

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文



非線性項對塗林模型之影響及  
台灣魚類圖紋模擬  
Effects of nonlinear terms in Turing model and  
pattern simulation of Taiwan fishes

研究生：盧仁鈞

指導教授：楊文美 博士

中華民國九十八年七月

非線性項對塗林模型之影響及台灣魚類圖紋模擬  
**Effects of nonlinear terms in Turing model and  
pattern simulation of Taiwan fishes**

研究生：盧仁鈞

Student : Jen-Chun Lu

指導教授：楊文美

Advisor : Wen-Mei Yang



**A Thesis**  
**Submitted to Department of Mechanical Engineering**  
**College of Engineering**  
**National Chiao Tung University**  
**in Partial Fulfillment of The Requirements**  
**for the Degree of**  
**Master of Science**  
**in**  
**Mechanical Engineering**  
**July 2009**  
**Hsinchu, Taiwan, Republic in China**

中華民國九十八年七月

## 摘要

本研究針對涂林模型不同的反應項組合，經由理論分析給予適當的參數及反應項係數產生涂林圖形，進一步探討各種非線性項及其係數對涂林圖形的影響，並藉此預測圖形變化特性，產生與實際生物紋路相似的圖形。數值方法以直角座標系統的角度進行分析，涂林模型中的擴散項以中央差分法離散化，而模型中對時間微分項則是以尤拉法近似。

研究中嘗試的反應項組合有四十二組，由結果可知反應項只有一、二次項將無法產生圖形，需搭配三次項才能有圖形的產生，但三次項無須搭配二次項亦可產生圖形。二次項的非線性項會使圖形趨向點的特性，三次項會使圖形趨向線的特性，採用特定的反應項組合及參數搭配特殊的初始值，圖形會有線條與點共存及交錯等的特性，利用這些特性可模擬出一些台灣魚類特有的紋路。此外藉由二階段涂林模型的分析，利用第一階段得到的圖形當作二階段的初始值，經由參數的改變產生一階段所無法得到的圖形變化特性，可模擬出疊波棘蝶魚由幼魚到成魚的紋路變化。

## 誌 謝

首先感謝指導教授楊文美老師在這兩年的時間對我的悉心指導與諄諄教誨，使本論文能順利的完成。恩師的嚴謹教學態度，讓我們培養獨立思考的能力與認真的處事態度，特此致上感激與謝意！

承蒙口試委員交通大學 傅武雄教授、中山大學 游明輝教授、文化大學 張鴻明教授於口試期間給予論文指正與意見，使本論文更為嚴謹與完善，深表謝意。

感謝實驗室學長豪傑、立杰、友約、榮豐、梓源、國元在生活與課業上的熱情幫忙與提攜，以及同窗俊傑、宏元、詒翔、奇軒、孝修、書磊、譯微、文慶在平時的相互扶持與論文研究上的交流，並感謝學弟小熊、書豪、小象在求學期間給予我日常生活中諸多的幫助。

最後謹以本論文獻給我的父母及親友，感謝你們對我的生活無止境的關懷與照顧，並在精神上全力的支持與鼓勵，此恩此情銘記於心。

# 目 錄

摘 要 .....	I
誌 謝 .....	II
目 錄 .....	III
表 目 錄 .....	IV
圖 目 錄 .....	V
符 號 表 .....	VII
第一章 緒論 .....	1
1-1 前言 .....	1
1-2 文獻回顧 .....	2
1-3 研究目的 .....	5
第二章 涂林模型 .....	6
2-1 涂林模型介紹 .....	6
2-2 反應項形成原理 .....	7
2-3 涂林模型線性穩定分析 .....	8
2-4 涂林模型的波數預測 .....	12
第三章 數值方法 .....	13
3-1 直角座標分析 .....	13
3-2 邊界條件 .....	14
第四章 結果與討論 .....	16
4-1 模型選擇與穩定性分析 .....	16
4-2 非線性項分析 .....	17
4-2-1 三次項對圖形的影響 .....	17
4-2-2 三次項加入二次項對圖形的影響 .....	19
4-3 台灣魚類圖紋模擬 .....	23
4-4 二階段涂林模型分析 .....	25
第五章 結論 .....	29
參考文獻 .....	31

## 表 目 錄

表 一	三次項組合表 .....	34
表 二	波數可能組合表 .....	36



## 圖 目 錄

圖 一	CDIMA 實驗之涂林結構圖.....	37
圖 二	(A) 催化物-抑制物機制 (B) 基質消耗機制.....	38
圖 三	(A) 催化物-抑制物機制 (B) 基質消耗機制.....	39
圖 四	零流邊界條件圖.....	40
圖 五	Q拋物線滿足 $Q < 0$ 的解.....	41
圖 六	網格點圖.....	42
圖 七	限制條件圖.....	43
圖 八	相似圖形比較圖.....	44
圖 九	參數變化差異圖.....	45
圖 十	波數變化圖.....	46
圖 十一	特殊圖形組合圖.....	47
圖 十二	參數正負變化影響圖.....	48
圖 十三	同組合中間單點擾動比較圖.....	49
圖 十四	圖十一B之分時圖.....	50
圖 十五	圖十一G之分時圖.....	51
圖 十六	圖十一I之分時圖.....	52
圖 十七	各組合中間單點擾動比較圖.....	53
圖 十八	點與直線共存圖.....	54
圖 十九	非直線與直線共存圖.....	55
圖 二十	各組合之波紋圖.....	56
圖 二十一	點與直線交錯圖.....	57
圖 二十二	橢圓點圖.....	58
圖 二十三	涂林振盪圖.....	59
圖 二十四	圖二十三B各位置u值隨時間變化圖。.....	60
圖 二十五	分時涂林振盪圖.....	61
圖 二十六	分時涂林振盪圖.....	62

圖 二十七	高波數圖 .....	63
圖 二十八	(A)花斑刺鰓及其(B)模擬圖紋.....	64
圖 二十九	(A)烏尾阿南魚及其(B)模擬圖紋.....	65
圖 三十	(A)矮雙線鰈及其(B)模擬圖紋.....	66
圖 三十一	(A)繁星魮及其(B)模擬圖紋.....	67
圖 三十二	(A)橫帶大鱗大眼鯛及其模擬圖紋(B)及(C) .....	68
圖 三十三	(A)曲紋蝴蝶魚及其(B)模擬圖紋.....	69
圖 三十四	(A)線斑鱗魷及其(B)模擬圖紋.....	70
圖 三十五	(A)點斑橫帶蝴蝶魚及其(B)模擬圖紋.....	71
圖 三十六	(A)條紋棘蝶魚及其(B)模擬圖紋.....	72
圖 三十七	(A)條紋棘蝶魚(幼魚)及其(B)模擬圖紋.....	73
圖 三十八	(A)紋身蛙鰈(雄魚)及其(B)模擬圖紋.....	74
圖 三十九	(A)爪哇籃子魚及其模擬圖紋(B)、(C)與(D) .....	75
圖 四十	二階段涂林圖形變化圖.....	76
圖 四十一	參數 $r_2$ 變化圖 .....	77
圖 四十二	參數 $r_3$ 、 $r_5$ 變化圖 .. 1896 .....	78
圖 四十三	參數 $r_2$ 變化圖 .....	79
圖 四十四	參數 $r_3$ 、 $r_5$ 變化圖 .....	80
圖 四十五	二階段實際生物模擬圖 .....	81

## 符 號 表

符號	
$A, B$	反應物濃度
$a, b, \tau$	轉換參數
$C_1, C_2$	常數
$D$	擴散比
$D_u, D_v$	化學物質 $u$ 與 $v$ 的擴散係數
$E, P$	生成物濃度
$f, g$	塗林模型中的反應項
$f_2, g_2$	反應項中的非線性項
$I, J$	$x$ 與 $y$ 方向的切割等分
$K$	反應速率
$L_x, L_y$	系統 $x$ 與 $y$ 方向的長度
$M, N$	中間過程的產物濃度
$m, n$	$x$ 與 $y$ 方向的波數
$N_t$	時間間隔次數
$r_2, r_3, r_4, r_5$	非線性項係數
$t$	時間
$\Delta t$	時間間隔
$u, v$	化學物質濃度



$x, y$	直角座標
$\Delta x, \Delta y$	$x$ 與 $y$ 方向的格點距離
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	模型之參數
$\rho_u, \rho_v, \mu_u, e, \sigma_v, R$	模型之參數
$\lambda$	特徵值
$\nabla^2$	拉氏運算子
上標說明	
—	均勻穩態
'	擾動量
下標說明	
$u, v$	對 $u$ 或 $v$ 的偏微分
min	最小值



# 第一章

## 緒論

### 1-1 前言

生活週遭存在著各種形形色色的生物，每種生物都有自己獨特的斑紋，但大家是否想過他們的身上為何會形成這樣的紋路？無論是由斑點或是線條組成，對於這樣的疑問大家可能馬上會聯想到動物身上的斑紋是為了配合生存環境，方便自身與環境背景緊密結合在一起以呈現欺敵的效果來躲避獵食者或是接近獵物，而有些動物會利用身上鮮豔的斑紋來吸引異性，以提高自身品種延續的機會。

早期有關這方面研究最有影響力的就屬達爾文（Charles Darwin）在 1859 年提出的進化論，其內容提到有關物競天擇、適者生存，敘述生物的演化是由低等簡單的個體慢慢轉向高等而複雜，環境與生物之間的競爭會淘汰弱勢物種，但此論點無法直接解釋斑紋產生的原因，只能知道生物演化出不同種紋路是因為生存環境的影響造成這樣的結果。一直到了 20 世紀，涂林（Alan Turing）在形態發生的觀點下，提出化學反應中的化學物質透過反應擴散系統，使濃度在空間不同的位置產生差異，再由此濃度梯度來解釋動物身上的斑紋。在下一節中將會介紹前人所作之相關研究以便幫助吾人更進一步了解運用涂林模型模擬生物圖形的演變。

## 1-2 文獻回顧

在現今各種不同的生物圖形的模擬中，其模型設計架構大都是以涂林模型為主要的基礎，在此基礎下發表出許多不同的模型，藉此模擬出豹、瓢蟲、貝殼、斑馬等不同動物的紋路，涂林模型的觀點由涂林在 1952 年發表「形態發生的化學基礎」(The Chemical Basis of Morphogenesis)【1】提出，內容敘述在一假設的化學反應，反應中的化學物質在濃度均勻平衡的不穩定態經擴散發生交互作用使得擾動慢慢放大，最後產生濃度不均勻的穩定態，化學物質在此又可稱為形態發生因子 (morphogens)，整個擴散過程可視為生物學中的形態發生 (morphogenesis)，如果將生物身上的圖紋視為經由形態發生所產生的結果，就能藉由涂林模型來數值模擬出生物身上的紋路，如此動物身上的紋路形成原理也就有了個雛形。

涂林在發表涂林模型之後，因為涂林模型中的反應項包含非線性項，以當時的科技還無法應付其理論所需的龐大計算，因此有關涂林模型的研究沉極了一陣子，過了二十年後 Gierer 與 Meinhardt【2】提出要形成穩定的生物圖形符合自我催化 (local selfenhancement) 與長程的抑制 (long-range inhibition) 的觀點，也就是催化物—抑制物機制，並利用電腦計算能力解決模擬生物圖形所需的複雜計算，使此領域能夠讓更多人參與。Meinhardt 有一著作名為「形成生物圖形的模型」(Models of Biological Pattern Formation)【3】，內容有許多生物圖形的範例包含斑馬、水螅 (hydra)、葉脈等圖形的模擬。

Arcuri 與 Murray【4】對一維的 Schnackenberg model 和 Gierer and Meinhardt Model【2】探討在不同的邊界條件與初始條件對圖形的影響，在

固定的邊界條件與模型下將不同的模型參數對應組合所可能呈現的圖形波數做討論，另外 Murray【5】在其著作「數學生物學」(Mathematical Biology) 第二冊介紹塗林模型之線性穩定分析，求解出在何種限制條件下能夠產生生物圖形，並對斑馬、蛇、蝴蝶等多種生物做生物圖形模擬。

Ermentrout【6】對反應擴散方程式的非線性項去討論圖形會形成點還是線條，藉由一假設無化學反應機制當作形成基礎的模型，以亂數當作圖形初始值，最後發現當非線性項沒有二次項時圖形在穩態的時候會形成線條狀，在慢慢增加二次項的參數大小後圖形會漸漸由線條變成點狀排列。

Lyons 與 Harrison【7】曾經對 Brusselator 與 Hyperchirality 模型及另外兩個自行假設沒有化學反應機制作基礎的模型進行模擬分析，觀察在各不同模組的數值分析後，得到非線性項只有奇數次項沒有偶次項並設定圖形初始值為一均勻數值，最後圖形會呈線條狀，這與 Ermentrout【6】的結果相符合。

Holloway 與 Harrison【8】運用 Brusselator 和 Gierer and Meinhardt 模型進行分析，發現模型中的擴散比很低時一維的圖形會大致呈現正弦函數，當擴散比逐漸調高圖形會變成較不規律同時圖形的峰頂會比凹谷更為尖銳，二維的圖形同樣有此一現象發生。而 Asai【9】等人運用 Kondo 與 Asai 所發表的模型，藉由調整方程式的參數來模擬斑馬魚 (Zebrafish) 的豹紋基因對紋路的影響。

Shoji【10】等人對塗林模型中反應項為線性的模型進行分析，得到只要將模型中的化學物質數值限定在特別的區間內就能分別得到點、線與凹點等不同的圖形。

Leppänen【11】對多個模型的化學反應機制進行分析，並提到近年來

從事涂林化學反應實驗的人大都藉由 CIMA（次氯酸根離子、碘離子、丙二酸）或是 CDIMA（二氧化氯、碘、丙二酸）的化學反應交互作用得到涂林結構中的線或點的圖案如（圖一），這使涂林的論點經由實作得到部份的證實，但對運用涂林論點來描述整個生物形態發生的過程還有許多疑問尚待解決。

Page【12】等人採用 Gierer and Meinhardt 模型，經分析得到將模型內的擴散項參數提高會使點狀圖案的峰值減小而點向外擴散變大，此外運用同一張圖形搭配圖形各部位區間不同的參數，藉此形成全部圖形為相同參數無法呈現或是較難呈現的圖形。

劉瑞堂【13】採用 Barrio 提出的模型，成功利用兩階段涂林模型模擬出花豹（leopard）、美洲豹（jaguar）的紋路，藉由將第一階段模擬出的幼豹斑點紋路當作第二階段的初始值，模擬出成年花豹、美洲豹的環狀斑紋。林士傑【14】採用 Gierer 與 Meinhardt 所發表的模型，在嘗試改變不同參數的數值以獲得圖形變化的規律後，模擬出瓢蟲的紋路。劉瑞堂【13】運用同樣的模組，並改變球座標的計算區塊使畫出來的圖形成橢圓形，更符合某些瓢蟲實際的外型，並且模擬出更多不同種類的瓢蟲。

何承彥【15】將線性化的涂林方程式分別針對直角座標、極座標與球座標進行分析，藉由選定的參數來預測圖形可能形成的波數組合，如此一來圖形給予特定的一些初始值就能預測可能的形成圖案。

### 1-3 研究目的

涂林模型的概念由涂林在1952年發表「The chemical basis for morphogenesis」至今已有50多年的歷史，在這其間有許多學者在涂林模型的架構下提出許多不同的模型，有些人設計模型依據一個化學反應機制而有些模型則不需建構在化學反應的機制下，但無論是否有遵循化學反應的機制設計，每個模組最後設計出的非線性項不同而模擬出來的生物圖形也就有所差異。

但這使人難免會想知道為何其非線性項必需要如此的設計，有些學者的非線性項包含二次項沒有三次項，但有的模型卻是二次與三次項都有，甚至有的非線性項呈現分式，難道無法由一種模型去表達出各種我們想要的圖紋？為了知道模型在不同的非線性項之下是否能夠產生各種特有的圖形，進而去模擬各種生物的斑紋，因此吾人運用學者所發表的模型並將模型加入特定的非線性項，搭配適當的參數變化及初始值設定以及各學者所提出能夠預測圖形變化的理論來做數值分析，希望知道不同的非線性項對所產生的圖形有何影響，找尋在各非線性項之間是否存在著有系統的變化。如能知道圖形變化的規律對往後在生物圖形的模擬上，能模擬出更加符合實體生物的外觀。

## 第二章

### 涂林模型

#### 2-1 涂林模型介紹

涂林模型是結合生物學、數學、化學觀點所建構而成，其中的數學式子為兩條或是兩條以上的非線性聯立偏微分方程式組成，利用反應擴散（Reaction Diffusion）系統來描述化學物質或是形態發生因子交互作用的行為，再藉由此交互作用過程解釋生物體成長發育過程中的形態發生現象，而生物圖形的產生就是利用這樣的機制原理。涂林模型一般可表示成

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + g(u, v)\end{aligned}\tag{2-1}$$

(2-1) 式中的 $u$ 和 $v$ 代表兩種不同化學物質濃度， $\nabla^2$ 符號代表拉氏運算子（Laplacian operator），在二維直角座標可表示為 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 。  $D_u$ 和 $D_v$ 分別為化學物質濃度 $u$ 和 $v$ 的擴散係數且均為正值， $f(u,v)$ 與 $g(u,v)$ 則是代表模型中的反應項，對生物圖形的形成有決定性的影響，各學者大都藉由不同的化學反應機制來更改此項以創造出不同模型，並得到不同的生物圖形。而涂林模型因化學物質的特性不同主要可分為兩種機制分別是催化物-抑制物（activator-inhibitor）機制如圖二A與基質消耗（substrate-depletion）機制如圖二B，前者當催化物（activator） $u$ 自我催化（autocatalysis）時會產

生抑制物 (inhibitor)  $v$ ，而抑制物  $v$  會抑制  $u$  的生成；後著為當酵素 (enzyme)  $u$  在自我催化的過程時基質 (substrate)  $v$  會被消耗，而基質  $v$  因為被  $u$  消耗與自身的抑制作用使得  $u$  的催化反應速率降低。圖三的  $f_u, f_v, g_u$  和  $g_v$  代表反應項  $f$  和  $g$  分別對  $u$  與  $v$  偏微分，A 及 B 的左圖說明當系統於固定態附近時，催化物-抑制物與基質消耗機制其反應項的行為模式，右圖則是代表兩機制  $u$  和  $v$  隨時間變化的示意圖。

## 2-2 反應項形成原理

由 (2-1) 式可知，塗林模型是由擴散項加上反應項所構成，而反應項可說是圖形變化的關鍵，針對含有兩種化學物質反應系統的式子如下

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v) \end{aligned} \quad (2-2)$$

在反應項的形成原理中，以 Prigogine 與 Lefever 【18】所發表的 Brusselator 模型做為範例，此模型所依據的化學反應如下



其中  $A$  和  $B$  代表反應物濃度， $M$  和  $N$  為中間過程的產物濃度， $P$  和  $E$  為生成物濃度， $K_1, K_2, K_3$  與  $K_4$  代表化學反應的反應速率為常數值，(2-3) 式的化學反應過程經由物質反應定率可得

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= K_1 A + K_2 M^2 N - K_3 B M - K_4 M \\ \frac{dN}{dt} &= -K_2 M^2 N + K_3 B M\end{aligned}\quad (2-4)$$

之後令

$$t = \frac{\tau}{K_4}, \quad A = \frac{K_4^{\frac{3}{2}}}{K_1 K_2^{\frac{1}{2}}} a, \quad B = \frac{K_4}{K_3} b, \quad M = u \left(\frac{K_4}{K_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad N = v \left(\frac{K_4}{K_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

轉換後可得

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= a - (b+1)u + u^2 v \\ \frac{dv}{d\tau} &= bu - u^2 v\end{aligned}\quad (2-5)$$

最後的結果得到了含有 $u^2 v$ 非線性項，如此一來順利將一化學反應過程運用涂林理論的觀點以數學式子的形式表達出來，而反應項的組合還有很多種，例如：

$$f = \rho_u \frac{u^2 v}{1+eu^2} - \mu_u u, \quad g = -\rho_v \frac{u^2 v}{1+eu^2} + \sigma_v \quad (2-6)$$

$$f = R(1-u) - uv^2, \quad g = -(R+e)v + uv^2 \quad (2-7)$$

(2-6) 式為 Gierer 與 Meinhardt 1972 年提出的模型，(2-7) 式則為 Gray 與 Scott 1985 年提出的模型，在之後的章節還會針對多種不同學者發表的模型進行數值分析。

## 2-3 涂林模型線性穩定分析

若希望運用涂林模型來產生生物圖形，使系統最後產生不均勻的穩態解，這到底需要對涂林模型設定什麼樣的限制條件呢？在推導的過程中為

了求解系統在均勻穩定態附近的行為，在均勻穩定態附近施加一個微小擾動，令反應物質  $u$  和  $v$  為  $\bar{u}+u'$ 、 $\bar{v}+v'$ ， $\bar{u}, \bar{v}$  代表  $u, v$  的均勻穩定態， $u', v'$  代表微小擾動【16】【17】，將擾動代入 (2-1) 式

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t} &= D_u \nabla^2(\bar{u}+u') + f(\bar{u}+u', \bar{v}+v') \\ \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial t} &= D_v \nabla^2(\bar{v}+v') + g(\bar{u}+u', \bar{v}+v')\end{aligned}\quad (2-8)$$

由於系統在均勻穩定態下會有下列特性

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= 0, D_u \nabla^2 \bar{u} = 0, f(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= 0, D_v \nabla^2 \bar{v} = 0, g(\bar{u}, \bar{v}) = 0\end{aligned}\quad (2-9)$$

將反應項的  $f(\bar{u}+u', \bar{v}+v')$ ， $g(\bar{u}+u', \bar{v}+v')$  作雙變數的泰勒級數展開

$$\begin{aligned}f(\bar{u}+u', \bar{v}+v') &= f(\bar{u}, \bar{v}) + u' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} + \\ &\frac{1}{2} \left[ u'^2 \frac{\partial^2 f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u^2} + u'v' \frac{\partial^2 f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u \partial v} + v'^2 \frac{\partial^2 f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v^2} \right] + \dots\end{aligned}\quad (2-10)$$

$$\begin{aligned}g(\bar{u}+u', \bar{v}+v') &= g(\bar{u}, \bar{v}) + u' \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} + \\ &\frac{1}{2} \left[ u'^2 \frac{\partial^2 g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u^2} + u'v' \frac{\partial^2 g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u \partial v} + v'^2 \frac{\partial^2 g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v^2} \right] + \dots\end{aligned}\quad (2-11)$$

因為擾動非常微小所以在反應項的泰勒級數展開可以忽略掉高次項的影響，並把(2-9)、(2-10)、(2-11)式的結果帶入(2-8)式可得到線性化的擾動方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u' + u' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v' + u' \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v}\end{aligned}\quad (2-12)$$

令

$$f_u = \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u}, \quad f_v = \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v}, \quad g_u = \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u}, \quad g_v = \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \quad (2-13)$$

整理(2-12)式可表示為

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u' + f_u u' + f_v v' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v' + g_u u' + g_v v' \end{aligned} \quad (2-14)$$

考慮二維直角座標系統，邊界條件為零流 (zero flux) 邊界以  $u$  為例如圖四，擾動解的形式可假設為

$$\begin{aligned} u' &= C_1 e^{\lambda t} \cos k_x x \cos k_y y \\ v' &= C_2 e^{\lambda t} \cos k_x x \cos k_y y \end{aligned} \quad (2-15)$$

若系統邊界在  $X$  和  $Y$  方向為  $0 < X < L_x$  與  $0 < Y < L_y$ ， $k_x$  和  $k_y$  分別為  $m\pi/L_x$  與  $n\pi/L_y$  其中  $m$  和  $n$  為  $X$  與  $Y$  方向的波數從  $0, 1, 2, 3, \dots$ ，(2-15) 代入 (2-14) 式後令  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  化簡可得

$$\begin{aligned} [\lambda + D_u k^2 - f_u] C_1 - f_v C_2 &= 0 \\ -g_u C_1 + [\lambda + D_v k^2 - g_v] C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

(2-16) 式中的  $C_1$  和  $C_2$  若要有非零解的條件為

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda + D_u k^2 - f_u & -f_v \\ -g_u & \lambda + D_v k^2 - g_v \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + [D_u k^2 - f_u + D_v k^2 - g_v] \lambda + (D_u k^2 - f_u)(D_v k^2 - g_v) - f_v g_u &= 0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

在忽略擴散項  $D_v=0$ 、 $D_u=0$  特徵植  $\lambda$  的解為

$$\lambda = \frac{f_u + g_v \pm \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)}}{2} \quad (2-18)$$

由(2-18)式可知要使系統產生穩定的解， $\lambda$  的實部應小於零下式必須成立

$$f_u + g_v < 0 \quad (2-19)$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0 \quad (2-20)$$

加入擴散項後特徵值  $\lambda$  的解為

$$\lambda = \frac{H \pm \sqrt{(H)^2 - 4[(D_u k^2 - f_u)(D_v k^2 - g_v) - f_v g_u]}}{2} \quad (2-21)$$

$$H = f_u + g_v - (D_u + D_v)k^2$$

由(2-19)式的條件且  $k^2$  大於零可知  $H$  恆為負，如果要使系統因為擴散作用導致微擾放大產生不穩定必須滿足

$$Q = (D_u k^2 - f_u)(D_v k^2 - g_v) - f_v g_u < 0 \quad (2-22)$$

如此  $\lambda$  的解為實數解且一正一負為不穩定鞍點 (unstable saddle point)，

$Q$  是  $k^2$  的函數且在  $k^2$  與  $Q$  的座標平面上為開口向上的拋物線圖形，因此使  $Q < 0$

的條件為  $Q_{\min} < 0$  即可，利用在的條件可找到  $Q_{\min}$  之  $\frac{\partial Q}{\partial (k^2)} = 0$   $k^2_{\min}$

$$k^2_{\min} = \frac{D_u g_v + D_v f_u}{2D_u D_v} \quad (2-23)$$

將  $k^2_{\min}$  代回(2-22)式可得

$$D_u g_v + D_v f_u > 2\sqrt{(f_u g_v - f_v g_u) D_u D_v} > 0 \quad (2-24)$$

之後假設  $D_v$  大於  $D_u$  也就代表在系統中，具有抑制自我催化反應的化學物質濃度  $v$  其擴散速度一定要比  $u$  快，如此一來系統由均勻分佈的圖形經由  $u$  及  $v$  不同速度的擴散作用並使系統產生微擾放大，當微擾放大到一定的程度激起非線性項的作用，在擴散與非線性作用平衡後會產生不均勻穩定態的分佈，形成最後的生物圖形。將涂林圖形的三個限制條件整理如下

$$\begin{aligned} f_u + g_v &< 0 \\ f_u g_v - f_v g_u &> 0 \\ D_u g_v + D_v f_u &> 2\sqrt{(f_u g_v - f_v g_u) D_u D_v} > 0 \end{aligned} \quad (2-25)$$

藉由此限制條件可以了解如何在不同的模型中去選擇適當的參數來產生生物圖形。

## 2-4 涂林模型的波數預測

運用涂林模型模擬出的生物圖形，往往只要對模型的參數稍加修改就會造成圖形紋路的改變，如果圖形的改變能夠被預測，那對各種生物圖形的模擬就會簡單許多，因此本章節藉由波數的預測來達到預測圖形的目的，雖然不能很準確的預測圖形變化，但大致能夠掌握圖形變化的方向。滿足零流邊界的擾動形式在二維直角座標如 (2-15)式所示，前文提到若邊界在X和Y方向為  $0 < X < L_x$ 、 $0 < Y < L_y$ ， $k_x$  和  $k_y$  分別為  $m\pi/L_x$ 、 $n\pi/L_y$  其中m和n為X與Y方向的波數從 0, 1, 2, 3, …，而本章節重點就是預測圖形可能形成的m和n波數組合，由  $Q < 0$  (2-22) 式可知道滿足此條件的情形為拋物線與  $k^2$  軸只有兩個交點如圖五，分別令圖中的兩個交點為  $k_1^2$  和  $k_2^2$ ，因此只要波數  $k^2$  滿足  $k_1^2 < k^2 < k_2^2$  條件，在這區間的波數組合都有可能是產生圖形的波數。由前面條件可知  $k^2$  為  $\pi^2(m^2/L_x^2 + n^2/L_y^2)$  而  $k_1^2$  與  $k_2^2$  可由 (2-22) 式解得，綜合以上結論在二維直角座標的波數組合容許範圍可寫成

$$k_1^2 = \frac{D_u g_v + D_v f_u - \sqrt{(D_u g_v + D_v f_u)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_v g_u)}}{2D_u D_v} < k^2$$

$$< \frac{D_u g_v + D_v f_u + \sqrt{(D_u g_v + D_v f_u)^2 - 4D_u D_v (f_u g_v - f_v g_u)}}{2D_u D_v} = k_2^2 \quad (2-26)$$

有了波數預測的理論分析在圖形變化的預測較能事先掌握。

# 第三章

## 數值方法

### 3-1 直角座標分析

由於本論文主要是探討非線性項對二維直角座標平面圖形紋路變化的影響，使用之數值方法皆以二維直角座標進行分析。首先將塗林模型的擴散項以中央差分法進行離散化以  $u$  為例

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3-1)$$

式子裡的  $i$  和  $j$  分別代表  $x$  與  $y$  方向的格點位置  $x_i$  和  $y_j$ ， $\Delta x$  和  $\Delta y$  分別代表  $x$  與  $y$  方向的格點距離，差分後的結果是藉由省略二次項所得到的，至於塗林模型左邊對時間的微分項可用尤拉法 (Euler method) 來近似

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t \left[ D_u \nabla^2 u_{i,j}^k + f(u_{i,j}^k, v_{i,j}^k) \right] \quad (3-2)$$

$u_{i,j}^{k+1}$ 、 $u_{i,j}^k$  分別代表下一個時間與此刻時間的  $u$  值，而每個時間點的差距為  $\Delta t$ ，尤拉法所得到的差分結果是藉由省略一次項，如果希望對時間微分項採用精度較高的差分方法可利用四階 Runge-Kutta 數值方法，以  $u$  為例令塗林模組為  $\frac{du}{dt} = F(t, u)$  可表示如下

$$\begin{aligned}
u^{k+1} &= u^k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 &= \Delta t * F(t, u) \\
k_2 &= \Delta t * F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= \Delta t * F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= \Delta t * F(t + \Delta t, u + k_3)
\end{aligned} \tag{3-3}$$

### 3-2 邊界條件

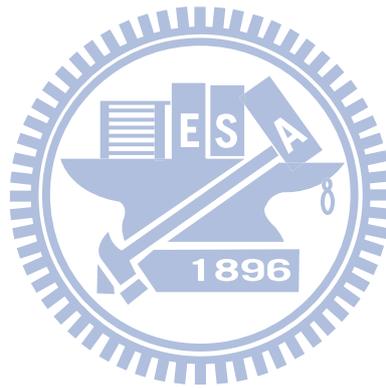
在生物圖形的模擬中最常運用的邊界條件為零流（zero flux）邊界條件，其物理意義主要是代表系統與外在環境無任何交流，系統的邊界沒有物質進出。假設系統有一個固定區域，將  $x$  與  $y$  方向分別切割為  $I$  和  $J$  等份則零流邊界條件可表示為（以  $u$  為例而  $v$  的邊界條件同  $u$ ）

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\text{right}} = 0 &\Rightarrow \frac{u_{I+1,j} - u_{I,j}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow u_{I+1,j} = u_{I,j} \\
\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\text{left}} = 0 &\Rightarrow \frac{u_{I,j} - u_{0,j}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow u_{0,j} = u_{I,j} \\
\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{up}} = 0 &\Rightarrow \frac{u_{i,J+1} - u_{i,J}}{\Delta y} = 0 \Rightarrow u_{i,J+1} = u_{i,J} \\
\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{down}} = 0 &\Rightarrow \frac{u_{i,j} - u_{i,0}}{\Delta y} = 0 \Rightarrow u_{i,0} = u_{i,j}
\end{aligned} \tag{3-4}$$

其中  $0$ 、 $I+1$  和  $J+1$  為假設的格點如圖六，如果系統在定義域內呈現循環沒有邊界的情形，可將邊界設為週期邊界條件（periodic boundary condition）差分結果如下（以  $u$  為例而  $v$  的邊界條件同  $u$ ）

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,j} &= \mathbf{u}_{1,j} \\ \mathbf{u}_{I+1,j} &= \mathbf{u}_{I,j} \\ \mathbf{u}_{i,0} &= \mathbf{u}_{i,J} \\ \mathbf{u}_{i,J+1} &= \mathbf{u}_{i,I} \end{aligned} \tag{3-5}$$

其中 0、I+1 和 J+1 為假設的格點。



## 第四章

### 結果與討論

#### 4-1 模型選擇與穩定性分析

在模型的選擇方面吾人採用 1999 年 Barrio 【19】發表的模型來進行分析，選擇此模型做修改後的模型原型，主要是因為模型中的反應項簡單以及沒有常數項，在做線性穩定分析時可使計算簡化並省略掉非線性項對線性穩定性分析的影響，Barrio 模型可表示為

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D\delta\nabla^2 u + \alpha u + v - r_2 uv - \alpha r_3 uv^2 \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta\nabla^2 v + \gamma u + \beta v + r_2 uv + \alpha r_3 uv^2\end{aligned}\quad (4-1)$$

之後的非線性項分析是藉由更改此模型反應項的二次與三次項，同時為了簡化模型的複雜度及參數的設定令  $\gamma = -\alpha$ ，因此可將 (4-1) 式改為

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D\delta\nabla^2 u + \alpha u + v + f_2 = D\delta\nabla^2 u + f \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta\nabla^2 v - \alpha u + \beta v + g_2 = \delta\nabla^2 v + g\end{aligned}\quad (4-2)$$

$f_2$  與  $g_2$  是反應項中的非線性項，可為  $uv$ 、 $u^3$ 、 $u^2v$ 、 $uv^2$ 、 $v^3$  的函數，由先前的線性穩定性分析可以知道此模型會有一個均勻穩態解  $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ ，藉由  $(0, 0)$  的均勻穩態解代入 (2-13) 式可得

$$\begin{aligned}f_u|_{(0,0)} &= \alpha \quad , \quad f_v|_{(0,0)} = 1 \\ g_u|_{(0,0)} &= -\alpha \quad , \quad g_v|_{(0,0)} = \beta\end{aligned}\quad (4-3)$$

把 (4-3) 代入線性穩定分析得到的限制條件 (2-25) 可得

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &< 0 \\ \alpha\beta + \alpha &> 0 \\ D\beta + \alpha &> 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha)D} > 0\end{aligned}\tag{4-4}$$

再把  $D$  預設為 0.2 就可以畫出一個符合限制條件的參數區間如圖七，圖中黃色的地方就是符合 (4-4) 式限制條件的參數區間，此區間也可稱為塗林空間 (Turing space)，之後分析就是選用塗林空間內的一組  $\beta$  與  $\alpha$ ，使圖形有機會形成非均勻穩態的解。

## 4-2 非線性項分析

由上一節提到將藉由更改 Barrio 模型的非線性項來分析各種非線性項對圖形有何影響，而本篇論文探討的反應項最高至三次項，首先吾人曾嘗試只保留反應項中的二次項與一次項，發現如果反應項沒有三次項將無法形成塗林圖形，同時參考至今各學者所發表過的模型發現沒有一個模型的反應項只包含一及二次項而無三次項，對於這樣的疑問暫時還沒找到解釋的方法，但吾人推測這或許因為沒有一種實際的化學反應能夠推導形成這樣的反應項，因此直接嘗試反應項中只包含一、三次項的塗林模型。

### 4-2-1 三次項對圖形的影響

在反應項中只包含一、三次項的分析當中，將  $u^3$ 、 $u^2v$ 、 $uv^2$ 、 $v^3$  做多種不同的排列組合，有的反應項會符合假設的化學反應有的則否，嘗試過後的結果發現共有四十二組的反應項有辦法產生圖形如表一所示，其中  $r_2$ 、

$r_3$ 、 $r_4$ 分別為 $uv$ 、 $uv^2$ 、 $u^2v$ 的係數而 $r_5$ 則是 $u^3$ 與 $v^3$ 的係數，在四十二組反應項的參數只要是正數並在一定的大小內都能夠產生塗林圖形，其中有些組合的參數不論正負都能產生圖形，而所有能形成圖形的組合絕對不是只有這四十二組，吾人只是將一部分的組合呈現出來，將這些組合運用相同的均勻初始質與搭配適當的非線性項參數值，不同的組合也能產生出相似度很高的線條圖形如圖八，圖中A到G分別代表運用表一的第1、8、16、17、28、34、35組合，這些圖形為長度1X1的正方型區域切割成100X100的網格，採用零流邊界條件，而 $\Delta t = 0.01$ 經過時間間隔次數 $N_t=300000$ 次後所呈現的圖形，共同的參數值有 $D=0.2$ 、 $\delta=10^{-3}$ 、 $\alpha=0.9$ 、 $\beta=-0.91$ ，之後的圖型所設定的參數都同此圖，除特別說明的參數及條件以外。在圖八中了解到組合的反應項雖然都不盡相同有的甚至差異很大，但在特定的反應項參數下卻能產生出近乎相同的圖形。有的組合所產生的圖形只要反應項參數有更改就會使圖形產生相當大的改變，而有的組合改變並不大，例如圖九的A、B圖是運用第12組的反應項，C、D圖則是第13組，A、B圖與C、D圖的參數 $r_5$ 都是由1增加到3但是B圖相較於A圖多了許多分支，反觀C、D圖沒有很大的變化。

在波數的部份由先前所知道的波數預測方法可推導出，由於有一個均勻穩態解 $(0, 0)$ 需代入，(2-26)式的參數只有 $D$ 、 $\delta$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ ，算出 $k_1^2$ 、 $k_2^2$ 約為116至3473再將 $L_x=1$ 、 $L_y=1$ 代入 $k^2$ 可求出圖形有可能產生的波數組合如表二，可看出此組參數所能形成的波數組合相當多，舉例來說圖八就是波數 $(4, 4)$ 所形成的圖形。此外還發現到更改反應項的參數除了影響圖形的複雜度有的反應項組合還會影響圖形的波數如圖十，圖中的第34、35、36組合的反應項相似度相當高若設定相同的參數值所產生的圖形也大同小

異，因此也同樣都有波數成長的現象，從波數方面可看到當三種組合的 $r_5$ 由 1 增加到 3 時第 34 組的 (A) 圖波數由 (4, 4) 增加到 (B) 圖的 (4.5, 4.5)，第 35 組的 (C) (D) 波數變化和 (A) (B) 相同，第 36 組的 (E) 圖的波數則是由 (4.5, 4.5) 增加到 (F) 圖的 (5, 5)，由於此波數增加的現象是藉由調高這 3 種組合的 $v^3$ 參數，如果是改變 $r_3$ 或 $r_4$ 則無此現象發生。此外想要產生複雜的圖形不一定需要很複雜的反應項如圖十一中的 4 個圖形與其他組合運用均勻初始值所產生的圖形變化較為豐富，而產生這些圖形的 $f_2$ 與 $g_2$ 都只是由 $u^3$ 或 $v^3$ 所組成，在同一組反應項所產生的圖形裡，除了藉由改變參數值可能使圖形大幅變化之外，改變參數的正負同樣也可能使圖形有大幅的變化如圖十二，當反應項 $v^3$ 的參數由 1 改為-1 所產生圖形的特性跟原本截然不同，但不是每種組合都能這樣正負轉換或是像 34、35 種組合有這樣劇烈的變化。以上都是以簡單的均勻初始值去概略觀察圖形的變化，在下一節將會嚐試更多元的初始值並加入二次項來觀察圖形的變化。

#### 4-2-2 三次項加入二次項對圖形的影響

由均勻初始值在三次項組合的概略分析可知道有些組合的特性，但由前人的結果知如果不加入二次項將無法產生點的圖案，但是該如何加入二次項？同樣吾人藉由參考先前學者所發表過的模型將二次項 $uv$ 加入，(4-2)式可改寫成

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D\delta\nabla^2 u + \alpha u + v - r_2 uv + f_2 = D\delta\nabla^2 u + f \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta\nabla^2 v - \alpha u + \beta v + r_2 uv + g_2 = \delta\nabla^2 v + g\end{aligned}\tag{4-5}$$

$r_2$ 為uv項的參數，二次項代入之後原本表一中的 42 種組合都能夠產生圖形只是有些組合的 $r_2$ 為負值才能產生圖形，一部分的組合則是正數或是正負都可或是須將其他三次項參數由正轉負。初始值的運用包含均勻值、部分均勻值或搭配亂數、擾動點、斜或直條紋以及一些曲線，將這些初始值搭配不同的反應項組合觀察各組合的圖形是否會出現特有的特性。

首先以中間單點擾動的初始值來觀察圖形如圖十三，在第 15 組反應項所顯現出來的結果可發現二次項的參數為零時如 (A)(B) 圖，圖形有圓圈但無任何點出現圓圈越外層越不圓呈現角形， $r_5$ 增加則有波數增大的現象；加入二次項 $r_2=1$  圓圈變的比較圓滑如 (C)(D) 圖，最外圍的斷線變成點狀；降低 $r_4$ 的參數值如 (E)(F) 圖，對照 (C)(D) 圖發現在第 15 組反應項中降低 $u^2v$ 的參數對圖形的影響較小，圖形的變化主要是中心點附近，外圍的形狀則無太大的改變；把二次項 $r_2$ 增加到 2 如圖 (G) 這時候除了外圈已經是很圓的圓圈中心也縮成一個點；圖 (H) 則是因為 $r_5$ 增加，與圖 (E) 相較同時增加點狀與線狀性質的參數，使得兩性質相互抵銷造成圖形和圖 (E) 相同。增加 $r_2$ 的值至 3 圖形則完全變成點狀如 (I) 圖，從圖可看出雖然完全由點狀組合但其排列還是留有圓圈的特性，觀察圖形的形成過程可發現擾動點會慢慢向外擴散最後形成一圈圈的圖形如圖十四及十五。由圖十四可知道在擾動點剛擴散的時候圓圈很圓最後才形成角形，而圖十六則是在圖形擴散成一圈圈圓形時慢慢分裂成點狀。在這三個分時圖中相同的顏色代表相同的值，因此可由圖形看見數值的變化，除了上述幾種由第 18 種組合所產生的中間擾動點初始值還有許多種不同的圖形如圖十七。

由前面的結果可知二次反應項會使圖形趨向點狀而三次項會趨向線條，那有沒有可能一個圖同時存在直線與點？在第 5 與 6 種組合可看見此

現象如圖十八，(A)(B)圖使用的初始值是上半部為均勻值下半部為亂數，(C)(D)圖則是全圖最上面的四分之一為均勻值其它為亂數當初始值，由這些圖可看出在初始值為均勻值部份的圖形會形成橫條的直線，在亂數的部份則會變成點狀圖形，如果將反映項參數改成只能產生線條的數值如圖十九，各圖初始值同圖十八之初始值，圖形依然會保留直線的部份但是靠近亂數初始值的直線易受到干擾而產生彎曲或是分支，因此使用某種組合搭配特定的參數將可分別保留均勻值的整齊規律性以及亂數的不規則排列，使同一個圖形中保有兩種截然不同的特性。若是運用部份的均勻值而不搭配亂數，在沒有二次項的效應時圖形會呈現波紋的形狀如圖二十，各圖的初始值都是上半部為均勻值，從圖中可看出(A)、(F)的波數較其它圖小，(D)圖的波紋左邊圖形產生分岔使整個紋路都被擠壓到。由圖二十可發現部分的均勻初始值不一定只能產生很直的線條，也能有像是在震盪的波紋圖形。

另一種的點線共存圖形不是運用均勻搭配亂數的初始值，而是使用上面三個擾動點下面三個擾動點當作初始值，用某種組合搭配特定的參數就會產生類似點與線共存的情況，只不過圖形是點與線相互交錯如圖二十一，(A)~(C)三個圖雖然都是用相同的初始值可是圖形排列的方向不同。圖(A)為直線與點的交錯，而(B)及(C)圖為橫線與點。在(A)圖中的點有些會相連而線會斷裂，不像(B)及(C)圖中的點與線交錯這麼分明。有些組合在特定的參數下運用上面與下面三個擾動點的初始值會產生橢圓點且規則排列的圖形如圖二十二，各圖點的形狀和排列規則都差不多，只有點的大小不一樣，通常可藉由提高二次項的參數來使圖形變成點狀，形成的點大都是接近正圓形，但是運用此種初始值卻可以在二次項參

數值還不是很高時就能產生出全部都是點的圖且為橢圓形，為各圖形中較特殊的現象。

從前面的章節可知如果選用的參數落在涂林空間內，所產生的圖形應該是穩態的圖形，可是在各組合中發現有些組合在特定的參數下會產生涂林振盪圖形如圖二十三，由於 (A) 及 (B) 圖中的同一個圖每個點的值大小不一定相同，造成點有明暗的差別，與先前所產生點圖中每個點的數值都相同有所差異。涂林振盪圖形並不會收斂至一個穩態，如果監測圖形中數個單點的  $u$  值變化如圖二十四，可看出  $u$  值會隨時間在一定大小範圍內震盪。由分時圖圖二十五及圖二十六可看出，每個時間點所產生出的圖形雖然點的分佈位置大致相同但是數值的變動使得點在不同時間明亮會有所不同，雖然兩種圖都是運用均勻值當做出始值可是圖二十五中點的排列較無規則性，相對地圖二十六中點呈現斜直線排列且較圓。

雖然圖形波數可能產生的區間可以藉由前面的理論來預測，但在各組合的分析下發現圖形波數約在  $(4, 4)$  到  $(7, 7)$  之間，離有可能產生的波數範圍上限 (表二) 還有一段距離，不過當第 32 組反應項搭配適當的參數會產生接近波數預測區間上限的圖形如圖二十七，圖形使用的初始值為均勻值，從產生許多小點的圖中可看出其波數明顯較其他的反應項組合大。由上述這些結果了解藉由不同的反應項搭配不同的參數可產生出許多特別的圖形，並由分析這些圖形知道哪些特定圖形的產生需要何種反應項及參數。

### 4-3 台灣魚類圖紋模擬

在了解許多種的非線性項組合以及初始值對圖形變化的影響後，運用這些圖形的特性可模擬出一些台灣魚類特有的紋路。圖二十八 B 為運用亂數作為初始值，搭配適當的反應項組合與參數產生出不規則排列的點狀圖，經過顏色轉換就可模擬出花斑刺鰓的紋路如圖二十八 A，此圖形算是最基本的很多組合調高二次項的參數都能產生這樣的圖形。接著吾人用的初始值為六個擾動點，模擬出烏尾阿南魚的紋路如圖二十九，其紋路的特色在於點狀並呈現直線規則的排列，圖形同樣可由多種的反應項組合所產生。在魚類的紋路中也有點為細密分佈例如矮雙線鰈（圖二十八 A），紋路中的點排列似乎無規則性，因此吾人可運用第 32 組反應項搭配亂數初始值所產生的波數大的點圖如圖三十 B，模擬出的細點圖形與實體紋路一對照雖然點的數目略少但相當接近。如果將涂林振盪圖形也考慮進來可發現繁星鯨如圖三十一 A 和第 3 組反應項搭配亂數初始值產生的圖形與圖三十一 B 做比較，由於涂林震盪圖形每個點的數值大小與分佈面積都不盡相同，當圖形繪製出來時就會有如星空閃爍的效果，與繁星鯨的紋路有幾分相似。

上述幾個實體生物紋路都是以點狀圖形為主，接下來介紹點、線綜合或是純線條的實體紋路及模擬結果，而橫帶大鱗大眼鯛其紋路就是由直條的點與線交錯而成的如圖三十二 A，像這一個有些許規則的紋路可運用左右各三個或上下各三個擾動點的初始值及第 34 和第 3 組的反應項搭配適當的參數就產生點線交錯的圖形如圖三十二 B，圖中可看出點與線確實很明顯地區分開來，而圖三十二 C 中有些點會相連在一起有些線則會斷掉，這

兩個圖大都能表現出橫帶大鱗大眼鯛紋路點線交錯的特性且圖形由別的反應項就算用相同的初始值時也得不到這樣的效果。曲紋蝴蝶魚的紋路為純線條的尖銳波紋如圖三十三 A，運用波紋的初始值搭配週期邊界條件就可產生如圖三十三 B 的圖形，此圖形不只用第 14 組反應項能產生出來，用其他很多組反應項也同樣可以做到，但邊界條件必須要用週期邊界條件才較能產生出尖銳波紋的效果。

由先前的結果可知運用部份均勻值搭配亂數的初始值在特定的反應項組合及參數之下，能夠產生點與線整齊排列並同時存在的圖形如圖三十四 B，此圖形與圖三十四 A 線斑鱗純在某個部分的紋路相符合，至於點斑橫帶蝴蝶魚的紋路則是為直線忽然轉換成點狀如圖三十五 A，這樣的紋路的特性與線斑鱗純不同因此無法用部份均勻值搭配亂數的初始值來產生出所要的圖形，對於這樣的問題吾人發現如果改用上下各三個擾動點的初始值於第 15 組反應項搭配適當參數可產生出所要的圖形如圖三十五 B，雖然在線條轉換成點的位置與點斑橫帶蝴蝶魚的紋路不盡相同但已能表達所要呈現的圖形特性。

接著吾人運用斜線與橫線當作初始值模擬出條紋棘蝶魚部分位置的紋路如圖三十六，條紋棘蝶魚的紋路主要特性為線條圖形其中一條線分歧成兩條線，這樣的特性除了選用第 32 組反應項及搭配適當的參數較能表現出，運用斜線與橫線當作初始值是為了使線條能夠有一夾角以便能夠有產生新線條的效果。在條紋棘蝶魚的幼魚紋路方面如圖三十七 A，紋路有中間點狀向外擴散的特性，這在之前的中間擾動點初始值產生的圖形當中有此特性，但在紋路中心為一個橫點（圖三十七 B）需運用第 2 組反應項搭配適當參數才能夠有較高機會產生，對於條紋棘蝶魚的成魚及幼魚無法用

同一組反應項模擬出與之後介紹的二階段涂林模型描述其成長過程，雖試著做到前面兩個要求但可能無法得到最適合描述條紋棘蝶魚生長的反應項或參數，導致需用兩種反應項分別描述不同的生長過程。

在紋身蛙鰓的紋路（圖三十八 A）可看出有橫直線條搭配不規則線條的特性，這樣的特性可由先前運用均勻搭配亂數初始值表在特定的反應項組合使二次項係數設為零來表現出如圖三十八 B，圖中上半部不規則的線條是運用亂數初始值而下半部的橫線條則是運用均勻值產生的結果。在爪哇籃子魚的紋路部分（圖三十九 A），整條魚的紋路分佈為上面為點狀的圖案，中間為點和線綜合至於下半部則是全部都為線條，這樣的紋路可由相同的反應項與初始值藉著改變參數來模擬出各部位的圖形，吾人選用第 14 組反應項同樣以部份均勻值搭配亂數當初始值，在二次項參數很高的時候圖形就會形成實際紋路上半部的點圖（圖三十九 B），當降低二次項與三次項的參數圖形從原本的點圖變為點加一些短線的組合圖（圖三十九 C）如同實際紋路中間的部份，再將二次項參數歸零並調高部份的三次項參數就可產生實際紋路下半部份的線圖（圖三十九 D），如此一來爪哇籃子魚主要部位的紋路就可運用此反應項組合模擬出。台灣的魚種相當多吾人只是選用幾種紋路較具特色且能用現有的反應項組合模擬出並在本文呈現出來，相信如果在對更多組的反應項組合進行分析能夠模擬出的魚類紋路將會更加豐富。

#### 4-4 二階段涂林模型分析

前面的圖形都是由一階段所產生也就是設定一個簡單的初始值後直接

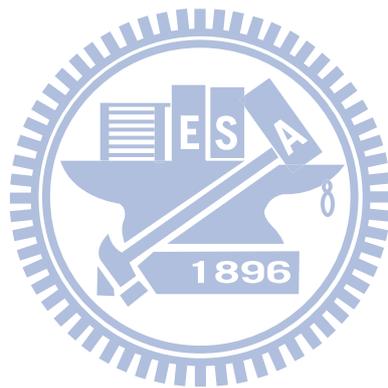
產生的圖形，而本節所要介紹的二階段涂林圖形則是運用一階段所產生的圖形當作初始值所產生的，二階段涂林圖形主要是描述動物在不同生長階段外在圖紋的變化，此時第一階段涂林圖形代表著生物的幼兒紋路，二階段涂林圖形則代表生物的成年紋路。但在產生二階段涂林圖形時，要如何掌握圖形變化的趨勢以求順利得到生物成年的紋路，劉瑞堂【13】曾針對二階段涂林模型進行分析，成功運用豹的幼兒時期的紋路當作二階段初始值的點圖，經過二階段的涂林模型模擬出成年台灣雲豹、花豹、美洲豹等紋路，文中提到Barrio模型在二階段時先將二次項參數 $r_2$ 增大，此時點的中心位置的濃度降低使點變成一個環形，對於這個現象使用第3組反應項也有同樣的情形產生，圖四十A為第二階段初始值在一階段參數是 $r_2=1$ 、 $r_3=0.5$ 、 $r_5=3$ 以中間擾動點為初始值產生的圖形，當 $r_2$ 由1調高到6就會出現環形的圖形如圖四十B。劉瑞堂【13】的文中還提到再減小參數 $\delta$ 與 $D$ ，由先前的波數預測結果得知會使圖形往大波數移動，此時會使環狀圖形破裂形成花豹環形破裂的斑紋，因此再將參數 $\delta$ 由0.001降為0.0005而 $D$ 由0.2降為0.1最後得到圖四十C。雖然圖中環狀破裂後的圖形不像花豹的紋路但是確實有環狀破裂的情形產生，由此可知劉瑞堂產生二階段的涂林圖形主要是藉由更改 $r_2$ 、 $\delta$ 、 $D$ 的數值，但是反應項中的三次非線性項參數會不會影響到圖形的紋路？吾人運用第三組的反應項進行分析，二階段的初始值同圖四十A的點圖，由 $r_2$ 的變化發現如圖四十一，將 $r_2$ 的數值降低，圖中的點會慢慢的相連起來與先前得到如果降低二次項參數圖形會趨向線條的結果相符合如圖四十一A~C，且圖形數值的區間都介於1到-1之間無太大變化，當 $r_2$ 提高時，點的中間會出現空洞變成環形，如果再進一步調高環形會開始分裂最後成一片片分散的碎片如圖四十一D~H，在圖形數值大小的方

面，當 $r_2$ 數值提高圖形最大最小值差距會不斷擴大，最大值會集中在環形或是碎片上。另外如果改變三次項參數 $r_3$ 及 $r_5$ ，當 $r_3$ 升高時點的數值會降低而圖形中線條的特性會增強如圖四十二A~D，使點會開始有要相連的趨勢但效果不如 $r_2$ 顯著，如將 $r_5$ 逐漸降低至零，圖中的點會相互聚集起來形成大小點的混合圖如圖四十二E，且點的數值會隨參數降低而升高，反之若將 $r_5$ 升高點，會產生些微擴散並降低數值但對整個圖形影響不大如圖四十二G、H。

上面二階段是以點圖為初始值所產生的結果，若用相同反應項運用部份均勻值加亂數當初始值搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=1$ 產生線條加點的綜合圖形當作二階段初始值如圖四十三A，先將 $r_2$ 慢慢降低至零，圖形變化趨勢如同圖四十一，點與短線會慢慢相連起來如圖四十三B~D，之後將 $r_2$ 數值漸漸提高，發現圖中線條彎曲或短線的部份會轉變為點而直線繼續保留著如圖四十三E、F，若繼續提高至 8 或是更高，圖形中線條數值會提高且初始值的線條圖形會保留下來但是中間會產生空洞化如圖四十三G、H，就算繼續提高 $r_2$ 也不會破裂成碎片。在 $r_3$ 的部份若降至 0.5 則圖形會完全成為大小近似的點狀圖（圖四十四A），就算是直線紋路的地方也會成為點圖，而提高 $r_3$ 圖形數值會降低而紋路則無太大的改變，至於 $r_5$ 逐漸降低至零在短線與點的地方會聚合成大小點直線則保留下來，若增大則線的效應會稍微加強但不顯著如圖四十四E及G~I。

經由運用反應項第三組的分析可了解一些二階段涂林模形的特性，但這些特性在其他的反應項組合不一定都有或是相同，對有些組合點不會產生空洞或是環形碎裂的現象，有些組合會產生點的擴散現象但不會有點相互聚合的特性，由於種類太多在此以第 3 組為例。在實際生物的模擬藉由第 15 組反應項給予一個簡單的曲線初始值搭配參數 $\delta=2.5 \times 10^{-3}$ 、 $r_2=1$ 、

$r_4=-2$ 、 $r_5=3$  其餘參數同圖八，模擬出疊波棘蝶魚的幼魚紋路(圖四十五C)，之後再將模擬出的幼魚紋路當作二階段初始值並更改參數 $\delta=10^{-3}$ 、 $r_2=3$ ，圖形會從曲線分裂成點如圖四十五D也就成功模擬出疊波棘蝶魚的成魚紋路(圖四十五B)。



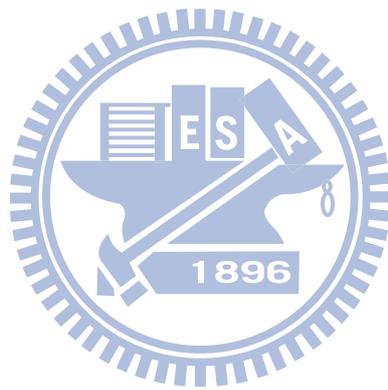
## 第五章

### 結論

本文藉由更改模型的非線性項，給予符合涂林空間的參數設定及適當的反應項係數，藉由不同的反應項係數與初始值探討各種非線性項組合對圖形的影響，綜合以上的結果吾人可以得到下列的結論：

1. 圖形的波數可藉由理論分析的方法來預測圖形的波數，並依推導出的結果可得知更改擴散係數對圖形的波數影響最劇烈，縮小擴散係數會增大波數反之則會降低波數，藉此將圖形控制在希望形成的波數。
2. 當模型中的二次項參數值提高圖形會趨向點的特性，若提高三次項的參數則會使圖形趨向線條的特性。
3. 反應項只有一、二次項將無法產生圖形需搭配三次項，但三次項無須搭配二次項亦可產生圖形。
4. 運用部份均勻值搭配亂數當作初始值，在第 12、30 組反應項搭配特定的參數，圖形會同時保留這兩種初始值的特性不會相互干擾，此特性可用來模擬線斑鱗純點線共存的紋路及紋身蛙鰈直線和不規則線條紋路。
5. 上下各三個擾動點的初始值在第 3、34 組反應項搭配特定參數可產生點線交錯的圖形，此圖形可用來模擬橫帶大鱗大眼鯛的紋路，若此初始值用在第 2、14、27、31 組反應項可產生橢圓點的圖。
6. 運用第 32 組反應項搭配特定參數可產生大波數的圖形，此特性可用來模擬矮雙線鰈密點不規則排列的紋路。

7. 在二階段涂林圖形的變化，在第 3 組反應項逐漸增加二次項參數，點會轉變成環形最後破碎；至於第 14、15 組反應項的點則是會擴散變成較大的點，但不會有環形或碎裂的現象。



## 參考文獻

1. A. M. Turing, “The Chemical Basis of Morphogenesis”, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B*, 237, 37-72, 1952.
2. A. Gierer, H. Meinhardt, “A theory of Biological Pattern Formation ”, *Kybernetik*, 12, 30-39, 1972.
3. H. Meinhardt, “Models of Biological Pattern Formation”, Academic Press, New York, 1982.
4. P. Arcuri and J. D. Murray, “ Pattern sensitivity to boundary and initial conditions in reaction-diffusion models ”, *J. Math. Biol.* 24 , 141-165, 1986.
5. J. D. Murray, *Mathematical biology: II: Spatial Models and Biomedical Application* , Spring-Verlag, Berlin, 2003.
6. B. Ermentrout, “Stripes or spots? Nonlinear effects in bifurcation of reaction-diffusion equations on the square ”, *Proc. R. Soc. Lond, Ser. A*, 434, 413–417, 1991.
7. M. J. Lyons and L. G. Harrison, “Stripe Selection An Intrinsic Property of Some Pattern Forming Models With Nonlinear Dynamics”, *Dev Dyn. Nov*, 195(3), 201-15, 1992.
8. D. M. Holloway and L. G. Harrison, “Order and localization in reaction-diffusion pattern”, *Physica. A*, V 222, p. 210-233, 1995.
9. R. Asai, E. Taguchi, Y. Kume, M. Saito, S. Kondo, “Zebrafish leopard gene as a component of the putative reaction-diffusion system ”, *Mech Dev.* 89:87–92, 1999.
10. H. Shoji, Y. Iwasa, S. Kondo, “Stripes, spots, or reversed spots in two-dimensional Turing systems”, *Journal of theoretical biology*, V 224, 3,

11. Teemu Leppänen, *Computational Studies of Pattern Formation in Turing Systems*, Helsinki University of Technology LCE, 2004.
12. K. M. Page, P. K. Maini, N. A. M. Monk, “Complex pattern formation in reaction–diffusion systems with spatially varying parameters”, *Physica D*, V 202, 1-2, 95-115, 2005.
13. 劉瑞堂, 以涂林模型模擬生物圖案, 中興大學物理學系博士論文, 2007。
14. 林士傑, Turing 模型在生物圖案上的應用, 彰化師範大學物理研究所碩士論文, 2001。
15. 何承彥, 熱擴散方程與線性化Turing 方程式之數值模擬分析, 中正大學物理系碩士論文, 2003。
16. 葉正烽, 蝶翅斑紋形成之數學模式研究, 台灣大學生物產業機電工程學研究所碩士論文, 2005。
17. 吳哲維, 蝴蝶斑紋之有限元素模擬與分析, 台灣大學生物產業機電工程學研究所碩士論文, 2006。
18. I. Prigogine, R. Lefever, “Symmetry breaking instabilities in dissipative systems”, *J. Chem. Phys.* 48,1695-1700 ,1968.
19. R. A. Barrio, C. Varea, J. L. Aragón, P. K. Maini, “A Two-dimensional Numerical Study of Spatial Pattern Formation in Interacting Turing Systems”, *Bull. Math. Biol.* 61, 483 ,1999.
20. A. Sanz-Anchelergues, A. M. Zhabotinsky, I. R. Epstein and A. M. Nuzuri, “Turing pattern formation induced by spatially correlated noise ”, *Phys. Rev. E*, 63:056124, 2001.

21. B. Pena, C. Pérez-García, A. Sanz-Anchergues, D. G. Miguez, and A. P. Munuzuri, “Transverse instabilities in chemical Turing patterns of stripes”, *Phys. Rev. E*, 68:56206, 2003.
22. 沈世傑, 台灣魚類誌, 國立台灣大學動物學系印行, 1993。



組 合	三 次 反 應 項	
	f2	g2
1	$-r_3uv^2$	$+r_3uv^2$
2	$-r_3uv^2 - r_5u^3$	$+r_3uv^2$
3	$-r_3uv^2$	$+r_3uv^2 - r_5u^3$
4	$-r_3uv^2 - r_5u^3$	$+r_3uv^2 - r_5u^3$
5	$-r_3uv^2 + r_5v^3$	$+r_3uv^2$
6	$-r_3uv^2$	$+r_3uv^2 + r_5v^3$
7	$-r_3uv^2 + r_5v^3$	$+r_3uv^2 + r_5v^3$
8	$-r_3uv^2 - r_5v^3$	$+r_3uv^2 + r_5v^3$
9	$-r_3uv^2 - r_5u^3$	$+r_3uv^2 - r_5v^3$
10	$-r_3uv^2 - r_5v^3$	$+r_3uv^2 - r_5u^3$
11	$-r_3uv^2 - r_5u^3$	$+r_3uv^2 + r_5v^3$
12	$-r_3uv^2 + r_5v^3$	$+r_3uv^2 - r_5u^3$
13	$-r_4u^2v - r_5u^3$	$+r_4u^2v$
14	$+r_4u^2v$	$-r_4u^2v - r_5u^3$
15	$-r_4u^2v - r_5u^3$	$+r_4u^2v - r_5u^3$
16	$+r_4u^2v + r_5v^3$	$-r_4u^2v$
17	$+r_4u^2v$	$-r_4u^2v + r_5v^3$
18	$+r_4u^2v + r_5v^3$	$-r_4u^2v + r_5v^3$
19	$+r_4u^2v - r_5v^3$	$-r_4u^2v + r_5v^3$
20	$+r_4u^2v - r_5u^3$	$-r_4u^2v - r_5v^3$
21	$+r_4u^2v - r_5v^3$	$-r_4u^2v - r_5u^3$
22	$+r_4u^2v - r_5u^3$	$-r_4u^2v + r_5v^3$
23	$+r_4u^2v + r_5v^3$	$-r_4u^2v - r_5u^3$
24	$-r_5u^3$	0
25	0	$-r_5u^3$

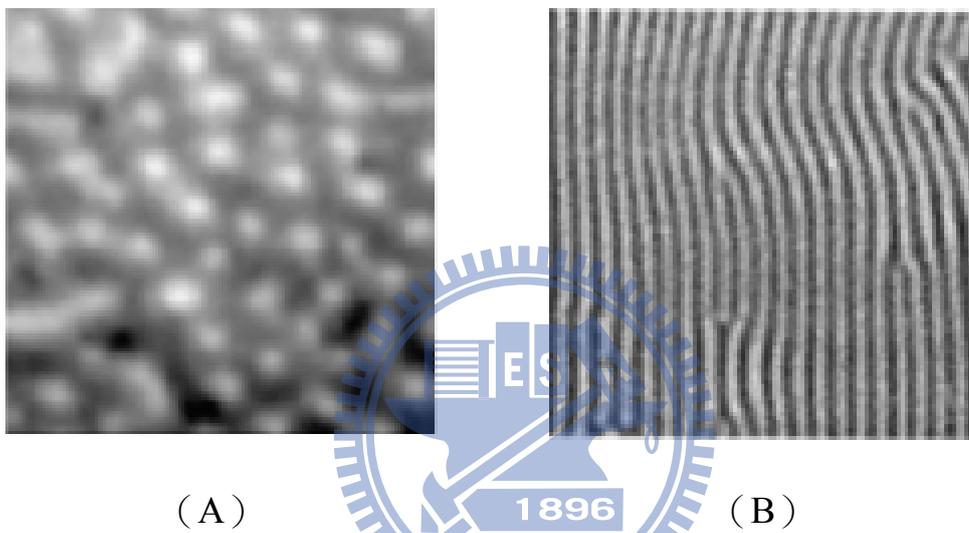
表一 三次項組合表

26	$r_5v^3$	0
27	$-r_5u^3$	$-r_5v^3$
28	$+r_5v^3$	$-r_5v^3$
29	$-r_5u^3$	$+r_5v^3$
30	$+r_5v^3$	$-r_5u^3$
31	$-r_3uv^2 - r_4u^2v - r_5u^3$	$+r_3uv^2 + r_4u^2v$
32	$-r_3uv^2 - r_4u^2v$	$+r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5u^3$
33	$-r_3uv^2 - r_4u^2v - r_5u^3$	$+r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5u^3$
34	$-r_3uv^2 + r_4u^2v + r_5v^3$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v$
35	$-r_3uv^2 + r_4u^2v$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v + r_5v^3$
36	$-r_3uv^2 + r_4u^2v + r_5v^3$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v + r_5v^3$
37	$-r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5v^3$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v + r_5v^3$
38	$-r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5u^3$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v - r_5v^3$
39	$-r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5v^3$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v - r_5u^3$
40	$-r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5u^3$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v + r_5v^3$
41	$-r_3uv^2 - r_4u^2v + r_5v^3$	$+r_3uv^2 + r_4u^2v - r_5u^3$
42	$-r_3uv^2 + r_4u^2v$	$+r_3uv^2 - r_4u^2v$

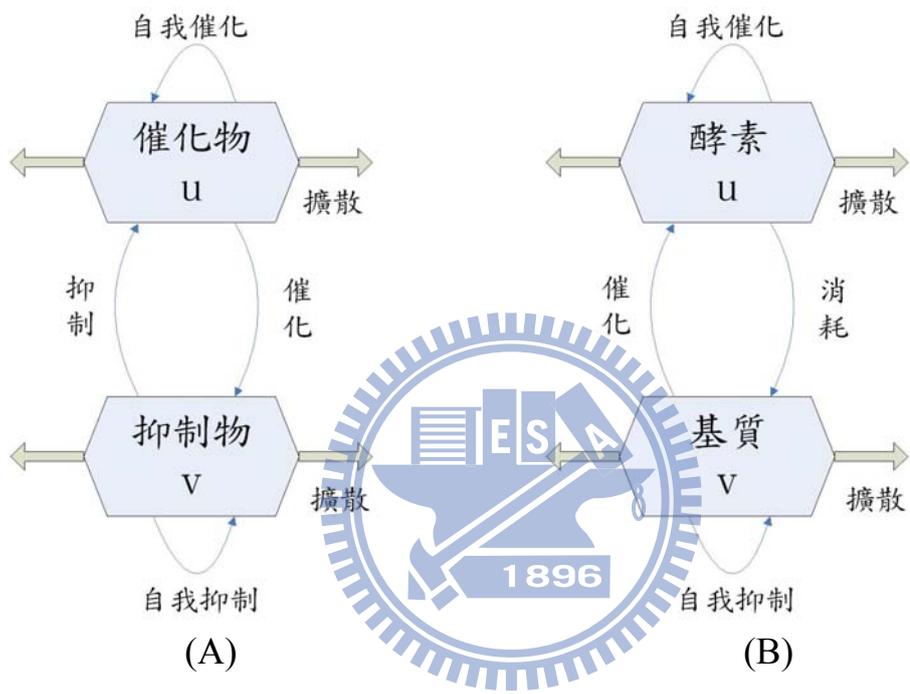
續上頁

組合	波數 m	波數 n
1	0	4~18
2	1	4~18
3	2	3~18
4	3	2~18
5	4	0~18
6	5	0~18
7	6	0~17
8	7	0~17
9	8	0~17
10	9	0~16
11	10	0~16
12	11	0~15
13	12	0~14
14	13	0~13
15	14	0~12
16	15	0~11
17	16	0~9
18	17	0~8
19	18	0~5

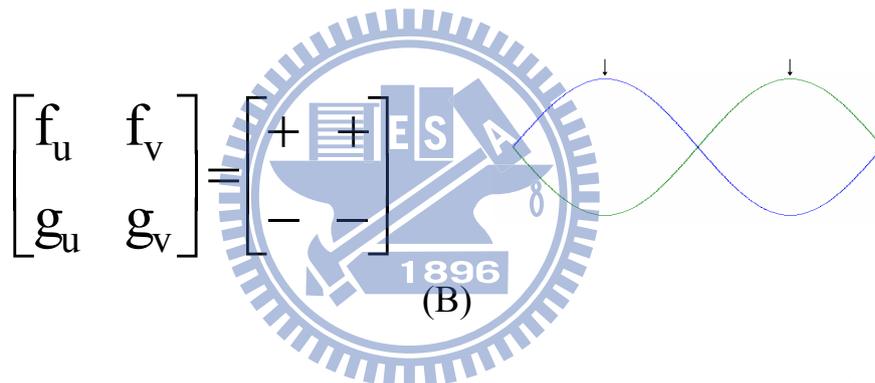
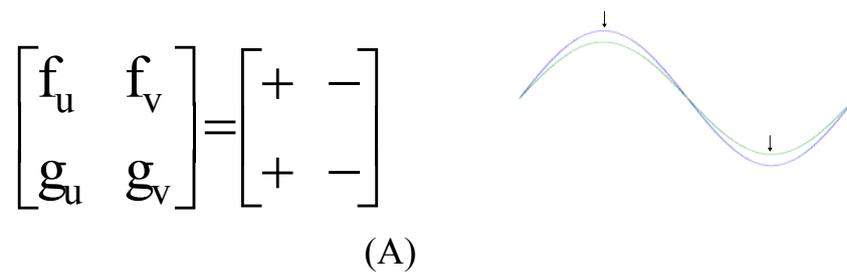
表二 波數可能組合表



圖一 CDIMA 實驗之塗林結構圖 (A) 點狀圖形取自於 Sanz - Anchelergues, 2001 【20】 (B) 線條圖取自於 Pena, 2003 【21】



圖二 (A) 催化物-抑制物 (activator-inhibitor) 機制，(B) 基質消耗 (substrate-depletion) 機制。



圖三 (A) 催化物-抑制物 (activator-inhibitor) 機制，(B) 基質消耗 (substrate-depletion) 機制。

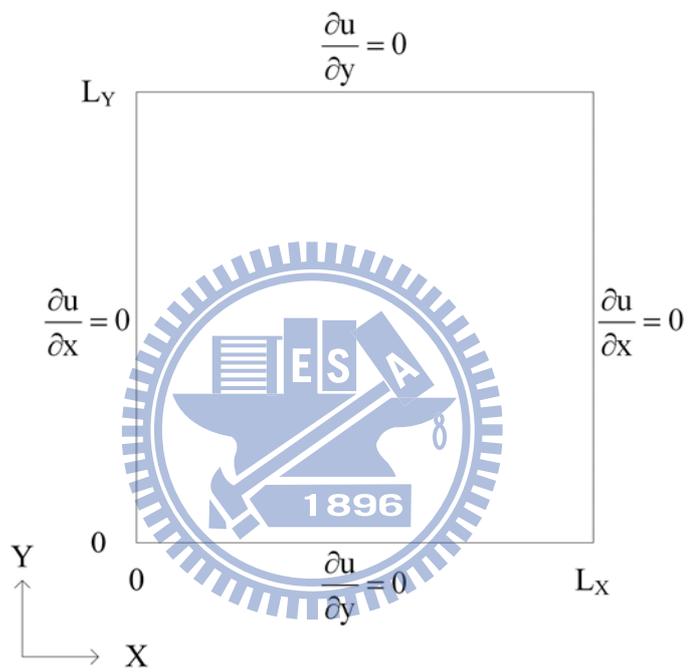


圖 四 零流邊界條件圖

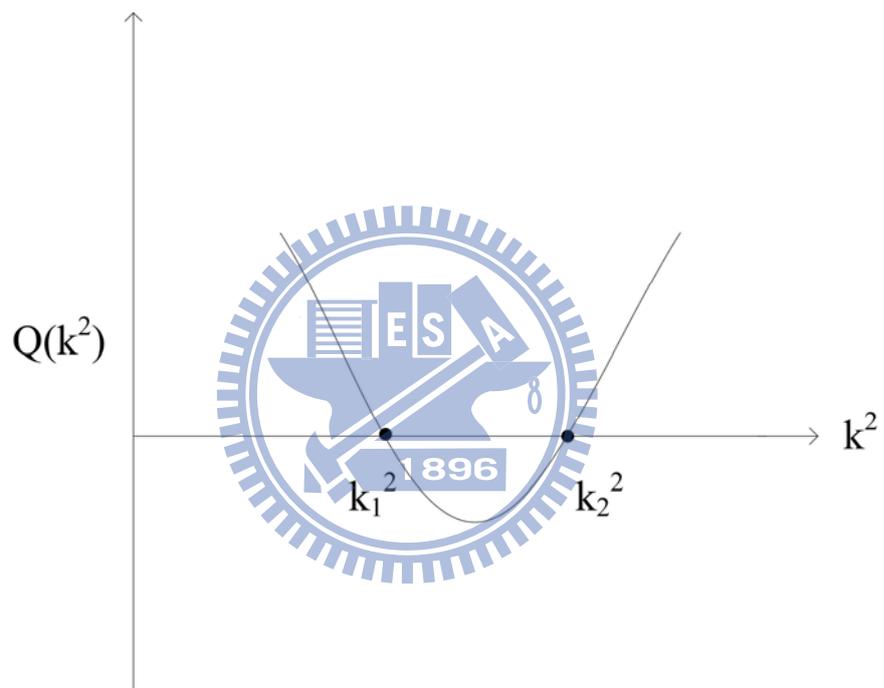
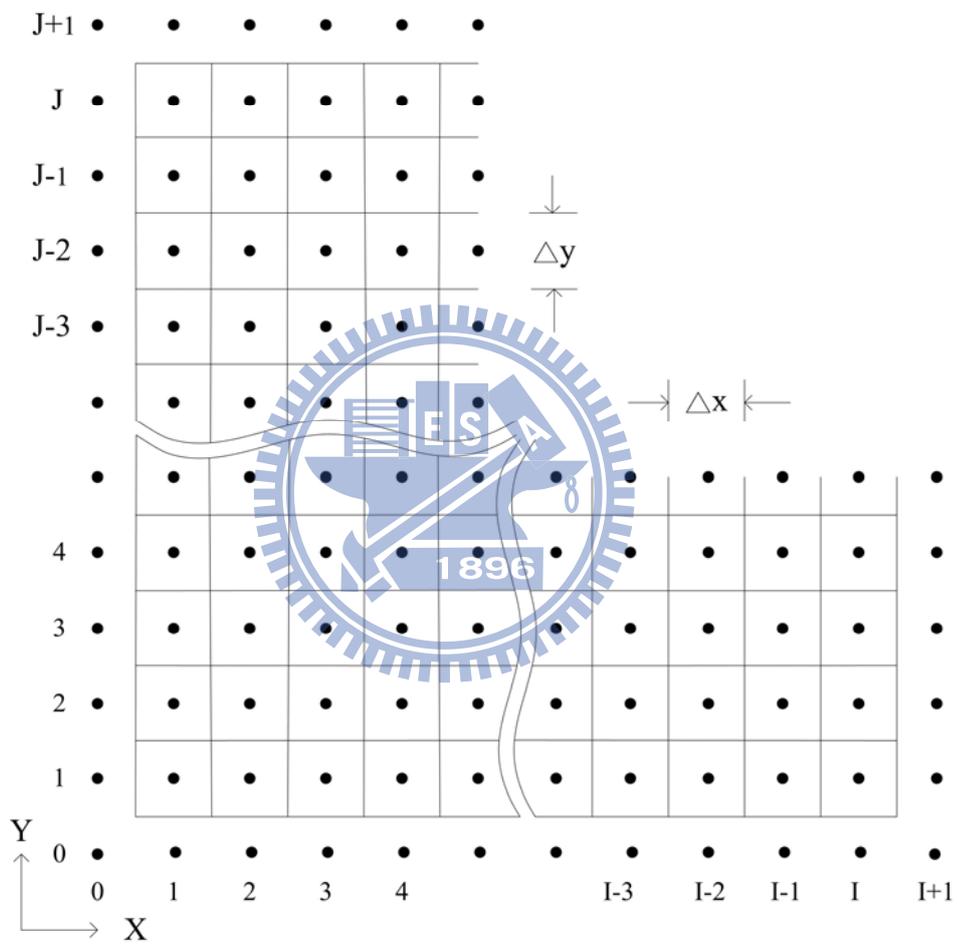
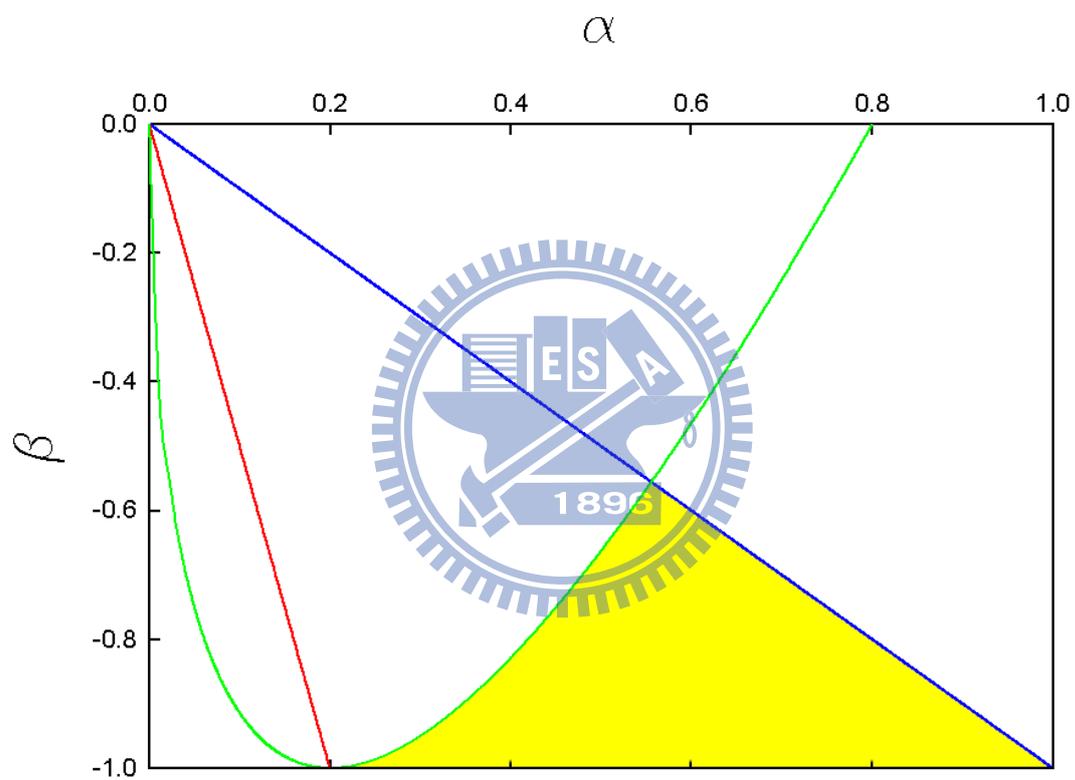


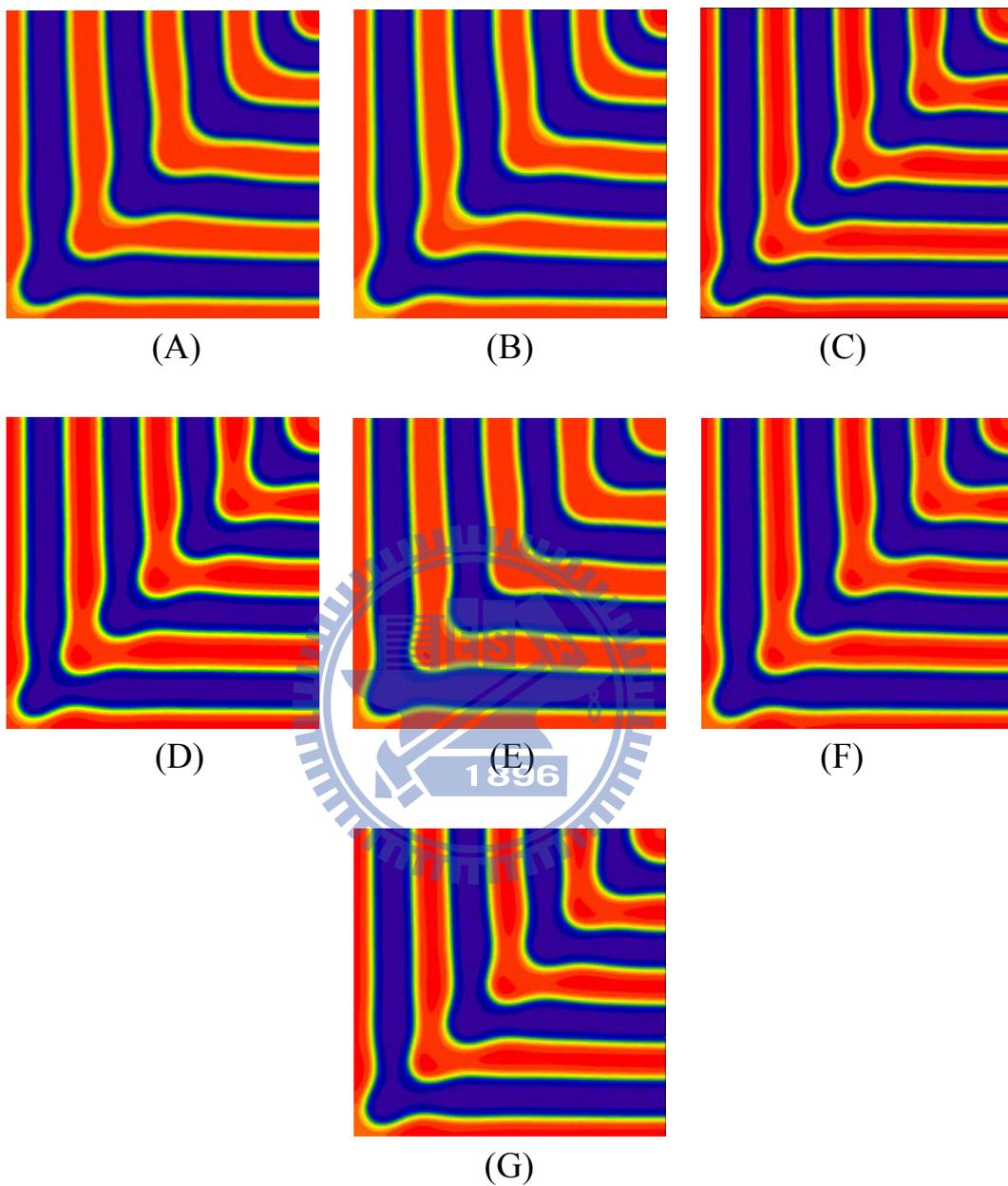
圖 五  $Q$  拋物線滿足  $Q < 0$  的解



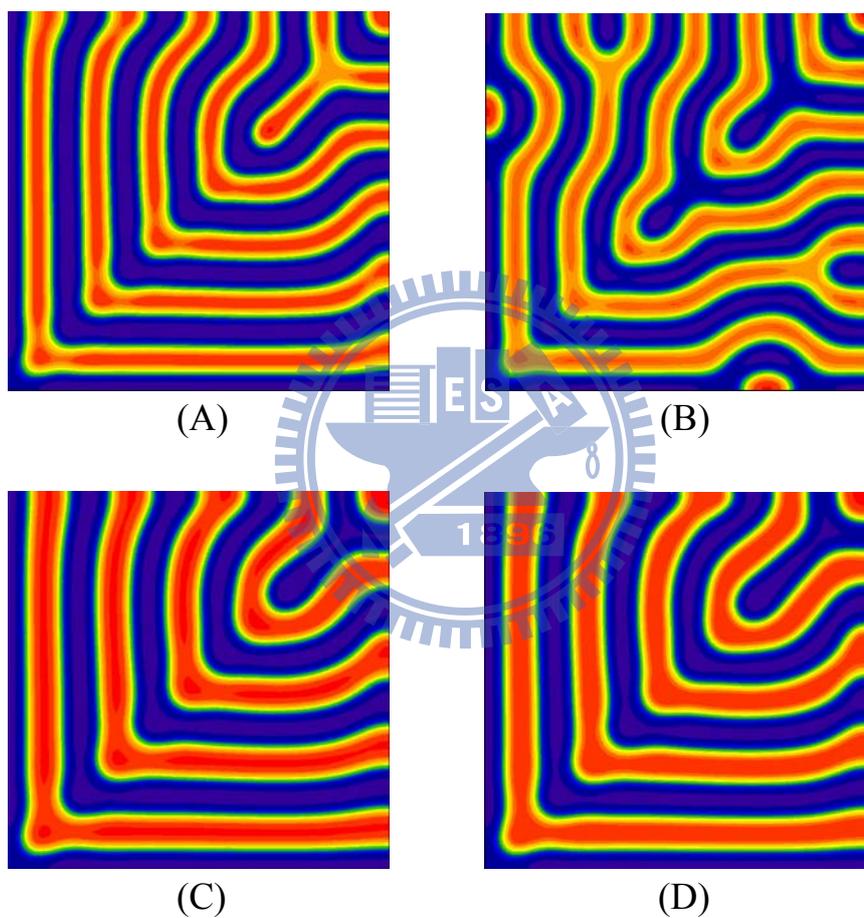
圖六 網格點圖



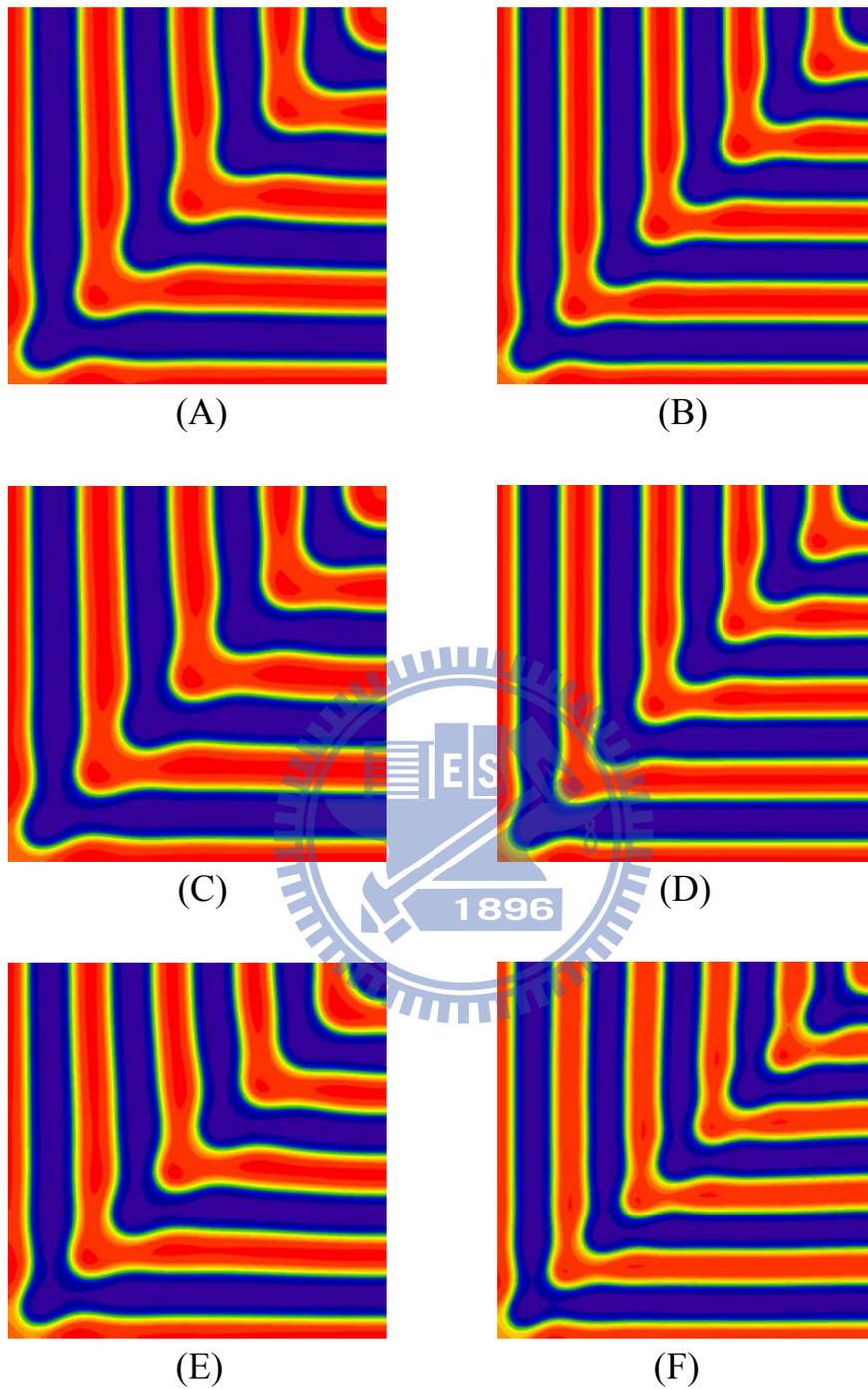
圖七 限制條件圖。黃色區域為塗林空間。



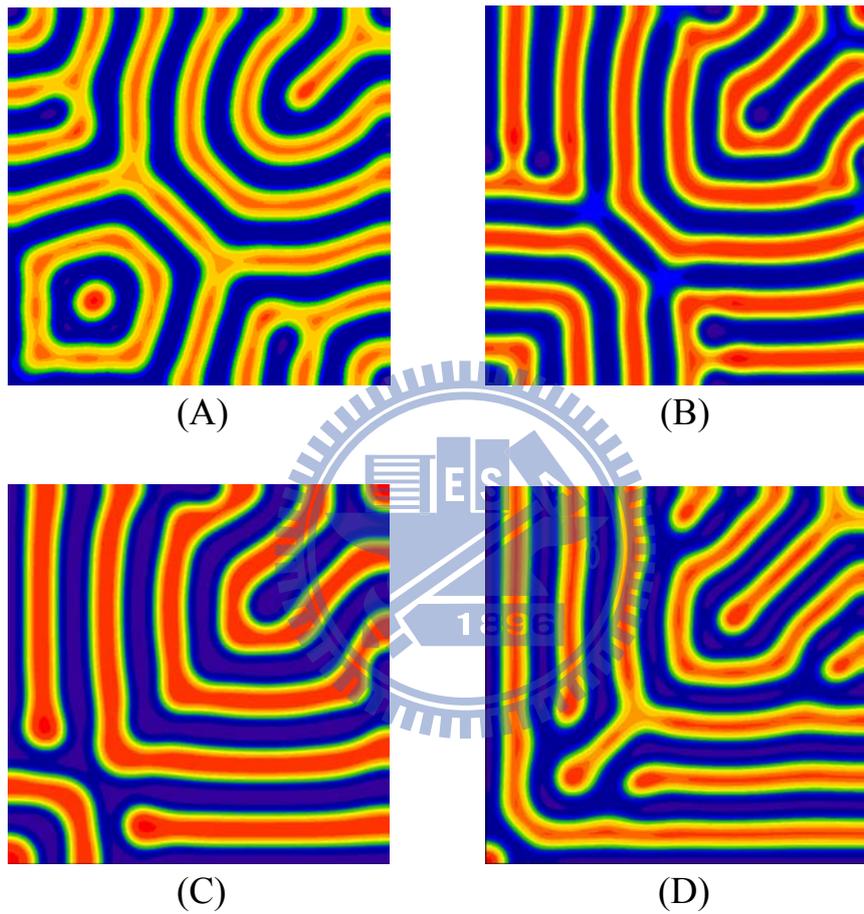
圖八 相似圖形比較圖。模型種類與其他參數為 (A) 第 1 組， $r_3=0.5$  (B) 第 8 組， $r_3=2$ 、 $r_5=1$  (C) 第 16 組， $r_4=2$ 、 $r_5=1$  (D) 第 17 組， $r_4=2$ 、 $r_5=1$  (E) 第 28 組， $r_5=1$  (F) 第 34 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$  (G) 第 35 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ 。



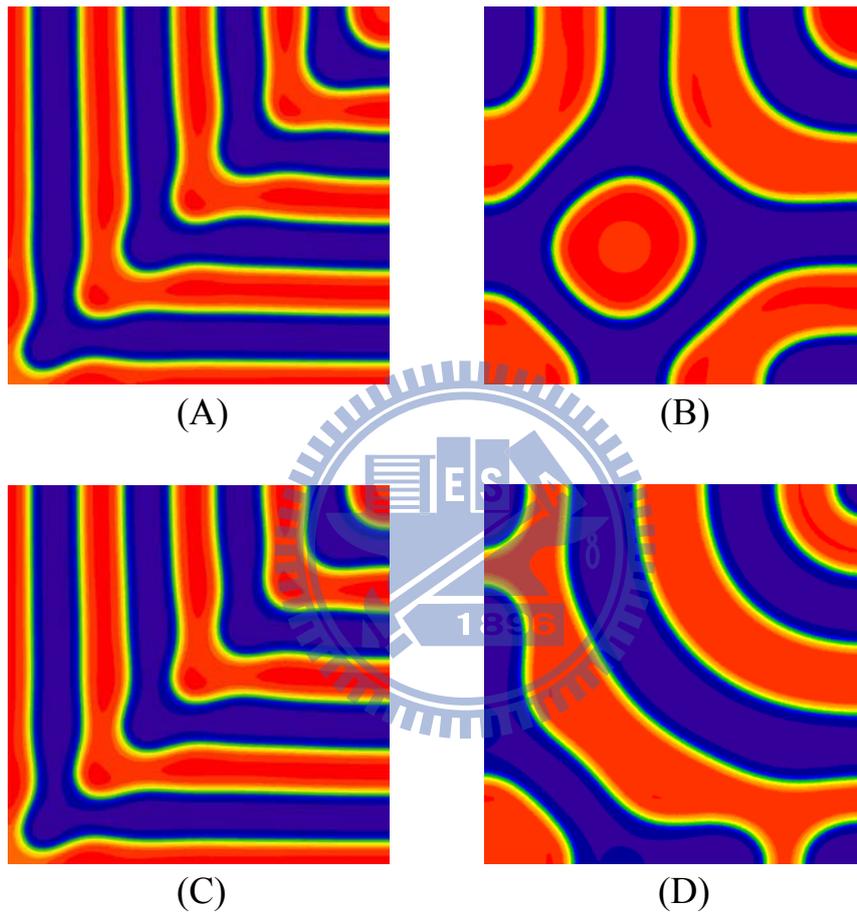
圖九 參數變化差異圖。組別與反應項參數(A)第 12 組， $r_3=2$ 、 $r_5=1$  (B)第 12 組， $r_3=2$ 、 $r_5=3$  (C)第 13 組， $r_4=-2$ 、 $r_5=1$  (D) 第 13 組， $r_4=-2$ 、 $r_5=3$ 。



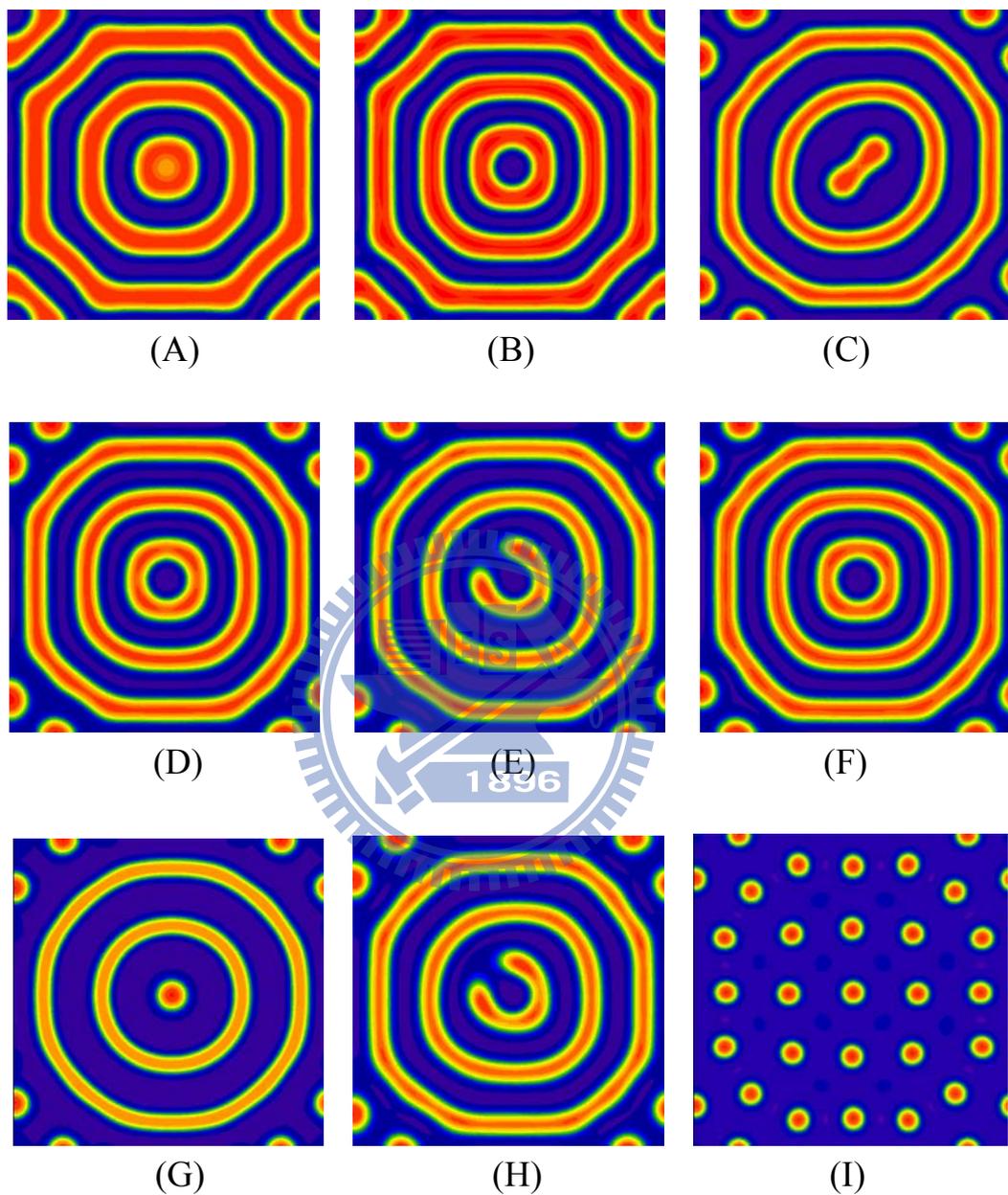
圖十 波數變化圖。組別與反應項參數(A) 第 34 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ (B) 第 34 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$ (C) 第 35 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ (D) 第 35 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$ (E) 第 36 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ (F) 第 36 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$ 。



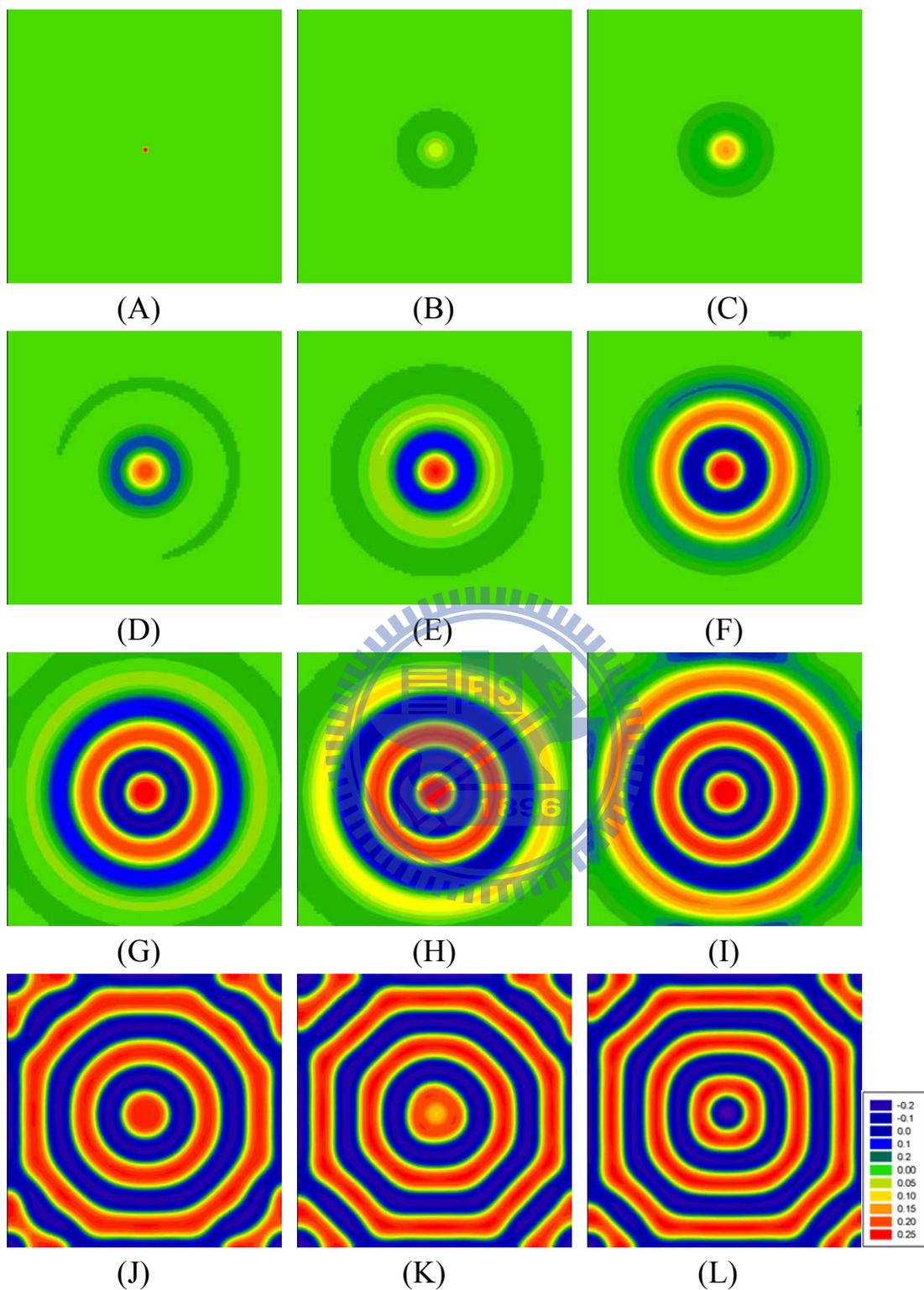
圖十一 特殊圖形組合圖。組別與反應項參數(A)第 25 組， $r_5=1$  (B)第 26 組， $r_5=1$  (C)第 27 組， $r_5=1$  (D)第 30 組， $r_5=1$ ，其餘參數同圖六。



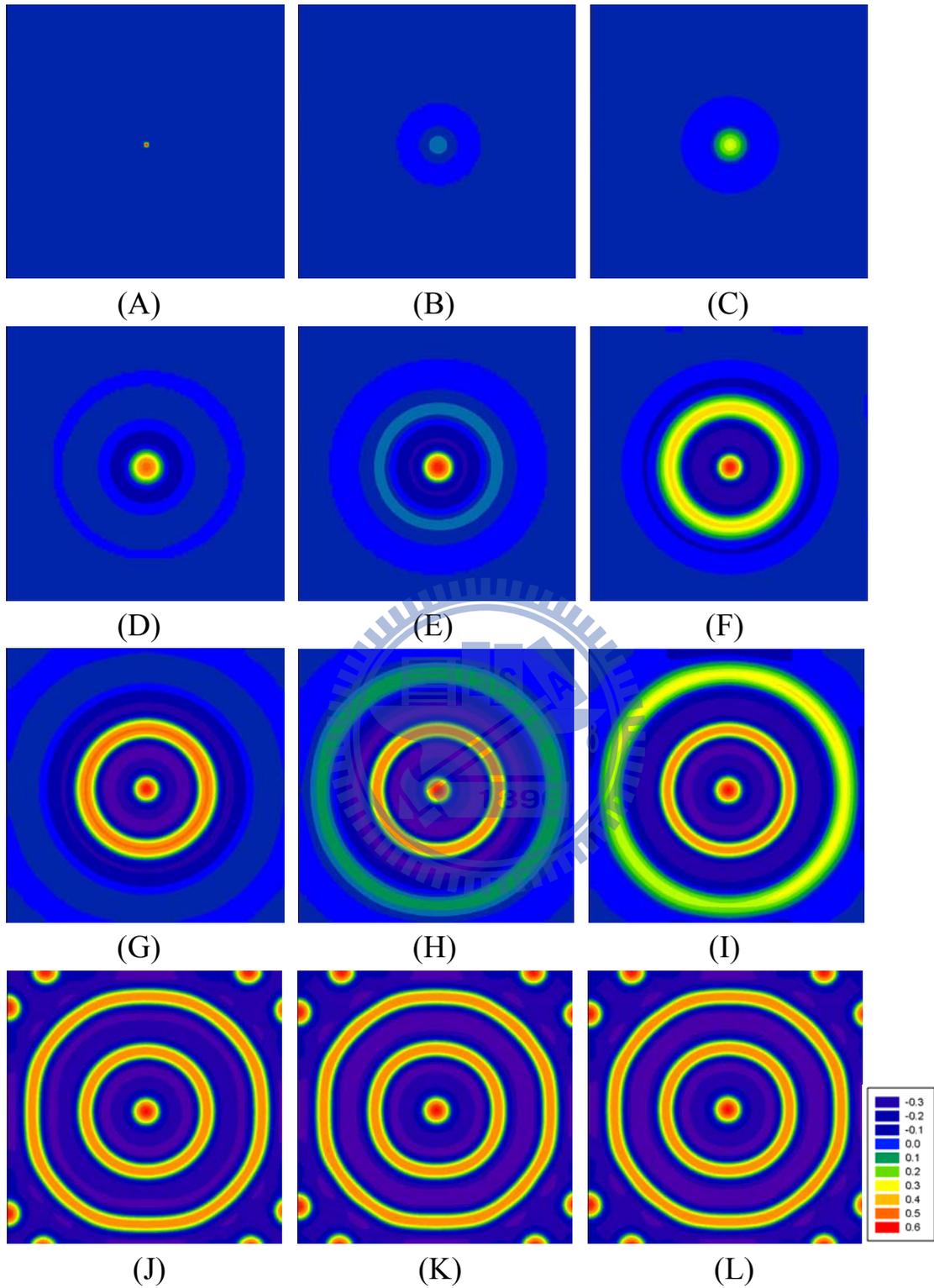
圖十二 參數正負變化影響圖。組別與反應項參數(A)第 34 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$  (B)第 34 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=-1$  (C) 第 35 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$  (D) 第 35 組， $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=-1$ 。



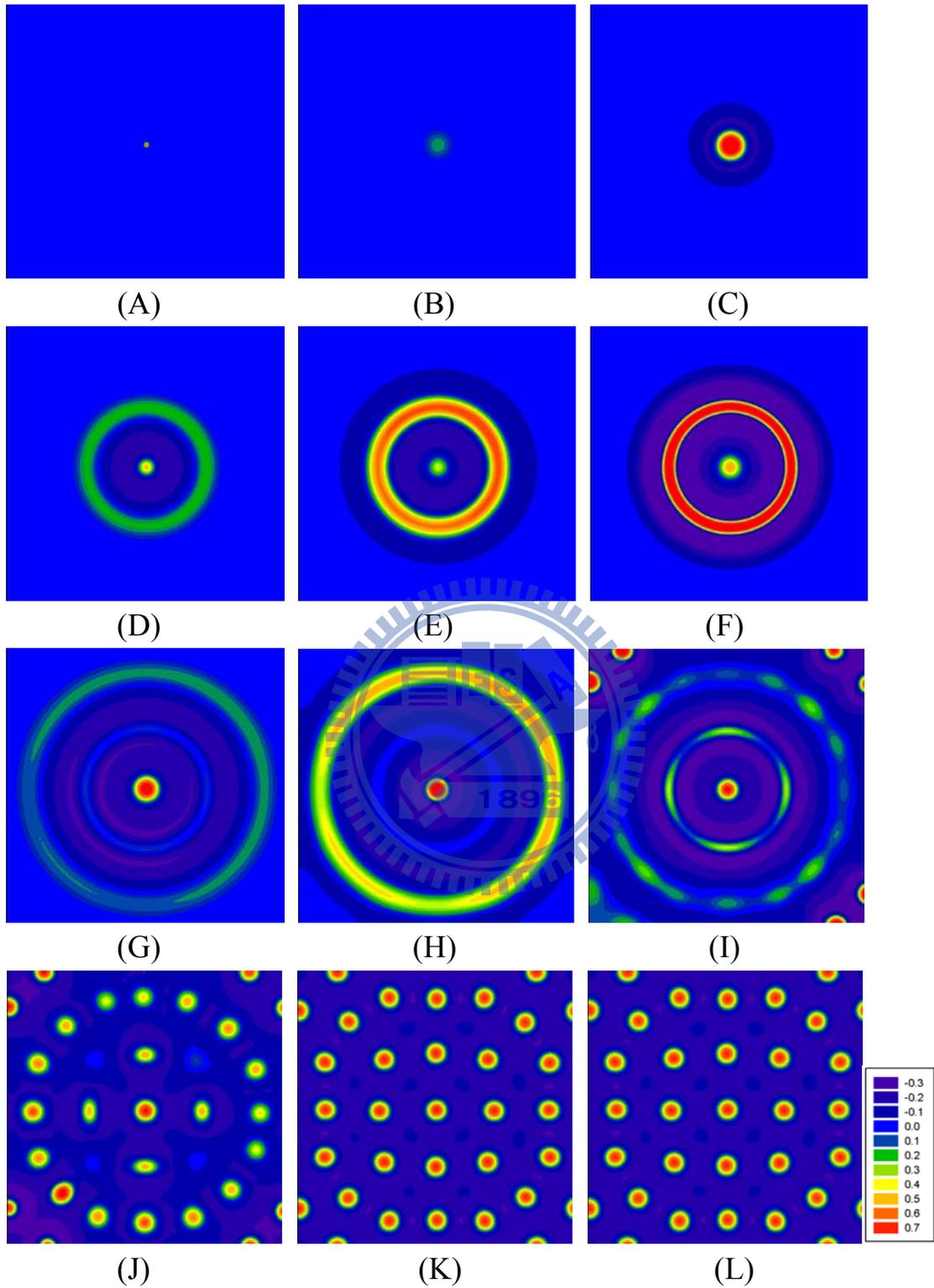
圖十三 同組合中間單點擾動比較圖。模型為第 15 組加二次項其他  
 參數為 (A)  $r_2=0$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=1$  (B)  $r_2=0$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=3$  (C)  
 $r_2=1$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=1$  (D)  $r_2=1$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=3$  (E)  $r_2=1$ 、 $r_4=-0.5$ 、  
 $r_5=1$  (F)  $r_2=1$ 、 $r_4=-0.5$ 、 $r_5=3$  (G)  $r_2=2$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=1$  (H)  
 $r_2=2$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=3$  (I)  $r_2=3$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=1$ 。



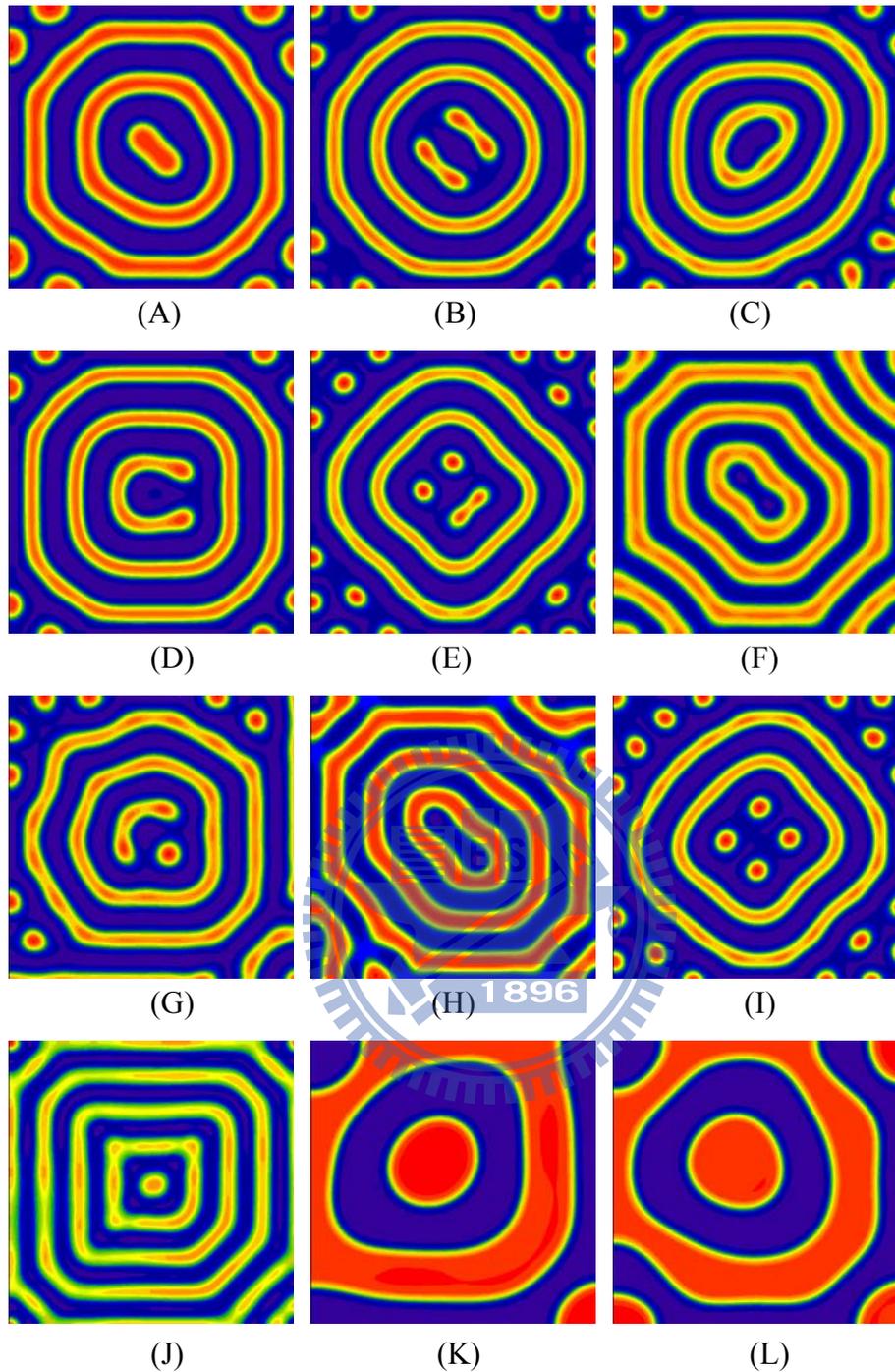
圖十四 圖十一-B之分時圖。時間間隔次數 $N_t$ 各為 (A)  $N_t=0$  (B)  $N_t=300$  (C)  $N_t=900$  (D)  $N_t=1200$  (E)  $N_t=1500$  (F)  $N_t=2100$  (G)  $N_t=2400$  (H)  $N_t=2700$  (I)  $N_t=3000$  (J)  $N_t=6000$  (K)  $N_t=30000$  (L)  $N_t=300000$ 。



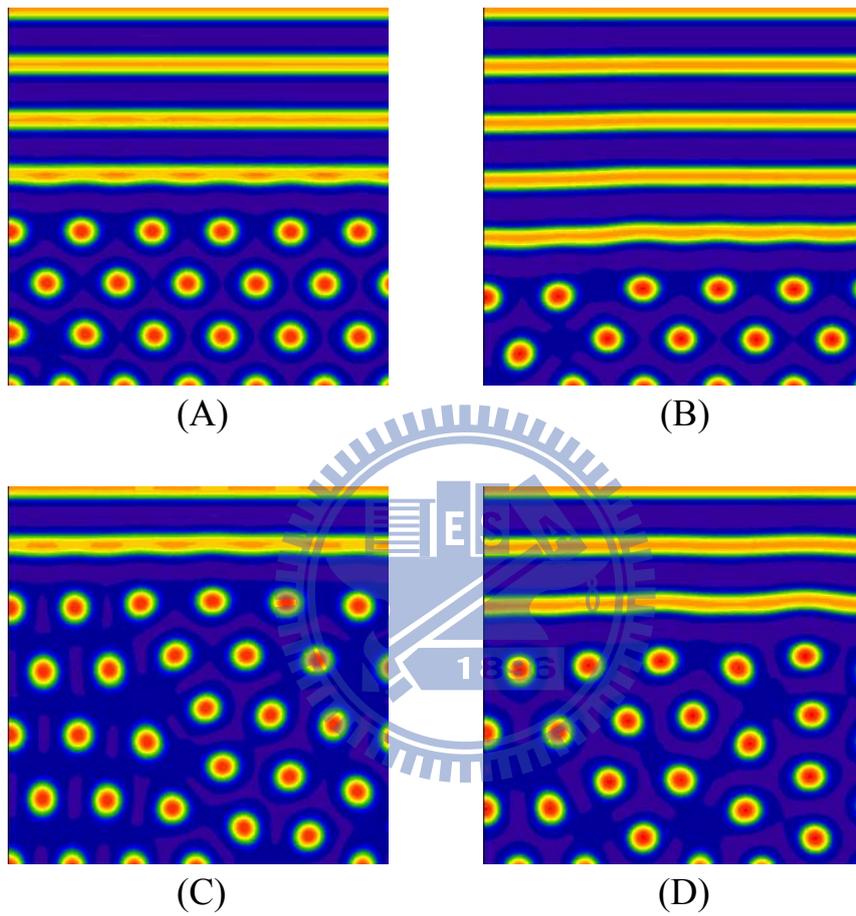
圖十五 圖十一G之分時圖。時間間隔次數 $N_t$ 各為 (A)  $N_t=0$  (B)  $N_t=300$  (C)  $N_t=900$  (D)  $N_t=1200$  (E)  $N_t=1500$  (F)  $N_t=2100$  (G)  $N_t=2400$  (H)  $N_t=2700$  (I)  $N_t=3000$  (J)  $N_t=6000$  (K)  $N_t=30000$  (L)  $N_t=300000$ 。



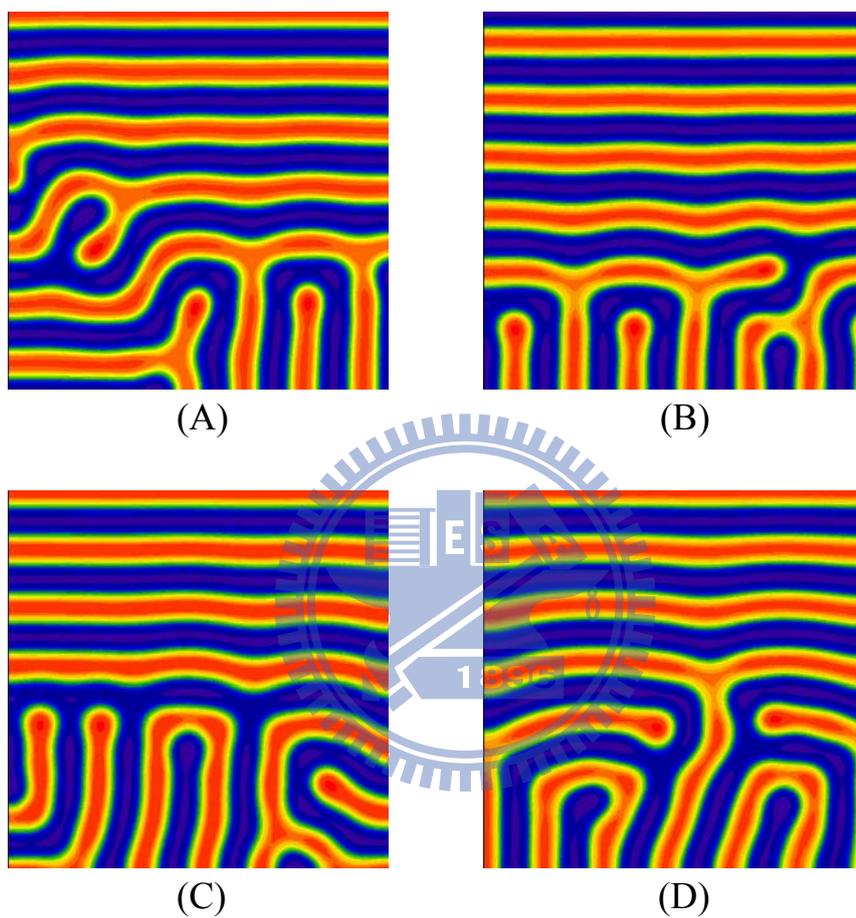
圖十六 圖十一I之分時圖。時間間隔次數 $N_t$ 各為 (A)  $N_t=0$  (B)  $N_t=600$  (C)  $N_t=1200$  (D)  $N_t=1800$  (E)  $N_t=2100$  (F)  $N_t=2400$  (G)  $N_t=2700$  (H)  $N_t=3000$  (I)  $N_t=6000$  (J)  $N_t=9000$  (K)  $N_t=30000$  (L)  $N_t=300000$ 。



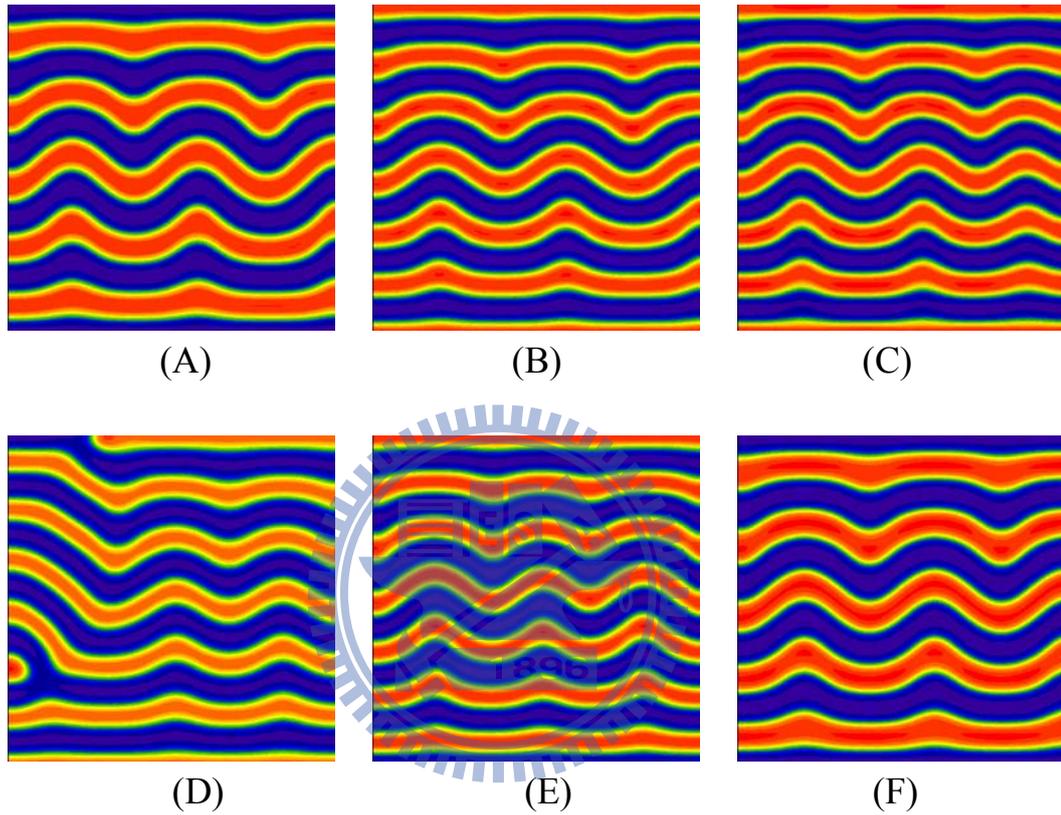
圖十七 各組合中間單點擾動比較圖。組別與反應項參數 (A) 第 2 組,  $r_2=0.5$ 、 $r_3=-0.5$ 、 $r_5=2$  (B) 第 3 組,  $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=1$  (C) 第 3 組,  $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$  (D) 第 12 組,  $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=1$  (E) 第 12 組,  $r_2=1$ 、 $r_3=0.5$ 、 $r_5=1$  (F) 第 25 組,  $r_2=0$ 、 $r_5=1$  (G) 第 25 組,  $r_2=0.3$ 、 $r_5=1$  (H) 第 26 組,  $r_2=0$ 、 $r_5=1$  (I) 第 30 組,  $r_2=1$ 、 $r_5=2$  (J) 第 41 組,  $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$  (K) 第 34 組,  $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=-1$  (L) 第 35 組,  $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=3$ 、 $r_5=-1$ 。



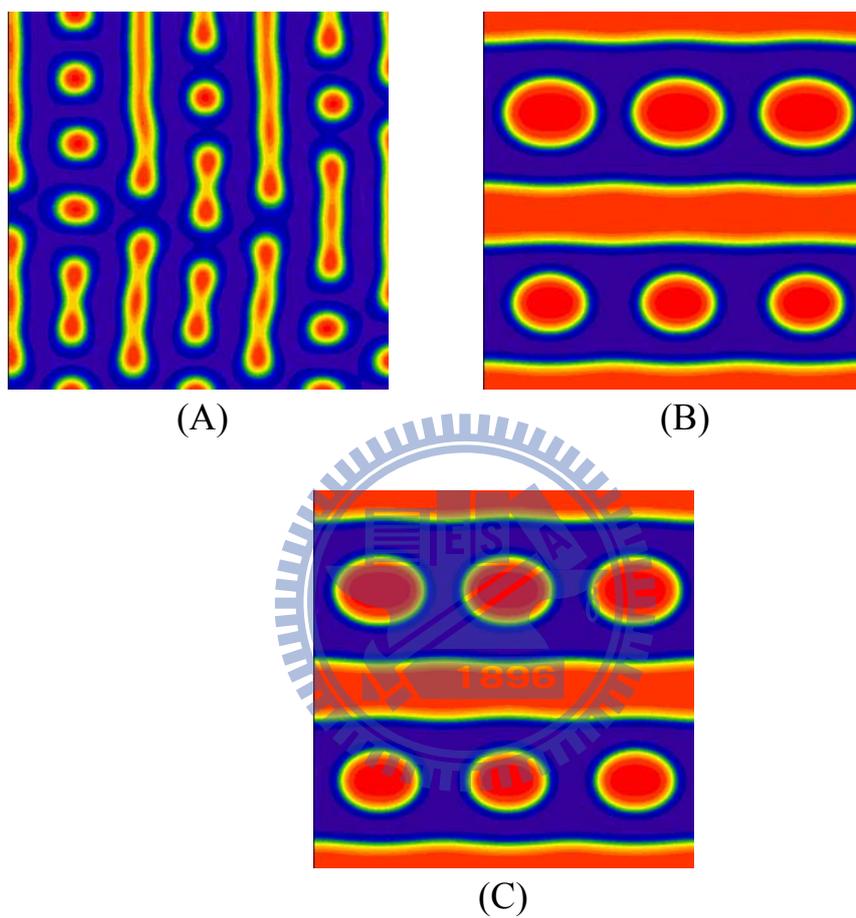
圖十八 點與直線共存圖。組別與反應項參數(A) (C)第 5 組， $r_2=1$ 、 $r_3=0.5$ 、 $r_5=3$  (B) (D)第 6 組， $r_2=1$ 、 $r_3=0.5$ 、 $r_5=1$ 。



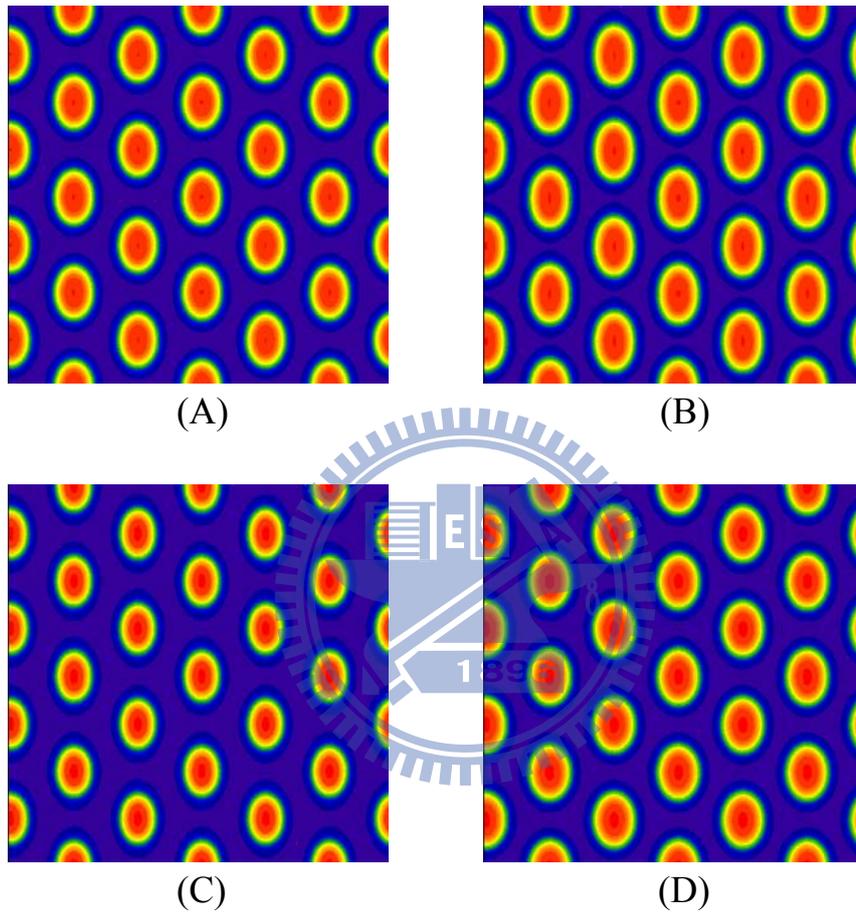
圖十九 非直線與直線共存圖。組別與反應項參數：(A)及(C)為第5組， $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$ ；(B)及(D)為第6組， $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$ 。



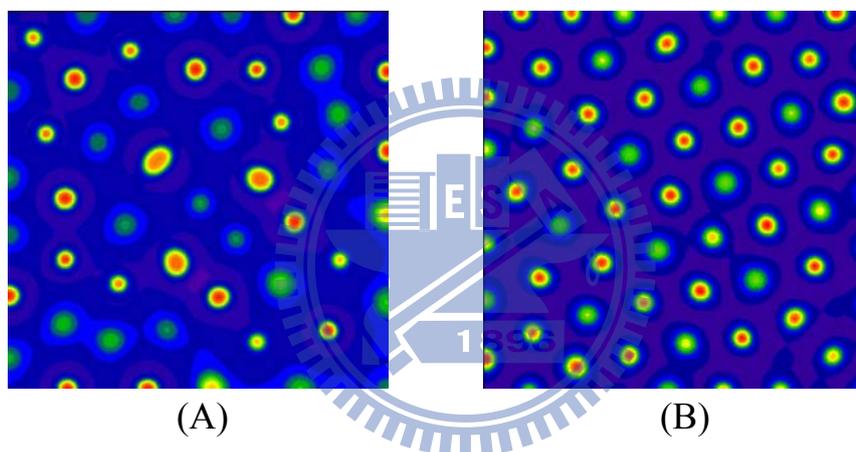
圖二十 各組合之波紋圖。組別與反應項參數(A) 第 14 組， $r_2=0$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ (B) 第 25 組， $r_2=0$ 、 $r_5=2$  (C) 第 26 組， $r_2=0$ 、 $r_5=1$  (D) 第 30 組， $r_2=0$ 、 $r_5=3$  (E) 第 32 組， $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$  (F) 第 41 組， $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=-2$ 、 $r_5=1$ 。



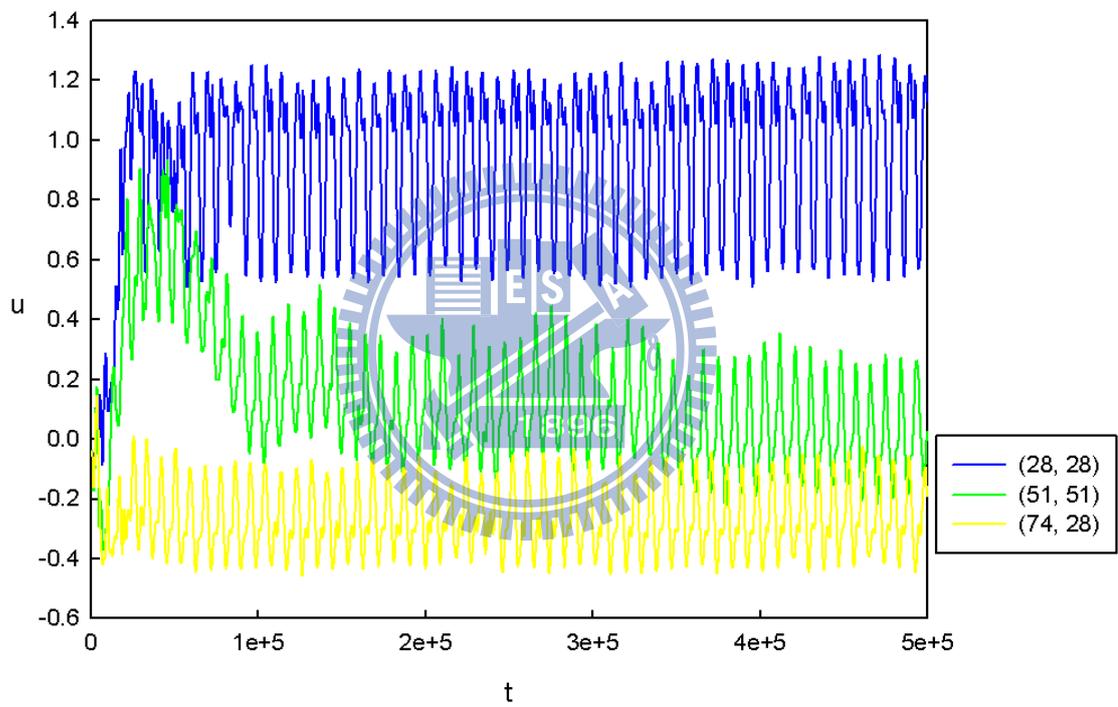
圖二十一 點與直線交錯圖。組別與反應項參數(A) 第 3 組， $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$  (B) 第 34 組， $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=3$ 、 $r_5=-1$  (C)第 35 組， $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=3$ 、 $r_5=-1$ 。



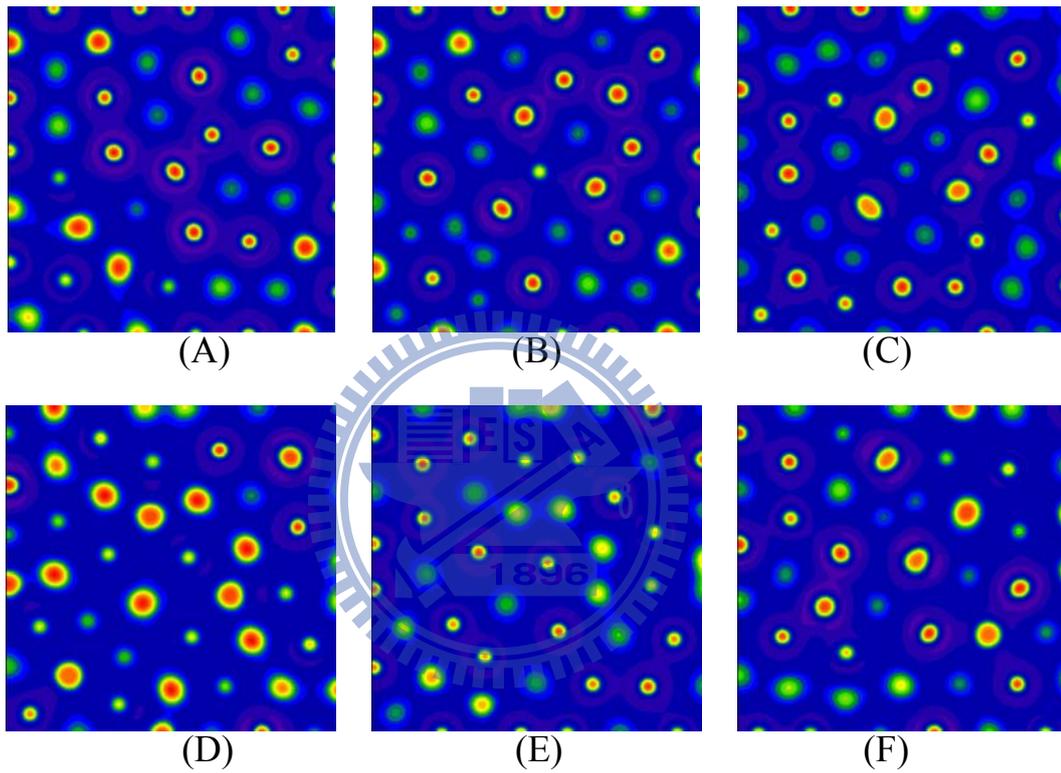
圖二十二 橢圓點圖。組別與反應項參數(A) 第 31 組。  $r_2=1$ 、 $r_3=-1$ 、 $r_4=-1$ 、 $r_5=3$ (B) 第 2 組， $r_2=0.5$ 、 $r_3=-0.5$ 、 $r_5=2$  (C)第 14 組， $r_2=1$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ (D) 第 27 組， $r_2=0.8$ 、 $r_5=3$ 。



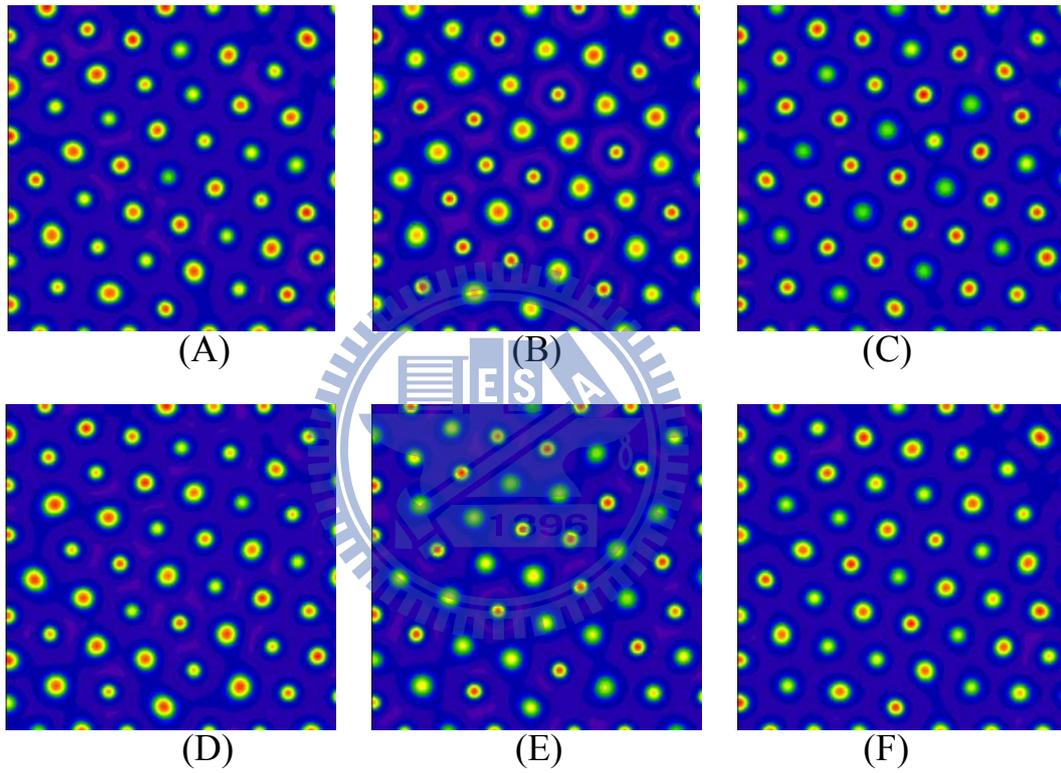
圖二十三 涂林振盪圖。組別與反應項參數(A) 第 3 組， $r_2=3$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$ (B) 第 32 組， $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$ 。



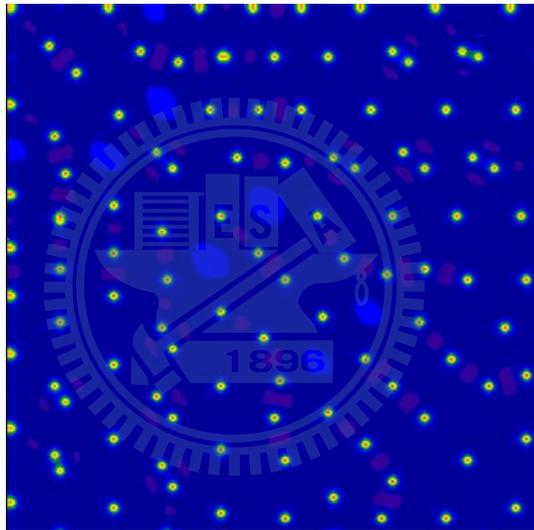
圖二十四 圖二十三 B 各位置 u 值隨時間變化圖。



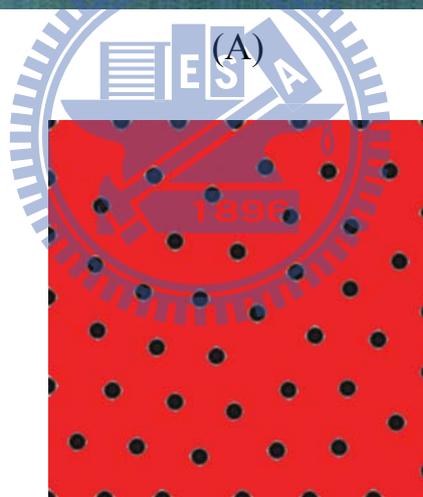
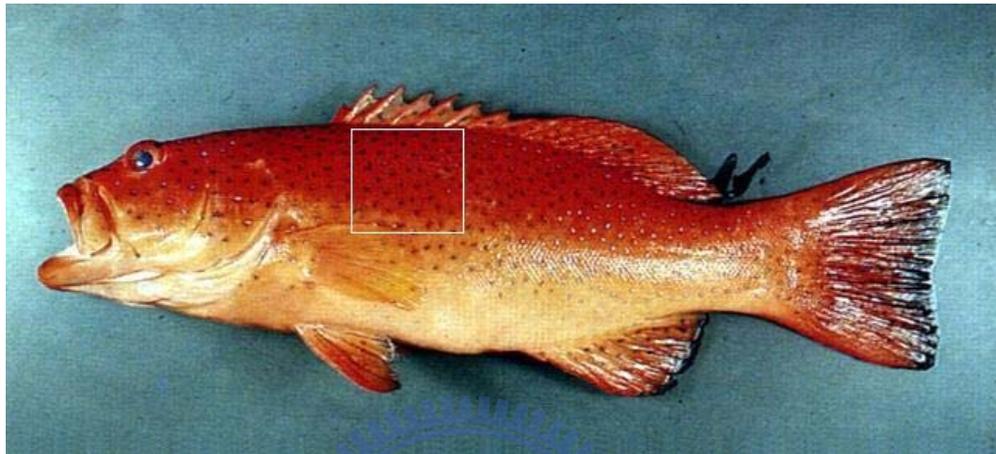
圖二十五 分時涂林振盪圖。時間間隔次數 $N_t$ 各為(A)  $N_t=260000$  (B)  $N_t=280000$ (C)  $N_t=300000$ (D)  $N_t=320000$ (E)  $N_t=340000$  (F)  $N_t=360000$ ，其於參數同圖二十三A。



圖二十六 分時涂林振盪圖。時間間隔次數 $N_t$ 各為(A)  $N_t=260000$  (B)  $N_t=280000$ (C)  $N_t=300000$ (D)  $N_t=320000$ (E)  $N_t=340000$  (F)  $N_t=360000$ ，其於參數同圖二十三B。

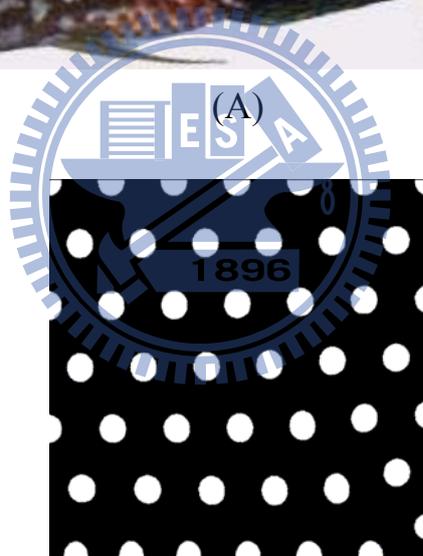
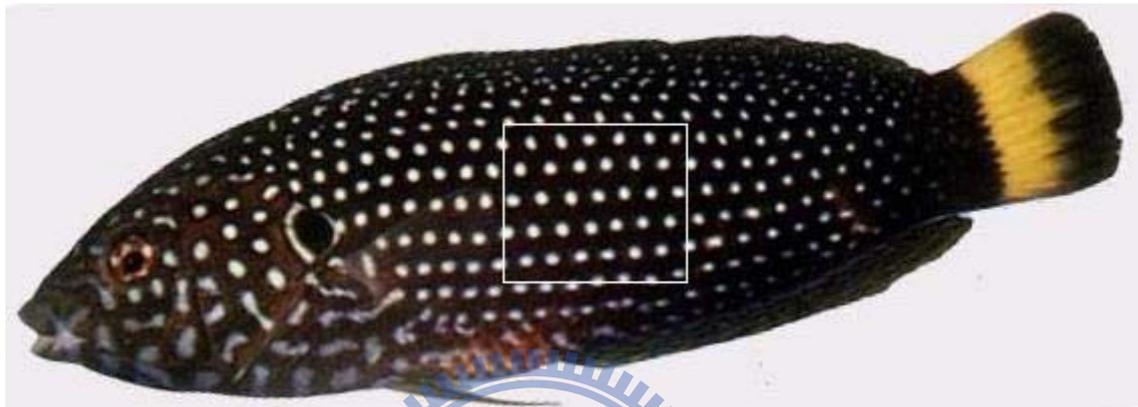


圖二十七 高波數圖。組別與反應項參數分別為第 32 組， $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ 。



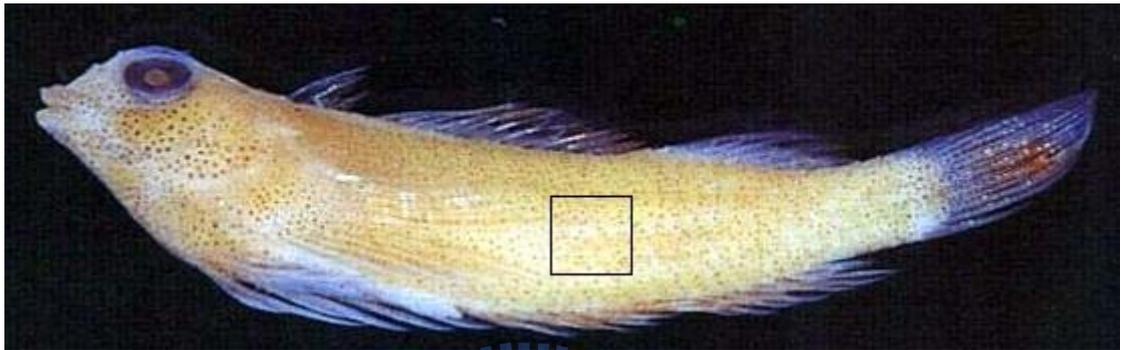
(B)

圖二十八 (A)花斑刺鰹魚【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第3組搭配參數 $r_2=3$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=1$ 。



(B)

圖二十九 (A) 烏尾阿南魚【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第3組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_3=0.5$ 、 $r_5=3$ 。



圖三十 (A) 矮雙線鰺【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第32組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ 。

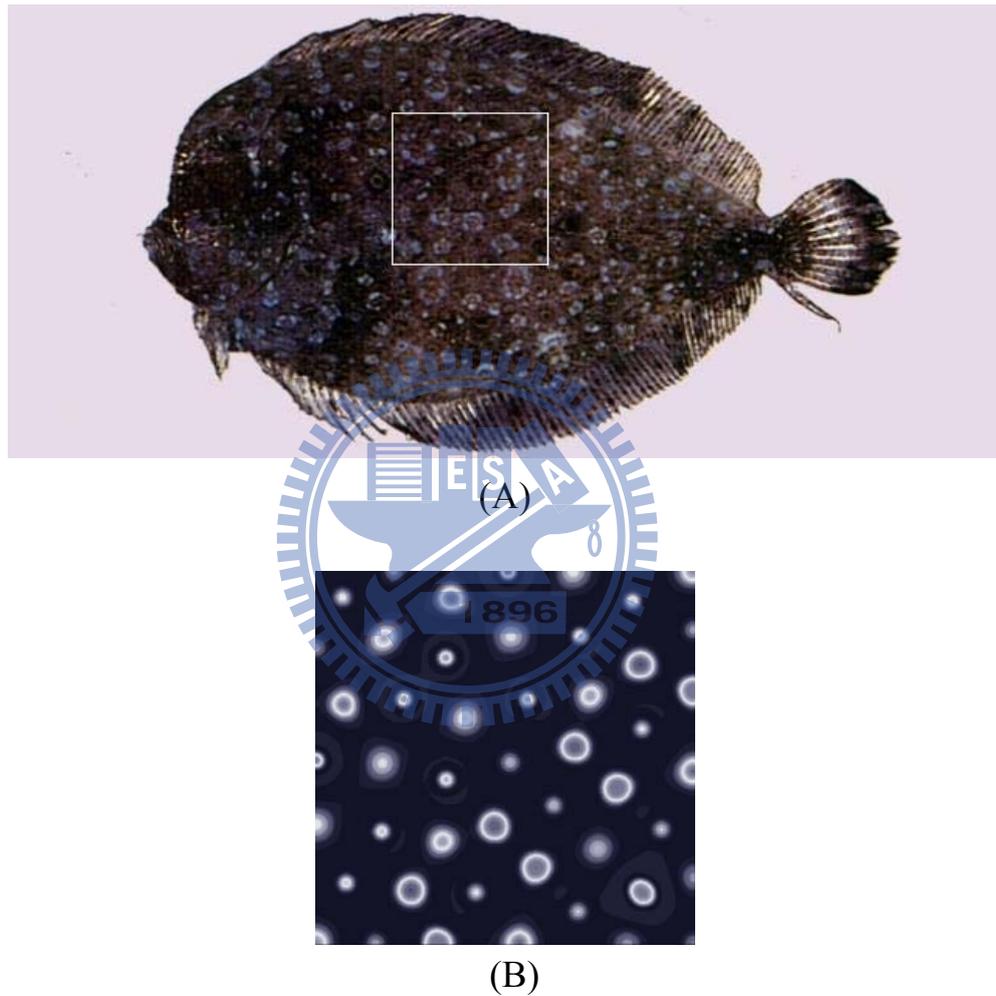
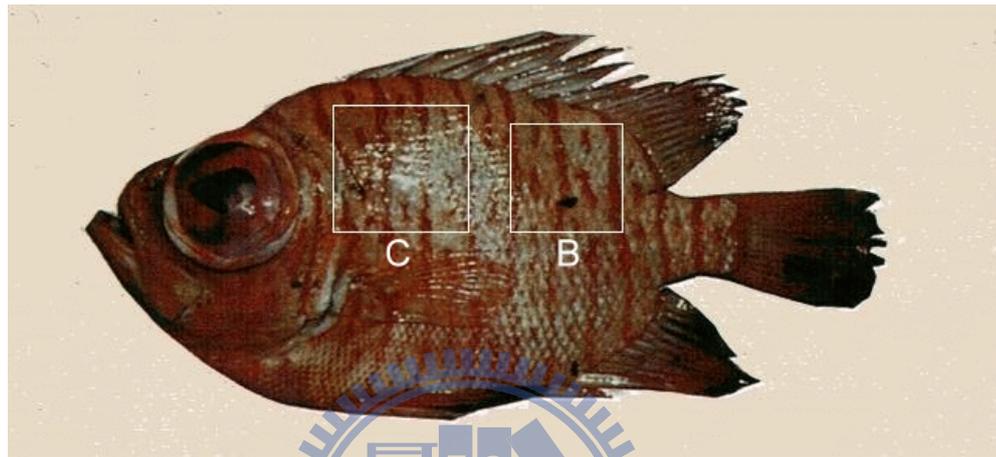


圖 三十一 (A) 繁星魷【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第3組搭配參數 $r_2=3$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$ 。



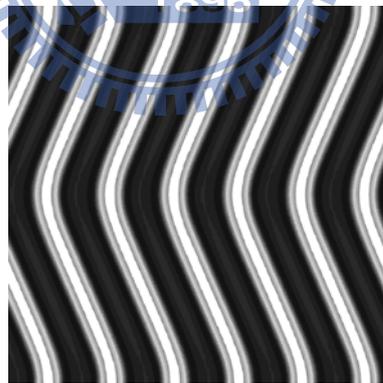
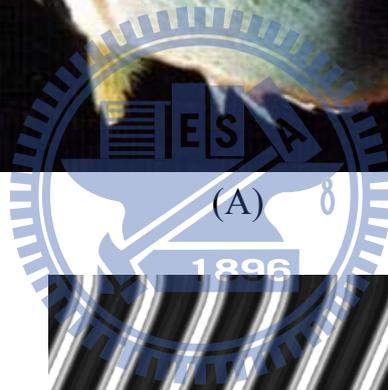
(B)

(C)

圖三十二 (A) 橫帶大鱗大眼鯛【22】及其模擬圖紋(B)與 (C)，(B) 採用反應項第 34 組搭配參數 $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=3$ 、 $r_5=-1$ ，(C)採用反應項第 3 組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$ 。

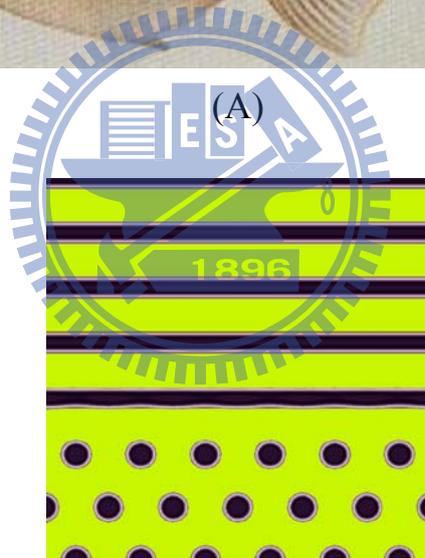
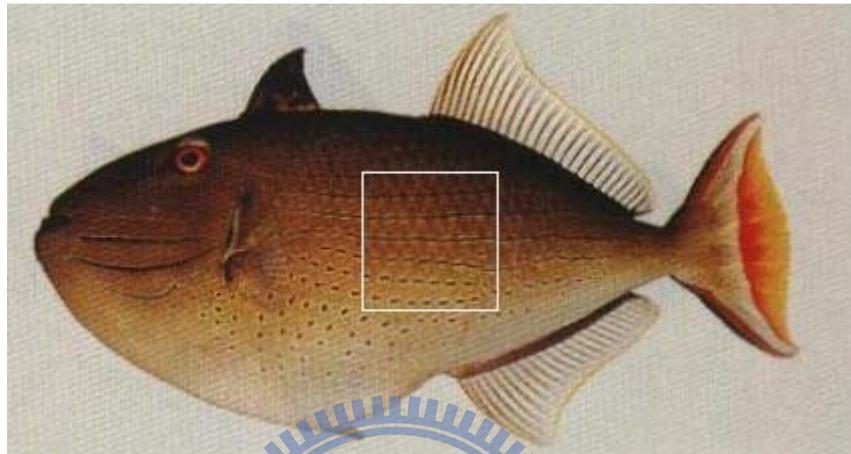


(A)



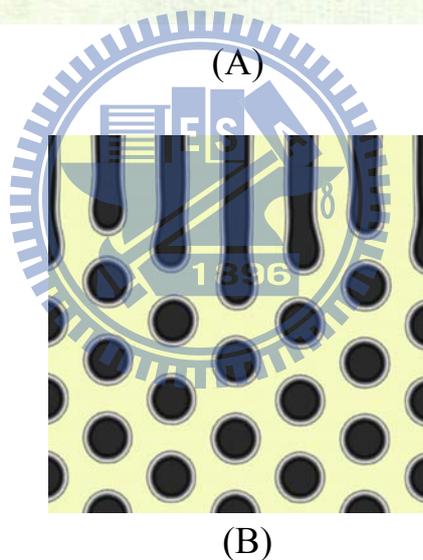
(B)

圖三十三 (A) 曲紋蝴蝶魚【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第 14 組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ 。



(B)

圖三十四 (A) 線斑鱗魨【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第 30 組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_5=1$ 。



圖三十五 (A) 點斑橫帶蝴蝶魚【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第 15 組搭配參數 $r_2=1.2$ 、 $r_4=-1.5$ 、 $r_5=2$ 。

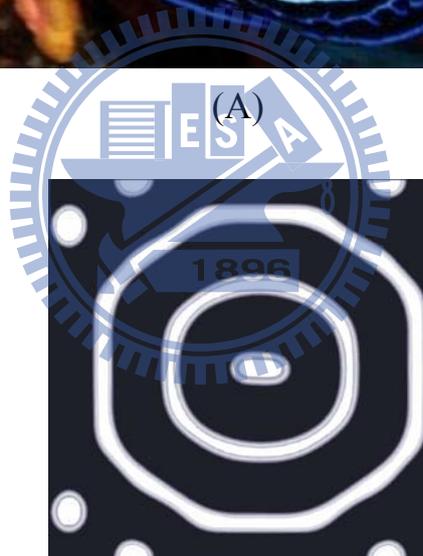


(A)



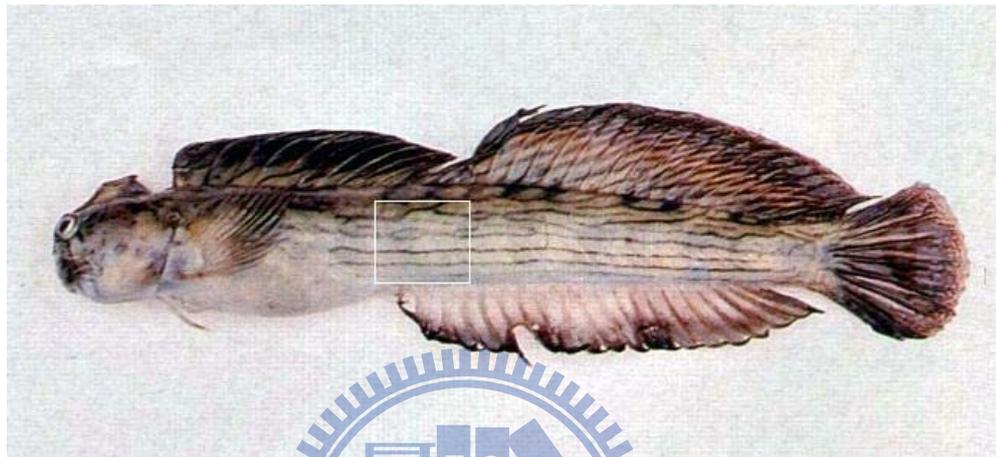
(B)

圖三十六 (A) 條紋棘蝶魚【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第 32 組搭配參數 $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_4=2$   $r_5=3$ 。



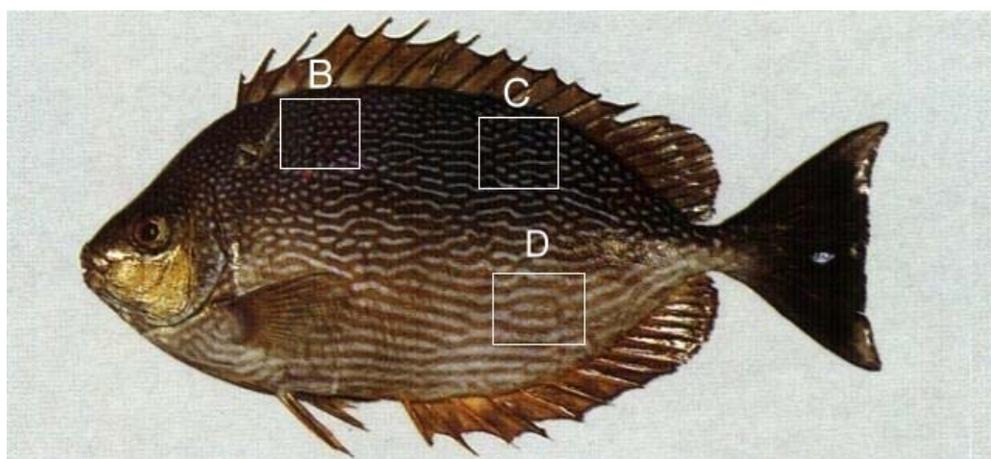
(B)

圖三十七 (A) 條紋棘蝶魚 (幼魚)【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第 2 組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_3=-0.5$ 、 $r_5=3$ 。

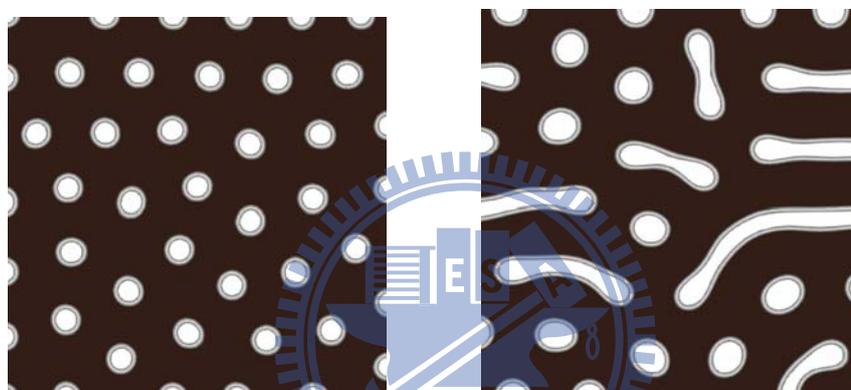


(B)

圖三十八 (A) 紋身蛙鰈 (雄魚)【22】及其(B)模擬圖紋，採用反應項第 12 組搭配參數 $r_2=0$ 、 $r_3=2$ 、 $r_5=3$ 。

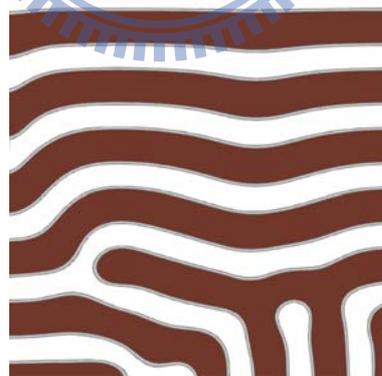


(A)



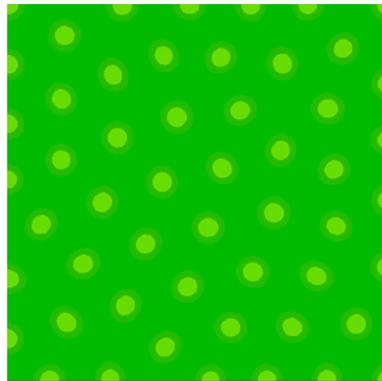
(B)

(C)

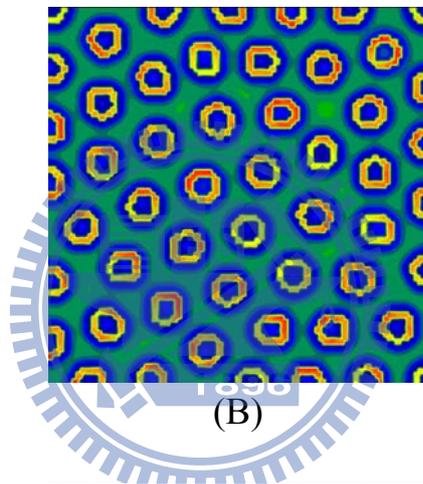


(D)

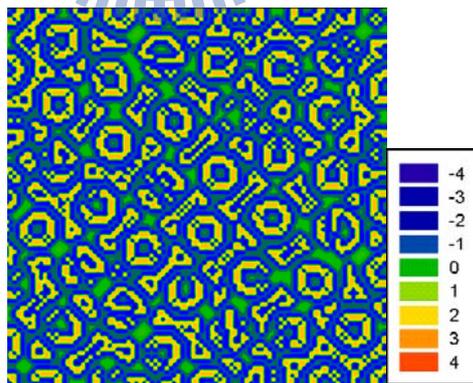
圖三十九 (A)爪哇籃子魚【22】及其模擬圖紋(B)、(C)與(D)，(B)採用反應項第 14 組搭配參數 $r_2=2$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$ (C)採用反應項第 14 組搭配參數 $r_2=1$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=1$ ，(D)採用反應項第 14 組搭配參數 $r_2=0$ 、 $r_4=2$ 、 $r_5=3$ 。



(A)

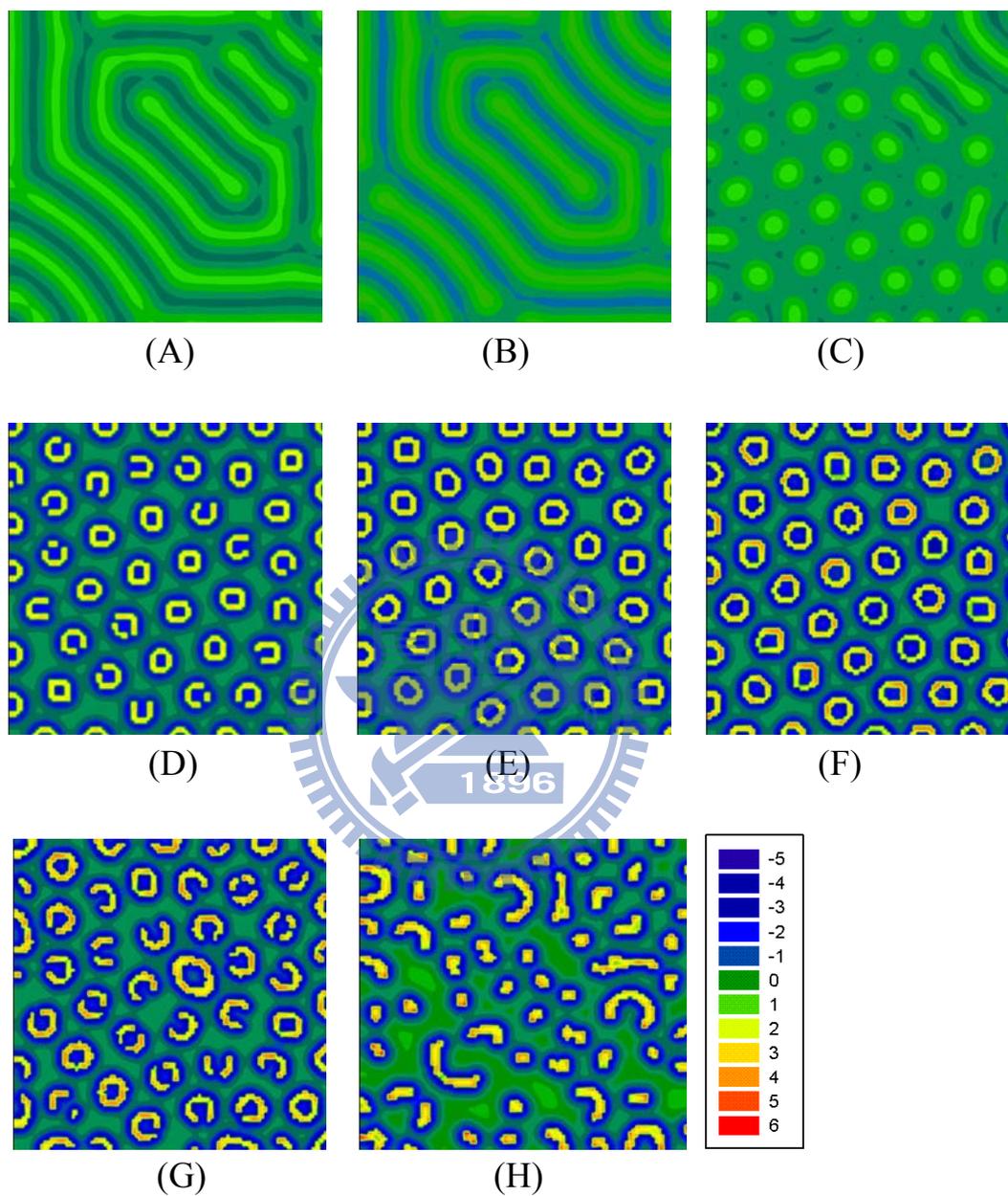


(B)

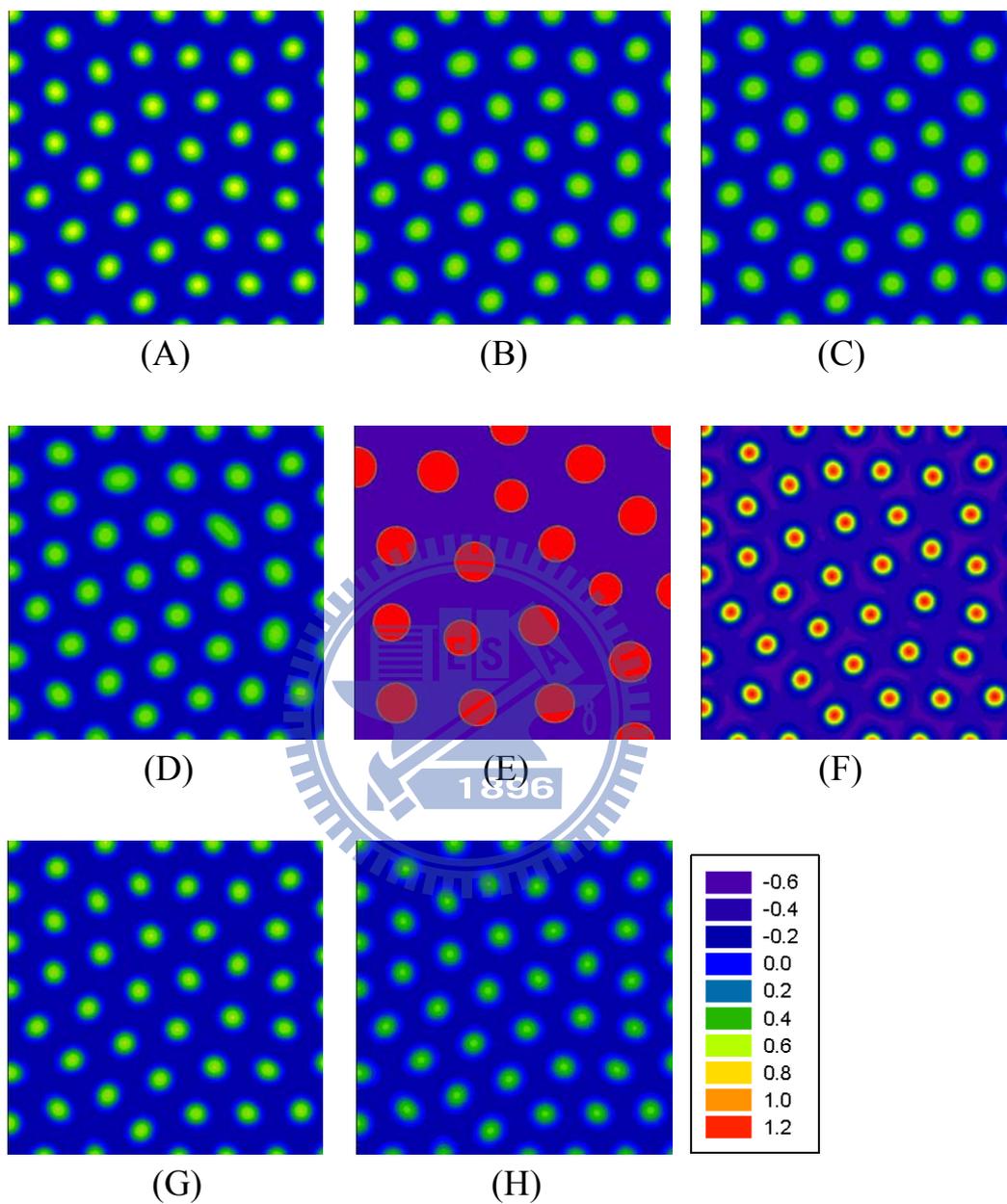


(C)

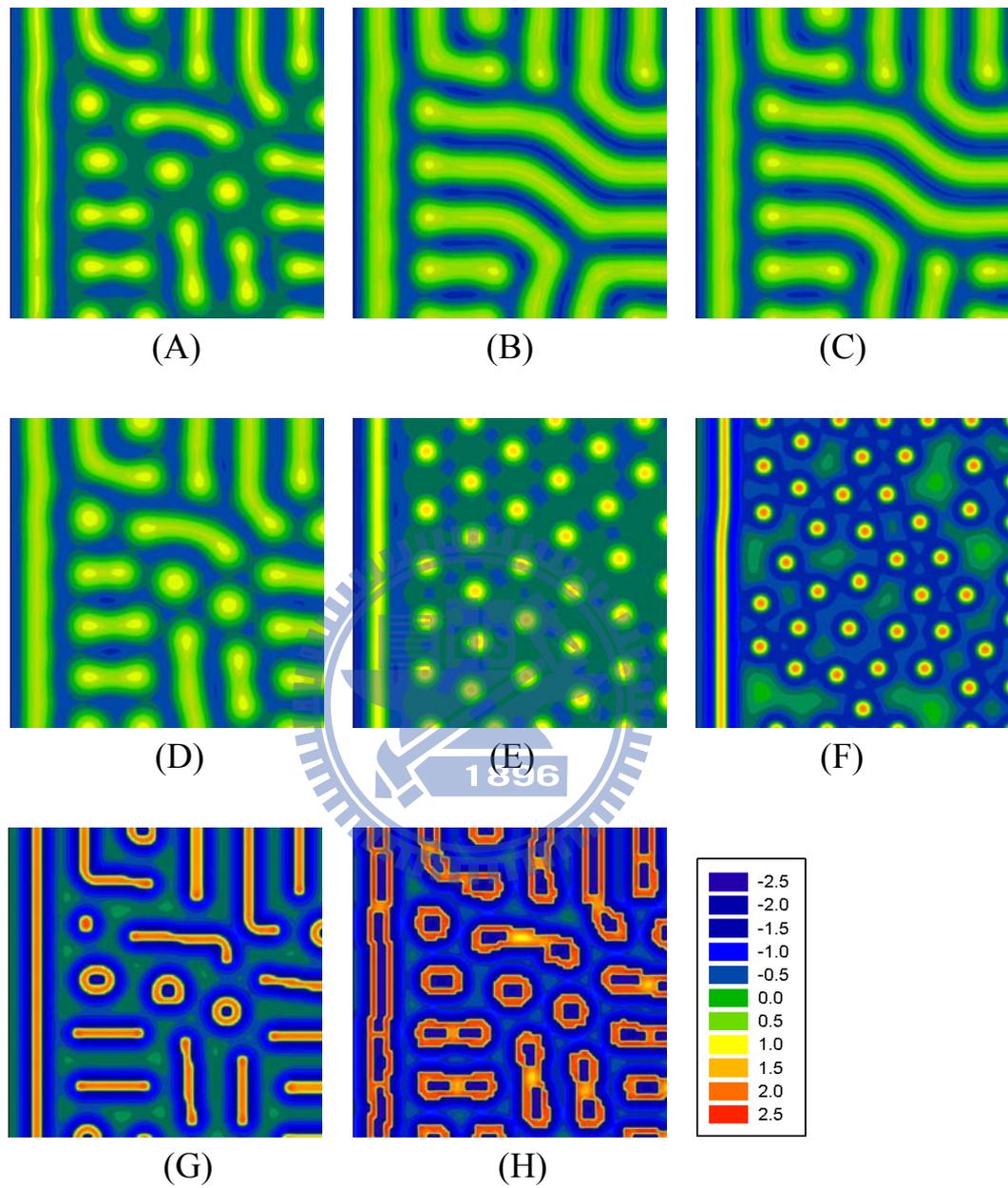
圖四十二 二階段塗林圖形變化圖，圖中相同的顏色代表相同的值。



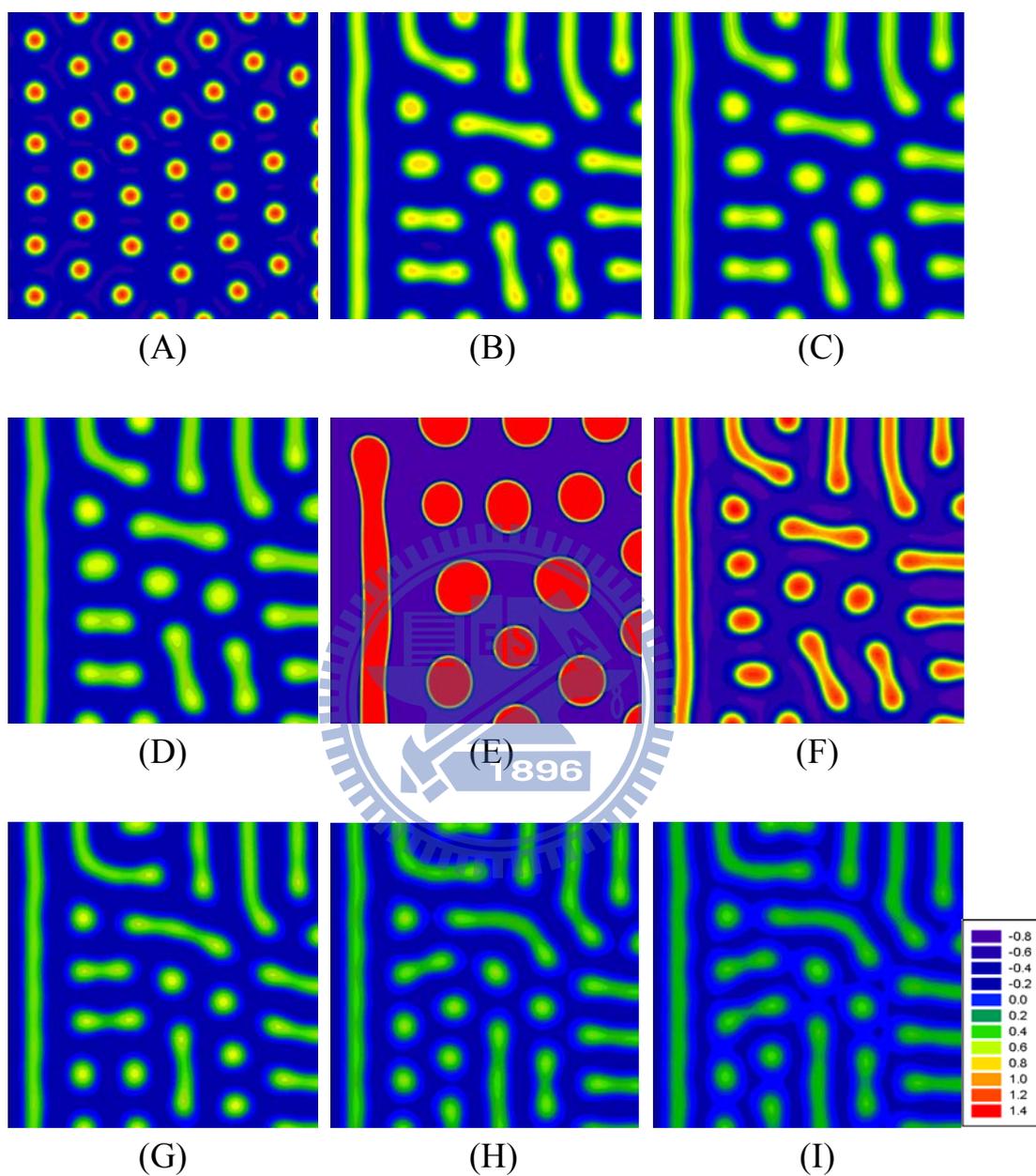
圖四十一 參數 $r_2$ 變化圖。改變之參數值(A) $r_2=0$  (B)  $r_2=0.2$  (C)  $r_2=0.3$  (D)  $r_2=4$  (E)  $r_2=5$  (F)  $r_2=6$  (G)  $r_2=7$  (H)  $r_2=8$ ，圖中相同的顏色代表相同的值，其餘未改變參數同圖四十一A。



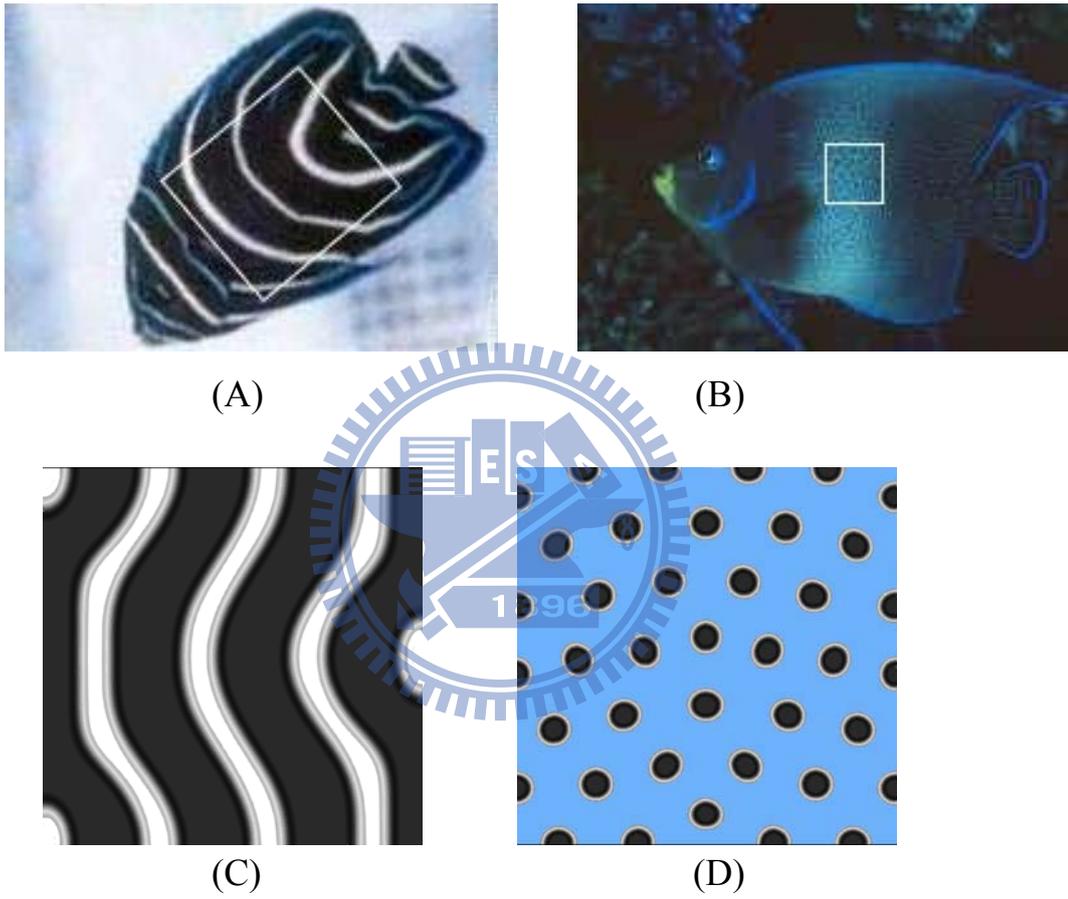
圖四十二 參數 $r_3$ 、 $r_5$ 變化圖。改變之參數值(A)  $r_3=2$  (B)  $r_3=4$  (C)  $r_3=6$ (D)  $r_3=8$  (E)  $r_5= 0$  (F)  $r_5= 1$  (G)  $r_5=5$  (H)  $r_5=8$ ，圖中相同的顏色代表相同的值，其餘未改變參數同圖四十一。



圖四十三 參數 $r_2$ 變化圖。初始值或改變之參數值(A)初始值 (B)  $r_2=0$  (C)  $r_2=0.2$  (D)  $r_2=0.5$  (E)  $r_2=2$  (F)  $r_2=4$  (G)  $r_2=6$  (H)  $r_2=8$ ，圖中相同的顏色代表相同的值，其餘未改變參數同圖四十A。



圖四十四 參數 $r_3$ 、 $r_5$ 變化圖。改變之參數值(A)  $r_3=0.5$  (B)  $r_3=4$  (C)  $r_3=6$  (D)  $r_3=8$  (E)  $r_5=0$  (F)  $r_5=0.3$  (G)  $r_5=3$  (H)  $r_5=5$  (I)  $r_5=8$ ，圖中相同的顏色代表相同的值，其餘未改變參數同圖四十A。



圖四十五 二階段實際生物模擬圖。(A) 疊波棘蝶魚 (幼魚) (B) 疊波棘蝶魚 (成魚) (C) 疊波棘蝶魚幼魚模擬圖 (D) 疊波棘蝶魚成魚模擬圖。