

國立交通大學

電信工程研究所

碩士論文

新型多天線系統分析

New Analysis of Multiple Antenna Systems

研究生：康雋偉

(Chun-Wei Kang)

指導教授：陳富強 博士

(Dr. Fu-Chiang Chen)

中華民國九十八年八月

新型多天線系統分析

New Analysis of Multiple Antenna Systems

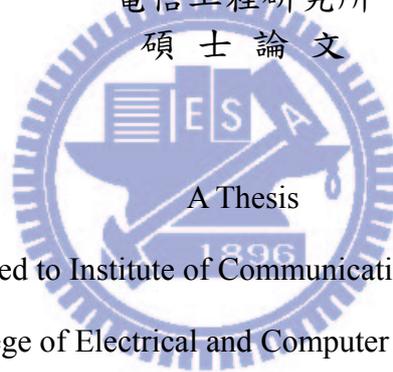
研究生：康雋偉

Student : Chou-Wei Kang

指導教授：陳富強 博士

Advisor : Dr. Fu-Chiarng Chen

國立交通大學
電信工程研究所
碩士論文



A Thesis

Submitted to Institute of Communication Engineering

College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Communication Engineering

August 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 九十八年 八月

新型多天線系統分析

學生：康雋偉

指導教授：陳富強 博士

國立交通大學電信工程研究所碩士班

摘要

在本論文中，我們提出了兩種新型關於多天線系統的電磁分析。第一項是天線空間相關係數(Antenna Spatial Correlation)的新型計算方法，第二項則是輻射效率(Radiation Efficiency)與匹配網路(Matching Network)的分析探討。論文中所有的討論驗證將以一對偶極天線與平版天線做為分析基準。

首先，我們分析過往天線空間相關係數表式方法，綜合比較發射端與接收端的異同，將各式方法截長補短後提出了一組接收端的新型態空間相關係數表式方法，此法借鏡發射端空間相關係數表示方式的特點，有別於傳統使用天線輻射場型而改用散射係數矩陣(Scattering Matrix)進行運算，又因散射係數矩陣的獲得與計算遠較天線輻射場型容易，達成大幅降低量測困難度與計算的複雜度的效果。

此外，我們探討了不同匹配網路與不同相位的饋入訊號在輻射效率上的行為，並定性定量的分析其成因，將其整理為一方便理解運算的公式。最後則運用微波電磁理論與數值技巧提出最佳化的匹配網路，除了求出其數值解外，也致力於研究其封閉公式解以降低其運算時間與提高方便性，並在各式實例中與傳統匹配網路進行效能比較與討論，以不同中心頻率、不同種類天線與不同的應用技術驗證之。

New Analysis of Multiple Antenna Systems

Student: Chou-wei Kang

Advisors: Dr. Fu-Chiang Chen

Institute of Communication Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

In the thesis, we propose two new electromagnetic analysis strategies to evaluate the performance of multiple antenna systems. The first is a new antenna spatial correlation formula, and the other is a new analysis strategy of radiation efficiency and the matching network. All case studies are simulated using a dipole pair and a patch pair as the benchmark.

First, we compare the spatial correlation formula of the receiver with the transmitter, and a new representation of spatial correlation formula is proposed. Replace of the radiation pattern, the formula of the receiver computes spatial correlation from the scattering matrix description of the antenna system. Because the scattering matrix is easier measured than the radiation pattern, this approximation formula can effectively reduce computation complexity and measurement difficulty.

We further propose a new analysis strategy and physical meaning of radiation efficiency and the matching network. It evaluates how the radiation efficiency may change when the antenna ports excite signals with different phases. Besides, we also investigate how different matching networks influence the radiation efficiency, and then derive a formula to describe the relationship. Moreover, we provide a new matching network for optimum radiation efficiency by microwave theory and mathematical deduction, and then prove it by applying them in real examples.

誌 謝

首先，我要感謝我的指導教授陳富強教授，這兩年來我不僅僅學到專業上的知識與研究方法，也瞭解到面對困境時應有的態度與自信，讓我對人生有新的觀感與體悟。接著要感謝同屆的 salmax 和 giant，與我一同度過這段難忘的日子，這兩年來在課業、日常生活、學術研究上的照應協助與建議指教都使我獲益良多。也很感激已畢業的王董、小潘、小莊、帥哥與小 k 學長，不論是研究所生活或是學術研究上的經驗傳承與建議指導給了我很大的幫助；還有新加入的實驗室成員：政男學長、昌儒、佑俞、哲宇及佳聲學弟，未來實驗室就靠你們了，相信實驗室會有更蓬勃的發展。最後，我要誠摯地感謝我的家人與朋友給我的支持與鼓勵，讓我能全心全意地完成這篇論文，也特別謝謝爸媽長久以來對我栽培與關懷照料與弟弟對我的關心打氣。

在此向給所有曾經幫助與關心我的人，表達我內心最真誠的感激。



雋偉 謹誌

2009 年 9 月 於新竹交大

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
	
第一章 導論	1
1.1 工程背景與研究動機	1
1.2 論文架構	2
第二章 多天線系統概述	4
2.1 MIMO 技術概述	4
2.2 空間相關係數	7
2.3 多天線系統重要參數	10
2.3.1 散射係數矩陣	10
2.3.2 天線輻射場型	12
第三章 新型空間相關係數公式	15
3.1 空間相關係數公式	15
3.2 新型空間相關係數公式	18

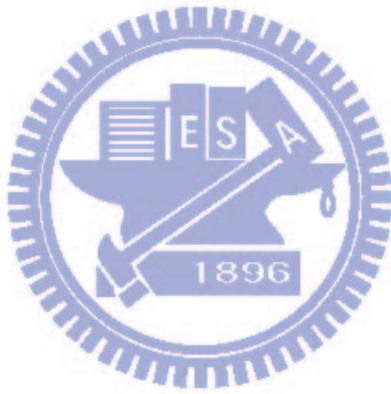
3.3 模擬結果與討論	21
第四章 概述輻射效率與匹配網路	24
4.1 輻射效率簡介	24
4.2 匹配網路簡介	29
4.2.1 共軛匹配	29
4.2.2 傳統匹配網路	30
4.2.3 散射係數矩陣與阻抗矩陣轉換	31
4.3 匹配網路效能與相關現象	31
第五章 輻射效率探討與最佳化匹配網路	36
5.1 輻射效率探討	36
5.2 最佳化匹配網路—數值解	42
5.2.1 定義問題與基本模型	42
5.2.2 量化	43
5.2.3 數值解	44
5.2.4 結果與討論	45
5.3 最佳化匹配網路—近似封閉公式解	48
5.3.1 特殊情況 1	49
5.3.2 特殊情況 2	54
5.3.3 歸納推論與結果	60
5.3.4 整體近似封閉公式解	65
第六章 結論	68
參考文獻	70

圖目錄

圖 2.1 多徑效應(a)示意圖(b)訊號.....	5
圖 2.2 發射訊號與經多徑效應影響的接收訊號.....	5
圖 2.3 MIMO 多天線系統示意圖.....	7
圖 2.4 多天線 MIMO 通道模型.....	9
圖 2.5 N 埠多天線模型.....	11
圖 2.6 $\lambda/2$ 偶極天線 (a)示意圖 (b) E 平面輻射場型.....	12
圖 2.7 $\lambda/2$ 平版天線結構圖.....	13
圖 2.8 $\lambda/2$ 平版天線輻射場型 (a) E 平面 (b) H 平面.....	13
圖 3.1 空間相關係數發展歷程圖.....	18
圖 3.2 HFSS 的偶極天線模擬結構圖.....	21
圖 3.3 HFSS 的平版天線模擬結構圖.....	22
圖 3.4 新型空間相關係數 (a)偶極天線 (b)平版天線.....	23
圖 4.1 傳統輻射效率示意圖.....	24
圖 4.2 雙天線模型.....	25
圖 4.3 雙天線輻射效率模型.....	26
圖 4.4 全主動反射係數輻射效率 (a)雙天線模型圖 (b)示意圖.....	28
圖 4.5 輻射效率與訊號源的相位差示意圖.....	29
圖 4.6 傳輸電路模型.....	29
圖 4.7 傳統匹配網路的輻射效率.....	32
圖 4.8 50 歐姆特徵阻抗匹配網路的輻射效率.....	33
圖 4.9 自身阻抗匹配網路的輻射效率.....	33
圖 4.10 輸入阻抗匹配網路的輻射效率.....	34
圖 5.1 餘弦定理示意圖.....	38

圖 5.2 S_{new} 示意圖	39
圖 5.3 相位差角度趨勢圖	40
圖 5.4 50 歐姆匹配網路與自身阻抗匹配網路中的空間相關係數	41
圖 5.5 匹配網路示意圖	42
圖 5.6 多天線系統模型	43
圖 5.7 (a)單純迴圈解示意圖 (b) 下山單純型法示意圖	45
圖 5.8 數值解與傳統匹配網路在不同角度中的比較結果	46
圖 5.9 空間多樣中各種匹配網路的效能比較	47
圖 5.10 空間多工中各種匹配網路的效能比較	48
圖 5.11 尋找近似封閉公式解流程圖	49
圖 5.12 相位差為 0° 的模型圖	49
圖 5.13 相位差為 0° 的阻抗示意圖	49
圖 5.14 相位差為 180° 的模型圖	50
圖 5.15 相位差為 180° 的阻抗示意圖	51
圖 5.16 相位差 0° 與 180° 時封閉公式解與數值解的實部比較結果	51
圖 5.17 相位差 0° 與 180° 時封閉公式解與數值解的虛部比較結果	52
圖 5.18 相位差 90° 時輸入阻抗匹配與數值解的比較結果	55
圖 5.19 相位差 90° 時輸入阻抗匹配、數值解與近似封閉公式解在偶極天線中的比較	59
圖 5.20 相位差 90° 時輸入阻抗匹配、數值解與近似封閉公式解在平版天線中的比較	60
圖 5.21 數值解與部分近似封閉公式解在偶極天線中的比較	62
圖 5.22 數值解與部分近似封閉公式解在平版天線中的比較	62
圖 5.23 數值解與部分近似封閉公式解在 1800MHz 偶極天線中的比較	63
圖 5.24 數值解與部分近似封閉公式解在 1800MHz 平版天線中的比較	64
圖 5.25 數值解與部分近似封閉公式解在 900MHz 偶極天線中的比較	64
圖 5.26 數值解與部分近似封閉公式解在 900MHz 平版天線中的比較	65
圖 5.27 數值解與部分近似封閉公式解、整體近似封閉公式解在偶極天線中的比較	66

圖 5.28 數值解與部分近似封閉公式解、整體近似封閉公式解在平版天線中的比較66



第一章 導論

(Introduction)

1.1 工程背景與研究動機

近年來，由於無線通訊技術蓬勃發展，語音和多媒體等多種綜合型通訊服務日益增加，而這些服務都架構在穩定且高傳輸速率的條件上，導致頻譜的需求與日遽增，另一方面，又因為頻譜的有限，導致供給趕不上需求，使頻譜的價值不斷上升，各國通訊執照水漲船高的拍賣價格也反應出此一現象。在此背景下，如何在有限的頻寬中充分利用現有的頻譜，成為現代無線通訊一個熱門的議題。

早期多天線系統的重點應用是智慧型天線(Smart Antenna)，智慧型天線主要可分為切換波束(Switched Beam)與自適型陣列(Adaptive Array)兩大類，主要原理都是透過控制天線的波束方向來提高系統增益與訊號雜訊比，降低接收訊號時間延遲和衰減的影響，藉此增加通訊系統的通道容量(Channel Capacity)，抑制不必要的干擾，進而提升頻譜利用效率。

但在今日，MIMO(Multiple-Input Multiple-output)技術成為各種應用多天線系統的技術中當之無愧的首選[1]，主因在於 MIMO 技術能在不增加頻寬的情況下成倍數地提高通訊系統的容量與頻譜使用率，而更高的頻譜使用率與通道容量就代表更高的數據傳輸速率、更寬廣的覆蓋範圍、更強的可信賴性，MIMO 技術不但能提供價性比更高的服務，同時也為多種新應用敞開了大門，更符合未來無線通訊的需求。另一方面，MIMO 也是一種多維無線通訊技術，傳統的無線系統是在一維通道內傳送盡可能多的資訊，而 MIMO 技術增加了訊號在空間傳送的維度自由(Degree of Freedom)，除了能提升設計的自由度外，還能增加空間使用率。

在無線寬頻移動通信系統方面，第三代移動通信合作計畫(3GPP)已經在規範中加入了 MIMO 技術，同時 B3G 與 4G 系統中也將採用 MIMO 技術，而在無線寬頻嵌入系統中，802.13e、802.11n 等也將應用 MIMO 技術，而在其他的無線通信係數中，譬如超

寬頻系統(UWB)、感知無線系統(CR)也都將 MIMO 技術納入規範中，無疑地，MIMO 是當代無線通訊中的關鍵技術。因此在後續篇幅中，我們將以 MIMO 技術為主論述多天線的研究。

1.2 論文架構

本論文提出了兩種針對多天線系統的電磁分析，其一是天線空間相關係數的新型計算方法，結合發射端空間相關係數的優點，提出新型接收端空間相關係數的計算方式，有別於傳統使用天線輻射場型計算而改用散射係數矩陣評估，鑑於測量散射係數矩陣比天線輻射場型容易獲得與計算簡單的特性，使我們能更方便且容易的評估接收端空間相關係數；另一則是以輻射效率為主題，首先探討訊號源相位差與匹配網路影響輻射效率的機制，並提出公式量化其關係，接著運用微波電磁理論與數值技巧提出最佳化的匹配網路，除了求出其數值解外，也致力於研究其封閉公式解以降低其運算時間並提升其方便性，並在各式實例中與傳統匹配網路進行效能比較，最後以不同中心頻率、不同種類



的天線與不同的調變方式驗證之。本論文將分為以下六個章節論述：

第一章 導論

簡單敘述本論文的工程背景與研究動機，並針對本論文內容架構作摘要整理。

第二章 多天線系統概述

簡介多天線系統與 MIMO 技術的特性與優點，說明何謂空間相關係數(Spatial Correlation Coefficient)與其在多天線系統中扮演的角色，最後則是介紹兩個重要的多天線參數，散射係數矩陣與天線輻射場型，以此為後續的研究做墊鋪。

第三章 新型空間相關係數

分析各種空間相關係數的計算方法，研究探討空間相關係數在接收端與發射端的異同並分析其原因，接著利用微波電磁理論與數值技巧將發射端的計算方式結合應用至接收端，以此提出新的計算方式，最後使用電磁數值模擬軟體加以驗證與討論。

第四章 概述輻射效率與匹配網路

簡介輻射效率的研究歷程並分析一些常見的匹配電路的表現與其物理意義，接著呈現天線埠饋入訊號的相位差與其匹配電路影響輻射效率的現象與機制，並描述欲解決之課題。

第五章 輻射效率探討與最佳化匹配網路

首先研究輻射效率的物理意義與數學特性，並以此量化分析解釋饋入訊號的相位差與匹配網路如何影響輻射效率，第二部分則描述尋找最佳化匹配網路的過程，針對天線埠饋入不同相位差的情況，利用之前的研究成果再結合數種數值方法與微波電路理論歸納出最佳化的匹配網路，並將其結果利用電磁模擬軟體在各種實例中與常見的匹配網路比較與討論。

第六章 結論

說明本論文的結果與心得討論。



第二章 多天線系統概述

(Overview of Multiple Antenna Systems)

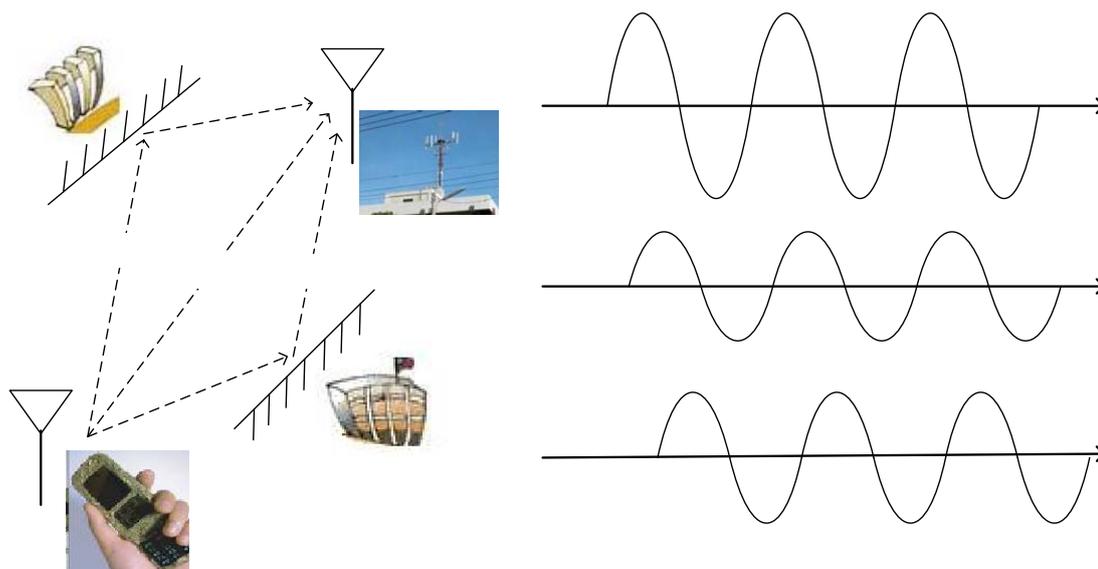
近年來，無線通訊技術蓬勃發展，相關需求與日劇增，各大企業紛紛投入這潛力無限的市場中，也因此加速了無線通訊產業的進步，其中個人通訊服務發展速度更是一日千里，然而因應大量的資料傳輸與多媒體服務，頻譜已逐漸匱乏。在此背景下，MIMO 技術結合多天線系統這種可以成倍數地提高通訊系統的容量與頻譜使用率的應用模式自然地成為近年來無線通訊系統的關鍵核心。在本章中，我們將先簡介多天線系統與 MIMO 技術的特性與優點，接著描述空間相關係數在多天線系統中所扮演的角色，闡述後續研究課題的背景，最後則是介紹兩個重要的天線參數，散射係數矩陣與天線輻射場型，以此為後續的研究做墊鋪。

2.1 MIMO 技術概述

在本節中，我們將先簡介多天線系統與 MIMO 技術的特性與優點。

為了更清晰的陳述多天線系統與 MIMO 技術，我們將在此先介紹無線通訊系統中的一個難題—多徑效應 (Multipath Effect)。

一般情況下，從信號傳送端到接收端間會有一個直射的主要通道。但不可避免地，會有通過反射、繞射等方式構成的其它路徑，而不同路徑的相同信號在接收端疊加會造成訊號的失真，稱為多徑效應，多徑效應不僅是信號失真的主要原因之一，也是影響傳輸速率與頻譜使用率的根本因素，示意圖如下所示：



路徑 II
路徑 I
路徑 III
圖 2.1 多徑效應(a)示意圖(b)訊號

由圖 2.1 可發現，絕大多數經由非直接通道傳輸的訊號到達接收端時會因路徑較長導致衰減比正常訊號嚴重，而通常到達時間也會略晚，因此最簡單處理多徑訊號的方法就是直接忽略多徑效應，僅僅依靠主訊號自身來抑制多徑訊號，但這樣的作法在多徑訊號太強以至於無法忽略時明顯不適用。

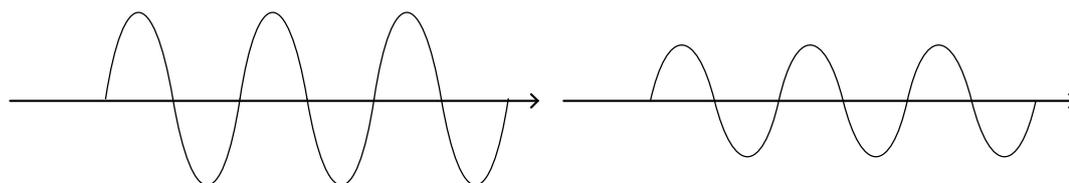


圖 2.2 發射訊號與經多徑效應影響(a)接收訊號

圖 2.2 說明了多徑訊號太強會造成接收訊號的衰減與失真，因此我們需要其他對抗多徑效應的方法，主流的方式可以分為以下三大類：

1. 提高收接機的精確度
2. 利用編碼技術

3. 使用智慧型天線

以上這些技術都是認為多徑效應是無用甚至有害的，所以需要各式各樣的通訊技術來抑制這種危害，降低多徑的影響。

多天線系統是由 A.R. Kaye 和 D.A. George 在 1970 年提出[2]，一開始的目的是利用多天線抑制通道衰減，而在 80 年代，J. Winters 與 J. Salz 提出了波束成型(beamforming)的概念[3,4]，開啟了將波束成型技術應用至天線的風潮，最後的成果就是所謂的智慧型天線——一種波束能隨著使用者位置調整的天線，由於智慧型天線中優於傳統的指向性使其有相當不錯的訊號增益，在 1990 年初期，智慧型天線也被認為是解決多徑效應的最佳方法之一。

而在 1998 年，貝爾實驗室突破傳統無線通訊的慣性思路，沒有將多徑效應視為負面因素設法消除其影響，反而利用 MIMO 技術化多徑效應為助力，應用空間多樣(Spatial Diversity)與空間多工(Spatial Multiplexing)，反而利用了多徑效應提高通信系統的容量與頻譜使用率。當然，這並不表示著波束成形和接收合成技術是無用的，在點對點應用中(例如戶外無線回傳應用)，兩者均能成倍提高系統性能，但從無線通訊系統的角度來說，波束成形和接收合成技術只是一種針對傳統無線系統的改善，而 MIMO 卻是一種推翻舊有慣性思維的突破，戲劇性地改變了人們對多徑傳播的看法。兩者的差異也反應在頻譜使用率上，接收合成和波束成形只能一次將頻譜使用率增加一或兩個 b/s/Hz，而 MIMO 則能夠使 b/s/Hz 成倍增加。

MIMO 技術可以解決通訊系統中多路徑效應的難題，但是 MIMO 技術也有其缺點——對於頻率選擇性衰減毫無辦法。而為了處理頻率選擇性衰減的問題，近年來有研究者將 MIMO 技術與正交分頻多工技術(Orthogonal Frequency Division Multiplexing，以下簡稱 OFDM)結合，以此實現一個高頻譜使用率且能應用在多數環境中的無線通訊技術。

OFDM 的基本原理將頻域內的通道利用快速傅立葉轉換(DFT)或快速傅立葉轉換(FFT)分為若干互相正交的子通道，信號通過每個子通道獨立傳輸，而每個子通道都擁有自己的載波分別進行對信號調變，如果子通道的頻寬足夠窄，自然地子通道內不會有頻率選擇性衰減，所以我們可將其視為平坦的通道，又每個子通道間彼此正交，所以其

頻譜使用率比起一般的串行系統高出一倍以上。儘管 OFDM 有以上好處，而且早在 1970 年代就已提出，但由於實現傅立葉轉換設備的複雜度、發射端與接收端震盪器的穩定度以其射頻功率放大器的線性要求都頗高，所以直到近年來電路 IC 技術的發展，OFDM 技術才逐漸被應用。

MIMO 技術可以在平坦通道中成倍增加頻譜效率，而 OFDM 可以將頻率選擇性衰弱通道轉換為平坦通道，因此 MIMO-OFDM 這種將 MIMO 與 OFDM 結合起來的技術就能帶來相當大的好處，在擁有很高的傳輸速度的同時擁有很強的可信賴度，再配合數種數位訊號處理(Digital Signal Process)技術，大大的增加了無線系統對於干擾、多徑效應的容忍度，其效能甚至可以逼近理論上的系統容量極限，可以預見地，MIMO-OFDM 會是近代無線通訊系統的核心技術，本論文中也將利用 OFDM-PM 技術驗證我們所提出的新型多天線系統分析。

2.2 空間相關係數

在本節中，我們將介紹空間相關係數的物理意義與其在多天線系統中扮演的角色和能提供訊息。

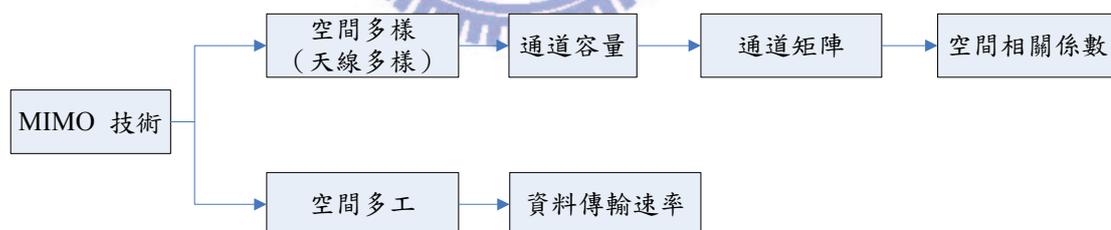


圖 2.3 MIMO 多天線系統示意圖

上圖是 MIMO 多天線系統的示意圖，其中空間多樣與空間多工是 MIMO 多天線系統中的兩大關鍵特色，而通道容量是評估系統效能的重要參數，MIMO 多天線系統中主要的優點就是反應在此數據上，而通道矩陣直接地影響了通道容量，又空間相關係數是通道矩陣中的重要參數，由上圖我們可以粗略瞭解空間相關係數扮演的角色—評估 MIMO 多天線系統是否充分發揮其優點的重要參數，以下我們將分別介紹上圖中各個方塊的特性並詳細量化其相互影響的機制。

空間多樣(Spatial Diversity)

無線通訊系統中，不可避免地會遇到通道衰減的問題—當傳送路徑遇到強烈的衰減，多數的無線通訊設計都會出錯。針對這樣的特性，很自然地應對方法是用不同的路徑傳送載有同樣訊息的信號，替要傳送的訊息「買保險」，這種增加信號的可信賴性 (Reliability) 的技術就稱為多樣(Diversity)，由此獲得的系統增益增為多樣增益(Diversity Gain)，一般實現多樣的方法依其特性可以分為三大類：時間多樣、頻率多樣、空間多樣，而 MIMO 技術就是一種實現空間多樣的方式。

空間多工(Spatial Multiplexing)

在發射端，我們將高速率的數據流分割為多個低速率的子數據流，並利用不同的發射天線發射不同的子數據流，如果系統的空間子頻道相關係數足夠低，就能在時域與頻域外提供額外的空間維度，成倍地提升數據傳輸速度。

通道容量(Channel Capacity)

通道容量是由 C. Shannon 所定義的一個頻道參數[5]，是指通道能夠可靠地傳送資訊時可達至的最大速率上限，可以反應出通道的傳輸能力，此數據能量化反應出 MIMO 多天線系統與傳統無線通訊系統的差異，以下是傳輸通道為加成性高斯白雜訊時 (Additive White Gaussian Noise，一種普遍的通道模型)，通道容量的公式：

$$C = B * \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (2.1)$$

其中 C 就是頻道的容量，單位為位元每秒(bits/second)， B 是頻道的頻寬， S 為在頻寬內全部接收信號的功率， N 則是雜訊的功率，其中 S/N 又被稱為訊號雜訊比 (Signal-to-noise Ratio，以下簡稱 SNR)。

通道矩陣(Channel Matrix)

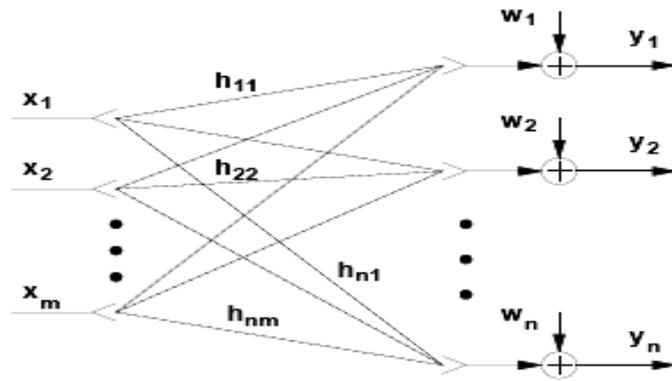


圖 2.4 多天線 MIMO 通道模型

上圖是一個典型的多天線 MIMO 模型，我們令發射訊號為 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 接收訊號為 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ，雜訊為 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 則可以將以上三者表示為：

$$y = Hx + w \quad (2.2)$$

其中 H 即為通道矩陣。而我們可以將通道容量公式改寫如下：

$$C = \log_2 \det \left\{ I + \frac{\text{SNR}}{n} HH^+ \right\} \quad (2.3)$$

其中 $\det\{A\}$ 代表取矩陣 A 的行列式， A^+ 則代表將矩陣 A 轉置後再取共軛， n 則是天線的數目。通道矩陣能反應接收訊號與發射訊號的關係，以此定量的描述出系統通道的特性，同時此參數也是影響通道容量的主要因素之一。

空間相關係數(Spatial Correlation)

W. C. Jakes 在 1974 年提出無線通訊系統中空間相關係數的基本定義[6]：

$$\rho_{m,n} = \frac{E\{r_m(t)r_n^*(t)\}}{\sqrt{E\{r_m(t)r_m^*(t)\}E\{r_n(t)r_n^*(t)\}}} \quad (2.4)$$

其中 $r_m(t)$ 代表第 m 個訊號， $E\{f(t)\}$ 代表取 $f(t)$ 的平均值， $f(t)^*$ 則是 $f(t)$ 的共軛， $\rho_{m,n}$ 是第 m 個與第 n 個訊號間的空间相關係數。

此參數可以反應出兩個訊號間的相關性，如果兩個訊號的相關係數越高，則相關程度越高，這對排除多徑效應而言是一個好消息，但對多天線系統與 MIMO 技術而言卻

是災難。如前所述，MIMO 技術是利用多徑效應產生的多個獨立的路徑達到空間多樣的效果，而越獨立的路徑，其通過訊號的相關程度應該越低，MIMO 多天線技術的效果就越好。因此若相關係數過高，代表兩訊號根本可以視為同一個訊號，自然失去空間多樣的效果，進而影響到 MIMO 多天線系統的效能。

而由空間相關係數可以得到空間相關矩陣，再利用空間相關矩陣獲得通道矩陣，其公式如下：

$$H = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}\{R_T\}}} R_R^{1/2} G R_T^{1/2} \quad (2.5)$$

其中 $\text{tr}\{A\}$ 代表取矩陣 A 的跡數(trace，對角線元素的總和)， R_R 與 R_T 分別代表接收端與發射端的相關係數矩陣，而 G 則由通道的性質決定，有了通道矩陣可再代入式(2.3)推導出對系統通道的影響，

由以上的簡介，我們可以定性地說明空間相關係數在 MIMO 系統中扮演的角色與定量地描述空間相關係數對 MIMO 的影響。

2.3 多天線系統重要參數

在本節中我們將介紹兩個重要的天線參數，散射係數矩陣 (Scattering Matrix) 與天線輻射場型(Antenna Radiation Pattern)，以此為後續的研究做墊鋪。

2.3.1 散射係數矩陣

在微波頻段中，由於實際測量電壓電流通常量到其行進波或駐波的大小與相位，不容易直觀獲得等效電壓等效電流，因此在微波網路參數中，散射係數矩陣是比較實用的，故底下我們將先介紹散射係數矩陣的定義和物理意義。

一般 N 埠多天線系統的物理模型如下圖所示：

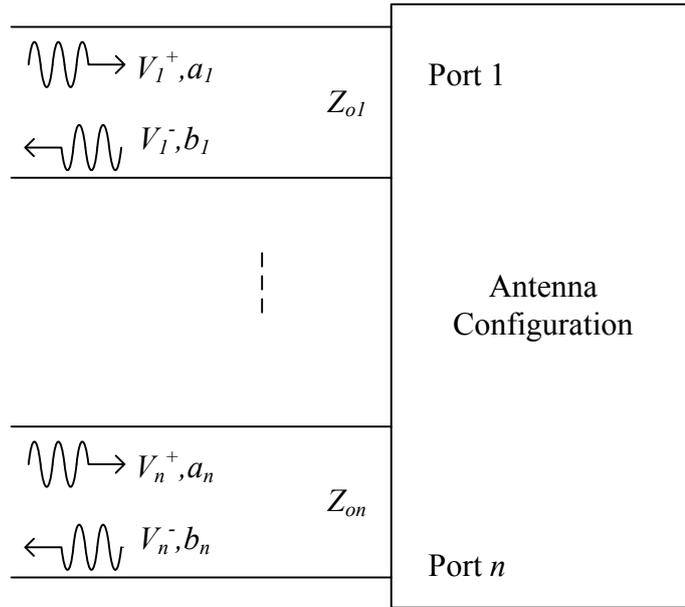


圖 2.5 N 埠多天線模型

其中， V_n^+ 代表入射的電壓波， V_n^- 則代表反射的電壓波，其下標 n 表示以第 n 埠為基準，但為了標準化散射參數，消除不同埠特徵阻抗不同的影響，需將電壓波除以其特徵阻抗開根號，定義廣義的入射波 a_n 與反射波 b_n ，如下所示：

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}}, b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}}$$

若將 a 與 b 化為行向量 (column vector)，在一個 N 埠多天線中，其與散射係數矩陣的關係可表示如下：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

散射係數矩陣可以完整描述一個微波網路的特性，同時能簡易清楚的反應出入射功率與反射功率的關係，另一方面，散射係數矩陣也可以藉由微波理論轉換為其他的參數矩陣。

2.3.2 天線輻射場型

天線輻射場型可以表示該組天線在輻射遠場(Radiation Far Field)中方向與相對的遠場強度的變化關係，通常以三維球座標的二維橫切面表示，是評量天線性能的重要指標。

一般研究天線的輻射場型，會從其電流分佈出發，積分電流分佈得其向量磁位(Magnetic Vector Potential)，再由向量磁位算出電場，最後求出其輻射場型，而藉由天線輻射場型我們可以得到該組天線的半功率波束寬度(Half-power Beamwidth)、指向性(Directivity)與功率增益(Power Gain)等重要參數。

天線的種類非常的多，其中偶極天線(Dipole Antenna)與平版天線(Patch Antenna)是最基本也具有代表性的兩種天線，因此以下將簡介偶極天線與平版天線的輻射場型。

偶極天線早在 19 世紀就被提出，可以用很簡單的方式實現，是最基礎也最具代表的天線之一，其 E 平面的輻射場型可以表示如下：

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \quad (2.6)$$

其中 β 代表其波數(phase constant)， L 則是其長度。以二分之波長偶極天線為例，其示意圖與 E 平面的輻射場型如下所示：

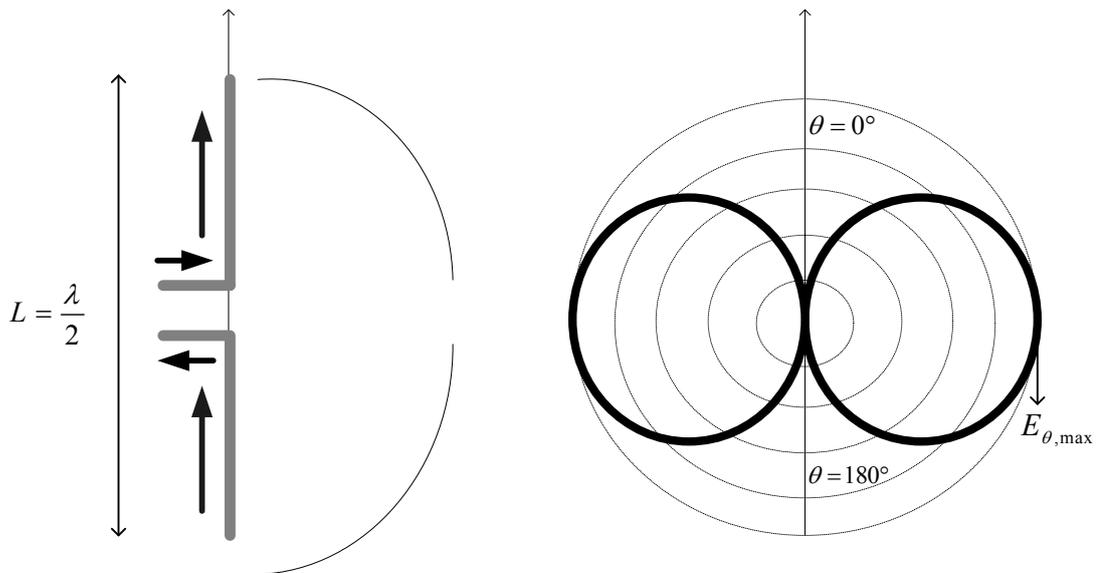


圖 2.6 $\lambda/2$ 偶極天線 (a)示意圖 (b) E 平面輻射場型

而平版天線同樣是歷史悠久且深具代表性的天線，其輻射場型可以表示如下：

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\sin\left(\frac{\beta W}{2} \sin \theta \sin \varphi\right)}{\frac{\beta W}{2} \sin \theta \sin \varphi} \cos\left(\frac{\beta L}{2} \sin \theta \cos \varphi\right) \quad (2.7)$$

其中 β 代表其波數(phase constant)， W 是其寬度， L 則是其長度。以下我們同樣以二分之波長為例，在匹配方面選擇使用嵌入饋電(Inset Fed)設計，圖 2.6 是整體結構的示意圖，而圖 2.7(a)、(b)是二分之波長平版天線在 E 平面與 H 平面的輻射場型：

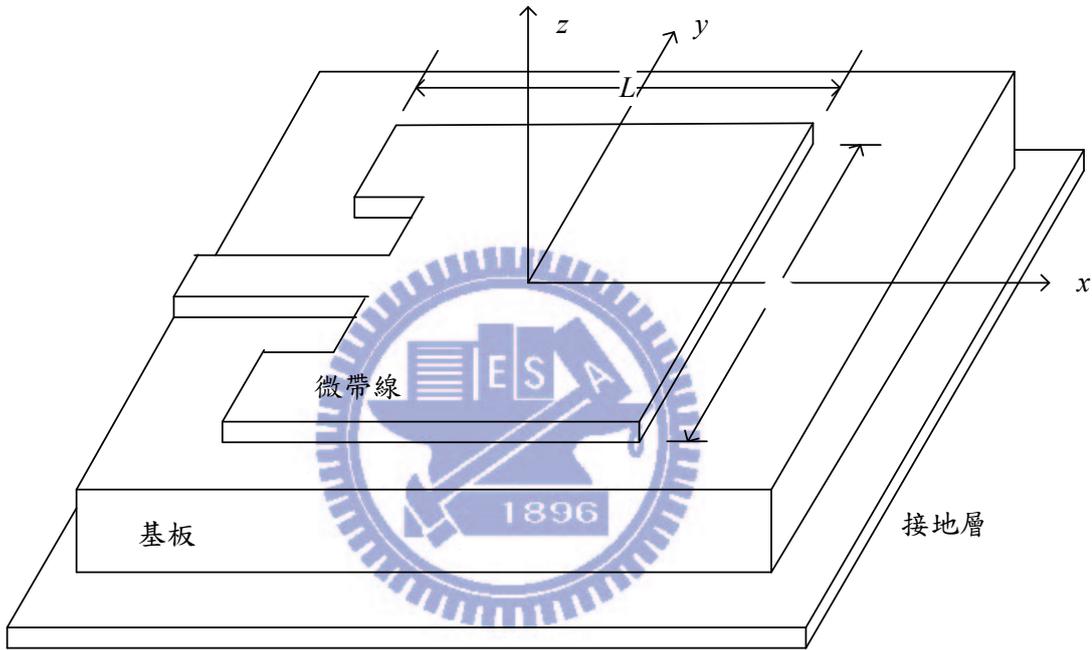


圖 2.7 $\lambda/2$ 平版天線結構圖

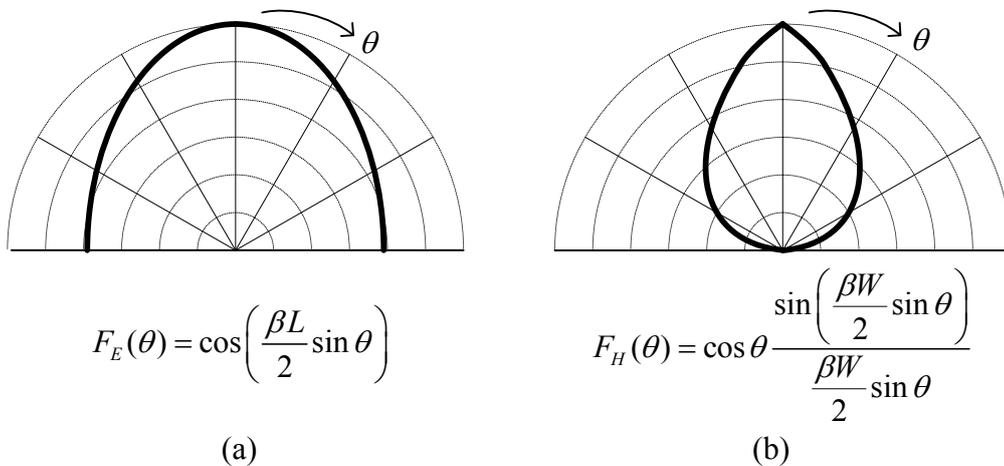
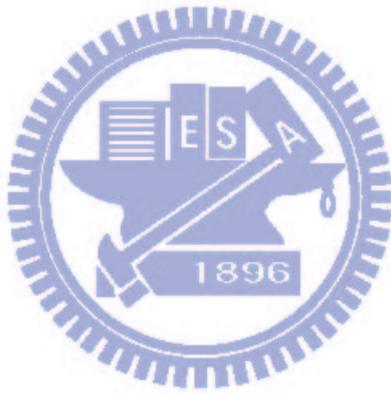


圖 2.8 $\lambda/2$ 平版天線輻射場型 (a) E 平面 (b) H 平面

以上的情形都是假設單隻天線的情況並依靠數值方法所解出的近似公式，而在多天線系統中因為考量其耦合效應與不同的饋入電路，因此後續章節中的天線場型我們是利用電磁模擬軟體獲得。



第三章 新型空間相關係數公式

(New Spatial Correlation Formula)

前述章節中已介紹空間相關係數在 MIMO 多天線系統中的定位與角色，我們對於其在發射端與接收端的異同甚感興趣，故在本章研究分析各種空間相關係數的表示方法，探討其在接收端與發射端的異同並分析其原因，再利用數學方法與電磁微波理論將發射端的優點應用至接收端後提出新型空間相關係數公式，最後使用電磁數值模擬軟體驗證之。

3.1 空間相關係數公式

由 2.2 節可知，空間相關係數在發射端與接收端是不同的，本節中也將分別依據發射端與接收端的不同來介紹前人的文獻與研究。

在發射端，R. G. Vaughan 和 J. B. Andersen 在 1987 年考慮天線的輻射場型與微波理論，將式(2.4)改寫如下[7]：

$$\rho_{nm} = \frac{\iint_{\Omega} [F_n(\varphi, \theta) \bullet F_m(\varphi, \theta)] d\Omega}{\sqrt{\iint_{\Omega} |F_n(\varphi, \theta)|^2 d\Omega \iint_{\Omega} |F_m(\varphi, \theta)|^2 d\Omega}} \quad (3.1)$$

其中 $F_n(\varphi, \theta)$ 代表第 n 個天線的輻射場型， \bullet 代表厄米特算子 (Hermitian Operator)， Ω 則代表該組天線的立體角。

2003 年，S. Blanch、J. Romeu 和 I. Corbella 利用散射係數矩陣將式(3.1)重新改寫，如下所示[8]：

$$\rho_{12} = \frac{|S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22}|}{\sqrt{(1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2)(1 - |S_{22}|^2 - |S_{12}|^2)}} \quad (3.2)$$

式(3.2)與式(3.1)相比，式(3.1)需要天線輻射場型而式(3.2)則是散射參數，而在實際測量中，因為散射係數矩陣只需要價值數十萬與佔地有限的向量網路分析儀，而輻射場型則需要一整間價值數百萬遠場量測實驗室，導致散射係數矩陣的獲得遠比天線輻射場

型容易，而在計算複雜度方面，式(3.1)需要複雜的厄米特運算與積分計算，式(3.2)卻只需簡易的四維運算，因此式(3.2)成為現在衡量發射端輻射效應的首選，不論是耦極天線、平版天線、單極天線(Monopole Antenna)、平面式倒 F 天線(Planar Inverted-F Antenna, PIFA)、槽孔式 PIFA(Slot PIFA)都有引用式(3.2)的文獻紀錄與實際量測比對的成果[9,10,11]。

而 B. Rembold 在 2008 年將式(3.2)延伸至 n 隻天線的情況，表示如下[12]：

$$\rho_{i,j} = \frac{\left| \sum_{n=1}^N S_{n,i}^* S_{n,j} \right|}{\sqrt{\left(1 - \sum_{n=1}^N |S_{n,i}|^2\right) \left(1 - \sum_{n=1}^N |S_{n,j}|^2\right)}} \quad (3.3)$$

在接收端，我們參考最原始的定義式(2.4)與最基本的發射端公式(3.1)，將天線的輻射場型、AOA 機率分佈與接收訊號差納入考量，寫出接收端的基本公式，將其表示如下：

$$\rho_{12} = \frac{\left| \iint_{4\pi} [F_1(\varphi, \theta) \cdot F_2(\varphi, \theta)] e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi} p_\varphi(\varphi, \theta) d\Omega \right|}{\sqrt{\iint_{4\pi} |F_1(\varphi, \theta)|^2 p_\varphi(\varphi, \theta) d\Omega \iint_{4\pi} |F_2(\theta, \varphi)|^2 p_\varphi(\varphi, \theta) d\Omega}} \quad (3.4)$$

其中， $F_n(\varphi, \theta)$ 與 Ω 同樣是代表第 n 個天線的輻射場型與立體角， d 為兩天線間的距離， λ 是天線中心頻率對應的波長， φ 是入射的方位角(Azimuth Angle)， $p_\varphi(\varphi, \theta)$ 為 AOA 機率分佈。

W. C. Jakes 在考量二維到達角(Angle of Arrival，以下簡稱 AOA)機率分佈，並默認天線輻射場型為完美的等向性的情況下，提出以下公式[6]：

$$\rho(d) = \int e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi} p_\varphi(\varphi) d\varphi \quad (3.5)$$

而在 AOA 機率分佈為單一分佈 Uniform Distribution)，且 $p_\varphi(\varphi)$ 等於 $1/2\pi$ ，這樣的情況被稱為 Clarke 模型[13]，代入式(3.5)可得：

$$\rho(d) = \frac{1}{2\pi} \int e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi} d\varphi \quad (3.6)$$

R. G. Vaughan 和 J. B. Andersen 將 Clarke 模型下且角度上下限 π 與 $-\pi$ 的空間相關係數算出如下：

$$\rho(d) = J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \quad (3.7)$$

其中 J_0 是零階貝索函數(Bessel function)，由於 Clarke 模型的普遍，式(3.7)常被系統通訊工程師用於評估接收端的空間相關係數。而在 2002 年，R. M. Buehrer 分析出單一分佈但上下限不是 π 與 $-\pi$ 而是一個小角度 Δ 的情況，其空間相關係數可表示如下[14]：

$$\rho(d) = \exp\left(j\frac{2\pi d}{\lambda}\sin(\varphi_0)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\cos(\varphi_0)\Delta\right) \quad (3.8)$$

而另一種常見的 AOA 機率分佈是高斯機率分佈：

$$p_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.9)$$

其中 φ_0 是 AOA 的期望值， σ 代表 AOA 的標準差。R. M. Buehrer 在同篇文獻中將式(3.9)代入式(3.6)[14]，再利用數學方法將空間相關係數近似如下：

$$\rho(d) = \exp\left\{j\frac{2\pi d}{\lambda}\sin(\varphi_0)\right\} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sigma\cos(\varphi_0)\right)^2}{2}\right\} \quad (3.10)$$

而在 2007 年，謝博全利用高斯分佈去近似模擬單一分佈，將大角度的單一分佈空間相關係數的近似公式表示如下[15]：

$$\rho(d) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp\left\{j\frac{2\pi d}{\lambda}\sin(\varphi_n)\right\} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sigma_n\cos(\varphi_n)\right)^2}{2}\right\} \quad (3.11)$$

但式(3.7)、式(3.8)、式(3.10)與式(3.11)並未考量到天線的情況，將天線的輻射場型默認為完美的等向性 (Isotropic)，但實際上，完美的等向性天線是不存在的，因此 C. Waldschmidt 和 W. Wiesbeck 在考量天線輻射的效應後，將式(2.4)重新改寫如下[16]：

$$\rho_{12} = \frac{R_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \quad (3.12)$$

其中，

$$R_{12} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [E_{\theta 1}(\varphi, \theta) \cdot E_{\theta 2}(\varphi, \theta) \cdot p_\theta(\varphi, \theta) + E_{\varphi 1}(\varphi, \theta) \cdot E_{\varphi 2}(\varphi, \theta) \cdot p_\varphi(\varphi, \theta)] \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\sigma_i^2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [|E_{\theta i}(\varphi, \theta)|^2 \cdot p_\theta(\varphi, \theta) + |E_{\varphi i}(\varphi, \theta)|^2 \cdot p_\varphi(\varphi, \theta)] \sin \theta d\theta d\varphi$$

$E_{\theta i}(\varphi, \theta)$ 與 $E_{\varphi i}(\varphi, \theta)$ 代表第 i 個天線在 φ 維度與 θ 維度的輻射場型， $p_\varphi(\varphi, \theta)$ 仍舊是 AOA 機率分佈，而 C. Waldschmidt 和 W. Wiesbeck 將其拓展至可以描述三維空間情況。式(3.12)考慮的情況比前式更完整，但計算較複雜且天線的輻射場型較難獲得，是式(3.12)的缺點。

3.2 新型空間相關係數公式

上一節中，我們對於空間相關係數在接收端與發射端的不同以及各種表達式的優缺點有了基本的瞭解，而在本節，我們將基於上一節的結果，整合前述表達式並以此分析空間相關係數在接收端與發射端的異同與其原因，最後尋找一方便使用的空間相關係數計算公式。

我們將上述所有的空間係數公式整理如下：

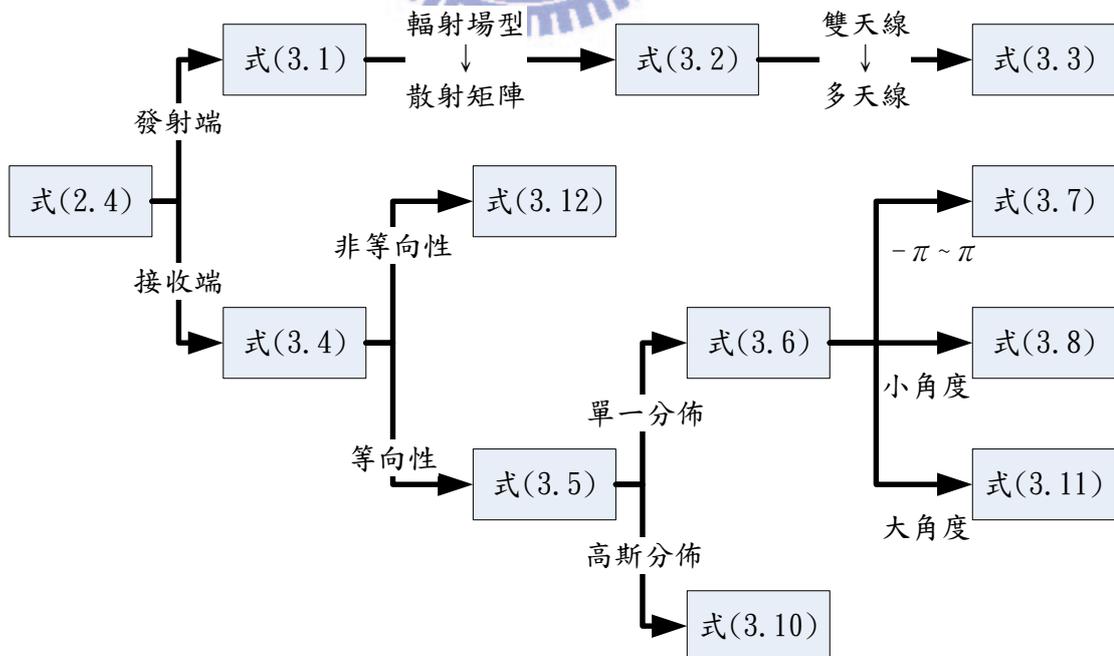


圖 3.1 空間相關係數發展歷程圖

由上圖我們可以發現，式(3.5)與之後的衍生公式都忽略了非完美天線場型的影響，儘管式(3.12)有考慮到輻射場型的效應，但計算的複雜與輻射場型的獲得難度都侷限了此公式的使用。另一方面，正如前述在發射端我們觀察觀察式(3.1)到式(3.2)的演進過程，會發現式(3.2)成功的將對輻射場型的需求轉換為散射矩陣，由於散射矩陣遠較輻射場型容易量測取得，使式(3.2)被廣泛的應用。

又由式(3.1)與式(3.4)，我們可以發現發射端與接收端差別在於 AOA 機率分佈與天線的距離造成的接收訊號相位差，此時我們冒出一個想法，是否可以透過我們對 AOA 機率分佈與訊號相位差的研究，將發射端的成果應用到接收端，改進式(3.4)，使發射端的空間相關係數也僅需要散射係數矩陣就可以獲得。

首先將上述的課題量化表示，令發射端的空間相關係數為 $\rho_{12,transit}$ ，而接收端的空間相關係數為 $\rho_{12,receive}$ ，現在我們的目標就是找到一個方程式 $f()$ 使其滿足下式：

$$\rho_{12,receive} = f(\rho_{12,transit}) \quad (3.13)$$

首先考慮 AOA 機率分佈，如果通道是常見的 Clarke 模型，則其 AOA 機率分佈會是常數，可以由分子分母上下消去，這對我們的目標來說是非常好的，現在僅剩下天線距離造成的相位差需要考慮，而相位差可以表示如下：

$$e^{j2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\varphi} = \cos(2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\varphi) + j\sin(2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\varphi) \quad (3.14)$$

根據天線場型的對稱性，可以發現兩天線輻射場型做厄米特運算的結果會在 φ 平面對稱，因此 $F_1(\theta, \varphi) \cdot F_2(\theta, \varphi)$ 對 φ 來說是一個偶函數，而 $\sin[2\pi(d/\lambda)\sin\varphi]$ 對於 φ 來說是一個奇函數，因此 $[F_1(\theta, \varphi) \cdot F_2(\theta, \varphi)]\sin[2\pi(d/\lambda)\sin\varphi]$ 相乘的結果還是一個奇函數，而奇函數的積分在上下限差一個負號時，其積分值為零。故將式(3.13)代入式(3.12)時，在正常的通道中 $j\sin[2\pi(d/\lambda)\sin\varphi]$ 對於空間相關係數是沒有影響的，僅需考慮 $\cos[2\pi(d/\lambda)\sin\varphi]$ 即可。

接著利用泰勒展開式，將餘弦函數表示如下：

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (3.15)$$

將式(3.15)代入式(3.14)，在天線距離夠近時，可以近似如下：

$$\cos(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi) \approx 1 - \frac{(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi)^2}{2} + \frac{(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi)^4}{24} \quad (3.16)$$

再將式(3.16)代入式(3.4)，可得下式：

$$\rho_{12,recieve} = \rho_{12,transit} + \frac{\left| \iint_{4\pi} [F_1(\varphi, \theta) \bullet F_2(\varphi, \theta)] \left(-\frac{(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi)^2}{2} + \frac{(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi)^4}{24} \right) d\Omega \right|}{\sqrt{\iint_{4\pi} |F_1(\varphi, \theta)|^2 d\Omega \iint_{4\pi} |F_2(\varphi, \theta)|^2 d\Omega}} \quad (3.17)$$

其中根據式(3.2)，並利用下列三角函數公式：

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \quad (3.18)$$

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) \quad (3.19)$$

將式(3.17) 中的元素代入式(3.18)與式(3.19)，可得，

$$\frac{(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi)^2}{2} = \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 (1 - \cos 2\varphi) \quad (3.20)$$

$$\frac{(2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi)^4}{24} = \frac{1}{12} \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^4 (3 - 4 \cos \varphi + \cos 4\varphi) \quad (3.21)$$

將式(3.20)與式(3.21)代入式(3.17)，可得：

$$\begin{aligned} \rho_{12,recieve} &= \left\{ 1 - \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \right] \right\} \rho_{12,transit} \\ &+ \frac{\left| \iint_{4\pi} [F_1(\varphi, \theta) \bullet F_2(\varphi, \theta)] \left(\left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \cos 2\varphi \left[1 - \frac{2}{3} \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \right] + \frac{1}{6} \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^4 \cos 4\varphi \right) d\Omega \right|}{\sqrt{\iint_{4\pi} |F_1(\varphi, \theta)|^2 d\Omega \iint_{4\pi} |F_2(\varphi, \theta)|^2 d\Omega}} \\ &\approx \left\{ 1 - \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \right] \right\} \rho_{12,transit} \end{aligned} \quad (3.22)$$

式(3.22)確實在某種程度上滿足我們最初的要求，將發射端的空間相關係數應用至接收端，使我們能僅僅利用散射係數矩陣得到接收端的空間相關係數公式，同時能描述非完美等向性的多天線系統，但可惜限制太多，首先需要 AOA 機率分佈是單一分佈，這點其實還有深入分析研究改進的餘地，譬如說利用單一分佈去近似其他的機率分佈，但式(3.22)對於天線距離的限制卻是致命的影響因素，我們有試著採取其他方式近似，很遺憾地效果都不好。

以下我們將利用電磁模擬軟體驗證式(3.22)的正確性。

3.3 模擬結果與討論

我們模擬所使用的電磁數值模擬軟體是 Ansoft[®] HFSS，而後續數據的運算則使用 MATLAB[®]，計算機核心使用 Intel[®] Pentium Core2 Duo CPU E8500 @ 3.16GHz，下圖是使用 HFSS 模擬偶極天線與平版天線的結構圖

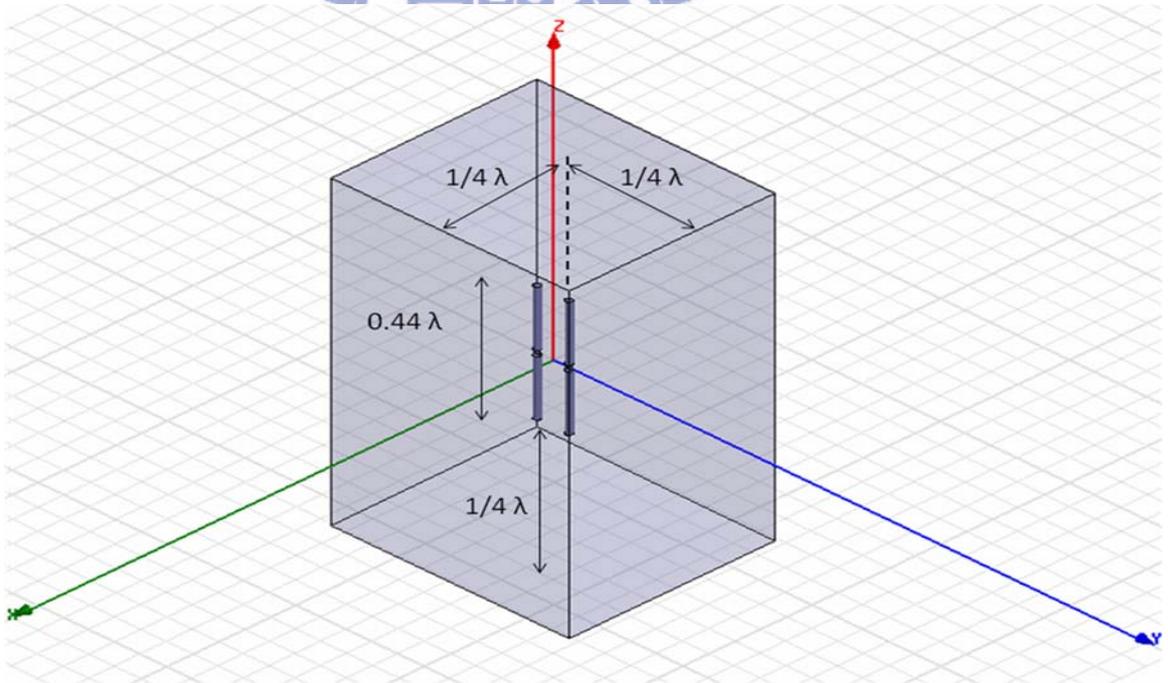


圖 3.2 HFSS 的偶極天線模擬結構圖

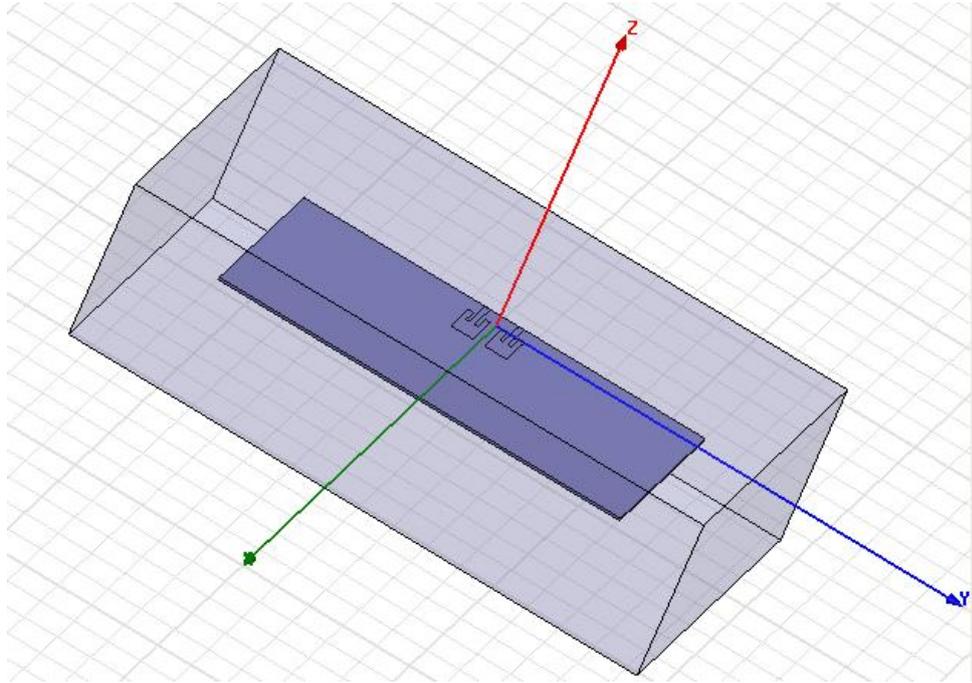


圖 3.3 HFSS 的平版天線模擬結構圖

利用模擬軟體求出其散射係數矩陣與輻射場型後，代入式(3.22)與式(3.4)驗證之，結果如下：



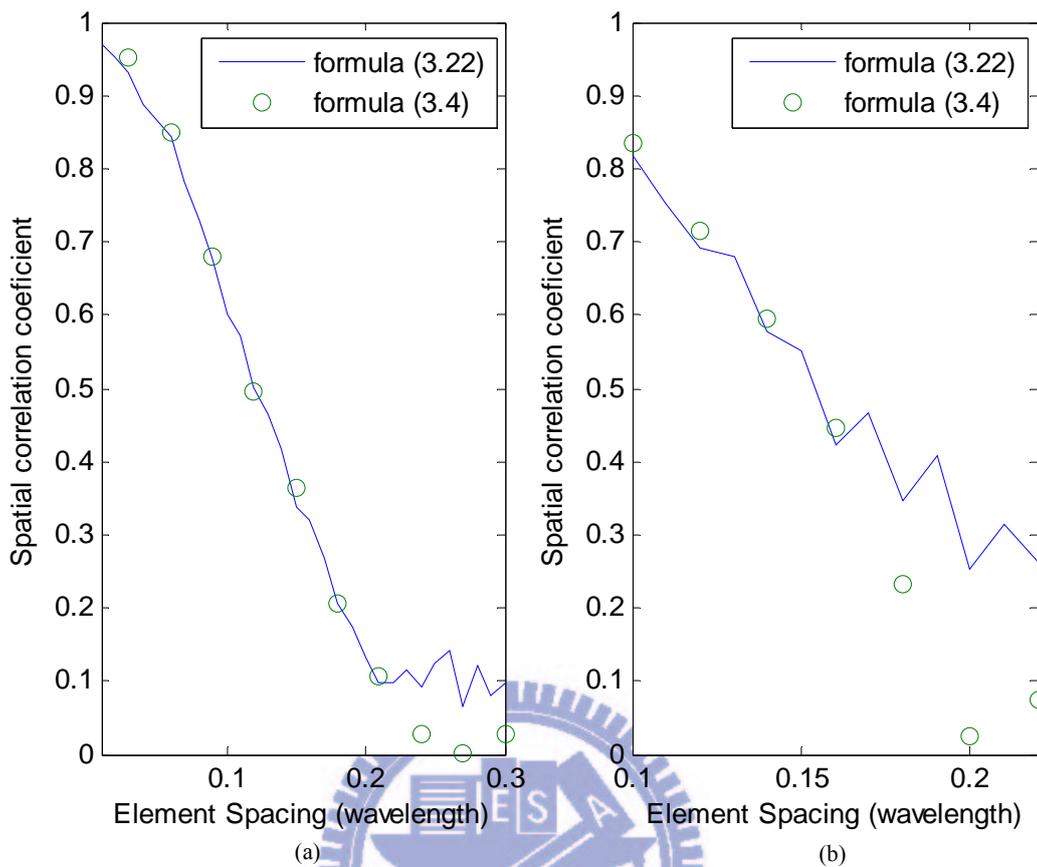


圖 3.4 新型空間相關係數 (a)偶極天線 (b)平版天線

首先，平版天線的起始點是由 0.1 波長開始而且有效距離相當短，這是因為平版天線的天生的結構限制，兩天線間最近的距離由單元天線的寬度所決定，而平版天線其頻寬甚窄也是原因之一。

結果並沒有出乎我們預期，新型空間相關係數需在天線距離足夠近才適用，即便以偶極天線為例，都需要在 0.2 波長內才會使式(3.22)與式(3.4)吻合，但超過 0.2 波長其誤差便大幅上升，這是一個很不好的消息，大大降低此公式的實用性，不過這也與我們當初的推論符合，而在 0.2 波長內也證明此公式的正確性。而未來可能需要更高明的數學方法處理接收端與發射端的空間相關係數公式使其能應用至更遠的天線距離。

第四章 概述輻射效率與匹配網路

(Overview of Radiation Efficiency and Matching Network)

長久以來，輻射效率一直是通訊系統中的重要參數，藉由此參數我們可以瞭解一個系統能量使用的效率，因而不論是在單天線系統、多天線系統或是天線矩陣與其匹配網路中，輻射效率都是一個需要特別考量的課題。在本章中，我們將簡介輻射效率的發展歷程與其特點，並研究前人的文獻，在拾遺補缺之餘挖掘出新的問題，以期能對多天線系統的瞭解有所助益。

4.1 節首先簡介輻射效率發展的歷程，分別描述傳統輻射效率在單天線與多天線中的定義，接著說明近年來輻射效率的最新定義，4.2 節則介紹數種普遍的匹配網路與其原理效能，並描述以新型輻射效率分析匹配網路的成果，4.3 節將由前人的研究文獻中出發，探索能繼續研究的課題，並以此闡述後續研究的動機與希冀解決的問題。

4.1 輻射效率簡介

本節中我們將簡介輻射效率從單天線到多天線的定義與發展。

首先由傳統的單天線出發，常見的物理模型如下圖所示：[17]

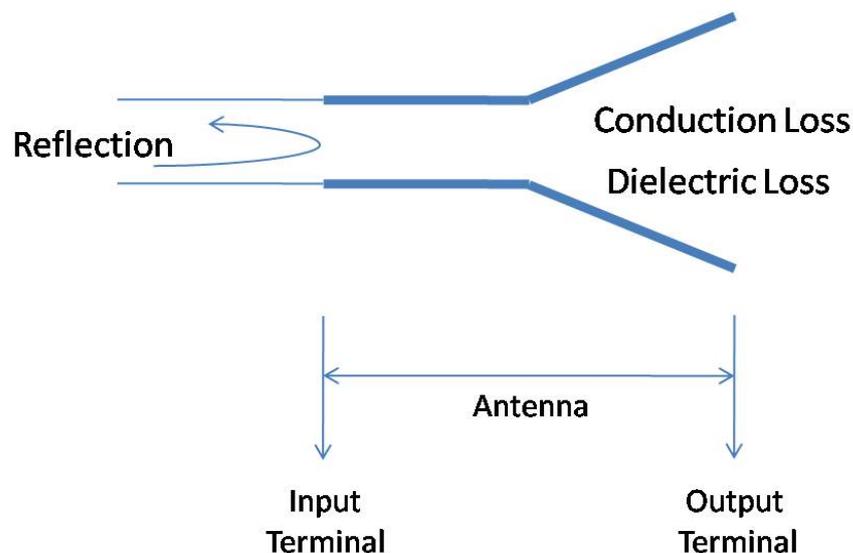


圖 4.1 傳統輻射效率示意圖

其數學表式如下：

$$e_o = e_r e_c e_d = e_r e_{cd} = e_{cd} (1 - |\Gamma|^2) \quad (4.1)$$

其中， e_o 代表了全部的能量效率， e_r 代表了經過反射後所剩下的能量，此參數可以反應出由於匹配不完全所造成的能量損失， e_c 則代表經過傳輸損耗的能量效率， e_d 是經過介電損耗的能量效率，所謂介電損耗是指介電質從時變場中吸收能量，並轉化成熱能的能量損失，而 e_{cd} 則是將介電損耗跟傳輸損耗一起考量的效率表示參數， Γ 是電壓反射係數，主要由天線的輸入阻抗與傳輸線（或匹配網路）的阻抗決定，其表示法如下所示：

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \quad (4.2)$$

其中， Z_{in} 為天線的輸入阻抗，而 Z_0 則是傳輸線或匹配網路的阻抗。

接著我們將說明輻射效率在多天線系統中的定義。有別於單天線，多天線需考量多個發射埠的影響，P. S. Kildal 和 K. Rosengren 在 2003 年提出以下模型，並以此定義新的輻射效率[18]：

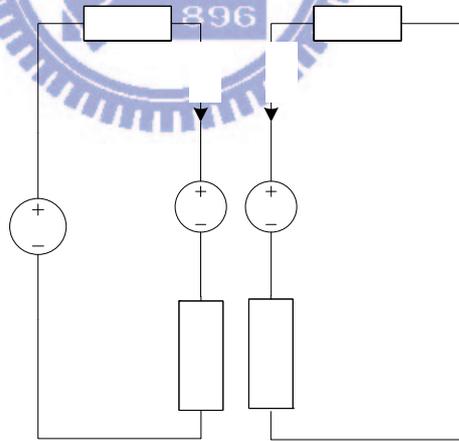


圖 4.2 雙天線模型

此模型的特點在於不僅包含正在發射訊號的埠，同時也考量未發射訊號的埠，其中 V_1 是輸入的訊號， $Z_{12}I_1$ 、 $Z_{21}I_2$ 兩個電壓源代表耦合效應的影響， Z_{11} 、 Z_{22} 代表天線本身的阻抗， Z_{p1} 、 Z_{p2} 則代表埠的阻抗，又因為兩個天線完全相同，所以 Z_{11} 等於 Z_{22} ， Z_{12} 等於 Z_{21} ， Z_{p1} 等於 Z_{p2} ，可化為下圖：

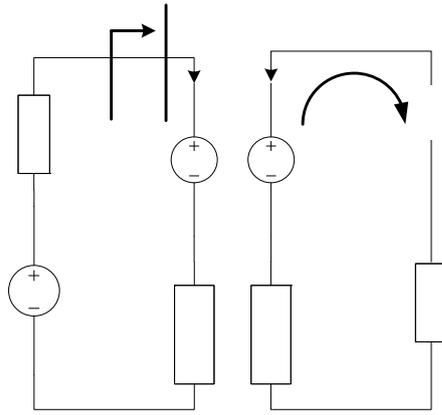


圖 4.3 雙天線輻射效率模型

根據電路理論，可得：

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} \quad (4.3)$$

又由迴路 2，可知：

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11} + Z_{p1}} \quad (4.4)$$

將式(4.4)代入式(4.3)，可得：

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_{p1}} \quad (4.5)$$

又根據式(4.2)電壓反射係數 Γ 的定義，可以定義輻射效率 e_{rad} ：

$$e_{rad} = e_{refl} e_{zp2} \quad (4.6)$$

其中 e_{refl} 是表示經過反射耗損過後的能量效率，很自然的是 1 減去電壓反射係數的平方，而 e_{zp2} 代表經過耦合效應損耗後的能量效率，耦合效應損耗的主因在於耦合到迴路 2，最後被 Z_{p2} 吃掉的能量，可表示如下：

$$e_{zp2} = 1 - \frac{\text{Real}\{Z_{p2}\} |I_2|^2}{\text{Real}\{Z_{in}\} |I_1|^2} \quad (4.7)$$

因此整體的能量效率為：

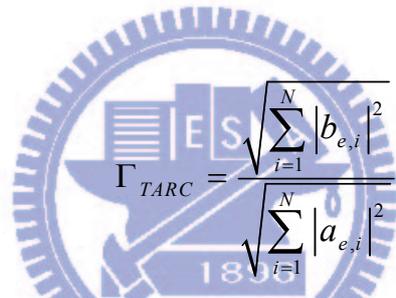
$$e_{rad} = (1 - |\Gamma|^2) \left(1 - \frac{\text{Real}\{Z_{p1}\} |I_2|^2}{\text{Real}\{Z_{in}\} |I_1|^2}\right) \quad (4.8)$$

接著我們將介紹改良新型的輻射效率，但在此之前需要先說明何謂全主動反射係數 (Total Active Reflection Coefficient)，再結合第三章提及的散射係數矩陣，架構出新型的輻射效率。

全主動反射係數是利用入射電壓波與反射電壓波來描述反射量的多寡，其定義如下 [19]：

$$\Gamma_{TARC} = \sqrt{\frac{P_{available} - P_{radiation}}{P_{available}}} \quad (4.9)$$

其中 $P_{available}$ 代表進入系統的功率， $P_{radiation}$ 則代表系統輻射出去的功率，又能量與電壓波的平方成正比，自然地 $P_{available}$ 會是入射電壓波平方和乘上阻抗，又阻抗相同，故 $P_{available}$ 減 $P_{radiation}$ 會等於反射電壓波平方和減去入射電壓波和，因此全主動反射係數可改寫如下：



$$\Gamma_{TARC} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N |b_{e,i}|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N |a_{e,i}|^2}} \quad (4.10)$$

接著將輻射效率用全主動反射係數表示如下 [20]：

$$e_{radiation} = \frac{\sum_{i=1}^N |a_{e,i}|^2 - \sum_{i=1}^N |b_{e,i}|^2}{\sum_{i=1}^N |a_{e,i}|^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N |b_{e,i}|^2}{\sum_{i=1}^N |a_{e,i}|^2} = (1 - \Gamma_{TARC}^2) \quad (4.11)$$

而 M. V. Ivashina、M. N. M. Kehn、P.-S. Kildal 和 R. Maaskant 在 2006 年提出多天線系統中單埠激發的模型，並同樣使用散射矩陣定義，將之命名為嵌入式輻射效率 (embedded radiation efficiency)，表示式如下 [21]：

$$e_{embedded} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N |b_{e,i}|^2}{\sum_{i=1}^N |a_{e,i}|^2} \quad (4.12)$$

但我們認為輻射效率不應該侷限於只有一個埠發射訊號的情況，多個埠同時發射會

是比較普遍的情況，因此著重於全主動反射係數輻射效率，在後續章節中針對的輻射效率的研究都是指全主動反射係數輻射效率。

接著，我們將全主動反射係數輻射效率應用至兩個埠同時發射的天線中，其物理模型表示如下圖所示：

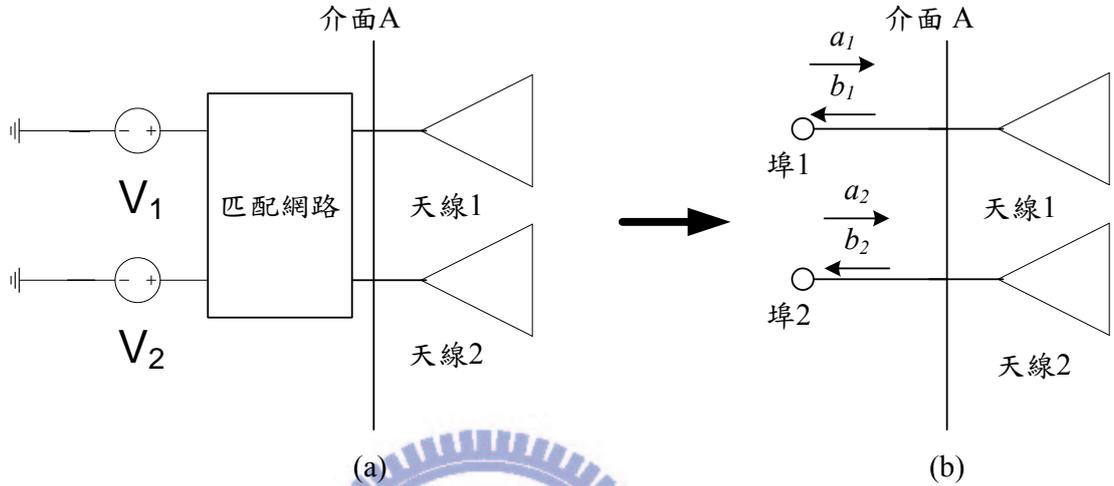


圖 4.4 全主動反射係數輻射效率 (a)雙天線模型圖 (b)示意圖

其中 a_1 與 a_2 代表入射的電壓波， b_1 與 b_2 代表反射的電壓波。而在大多數多天線系統的實際應用中，振幅大小都是相同的，即便不相同，我們只需做一些小小調整，仍可使用此參數。但為了簡化問題，我們以下將假設兩個訊號源的振幅大小相同，只考慮相位差的不同，令 $a_1 = 1, a_2 = e^{j\theta}$ ，再代入前述散射係數矩陣公式 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

可得：

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} + S_{12}e^{j\theta} \\ b_2 = S_{21} + S_{22}e^{j\theta} \end{cases} \quad (4.13)$$

將式(4.13)代入式(4.11)，可得：

$$e_{radiation} = 1 - \frac{|S_{11} + S_{12}e^{j\theta}|^2 + |S_{21} + S_{22}e^{j\theta}|^2}{2} \quad (4.14)$$

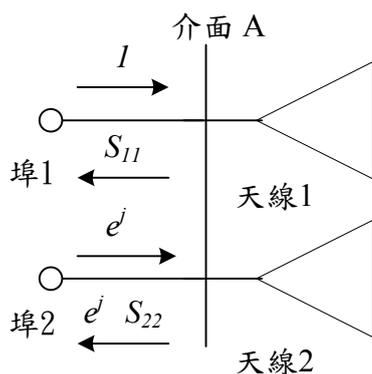


圖 4.5 輻射效率與訊號源的相位差示意圖

上圖說明了輻射效率如何反應訊號源之間的相位差，這也是傳統的輻射效率所辦不到的。在後續的章節中，我們將以新型輻射效率來分析匹配網路。

4.2 匹配網路簡介

所有的波動中，遇到不均勻的介質的介面時都會有反射的行為，導致能量的損耗。自然地，有線傳輸的電壓波也會遇到同樣的問題，而所謂匹配網路就是調配介面間的阻抗，進而使整體系統擁有最大的輸出功率，本節中將解釋何謂共軛匹配 (Complex Conjugate Matching) 並介紹三種典型的匹配網路，最後再利用前述所介紹的輻射效率分析匹配網路的效能。

4.2.1 共軛匹配

可將一般的傳輸電路表示如下：

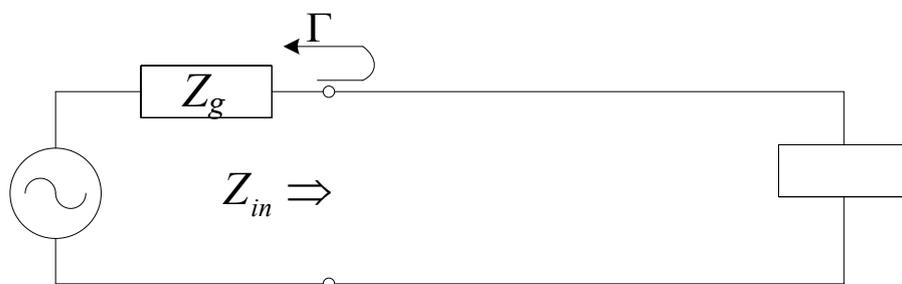


圖 4.6 傳輸電路模型

其中 V_g 代表信號源， Z_{in} 是看入的阻抗， Z_g 是信號源的阻抗， Z_l 則是負載的阻抗，其功率 P 可表示如下：

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2} \quad (4.16)$$

其中 R_{in} 與 R_g 代表 Z_{in} 與 Z_g 的實部， X_{in} 與 X_g 則是 Z_{in} 與 Z_g 的虛部。將功率 P 分別對 R_{in} 與 X_{in} 偏微，令為零求其極值，可得兩方程式，求解後可得：

$$Z_{in} = Z_g^* \quad (4.17)$$

由此可知，輸出能量效率最佳化的條件是使輸入阻抗為其負載阻抗的共軛，這就是共軛匹配命名的由來。但負載阻抗與輸入阻抗的關係要滿足共軛匹配並不容易，此時，就是匹配網路登場的時機：在負載與信號源間加上匹配網路，達成共軛匹配，使能量輸出效率最佳。

4.2.2 傳統匹配網路

以下將介紹三種傳統的匹配網路的定義與特點：

1. 特徵阻抗匹配 (characteristic-impedance matching)：

僅僅使用傳輸線的阻抗做匹配，在天線系統中以 50 歐姆居多，因此後文中有提及特徵阻抗匹配網路皆以 50 歐姆為主，此法唯一但是巨大的好處在於簡單，不用再加入匹配網路，一般用於不要求傳輸能量效率或阻抗已經設計過的電路中。

2. 自身阻抗匹配 (self-impedance matching)：

以負載本身的阻抗為共軛基準，在負載間不會彼此影響或是只有一個輸入埠的狀況下運作良好，但其缺點在於忽略埠與埠之間的影响。在多天線系統中，耦合效應 (coupling effect) 即是反應天線間互相影響的參數，自然地，耦合效應的強烈與否會直接決定自身阻抗匹配的效能。

3. 輸入阻抗匹配 (input-impedance matching) :

鑑於自身阻抗匹配在多埠網路無法完美處理耦合效應的問題，P. S. Kildal 和 K. Rosengren 提出利用輸入阻抗來設計匹配網路[18]，藉此處理多天線的耦合效應問題，此模型與圖 4.3 相同，因此以下可直接參考圖 4.3，又根據共軛匹配，因此要求 $Z_g^*=Z_{in}$ ，將其代入式(4.5)，可得：

$$Z_{p1}^* = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_{p1}} \quad (4.17)$$

令 $Z_{p1} = x + jy$ 代入式(4.17)求解，將其有理化，分為實部與虛部方程式後，發現其虛部方程式有好的性質，可直接出虛部的解，最後再代入原式，可得到實部，其解如下所示：

$$Z_{p1} = \sqrt{R_{11}^2 - R_{12}^2 + X_{12}^2 - \frac{R_{12}^2 X_{12}^2}{R_{11}^2}} + j(-X_{11} + X_{12} \frac{R_{12}}{R_{11}}) \quad (4.18)$$

後文提及的輸入阻抗匹配網路皆以此解為準。

4.2.3 散射係數矩陣與阻抗矩陣轉換

而後文中使用輻射效率分析匹配網路時，需要散射係數矩陣與阻抗矩陣轉換公式，又考量到我們研究的背景都是建立在複數阻抗的埠與匹配網路中，不同於傳統的轉換公式，而需要考慮複數的影響，如下所示[22]：

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(Z_{11} + Z_{p1})(Z_{22} + Z_{p2}) - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} (Z_{11} - Z_{p1}^*)(Z_{22} + Z_{p2}) - Z_{12}Z_{21} & 2Z_{12}\sqrt{R_{p1}R_{p2}} \\ 2Z_{21}\sqrt{R_{p1}R_{p2}} & (Z_{11} + Z_{p1})(Z_{22} - Z_{p2}^*) - Z_{12}Z_{21} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

其中 Z_{p1} 與 Z_{p2} 是埠 1 與埠 2 的阻抗， R_{p1} 與 R_{p2} 則是兩者的實部。

4.3 匹配網路效能與相關現象

本節將闡述傳統匹配網路的效能與前人發現的一些現象[15]，繼而引導出我們後續研究中希冀解決的課題。

傳統匹配網路的效能結果在我們後續研究中會再度出現，為了節省篇幅，我們將各別的相位差角度的圖表放在後續的章節中，這裡僅附上平均的效能圖。

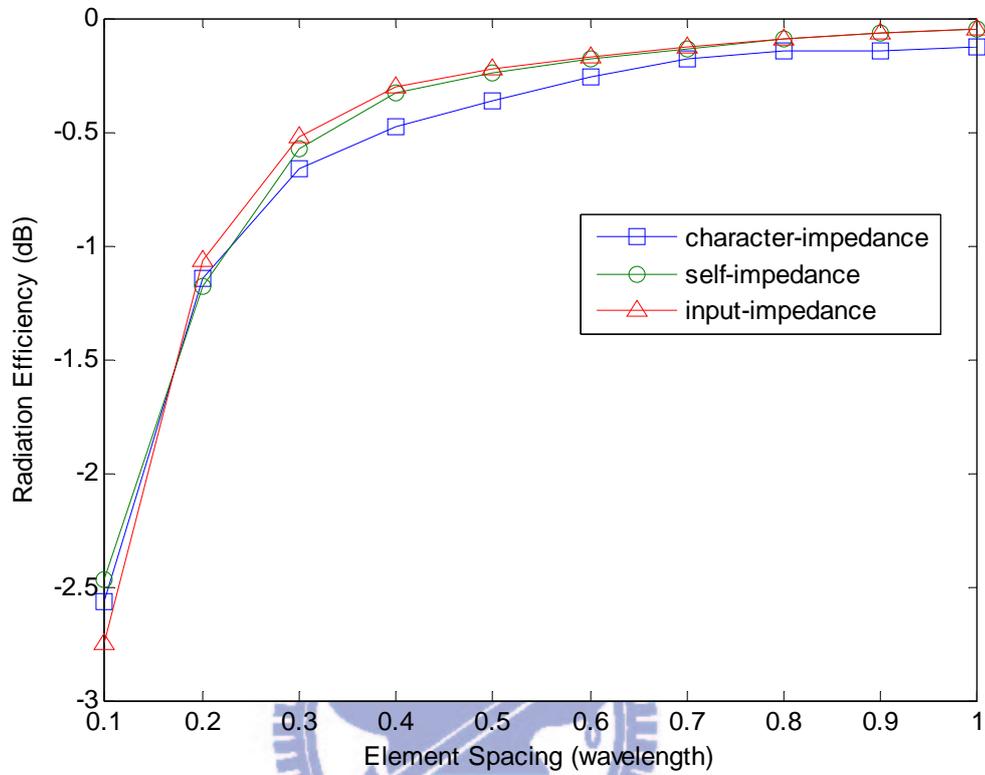


圖 4.7 傳統匹配網路的輻射效率

不出意料，在多數距離中，輸入阻抗匹配網路是三種匹配網路中表現最佳的，但在距離相當近時，自身阻抗匹配網路的表現是三者中最優秀的，而在所有距離中，50 歐姆特徵阻抗匹配網路的表現都不是最佳的。

以下將展示三種匹配網路在一對 2.45GHz 的偶極天線上的表現並描述觀察到的一些現象：

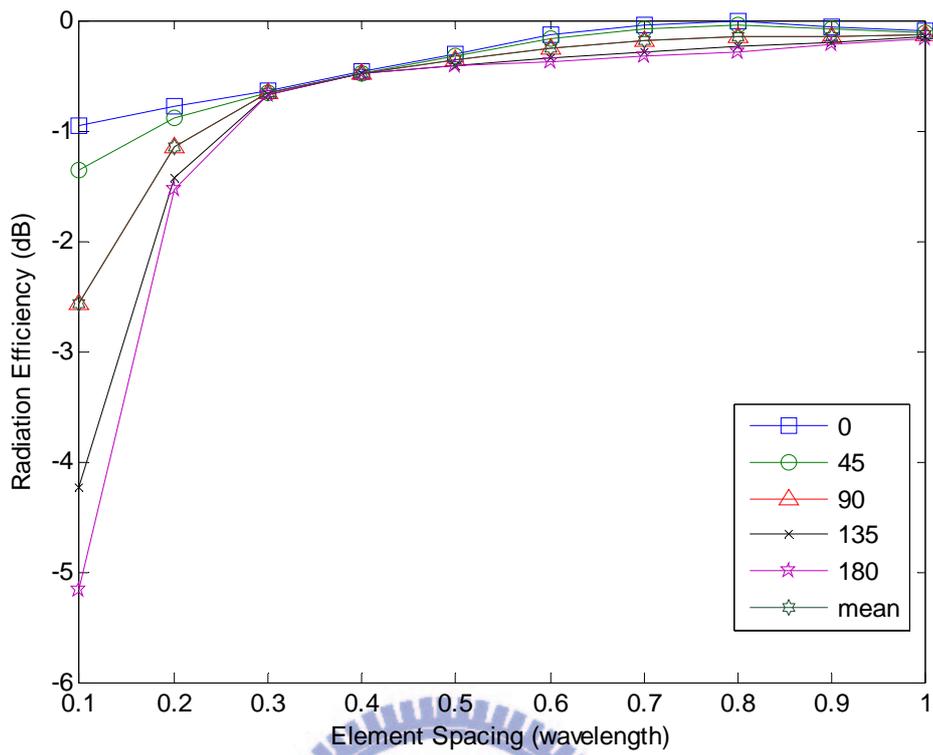


圖 4.8 50 歐姆特徵阻抗匹配網路的輻射效率

上圖是 50 歐姆特徵阻抗匹配網路的結果，縱軸輻射效率，橫軸是天線距離。

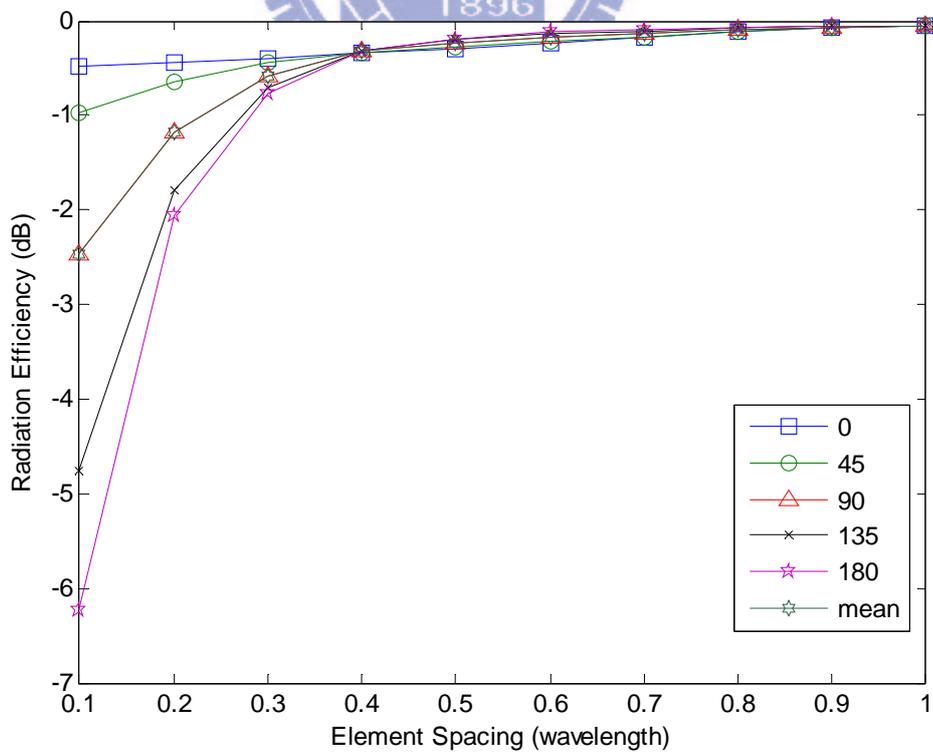


圖 4.9 自身阻抗匹配網路的輻射效率

上圖是自身阻抗匹配網路的結果，也就是 $Z_{in}=Z_{11}^*$ ，我們可以注意到 50 歐姆特徵阻抗匹配網路與自身阻抗匹配網路有三個相同的現象：

1. 0° 到 180° 平均的結果與 90° 的結果相同。
2. 輻射效率隨著相位差的趨勢變化。
3. 在 0.4λ 時，輻射效率與相位差角度無關

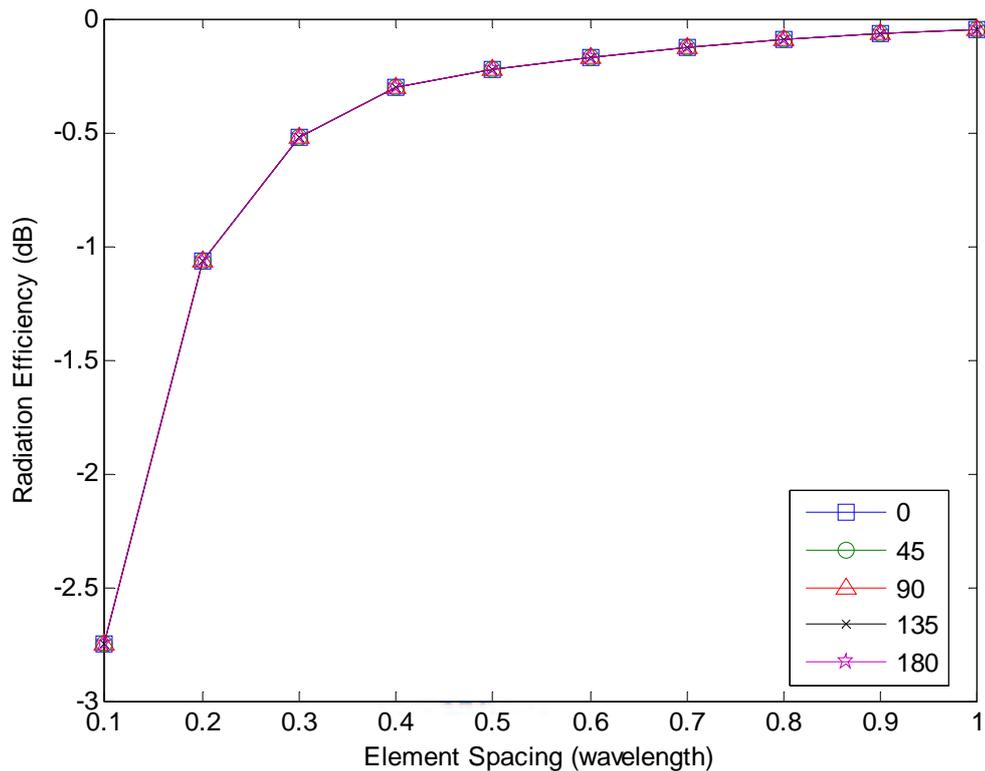


圖 4.10 輸入阻抗匹配網路的輻射效率

上圖則是輸入阻抗匹配網路的結果，我們可以發現到輸入阻抗匹配網路在所有的相位差下所有的輻射效率都是一致的，也就是說輸入阻抗匹配網路的效率不隨相位差改變。

我們對於不同饋入訊號相位差與匹配網路如何影響輻射效率和以上四個的現象都很感興趣，因此在之後的章節中，我們將分為兩個部分繼續討論：

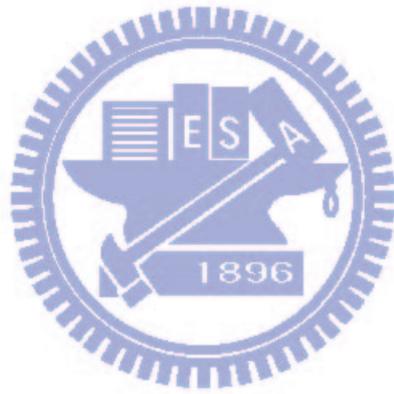
1. 前述現象的成因與解釋

由於研究者並沒有對其觀察到的現象提出完整的說明，我們希望能藉由更深入

的探討輻射效率的物理意義與數學特性，量化不同饋入訊號相位差與匹配網路對輻射效率的影響，並以此解釋之前觀察到現象，使我們對匹配網路的輻射效率有更進一步的瞭解。

2. 最佳化的匹配網路

另一方面，我們不滿足於傳統的匹配網路，希望藉由微波電路理論與種種數學方法找出最佳化的匹配網路，並以實例展現最佳化匹配網路與傳統匹配網路在效能上的差異。



第五章 輻射效率探討與最佳化匹配網路

(Discussions of Radiation Efficiency and Optimum Matching Network)

近年來有研究者針對傳統輻射效率的定義加以改良，並以此分析數種匹配網路的效能，可惜只提出其觀察的結果而缺乏更深入的探討，有鑑於此，在 5.1 節中將研究輻射效率的物理意義與數學特性並以此分析匹配網路並解釋之，而 5.2 節與 5.3 節則基於之前的成果並應用數種數值方法與電路理論，尋找最佳化的匹配網路，最後以模擬實例討論之。

5.1 輻射效率探討

本節中，我們將利用種種數學方法與微波電路理論分析輻射效率，並以此解釋匹配網路與輻射效率的關係。

首先將 S 參數有理化：

$$\begin{cases} S_{11} = RS_{11} + jXS_{11} \\ S_{12} = RS_{12} + jXS_{12} \end{cases} \quad (5.1)$$

將式(5.1)代入式(4.14)，如以下運算：

$$\begin{aligned} e &= 1 - \frac{|S_{11} + S_{12}e^{j\theta}|^2 + |S_{12} + S_{11}e^{j\theta}|^2}{2} \\ &= 1 - \frac{|RS_{11} + RS_{12}\cos\theta - XS_{12}\sin\theta + j(XS_{11} + RS_{12}\sin\theta + XS_{12}\cos\theta)|^2}{2} \\ &\quad - \frac{|RS_{12} + RS_{11}\cos\theta - XS_{11}\sin\theta + j(XS_{12} + RS_{11}\sin\theta + XS_{11}\cos\theta)|^2}{2} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\left| \begin{array}{l} RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta \\ + 2(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta \end{array} \right|}{2} - \frac{\left| \begin{array}{l} RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta \\ - 2(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta \end{array} \right|}{2}$$

接著如以下假設：

$$\begin{cases} \alpha = RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta \\ \beta = 2(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta \end{cases}$$

可得，

$$e = 1 - \frac{1}{2}(|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta|) \quad (5.2)$$

如果 $\alpha \geq 0$ 而且 $\alpha \geq \beta$ ，則 $|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| = 2\alpha$ ，此時可以證明 e 等於 $1 - \alpha$ 。

因此以下我們將用數個不等式證明 $\alpha \geq 0$ 與 $\alpha \geq \beta$ 。

首先，應用算幾不等式證明 $\alpha \geq 0$ ：

$$\begin{aligned} \because (RS_{11}^2 + RS_{12}^2) &\geq 2|RS_{11}RS_{12}| \\ \Rightarrow RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 &\geq 2|(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12})| \\ \Rightarrow RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 &\geq 2|(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta| \\ \Rightarrow RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta &\geq 0 \end{aligned}$$

接著應用算幾不等式與疊合不等式，證明 $\alpha \geq \beta$ ：

step1:

$$\begin{aligned} (RS_{11}^2 + XS_{11}^2) + (RS_{12}^2 + XS_{12}^2) &\geq 2\sqrt{(RS_{11}^2 + XS_{11}^2)(RS_{12}^2 + XS_{12}^2)} \\ \text{and } \sqrt{(RS_{11}^2 + XS_{11}^2)(RS_{12}^2 + XS_{12}^2)} &= \sqrt{RS_{11}^2 RS_{12}^2 + RS_{11}^2 XS_{12}^2 + XS_{11}^2 RS_{12}^2 + XS_{11}^2 XS_{12}^2} \\ \Rightarrow (RS_{11}^2 + XS_{11}^2) + (RS_{12}^2 + XS_{12}^2) &\geq 2\sqrt{RS_{11}^2 RS_{12}^2 + RS_{11}^2 XS_{12}^2 + XS_{11}^2 RS_{12}^2 + XS_{11}^2 XS_{12}^2} \end{aligned}$$

step2:

2.1

$$\text{Let } \begin{cases} XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12} = a \\ RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{XS_{11}^2 RS_{12}^2 + RS_{11}^2 XS_{12}^2 + RS_{11}^2 RS_{12}^2 + XS_{11}^2 XS_{12}^2} \\ |a \sin \theta + b \cos \theta| = |(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta + (RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta| \end{cases}$$

2.2

$$\therefore \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a \sin \theta + b \cos \theta|$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a \sin \theta + b \cos \theta|$$

$$\Rightarrow \sqrt{XS_{11}^2 RS_{12}^2 + RS_{11}^2 XS_{12}^2 + RS_{11}^2 RS_{12}^2 + XS_{11}^2 XS_{12}^2} \geq |(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta + (RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta|$$

step3:

by step1 and step2

$$\Rightarrow RS_{11}^2 + XS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{12}^2 \geq 2|(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta + (RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta|$$

$$\Rightarrow RS_{11}^2 + XS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{12}^2 - 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta \geq 2(XS_{11}RS_{12} - RS_{11}XS_{12}) \sin \theta$$

最後得證：

$$e = 1 - (RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12}) \cos \theta) \quad (5.3)$$

觀察式(5.3)，我們發現其數學形式與餘弦定理相當類似，下圖是餘弦定理的示意圖

與數學表示式：

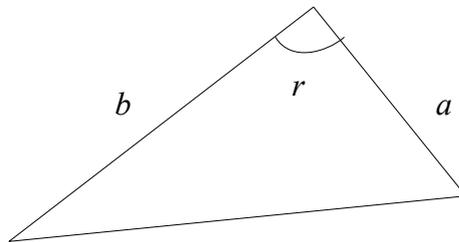


圖 5.1 餘弦定理示意圖

餘弦定理描述了一個三角形邊長與夾角的關係：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(r) \quad (5.4)$$

但因 S 參數可能為負值，為了符合餘弦定理，因此將其角度重新定義如下：

$$\begin{cases} \theta' = \theta & , RS_{11}RS_{12} > 0 \\ \theta' = \theta + 180^\circ & , else \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \theta'' = \theta & , XS_{11}XS_{12} > 0 \\ \theta'' = \theta + 180^\circ & , else \end{cases}$$

繼而，我們可將輻射效率改寫成下式並提出輻射效率新的定義：

$$\begin{aligned} RS_{new}^2 &= |RS_{11}|^2 + |RS_{12}|^2 - 2|RS_{11}||RS_{12}|\cos\theta' \\ XS_{new}^2 &= |XS_{11}|^2 + |XS_{12}|^2 - 2|XS_{11}||XS_{12}|\cos\theta'' \\ \Rightarrow e &= 1 - |S_{new}|^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

其模型如下圖所示：

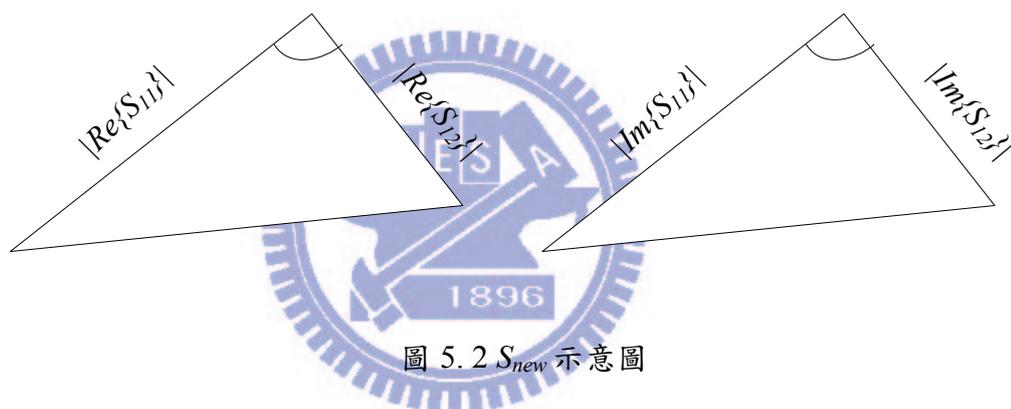


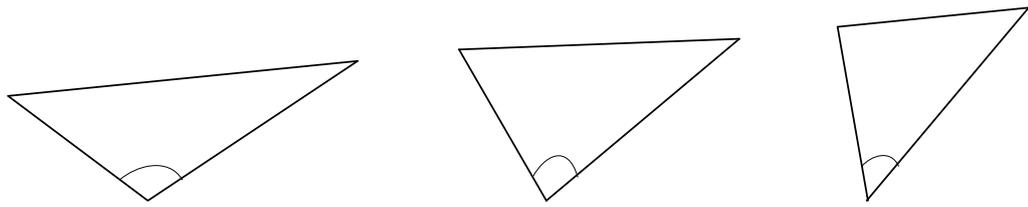
圖 5.2 S_{new} 示意圖

由上圖可知， S_{new} 是由 S_{11} 和 S_{12} 為三角形的兩個邊長，訊號相位差為其夾角，所構成的新邊長。利用此概念，我們回頭審視之前觀察到的一些現象，並試著解釋之。

1. $0^\circ \sim 180^\circ$ 的趨勢

在 4.3 節我們發現 50 歐姆阻抗匹配網路與自身阻抗匹配網路都會隨著相位差角度的增加，其輻射效率隨之降低，原因如下圖所示：

θ'



$$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 \Rightarrow |S_{new1}| > |S_{new2}| > |S_{new3}|$$

圖 5.3 相位差角度趨勢圖

由上圖可知，因為 S_{11} 和 S_{12} 是固定的，因此自然地 S_{new} 會隨著相位差角度的增加而增加，又輻射效率等於 1 減去 S_{new} 的平方，所以輻射效率會隨著相位差角度的增加而降低。

2. 90° 與平均值

4.3 節我們也發現到平均的結果和 90° 是一樣的，底下我們將式(5.3)對相位差積分，並與 90° 比較：

$$\begin{aligned} e(\theta) &= 1 - (RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12})\cos\theta) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 - (RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2 + 2(RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12})\cos\theta) d\theta \\ &= 1 - (RS_{11}^2 + RS_{12}^2 + XS_{11}^2 + XS_{12}^2) \\ &= 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 \\ &= e(90^\circ) \end{aligned}$$

由上式我們可以發現，平均的結果和 90° 的確是相同的。

3. 0.4λ 時，輻射效率與相位差無關

此現象可以由空間相關係數解釋，首先將 50 歐姆匹配網路與自身阻抗匹配網路的空間相關係數表示如下：

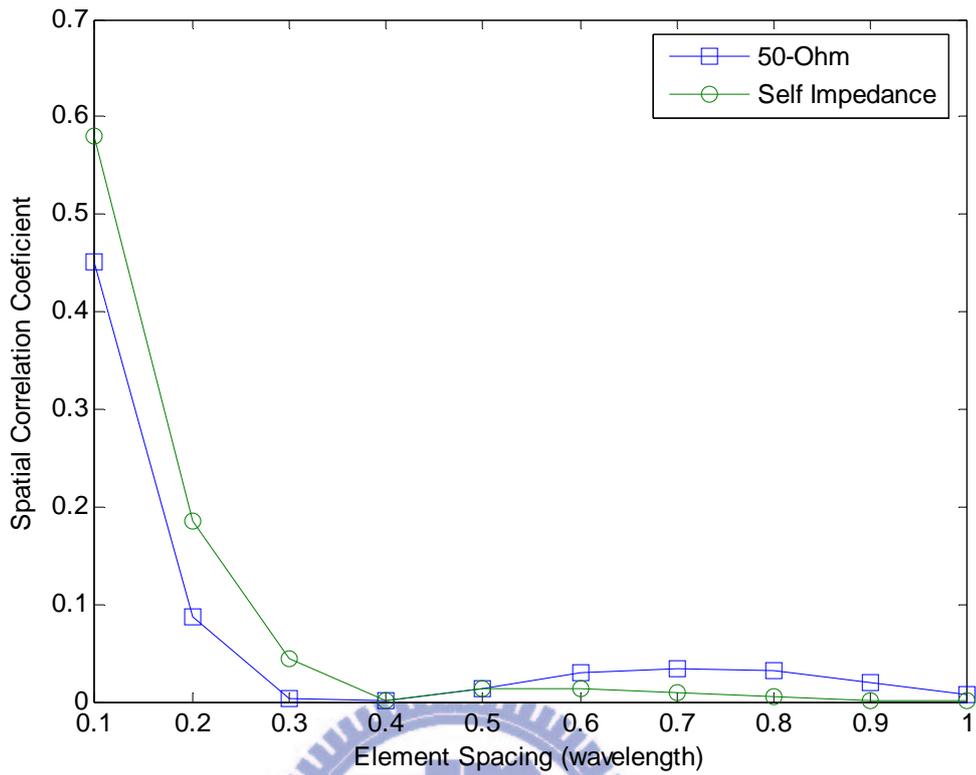


圖 5.4 50 歐姆匹配網路與自身阻抗匹配網路中的空間相關係數

發現在 0.4λ 時，兩者的空間相關係數相當接近零，又空間相關係數代表了兩天線的耦合關係，故輻射效率會與相位差無關，底下我們也將由數學證明。由式(3.2)，可得其分子，再將其轉換如下：

$$|S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22}| = 2RS_{11}RS_{12} + XS_{11}XS_{12} \quad (5.6)$$

與式(5.3)比較，可發現確實空間相關係數很接近零時，其輻射效率會和相位差角度無關。

4. 應用輸入阻抗匹配時，輻射效率與相位差無關

將式(4.18)代入式(4.19)，可得：

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{(Z_{11} - Z_{p1}^*)(Z_{22} + Z_{p2}) - Z_{12}Z_{21}}{(Z_{11} + Z_{p1})(Z_{22} + Z_{p2}) - Z_{12}Z_{21}} \\
&= \frac{(R_{11}^2 - R_{p1}^2 - (X_{11} + X_{p1})^2 + j2R_{11}(X_{11} + X_{p1})) - (R_{12}^2 - X_{12}^2 + 2jR_{12}X_{12})}{(Z_{11} + Z_{p1})(Z_{22} + Z_{p2}) - Z_{12}Z_{21}} \\
&= \frac{(R_{12}^2 - X_{12}^2 + j2R_{12}X_{12}) - (R_{12}^2 - X_{12}^2 + 2jR_{12}X_{12})}{(Z_{11} + Z_{p1})(Z_{22} + Z_{p2}) - Z_{12}Z_{21}} = 0
\end{aligned}$$

因為輸入阻抗匹配網路可以使 S_{11} 為 0，而從圖 5.2 可以發現 S_{new} 會明顯等於 S_{12} ，其輻射效率自然與相位差無關。

在這節中，我們提出公式量化了匹配網路與訊號相位差對輻射效率的影響，並解釋了之前發現的現象，在後續章節中我們將致力於研究最佳化匹配網路。

5.2 最佳化匹配網路—數值解

在 4.3 節中，我們發現傳統的匹配網路不是表現最佳的，而在這個章節中，我們將以輻射效率為優先考量下，尋找最佳化的匹配網路，並與傳統的匹配網路做比較。

5.2.1 定義問題與基本模型

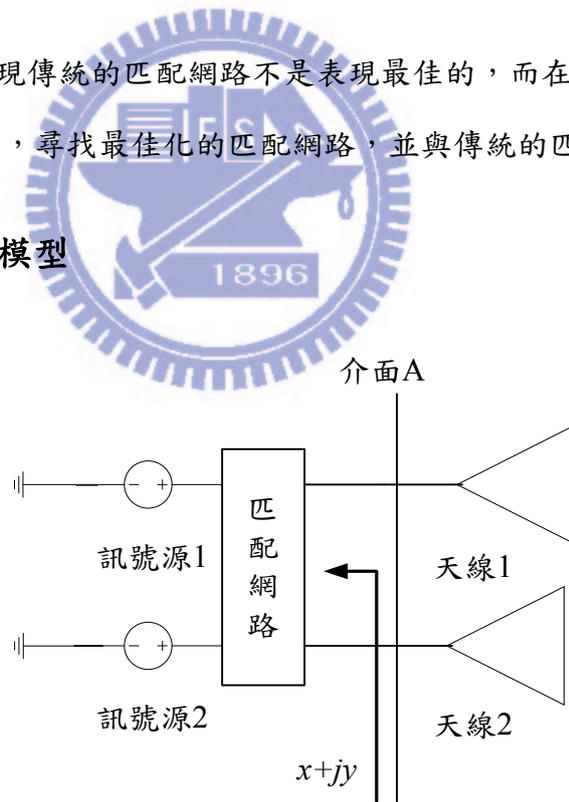


圖 5.5 匹配網路示意圖

如上圖，我們可以將問題具體如下：在已知天線的 Z 矩陣與輸入訊號源的相位差下，求使輻射效率最佳的 x 、 y 。

在瞭解問題的已知條件與待求解的未知數之後，我們利用已知數來架構多天線系統基本的物理模型。

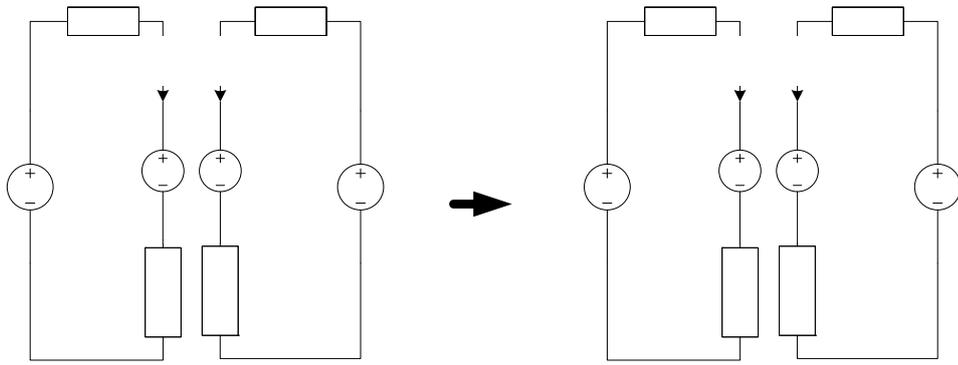


圖 5.6 多天線系統模型

$$Z_{MN} \quad I_1 \quad I_2 \quad Z_{MN}$$

其物理模型如左上圖所示，假設一如前述， V_1 、 V_2 是兩個輸入的訊號 $Z_{12}I_1$ 、 $Z_{21}I_2$ 兩個電壓源代表耦合效應的影響， Z_{11} 、 Z_{22} 代表天線本身的阻抗， Z_{MN} 則代表代表匹配網路本身的阻抗，又因為兩個天線完全相同，所以 Z_{12} 等於 Z_{22} ， Z_{12} 等於 Z_{21} ，最後可化為右上圖。

5.2.2 量化

首先我們仍然先將各項參數的實部與虛部分開，使所有的參數都屬於實數系，重新假設如下：

$$\begin{cases} Z_{11} = RZ_{11} + jXZ_{11}, & Z_{12} = RZ_{12} + jXZ_{12} \\ S_{11} = RS_{11} + jXS_{11}, & S_{12} = RS_{12} + jXS_{12} \end{cases} \quad (5.7)$$

為了將 S 參數轉換為 Z 參數，我們將 $x+jy$ 與式(5.7)代入式(4.19)，可得：

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{(K(y) - x^2) + jN(y)}{(K(y) + x^2 + 2RZ_{11}x) + j(N(y) + G(y)x)} \\ S_{12} = \frac{2(RZ_{12} + jXZ_{12})x}{(K(y) + x^2 + 2RZ_{11}x) + j(N(y) + G(y)x)} \end{cases} \quad (5.8)$$

其中，

$$\begin{cases} K(y) = -y^2 - 2XZ_{11}y + RZ_{11}^2 - XZ_{11}^2 - RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2 \\ N(y) = 2RZ_{11}y + 2(RZ_{11}XZ_{11} - RZ_{12}XZ_{12}) \\ G(y) = 2(y + XZ_{11}) \end{cases}$$

再將式(5.8)代入式(5.3)，由此可得：

$$e_{radiation} = 1 - \frac{[-x^2 + K(y)][-x^2 + 4RZ_{12} \cos \theta x + K(y)] + N(y)[N(y) + 4XZ_{12} \cos \theta x] + 4(RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2)x^2}{(x^2 + 2RZ_{11}x + K(y))^2 + (N(y) + G(y)x)^2} \quad (5.9)$$

最後假設 $f(x, y) = 1 - e_{radiation}$ ，因此現在的目標是找到使 $f(x, y)$ 最小的 x 、 y 。

5.2.3 數值解

很自然的，首先我們將 $f(x, y)$ 對 x 偏微分與對 y 偏微分獲得兩個方程式，再令其為零，用兩個方程式解兩個未知數，本來這樣的過程在理論上是可行的，但我們觀察其方程式，發現兩者都為二元七次方程式，而以數學的角度來說，任意的二元七次方程式是沒有公式解的，除非其參數符合特定條件，但很遺憾的，這兩個方程式也不滿足，因此我們無法利用嚴謹的數學方法得到其封閉公式解，因此我們選擇使用數值方法求其近似解，我們採用的演算法是 Nelder-Mead 法，顧名思義，此方法是 J. Nelder 和 R. Mead 兩人在 1965 年所提出的一種求多維函數極值的方法，因為此法是以單純形 (Simplex Algorithm) 的概念為基礎，也可以稱為下山單純形法 (Downhill Simplex Method)，而 M. Huang、C. J. Aine、S. Supek, E. Best、D. Ranken 和 E. R. Flynn 在 1998 年改進之。以下我們將簡介其特點與運作方法：

下山單純形法的特點在於沒有微分運算，所以算法比較簡單，但其收斂速度也較慢，因此適用於變數不是很多的方程式求極值問題。事實上，在低於 20 個變數的問題裡，下山單純形法往往是數值方法的首選之一。

其原理是運用單純形的概念， N 個限制方程式可以建構出一擁有 $N+1$ 個頂點的單純形，譬如前述問題有兩個限制方程式，故可以建構出一個三角形，然後代入初始值 (Initial value)，取最佳、次佳與最糟的三個點，接著利用最小點對單純形做以下 3 個運算：反

射 (reflection)、擴展 (expansion)、單維度收縮 (one-dimensional contraction)，然後同樣再取最佳、次佳與最糟的三個點，如此反覆疊代，直到誤差值足夠小為止。

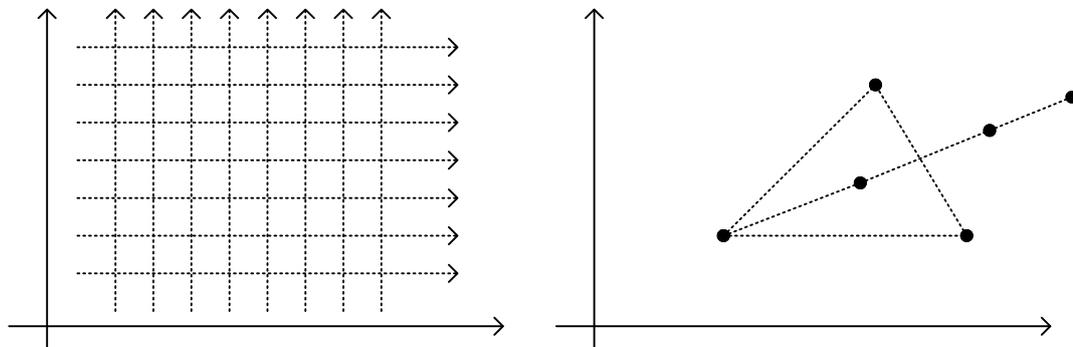


圖 5.7 (a) 單純迴圈解示意圖 (b) 下山單純型法示意圖

上圖是使用單純迴圈解與下山單純型法的示意比較圖，下山單純型法無疑地直接比使用迴圈快速的的多。圖 5-7(b) 中 B 是最佳的點，W 是最差的點，G 是次佳的點，C 是單維度收縮，R 是反射，E 是擴展。

5.2.4 結果與討論

以下我們將展示使用山下單純形法的解出的效能，並將其與傳統的匹配網路比較，這裡我們先以 2.45GHz 的偶極天線為基準。

(a)

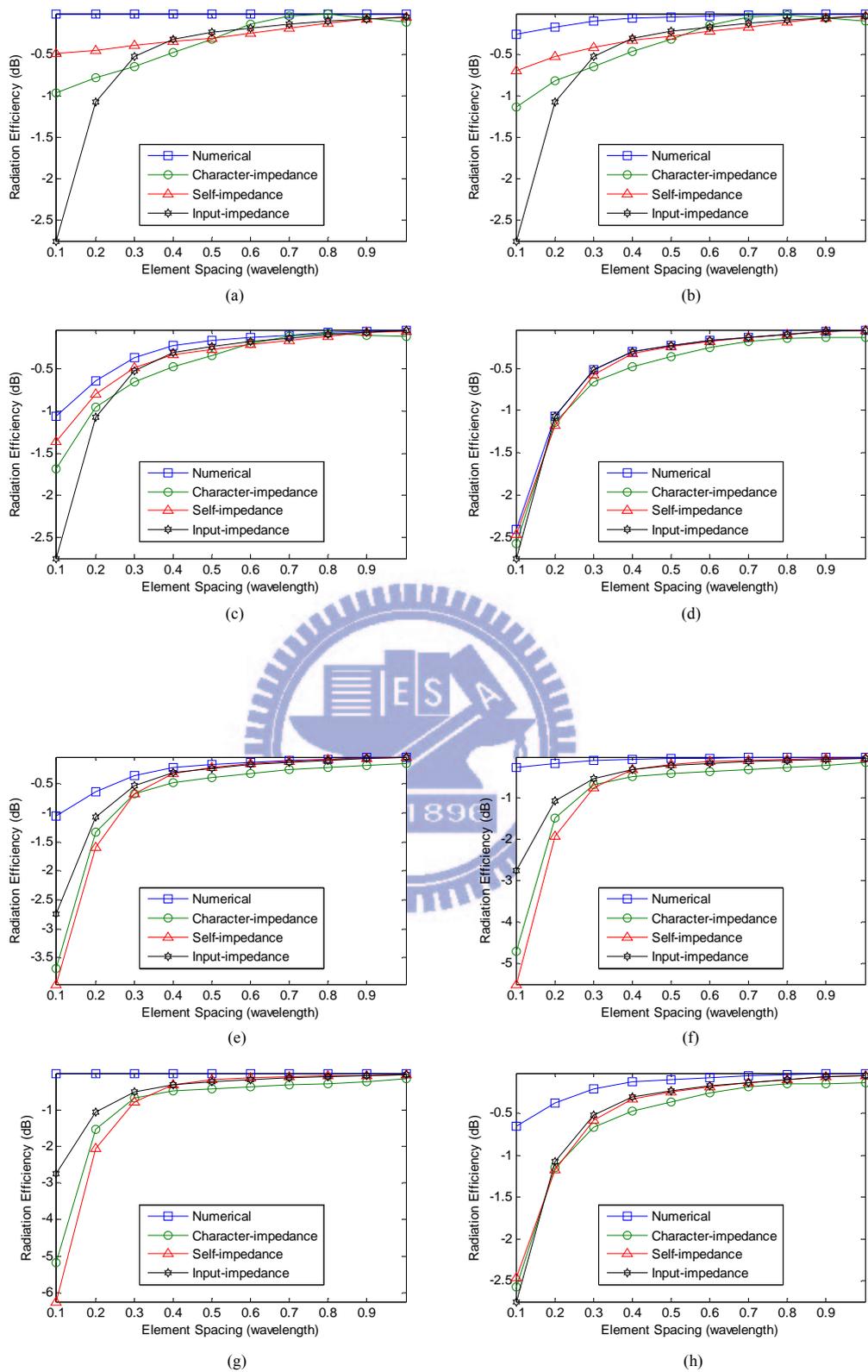


圖 5.8 數值解與傳統匹配網路在不同角度中的比較結果

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 90° (e) 120° (f) 150° (g) 180° (h)* 平均

(a)~(g)圖分別是相位差 0° 、 30° 、 60° ... 180° 的結果，而(h)圖則是平均的結果，可以看到傳統的三種匹配網路的效能都離最佳的數值解有一定的差距，尤其是在距離近的時候，因為距離越近受耦合效應的影響越強，所以傳統的匹配網路的效率不彰。需注意在不同的相位差時，數值解是使用不同的匹配網路，因此(h)圖其取平均的基準不同，導致其不是一個公平的比較方式，但在已知相位差的狀況下，根據我們對相位差的瞭解調整匹配網路使其達到最佳化，對其輻射效率的助益仍是相當可觀的，以下我們將分別展示 MIMO 系統中，使用空間多樣與空間多工的實例。

如果我們打算利用空間多樣技術提昇系統的多樣增益，那我們會在不同的發射端傳送同樣的訊號，自然地，發射端間不會有相位差，屬於相位差為 0° 的狀況，下圖列出相位差為 0° 時，各種匹配電路的效能比較：

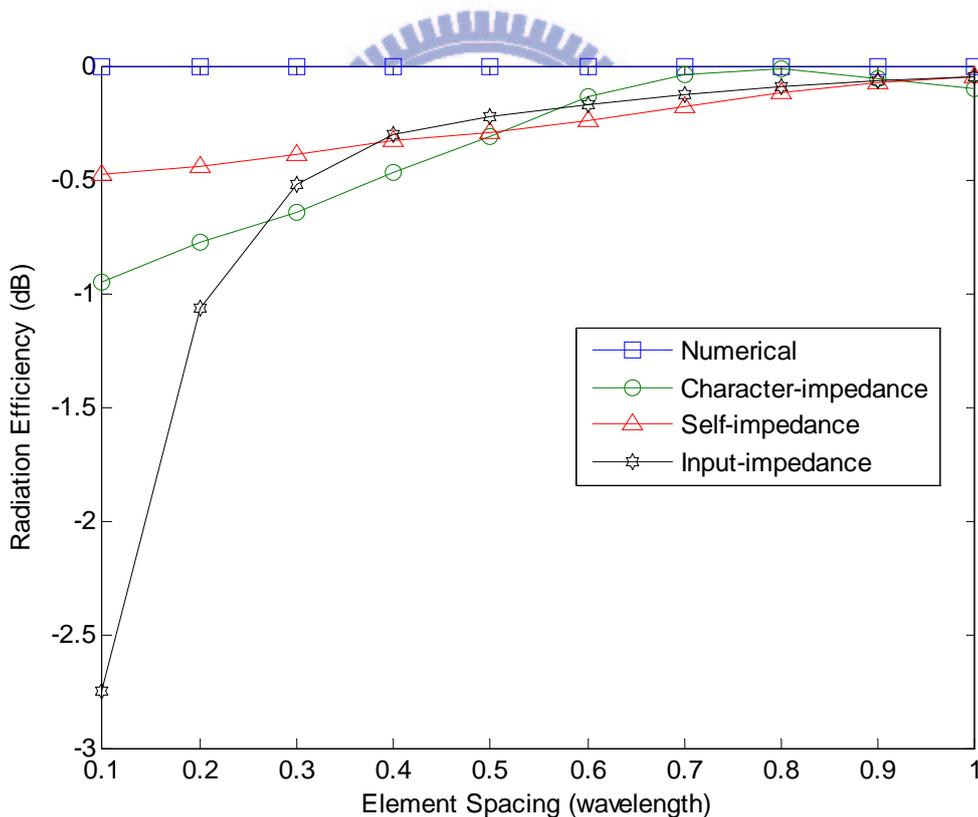


圖 5.9 空間多樣中各種匹配網路的效能比較

很明顯地，最佳化的數值解比傳統的匹配網路好上許多。

又如果我們打算利用 MIMO 中的空間多工技術提昇系統的增益，那我們會在不同

的發射端傳送不同的訊號，因此發射端間的相位差是由訊號的調變方式決定，以下將舉 OFDM 相位調變(以下簡稱 OFDM-PM)為例[23]，其中送出的訊號使用 Matlab 的 randsrc 程式，隨機產生，調變深度(Modulation index) 為 $0.6/2\pi$ ，記憶常數(Memory constant) 為 $\pi/8$ ，載波選用餘弦波，下圖是其結果：

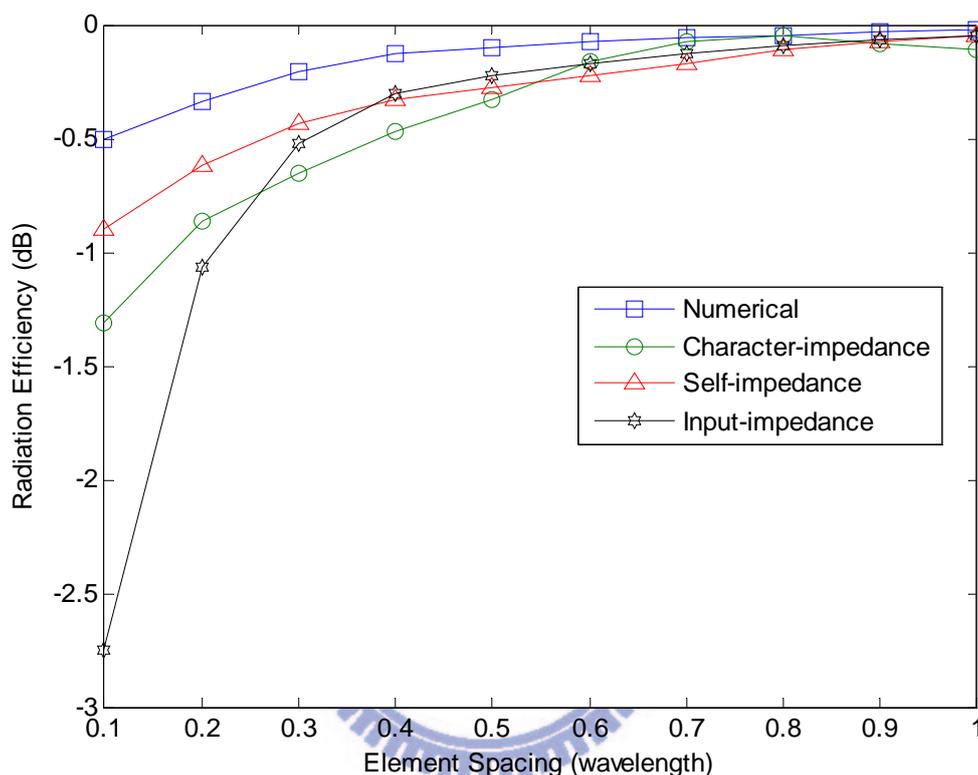


圖 5.10 空間多工中各種匹配網路的效能比較

在這個例子中，數值解的效能仍比傳統的匹配網路優秀許多。但我們不滿足於數值解，在其後的章節中仍試圖找出其封閉公式解以增加使用最佳匹配網路的便利性。

5.3 最佳化匹配網路—近似封閉公式解

由於受限於方程式的複雜度，所以我們另闢蹊徑來處理，在其後的章節中，我們將應用下圖的流程，先處理簡化的問題，求出其解後，歸納分析解決的過程與特性，從中借鏡其思路並結合物理觀念，最後在應用至原本的問題，以期能更完整的處理問題，找出其封閉公式解。

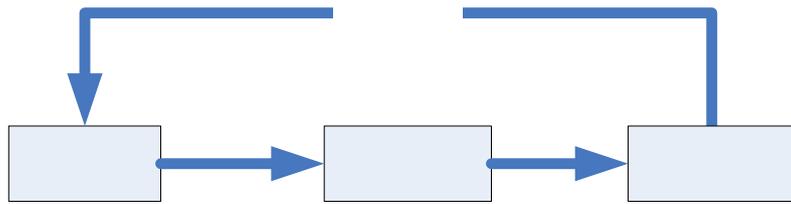


圖 5.11 尋找近似封閉公式解流程圖

5.3.1 特殊情況 1

首先我們要注意第一個特殊情況是相位差 0° ，其模型如下圖所示：

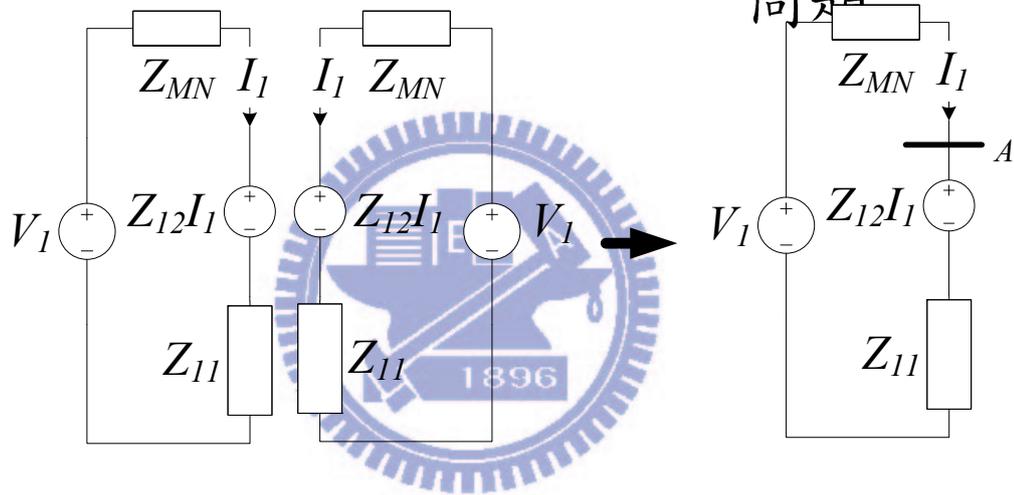


圖 5.12 相位差為 0° 的模型圖

因為相位差 0° 時兩邊電路對稱， $V_1=V_2$ ，導致兩邊的電流也完全相同，因此只需取一邊來看即可，再求出 $Z_{12}I_1$ 的阻抗，而一個電壓源的阻抗等於其提供的電壓值除以流過的電流，因此最後可以化為下圖。

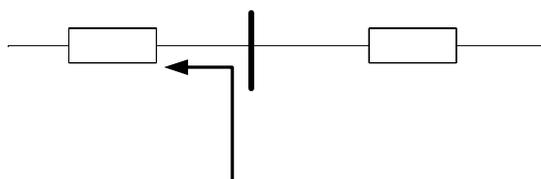


圖 5.13 相位差為 0° 的阻抗示意圖

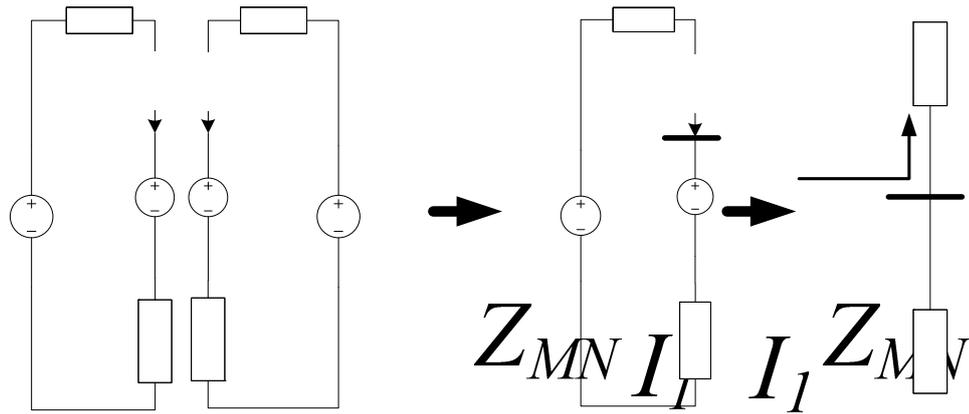


圖 5.15 相位差為 180° 的阻抗示意圖

基於兩者的相似性，我們將其視為同一種特殊狀況，利用類似的流程，最後同樣應

用共軛匹配：

$$\begin{matrix}
 V_1 & -Z_{12}I_1 & & -Z_{12}I_1 & V_1 \\
 \left\{ \begin{array}{l} x = \text{Re}\{Z_{11} - Z_{12}\} \\ y = -\text{Im}\{Z_{11} - Z_{12}\} \end{array} \right. & & & &
 \end{matrix} \quad (5.11)$$

以下我們展示其實部與虛部的結果：

$$\begin{matrix}
 Z_{11} & & Z_{11}
 \end{matrix}$$

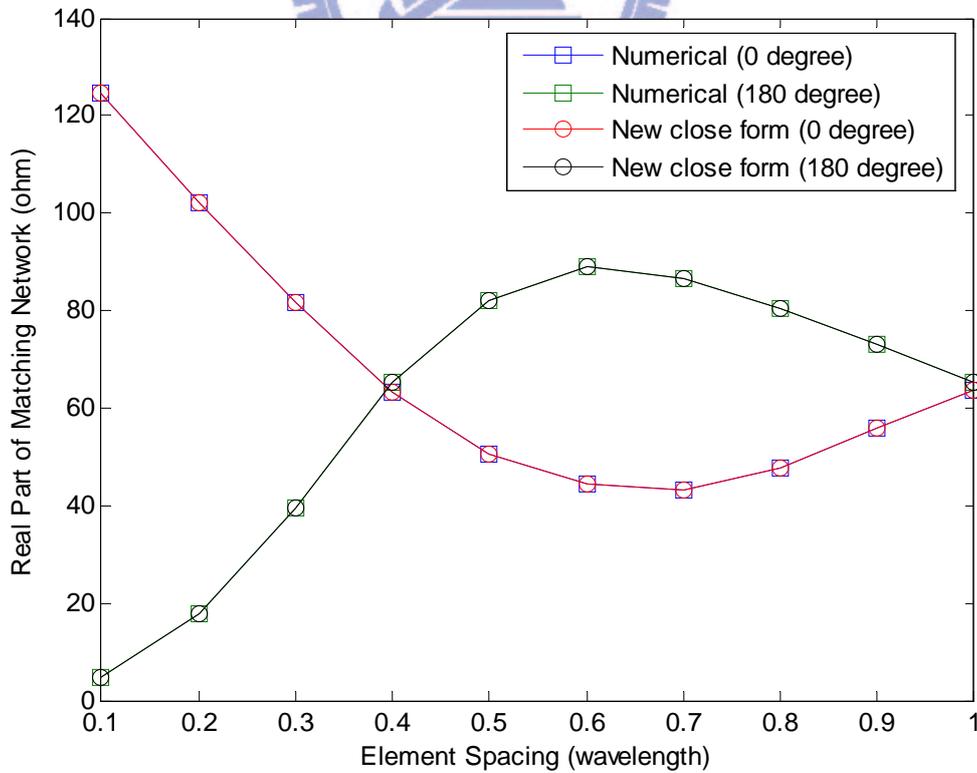


圖 5.16 相位差 0° 與 180° 時封閉公式解與數值解的實部比較結果

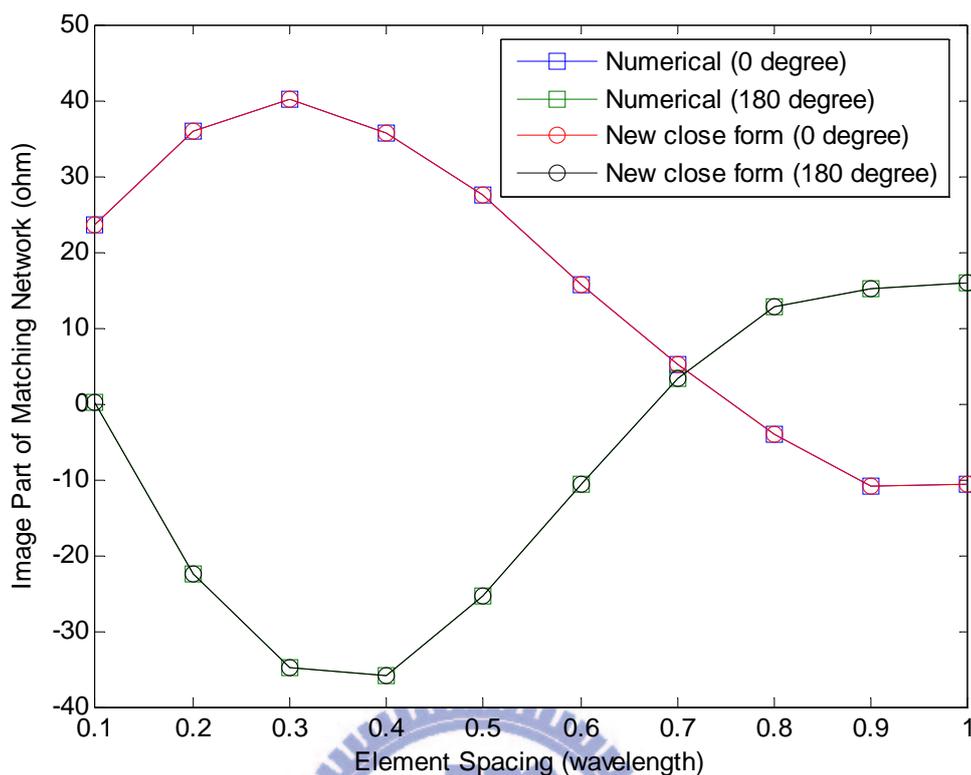


圖 5.17 相位差 0° 與 180° 時封閉公式解與數值解的虛部比較結果

我們可以發現其值與數值解幾乎是一模一樣的，接著我們將 0° 與 180° 得到的解代入式(4.19)，並如下推導：

$$0^\circ \Rightarrow \begin{cases} RS_{11} \propto 8(RZ_{11} + RZ_{12})[-RZ_{11}RZ_{12} + XZ_{12}^2] \\ RS_{12} \propto 8(RZ_{11} + RZ_{12})[RZ_{11}RZ_{12} - XZ_{12}^2] \\ XS_{11} \propto 8(RZ_{11} + RZ_{12})[-RZ_{11}XZ_{12} - RZ_{12}XZ_{12}] \\ XS_{12} \propto 8(RZ_{11} + RZ_{12})[RZ_{11}XZ_{12} + RZ_{12}XZ_{12}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} RS_{12} = -RS_{11} \\ XS_{12} = -XS_{11} \end{cases}$$

$$\text{and } e_{\text{radiation}} = 1 - \frac{|S_{11} + S_{12}e^{j\theta}|^2 + |S_{21} + S_{22}e^{j\theta}|^2}{2} = 1 - \frac{|S_{11} + S_{12}|^2 + |S_{21} + S_{22}|^2}{2}$$

$$\Rightarrow e_{\text{radiation}} = 1$$

$$\begin{aligned}
180^\circ &\Rightarrow \begin{cases} RS_{11} \propto 8(RZ_{11} - RZ_{12})[RZ_{11}RZ_{12} + XZ_{12}^2] \\ RS_{12} \propto 8(RZ_{11} - RZ_{12})[RZ_{11}RZ_{12} + XZ_{12}^2] \\ XS_{11} \propto 8(RZ_{11} - RZ_{12})[RZ_{11}XZ_{12} - RZ_{12}XZ_{12}] \\ XS_{12} \propto 8(RZ_{11} - RZ_{12})[RZ_{11}XZ_{12} - RZ_{12}XZ_{12}] \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} RS_{12} = RS_{11} \\ XS_{12} = XS_{11} \end{cases} \\
\text{and } e_{\text{radiation}} &= 1 - \frac{|S_{11} + S_{12}e^{j\theta}|^2 + |S_{21} + S_{22}e^{j\theta}|^2}{2} = 1 - \frac{|S_{11} - S_{12}|^2 + |S_{21} - S_{22}|^2}{2} \\
&\Rightarrow e_{\text{radiation}} = 1
\end{aligned}$$

也就是說，在 0° 跟 180° 時我們已經找出了最佳化的匹配網路。但依照上述推導， 0° 跟 180° 的輻射效率會與距離無關，即便在很近的距離中都會是 1，此結果違背了基本物理觀念，故我們使用 HFSS 電磁全波模擬軟體驗證，發現在 0.1λ 仍滿足我們上述的推論，但在更短的距離中，埠的阻抗居然會改變系統的自身阻抗導致我們無法使用上述的匹配方式，而此現象與圖 5.12 或圖 5.14 的模型不符。

因此，我們初步推論圖 5.12 或圖 5.14 的模型缺發充分描述極近距離耦合效應的能力，導致我們得到的結果在 0.1λ 之內不適用，但這其實不是多大的問題，因為多天線系統在極近距離的效能表現過差，本來就沒有任何的多天線系統實例會運作在 0.1λ 之內。而在 0.1λ 之外，電磁全波模擬軟體已經驗證圖 5.12 或圖 5.14 模型的精確度，確保了我們使用此模型的信心。

之後我們將試圖將 0° 跟 180° 的結果延伸到所有角度，第一步仍試圖算出其電流，而埠 1 與埠 2 經過的路徑與元件相同，因此假設其相位差不變，再利用 Z 參數的定義，列式如下：

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{11}I_2 \\ V_2 = Z_{12}I_1 + Z_{11}I_2 \end{cases} \text{ and } V_2 = V_1e^{j\theta} \\
\Rightarrow e^{j\theta} &= \frac{Z_{12}I_1 + Z_{11}I_2}{Z_{11}I_1 + Z_{11}I_2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_{12} - Z_{11}e^{j\theta}}{Z_{12}e^{j\theta} - Z_{11}} \\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_{12}e^{j\theta} - Z_{11}}{Z_{12} - Z_{11}e^{j\theta}} \end{cases} \quad (5.12)$$

由式(5.12)可知，兩者電流比值的不同，導致兩邊電路的負載不同，所以我們無法跟前面的例子一樣簡易的求出其最佳化匹配網路，因此也無法利用共軛匹配，正常的處理需要將問題量化，轉換為求極值的問題，但在這邊我們利用已知的物理特性先分析其解的特性並做一些猜測：

1. 最佳匹配網路會和兩邊電路的負載有關，也就是說會和式(5.12)有關。
2. 最佳匹配網路會和 S_{new} 有關，而如前所述 S_{new} 和 $\cos \theta$ 有關。
3. 綜合以上，我們自然地將第一的結果取其實部，其解很可能跟和

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{RZ_{12} - RZ_{11} \cos \theta}{RZ_{12} \cos \theta - RZ_{11}} \text{ 或 } \frac{I_1}{I_2} = \frac{RZ_{12} \cos \theta - RZ_{11}}{RZ_{12} - RZ_{11} \cos \theta} \text{ 有關。}$$

5.3.2 特殊情況 2

在 5.1 節中，我們知道相位差為 90° 時其輻射效率等價於平均的結果，同時也與傳統的輸入阻抗匹配網路結果相同，由此可知相位差 90° 相當具有代表性，因此我們下一個著手的目標就是分析 90° 的情況。

首先由物理意義出發，相位差 90° 時，其輻射效率為 S_{I1} 的平方加上 S_{I2} 的平方，顯然地， S_{I1} 為 0 或 S_{I2} 為 0 很有可能是極值，因此我們觀察圖 8.5(d) 的結果，並擷取數值解與輸入阻抗匹配的解並放大如下：

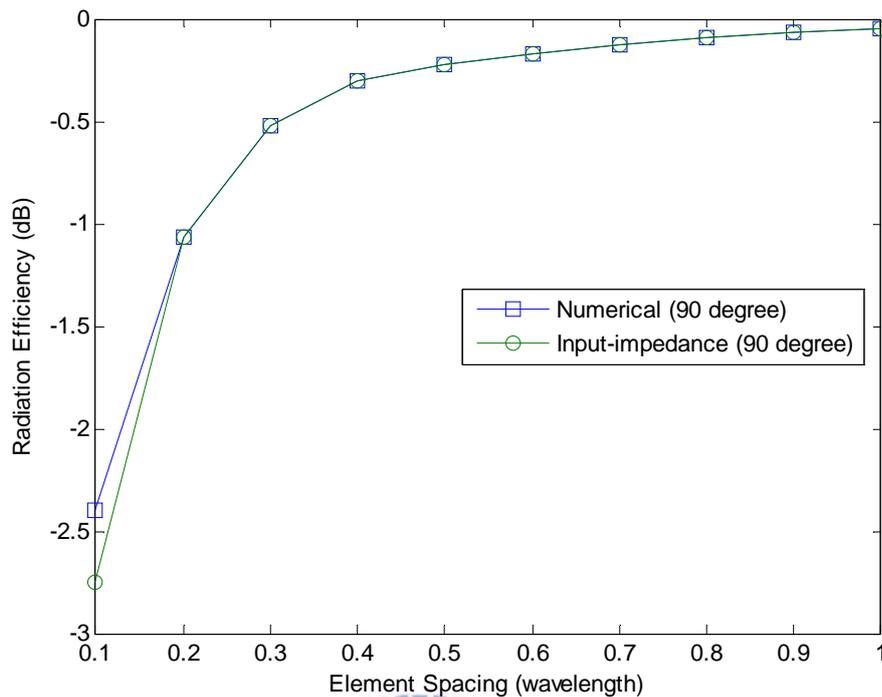


圖 5.18 相位差 90° 時輸入阻抗匹配與數值解的比較結果

由上圖可以發現，可以發現輸入阻抗匹配與數值解的結果非常相近，又因為輸入阻抗匹配網路的特性就是使 S_{11} 為 0，從上圖可以推測 S_{11} 為 0 在相位差 90° 非常有可能是方程式的極值。

首先是 S_{12} 為 0，我們將 S_{12} 為 0 的匹配阻抗代入式(4.19)，可以發現會使 S_{11} 為 1，這從物理上來說也很明顯，的確只有在能量完全打不進去時才會完全沒有耦合作用的影響，因此將 S_{12} 為 0 的確是極值，但此值無意義。

接著我們著手探究 S_{11} 為 0 的物理意義： S_{12} 主要反應其耦合效應的影響，而耦合效應與距離成反比，因此，在距離夠遠的情況下， S_{11} 的影響力會大於 S_{12} ，進而 S_{11} 為零可以導致 S_{new} 相當小。在此情況下，近距離時會有其他的更佳解是很合理的，因為當距離很近時，其 S_{12} 不會太小，因而一味的降低 S_{11} 卻忽略 S_{12} 所求得的结果自然不會是最佳解。當然，這只是由物理觀念上的推論，具體情況仍需要其後數學分析證明。

以下，我們將驗證輸入阻抗匹配網路是此方程式的解，並以此解來探究方程式的數學特性，進而幫助於我們找出最佳化的匹配網路。

首先，我們需要先對方程式做一些數學上的技巧，先看以下證明：

$$\begin{aligned}
 & \text{if } f(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)} \\
 & \therefore \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta = \frac{\partial \beta}{\partial y} \alpha \\
 & \text{let } \beta - \alpha = \Delta \Leftrightarrow \beta = \alpha + \Delta \\
 & \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} (\alpha + \Delta) = \frac{\partial (\alpha + \Delta)}{\partial y} \alpha \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial y} \alpha \\
 & \therefore \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial y} \alpha = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial x} \alpha = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

這個步驟中，我們將一個含有分母分子的方程式對 x 偏微與對 y 偏微為 0 的結果轉化為分母分子的偏微方程式，這個技巧可以有效簡化後續的數學處理。在開始之前，為了簡化版面，我們再做一些變數變換：

$$\begin{aligned}
 & \text{let } \begin{cases} a^2 = RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2 \\ b^2 = RZ_{11}^2 - RZ_{12}^2 \end{cases} \\
 & \Rightarrow f(x, y) = \frac{(x^2 - K(y))^2 + N^2(y) + 4a^2 x^2}{(x^2 + 2RZ_{11}x + K(y))^2 + (G(y)x + N(y))^2} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} \beta(x, y) = x^4 + 4RZ_{11}x^3 + [4RZ_{11}^2 + 2K(y) + G(y)^2]x^2 \\ \quad + [4RZ_{11}K(y) + 2N(y)G(y)]x + N^2(y) + K^2(y) \\ \alpha(x, y) = x^4 + [4a^2 - 2K(y)]x^2 + N^2(y) + K^2(y) \\ \Delta(x, y) = 4RZ_{11}x^3 + 4b^2x^2 + [4RZ_{11}K(y) + 2N(y)G(y)]x \end{cases}
 \end{aligned}$$

首先討論對 y 偏微為 0 的部分：

$$\begin{aligned}
 & i. \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial y} \alpha = 0 \\
 & \begin{cases} K'(y) = -G(y) \\ N'(y) = 2RZ_{11} \\ G'(y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 4RZ_{11}N(y) + 2G(y)[x^2 - K(y)] \\ \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 4N(y)x \end{cases} \\
 & \Rightarrow \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial y} \alpha = 4N(y)[RZ_{11}\Delta(x, y) - \alpha(x, y)x] + 2[x^2 - K(y)]G(y)\Delta(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial y} \alpha = N(y)Q_1(x, y) + M(x, y)P_1(x, y)$$

$$\text{where } \begin{cases} M(x, y) = x^2 - K(y) \\ Q_1(x, y) = 4RZ_{11}\Delta(x, y) - 4\alpha(x, y)x \\ P_1(x, y) = 2G(y)\Delta(x, y) \end{cases}$$

再來是對 x 偏微為 0 的部分：

$$\text{ii. } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial x} \alpha = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 4x^3 + 2[4a^2 - 2K(y)]x \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x} = 12RZ_{11}x^2 + 16b^2x + 4RZ_{11}K(y) + 2N(y)G(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial x} \alpha \right) = M(x, y)P_2(x, y) + N(y)Q_2(x, y)$$

$$\text{where } \begin{cases} P_2(x, y) = RZ_{11}x^4 + 4b^2x^3 + [6RZ_{11}K(y) - 4RZ_{11}c^2]x^2 + 4b^2K(y)x + RZ_{11}K^2(y) \\ Q_2(x, y) = N(y)(y + XZ_{11})\{3x^4 + 2[2c^2 - K(y)]x^2 - K^2(y) - N^2(y)\} \\ \quad - N^2(y)[3RZ_{11}x^2 + 4(RZ_{11}^2 - RZ_{12}^2)x + RZ_{11}K(y)] \end{cases}$$

將兩者總結如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial y} \alpha = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial x} \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(x, y)P_1(x, y) + N(y)Q_1(x, y) = 0 \\ M(x, y)P_2(x, y) + N(y)Q_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

由上式我們可以驗證 $\begin{cases} N(y) = 0 \\ M(x, y) = 0 \end{cases}$ 的確是此方程式的極值，又

$$\begin{cases} N(y) = 0 \\ M(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}} \\ x^2 = K(y) = -y^2 - 2XZ_{11}y + RZ_{11}^2 - XZ_{11}^2 - RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}} \\ x = \sqrt{RZ_{11}^2 - RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2 - \frac{RZ_{12}^2 XZ_{12}^2}{RZ_{11}^2}} \end{cases} \quad (5.13)$$

式(5.13)跟式(4.17)比較後，可以證明輸入阻抗匹配網路的值確實是方程式的極值。

藉由上一部份的成果，我們研究此方程式的數學特性，發現 $N(y)=0$ 能使分母分子差對 y 偏微的值很接近零，而分母分子差對 y 偏微的值又是整體方程式對 y 偏微的主控項，也就是說， $N(y)=0$ 是一個使方程式在 y 方向接近極值的好選擇；接著分析 x 方向，首先注意到 $M(x,y)P_2(x,y)+N(y)Q_2(x,y)=0$ 與方程式對 x 偏微為 0 是等價的，因此在以 $N(y)=0$ 的前提下，不一定要使 $M(x,y)=0$ ，使 $P_2(x,y)=0$ 也有一樣的效果，這代表著我們可由此得一個新的 x 值，以下我們展示新解的數學形式：

$$\begin{cases} N(y)=0 \\ P_2(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}} \\ RZ_{11}x^4 + 4b^2x^3 + [6RZ_{11}K(y) - 4RZ_{11}a^2]x^2 + 4b^2K(y)x + RZ_{11}K^2(y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Let } K(-XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}}) = c^2$$

$$\Rightarrow RZ_{11}x^4 + 4b^2x^3 + [6RZ_{11}c^2 - 4RZ_{11}a^2]x^2 + 4b^2c^2x + RZ_{11}c^4 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + 4\frac{b^2}{RZ_{11}}x^3 + 6c^2x^2 + 4\frac{b^2}{RZ_{11}}c^2x + c^4 - 4a^2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}} \\ x = \frac{RZ_{12}a}{RZ_{11}} - \frac{b^2}{RZ_{11}} \pm \sqrt{2\left(\frac{b^4}{RZ_{11}^2} - c^2 - \frac{RZ_{12}b^2a}{RZ_{11}^2}\right) + a^2} \end{cases}$$

而由圖 5.18 與之前的分析可知，此值如果有應用價值，也會是在距離相當近的時候。但這裡又有新的問題，距離的遠近如何定義，或者是說，我們該何時應用新的解，何時用舊的解？

首先我們觀察方程式，若耦合效應不強烈，代表 $RZ_{11} \gg RZ_{12}$ 則

$$\begin{cases} b^2 = RZ_{11}^2 - RZ_{12}^2 \approx RZ_{11}^2 \\ c^2 = RZ_{11}^2 - RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2 - \frac{RZ_{12}^2XZ_{12}^2}{RZ_{11}^2} \approx RZ_{11}^2 + XZ_{12}^2 \gg a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_2(x, -XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}}) \approx RZ_{11}(x^4 + 4RZ_{11}x^3 + 6c^2x^2 + 4RZ_{11}c^2x + c^4)$$

$$= RZ_{11}(x + RZ_{11})^4 + RZ_{11}XZ_{12}^2(6x^2 + 4x + XZ_{12}^2 + 2RZ_{11}^2)$$

又 x 代表看入阻抗的實部，明顯不能小於 0，因此 $P_2(x, -XZ_{11} + \frac{RZ_{12}XZ_{12}}{RZ_{11}}) \neq 0$

由此可證明在耦合效應不強烈時，輸入阻抗匹配網路是相位差 90° 的最佳解，圖 5.18 也驗證了這個推論。另一方面，當耦合效應強烈，也就是 $RZ_{11} \gg RZ_{12}$ 不成立的時候，可能有另外的最佳解存在，因此，相位差 90° 時的最佳的匹配網路需要先計算 RZ_{12} / RZ_{11} 的值，若其值夠小，則可用輸入阻抗匹配網路的解，若不滿足，則需考慮我們提出的新解，其結果如下：

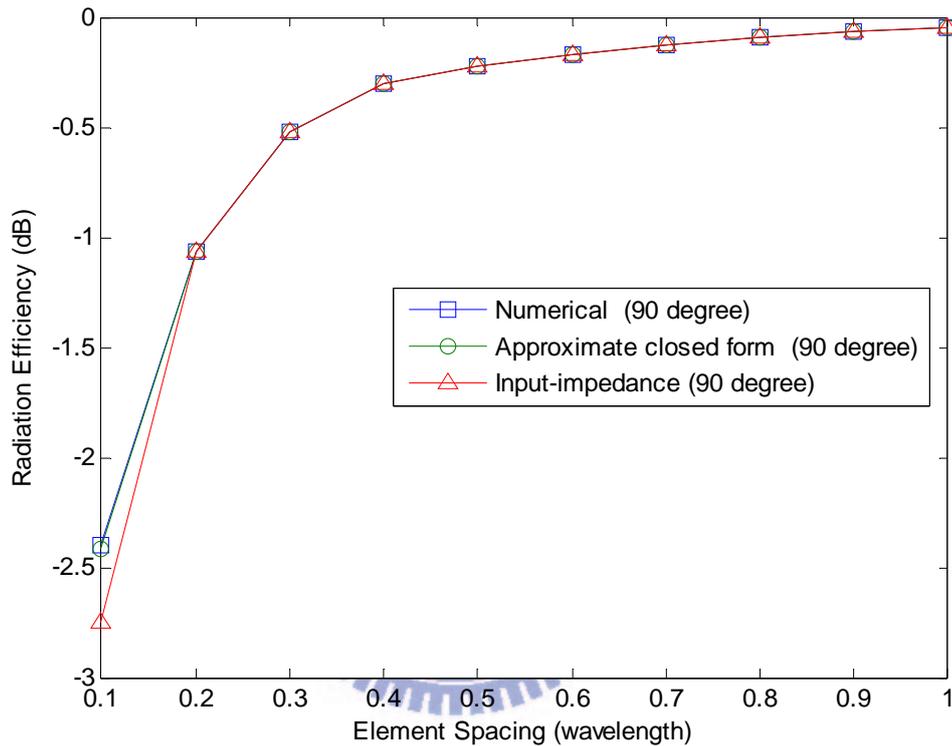


圖 5.19 相位差 90° 時輸入阻抗匹配、數值解與近似封閉公式解在偶極天線中的比較

以下則是同樣是 2.45GHz，但將天線類型改為平版天線的結果：

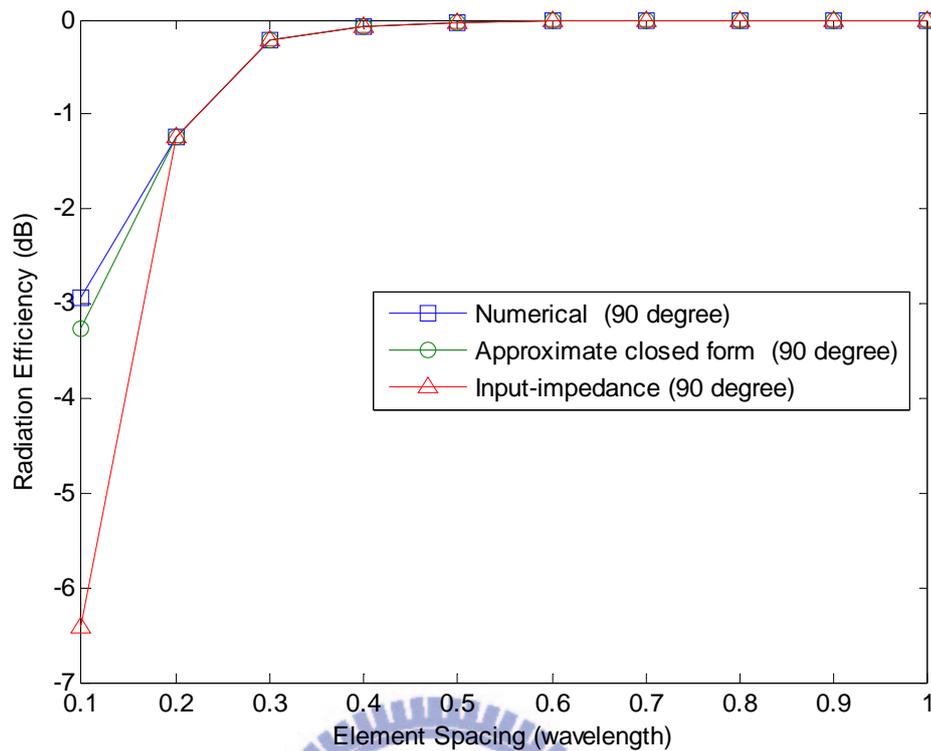


圖 5.20 相位差 90° 時輸入阻抗匹配、數值解與近似封閉公式解在平版天線中的比較

可以發現我們提出的新解，在近距離時（也就是耦合效應強時）確實大幅增進了輻射效率。在這兩個小節中，我們分析了兩個特殊情況並得到了相當不錯的結果，在下一節中我們會先整理特殊情況的心得結論，並試著推廣至原本的問題。

5.3.3 歸納推論與結果

在 0° 與 180° 中，我們先利用電路理論求出耦合效應所造成的阻抗，接著應用共軛匹配的概念求出在 0° 與 180° 的最佳解，最後結合 S_{new} 的特性，推測出最佳解會和

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{RZ_{12} - RZ_{11} \cos \theta}{RZ_{12} \cos \theta - RZ_{11}} \text{ 或 } \frac{I_1}{I_2} = \frac{RZ_{12} \cos \theta - RZ_{11}}{RZ_{12} - RZ_{11} \cos \theta} \text{ 有關。}$$

而在 90° 中，我們利用已知的物理觀念，藉由輸入阻抗分析得到一個封閉公式解，並分析此解的數學特性，發現分母分子差對 y 偏微這項方程式對整體問題而言是一個重要的影響項，令其為 0 可以有效地幫助方程式對 y 偏微變小，故而後續我們將應用此流程來處理問題。

$$f(x, y) = \frac{[-x^2 + K(y)][-x^2 + 4RZ_{12} \cos \theta x + K(y)] + N(y)[N(y) + 4XZ_{12} \cos \theta x] + 4(RZ_{12}^2 + XZ_{12}^2)x^2}{(x^2 + 2RZ_{11}x + K(y))^2 + (N(y) + G(y)x)^2}$$

$$\text{where } \begin{cases} \beta(x, y) = x^4 + 4RZ_{11}x^3 + [4RZ_{11}^2 + 2K(y) + G(y)^2]x^2 \\ \quad + [4RZ_{11}K(y) + 2N(y)G(y)]x + N^2(y) + K^2(y) \\ \alpha(x, y) = x^4 - 4RZ_{12} \cos \theta x^3 + [4a^2 - 2K(y)]x^2 \\ \quad + 4 \cos \theta [RZ_{12}K(y) + XZ_{12}N(y)]x + N^2(y) + K^2(y) \\ \Delta(x, y) = 4(RZ_{11} + RZ_{12} \cos \theta)x^3 + 8b^2x^2 + [4(RZ_{11} - RZ_{12} \cos \theta)K(y) \\ \quad + (2G(y) - 4XZ_{12} \cos \theta)N(y)]x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 4\{N(y) + [RZ_{12}G(y) - 2RZ_{11}XZ_{12}] \cos \theta\}x$$

$$\text{and } \begin{cases} N(y) = 2RZ_{11}y + 2(RZ_{11}XZ_{11} - RZ_{12}XZ_{12}) \\ G(y) = 2(y + XZ_{11}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -XZ_{11} - XZ_{12} \frac{RZ_{12} - RZ_{11} \cos \theta}{RZ_{12} \cos \theta - RZ_{11}}$$

發現此解有以下三個好處：

1. 滿足特殊情況
2. 與我們在特殊情況 1 的猜測吻合
3. 此方程式仍有與特殊情況 2 相同的數學特性

現在我們有了虛部的近似封閉公式解再帶回方程式本身，此時剩下連續的一個一元七次方程式，這裡我們可以簡單的利用改良版的逆二次差值法（Inverse quadratic interpolation）來處理，求出 x 值之後再算出其輻射效率，我們將這樣求出的近似封閉公式解命名為部分近似封閉公式解，接著我們將比較其與數值解在 2.45GHz 偶極天線與平板天線中的結果，而由於將個別角度分別比較實在太浪費篇幅，且近似封閉公式解與數值解同樣都會依其相位差的不同改變，所以最後結果比較我們會利用平均為基準，來衡量近似封閉公式解與數值解的接近程度。：

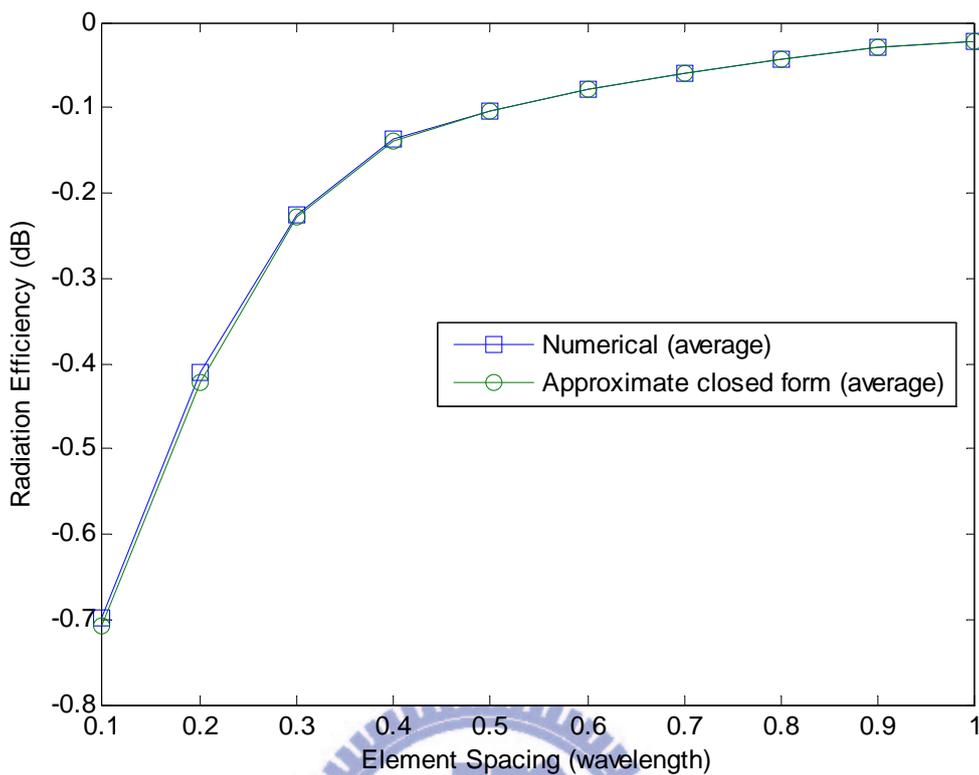


圖 5.21 數值解與部分近似封閉公式解在偶極天線中的比較

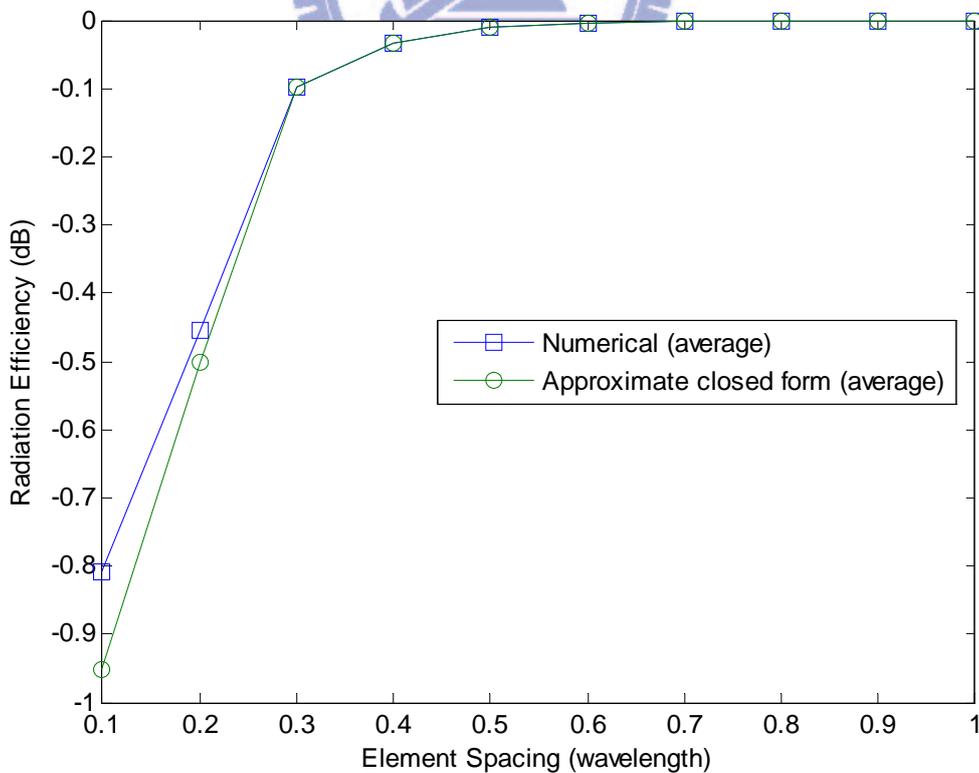


圖 5.22 數值解與部分近似封閉公式解在平版天線中的比較

可以發現結果相當不錯，而在實例應用方面，從特殊情況 1 可以推論出應用多樣技術時，我們推出的部分近似封閉公式解會幾乎等同數值解而優於傳統匹配網路，因此接下展現應用多工技術傳送下的效能，又由於之前已經使用過多工技術下的偶極天線，而部分近似封閉公式解在偶極天線與平版天線都很接近與數值解的效能，因此這裡不在贅述，接著我們比較在其他中心頻率(900MHz、1800MHz)的平均情況：

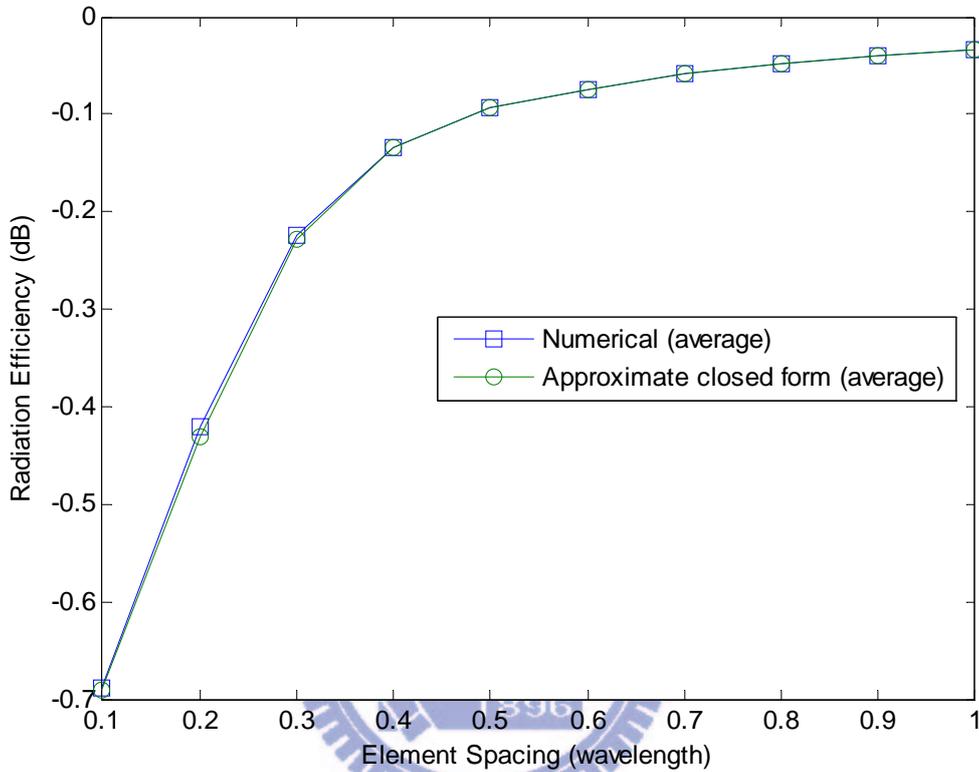


圖 5.23 數值解與部分近似封閉公式解在 1800MHz 偶極天線中的比較

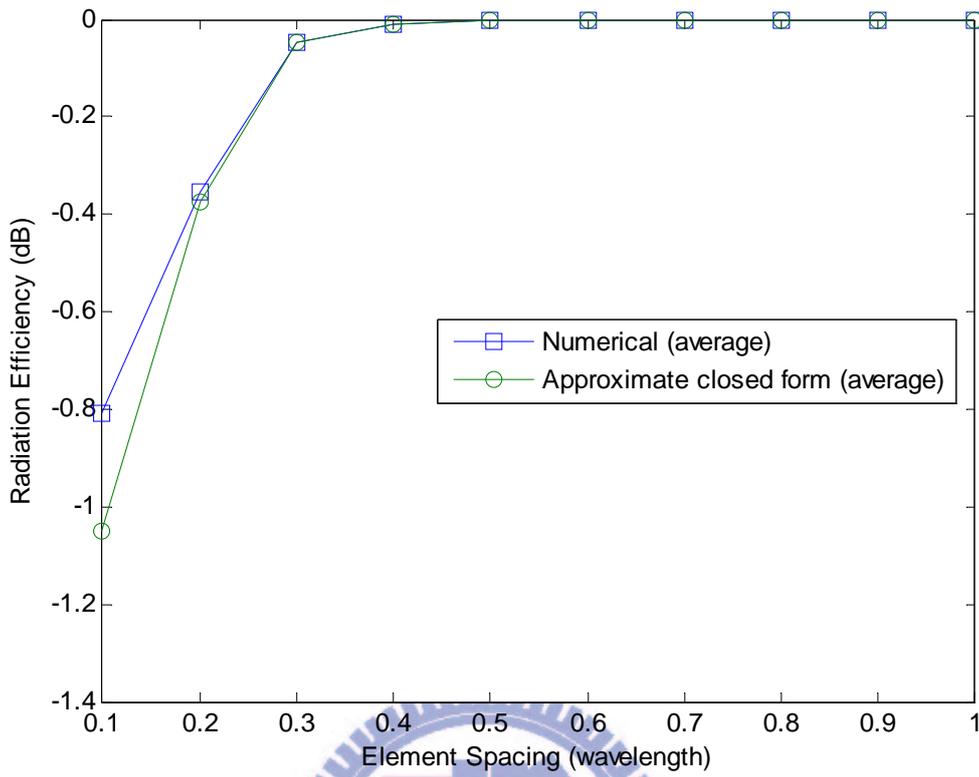


圖 5.24 數值解與部分近似封閉公式解在 1800MHz 平版天線中的比較

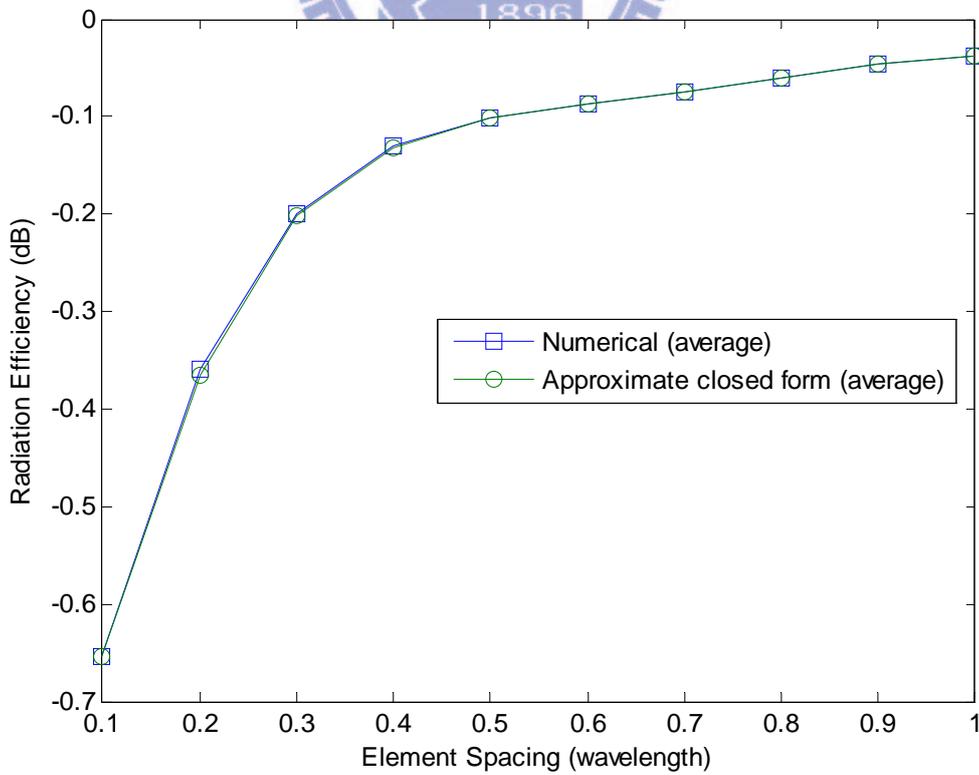


圖 5.25 數值解與部分近似封閉公式解在 900MHz 偶極天線中的比較

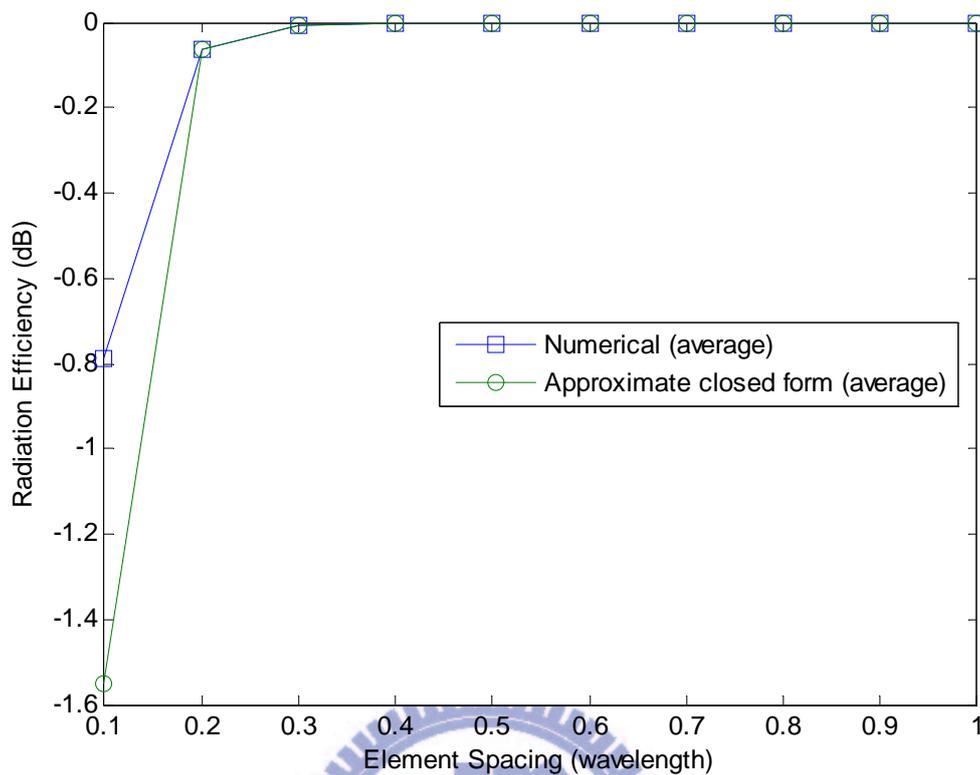


圖 5.26 數值解與部分近似封閉公式解在 900MHz 平版天線中的比較

由以上的驗證，可以說明在這些實例中近似封閉公式解的確展現優於傳統匹配網路的效能，接下來我們將尋求整體的近似封閉公式解。

5.3.4 整體近似封閉公式解

利用前面我們尋找虛部的方法，借鏡特殊情況（ 90° ）的思路，我們尋找能使整體方程式對 x 偏微為 0 的主控項，發現在 0° 、 180° 時，分子微分為 0 是主控項，而 90° 附近的角則結合輸入阻抗匹配網路的成果，又分子微分是一個三次方程式，因此我們能提出一個封閉公式解，以下則是其數學表示式與效能：

$$4x^3 - 12RZ_{12} \cos \theta x^2 + 8[4a^2 - 2K(y)]x + 16 \cos \theta [RZ_{12}K(y) + XZ_{12}N(y)] = 0$$

因為此方法在匹配網路的實部與虛部都是封閉公式解，因此命名為整體近似封閉公式解，以下是其在 2.45GHz 中與數值解跟部分近似精確的比較：

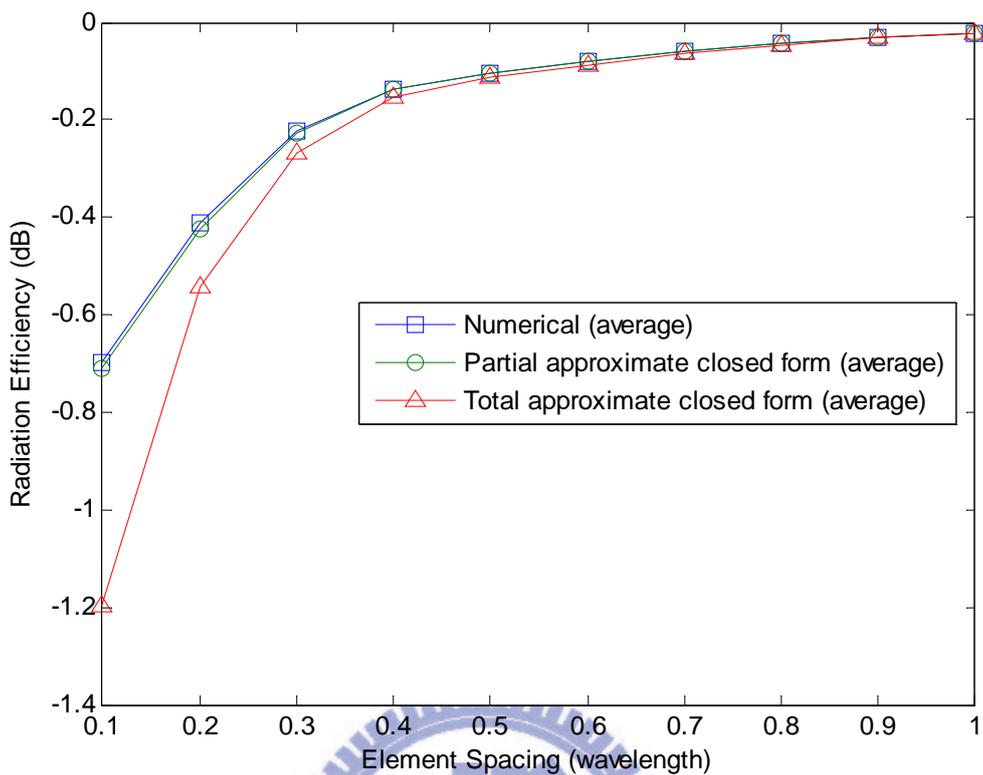


圖 5.27 數值解與部分近似封閉公式解、整體近似封閉公式解在偶極天線中的比較

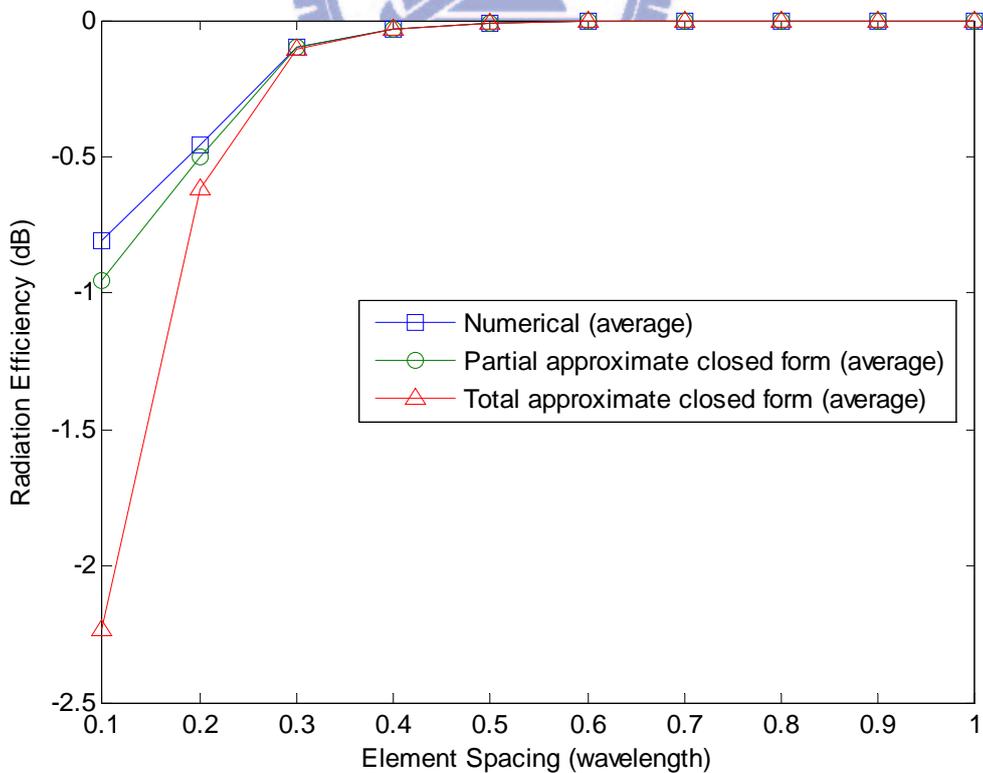
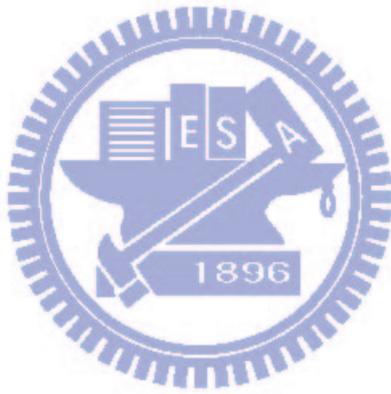


圖 5.28 數值解與部分近似封閉公式解、整體近似封閉公式解在平版天線中的比較

整體近似封閉公式解結果有略遜於部分近似封閉公式解的情況，而與數值解的效能有較明顯的差異，但與傳統的匹配網路相比，此解仍優於傳統的匹配網路，而不論是部分近似解或是整體近似解都能有效降低最佳化匹配網路的使用門檻與運算時間，希望此章所提出的最佳化匹配網路能對多天線系統的匹配設計有所貢獻。



第六章 結論

(Conclusions)

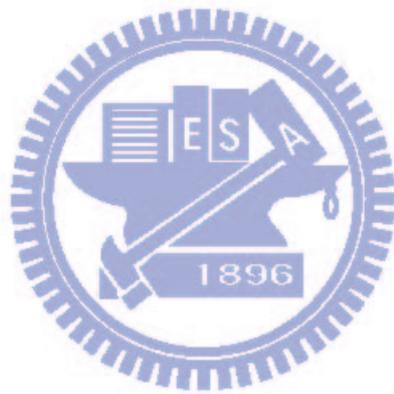
本論文「新型多天線系統分析」中提出了提出了兩種新型評估多天線系統效能的電磁分析。第二、三章描述了新型天線空間相關係數的計算方法，第四、五章則是探討輻射效率與匹配網路的量化關係與最佳化的匹配網路，並使用電磁模擬軟體模擬一對偶極天線與平版天線為驗證基準。

在新型天線空間相關係數部分，本論文利用發射端與接收端空間相關係數的異同，藉由微波電磁理論與數學方法將發射端的公式結合至接收端，提出新的接收端的空間相關係數公式，僅僅利用散射係數矩陣得到接收端的空間相關係數，而非傳統的天線輻射場型，此新型公式不但能描述非完美等向性的多天線系統，還可以利用散射係數矩陣較天線輻射場型易於獲得與方便計算的優點，簡化測量的難易度與計算的複雜度，而使用電磁模擬軟體模擬也成功地驗證新型空間相關係數的正確性。

而在輻射效率與匹配網路方面，本論文探討輻射效率的物理意義與數學特性後，提出公式量化說明天線埠饋入不同相位差與匹配網路如何影響輻射效率，並以此解釋傳統匹配網路的特性與性能，再憑藉此公式並結合數種數值方法與微波電路理論，提出最佳化的匹配網路，但我們不滿足於數值解，繼續利用數學技巧與微波電路理論提出部分近似封閉公式解與整體近似封閉公式解，藉由近似封閉公式解降低最佳化匹配網路的運算時間與提升其使用方便度。而最後在各式實例中我們利用電磁模擬軟體以不同中心頻率、不同種類天線與不同的調變方式與傳統匹配網路進行效能比較的結果都相當優秀，數值解優於傳統匹配網路自然不在話下，近似封閉公式解也都有相當不錯的表現，相信能對多天線系統的匹配設計有所貢獻。

至於本論文還有數項研究空間，可供未來從事相關研究學者加以深入探討並分析改善之處，例如：

1. 新型空間相關係數需在天線距離足夠近才適用，此限制大大降低其實用性，未來可能需要更高明的數學方法處理接收端與發射端的空間相關係數公式使其能應用更遠的天線間距離。
2. 如果克服天線距離太近的限制，可以利用機率分佈近似方法將 AOA 機率分佈由單一分佈推廣至其他的機率分佈中。
3. 我們求出的最佳化匹配網路是近似解，同樣需要更高明的數學方法處理求出其精確解。
4. 本論文僅著重探討雙天線的問題，可以將其拓展至含有更多天線個數的系統。



參考文獻

- [1] D. Gesbert, M. Shafi, D. Shiu, P. J. Smith, and A. Naguib, "From theory to practice: an overview of space-time coded MIMO wireless systems," *IEEE J. Sel. Areas in Commun.*, vol. 21, pp. 281-302, Apr. 2003.
- [2] A. R. Kaye and D. A. George, "Transmission of multiplexed PAM signals over multiple channel and diversity systems," *IEEE Trans. Commun. Techn.*, 18(5):520-526, October, 1970.
- [3] J. H. Winters, "Optimum combining for indoor radio systems with multiple users," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, pp.1222-1230, 1987.
- [4] J. Salz, "Digital transmission over cross-coupled linear channels," *AT&T Tech. J.*, vol. 64, no. 6, pp. 1147-1159, July/Aug. 1985.
- [5] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423, 623-656, July, Oct. 1948.
- [6] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, New York: Wiley, 1974.
- [7] R. G. Vaughan and J. B. Andersen, "Antenna diversity in mobile communications," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 36, pp. 149-172, no. 4, Nov. 1987.
- [8] S. Blanch, J. Romeu, and I. Corbella, "Exact representation of antenna system diversity performance from input parameter description," *Electron. Lett.*, vol. 39, no. 9, pp. 705-707, May 2003.
- [9] A. Diallo, C. Luxey, P. L. Thuc, R. Staraj, and G. Kossiavas, "Enhanced diversity antennas for UMTS handsets," *Proc. European Conf Antennas Propag. (EuCAP)*, Nice, France, 6-10 November 2006.
- [10] S. Dossche, S. Blanch, and J. Romeu, "Optimum antenna matching to minimise signal correlation on a two-port antenna diversity system," *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 19, pp. 1164-1165, Sep. 2004.

- [11] Z. Ying and D. Zhang, "Study of the mutual coupling, correlations and efficiency of Two PIFA antennas on a small ground plane," in *IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp.*, Washington, DC, Jul. 2005.
- [12] B. Rembold, "Relation between diagram correlation factors and S-parameters of multiport antenna with arbitrary feeding network," *Electron. Lett.*, vol. 44, no. 2, pp. 5–7 Jan. 2008.
- [13] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile radio reception," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957-1000, 1969.
- [14] R. M. Buehrer, "The Impact of Angular Energy Distribution on Spatial Correlation," *IEEE Proceedings VTC 2002-Fall*, pp. 1173 - 1177 vol.2, Sep. 2002
- [15] 謝博全,「新型態多天線系統綜合分析」,國立交通大學,碩士論文,民國 96 年。
- [16] C. Waldschmidt and W. Wiesbeck, "Compact wide-band multimode antennas for MIMO and diversity," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 8, pp. 1963-1969, Aug. 2004.
- [17] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, New York: Wiley, 1997.
- [18] P. S. Kildal and K. Rosengren, "Electromagnetic analysis of effective and apparent diversity gain of two parallel dipoles," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 2, pp. 9-13 2003.
- [19] M. Manteghi, and Y. Rahmat-Samii, "Multiport characteristics of a wide-band cavity backed annular patch antenna for multipolarization operations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, pp. 466–474, Jan. 2005.
- [20] S. H. Chae, S.-K. Oh, and S.-O. Park, "Analysis of mutual coupling, correlations, and TARC in WiBro MIMO array antenna," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 6, pp. 122–125, 2007.
- [21] M. V. Ivashina, M. N. M. Kehn, P.-S. Kildal, and R. Maaskant, "Control of reflection and mutual coupling losses in maximizing efficiency of dense focal plane arrays," *Proc. European Conf Antennas Propag. (EuCAP)*, Nice, France, 6-10 November 2006.

- [22] D. A. Frickey, "Conversions between S, Z, Y, h, ABCD, and T parameters which are valid for complex source and load impedances," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, pp. 205–211, Feb. 1994.
- [23] S. C. Thompson, A. U. Ahmed, J. G. Proakis, & J. R. Zeidler, "Constant Envelope OFDM Phase Modulation: Spectral Containment, Signal Space Properties and Performance," in *Proc. MILCOM'04, 2004*.

