begin{aligned}
E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) &= CaEy * E_y^n(i, j) \\
&- \frac{1}{2} CbEy * \left( H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \right) \\
&- \frac{1}{2} CbEy * \left( H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \right) \\
&- CbEy * \left( H_{zy}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \right) \\
H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) &= DaHzx * H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \\
&- \frac{1}{2} DbHzx * \left( \left( E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) \right) + \left( E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

把兩方程式相互疊代，並把參數加以座標：

$$\begin{aligned}
E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) &= CaEy(i, j+\frac{1}{2}) * E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) \\
&- \frac{1}{2} CbEy(i, j+\frac{1}{2}) * \left( \left( DaHzx(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - DaHzx(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \right) \right. \\
&- \frac{1}{2} DbHzx(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * \\
&- \frac{1}{2} CbEy(i, j+\frac{1}{2}) * \left( \left( E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) \right) + \left( E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) \right) \right) \\
&+ \frac{1}{2} DbHzx(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * \\
&- \frac{1}{2} CbEy(i, j+\frac{1}{2}) * \left( \left( E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i-1, j+\frac{1}{2}) \right) + \left( E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i-1, j+\frac{1}{2}) \right) \right) \\
&+ \left( H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \right) \\
&- CbEy(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * \left( H_{zy}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

最後，把不同時間點的場分在等號的兩邊，可得  $E_y$  場的差分方程：

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * DbHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * E_y^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j + \frac{1}{2}) \\
 & + \left( 1 + \frac{1}{4}CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * (DbHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + DbHzx(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})) \right) * E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) \\
 & - \frac{1}{4}CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * DbHzx(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * E_y^{n+\frac{1}{2}}(i-1, j + \frac{1}{2}) \\
 & = CaEy(i, j + \frac{1}{2}) * E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * \left( H_{zy}^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_{zy}^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right) \\
 & \quad \left( \left( DaHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * H_{zx}^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - DaHzx(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * H_{zx}^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2}DbHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( E_y^n(i+1, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2}DbHzx(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i-1, j + \frac{1}{2}) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( H_{zx}^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_{zx}^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

#### 4.2.2 二維度 LOD-FDTD 第二時間程序的數學推導

在第二時間程序中，time step = n+1/2 到 n+1，我們對 Y-方向的運算來做處理：

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y^e E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^h H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases} \tag{4.9}$$

第二時間程序的差分方程形式：

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left( \frac{E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} \right) + \sigma_y^e \left( \frac{E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) + E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \\
&+ \left( \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \\
&\mu \left( \frac{H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} \right) + \sigma_y^h \left( \frac{H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

設定 Split-Field PML 的參數：

$$\begin{cases}
CaEx = \frac{\varepsilon / \Delta t - \sigma_y^e / 2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma_y^e / 2} = \frac{2\varepsilon - \sigma_y^e \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_y^e \Delta t} \\
CbEx = \frac{1}{(\varepsilon / \Delta t + \sigma_y^e / 2)\Delta y} = \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon + \sigma_y^e \Delta t)\Delta y} \\
DaHz = \frac{\mu / \Delta t - \mu\sigma_y^h / 2\varepsilon}{\mu / \Delta t + \mu\sigma_y^h / 2\varepsilon} = \frac{2\varepsilon - \sigma_y^h \Delta t}{2\varepsilon + \sigma_y^h \Delta t} \\
DbHz = \frac{1}{(\mu / \Delta t + \mu\sigma_y^h / 2\varepsilon)\Delta y} = \frac{2\varepsilon \Delta t}{\mu(2\varepsilon + \sigma_y^h \Delta t)\Delta y}
\end{cases} \tag{4.11}$$

把 Split-Field PML 的參數加入差分方程，經整理後可得：

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) &= CaEx * E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \\
&+ \frac{1}{2} CbEx * \left( H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \\
&+ \frac{1}{2} CbEx * \left( H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \\
&+ CbEx * \left( H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \\
H_{zy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) &= DaHzzy * H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{1}{2} DbHzzy * \left( \left( E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \right) + \left( E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

把兩方程式相互疊代，並把參數加以座標：

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) &= CaEx(i+\frac{1}{2}, j) * E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \\
&+ \frac{1}{2} CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * \left( \left( DaHzzy(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - DaHzzy(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) * H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} DbHzzy(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * \left( \left( E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \right) + \left( E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} DbHzzy(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) * \left( \left( E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-1) \right) + \left( E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j-1) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \right) \\
&+ CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * \left( H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$



最後，把不同時間點的場分在等號的兩邊，可得  $E_y$  場的差分方程：

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{4} CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * DbHz_y(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j+1) \\
& + \left( 1 + \frac{1}{4} CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * \left( DbHz_y(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + DbHz_y(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \right) E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) \\
& - \frac{1}{4} CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * DbHz_y(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) * E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j-1) \\
& = CaEx(i+\frac{1}{2}, j) * E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) + CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * \left( H_{xv}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{xv}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \\
& + \frac{1}{2} CbEx(i+\frac{1}{2}, j) * \left( \left( DaHz_y(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - DaHz_y(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) * H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} DbHz_y(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) * \left( E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} DbHz_y(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) * \left( E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-1) \right) \right. \\
& \left. + \left( H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

### 4.3 吸收邊界 - Berenger Split-Field PML (Perfectly Matched Layer)

下圖是二維度空間中的 PML 空間配置示意圖，其中 PML 只有在角落的地方如 A、B、C、D 處才有兩個方向的吸收，其餘的都是單方向的吸收。倘若只有一層的 PML 是不足以來作吸收的，所以需要多層的 PML 才能作有效的吸收，所以在滿足阻抗匹配的條件下，我們將 PML 設定成多層的結構，各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定都滿足與真空中的波阻抗匹配，但層與層間的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  是逐漸增加的，則波越往 PML 中傳，衰減地越快，關於 PML 的厚度及相對應各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  設定我們可以藉由決定一個最大的導電率  $\sigma_{\max}$ ，再根據  $\sigma_{\max}$  來分配各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$ ，關於  $\sigma_{\max}$  的決定如(4.15)所示，其中 M 代表的是  $\sigma_{\max}$  分配時的冪次，一般為 2~4，N 代表的是 PML 吸收層的厚度，一般為 4~16 層，R(0) 代表的是預定的反射量大小， $c_0$  代表光速，而各層的  $\sigma$  與  $\sigma^*$  的設定，以下也會做個定義，而最邊緣處我們仍是用 PEC 層。

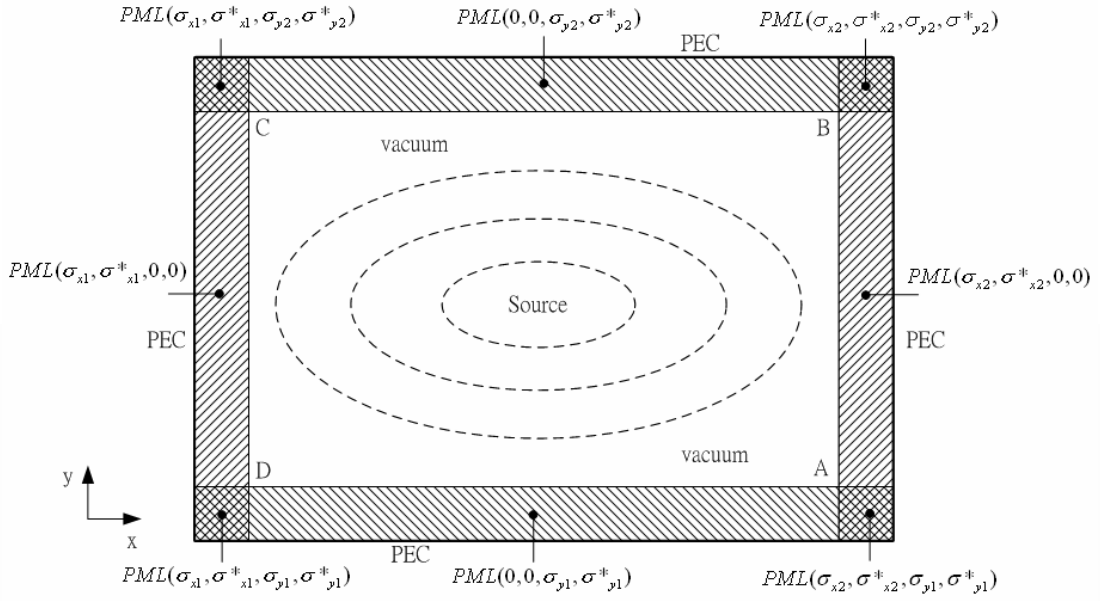


圖 4-1 二維度空間中 PML 的參數配置圖

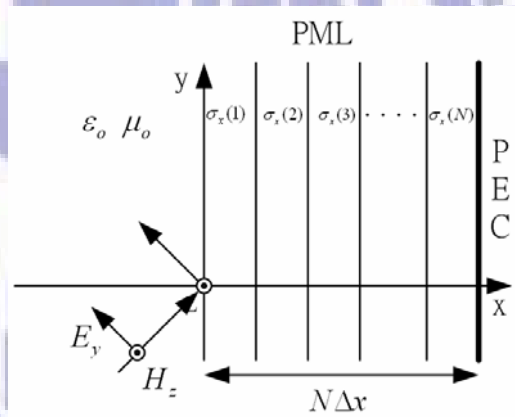


圖 4-2 吸收邊界 PML 中的參數配置

$$\sigma_{\max} = -\frac{(M+1)\epsilon_o c_o}{2N\Delta x} \ln|R(0)| \quad (4.15)$$

$$\sigma_i(n) = \sigma_{\max} \left(\frac{N-n}{N}\right)^M \quad ; \quad \sigma_i^*(n) = \frac{\mu_o}{\epsilon_o} \sigma_i(n) \quad n = 1 \sim N \quad ; \quad i = x, y, z \quad (4.16)$$

由於 PML 厚度越厚對於記憶體暫存空間消耗越大，所以一般都取夠用即可，本篇論文的模擬都以  $M=4$ ， $N=10$ ， $R(0)=10^{-8}$  來設定 PML。

冪次  $M$  代表了電導函數的增場程度，下圖為電導函數和 PML 層的關係：

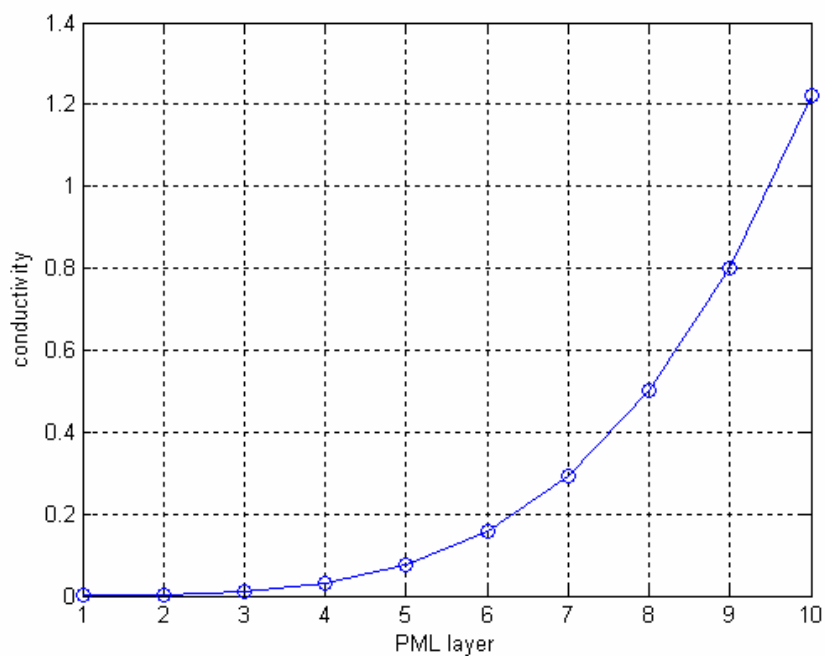


圖 4-3 電導函數在 PML 層中的分佈情形

#### 4.4 模擬結果

首先，我們先對模擬環境有些基本的設定，

時間間隔上，我採用以下的數值：

$$\Delta t = 3.3333\text{E-}11 \quad (4.17)$$

空間間隔上，我採用以下的數值：

$$\Delta x = 1\text{E-}2 \quad (4.18)$$

經過這樣的設定，可以得到庫朗常數為：

$$\text{Courant Number} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 1 \quad (4.19)$$

環境上我設定為長寬各為 120 個空間間隔的二維空間，而波源我則設定為一個高斯波，從空間的正中間激發，並且模擬它行進到模擬還境的邊界時，將會被完整地吸收。

$$\text{Source Pulse} = e^{-(x+y)^2/6} \quad (4.20)$$

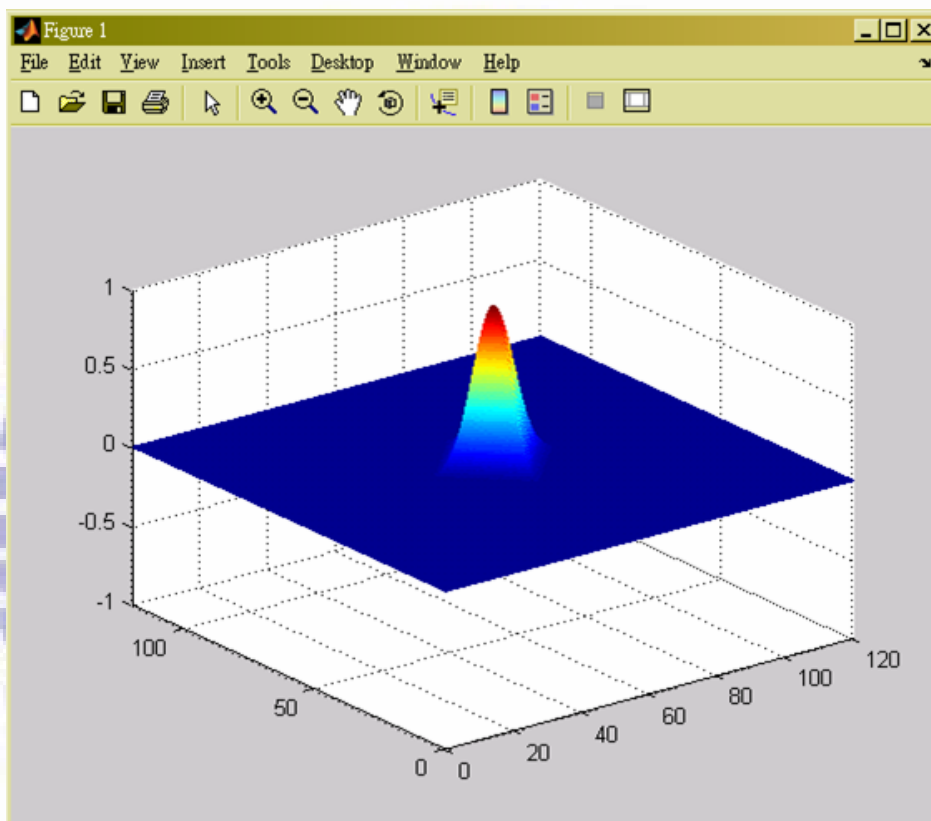


圖 4-4 二維度 LOD-FDTD 模擬所使用的激發波源

#### 4.4.1 高斯波行進至邊界的模擬

此模擬是在一個長寬皆為 120 的二維度環境下進行，在中央座標為(60,60)的點上，激發一個高斯波，經過 LOD-FDTD 方法的計算後，以穩定的速度向兩旁傳播過去。單獨模擬完 LOD-FDTD 方法後，會跟傳統的 FDTD 做個簡單的比較。

在模擬的左右兩個邊界上，我各設置了十層的吸收層。也就是預期波傳動到 X 座標為 10 及 110，或是 Y 座標為 10 或 110 時，將會產生被邊界吸收的行為。這在以下的內容，討論穩定性的章節中，會有更詳細的介紹。

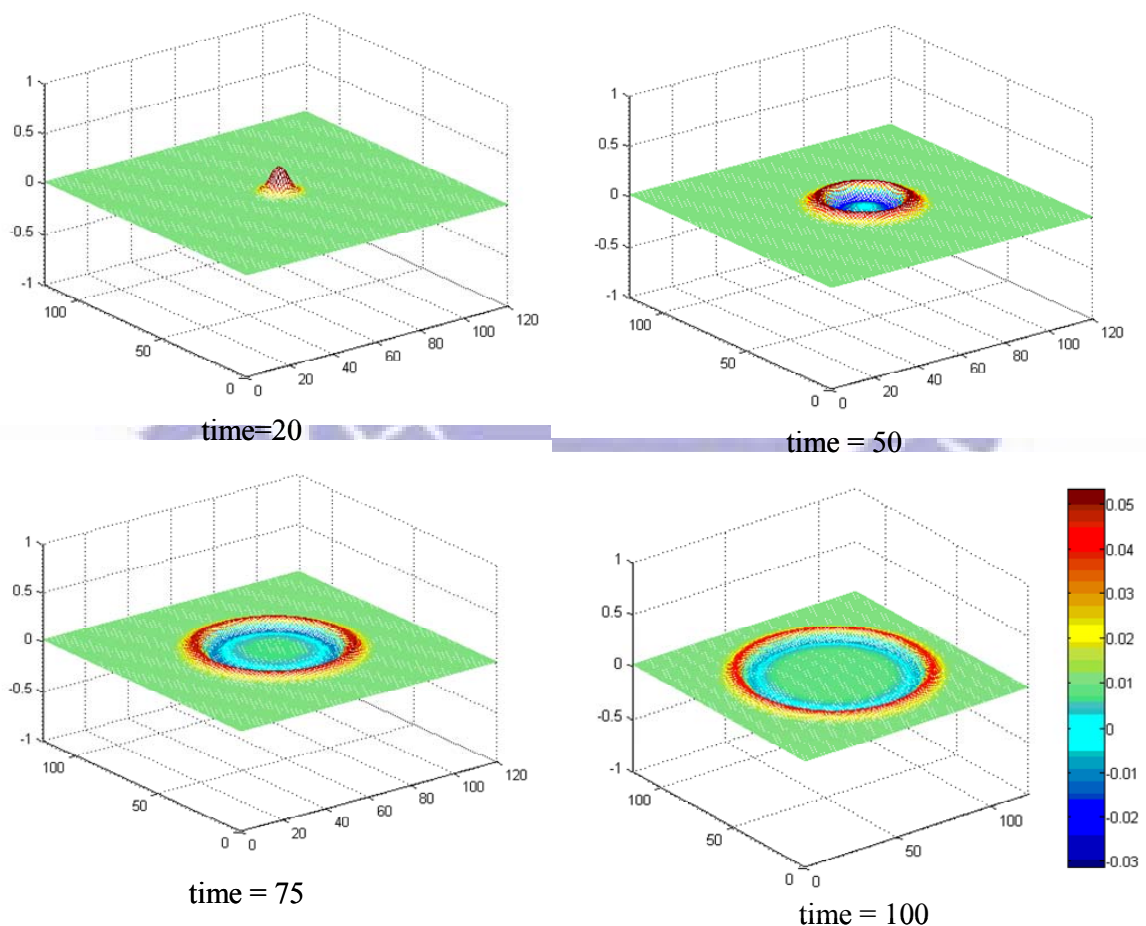


圖 4-5 二維度情況下，LOD-FDTD 方法的模擬(觀察  $H_z$  場)

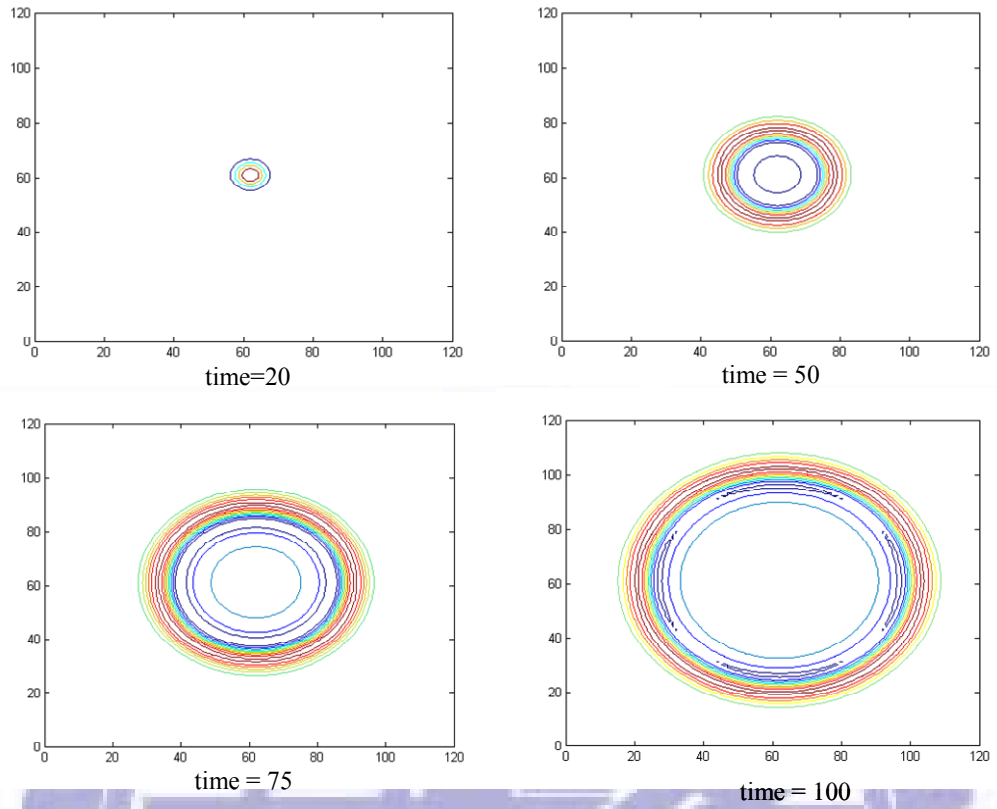


圖 4-6 從俯視角度觀察二維度情況下 LOD-FDTD 方法的模擬(觀察  $H_z$  場)

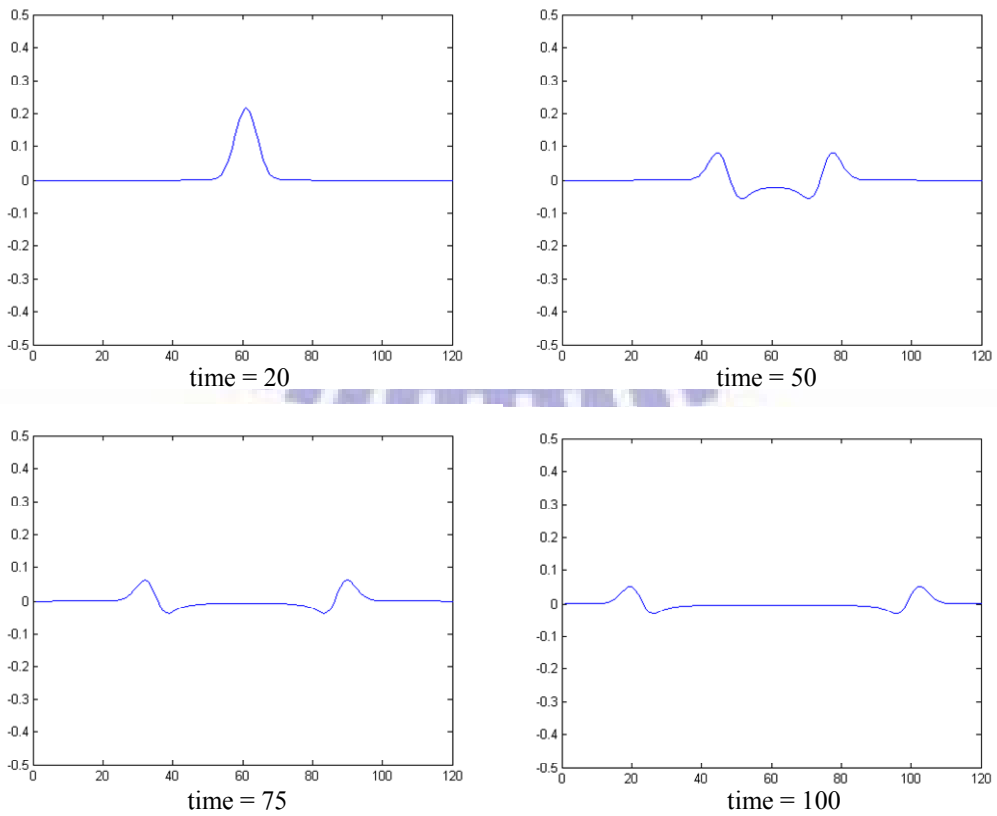


圖 4-7 固定 X 座標為 60，觀察二維度情況下 LOD-FDTD 模擬的剖面(觀察  $H_z$  場)

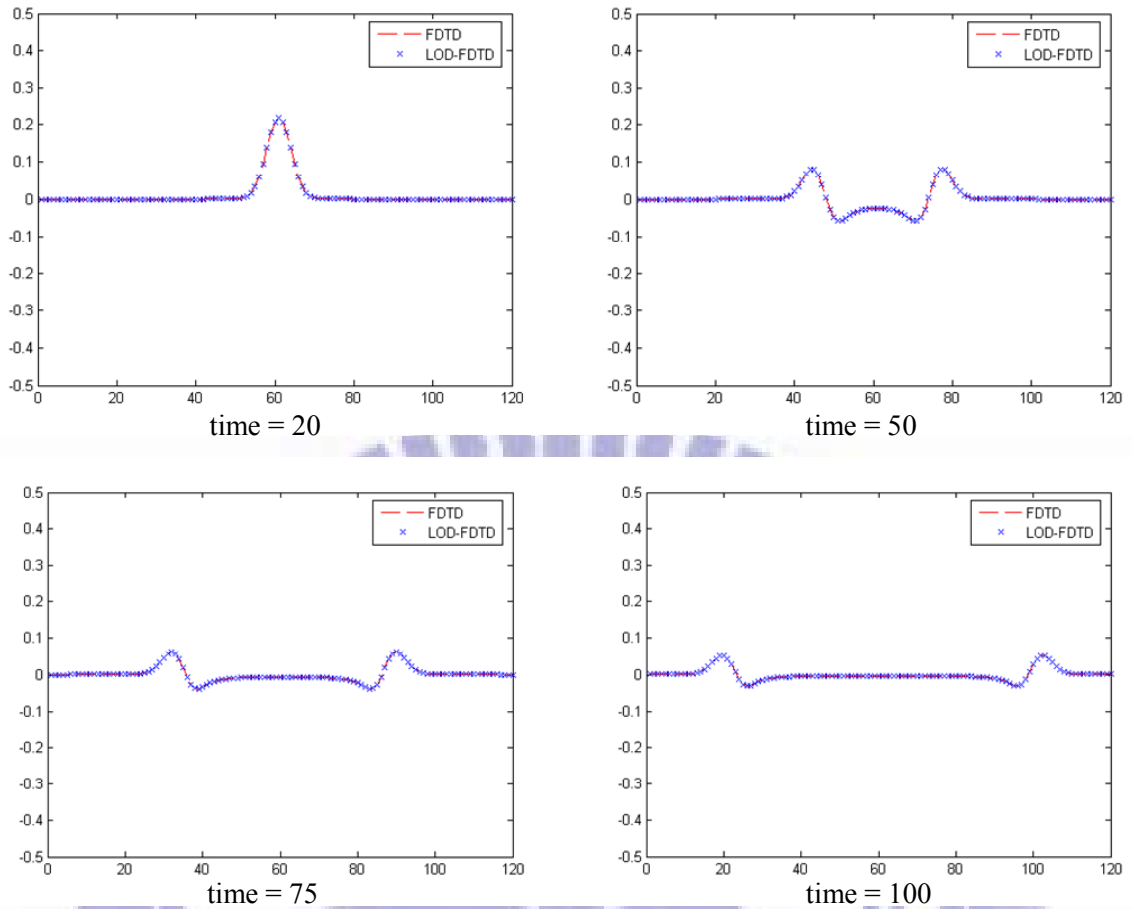


圖 4-8 二維度的模擬下，FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的比較(觀察  $H_z$  場剖面)

$$\text{定義：差異百分比} = \frac{\text{差異最大值}}{\left( \frac{\text{Field of (FDTD)} + \text{Field of (LOD)}}{2} \right)} * 100\% \quad (4.21)$$

我們固定觀察 time step = 100，發現差異最大值為發生在座標為 21 時：

	差異最大值(21)	差異百分比
FDTD	0.0523	0.76%
LOD-FDTD	0.0527	(0.0004)

表 4-1 FDTD 方法與 LOD-FDTD 方法的差異最大值(觀察 time = 100 時)

由上表可得知，LOD-FDTD 方法和 FDTD 方法模擬起來的行為是極為相同的，也更驗證了我們模擬的正確性。



## 4.4.2 反射係數(Reflection Coefficient)

對於一個數值模擬而言，在邊界條件設定完成後，我們通常會對該邊界的反射係數非常感興趣。所謂反射係數，故名思義，就是想觀察波行進到邊界後，所反彈回來的程度。由於邊界條件的設定最主要的目的，就是要完全吸收行進至邊界的各個波，以模擬整個無限大的空間，才有實質上的模擬意義。以下會先定義反射係數的計算方式，而後展示 Berenger Split-Field PML 的吸收邊界在二維度 LOD-FDTD 的反射係數結果，最後對於本數值方法的斂散性，做個簡單的評論。

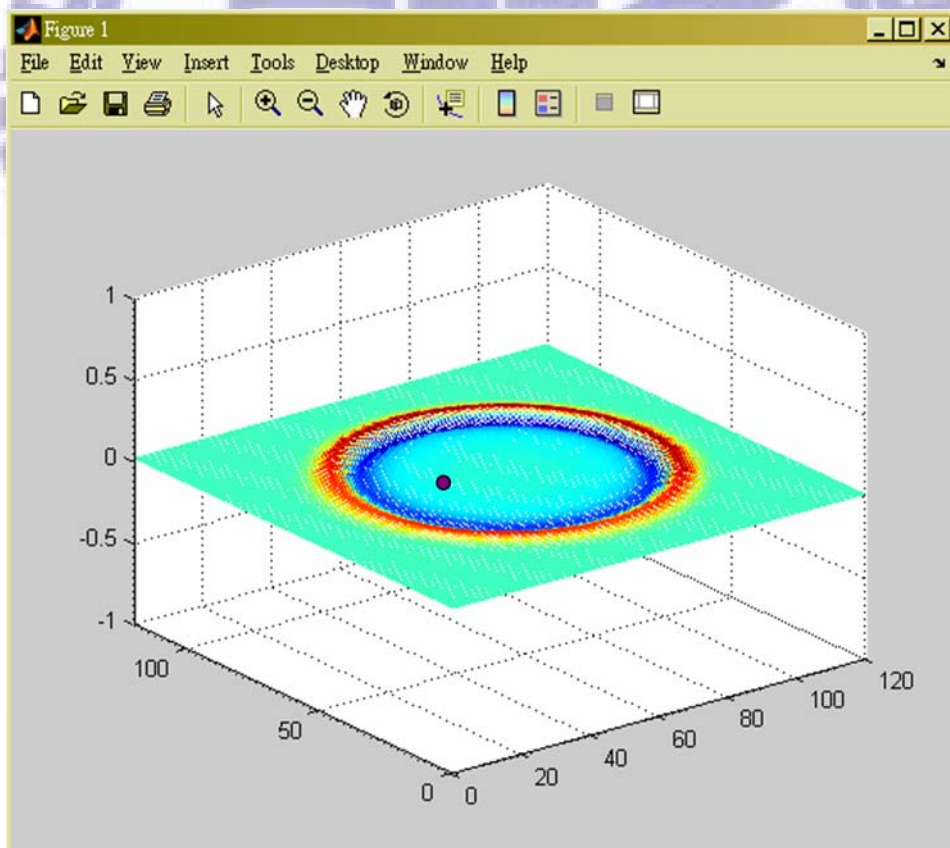


圖 4-9 反射係數的觀察點(20,60)

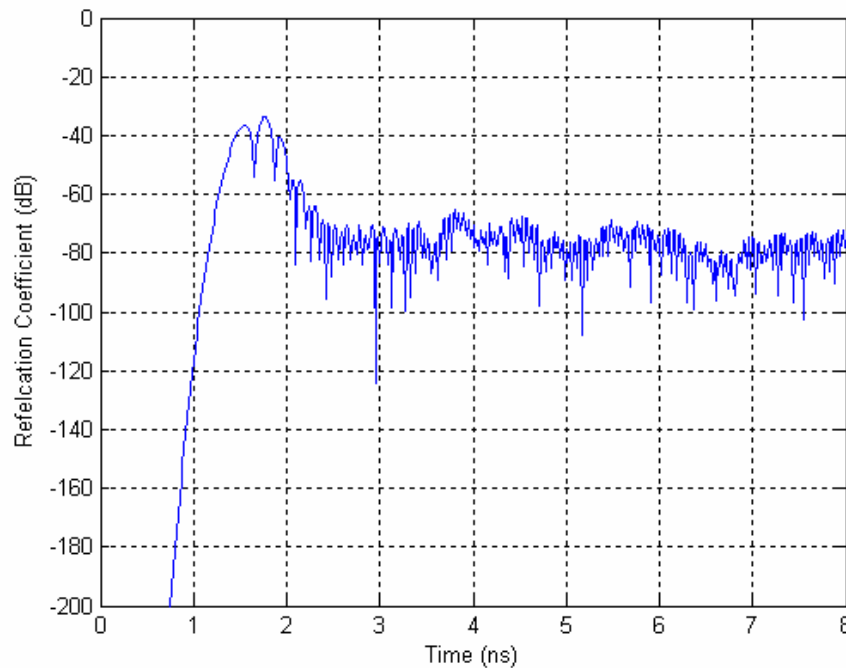
取好觀察點後，定義：

$$\text{反射係數 } R = 20 \log_{10} \left( \frac{|H^t - H_{ref}^t|}{\max |H_{ref}^t|} \right) \quad (4.22)$$

其中  $H^t$  為有吸收邊界的環境中，time step 為  $t$  時在觀察點的場量，而  $H_{ref}^t$  為一個沒有吸收邊界，但在足夠大的一個模擬環境(我設定寬為 1000 個空間間格)中，time step 為  $t$  時在觀察點的場量。

另外，幾次實驗下來的經驗告訴我們，觀察點取離激發波源的位置約 40 的地方，所觀察到的反射係數會是較有參考價值的。

以下是我們的實驗結果：



Note:  $\Delta t = 3.3333\text{E-}11$

圖 4-10 二維度 LOD-FDTD 的反射係數

## 4.5 穩定性分析

討論放大矩陣(Amplification Matrix)，是分析一個數值模擬方法之穩定性的重要依據。在本節中我們先會由前面推導過的數學式子，寫出二維度 LOD-FDTD 的放大矩陣；接下來，再經由求得各層放大矩陣的特徵值(eigenvalues)，來分析二維度 LOD-FDTD 的穩定性。

### 4.5.1 放大矩陣

首先，我們把各個場的分量寫成頻域(spectral domain)中的相位形式(phasor form)：

$$\begin{aligned}
 E_x^n(u + \frac{1}{2}, v) &= E_x^n \exp\{-j(k_x(u + \frac{1}{2})\Delta x + k_y v \Delta y)\} \\
 E_y^n(u, v + \frac{1}{2}) &= E_y^n \exp\{-j(k_x u \Delta x + k_y(v + \frac{1}{2})\Delta y)\} \\
 H_{zx}^n(u + \frac{1}{2}, v + \frac{1}{2}) &= H_{zx}^n \exp\{-j(k_x(u + \frac{1}{2})\Delta x + k_y(v + \frac{1}{2})\Delta y)\} \\
 H_{zy}^n(u + \frac{1}{2}, v + \frac{1}{2}) &= H_{zy}^n \exp\{-j(k_x(u + \frac{1}{2})\Delta x + k_y(v + \frac{1}{2})\Delta y)\}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

定義時間 time step = n 時的狀態為以下的向量：

$$X^n = \begin{bmatrix} E_x^n & E_y^n & H_{zx}^n & H_{zy}^n \end{bmatrix}^T \tag{4.24}$$

並且，把兩個程序所做的處理，寫成以下的型式：

$$\begin{cases} M_1 X^{n+\frac{1}{2}} = P_1 X^n \\ M_2 X^{n+1} = P_2 X^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.25}$$

最後，定義放大矩陣(Amplification Matrix)為  $\Lambda$ ，亦即：

$$\Lambda = M_2^{-1} P_2 M_1^{-1} P_1 \tag{4.26}$$

把相位形式代入第一時間程序的疊代方程式(4-6)中：

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+\frac{1}{2}} &= CaEy(i, j + \frac{1}{2}) * E_y^n \\
 &- \frac{1}{2} CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * \left( -2j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) H_{zx}^{n+\frac{1}{2}} - 2j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) H_{zx}^n \right) \\
 &- CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * \left( -2j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) H_{zy}^n \right) \\
 H_{zx}^{n+\frac{1}{2}} &= DaHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * H_{zx}^n \\
 &- \frac{1}{2} DbHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( -2j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) E_y^{n+\frac{1}{2}} - 2j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) E_y^n \right)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

再由方程式，可得出第一時間程序的矩陣如下：

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) & 0 \\ 0 & -DbHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 P_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & CaEy(i, j + \frac{1}{2}) & CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) & 2 * CbEy(i, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) \\ 0 & DbHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right) & DaHzx(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

把相位形式代入第二時間程序的疊代方程式(4-12)中：

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1} &= CaEx(i + \frac{1}{2}, j) * E_x^{n+\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{2} CbEx(i + \frac{1}{2}, j) * \left( -2j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) H_{zy}^{n+\frac{1}{2}} - 2j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) H_{zy}^{n+1} \right) \\
 &+ CbEx(i + \frac{1}{2}, j) * \left( -2j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) H_{zx}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
 H_{zy}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= DaHzy * H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{1}{2} DbHzy(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( -2j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) E_x^{n+\frac{1}{2}} - 2j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) E_x^{n+1} \right)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

再由方程式，可得出第一時間程序的矩陣如下：

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & CbEx(i + \frac{1}{2}, j) * \left( j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ DbHzy(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 P_2 &= \begin{bmatrix} CaEx(i + \frac{1}{2}, j) & 0 & -2 * DbHzy(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) & -DbHzy(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -DbHzy(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) * \left( j \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right) & 0 & 0 & DaHzy(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

## 4.5.2 放大矩陣的特徵值

先介紹一下本節中的一些細節。首先我對正向入射的波源來看，取 $(60,n)$ ，其中 $n=1,2,\dots,DPML$ (在此實驗中 $DPML=10$ )，這幾個點來觀察。正向入射的部分沒問題後，我會對角落的放大矩陣來做討論。由於角落同時承受了X-方向與Y-方向的電導參數的設置，所以也是容易出現發散情形的地方，故值得討論之。

最後，我會觀察長時間後的場量，看此模擬在短時間中，是否會出現發散的情形，也對我所提出的特徵值做一個驗證。

正向入射所取的觀察點如下圖：

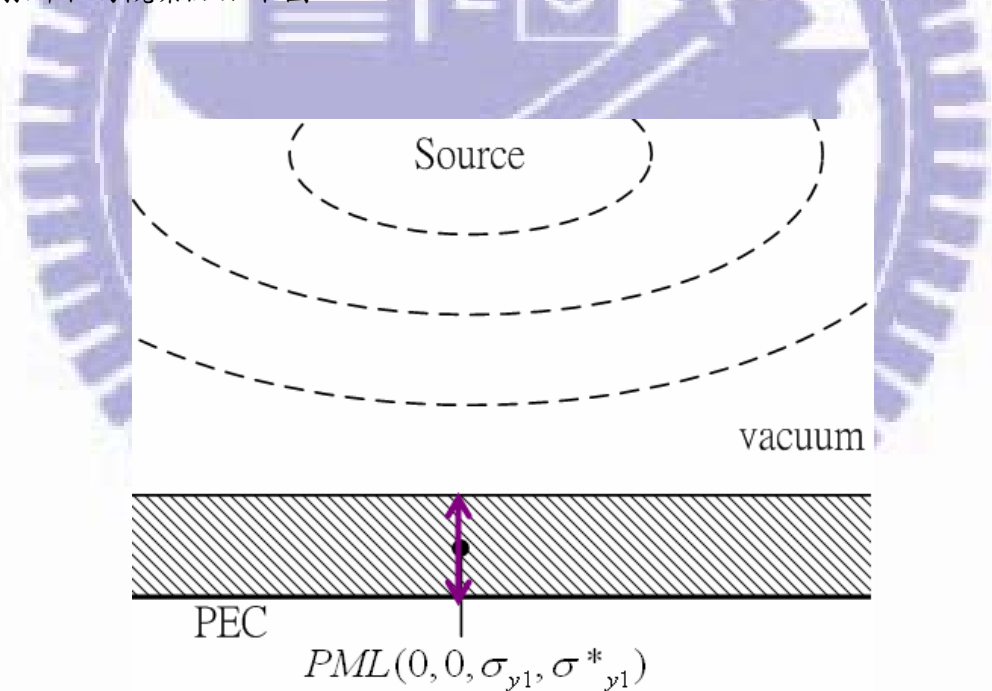


圖 4-11 垂直入射所取的觀察點 $(60,n)$ ,  $n = 1,2,\dots,10$

而計算後所得的特徵值如下表：

PML	1 <sup>st</sup> PML	2 <sup>nd</sup> PML	3 <sup>rd</sup> PML
The 4 eigen-values	1.00000000000000	0.99995650734301	0.99913817553292
	1.00000001364062	0.99990712692533	0.99892282587126
	0.99999998635938	0.99998414263531	0.99892282587070
	1.00000000000000	0.99995650734301	0.99913817553292

	4 <sup>th</sup> PML	5 <sup>th</sup> PML	6 <sup>th</sup> PML
	0.99509731966030	0.98351549566575	0.95851148268314
	0.99387535464606	0.97943910638338	0.94846576730874
	0.99387535464605	0.97943910638337	0.94846576730874
	0.99509731966030	0.98351549566575	0.95851148268314

	7 <sup>th</sup> PML	8 <sup>th</sup> PML	9 <sup>th</sup> PML
	0.91338983846750	0.84181653830418	0.73771182494339
	0.89353805279166	0.81053742105396	0.70650121546171
	0.89353805279166	0.81053742105396	0.73771182494339
	0.91338983846751	0.84181653830418	0.70650121546171

	10 <sup>th</sup> PML		
	0.62836365334956		
	0.63780225494426		
	0.63780225494426		
	0.62836365334956		

表 4-2 第一層到第十層 PML 的放大矩陣特徵值

由上表我們可以有些簡短的結論。第一，在第二層之後的 PML 的特徵值全部都小於 1，代表各個場量的大小在通過第二層 PML 以後，是嚴格地在減緩。第二，由於放大矩陣在兩個程序中都具有蠻對稱的形式，所以特徵值常會以共軛複數成對出現，所以取絕對值後，常會出現兩組相同的值。



而角落所取的觀察點如下圖：

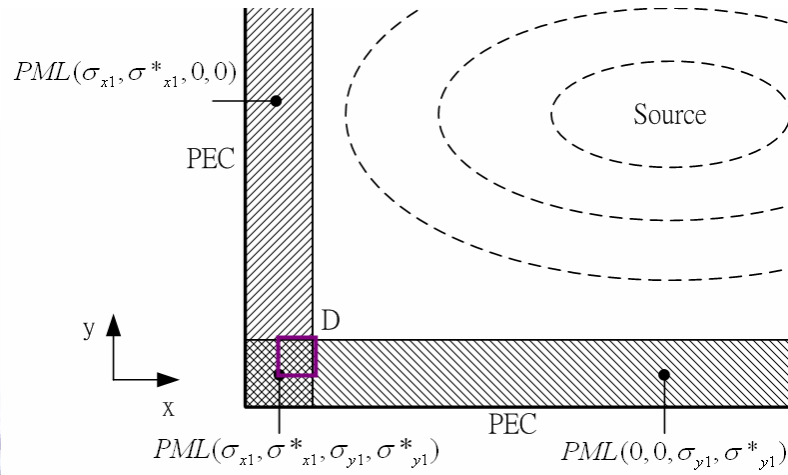


圖 4-12 角落所取的觀察點(m,n), m,n = 7,8,9,10

而計算後所得的特徵值如下表：

(7,10)	(8,10)	(9,10)	(10,10)
0.99509731966030	0.99913817553292	0.99995650734301	1.00000000000000
0.99387535464606	0.99892282587133	0.99990712692058	1.00000002093215
0.99387535464604	0.99892282587062	0.99998414264006	0.99999997906785
0.99509731966030	0.99913817553292	0.99995650734301	1.00000000000000

(7,9)	(8,9)	(9,9)	(10,9)
0.99505404020972	0.99909472033203	0.99991301657713	0.99995650734301
0.99382132168125	0.99886851849842	0.99979706432715	0.99990712691689
0.99382132168132	0.99886851849831	0.99998548661726	0.99998414264375
0.99505404020972	0.99909472033203	0.99991301657713	0.99995650734301

(7,8)	(8,8)	(9,8)	(10,8)
0.99423971804480	0.99827709293558	0.99909472033203	0.99913817553292
0.99280478022135	0.99693884811606	0.99886851849820	0.99892282587131
0.99280478022142	0.99875560465011	0.99886851849853	0.99892282587064
0.99423971804480	0.99827709293558	0.99909472033203	0.99913817553292

(7,7)	(8,7)	(9,7)	(10,7)
0.99021867646681	0.99423971804480	0.99505404020972	0.99509731966030
0.98644576669775	0.99280478022130	0.99382132168129	0.99387535464604
0.98913249965166	0.99280478022149	0.99382132168128	0.99387535464606
0.99021867646681	0.99423971804480	0.99505404020972	0.99509731966030

表 4-3 角落 PML 的放大矩陣特徵值

由上兩表可知，PML 層中仍有比 1 大的特徵值，這顯示出事實上 LOD-FDTD 可能是一個不穩定的數值方法。但比 1 大的特徵值又只出現在緊靠模擬空間中的一層，所以我們取觀察點為(60,10)，緊鄰模擬空間，也是最可能發散的地方，進一步地觀察 LOD-FDTD 長時間下來的斂散情形：

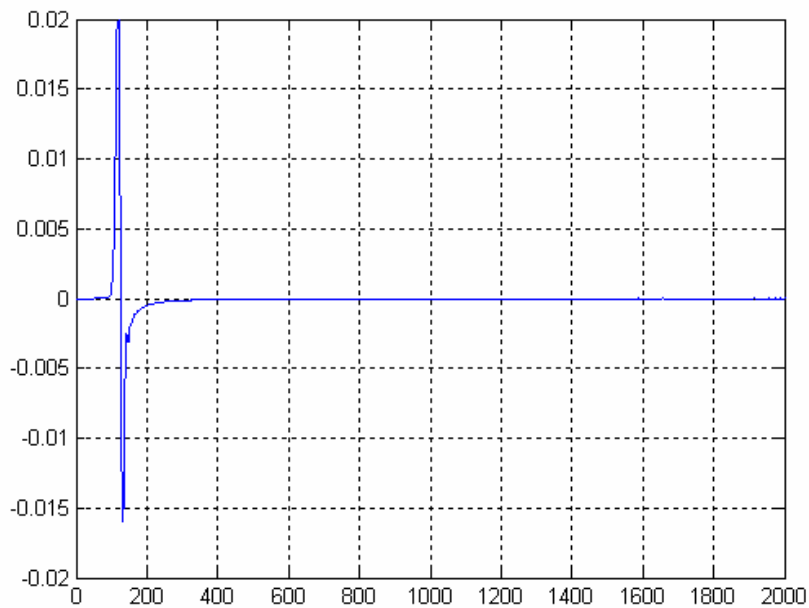


圖 4-13 H<sub>z</sub> 場在 2'000 個時間步之後的行為

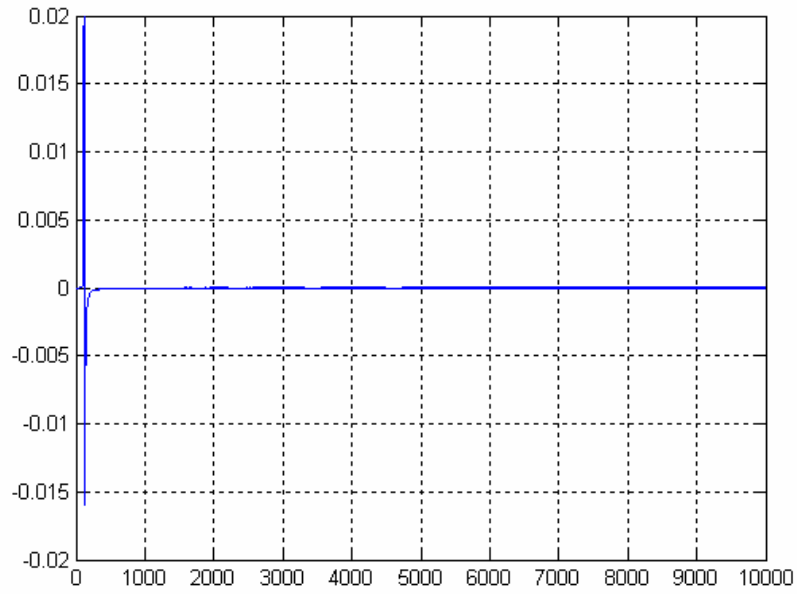


圖 4-14  $H_z$  場在 10'000 個時間步之後的行為

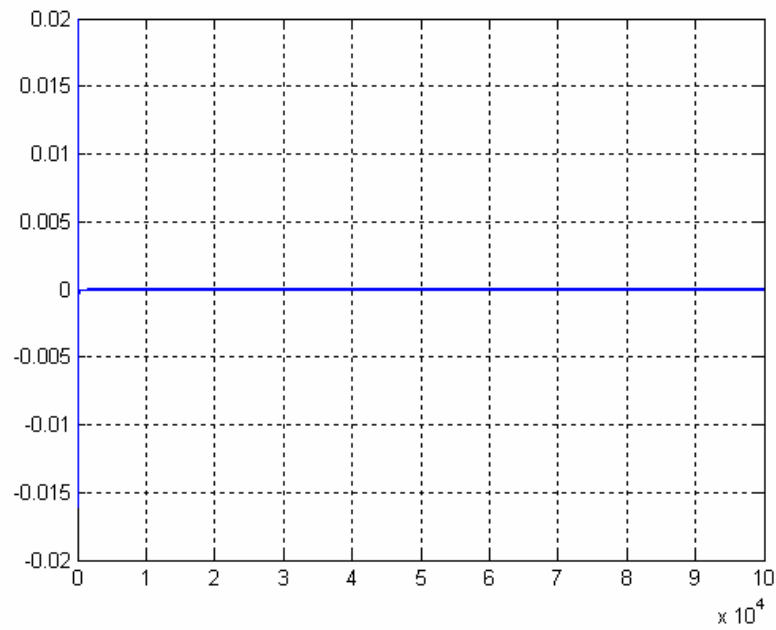


圖 4-15  $H_z$  場在 100'000 個時間步之後的行為

所以我們可以得到一個結論，就是 LOD-FDTD 雖然可能是一個不穩定的數值方法，但是它在二維度的模擬中，可以算到 100'000 個時間步，都還不會發散。

## 4.6 心得與討論

在本章的開頭，我們在模擬環境的四週加上 Berenger 所提出的 Split-Field PML，成功地做出一個具有吸收效果的邊界。接下來我們進一步推導出其放大矩陣，想觀察其吸收效果的強弱。而後發現 LOD-FDTD 有些放大矩陣的特徵值大於 1，這證明了在這個模擬情境下，這個數值方法本身的確有存在發散的行為。但是我們進一步去觀察更長時間後的場量，發現在二維度的模擬中，LOD-FDTD 可以保證在 100'000 都不會發散，這表示其發散性並不強烈，整體而言穩定性是不錯的。



## 第五章 三維度 LOD-FDTD 方法的實現

### (The Implementations of 3-D LOD-FDTD Method)

#### 5.1 簡介

本章節先把三維度的馬克士威爾方程式做拆解。用 Split-Field 方法，把每個分量場拆成兩個分量，接著利用 LOD 方法，把時間程序做分割。不同於一維與二維度，本章中的模擬把時間步拆成三個程序，每個程序分別對於 x-、y-、與 z-方向做計算。稍後會做個簡單的模擬來做為驗證，並跟其它的數值方法做比較。這種處理方程式與拆解時間步的方法，是引入 Split-Field PML 的必經過程，可以預期 LOD-FDTD 的模擬將會在不久的將來實現。

#### 5.2 三維度 LOD-FDTD 的數學推導

本節中我們將會介紹三維度的馬克士威爾方程式，如何做 Split-Field 的拆解方法。跟一維度和二維度不同的是，在三維空間中不會再做任何的化簡，必須對所有的場分量來做討論。

先列出馬克思威爾方程式在 Free Space 中的形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{H} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{cases}$$

### 5.2.1 三維度 LOD-FDTD 第一時間程序的數學推導

在第一時間程序中，我們全是對 x 方向來做計算。意即在以下的推導中，全是對

$E_{yx}, E_{zx}, H_{yx}, H_{zx}$  來做疊代。

先重寫一次馬克斯威爾方程式：

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{(*)}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y^{(*)}}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{array} \right) \text{ and } \left( \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(*)}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y^{(*)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{array} \right)$$

方程式中有標記(\*)的地方，對 x 偏微的計算，是在這個時間程序中所要做的處理。

定位各分量場所在位置的座標：

$$\left( \begin{array}{l} H_{zx} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right), H_{zy} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) \\ E_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right), E_{xz} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\ E_{yx} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right), E_{yz} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \\ H_{xy} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), H_{xz} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \\ H_{yx} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right), H_{yz} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ E_{zx} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right), E_{zy} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right)$$

使用 Split-Field 的機制，把對 x 方向偏微的運作量場都挑出來：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} \\ \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \\ \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial(E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \end{array} \right.$$

寫出第一時間程序的差分方程式：(對  $E_{yx}, E_{zx}, H_{yx}, H_{zx}$  疊代)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \dots(5.1) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{yz}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^n(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \\ +\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{yx}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^n(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \dots(5.2) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{zy}^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \\ +\frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{zx}^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \dots(5.3) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \dots(5.4) \end{array} \right\}$$

把(5.1)、(5.4)兩個方程式抽出來：

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \dots (5.1) \\ & \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & -\frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \dots (5.4) \end{aligned} \right.$$

化簡(5.4)式：

$$\begin{aligned} H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) &= H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

代入(5.1)式：

$$\begin{aligned} & \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-1, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \end{aligned}$$



整理後可得：

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2}) E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \\
& = E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left( H_{zy}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left( H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
& \quad + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
& \quad + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right)
\end{aligned}$$

再把(5.2)、(5.3)兩個方程式抽出來：

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \dots(5.2) \\
& \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\
& - \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \dots(5.3)
\end{aligned} \right.$$

化簡(5.3)式：

$$H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right)$$

代入(5.2)式：

$$\frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-1, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x}$$

整理後可得：

$$\frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2}) E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \\ = E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left( H_{zy}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\ - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left( H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right)$$

最後，整理出第一時間程序的四條方程式：（對  $E_{yx}, E_{zx}, H_{yx}, H_{zx}$  的疊代）

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2}) E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \\
&= (1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2}) E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
&- \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left( H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + H_{zy}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right) \dots (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \left( E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
&- \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left( E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) \right) \dots (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j+\frac{1}{2}, k) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2}) E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} E_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \\
&= (1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2}) E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yx}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta x^2} \left( E_{yz}^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - 2E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^n(i-1, j+\frac{1}{2}, k) \right) \\
&- \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} \left( H_{zx}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + H_{zy}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right) \dots (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_{yx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = H_{yx}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \left( E_{zy}^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^n(i, j, k+\frac{1}{2}) \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left( E_{zx}^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^n(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right) \dots (5.8)
\end{aligned}$$

## 5.2.2 三維度 LOD-FDTD 第二時間程序的數學推導

在第二時間程序中，我們全是對 y 方向來做計算。意即在以下的推導中，全是對

$E_{zy}, H_{xy}, E_{xy}, H_{zy}$  來做疊代。

先重寫一次馬克斯威爾方程式：

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z^{(*)}}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x^{(*)}}{\partial y} \right) \end{array} \right) \text{ and } \left( \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z^{(*)}}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(*)}}{\partial y} \right) \end{array} \right)$$

方程式中有標記(\*)的地方，對 y 偏微的計算，是在這個時間程序中所要做的處理。

定位各分量場所在位置的座標：

$$\left( \begin{array}{l} H_{zx} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right), H_{zy} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) \\ E_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right), E_{xz} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\ E_{yx} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right), E_{yz} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \\ H_{xy} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), H_{xz} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \\ H_{yx} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right), H_{yz} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ E_{zx} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right), E_{zy} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right)$$

使用 Split-Field 的機制，把對 y 方向偏微的運作量場都挑出來：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{\partial (H_{xz} + H_{xy})}{\partial y} \\ \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \\ \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial (E_{xz} + E_{xy})}{\partial y} \end{array} \right.$$

寫出第二時間程序的差分方程式：(對  $E_{xy}, E_{zy}, H_{xy}, H_{zy}$  疊代)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right) \end{array} \right\} \dots (5.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \end{array} \right\} \dots (5.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ - \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \end{array} \right\} \dots (5.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \\ + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \right) \end{array} \right\} \dots (5.12)$$

把(5.9)、(5.12)兩個方程式抽出來討論：

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right) \dots (5.9) \\ & \frac{H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \\ & + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \right) \dots (5.12) \end{aligned} \right.$$

化簡(5.12)式：

$$\begin{aligned} H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) &= H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \right) \end{aligned}$$

代入(5.9)式：

$$\begin{aligned} & \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - 2E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k)}{\Delta y} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - 2E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k)}{\Delta y} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k)}{\Delta y} \end{aligned}$$

整理後可得：

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}) E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k) \\
& = E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left( H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left( H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - 2E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - 2E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k) \right)
\end{aligned}$$

再把(5.10)、(5.11)兩個方程式抽出來：

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \dots (5.10) \\
& \frac{H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\
& - \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \dots (5.11)
\end{aligned} \right.$$

化簡(5.11)式：

$$H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right)$$

代入(5.10)式：

$$\frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2})}{\Delta y}$$

整理後可得：

$$\frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}) E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2}) \\ = E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left( H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) \right) \\ - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left( H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2}) \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2}) \right)$$



最後，整理出第一時間程序的四條方程式：（對  $E_{xy}, E_{zy}, H_{xy}, H_{zy}$  的疊代）

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}) E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2}) \\
& = (1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}) E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) + E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2}) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-1, k+\frac{1}{2}) \right) \\
& - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left( H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) \right) \dots (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) & = H_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} \left( E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right) \\
& - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left( E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) + E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right) \dots (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}) E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k) \\
& = (1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}) E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) + E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2} \left( E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - 2E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-1, k) \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} \left( H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zx}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) + H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right) \dots (5.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{zy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) & = H_{zy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} \left( E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xz}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right) \\
& + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left( E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{1}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right) \dots (5.16)
\end{aligned}$$

### 5.2.3 三維度 LOD-FDTD 第三時間程序的數學推導

在第三時間程序中，我們全是對 z 方向來做計算。意即在以下的推導中，全是對

$E_{xz}, E_{yz}, H_{xz}, H_{yz}$  來做疊代。

先重寫一次馬克斯威爾方程式：

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y^{(*)}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x^{(*)}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{array} \right) \text{ and } \left( \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y^{(*)}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x^{(*)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{array} \right)$$

方程式中有標記(\*)的地方，對 z 偏微的計算，是在這個時間程序中所要做的處理。

定位各分量場所在位置的座標：

$$\left( \begin{array}{l} H_{zx} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right), H_{zy} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) \\ E_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right), E_{xz} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\ E_{yx} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right), E_{yz} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \\ H_{xy} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), H_{xz} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \\ H_{yx} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right), H_{yz} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ E_{zx} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right), E_{zy} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right)$$

使用 Split-Field 的機制，把對 y 方向偏微的運作量場都挑出來：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \\ \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (H_{xy} + H_{xz})}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial (E_{xy} + E_{xz})}{\partial z} \end{array} \right.$$

寫出第三時間程序的差分方程式：(對  $E_{xz}, E_{yz}, H_{xz}, H_{yz}$  疊代)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\ -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right) \dots (5.17) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\ +\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right) \dots (5.18) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \\ +\frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right) \dots (5.19) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \\ -\frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right) \dots (5.20) \end{array} \right\}$$

把(5.17)、(5.20)兩個方程式抽出來討論：

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right) \dots(5.17) \\ & \frac{H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{-1}{\mu} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \\ & - \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right) \dots(5.20) \end{aligned} \right.$$

化簡(5.20)式：

$$\left. \begin{aligned} & H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \\ & - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right) \end{aligned} \right)$$

代入(5.17)式：

$$\begin{aligned} & \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - 2E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-1)}{\Delta z} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - 2E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-1)}{\Delta z} \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - 2E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k-1)}{\Delta z} \end{aligned}$$

整理後可得：

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2}) E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k-1) \\
&= E_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left( H_{yx}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left( H_{yz}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{xy}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - 2E_{xy}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xy}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-1) \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - 2E_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-1) \right)
\end{aligned}$$

再把(5.18)、(5.19)兩個方程式抽出來：

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_{yz}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{xy}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \frac{H_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right) \dots (5.18) \\
& \frac{H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \frac{E_{yx}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yx}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \\
& + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yz}^{\frac{n+2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right) \dots (5.19)
\end{aligned} \right.$$

化簡(5.19)式：

$$H_{xz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \\ + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right)$$

代入(5.18)式：

$$\frac{E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - 2E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - 1)}{\Delta z} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - 2E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - 1)}{\Delta z} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{2} \frac{E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - 2E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k - 1)}{\Delta z}$$

整理後可得：

$$\frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2}) E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{yz}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k - 1) \\ = E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left( H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right) \\ + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left( H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - 2E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - 1) \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - 2E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j + \frac{1}{2}, k - 1) \right)$$

最後，整理出第一時間程序的四條方程式：（對  $E_{xz}$ ,  $E_{yz}$ ,  $H_{xz}$ ,  $H_{yz}$  的疊代）

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2}) E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k-1) \\
& = (1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2}) E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) + E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-1) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - 2E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-1) \right) \\
& - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left( H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) + H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right) \dots (5.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{yz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) & = H_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} \frac{E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \\
& - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta z} \left( E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right) \dots (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) + (1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2}) E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k-1) \\
& = (1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2}) E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) + E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-1) \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta z^2} \left( E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - 2E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-1) \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left( H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xy}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}) + H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}) \right) \dots (5.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{xz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) & = H_{xz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} \frac{E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yx}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \\
& + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta z} \left( E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yz}^{n+\frac{2}{3}}(i, j+\frac{1}{2}, k) + E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) \right) \dots (5.24)
\end{aligned}$$

### 5.3 模擬結果

本章節將會對於三維度 LOD-FDTD 方法有個簡單的驗證。由於還沒真正加上邊界條件，此方法嚴格來講尚在實驗階段，所以我們也只會粗略地觀察一個簡單的例子。

首先，我們先對模擬環境有些基本的設定，

時間間隔上，我採用以下的數值：

$$\Delta t = 1.9246\text{E-}12 \quad (5.25)$$

空間間隔上，我採用以下的數值：

$$\Delta x = 1\text{E-}2 \quad (5.26)$$

經過這樣的設定，可以得到庫朗常數為：

$$\text{Courant Number} = \frac{c\sqrt{3}\Delta t}{\Delta x} = 1 \quad (5.27)$$

環境上我設定為長寬高各為  $60 \times 60 \times 60$  空間間隔，而波源我則設定為一個高斯波，從空間的正中間激發，並且模擬它行進到左右的邊界時，將會被完整地吸收：

$$\text{Source Pulse} = e^{-(x^2+y^2+z^2)/6} \quad (5.28)$$

由於我們目前的成果尚未加上邊界的條(Split-Field PML)，所以在以下的模擬中，我們只會採用 Sullivan [21]在書中對於 3-D FDTD 所作的實驗做個迅速的對照。

此實驗為在空間的正中央，沿著 Z 方向擺放一隻簡單的 dipole 天線，並觀察高斯波行進的行為。以下是我們的模擬結果：



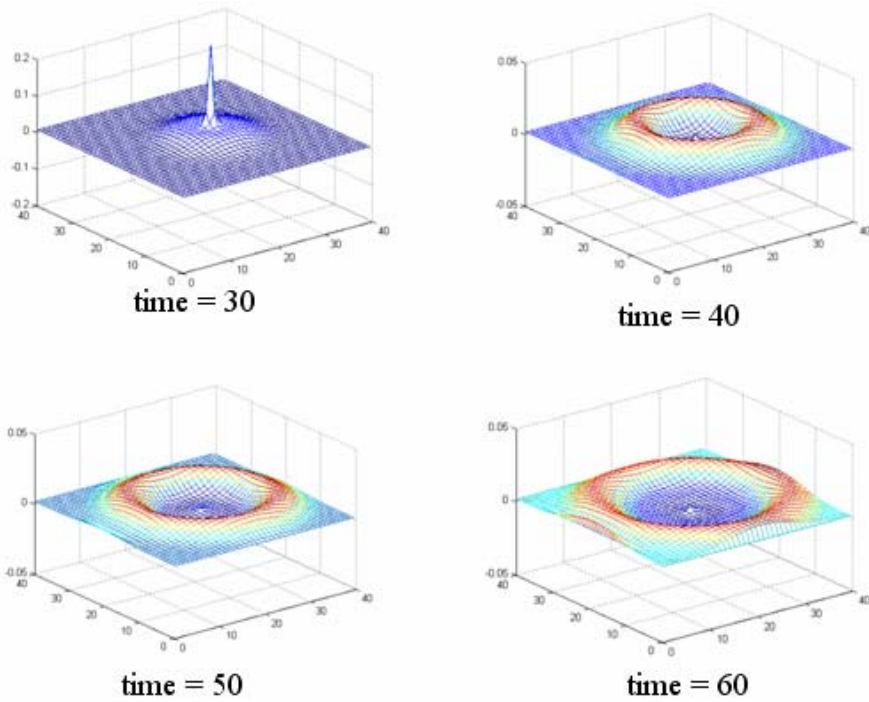


圖 5-1 三維度空間中加上 dipole，固定 X 座標為 30 的剖面(觀察  $E_z$  場)

## 5.4 計算複雜度

接下來本論文會對三維度 LOD-FDTD 方法的計算量做個估計。由之前的文獻，吾人可得知 ADI-FDTD [30]、Split-Step FDTD [31]、以及 LOD-FDTD [34] 的計算量。特別注意上句所提到的 LOD-FDTD，並沒有加上 Split-Field 的差分拆解，所以在計算複雜度上較本論文的為少，但在推廣性上和實用性上，就是本論文為佳了。

對一個數值方法而言，討論計算複雜度的方式就是算出所有加減乘除的量。以本論文所提的方法為例，像是(5.5) - (5.8)，(5.13) - (5.16)，(5.21) - (5.24)這幾個方程式，由於等號左邊是被更新、被疊代的場，這些計算是在解矩陣時才會遇到的，所以我們要計算的就是等號右邊的加減乘除總量。

對於乘和除，我們用 M/D (multiplications/divisions)來標記，而加和減，則用 A/S (additions/subtractions)來標記。下表列出四種方法所耗費的總計算量：

3-D FDTD Methods		ADI [30]	SS2 [31]	LOD [34]	LOD with SF
Implicit	M/D	18	27	18	24
	A/S	48	36	24	56
Explicit	M/D	12	9	6	12
	A/S	24	36	24	36
Total	M/D	30	36	24	36
	A/S	72	72	48	92

表 5-1 三維度 LOD-FDTD 配合分場方法與其它三維度 FDTD 方法的計算複雜度

值得注意的是，三維度 LOD-FDTD 配合上分場的差分拆解後，處理了多出一倍的場分量，但計算量卻不是變成兩倍。事實上，乘和除在程式中耗費的處理時間較長，但卻只有不分場處理的 1.5 倍( $36/24=1.5$ )。已知的事實是，LOD-FDTD 方法的計算比 ADI-FDTD 和 SS-FDTD 更迅速，這在表中也可以看得出，再加上分場的差分拆解後，LOD-FDTD 預期將很快被應用在模擬上。

## 5.5 心得與討論

在本章中，我們推導了三維度 LOD-FDTD 的差分方程，透過了一個例子，在三維環境的正中央加上 dipole 天線，得出一個有效的結果。而後在計算複雜度的比較上，也可得知三維度 LOD-FDTD 把方程式透過分場的拆解後，處理了兩倍的分量場，但卻只耗費不到兩倍的計算量。這個結論會使 LOD-FDTD 方法的實現更加地有貢獻。

## 第六章 結論

### (Conclusion)

本論文「二維度 LOD-FDTD 方法加上 Split-Field PML 的穩定性分析」中，包括了 LOD-FDTD 方法在一維度以及二維度環境中的實現及分析。

在一維度的環境中，我們首先搭配上 Sullivan 所提出的吸收邊界 ABC，成功地模擬出一個具有吸收效果的邊界。而後從數學證明 LOD-FDTD 為弱穩定後，更進一步觀察其長時間的行為，發現在一維度 TE 的模擬中，LOD-FDTD 在經過 100'000 次的疊代計算後，都不會產生發散的行為，這顯示其穩定性整體而言是不錯的。

在二維度的環境中，我們首先發現 Sullivan 所提出的吸收邊界已不足以模擬 LOD-FDTD 方法的計算。從而引入由 Berenger 所提出的 Split-Field PML 的概念，偷過分場的技巧之後，我們重新推導一次二維度的數學差分方程，並激發高斯波模擬加以實現，發現在邊界加上 Split-Field PML 時，的確可以達到良好的吸收效果，之後更觀察了反射係數，也驗證了這個模擬成果。

接下來我們進一步推導出其放大矩陣，發現在加了 Split-Field PML 的邊界條件下，有幾層放大矩陣的特徵值是大於 1 的，這個事實說明在這個模擬情境下，此數值方法本身確存在著發散的行為。但是當我們再進一步去觀察更長時間的場量時，發現在二維度的模擬中，LOD-FDTD 也能保證在經過 100'000 次的疊代計算後，也都不會出現發散的行為。這表示其發散性雖有存在，但並不強烈，整體而言穩定性在二維度也是不錯的。

最後本論文亦提出了三維度 LOD-FDTD 方法初步的推導。透過分場(Split-Field)的拆解，成功模擬出了簡單的例子，更進一步分析複雜度，發現分場後雖處理了 12 個分量場(是不分場的兩倍)，但卻沒花到兩倍的計算量，最大的優點在於，加速 Split-Field 的實現。是非常值得繼續研究的主題。

本研究仍有許多未來的發展方向，在此我們有兩個建議。

第一，朝更動邊界的設定著手進行。由於本研究最後的成果，只能保證第二層之後

的 PML 不會導致發散，但第一層卻仍然存在導致發散危險因子。所以，或者更動電導的函數，或者整個改變 PML 的計算方式，都很可能可以得到更好的結果。

第二，嘗試實現三維度 LOD-FDTD 方法加上 Split-Field PML 的模擬。對一個 FDTD 數值方法而言，如果沒有加上邊界的條件，其實的應用層面並不大。但如果以本研究為踏板，相信可以更容易進入三維度的完整模擬，以達到實際應用的目標。但三維度的環境下，再加上 Split-Field PML 的運用，必須要考慮 12 個分量場，不管是在數學的推導或穩定度的分析上，預期都將會是個嚴苛的挑戰。



## 参考文献

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. AP14, pp. 302-307, May 1966.
- [2] Takefumi. Namiki, "A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method," *IEEE Tran. Microw. Theory Tech.*, vol. 47, no. 10, pp. 2003-2007, October 1999.
- [3] Hongling Rao, Robert Scarmozzino, and Richard M. Osgood, "An improved ADI-FDTD method and its application to photonic simulations," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 14, no. 4, April 2002.
- [4] Sun, C. and Trueman, C. W., "Unconditionally stable Crank-Nicolson scheme for solving two-dimensional Maxwell's equations," *Electronics Letters*, vol. 39, no. 7, pp. 595-597, April 2003.
- [5] Guilin Sun and Trueman, C.W., "Approximate Crank-Nicolson schemes for the 2-D finite-difference time-domain method for  $TE_z$  waves," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 11, pp. 2963-2972, November 2004.
- [6] J. Shibayama, M. Muraki, J. Yamauchi and H. Nakano, "Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 19, September 2005.
- [7] J. Shibayama, R. Takahashi, J. Yamauchi and H. Nakano, "Frequency-dependent LOD-FDTD implementations dispersive media," *Electronics Letters*, vol. 42, no. 19, September 2006.
- [8] Jaakko S. Juntunen, Nikolaos V. Kantartzis, and Theodoros D. Tsiboukis, "Zero Reflection Coefficient in discretized PML," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 14, no. 4, April 2001.
- [9] Edwin A. Marengo, Carey M. Rappaport and Eric L. Miller, "Optimum PML ABC conductivity profile in FDTD," *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 35, no. 3, May 1999.
- [10] Valtamie E. do Nascimento Ben-Hur V. Borges, and Fernando L. Teixeira, "Split-Field PML implementations for the unconditionally stable LOD-FDTD method," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 16, no. 7, July, 2006.
- [11] Jiunn-Nan Hwang and Fu-Chiang Chen, "Effect of the conductivity profile on the stability of the ADI-FDTD Method with Split-Field PML," *Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference*, 2006.



- [12] Jiunn-Nan Hwang and Fu-Chiang Chen, "Modified perfectly matched layer conductivity profile for the alternating direction implicit finite-difference time-domain method with split-field perfectly matched layer," *IET Microwave Antennas Propagation*, vol. 1, no. 5, October 2007.
- [13] Jiunn-Nan Hwang and Fu-Chiang Chen, "A rigorous stability analysis in ADI-FDTD Method with PML Absorber," *Antennas and Propagation Society International Symposium 2006, IEEE*
- [14] Saul Abarbanel and David Gottlieb, "A mathematical analysis of the PML Method," *Journal of Computational Physics* 134, 357-363, 1997.
- [15] Shumin Wang and Fernando L. Teixeira, "An efficient PML implementation for the ADI-FDTD," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 13, no. 2, February 2003.
- [16] Stephen D. Gedney, Gang Liu, J. Alan Roden, and Aiming Zhu, "Perfectly matched layer media with CFS for an unconditionally stable ADI-FDTD method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 11, November 2001.
- [17] Fenghua Zheng, Zhizhang Chen, and Jiazong Zhang, "A Finite-Difference Time-Domain method without the Courant stability conditions," *IEEE Microw. and Guided Wave Letters*, vol. 9, no. 11, November 1999.
- [18] Eliane Becache, Peter G. Petropoulos, and Stephen D. Gedney, "On the long-time behavior of unsplit perfectly matched layers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 5, May 2004.
- [19] S. Gonzalez Garcia, M. A. Hernandez-Lopez, M. Fernandez Pantoja, R. Gomez Martin and B. Garcia Olmedo, "Unsplit Berenger's PML equations for arbitrary media," *Electronics Letters*, vol. 37, no. 25, December 2001.
- [20] R. Godoy Rubio, S. Gonzalez Garcia, A. Rubio Bretones and R. Gomez Martin, "An unsplit Berenger-like PML for the ADI-FDTD method," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 42, no. 6, September 2004.
- [21] Dennis M. Sullivan, "Electronic simulation using the FDTD method," IEEE Press Series on RF and Microwave Technology, Ch1-Ch4, pp.1-89.
- [22] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, "Numerical Analysis 8<sup>th</sup> Ed.," Thomson Brooks/Cole, Ch5, pp. 325-335.
- [23] J. P. Berenger, "Perfectly Matched Layer (PML) for computational electromagnetics," Morgan & Claypool Publishers, Ch2, Ch4-5, pp.13-24, pp. 49-85.
- [24] Allen Taflove, *Computational Electrodynamics-The Finite-Difference Time-Domain Method 2<sup>nd</sup>*, Norwood, MA: Artech House, 1995.
- [25] 林振華, "電磁場與天線分析 使用時域有限差分法(FDTD)" 全華科技圖書.
- [26] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Comput. Phys.*, vol.114, pp.185-200, 1994.

- [27] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations," *IEEE Trans. Electromag. Compact.*, vo. EMC-23, pp 377-382, Nov. 1981.
- [28] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed.* Boston, MA: Artech House, 2005.
- [29] Takefumi Namiki, "A new FDTD algorithm based in alternating-direction implicit method," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 10, pp. 2003-2007, Oct. 1999.
- [30] Takefumi Namiki, "3-D ADI-FDTD method—unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 20, pp. 1743-1748, 2000.
- [31] Jongwoo Lee and Beng Fornberg, "A split step approach for the 3-D Maxwell's equations," *Journal of Computational Applied Mathematics*, vol. 158, pp. 485-505, 2003.
- [32] J. Shibayama, M. Muraki, J. Yamauchi and H. Nakano, "Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 19, pp. 1046-1047, Sep. 2005.
- [33] Valtamie E. do Nascimento Ben-Hur V. Borges, and Fernando L. Teixeira, "Split-Field PML implementations for the unconditionally stable LOD-FDTD method," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 16, no. 7, pp. 398-400, Jul. 2006.
- [34] Eng Leong Tan, "Unconditionally stable LOD-FDTD method for 3-D Maxwell's equations," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 17, no. 2, Feb. 2007.