

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

探討球型顆粒對奈米複合材料拉伸強度的影響

-利用線彈性破壞力學理論



Investigating Particle Effect on the Tensile Strength of
Nanocomposites – Using Linear Elastic Fracture Mechanics

研究生：林奕安

指導教授：蔡佳霖 博士

中華民國九十八年六月

探討球型顆粒對奈米複合材料拉伸強度的影響

-利用線彈性破壞力學理論

Investigating Particle Effect on the Tensile Strength of
Nanocomposites - Using Linear Elastic Fracture Mechanics

研究生：林奕安

Student：Yi-An Lin

指導教授：蔡佳霖

Advisor：Jia-Lin Tsai

國立交通大學



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Mechanical Engineering

June 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年六月

探討球型顆粒對奈米複合材料拉伸強度的影響

-利用線彈性破壞力學理論

學生：林奕安

指導教授：蔡佳霖

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究致力於探討球型補強材料之顆粒尺寸、體積分率及分散性對含裂紋奈米複合材料拉伸強度的影響。透過有限元素法建立的一套微觀模型，配合線彈性破壞力學理論，可用於探討添加的顆粒對材料中裂紋破壞行為的影響，並從裂紋的應變能釋放率來預測補強材料顆粒對拉伸強度的影響。分析結果顯示，承受拉伸外力的奈米複合材料，其補強材料顆粒軸極區域是基材中裂紋較容易延伸破壞的地方，而在顆粒之側向則有一應力抑制區域可延緩裂紋的成長。隨著顆粒尺寸愈小可提升奈米複合材料的拉伸強度，局部群聚現象的出現則將導致拉伸強度明顯的下降。這些現象皆可由實驗文獻獲得相同的趨勢。而在補強材料體積分率的探討上，分析結果顯示隨著體積分率的增加將使拉伸強度降低，此部分實驗文獻中的現象眾說紛紜，無法確切指出含量與強度間的關係，故有待進一步的實驗來驗證。本研究中為了探討基材與補強材料介面裂紋的問題，整理了破壞力學

書籍中較少提及的介面裂紋破壞力學理論，及其在有限元素上的計算方法。雖然文中僅有少部分的應用，然而基材與補強材料介面的剝離現象是很常見的破壞模式，期望介面破壞理論的整理能對未來這方面的延伸探討有所助益。



Investigating Particle Effect on the Tensile Strength of Nanocomposites – Using Linear Elastic Fracture Mechanics

Student : Yi-An Lin

Advisor : Jia-Lin Tsai

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This research aims to investigate the effect of particle size, volume fraction and dispersion on the tensile strength of particulate nanocomposites with an initial crack. The finite element micromechanical model in conjunction with linear elastic fracture mechanics was used to study the particle effect on the fracture behavior. Calculating the strain energy release rates of the crack could be applied to estimate the tensile strength of particulate nanocomposites. It was shown that the crack in the matrix is more likely to extend at the pole region of the particle in the direction of the applied tension, and there is a stress shielding zone at the equator which can reduce the possibility of crack growth. The tensile strength of particulate composites can be improved with decreasing of particle size, and the local aggregation of particles results in a decrease of tensile strength. These analytical results demonstrate a good agreement with the experimental literature. The result also showed that the tensile strength decreased with increasing of volume fraction. However, various trends of the volume fraction effect on the composite strength had been demonstrated. It seems that there is no consistent conclusion in literature to determine the relation between volume fraction and strength. Hence, to verify the above result, further experimental research is needed. In this study, for the sake of investigating the particle/matrix interface crack problem,

we summarized the fracture mechanics of the bimaterial interface crack and its calculating method by finite element analysis. Although there was less use of the calculating method in this research, we still expect that the summary can be helpful for the further investigation of the particle/matrix debonding.



誌謝

承蒙恩師 蔡佳霖博士兩年來在學業上的諄諄教誨，使此論文得以順利完成，並讓我從中學習到專業的知識、妥善的時間管理及待人處事應有的態度，在此致上由衷的謝意。同時感謝清華大學動機系葉孟考教授、交通大學機械系金大仁教授、蕭國模教授撥冗擔任學生之口試委員，對於學生的論文研究及觀念給予許多寶貴意見，使本研究更加完整，僅此致謝。

此外，感謝學長曾世華、齊揚楷對於課業及研究上給予許多指導，也感謝鄭伊烈、涂潔鳳、張乃仁，學弟謝孟哲、王泰元以及其他固力組的好夥伴們在研究上的相互砥礪，支持我度過了許多研究瓶頸。每週的運動時間是我最快樂的時光，有你們的陪伴讓我的研究所生涯充實了許多。

最後要感謝我的父母，林揚名先生與李秀玉女士，在我求學過程中一直支持我、鼓勵我，讓我可以全心全意的投入在研究中，你們是我最堅強的後盾、也是這篇論文最大的幕後推手。也謝謝天心長久以來的陪伴，總是替我分擔壓力，帶給我信心。兩年的研究所生涯即將畫上句點，感謝一路上所有幫助我的人，願把這份成果與喜悅與你們分享，也祝福你們一切順利。

林奕安 2009.07.21 於交通大學

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	iii
誌謝	v
目錄	vi
表目錄	viii
圖目錄	ix
第一章 緒論	1
1.1 研究背景與文獻回顧	1
1.2 研究目標	6
1.3 研究方法	6
第二章 理論分析	8
2.1 均質材料之破壞力學理論	8
2.2 雙材料介面裂紋之破壞力學理論	13
第三章 以有限元素法模擬含裂紋之奈米複合材料	31
3.1 奈米複合材料的有限元素模型	31
3.2 顆粒尺寸對含裂紋複合材料的影響	33
3.3 體積分率對含裂紋複合材料的影響	37

3.4 鄰近補強材料顆粒之裂紋	39
3.5 局部群聚現象對裂紋破壞行為的影響	40
第四章 結論與未來展望	42
4.1 結論	42
4.2 未來展望	43
參考文獻	44



表 目 錄

表 1	基材、補強材料之材料參數以及不同體積分率下複合材料之有效材料性質	48
表 2	體積分率為 5 vol%、不同顆粒尺寸下之顆粒表面間距 d	48
表 3	補強材料半徑 5 μm 、不同體積分率下顆粒表面之間距 d	48



圖 目 錄

圖 2.1	三種獨立的裂紋破壞變形模式(由左至右)：開裂模式(Open mode)、剪裂模式(In-plane shear mode)、撕裂模式(Tearing mode)	49
圖 2.2	均質材料含有一段長度為 $2a$ 之裂紋承受拉伸外力 σ_0	49
圖 2.3	均質材料含有一段長度為 $2a$ 之裂紋承受剪外力 S	50
圖 2.4	裂紋關閉積分法示意圖(a)裂紋增長一微小量 δa (b)關閉 δa 長度裂紋所需之應力	50
圖 2.5	均質材料中的裂紋，使用有限元素法之四節點元素(4-nodes element)進行分析	51
圖 2.6	均質材料中的裂紋，使用有限元素法之八節點元素(8-nodes element)進行分析	51
圖 2.7	兩種等向性材料介面之半無限裂紋(semi-infinite crack)	52
圖 2.8	雙材料介面裂紋應力場的震盪特徵(oscillating character)示意圖	52
圖 2.9	定義裂紋尖端一小段長度 $\delta = a - x$	53
圖 2.10	兩種材料介面裂紋尖端鄰近區域的位移震盪、重疊現象	53
圖 2.11	承受拉伸與剪切外力之雙材料無限大平板，材料介面之有限長度裂紋示意圖(裂紋長度為 $2a$)	54
圖 3.1	顆粒型複合材料鑲埋模型 A (含長度為 $2a$ 之裂紋)	55
圖 3.2	顆粒型複合材料鑲埋模型 B (含長度為 $2a$ 之裂紋)	55
圖 3.3	顆粒型複合材料鑲埋模型 C (含長度為 $2a$ 之裂紋)	56

圖 3.4	球型顆粒複合材料之有效材料性質 (Effective Properties)	56
圖 3.5	鑲埋模型 A (四分之一模型)	57
圖 3.6	鑲埋模型 A 之有限元素模型 (Δa 為裂紋尖端之元素尺寸)	58
圖 3.7	相同體積分率、不同顆粒尺寸之含裂紋複合材料示意圖	59
圖 3.8	體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 0.1 μm 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率	59
圖 3.9	體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 0.1 μm 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度	60
圖 3.10	體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 0.5 μm 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率	60
圖 3.11	體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 0.5 μm 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度	61
圖 3.12	體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 0.7 μm 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率	61
圖 3.13	體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 0.7 μm 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度	62
圖 3.14	承受 1 MPa 拉伸應力之顆粒型複合材料 RVE 模型	62
圖 3.15	體積分率為 5 vol% 之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_1 線上之 σ_y 應力分佈曲線	63
圖 3.16	體積分率為 5 vol% 之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_2 線上之 σ_y 應力分佈曲線	63

圖 3.17	體積分率為 5 vol%之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_3 線上之 σ_y 應力分佈曲線	64
圖 3.18	相同顆粒尺寸、不同體積分率之含裂紋複合材料示意圖	64
圖 3.19	顆粒半徑為 5 μm 、半裂紋長度 a 為 0.1 μm 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率	65
圖 3.20	顆粒半徑為 5 μm 、半裂紋長度 a 為 0.1 μm 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度	65
圖 3.21	不同體積分率之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_1 線上之 σ_y 應力分佈曲線	66
圖 3.22	不同體積分率之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_2 線上之 σ_y 應力分佈曲線	66
圖 3.23	不同體積分率之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_3 線上之 σ_y 應力分佈曲線	67
圖 3.24	顆粒半徑為 5 μm 、半裂紋長度 a 為 0.5 μm 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率	67
圖 3.25	顆粒半徑為 5 μm 、半裂紋長度 a 為 0.5 μm 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度.....	68
圖 3.26	顆粒半徑為 5 μm 、半裂紋長度 a 為 0.7 μm 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率	68
圖 3.27	顆粒半徑為 5 μm 、半裂紋長度 a 為 0.7 μm 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度	69
圖 3.28	鄰近補強材料顆粒之裂紋示意圖(a)基材中鄰近補強材料顆粒之裂紋 (b)雙材料介面層之裂紋	69

圖 3.29	補強材料與基材介面之裂紋有限元素模型	70
圖 3.30	裂紋位置對應變能釋放率的影響	70
圖 3.31	裂紋位置對含裂紋複合材料之標準化拉伸強度的影響	71
圖 3.32	發生局部群聚現象之複合材料中的裂紋示意圖	71
圖 3.33	裂紋在發生局部群聚現象之複合材料中的鑲埋模型 (四分之一模型)	72
圖 3.34	局部群聚現象對複合材料中的裂紋應變能釋放率的影響	72
圖 3.35	局部群聚現象對含裂紋複合材料之標準化拉伸強度的影響	73



第一章 緒論

1.1 研究背景與文獻回顧

複合材料(Composites)高強度、質量輕、耐高溫、耐腐蝕等特性，近年來已備受重視，並廣泛運用在眾多領域上。許多補強材料(Reinforcement)與高分子基材(Polymer matrix)的組合已陸續被研發應用。傳統上補強材料以纖維為主，例如碳纖維及玻璃纖維。隨著奈米科技的發展，藉由分散技術將奈米尺寸的補強材料散佈於基材中，此類材料稱為奈米複合材料(Nanocomposites)。常見的奈米補強材料有球狀顆粒(Spherical particle)、奈米纖維(Nanofiber)、板狀(Platelet)以及管狀(Nanotube)等，藉由奈米補強材料的添加，可使基材在物理性質及化學性質上有明顯的增益，此類材料已成為學術界、工業界熱門的研發方向。

顆粒型奈米複合材料(Particulate nanocomposites)為一常見的形式，在樹脂基材中添加補強材料顆粒可以有效的提升整體材料的機械性質，隨著顆粒含量的增加，材料的楊氏模數 E (Young's Modulus)有上升的現象。Wang 等人[1]在環氧樹脂(Epoxy)中加入直徑為 $4\ \mu\text{m}$ 的二氧化矽(Silica, SiO_2)顆粒，在不同溫度下進行拉伸試驗，發現其楊氏模數皆隨著二氧化矽含量愈高而有所增益，僅在升溫至 $115\ ^\circ\text{C}$ 時略有不穩定之現象。Cho 等人[2]則在

乙烯基酯(Vinyl ester resin)中添加微米級玻璃珠(6-500 μm)、微米級與奈米級三氧化二鋁(Aluminum dioxide, Al_2O_3)球型顆粒(15 nm - 70 μm)。在拉伸試驗中發現增加顆粒含量能提升複合材料的 E 值。當顆粒尺寸在微米等級時，複合材料的 E 值不會受顆粒大小影響，然而當尺寸降至奈米(nano)等級時，縮小顆粒尺寸則對複合材料 E 值有增強的效果。而顆粒的添加對於拉伸強度(Tensile strength)之提升則僅發生在微米等級時，隨著顆粒愈小複合材料的拉伸強度愈高。而當補強材料顆粒降至奈米尺寸時則可能因顆粒分散性較差而看不出強度明顯之變化。此縮小顆粒尺寸而使拉伸強度有所提升的現象可在許多文獻中找到相同的趨勢[3-7]。

Landon 等人[3]在熱固性聚氨酯(Polyurethane thermosetting resin)基材中添加不同尺寸之實心/空心玻璃珠(21-216 μm)，發現該複合材料隨著顆粒愈大而降低其拉伸強度，且補強材料的體積分率愈大也會導致複合材料拉伸強度的下降。Leidner 與 Woodhams[4]同樣也在玻璃珠(44-354 μm)/聚酯(Polyester)樹脂複合材料中發現相同的現象，增加顆粒添加量與加大顆粒尺寸都會使拉伸強度下降。而 Nakamura 等人[5]在對不同顆粒尺寸(2-42 μm)之二氧化矽/環氧樹脂複合材料進行彎曲(Flexural)、拉伸試驗時，發現其彎曲模數(Flexural modulus)隨著顆粒含量增加而上升，且不受顆粒尺寸之影響。而其彎曲強度及拉伸強度均隨顆粒尺寸愈大而降低。Jiang 等人[6]在聚丙烯腈-丁二烯-苯乙烯樹脂(Acrylonitrile-Butadiene-Styrene, ABS)中添加微

米級(5 μm)與奈米級(40 nm)之碳酸鈣(Calcium carbonate, CaCO_3)顆粒，在拉伸試驗中發現拉伸強度隨著補強材料含量的增加而降低，奈米複合材料的強度則均較微米級複合材料來得高。衝擊強度(Impact strength)方面，微米級碳酸鈣的添加使材料衝擊強度降低，奈米級碳酸鈣在低添加量時不但能維持基材之衝擊強度甚至還能使其有所提升。在拉伸強度與衝擊強度上，添加奈米顆粒的增益效果可能是由於奈米級顆粒與基材間擁有較大的接觸面積，使得整體補強材料與基材間的結合強度(Bonding strength)有所提升，另一方面，縮小顆粒尺寸使得顆粒之間距相對縮小，有助於剪切降伏(Shear yielding)增韌機制(Toughening mechanism)的發生，也可能是導致材料強度提升的原因。透過上述文獻我們可以歸納出顆粒型複合材料的拉伸強度會隨著縮小顆粒尺寸而有明顯的增加。在Fu 等人[7]的文獻整理中，針對顆粒尺寸與強度之關係亦有相同之結論。

在補強材料的含量與拉伸強度間的關係上，文獻中的現象則略有分歧。於前述文獻[3,4,6]中皆可發現隨著顆粒含量愈高而降低其拉伸強度之趨勢。然而 Chen 等人[8]在奈米級二氧化矽(Nanosilica)/聚氨酯(Polyurethane)複合材料中發現在拉伸強度上，無論是在基材中反應生成二氧化矽顆粒或是直接在基材中混入顆粒，兩種方法製成之複合材料皆有隨著補強材料含量增加而使拉伸強度上升之趨勢。與前面文獻[3,4,6]的現象恰好相反。Fu 等人[7]在文獻整理中指出，補強材料含量增加的同時經常伴隨著顆粒尺寸

的上升，含量的增加也使得補強材料的群聚現象(Aggregation)較容易發生，使得單純含量對強度的影響較不易觀察。Zhu 等人[9]則在溶膠-凝膠法(Sol-gel)製備的二氧化矽/聚醯亞胺(Polyimide)複合材料中發現，顆粒尺寸會隨著含量而改變，在 5 wt%時為 100-200 nm，在 10 wt%時為 200-450 nm，而在 20 wt%時則為 1-2 μm 。其拉伸強度在 10 wt%以內時強度隨著含量增加而上升，而當含量超過 10 wt%後強度即開始下降，因此無法從結果中清楚地觀察含量與強度間的關聯。而補強材料與基材的附著力(Adhesion)亦會影響含量與強度間的關係[7]。因此在補強材料含量與整體材料強度之間較難從實驗結果中歸納出明確之關連性。

補強材料的分散性亦與複合材料的機械性質有密切的關聯。Fekete 等人[10]在聚丙烯(Polypropylene)中添加碳酸鈣顆粒(0.08-12 μm)，發現隨著顆粒愈小、顆粒之比表面積(Specific surface area)愈大，將使複合材料的拉伸強度逐漸上升。然而當顆粒尺寸小於某臨界值時將發生補強材料的群聚現象(Aggregation)，群聚現象愈嚴重時，會導致材料強度及其耐衝阻力(Impact resistance)逐漸降低。該尺寸之臨界值則會受材料性質與製程的分散效果所影響。良好的製程分散性可使顆粒在較小的尺寸時才會發生群聚現象。透過光學顯微鏡及掃描式電子顯微鏡(Scanning electron micrograph, SEM)的觀察，發現在分散性較佳的大顆粒複合材料中，補強材料顆粒的剝離現象(Debonding)為其主要之破壞機制。而隨著顆粒愈小，群聚現象愈顯著，樹

脂基材無法充分滲透進顆粒團中，裂紋缺陷一開始就出現在群聚的顆粒團中，並隨著外力提高而延伸破壞。介於中間之顆粒尺寸則同時含有上述兩種破壞模式。由此可知群聚現象將促進製程中裂紋缺陷的生成並導致拉伸強度下降。在 Cho 等人[2]的拉伸試驗結果中也有因奈米顆粒較差的分散性而導致材料強度下降的現象。該文獻亦從有限元素分析(Finite element analysis)的角度探討顆粒尺寸對剝離現象的影響，透過在顆粒與基材介面建立之預裂紋(initial crack)，利用改良式裂紋關閉積分法(Modified crack closure integral method)[11]，求得承受相同外力下，顆粒與基材介面之裂紋的應變能釋放率(strain energy release rate)，其結果顯示顆粒愈小該應變能釋放率愈低，表示顆粒尺寸愈小時需要相對更高的外力才能使顆粒與樹脂基材剝離。此類透過破壞力學理論(Fracture Mechanics)探討複合材料強度的方法亦在其他文獻[12]中被運用。

Zhao 與 Hoa[12]發現板狀奈米黏土(clay)複合材料在承受外力時，補強材料側向有一段應力抑制區域(stress shield zone)可以降低局部的應力。補強材料的剛性、長寬比(aspect ratio)以及兩顆補強材料的間距會影響該應力抑制區域的強度與範圍。若將補強材料放在裂紋尖端附近，可改變裂紋尖端的應力場，使局部應力降低的情況下產生補強的效果以降低應力強度因子(stress intensity factor)，阻止裂紋向前延伸。基材中的裂紋受到補強材料的抑制後較不易延伸破壞，進而可以提升整體材料的強度。此類以破壞力學

理論探討奈米複合材料性質的方法所建立之分析模型，可作為解釋實驗現象、觀察試片破壞機制的依據。亦可提供做為選擇補強材料的參考。而在奈米複合材料微觀模型的分析上，為了節省有限元素模擬的運算量，Sun 等人[13]所使用的方法是僅在關注的顆粒周遭鄰近區域建立實際的基材與補強材料，遠處則以有效材料性質取代，並取足夠的模型尺寸以消去邊界的影響。此種方法有助於減少不必要的分析時間，可應用於含裂紋奈米複材的破壞行為探討中。

1.2 研究目標

為了提供一個選擇補強材料的依據，許多針對不同補強材料的模擬與分析陸續被提出來討論。本文中我們將針對最常見的球型顆粒補強材料，探討其顆粒尺寸、體積分率、分散性等對含裂紋奈米複合材料拉伸強度的影響，藉由分析我們可以試著去解釋文獻中出現的實驗現象，以瞭解補強材料顆粒對於基材中裂紋破壞行為的影響。分析的結果也可做為選擇補強材料時的參考依據。

1.3 研究方法

本研究除了探討基材中裂紋的破壞行為(均質材料中的破壞)，更要進一步探討裂紋位於補強材料與基材介面間的破壞行為，因此我們採用 Rybicki

與 Kanninen[11]提出的改良式裂紋關閉積分法(Modified crack closure integral method)，配合 Sun 與 Qian[14]提出的能量法(Energy method)、位移比例法(Displacement ratio method)，透過有限元素軟體 ANSYS[15]計算裂紋的應變能釋放率以及雙材料介面裂紋之破壞模式結合度(Mode mixity)。將線彈性破壞力學理論應用到球型顆粒奈米複合材料中，於材料中建立一段預裂紋，以探討鄰近的補強材料顆粒其尺寸、體積分率對裂紋破壞行為的影響，並由破壞力學的角度探討補強材料顆粒對於拉伸強度的影響。局部群聚(Local Aggregation)現象以及奈米複材中裂紋較易延伸破壞的位置也將在本文中提出討論。



第二章 理論分析

2.1 均質材料之破壞力學理論

當裂紋承受負荷時，裂紋的變形如圖 2.1 所示，可分為三種獨立的變形模式，第一種變形模式(Mode I)稱為開裂模式(Open mode)，材料承受拉伸外力時，裂紋上下表面對稱於裂紋前進方向分開，第二種變形模式(Mode II)稱為剪裂模式(In-plane shear mode)，裂紋上下表面在同一平面上做相反方向之剪變形，第三種變形模式(Mode III)稱為撕裂模式(Tearing mode)，裂紋上下表面產生出平面之相對位移(縱剪變形)。

在線彈性破壞力學中，Sanford[16]、Anderson[17]在書中整理出含有一段長度 $2a$ 裂紋之均質材料在承受拉伸外力 σ_0 ，如圖 2.2 時，裂紋尖端鄰近區域的應力場解析解為

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0 \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.1.3)$$

其中 r 、 θ 為一以裂紋尖端為原點之極座標系統。該應力場因為都有 $r^{-1/2}$ 項的關係，導致在裂紋尖端鄰近區域($r \rightarrow 0$)時，應力會出現趨近於無窮大的一個

奇異特徵(singularity characteristic)，為了量化這個奇異應力場的強度(intensity)，定義出應力強度因子 K (Stress intensity factor)

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(\theta=0) = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.1.4)$$

並將(2.1.1-2.1.3)式改寫為

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.1.5)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.1.6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.1.7)$$

其中 K_I 為第一種破壞模式的應力強度因子。由裂紋尺寸與外力條件組成的應力強度因子可表現出應力集中的強度，意即該應力場絕對值的大小是由 K 值決定，該參數可作為判斷裂紋是否延伸成長之依據。而裂紋尖端鄰近區域的位移場解為

$$u_x = \frac{K_I}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left[(2k-1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.8)$$

$$u_y = \frac{K_I}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left[(2k+1) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.9)$$

其中 μ 為剪力模數(Shear modulus)，而 k 為由浦松比 ν (Poisson's ratio) 組成之常數

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{for plane strain} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{for plane stress} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

當含裂紋均質材料受到剪外力 S ，如圖 2.3 時，第二種破壞模式應力強度因子 K_{II} 則定義為

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(\theta=0) = S\sqrt{\pi a} \quad (2.1.11)$$

裂紋尖端鄰近區域的應力場

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.1.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.14)$$

裂紋尖端鄰近區域的位移場解為

$$u_x = \frac{K_{II}}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left[(2k + 3) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.15)$$

$$u_y = -\frac{K_{II}}{8\mu\pi} \sqrt{2\pi r} \left[(2k - 3) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.1.16)$$

另一個常被用來描述裂紋狀態的參數，應變能釋放率 G (Strain energy release rate) 定義為裂紋增長一小面積下，能量的變化量

$$G = -\frac{dU}{dA} \quad (2.1.17)$$

其中 U 為系統應變能， A 為裂紋面積，負號用來將 G 調整為正值。該參數

用來描述當裂紋向前伸長一小段距離時，系統勢能(Potential energy)對面積的變化率。利用一段無窮小的裂紋虛位移伸長量 δa ，Irwin[18]提出了裂紋關閉積分法(Crack-closure integral)，概念是當裂紋承受外力而使裂紋長度增長了一微小量 δa ，所釋放的應變能與施一應力關閉該 δa 長度裂紋，使裂紋回到初始長度所需的能量相等。如圖 2.4 所示，利用裂紋尖端為原點的極座標系統，應變能釋放率 G 在不同破壞模式下

$$G_I = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta a} \int_0^{\delta a} \sigma_{yy}(\delta a - r, 0) \bar{u}_y(r, \pi) dr \quad (2.1.19)$$

$$G_{II} = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta a} \int_0^{\delta a} \tau_{xy}(\delta a - r, 0) \bar{u}_x(r, \pi) dr \quad (2.1.20)$$

其中 σ_{yy} 與 τ_{xy} 為關閉裂紋之應力， \bar{u}_x 與 \bar{u}_y 則是裂紋表面上距離裂紋尖端 r 位置，上下表面之相對位移。

$$\bar{u}_y(r, \pi) = u_y(r, \pi) - u_y(r, -\pi) \quad (2.1.21)$$

$$\bar{u}_x(r, \pi) = u_x(r, \pi) - u_x(r, -\pi) \quad (2.1.22)$$

將(2.1.6)與(2.1.9)代入(2.1.19)可求出 K_I 與 G_I 的關係

$$G_I = \frac{k+1}{8\mu} K_I^2 \quad (2.1.23)$$

G 值同樣也可做為判斷裂紋是否延伸破裂之依據，同理

$$G_{II} = \frac{k+1}{8\mu} K_{II}^2 \quad (2.1.24)$$

利用有限元素軟體我們可以輕易的求得裂紋尖端鄰近區域的節點應力 (nodal stress) 與節點位移 (nodal displacement)，因此應力強度因子可由節點應力求出

$$K_I = \sigma_{y(\theta=0)} \sqrt{2\pi r} \quad (2.1.25)$$

$$K_{II} = \tau_{xy(\theta=0)} \sqrt{2\pi r} \quad (2.1.26)$$

而應變能釋放率則可透過 Rybicki 與 Kanninen[11]提出的改良式裂紋關閉積分法(modified crack closure integral method)，利用半裂紋長度為 a 時，裂紋尖端之節點力(nodal force)，與半裂紋增長為 $a + \delta a$ 時，距裂紋尖端 δa 處，裂紋上下表面之節點相對位移，求得關閉 δa 長度裂紋所需的能量。而在 Jih 與 Sun[19]中更進一步提出，在裂紋虛位移增長(virtual crack extension)前後，近裂紋尖端之節點位移幾乎相同，故可將原本需要兩個有限元素模型計算之改良式裂紋關閉積分法簡化為一個有限元素模型即可計算，如圖 2.5 利用節點力與節點位移求得四節點元素(4-nodes element)之總應變能釋放率 G_T (Total strain energy release rate)

$$G_T = G_I + G_{II} \quad (2.1.27)$$

其中

$$G_I = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta a} f_y^b (u_y^a - u_y^{a'}) \quad (2.1.28)$$

$$G_{II} = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta a} f_x^b (u_x^a - u_x^{a'}) \quad (2.1.29)$$

f 為節點力(nodal force)，u 為節點位移(nodal displacement)， δa 為假設之虛位移，即裂紋尖端的元素寬度，a、b 為節點編號，a、a' 分別表示裂紋之上下表面。在 Ikeda 與 Sun[20]文中亦提及八節點元素(8-nodes element)之應變能釋放率計算方法，如圖 2.6

$$G_I = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta a} [f_y^{p3} (u_y^{p1} - u_y^{p1'}) + f_y^{p4} (u_y^{p2} - u_y^{p2'})] \quad (2.1.30)$$

$$G_{II} = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta a} [f_x^{p3} (u_x^{p1} - u_x^{p1'}) + f_x^{p4} (u_x^{p2} - u_x^{p2'})] \quad (2.1.31)$$

式中之 p1~p4 為節點編號，p1、p1' 同樣表示裂紋之上下表面。透過以上公式，我們可以很容易地利用有限元素軟體計算均質材料上裂紋的應力強度因子與應變能釋放率。

2.2 雙材料介面(bimaterial interface)裂紋之破壞力學理論

當裂紋出現在兩種材料的介面時，與均質材料的破壞不同，在承受單一模式的外力狀態時，雙材料介面層的裂紋會同時表現出開裂模式(Opening Mode)與剪裂模式(Sliding Mode)的破壞特性。而此類兩種材料介面的破壞問題，最早是由 Williams[21]提出，對於一個出現在兩種等向性材料介面的半無限裂紋(semi-infinite crack)問題，如圖 2.7。Williams 假設一個滿足雙諧方

程式(biharmonic equation)的 Airy Stress function 。

$$\nabla^4 \phi_j(r, \theta) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \quad (2.2.2)$$

透過分離變數法假設：

$$\phi_j = r^{\lambda+1} F_j(\theta) \quad (2.2.3)$$

代入(2.2.1)式得到。

$$F_j(\theta) = a_j \sin(\lambda + 1)\theta + b_j \cos(\lambda + 1)\theta + c_j \sin(\lambda - 1)\theta + d_j \cos(\lambda - 1)\theta \quad (2.2.4)$$

進而透過 Airy Stress function 求出應力場的通解。

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} = r^{\lambda-1} [F_j''(\theta) + (\lambda + 1)F_j(\theta)] \quad (2.2.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} = r^{\lambda-1} \lambda(\lambda + 1)F_j(\theta) \quad (2.2.6)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} = -\lambda r^{\lambda-1} F_j'(\theta) \quad (2.2.7)$$

將應力應變關係式積分可求得位移場的解。

$$u_r = \frac{1}{2\mu_j} r^\lambda \{ -(\lambda + 1)F_j(\theta) + (1 + k_j)[c_j \sin(\lambda - 1)\theta + d_j \cos(\lambda - 1)\theta] \} \quad (2.2.8)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\mu_j} r^\lambda \{ -F_j'(\theta) - (1 + k_j)[c_j \cos(\lambda - 1)\theta - d_j \sin(\lambda - 1)\theta] \} \quad (2.2.9)$$

其中

$$k_j = \begin{cases} 3 - 4\nu_j & \text{for plane strain} \\ (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j) & \text{for plane stress} \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$j=1,2$ 分別表示上層(材料 1)與下層材料(材料 2)，由於裂紋表面($\theta=\pm\pi$)應力為零，可列出以下邊界條件：

$$\sigma_\theta(\pi)_1 = \tau_{r\theta}(\pi)_1 = \sigma_\theta(-\pi)_2 = \tau_{r\theta}(-\pi)_2 = 0 \quad (2.2.11)$$

而在裂紋前進方向上($\theta=0$)，上下材料應力與位移之連續性可列出以下關係式：

$$\sigma_\theta(\theta = 0)_1 = \sigma_\theta(\theta = 0)_2 \quad (2.2.12)$$

$$\tau_{r\theta}(\theta = 0)_1 = \tau_{r\theta}(\theta = 0)_2 \quad (2.2.13)$$

$$u_r(\theta = 0)_1 = u_r(\theta = 0)_2 \quad (2.2.14)$$

$$u_\theta(\theta = 0)_1 = u_\theta(\theta = 0)_2 \quad (2.2.15)$$

將應力與位移代入邊界條件(2.2.11-2.2.15)中可整理出：

$$a_1 \sin(\lambda + 1)\pi + b_1 \cos(\lambda + 1)\pi + c_1 \sin(\lambda - 1)\pi + d_1 \cos(\lambda - 1)\pi = 0 \quad (2.2.16)$$

$$-a_2 \sin(\lambda + 1)\pi + b_2 \cos(\lambda + 1)\pi - c_2 \sin(\lambda - 1)\pi + d_2 \cos(\lambda - 1)\pi = 0 \quad (2.2.17)$$

$$a_1(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\pi - b_1(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\pi + c_1(\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\pi - d_1(\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\pi = 0 \quad (2.2.18)$$

$$a_2(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\pi + b_2(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\pi + c_2(\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\pi + d_2(\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\pi = 0 \quad (2.2.19)$$

$$b_1 + d_1 = b_2 + d_2 \quad (2.2.20)$$

$$a_1(\lambda + 1) + c_1(\lambda - 1) = a_2(\lambda + 1) + c_2(\lambda - 1) \quad (2.2.21)$$

$$(1 + k_1)c_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2)c_2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)[(\lambda + 1)a_2 + (\lambda - 1)b_2] \quad (2.2.22)$$

$$(1 + k_1)d_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2)d_2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)(\lambda + 1)(b_2 + d_2) \quad (2.2.23)$$

為了使上述邊界條件中的 a_j, b_j, c_j, d_j 有非零解，故必須使行列式為零。

$$\cot^2 \lambda \pi + \left[\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) - (1 + k_1) - 2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)}{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) + (1 + k_1)} \right]^2 = 0 \quad (2.2.24)$$

觀察(2.2.24)式發現其為兩個平方相加為零的等式，表示其中必包含有複數項才能使等式成立。假設

$$\lambda = \lambda_R + i\lambda_I \quad (2.2.25)$$

代入(2.2.24)式中，可拆解出實部與虛部之解。

$$\frac{[\tan^2 \lambda_R \pi + 1] \tanh \lambda_I \pi}{\tan^2 \lambda_R \pi + \tanh^2 \lambda_I \pi} = \pm \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) - (1 + k_1) - 2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)}{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) + (1 + k_1)} \quad (2.2.26)$$

$$\frac{\tan \lambda_R \pi (1 - \tanh^2 \lambda_I \pi)}{\tan^2 \lambda_R \pi + \tanh^2 \lambda_I \pi} = 0 \quad (2.2.27)$$

為使(2.2.27)式成立，其中 λ_R 可解出兩組可能解，分別使 $\tan \lambda_R \pi$ 等於零或無

窮大。當 $\tan \lambda_R \pi = 0$ 時

$$\lambda_R = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.28)$$

$$\lambda_I = \pm \frac{1}{\pi} \coth^{-1} \left[\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) - (1 + k_1) - 2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)}{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) + (1 + k_1)} \right] \quad (2.2.29)$$

若 $\lambda_R = 0$ ，則 $\lambda = i\lambda_I$ 。由(2.2.8)、(2.2.9)式可發現位移正比於 r^λ ，

$$u \sim r^\lambda \sim r^{\pm i\lambda_I} \sim \cos(\lambda_I \ln r) + i \sin(\lambda_I \ln r) \quad (2.2.30)$$

觀察(2.2.30)式可發現，該組解的位移場在靠近裂紋尖端時($r \rightarrow 0$)並沒有出現位移趨近於零的收斂特徵，與實際的物理現象不符，因此暫時將這組解排除。

而當 $\tan \lambda_R \pi = \infty$ 時

$$\lambda_R = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (2.2.31)$$

$$\lambda_I = \pm \frac{1}{\pi} \tanh^{-1} \left[\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) - (1 + k_1) - 2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)}{\frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + k_2) + (1 + k_1)} \right] = \pm \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2 + \mu_1 k_2} \quad (2.2.32)$$

定義

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{k_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) / \left(\frac{k_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right] \quad (2.2.33)$$

若 $\lambda_R = \frac{1}{2}$ ，則 $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\varepsilon$ 。

$$u \sim r^\lambda \sim r^{\frac{1}{2} \pm i\varepsilon} \sim r^{\frac{1}{2}} [\cos(\varepsilon \ln r) + i \sin(\varepsilon \ln r)] \quad (2.2.34)$$

在(2.2.34)式中，當靠近裂紋尖端時有出現位移趨近於零的特徵。而由(2.2.5-2.2.7)中可發現應力正比於 $r^{\lambda-1}$ 。

$$\sigma \sim r^{\lambda-1} \sim r^{-\frac{1}{2}} [\cos(\varepsilon \ln r) + i \sin(\varepsilon \ln r)] \quad (2.2.35)$$

由(2.2.35)式觀察可發現，該應力場的 $\cos(\varepsilon \ln r)$ 項與 $\sin(\varepsilon \ln r)$ 項隨著 r 而出現正負號反覆變動的現象，如圖 2.8 所示，稱之為應力的震盪特徵 (oscillating character)。

England[22]針對承受均勻拉伸外力的雙材料介面層有限長度裂紋(finite crack)問題，解出裂紋上下表面 y 方向的位移場 u_{1y} 、 u_{2y} ，其上下表面的間距可由上下表面 y 方向位移的差值 $u_{1y} - u_{2y}$ 求得。

$$u_{1y} - u_{2y} = \frac{T\sqrt{\alpha}}{2(1+\alpha)} \left\{ \frac{1+k_1}{\mu_2} + \frac{1+k_2}{\mu_2} \right\} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \times \cos \left\{ \varepsilon \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right\} \quad (2.2.36)$$

其中 T 為均勻分佈的拉伸外力， α 由材料參數組成。

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2 + \mu_1 k_2} = \frac{E_1(1+\nu_2) + E_2(3-\nu_1)}{E_1(3-\nu_2) + E_2(1+\nu_1)} \quad (2.2.37)$$

當 $\nu_1 = 0$, $E_2/E_1 = \infty$ 時， $\alpha = 3$ ；當 $\nu_2 = 0$, $E_1/E_2 = \infty$ 時， $\alpha = \frac{1}{3}$ 。由此可定出 α

的範圍。

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 3 \quad (2.2.38)$$

在正常的情況下 $u_{1y} - u_{2y}$ 應該大於等於零，然而在(2.2.36)式中 England 發現該裂紋尖端周遭的位移場，會因為 $\cos\left\{\varepsilon \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right\}$ 項的關係，在靠近裂紋尖端時($x \rightarrow a$)出現正負號反覆變動的現象，而在物理意義上，裂紋表面這樣皺摺(wrinkle)、重疊(overlap)的現象是不可能的。為了探討該重疊現象出現的範圍，必須先找出上下表面接觸的位置。為使 $\cos\left\{\varepsilon \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right\} = 0$ ，

$$\varepsilon \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \quad (2.2.39)$$

由於 $\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \alpha$ 故可將(2.2.39)式改寫為

$$\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| = \frac{n\pi^2}{\ln \alpha} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots) \quad (2.2.40)$$

如圖 2.9 定義 δ 為距離裂紋尖端的一小段長度

$$\delta = a - x \geq 0 \quad (2.2.41)$$

可將(2.2.40)式改寫為

$$\left|\frac{x+a}{x-a}\right| = \left|\frac{2a-\delta}{-\delta}\right| = \left|\frac{2a-\delta}{\delta}\right| = \frac{2a-\delta}{\delta} = e^{\frac{n\pi^2}{\ln \alpha}} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots) \quad (2.2.42)$$

當 $\alpha = 3$ 時，可求出上下表面接觸的位置，其對裂紋長度 $2a$ 的比值為

$\frac{\delta}{2a} = 1.254 \times 10^{-4}, 1.9737 \times 10^{-12}, 3.1056 \times 10^{-20}, 4.8865 \times 10^{-28}$ ，如圖 2.10 所示，而當 $\alpha = \frac{1}{3}$ 時僅表示材料上下交換，仍會解出相同的結果。當 $\frac{\delta}{2a}$ 界於 $1.9737 \times 10^{-12} \leq \frac{\delta}{2a} \leq 1.254 \times 10^{-4}$ 與 $4.8865 \times 10^{-28} \leq \frac{\delta}{2a} \leq 3.1056 \times 10^{-20}$ 時， $u_{1y} - u_{2y} \leq 0$ ，如圖 2.10 上下表面互相重疊。而 $\frac{\delta}{2a} = 1.254 \times 10^{-4}$ 是上下表面第一次接觸的位置。由此發現鄰近裂紋尖端附近會有位移的震盪現象出現，但範圍很小。

Sih 與 Rice[23]為了探討承受拉伸外力的雙材料介面層半無限裂紋問題，延續 Williams[21]提出的 Airy stress function

$$U_1 = 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n+1} [a_1^{(n)} \sin(\lambda_n + 1)\theta + b_1^{(n)} \cos(\lambda_n + 1)\theta + c_1^{(n)} \sin(\lambda_n - 1)\theta + d_1^{(n)} \cos(\lambda_n - 1)\theta] \quad (2.2.43)$$

$$\lambda_n = (n - \frac{1}{2}) + i\varepsilon \quad (2.2.44)$$

其中

$$a_1^{(n)} = i \left(\frac{1 + \lambda_n e^{-2\pi\varepsilon}}{\lambda_n + 1} \right) d_2^{(n)} \quad (2.2.45)$$

$$b_1^{(n)} = \left(\frac{1 - \lambda_n e^{-2\pi\varepsilon}}{\lambda_n + 1} \right) d_2^{(n)} \quad (2.2.46)$$

$$c_1^{(n)} = -ie^{-2\pi\varepsilon} d_2^{(n)} \quad (2.2.47)$$

$$d_1^{(n)} = e^{-2\pi\varepsilon} d_2^{(n)} \quad (2.2.48)$$

由於 U_1 該式滿足雙諧方程式(biharmonic equation)，因此可透過[24]中的方法，利用複數變數 $z = x + iy$ 將 U_1 整理成由兩個應力方程式 $\phi_1(z)$ 與 $\chi_1(z)$ 組成的型式

$$U_1 = \text{Re}[\bar{z}\phi_1(z) + \chi_1(z)] \quad (2.2.49)$$

$$\phi_1(z) = 2z^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} [(n + \frac{1}{2}) - i\varepsilon] \bar{B}^{(n)} z^n \quad (2.2.50)$$

$$\chi_1(z) = 2e^{2\pi\varepsilon} z^{\frac{1}{2}+i\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} z^n - 2z^{\frac{1}{2}-i\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} [(n - \frac{1}{2}) - i\varepsilon] \bar{B}^{(n)} z^n \quad (2.2.51)$$

其中

$$(\lambda_n + 1)B^{(n)} = e^{-2\pi\varepsilon} d_2^{(n)} \quad (2.2.52)$$

而 $\bar{B}^{(n)}$ 為 $B^{(n)}$ 之共軛複數，透過 Kolosov-Muskhelishvili[24]方程式

$$(\sigma_r)_1 + (\sigma_\theta)_1 = 4\text{Re}[\phi_1'(z)] \quad (2.2.53)$$

$$(\sigma_\theta)_1 - (\sigma_r)_1 + 2i(\tau_{r\theta})_1 = 2e^{2i\theta} [\bar{z}\phi_1''(z) + \chi_1''(z)] \quad (2.2.54)$$

將(2.2.50-51)代入(2.2.53-54)並假設 $n=1$ ，可整理出應力場解析解(因為當

$n \geq 2$ 時， $\phi_1'(z) = 0$)

$$(\sigma_r)_1 = \frac{K_{RI}}{2(2r)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{aligned} &e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} [3 \cos(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \log r) + 2\varepsilon \sin \theta \cos(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r)] \\ &- \sin \theta \sin(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r) - e^{\varepsilon(\pi-\theta)} \cos(\frac{3\theta}{2} - \varepsilon \log r) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.55)$$

$$- \frac{K_{RII}}{2(2r)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{aligned} &e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} [3 \sin(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \log r) - 2\varepsilon \sin \theta \sin(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r)] \\ &- \sin \theta \cos(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r) - e^{\varepsilon(\pi-\theta)} \sin(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon \log r) \end{aligned} \right\} + \dots$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_\theta)_1 = & \frac{K_{RI}}{2(2r)^{1/2}} \left\{ e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) - 2\varepsilon \sin \theta \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right] \right. \\
& \left. + \sin \theta \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right\} + e^{\varepsilon(\pi-\theta)} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) \Big\} \\
& - \frac{K_{RII}}{2(2r)^{1/2}} \left\{ e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) + 2\varepsilon \sin \theta \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right] \right. \\
& \left. + \sin \theta \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right\} + e^{\varepsilon(\pi-\theta)} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) \Big\} + \dots
\end{aligned} \quad (2.2.56)$$

$$\begin{aligned}
(\tau_{r\theta})_1 = & \frac{K_{RI}}{2(2r)^{1/2}} \left\{ e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) - 2\varepsilon \sin \theta \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right] \right. \\
& \left. - \sin \theta \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right\} + e^{\varepsilon(\pi-\theta)} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) \Big\} \\
& - \frac{K_{RII}}{2(2r)^{1/2}} \left\{ e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \left[-\cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) - 2\varepsilon \sin \theta \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right] \right. \\
& \left. + \sin \theta \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \log r\right) \right\} - e^{\varepsilon(\pi-\theta)} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon \log r\right) \Big\} + \dots
\end{aligned} \quad (2.2.57)$$

其中應力強度因子 K_{RI} 與 K_{RII} 可在推導過程中整理提出。定義一複數關係式

$K_R = K_{RI} - iK_{RII}$ 則 K_R 為

$$K_R = K_{RI} - iK_{RII} = 4\sqrt{2}e^{\varepsilon\pi} \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right) \left(\frac{3}{2} - i\varepsilon\right) \bar{B}^{(1)} \quad (2.2.58)$$

定義 $\Phi_1(z) = \phi_1'(z)$ 得到

$$\Phi_1(z) = 2z^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right) \left(\frac{3}{2} - i\varepsilon\right) \bar{B}^{(1)} \quad (2.2.59)$$

觀察(2.2.58-59)可找出 K_R 與複勢 $\Phi_1(z)$ (complex potential)之關係式

$$K_{RI} - iK_{RII} = 2\sqrt{2}e^{\varepsilon\pi} \lim_{z \rightarrow 0} z^{\frac{1}{2}+i\varepsilon} \Phi_1(z) \quad (2.2.60)$$

其後 Rice 與 Sih[25]從文獻[23]中的半無限裂紋問題作延伸，解一個承受拉伸與剪切外力之雙材料無限大平板(infinite plate)、材料介面上一段有限長度為 $2a$ 之裂紋問題，如圖 2.11 所示，將[23]中使用的座標系統由裂紋尖端

(X^*, Y^*) 平移至有限裂紋的中心 (X, Y) ，並重新定義有限長度裂紋問題的複勢

$$\Phi_1(z) = \phi_1'(z) = g(z)F(z) + A \quad (2.2.61)$$

$$\Psi_1(z) = \chi_j''(z) = e^{2\pi\epsilon} \bar{g}(z) \bar{F}(z) + \left[\frac{a^2 + 2i\epsilon az}{z^2 - a^2} g(z) - zg'(z) \right] F(z) - (A + \bar{A}) \quad (2.2.62)$$

其中

$$A = A_1 + iA_2 \quad (2.2.63)$$

$$F(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\epsilon} \quad (2.2.64)$$

$$g(z) = Bz + C \quad (2.2.65)$$

利用 Kolosov-Muskhelishvili[24] 方程式(2.2.53-54)，透過解無限遠端 $(z \rightarrow \infty)$ 之應力狀態等於其邊界外力、無限遠端的剪切外力與旋轉(rotation)之關係以及位移的單值(single-valued)條件，可求出 A 、 B 、 C 代入(2.2.61)得到

$$\Phi_1(z) = \frac{\sigma_{yy}^\infty - i\tau_{xy}^\infty}{1 + e^{2\pi\epsilon}} (z - 2i\epsilon a)(z^2 - a^2)^{-1/2} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\epsilon} + (A_1 + iA_2) \quad (2.2.66)$$

其中

$$A_1 = \frac{(\sigma_{xx}^\infty)_1 + \sigma_{yy}^\infty}{4} - \frac{\sigma_{yy}^\infty}{1 + e^{2\pi\epsilon}} \quad (2.2.67)$$

$$A_2 = \frac{\tau_{xy}^\infty}{1 + e^{2\pi\epsilon}} + \frac{2G_1\omega_1^\infty}{1 + k_1} \quad (2.2.68)$$

ω_1^∞ 表示無限遠端的旋轉 (1 代表上層材料)。而應力強度因子 K_R 與複勢 $\Phi_1(z)$

之關係(2.2.60)可經由座標平移，改寫成適合於此雙材料介面有限長度裂紋問題之型式

$$K_{\text{RI}} - iK_{\text{RII}} = 2\sqrt{2}e^{\varepsilon\pi} \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{1/2+i\varepsilon} \Phi_1(z) \quad (2.2.69)$$

將(2.2.66)代入(2.2.69)並解出應力強度因子 K_{RI} 與 K_{RII} 的解析解

$$K_{\text{RI}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy}^{\infty} [\cos(\varepsilon \ln 2a) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln 2a)] \\ + \tau_{xy}^{\infty} [\sin(\varepsilon \ln 2a) - 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln 2a)] \end{array} \right\}}{\cosh \pi\varepsilon} a^{1/2} \quad (2.2.70)$$

$$K_{\text{RII}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy}^{\infty} [\cos(\varepsilon \ln 2a) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln 2a)] \\ - \sigma_{yy}^{\infty} [\sin(\varepsilon \ln 2a) - 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln 2a)] \end{array} \right\}}{\cosh \pi\varepsilon} a^{1/2} \quad (2.2.71)$$

而 Chen[26]沿用 Rice 與 Sih[25]的結果，繼續解雙材料介面上的有限長度裂紋問題，透過 Kolosov-Muskhelishvili[24]方程式

$$2\mu_j(u_{xj} + iu_{yj}) = k_j \int \Phi_j(z) dz - z\bar{\Phi}_j(\bar{z}) - \int \bar{\Psi}_j(\bar{z}) d\bar{z} \quad (2.2.72)$$

定義 $K_C = K_R \sqrt{\pi}$ 並解出位移場

$$u_{xj} = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{1}{4\mu_j} [K_{\text{CI}}(D_j + 2\delta_j \sin \theta \sin \Theta) - K_{\text{CII}}(E_j - 2\delta_j \sin \theta \cos \Theta)] \quad (2.2.73)$$

$$u_{yj} = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{1}{4\mu_j} [-K_{\text{CI}}(E_j + 2\delta_j \sin \theta \cos \Theta) - K_{\text{CII}}(D_j - 2\delta_j \sin \theta \sin \Theta)] \quad (2.2.74)$$

$j=1,2$ 分別表示上層(材料 1)與下層材料(材料 2)，而其中

$$D_j = \beta \gamma_j \cos \frac{1}{2} \theta + \beta' \gamma'_j \sin \frac{1}{2} \theta \quad (2.2.75)$$

$$E_j = \beta' \gamma_j \cos \frac{1}{2} \theta - \beta \gamma'_j \sin \frac{1}{2} \theta \quad (2.2.76)$$

$$\beta = \frac{0.5 \cos(\varepsilon \ln r) + \varepsilon \sin(\varepsilon \ln r)}{0.25 + \varepsilon^2} \quad (2.2.77)$$

$$\beta' = \frac{0.5 \sin(\varepsilon \ln r) - \varepsilon \cos(\varepsilon \ln r)}{0.25 + \varepsilon^2} \quad (2.2.78)$$

$$\gamma_j = k_j \delta_j - \frac{1}{\delta_j} \quad (2.2.79)$$

$$\gamma'_j = k_j \delta_j + \frac{1}{\delta_j} \quad (2.2.80)$$

$$\delta_1 = e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \quad (2.2.81)$$

$$\delta_2 = e^{\varepsilon(\pi+\theta)} \quad (2.2.82)$$

$$\Theta = \varepsilon \ln r + \frac{1}{2} \theta \quad (2.2.83)$$

然而 Rice[25]定義的應力強度因子 K_{RI} 、 K_{RII} (2.2.70-71)，其中的自然對數 \ln 項包含一個含有長度單位的變數 a ，Wu[27]提出該變數 a 值隨單位改變，會導致應力強度因子中的 $\cos(\varepsilon \ln 2a)$ 與 $\sin(\varepsilon \ln 2a)$ 項隨著 a 值的單位變動，然而實際上正弦函數和餘弦函數是沒有單位的值，因此該應力強度因子會產生一個因單位造成的定義不明確的特徵。因此 Sun 與 Jih[28]重新定義應力強度因子 K_S 為

$$K_S = K_{SI} - iK_{SII} = 2\sqrt{2\pi}e^{\varepsilon\pi} \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^{1/2} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{i\varepsilon} \Phi_1(z) \quad (2.2.84)$$

透過對 $\Phi_1(z)$ 乘上 $(z+a)^{-i\varepsilon}$ 項消去單位造成的不明確特徵，得到雙材料介面上

有限長度裂紋的應力強度因子理論解

$$K_{SI} = \sqrt{\pi a}[\sigma_{yy}^{\infty} - 2\varepsilon\tau_{xy}^{\infty}] / \cosh(\varepsilon\pi) \quad (2.2.85)$$

$$K_{SII} = \sqrt{\pi a}[\tau_{xy}^{\infty} + 2\varepsilon\sigma_{yy}^{\infty}] / \cosh(\varepsilon\pi) \quad (2.2.86)$$

本文中採用 K_S 做為雙材料介面裂紋應力強度因子 K 的定義，後面的推導皆以 K_I 、 K_{II} 表示之。透過這個應力強度因子的定義，Sun 與 Jih[28] 重新整理 Rice[25] 裂紋尖端附近應力場的解，當 $\theta = 0$ 時

$$\sigma_{yy}(x_1, 0) = \frac{\cosh(\varepsilon\pi)}{\sqrt{2\pi x_1}} \left[K_I(a) \cos\left(\varepsilon \ln\left(\frac{x_1}{2a}\right)\right) - K_{II}(a) \sin\left(\varepsilon \ln\left(\frac{x_1}{2a}\right)\right) \right] \quad (2.2.87)$$

$$\tau_{xy}(x_1, 0) = \frac{\cosh(\varepsilon\pi)}{\sqrt{2\pi x_1}} \left[K_I(a) \sin\left(\varepsilon \ln\left(\frac{x_1}{2a}\right)\right) + K_{II}(a) \cos\left(\varepsilon \ln\left(\frac{x_1}{2a}\right)\right) \right] \quad (2.2.88)$$

同樣地 Sun 與 Jih[28] 重新整理 Chen[26] 裂紋尖端附近位移場的解。當 $\theta = \pi$ 時，定義裂紋上下表面相對位移 $\bar{u}_j(r, \pi) = u_j(r, \pi) - u_j(r, -\pi)$

$$\bar{u}_y(r, \pi) = \frac{\sqrt{2r}}{4(1+4\varepsilon^2)\sqrt{\pi}} \left[\frac{k_1+1}{\mu_1} + \frac{k_2+1}{\mu_2} \right] \{K_I(a)H_1 - K_{II}(a)H_2\} \quad (2.2.89)$$

$$\bar{u}_x(r, \pi) = \frac{\sqrt{2r}}{4(1+4\varepsilon^2)\sqrt{\pi}} \left[\frac{k_1+1}{\mu_1} + \frac{k_2+1}{\mu_2} \right] \{K_I(a)H_2 + K_{II}(a)H_1\} \quad (2.2.90)$$

其中

$$H_1 = \left[\cos\left(\varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right)\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right)\right) \right] \quad (2.2.91)$$

$$H_2 = \left[\sin\left(\varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right)\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln\left(\frac{r}{2a}\right)\right) \right] \quad (2.2.92)$$

雖然在上述文獻中已整理出雙材料介面層上有限長度裂紋問題之理論解，然而該理論解僅能供少部分特定狀況使用，為了能更廣泛的探討介面裂紋問題，仍必須建立一套系統從有限元素法來計算介面裂紋的 K 值。Sun 與 Qian[14]利用裂紋關閉積分法將(2.2.87-92)代入(2.1.19-20)中，求得應變能釋放率 G_I 、 G_{II} 與應力強度因子 K_I 、 K_{II} 間的關係

$$G_I = \frac{1}{2}G + C[A_R(K_I^2 - K_{II}^2) - 2A_I K_I K_{II}] \quad (2.2.93)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2}G - C[A_R(K_I^2 - K_{II}^2) - 2A_I K_I K_{II}] \quad (2.2.94)$$

其中

$$G = G_I + G_{II} = \frac{1}{16} \left[\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right] (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.2.95)$$

$$A_R = \text{Re}(A) \quad (2.2.96)$$

$$A_I = -\text{Im}(A) \quad (2.2.97)$$

$$A = B \left[\frac{\Delta a}{4a} \right]^{-2i\varepsilon} \quad (2.2.98)$$

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{1}{2} + i\varepsilon \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} - i\varepsilon \right] / \Gamma[1 - i\varepsilon] \quad (2.2.99)$$

$$C = \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{8(1 + 4\varepsilon^2)\pi} \left[\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right] \left[1 + \frac{\Delta a}{2a} \right] \quad (2.2.100)$$

Γ 為伽瑪函數(gamma function)， $\text{Re}()$ 與 $\text{Im}()$ 分別指實部和虛部。透過(2.2.93)

與(2.2.94)可以建立應力強度因子 K_I 、 K_{II} 與應變能釋放率 G_I 、 G_{II} 間的關係。

已知 G_I 、 G_{II} 可透過改良式裂紋關閉積分法從有限元素軟體求得，雖然在 Sun 與 Jih[28] 中發現因為雙材料介面裂紋的震盪性質 (oscillatory nature) 使然， G_I 、 G_{II} 會隨著假設的虛位移 Δa 不同而無法收斂，然而其總應變能釋放率 G (即 G_I 、 G_{II} 的和) 會是一個定值。根據所定義的虛位移 Δa ，仍可以求得相對應的 G 、 G_I 、 G_{II} 。Sun 與 Qian[14] 解(2.2.93)與(2.2.94)式求得 K_I 、 K_{II}

$$K_I = \sqrt{\frac{4A_R S + 4A_I^2 \frac{G}{D} \pm \sqrt{\left(4A_R S + 4A_I^2 \frac{G}{D}\right)^2 - 16(A_R^2 + A_I^2)S^2}}{8(A_R^2 + A_I^2)}} \quad (2.2.101)$$

$$K_{II} = \frac{2A_R K_I^2 - S}{2A_I K_I} \quad (2.2.102)$$

其中

$$S = \frac{G_I - G_{II}}{2C} + \frac{A_R G}{D} \quad (2.2.103)$$

$$D = \frac{1}{16} \left[\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right] \quad (2.2.104)$$

透過(2.2.101-104)可由已知的 G_I 、 G_{II} 以及其相對應之虛位移 Δa 求得雙材料介面裂紋的應力強度因子 K_I 、 K_{II} ，此方法稱為能量法 (energy method)。此方法可解出兩組 K_I 、 K_{II} ，為了判斷何組解才正確，必須檢查解是否滿足裂紋上下表面相對位移 $\bar{u}_y > 0$ ，即(2.2.89)式中的 $K_I H_1 - K_{II} H_2 > 0$ ，且 $K_I H_1 + K_{II} H_2$ 的正負號必須與有限元素軟體求得的上下表面相對位移 \bar{u}_x 符號相同，兩條件皆成立該組解才滿足實際之物理現象。

儘管有限元素軟體求得的裂紋上下表面相對位移 \bar{u}_y 、 \bar{u}_x 可能不夠準確，但其比值 $\frac{\bar{u}_y}{\bar{u}_x}$ 還算準確，透過(2.2.89)與(2.2.90)兩式相除。整理後可求得 $\frac{K_{II}}{K_I}$ 之比值

$$\frac{K_{II}}{K_I} = \frac{H_1 - H_2 \times \left(\frac{\bar{u}_y}{\bar{u}_x}\right)}{H_2 + H_1 \times \left(\frac{\bar{u}_y}{\bar{u}_x}\right)} \quad (2.2.105)$$

配合(2.2.95)式，將可輕易地透過有限元素軟體求得的節點位移求出 K_I 、 K_{II} ，此方法稱為位移比例法(displacement ratio method)。經過 Sun 與 Qian[14] 驗證後發現無限大平板上兩種材料介面之有限長度裂紋，其 K 值透過能量法與位移比例法計算的結果與理論解(2.2.85-86)相比，兩種方法誤差皆在 1% 以內，皆可以採用做為兩種材料介面裂紋應力強度因子的計算方法。因此藉由能量法或位移比例法，我們可以從有限元素法來探討材料介面裂紋的 K 值，並可應用在更複雜問題的探討中。

然而該應力場與位移場在鄰近裂紋尖端區域出現的震盪特徵，在物理上仍難以解釋，Gautsen 與 Dundurs[29-30]提出了接觸模型(contact model)解出裂紋尖端附近應力場的實際解，然而該解太過複雜不夠實用，Sun 與 Qian[14]為檢驗 Rice[25]提出的震盪模型(oscillatory model)與接觸模型求得的實際解是否相符，將兩組應力場的解相互比較，發現兩組解僅在上下材料差異極大的情況下(例如： $E_1/E_2 = 10^{10}$ 、 $\nu_2/\nu_1 = 10^{10}$)，在鄰近裂紋尖端處小範圍

($r_0/a = 2.51 \times 10^{-4}$) 才會出現差異。否則當材料差異較小時(例如： $E_1/E_2 = 4$ 、 $\nu_2/\nu_1 = 1$)，兩組解應力值出現差異的範圍則趨近於零($r_0/a = 5.34 \times 10^{-11}$)。因此前文提及的震盪模型仍可採用做為鄰近裂紋尖端區域的解。

而由於其震盪特徵所致，當裂紋出現在兩種材料的介面時，與均質材料的破壞不同，無法明顯的區分不同的破壞模式。在承受單一模式的外力狀態時，雙材料介面層的裂紋會同時表現出開裂模式與剪裂模式的破壞特性。透過破壞模式混合度 ψ (Mode mixity)，可以比較各破壞模式所佔之比例。[14]

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) \quad (2.2.106)$$

利用位移比例法中 K_{II}/K_I 之比值(2.2.105)式，我們可以求得雙材料介面裂紋中不同破壞模式的結合度，以瞭解裂紋的破壞行為。

第三章 以有限元素法模擬含裂紋之奈米複合材料

所有材料之中都存在有裂紋缺陷，這些裂紋缺陷將主導材料的破壞強度。為了透過破壞力學理論探討顆粒型補強材料對於含裂紋之複合材料拉伸強度的影響，並探討其顆粒尺寸、體積分率(Volume fraction)、分散性等對破壞行為的影響，於本章節中，我們使用有限元素軟體建立一組微觀模型，對不同條件下材料中的裂紋進行分析，並將分析結果與實驗結果對照比較。

3.1 奈米複合材料的有限元素模型

為了透過有限元素軟體模擬球型顆粒複合材料，我們所採用的方法是鑲埋式模型(Embedded Model)，如圖 3.1-3.3 所示，在裂紋週遭鄰近區域建立實際之基材與補強材料，而在遠處則以該複合材料之有效材料性質(Effective Properties)簡化模型，以降低程式計算量。有效材料性質的計算如圖 3.4 所示，可透過代表性體積單元(Representative Volume Element, RVE)[31]模型來計算，透過顆粒半徑 R_p 與體積分率 V_f 之關係式

$$V_f = \pi R_p^2 / L^2 \quad (3.1.1)$$

可求得正方形 RVE 之邊長 L ，以八節點平面元素 plane82 建立其有限元素網格，該元素上每個節點僅有 x 、 y 兩個方向的位移自由度。對該 RVE 施予週期性邊界條件(Periodic boundary condition)使四邊在變形前後皆維持為平面，並施予單方向之均勻拉伸應力，作平面應力分析(Plane stress analysis)。該複合材料之基材為乙烯基酯(Vinyl ester)、補強材料為二氧化矽(SiO_2)，材料參數列於表 1。乙烯基酯的材料參數可由文獻[2]得知，二氧化矽顆粒之楊氏模數(Young's Modulus)可由文獻[32]得到，而其浦松比(Poisson's Ratio)則可由文獻[33]得知。透過 RVE 模型可求出整體複合材料在補強材料體積分率為 5 vol%、10 vol%、20 vol%時的有效材料性質，其結果列於表 1。得到有效材料性質後，可將其運用在鑲埋式模型中。假設補強材料顆粒大小皆相同並均勻分散在基材中，為了比較出現在顆粒型複合材料中不同位置的裂紋之差異，如圖 3.1-3.3 所示，我們建立了三組不同的鑲埋式模型以探討補強材料顆粒相對位置對裂紋破壞行為的影響。假設裂紋長度為 $2a$ ，在 A 模型中裂紋中心與上下兩補強材料顆粒圓心三點共線，裂紋表面至上下兩顆粒等距。B 模型中裂紋至鄰近四顆補強材料之距離皆相等。C 模型中裂紋位於左右兩顆粒圓心之連線上，且裂紋至兩顆粒之間距相等。而其中 L 為兩補強材料圓心之間距，其值與前述 RVE 模型之邊長 L 相等，可由式(3.1.1)求得。為避免裂紋受到邊界的影響，鑲埋式模型之寬度訂為 $40L$ ，長度訂為 $60L$ ，根據收斂性測試證實該尺寸足以消去邊界對裂紋

應力場的影響。鑲埋模型中在裂紋周遭所建立的實際基材與補強材料範圍，亦經過收斂性測試證實該範圍夠廣，使裂紋不受有效材料性質交界處之材料不連續所影響。根據不同的分析條件，例如：體積分率、顆粒半徑，可以建立出相對應的鑲埋式模型。由於三組模型皆為左右對稱且上下對稱，因此以鑲埋模型 A 為例，如圖 3.5 所示，我們可以只建四分之一的模型，再透過邊界條件限制左側之節點 x 方向位移為零，下方之節點在裂紋範圍內維持自由無拘束，裂紋表面以外的節點給予 y 方向位移為零之拘束條件，以模擬對稱之結構。使用八節點之平面元素 plane82 建立網格，其有限元素模型如圖 3.6 所示，在裂紋尖端附近維持元素為均勻正方形，裂紋尖端元素尺寸 Δa (即裂紋關閉積分法中裂紋關閉之虛位移)為 $1.5625 \times 10^{-4} \mu\text{m}$ 。鑲埋模型 B、C 可依同樣的方法建立其有限元素網格。透過以上模型施加 σ_y^∞ 之 y 方向均勻拉伸應力，我們將進行一系列分析探討補強材料顆粒對裂紋破壞行為之影響。

3.2 顆粒尺寸對含裂紋複合材料的影響

如圖 3.7 所示，當體積分率為定值時，若縮小補強材料顆粒尺寸，則顆粒之間距將相對縮小，為了探討補強材料顆粒尺寸對於含裂紋之複合材料拉伸強度的影響，我們假設補強材料體積分率為定值，依顆粒半徑建立出

不同尺寸之鑲埋模型進行分析。當體積分率為 5 vol%時，控制顆粒半徑為 0.25 μm 、0.5 μm 、5 μm 建立半裂紋長度 a 為 0.1 μm 之 A、B、C 鑲埋模型，此時顆粒表面之間距 d 列於表 2，施以 1 MPa 之 y 方向均勻拉伸應力，透過改良式裂紋關閉積分法計算裂紋之應變能釋放率。其結果如圖 3.8 所示，A 模型中裂紋之應變能釋放率均高於純基材中之裂紋，且隨著顆粒尺寸愈大其應變能釋放率愈高。而在 B、C 模型之裂紋其應變能釋放率則低於純基材，觀察該結果可發現，B 模型之裂紋應變能釋放率隨著顆粒尺寸愈大而降低，C 模型之趨勢則與 B 相反，然而現象不甚明顯。

由於我們假設裂紋皆發生於基材中，故無論是在哪一組模型條件下，整體材料的破壞都將發生在裂紋達到基材的臨界應變能釋放率 G_{IC} 時，此時的外力即為材料的破壞強度。為了更清楚地了解補強材料顆粒對含裂紋複合材料強度的影響，透過控制拉伸外力的大小使各模型裂紋之應變能釋放率皆與純基材中之裂紋相等，我們可以求得含裂紋複合材料相對於含裂紋純基材的標準化拉伸強度(Normalized tensile strength)[2]。其結果如圖 3.9 所示，透過該圖可以探討補強材料顆粒尺寸導致整體材料強度之增減。當裂紋出現在 A 模型中時，其整體材料之標準化拉伸強度會下降；而當裂紋出現在 B、C 模型中則強度將會上升。顯示在 A 模型處之裂紋較容易延伸破壞，B、C 模型處則對於裂紋較有抑制的效果。然而顆粒尺寸的影響則尚不明顯，因此重新定義半裂紋長度 a 為 0.5 μm 進行分析，結果如圖 3.10 所示，

其應變能釋放率之趨勢與前述相同，而在圖 3.11 中，其標準化拉伸強度則可以看到較明顯之變化，A 模型之標準化拉伸強度均低於純基材，且隨著顆粒尺寸愈大而降低；B、C 模型之標準化拉伸強度則高於純基材，B 模型之強度隨著顆粒尺寸愈大而增加，C 模型之強度隨著顆粒尺寸愈大而降低。而圖 3.12、3.13 則是半裂紋長度 a 為 $0.7 \mu\text{m}$ 時之結果，由於假設裂紋缺陷僅存在於基材中，無補強材料破壞之情況，因此在半裂紋長度 a 為 $0.7 \mu\text{m}$ 時，因在模型 C 中裂紋尖端極靠近補強材料，故並未討論顆粒半徑為 $0.25 \mu\text{m}$ 之模型。半裂紋長度 a 為 $0.7 \mu\text{m}$ 時，在顆粒尺寸對裂紋破壞行為的影響上亦有相同之趨勢。

為了探討顆粒尺寸與裂紋應變能釋放率間的關係，我們可以從材料中的應力分佈著手，假設補強材料顆粒大小皆相同並均勻分散在基材中，建立如圖 3.14 之 RVE 模型，施與 1 MPa 之 y 方向均勻拉伸外力以及週期性邊界條件，當體積分率為 $5 \text{ vol}\%$ 時，將 RVE 上 A、B、C 模型裂紋出現處之 y 方向應力分佈曲線繪於圖 3.15-3.17 中，圖 3.15 橫軸 x_1 之起點為模型 A 中裂紋之中心，終點為 RVE 模型之中心線。圖 3.16 橫軸 x_2 之起點為模型 B 中裂紋之中心，終點為右側兩顆粒中心之連線處。圖 3.17 橫軸 x_3 之起點為模型 C 裂紋之中心，終點為右側顆粒表面。已知當體積分率為定值時，補強材料顆粒愈大其顆粒之間距愈遠，相同長度之裂紋在空間中所佔之比例則因而縮小，在鑲埋模型 A 中，半裂紋長度 a 為 $0.5 \mu\text{m}$ 之裂紋如圖 3.15 箭

號所示，其裂紋尖端位置隨著顆粒尺寸增大而落至應力較高之區域，由此可以解釋裂紋在 A 模型中隨著顆粒尺寸愈大其應變能釋放率有明顯上升之趨勢。反之可由圖 3.16 解釋鑲埋模型 B 中裂紋應變能釋放率隨著顆粒尺寸愈大而下降之現象。而由圖 3.17 可發現在靠近補強材料顆粒側邊有一應力極小之區域，該區域稱為應力抑制區域(Stress shielding zone)[12]，在該區域中之裂紋受到補強材料應力抑制效果的影響較不易成長破壞。在鑲埋模型 C 中裂紋尖端隨著顆粒尺寸愈大而離應力抑制區域愈遠，其抑制效果漸不明顯，應變能釋放率逐漸上升。透過材料中的應力分佈狀況，我們可以清楚地解釋顆粒尺寸與不同位置之裂紋應變能釋放率間的關係。

假設裂紋出現在各位置之機率均等，即材料中同時含有 A、B、C 模型三種位置之裂紋缺陷，因此在判斷整體材料強度的變化時，我們會以 A、B、C 三組模型中最低的標準化拉伸強度，即最先造成材料破壞的外力為依據。觀察前述之結果可發現，當顆粒尺寸愈大時，材料所能承受之最小拉伸外力愈低、即拉伸強度愈低。該現象與文獻[3-7]所提出的結果相符，Fu 等人[7]整理了許多實驗文獻歸納出複合材料強度隨著補強材料顆粒尺寸愈大而降低之結論。而在文獻[3]的玻璃珠/熱固性聚氨酯(Polyurethane thermosetting resin)複合材料及文獻[5]中的二氧化矽顆粒/環氧樹脂(Epoxy)複合材料也可發現隨著顆粒愈大而降低其拉伸強度之現象。由上述文獻的結果可發現我們的分析與實驗所得之趨勢相同，該分析模型可以用來解釋奈米複合材料

拉伸強度與顆粒尺寸間的關係。

3.3 體積分率對含裂紋複合材料的影響

如圖 3.18 所示，固定補強材料顆粒尺寸，若增加補強材料顆粒之體積分率，將使密度增加、顆粒之間距相對縮小，為了探討補強材料體積分率對含裂紋複合材料拉伸強度的影響，我們控制顆粒半徑為 $5\ \mu\text{m}$ ，建立體積分率為 5 vol%、10 vol%、20 vol% 之鑲埋模型進行分析。此時顆粒表面之間距 d 列於表 3，施以 1 MPa 之 y 方向均勻拉伸應力，透過改良式裂紋關閉積分法計算裂紋之應變能釋放率。當半裂紋長度 a 為 $0.1\ \mu\text{m}$ 時，其結果如圖 3.19 所示，在 A 模型中裂紋之應變能釋放率隨著體積分率增加而有明顯的上升，B、C 模型之應變能釋放率隨著體積分率增加而下降。換算其標準化拉伸強度之結果如圖 3.20 所示，當裂紋出現在 A 模型中時，體積分率的增加將導致拉伸強度的下降。B、C 模型之趨勢則與之相反。同樣地我們可以透過應力分佈來探討該現象，在不同體積分率下，A、B、C 模型裂紋出現處之 y 方向應力分佈曲線繪於圖 3.21-3.23 中，其箭頭標示處為相同長度之裂紋在不同體積分率模型中出現之位置。如圖 3.21、3.22 所示，隨著體積分率增加，在 A、B 模型裂紋出現處之應力場增強、減弱之幅度更加強烈。而由圖 3.23 則可發現隨著體積分率增加，補強材料側邊的應力抑制效果則愈顯著，故模型 C 裂紋出現處之應力則隨之減弱。應力分佈之結果皆與裂

紋應變能釋放率之趨勢相符，可以用來解釋補強材料體積分率對裂紋破壞行為的影響。半裂紋長度 a 為 $0.5\ \mu\text{m}$ 、 $0.7\ \mu\text{m}$ 時之結果示於圖 3.24-3.27 中，其趨勢與前述之現象相同。因此我們推測當補強材料顆粒之體積分率愈高時，雖然可以提升整體材料之 E 值，然而從鑲埋模型 A 之裂紋破壞行為可發現，體積分率增加使該處裂紋更易延伸破壞，導致材料所能承受之最小拉伸外力降低，整體材料強度下降。

將分析結果與文獻之實驗數據比較。部分文獻指出，補強材料體積分率的增加將導致材料強度降低，如文獻[3]所示，在玻璃珠/熱固性聚氨酯複合材料中有此一現象。然而在文獻[8]中，奈米級二氧化矽(Nanosilica)/聚氨酯(Polyurethane)複合材料拉伸強度則隨著補強材料含量增加而上升，與我們的分析結果恰相反。在補強材料含量與拉伸強度的探討上，含量的增加使得補強材料的群聚現象較容易發生，且在部分文獻中顯示，提高補強材料含量的同時亦會造成顆粒尺寸的上升，像在文獻[9]中二氧化矽顆粒在含量 5 wt%、10 wt%、20 wt%時顆粒尺寸分別為 100-200 nm、200-450 nm、1-2 μm ，使得單純含量造成的影響較不易直接觀察。因此在體積分率與材料強度之間較難從實驗結果中歸納出明確之關連性。我們的分析結果無法從實驗數據中獲得充分的驗證。

3.4 鄰近補強材料顆粒之裂紋

由前文中已知，在鑲埋模型 A 中之裂紋其應變能釋放率較高，推測該處是顆粒型複合材料較易發生裂紋破壞的區域。因此在本節中我們針對該區域之裂紋做更進一步的探討。如圖 3.28 所示，本節將著重於探討靠近補強材料位置之裂紋破壞行為。如圖 3.28(a)所示，我們改變鑲埋模型 A 之裂紋位置使其逐漸靠近下方補強材料顆粒，直到產生補強材料與基材介面層之裂紋破壞，如圖 3.28(b)所示。介面層之裂紋為一沿補強材料顆粒表面之弧型裂紋，其弧長與基材中之裂紋長度相等。如圖 3.29 所示建立雙材料介面裂紋之有限元素模型。其裂紋尖端附近維持元素網格為均勻正方形，並在裂紋尖端建立沿補強材料顆粒表面切線、法線方向之局部座標系統以利改良式裂紋關閉積分法之計算。當顆粒半徑為 $5\ \mu\text{m}$ 、體積分率為 10 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.1\ \mu\text{m}$ 時，移動裂紋靠近補強材料直到產生介面破壞，在 1 MPa 之 y 方向均勻拉伸外力下，不同位置之裂紋應變能釋放率示於圖 3.30 中，其中 d_{cp} 為裂紋與下方顆粒之間距，該圖之橫軸為 d_{cp} 與顆粒表面間距 d 之比值，當 d_{cp}/d 值為 0.5 時表示裂紋位於兩顆粒正中心，隨著 d_{cp}/d 值愈小，裂紋愈靠近下方的補強材料顆粒。觀察圖 3.30 可發現該區域之裂紋應變能釋放率均較純基材中之裂紋為高，而當裂紋愈靠近補強材料顆粒時，其應變能釋放率有明顯之上升。裂紋位於基材與顆粒之介面時應變能釋放率則

相對較低。透過位移比例法(2.2.95)與(2.2.105)式可求得介面裂紋的應力強度因子 K_I 為 $915.8 \text{ Pa} \cdot \sqrt{m}$ 、 K_{II} 為 $156.4 \text{ Pa} \cdot \sqrt{m}$ 。破壞模式混合度 ψ 可由(2.2.106)式求得，其相位角(phase angle)為 9.69° 顯示此基材與顆粒介面之裂紋破壞仍以開裂模式為主。如圖 3.31 所示，其相對於含裂紋純基材之標準化拉伸強度則隨著裂紋愈靠近補強材料而降低。由結果推測，在承受拉伸外力下，顆粒的軸極(pole)區域(即在鑲埋模型 A 中靠近補強材料顆粒處)之裂紋愈容易發生破壞。而補強材料與基材介面層之裂紋，則必須視材料間之附著力(Adhesion)強弱才可判斷是否會延伸破壞。

3.5 局部群聚現象對裂紋破壞行為的影響

補強材料顆粒的分散性與複合材料的強度有密切之關連，群聚現象的出現將使局部範圍內聚集了較高密度的補強材料顆粒，很容易造成應力集中而導致整體材料的強度下降。如圖 3.32 所示，我們以發生局部群聚的兩個補強材料顆粒為例，群聚現象使顆粒間的距離縮小，本節中我們將透過改變兩補強材料顆粒的間距來探討不同程度的群聚現象對於含裂紋複合材料強度的影響。假設裂紋出現在發生群聚現象的兩顆粒中間，如圖 3.32 所示，僅裂紋兩側之補強材料顆粒發生群聚現象，其餘之顆粒維持均勻分散在基材中。由於其對稱性，如圖 3.33 所示，我們可以只建立四分之一的鑲埋模型，透過邊界條件模擬對稱之結構。當顆粒半徑為 $5 \mu\text{m}$ 、體積分率為 10

vol%、半裂紋長度 a 為 $0.1 \mu\text{m}$ 時，在 1 MPa 之拉伸外力下，不同程度之局部群聚現象與裂紋應變能釋放率間的關係示於圖 3.34 中，其中 d_{ag} 為發生群聚現象的兩補強材料顆粒表面間距， d 為均勻分散時顆粒之表面間距。該圖之橫軸為 d_{ag} 與 d 之比值，當 d_{ag}/d 值為 1 時表示材料中顆粒均勻分散，隨著 d_{ag}/d 值愈小，裂紋兩側顆粒之群聚現象愈嚴重。由圖 3.34 中可發現，當裂紋兩側之顆粒靠近時，裂紋的應變能釋放率有劇烈的上升，顯示群聚現象將造成該範圍內之裂紋更容易延伸破壞。換算其標準化拉伸強度，如圖 3.35 所示，隨著群聚現象愈嚴重，局部補強材料顆粒密度上升，整體材料強度有明顯的下降。此結果與文獻[10]所提出的結論相符，群聚現象的出現將促進製程中裂紋缺陷在顆粒團中生成，並造成拉伸強度大幅下降。我們的分析模型可用來解釋局部群聚所導致材料強度降低的現象。

第四章 結論與未來展望

4.1 結論

本研究建立了一套微觀模型以預估含裂紋之奈米複合材料結構的拉伸強度。透過線彈性破壞力學理論，我們可以探討添加的顆粒尺寸、體積分率、分散性等，對於材料中的裂紋缺陷破壞行為之影響。並從裂紋的應變能釋放率來探討補強材料顆粒對拉伸強度的影響。藉由此分析模型，我們可以解釋實驗文獻中，補強材料顆粒的添加在奈米複材拉伸強度上的表現。其結果如下所述。

1. 奈米複合材料在承受拉伸外力下，鄰近補強材料顆粒軸極區域有明顯的應力集中，位於該處之裂紋愈靠近補強材料愈容易發生破壞。而在補強材料顆粒之側向則有一應力抑制區域，該區域之裂紋受到應力抑制效果的影響其應變能釋放率較低，裂紋不易成長破壞。

2. 分析結果發現縮小補強材料顆粒尺寸可提升奈米複合材料的拉伸強度，該趨勢與實驗文獻的現象相符。

3. 補強材料的添加雖然可以有效的提升材料的楊氏模數，然而分析結果顯示，隨著體積分率的增加將導致拉伸強度降低。文獻中顆粒含量與拉伸強度間的關係則說法不一。該現象有待進一步的實驗來驗證。

4. 補強材料顆粒的分散性與材料強度密切相關，分析結果顯示局部群

聚現象將導致複合材料拉伸強度明顯的下降，與文獻所提出的結論相同。

如何提升分散性，將是奈米複合材料未來研發的一大課題。

4.2 未來展望

本研究雖然花了很大的篇幅在整理雙材料介面裂紋的破壞力學理論，然而很可惜地實際上在分析過程中僅有少部分的應用。由於介面裂紋的破壞理論在一般破壞力學書籍上較少被提及，期望該章節的文獻整理可供有興趣的後進者一個較快的學習管道以便於更深入的研究。奈米複合材料中，基材與補強材料介面的剝離現象是很常見的破壞模式，期望未來能看到介面裂紋的破壞理論在這方面有更廣泛的應用與延伸探討。



參考文獻

- [1] H. Wang, Y. Bai, S. Liu, J. Wu, C. P. Wong, 2002, Combined Effects of Silica Filler and its Interface in Epoxy Resin, *Acta Materialia*, Vol. 50, pp. 4369-4377.
- [2] J. Cho, M. S. Joshi and C. T. Sun, 2006, Effect of Inclusion Size on Mechanical Properties of Polymeric Composites with Micro and Nano Particles, *Composites Science and Technology*, Vol. 66, pp. 1941-1952.
- [3] G. Landon, G. Lewis and G. F. Boden, 1977, The Influence of Particle Size on the Tensile Strength of Particulate - Filled Polymers, *Journal of Materials Science*, Vol. 12, pp. 1605-1613.
- [4] J. Leidner, R. T. Woodhams, 1974, The Strength of Polymeric Composites Containing Spherical Fillers, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 18, pp. 1639-1654.
- [5] Y. Nakamura, M. Yamaguchi, M. Okubo and T. Matsumoto, 1992, Effects of Particle Size on Mechanical and Impact Properties of Epoxy Resin Filled with Spherical Silica, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 45, pp. 1281-1289.
- [6] L. Jiang, Y. C. Lam, K. C. Tam, T. H. Chua, G. W. Sim, L. S. Ang, 2005, Strengthening Acrylonitrile-Butadiene-Styrene (ABS) with Nano-Sized and Micron-Sized Calcium Carbonate, *Polymer*, Vol. 46, pp.243-252.
- [7] S. Y. Fu, X. Q. Feng, B. Lauke and Y. W. Mai, 2008, Effects of Particle Size, Particle/Matrix Interface Adhesion and Particle Loading on Mechanical Properties of Particulate Polymer Composites, *Composites Part B*, Vol. 39, pp. 933-961.
- [8] Y. Chen, S. Zhou, H. Yang, L. Wu, 2005, Structure and Properties of Polyurethane/Nanosilica Composites, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 95, pp. 1032-1039.
- [9] Z. K. Zhu, Y. Yang, J. Yin and Z. N. Qi, 1999, Preparation and Properties of Organosoluble Polyimide/Silica Hybrid Materials by Sol-Gel Process,

Journal of Applied Polymer Science, Vol. 73, pp. 2977-2984.

[10] E. Fekete, Sz. Molnár, G.-M. Kim, G. H. Michler and B. Pukánszky, 1999, Aggregation, Fracture Initiation, and Strength of PP/CaCO₃ Composites, *Journal of Macromolecular Science: Part B: Physics*, Vol. 38, pp.885-899.

[11] E. F. Rybicki and M. F. Kanninen, 1977, A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 9, pp. 931-938.

[12] Q. Zhao and S. V. Hoa, 2007, Effect of Stress Shielding on Strengthening of Particles-Dispersed Polymer, *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 2615-2638.

[13] C. J. Sun, P. Saffari, K. Sadeghipour, G. Baran, 2005, Effects of Particle Arrangement on Stress Concentrations in Composites, *Materials Science & Engineering A*, Vol. 405, pp. 287-295.

[14] C. T. Sun and W. Qian, 1997, The Use of Finite Extension Strain Energy Release Rates in Fracture of Interfacial Cracks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, pp. 2595-2609.

[15] ANSYS Reference. 000855. Eighth Edition. SAS IP, Inc. 1997.

[16] R. J. Sanford, 2002, *Principles of Fracture Mechanics*, Prentice Hall/Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

[17] T. L. Anderson, 1995, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press, Boca Raton, Florida.

[18] G. R. Irwin, 1957, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364 .

[19] C. J. Jih and C. T. Sun, 1990, Evaluation of a Finite Element Based Crack-Closure Method for Calculating Static and Dynamic Strain Energy Release Rates, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, pp. 313-322.

[20] T. Ikeda and C. T. Sun, 2001, Stress Intensity Factor Analysis for an

Interface Crack Between Dissimilar Isotropic Materials Under Thermal Stress, *International Journal of Fracture*, Vol. 111, pp. 229-249.

[21] M. L. Williams, 1959, The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media, *Bulletin of the Seismology society of America*, Vol. 49, pp. 199-204.

[22] A. H. England, 1965, A Crack Between Dissimilar Media, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp.400-402.

[23] G. C. Sih and J. R. Rice, 1964, The Bending of Plates of Dissimilar Materials With Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, pp. 477-482.

[24] N. I. Muskhelishvili, 1953, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, English translation, 3rd ed.*, P. Noordhoff, Groningen, Holland.

[25] J. R. Rice and G. C. Sih, 1965, Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 418-423.

[26] E. P. Chen, 1985, Finite Element Analysis of a Bimaterial Interface Crack, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 3, pp. 257-262.

[27] E. M. Wu, 1969, Interfacial Fracture Phenomena, *Proceedings of the Fifth International Congress on Rheology*, pp. 575-587

[28] C. T. Sun and C. J. Jih, 1987, On Strain Energy Release Rates for Interfacial Cracks in Bi-Material Media, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 28, pp. 13-20.

[29] A. K. Gutesen and J. Dundurs, 1987, The Interface Crack in a Tension Field, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 93-98.

[30] A. K. Gutesen and J. Dundurs, 1988, The Interface Crack under Combined Loading, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 580-586.

[31] C. T. Sun and R. S. Vaidya, 1996, Prediction of Composite Properties from a Representative Volume Element, *Composites Science and Technology*, Vol. 56, pp. 171-179.

[32] B. B. Johnsen, A. J. Kinloch, R. D. Mohammed, A. C. Taylor and S. Sprenger, 2007, Toughening Mechanisms of Nanoparticle - Modified Epoxy Polymers, *Polymer*, Vol. 48, pp. 530-541.

[33] A. Jain, S. Rogojevic, S. Ponoth, N. Agarwal, I. Matthew, W. N. Gill, P. Persans, M. Tomozawa, J. L. Plawsky and E. Simonyi, 2001, Porous Silica Materials as Low-k Dielectrics for Electronic and Optical Interconnects, *Thin Solid Films*, Vol. 398-399, pp. 513-522.



表 1 基材、補強材料之材料參數以及不同體積分率下複合材料之有效材料

性質[2,32,33]

Material properties	Vinyl ester	SiO ₂	Effective Properties		
			5 vol%	10 vol%	20 vol%
E (GPa)	3.5	70	3.76	4.07	4.83
ν	0.35	0.2	0.35	0.34	0.33

表 2 體積分率為 5 vol%、不同顆粒尺寸下之顆粒表面間距 d

R _p (μ m)	The distance between particle surface d (μ m)
0.25	1.48
0.5	2.96
5	29.63

表 3 補強材料顆粒半徑 5 μm、不同體積分率下顆粒表面之間距 d

Vol%	The distance between particle surface d (μ m)
5	29.63
10	18.03
20	9.82

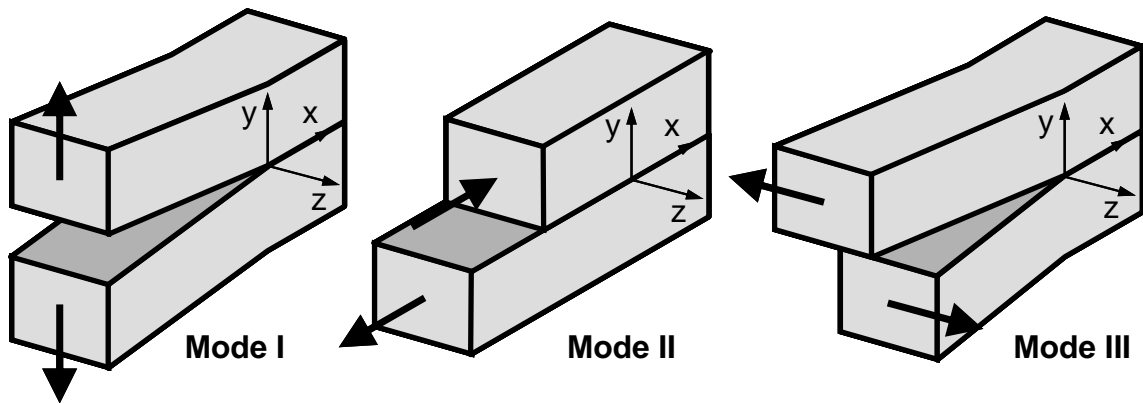


圖 2.1 三種獨立的裂紋破壞變形模式(由左至右)：開裂模式(Open mode)、剪裂模式(In-plane shear mode)、撕裂模式(Tearing mode)

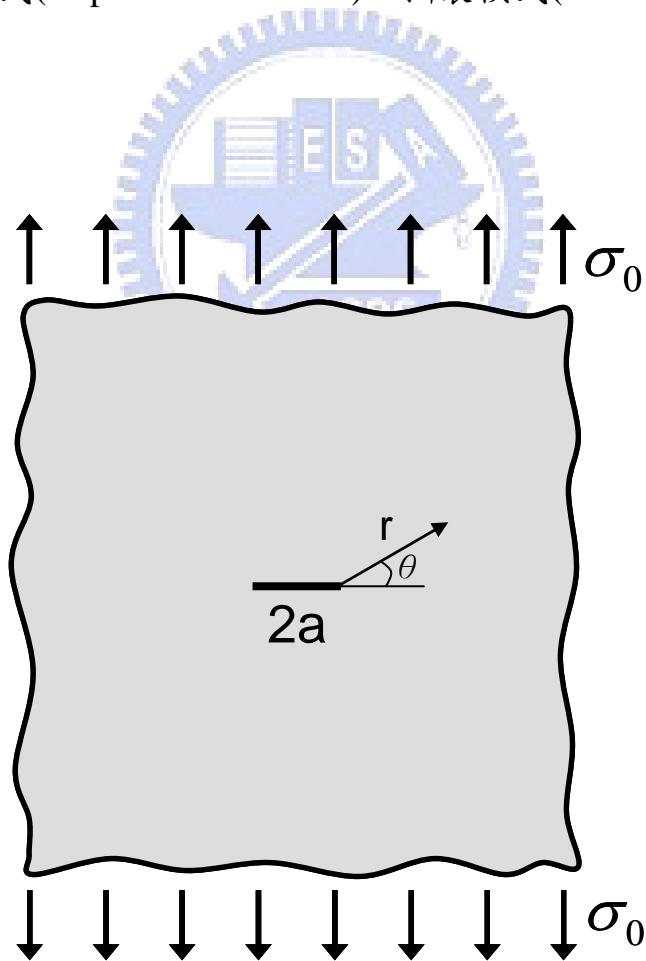


圖 2.2 均質材料含有一段長度為 $2a$ 之裂紋承受拉伸外力 σ_0

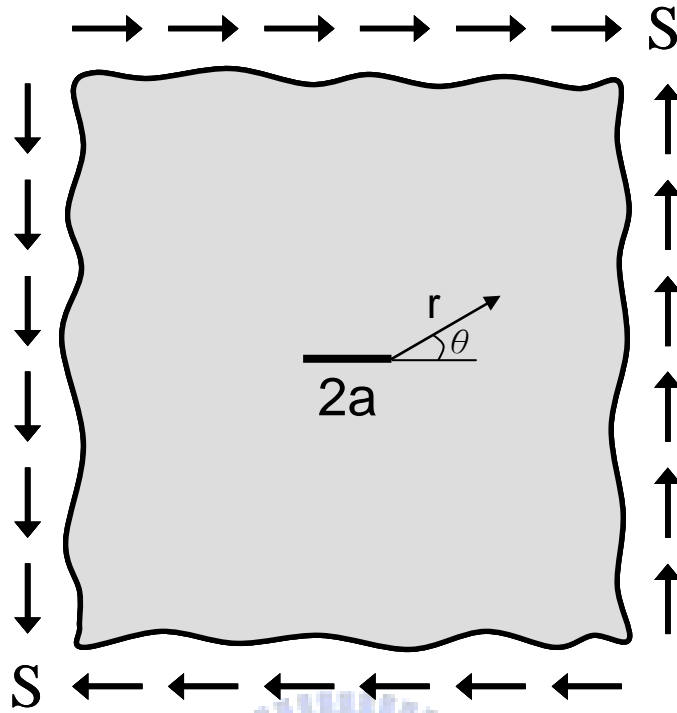


圖 2.3 均質材料含有一段長度為 $2a$ 之裂紋承受剪外力 S

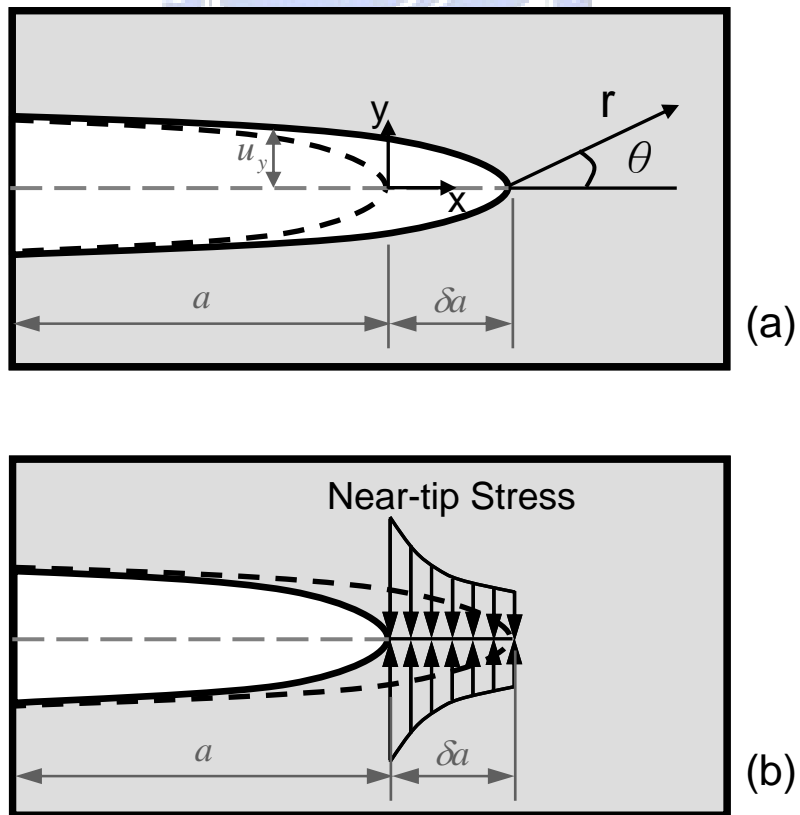


圖 2.4 裂紋關閉積分法示意圖(a)裂紋增長一微小量 δa (b)關閉 δa 長度裂紋所需之應力

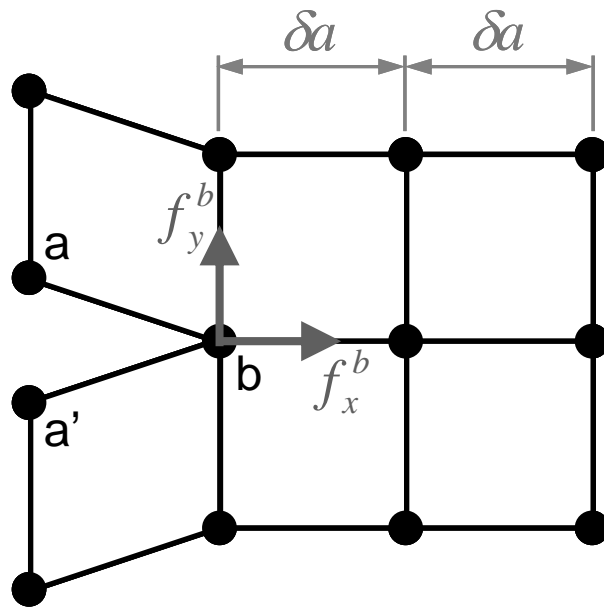


圖 2.5 均質材料中的裂紋，使用有限元素法之四節點元素(4-nodes element) 進行分析

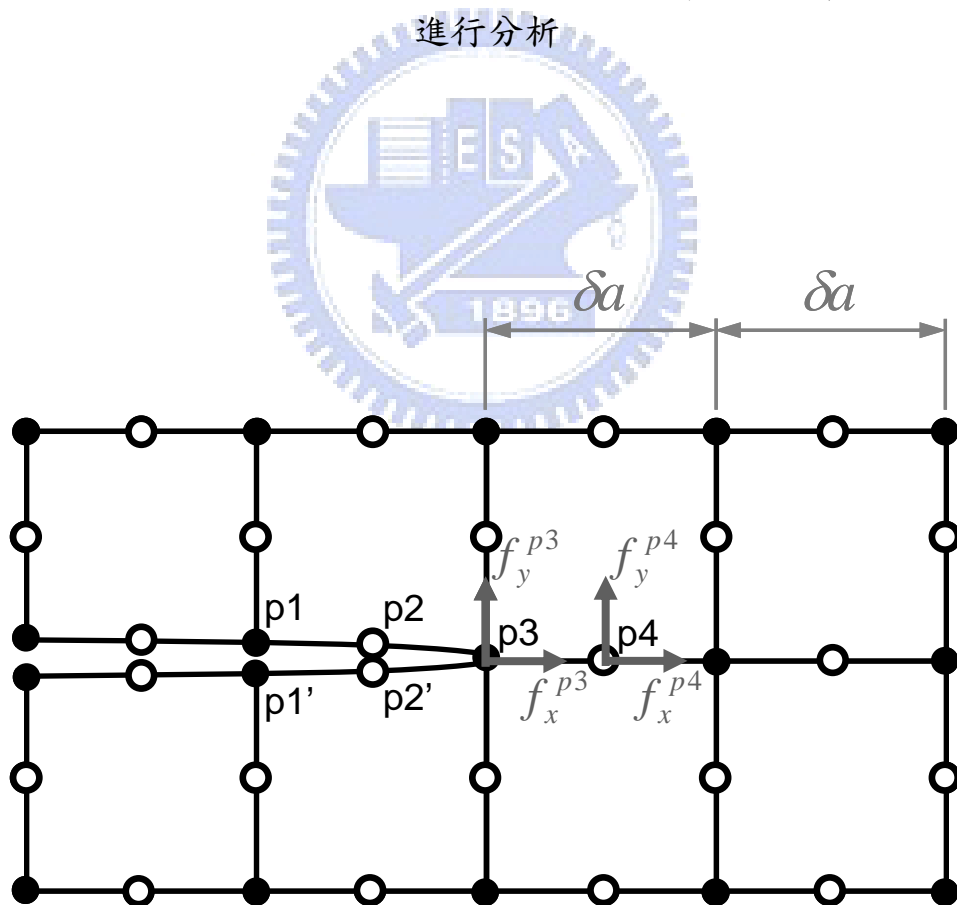


圖 2.6 均質材料中的裂紋，使用有限元素法之八節點元素(8-nodes element) 進行分析

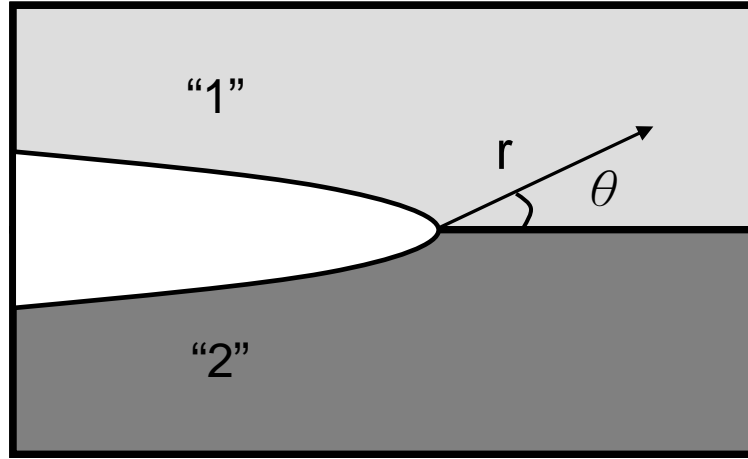


圖 2.7 兩種等向性材料介面之半無限裂紋(semi-infinite crack)

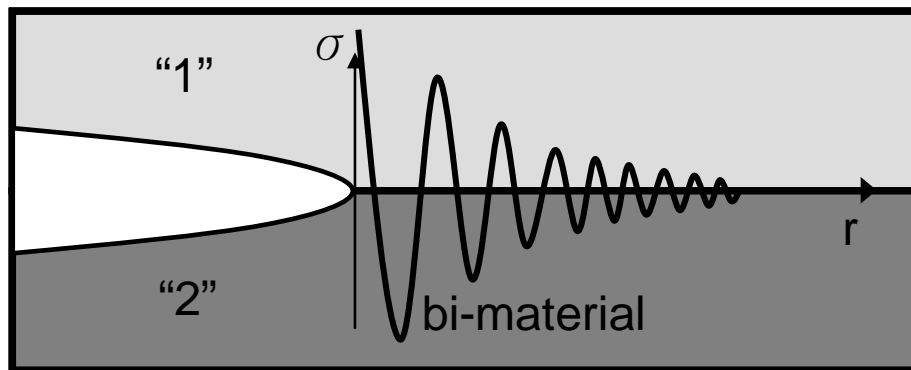


圖 2.8 雙材料介面裂紋應力場的震盪特徵(oscillating character)示意圖

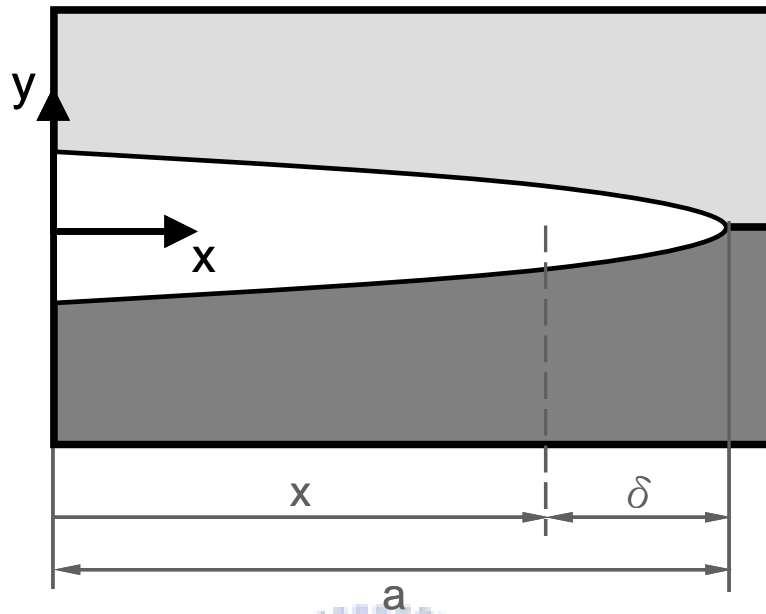


圖 2.9 定義裂紋尖端一小段長度 $\delta = a - x$

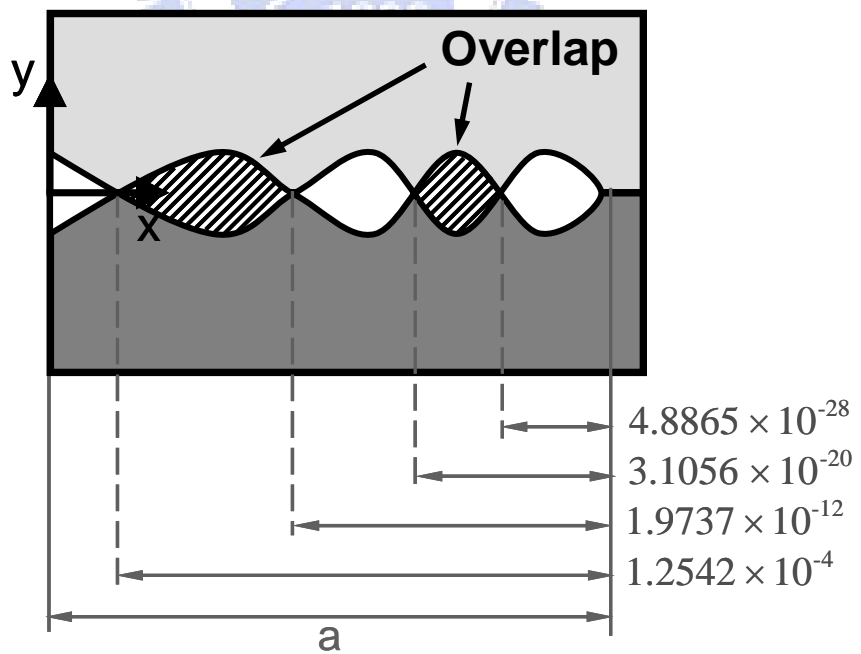


圖 2.10 兩種材料介面裂紋尖端鄰近區域的位移震盪、重疊現象

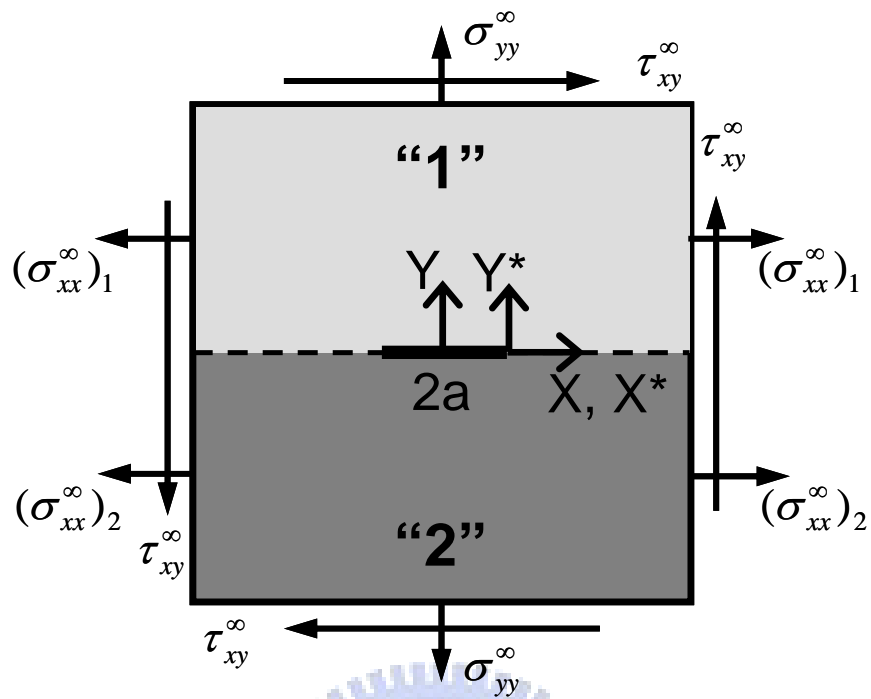


圖 2.11 承受拉伸與剪切外力之雙材料無限大平板，材料介面之有限長度裂紋示意圖(裂紋長度為 $2a$)



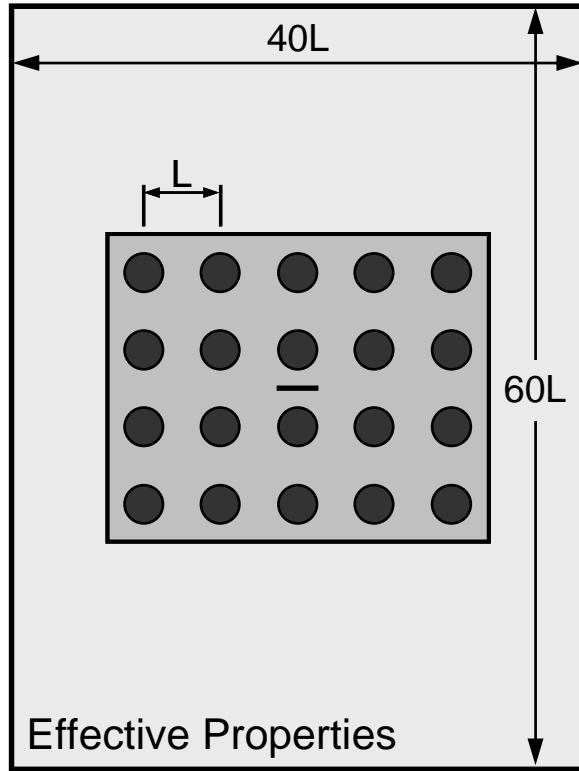


圖 3.1 顆粒型複合材料鑲埋模型 A (含長度為 $2a$ 之裂紋)

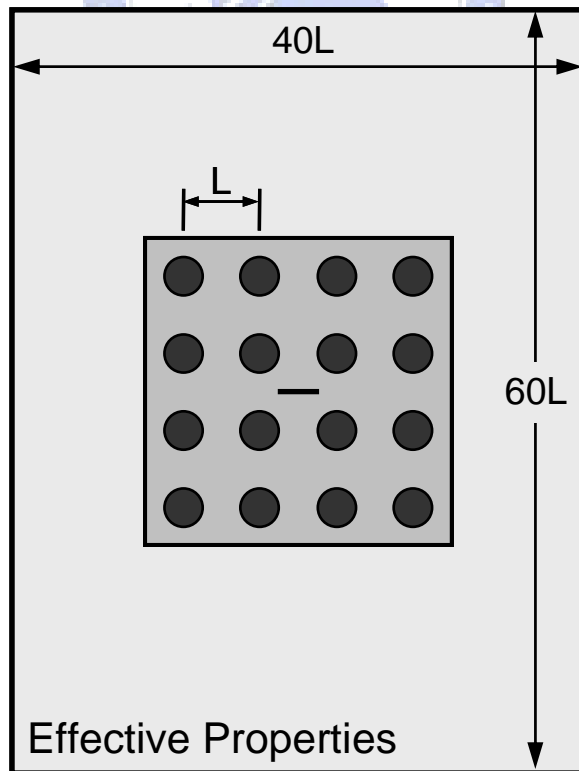


圖 3.2 顆粒型複合材料鑲埋模型 B (含長度為 $2a$ 之裂紋)

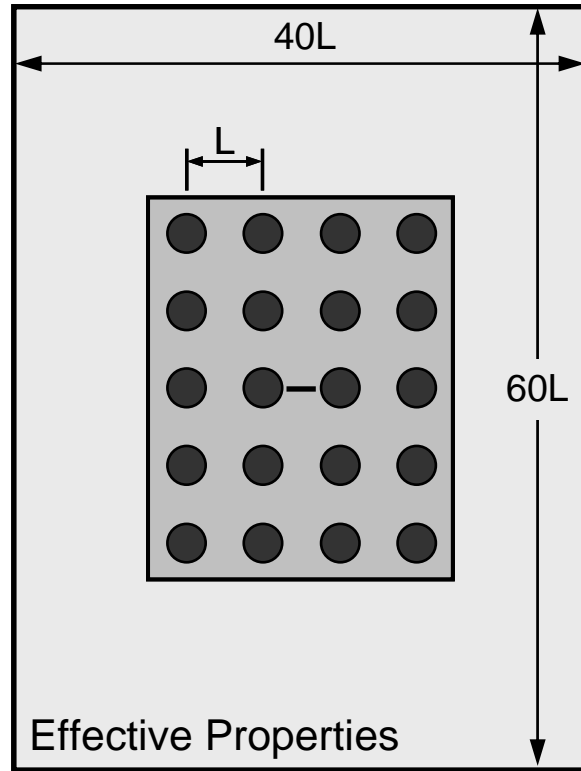


圖 3.3 顆粒型複合材料鑲埋模型 C (含長度為 $2a$ 之裂紋)

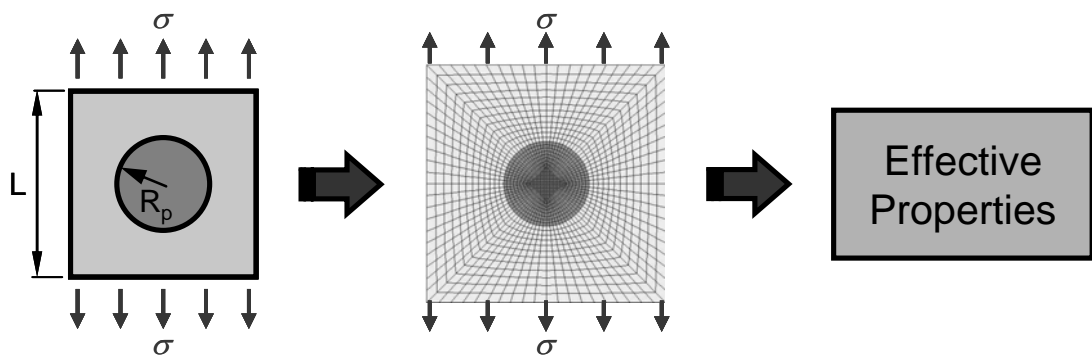


圖 3.4 球型顆粒複合材料之有效材料性質 (Effective Properties)

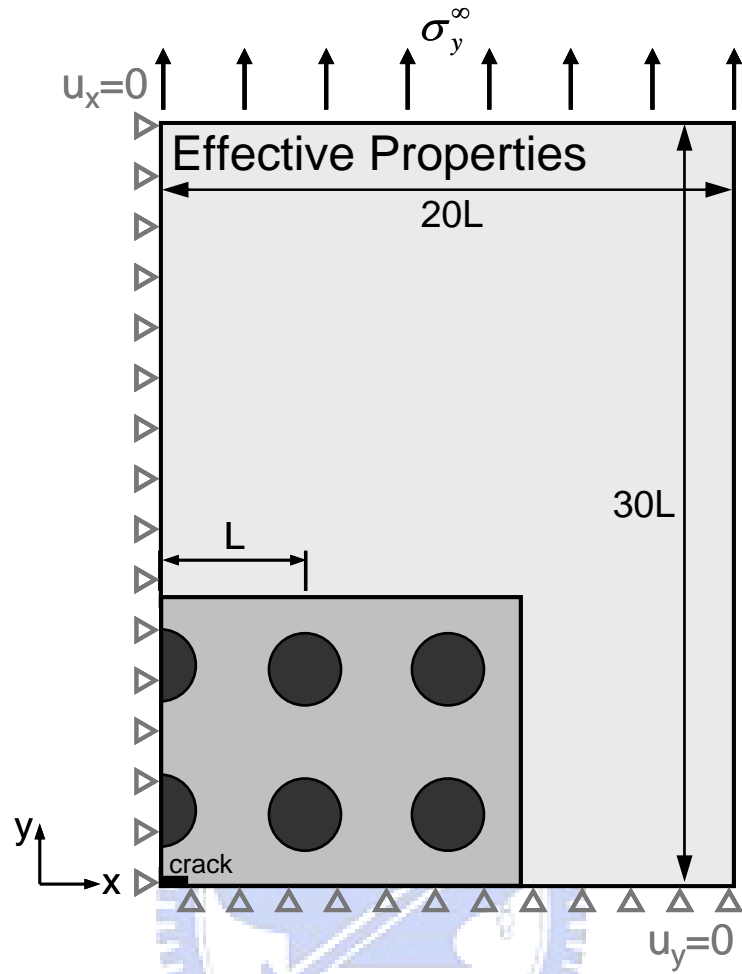


圖 3.5 鑲埋模型 A (四分之一模型)

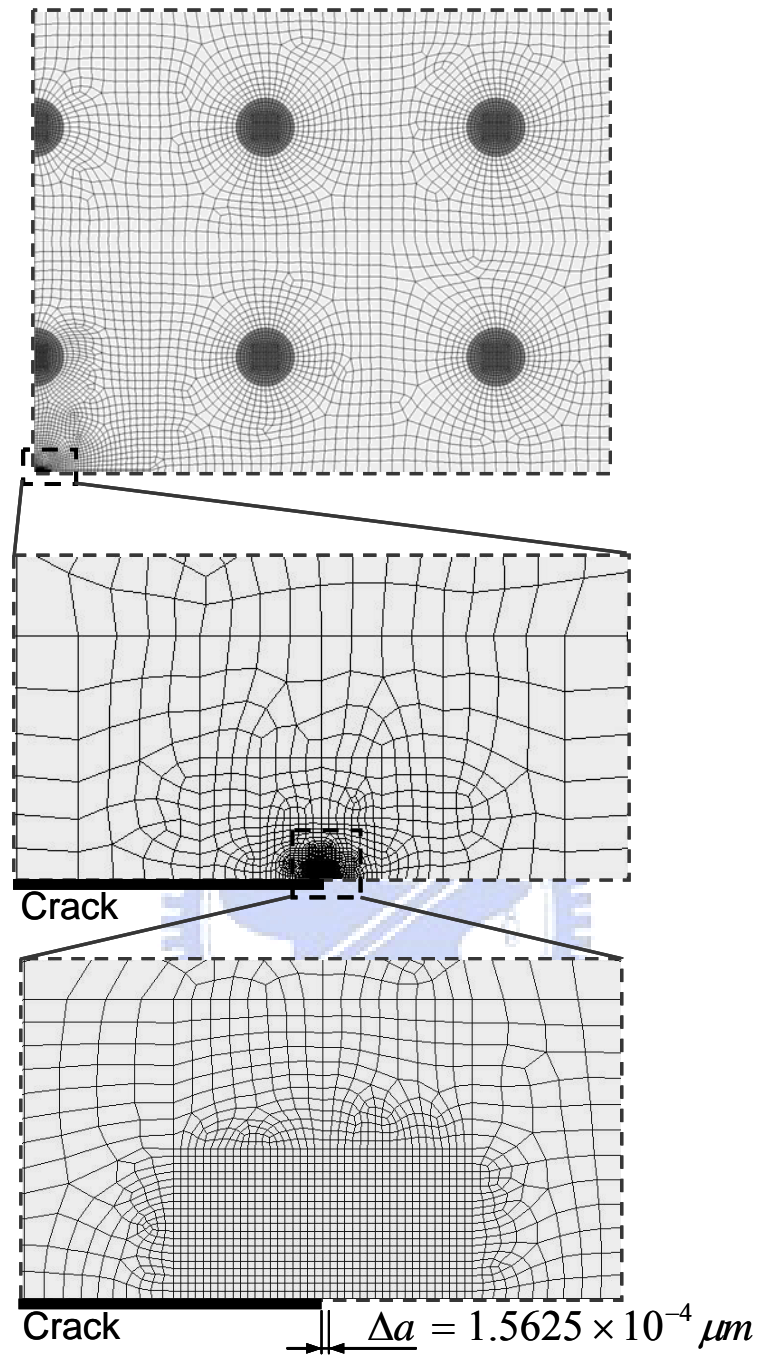


圖 3.6 鑲埋模型 A 之有限元素模型(Δa 為裂紋尖端之元素尺寸)

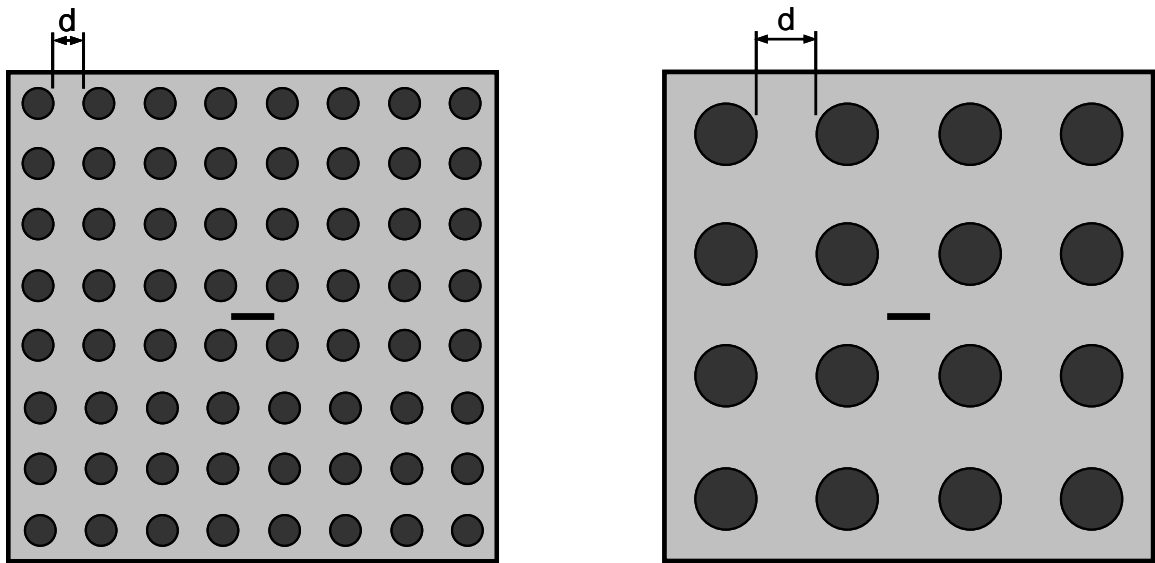


圖 3.7 相同體積分率、不同顆粒尺寸之含裂紋複合材料示意圖

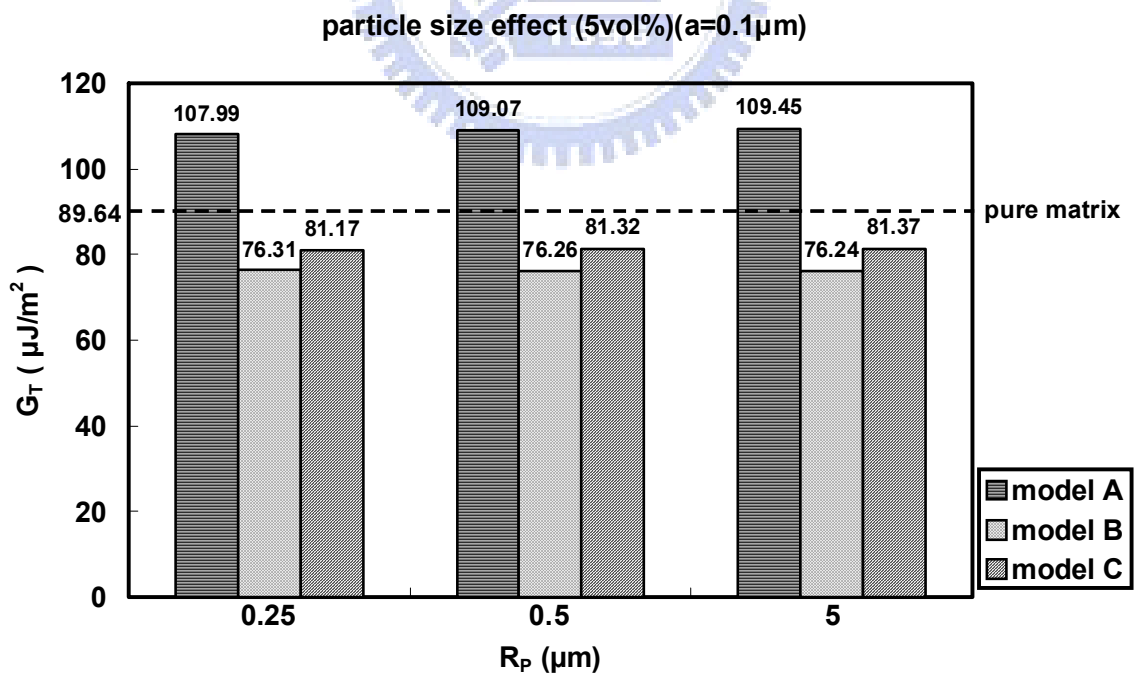


圖 3.8 體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.1 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率

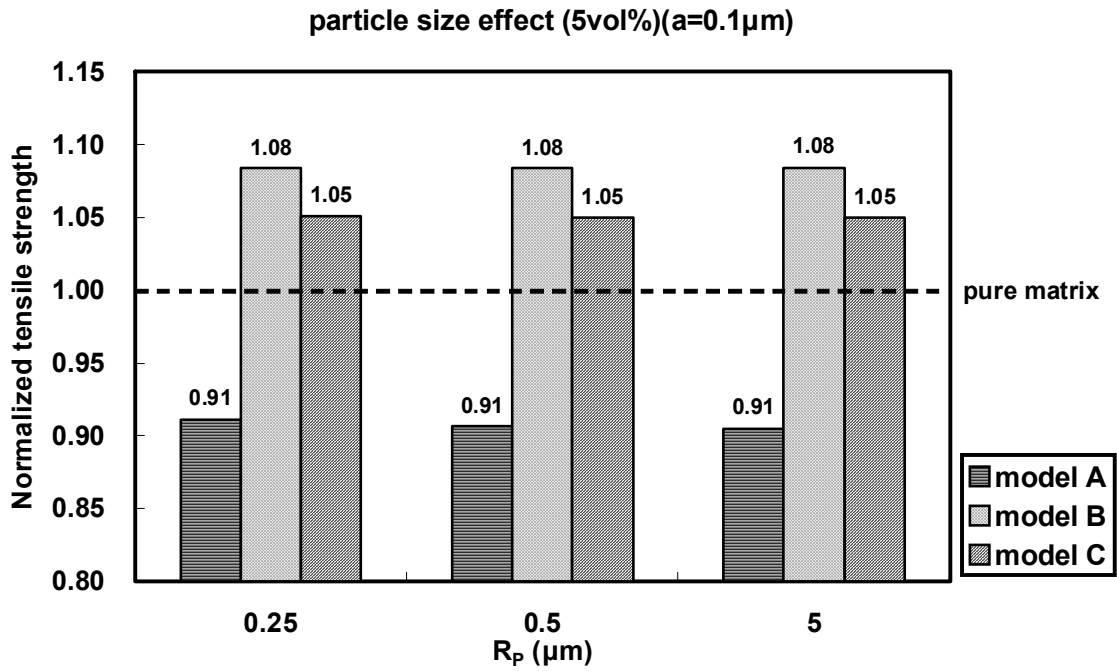


圖 3.9 體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.1 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度

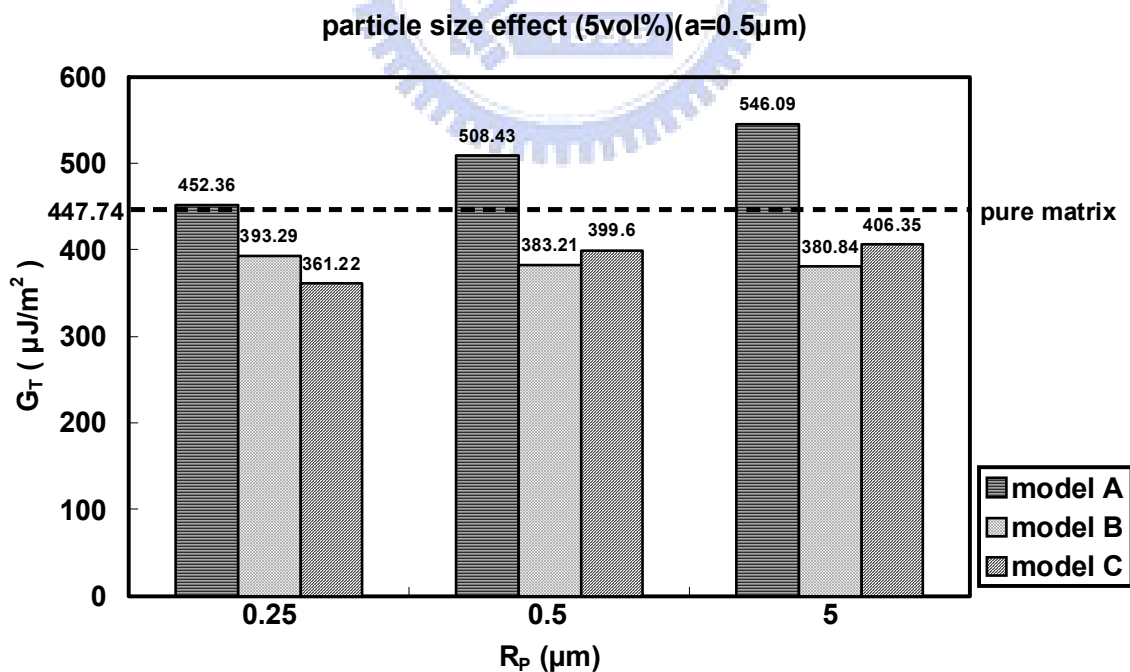


圖 3.10 體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.5 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率

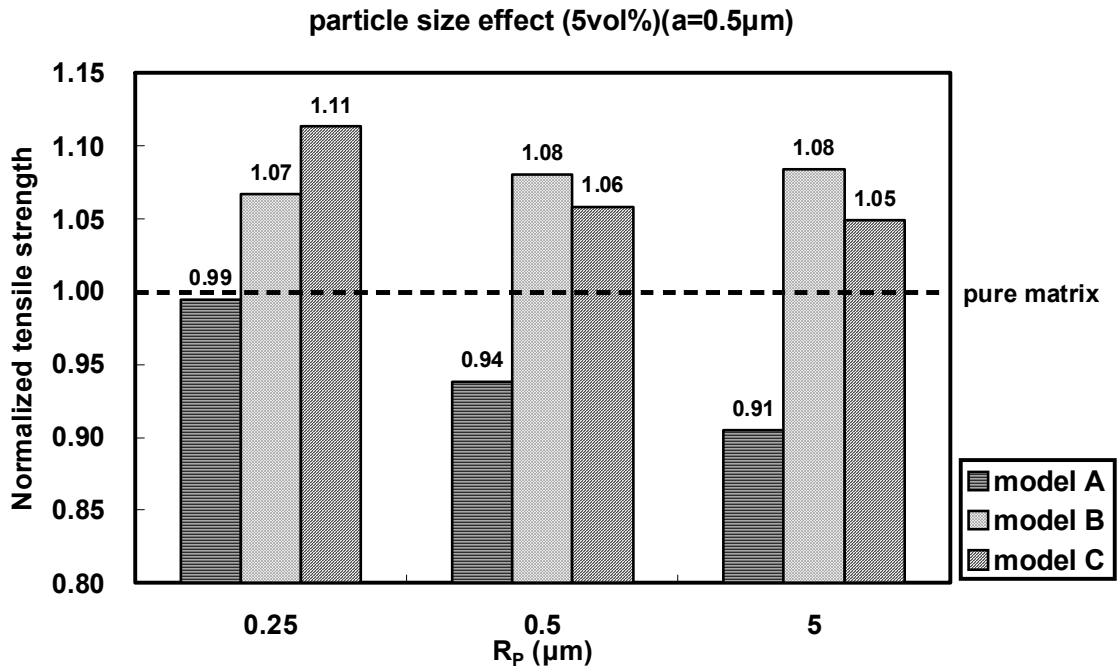


圖 3.11 體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.5 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度

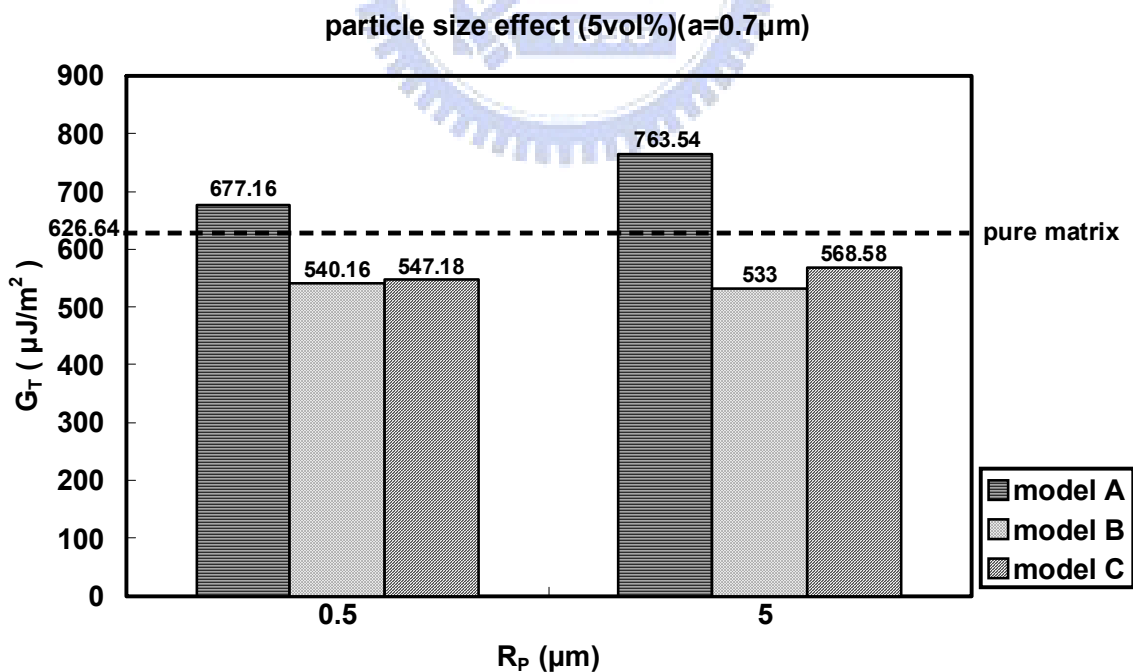


圖 3.12 體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.7 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率

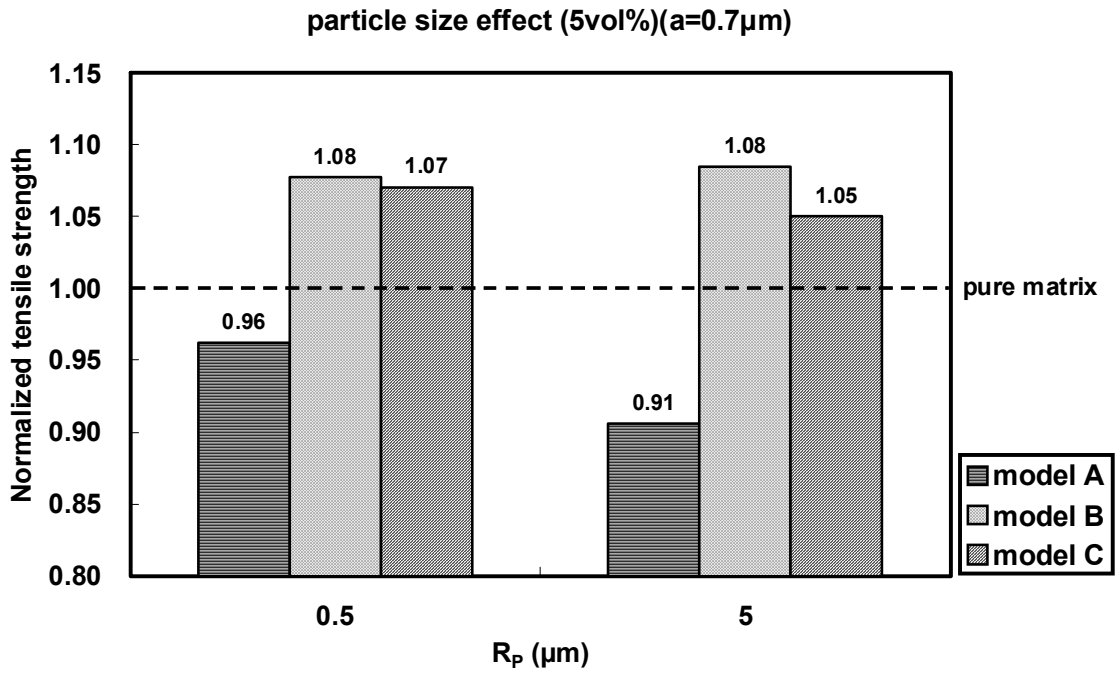


圖 3.13 體積分率 5 vol%、半裂紋長度 a 為 $0.7 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同顆粒尺寸之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度

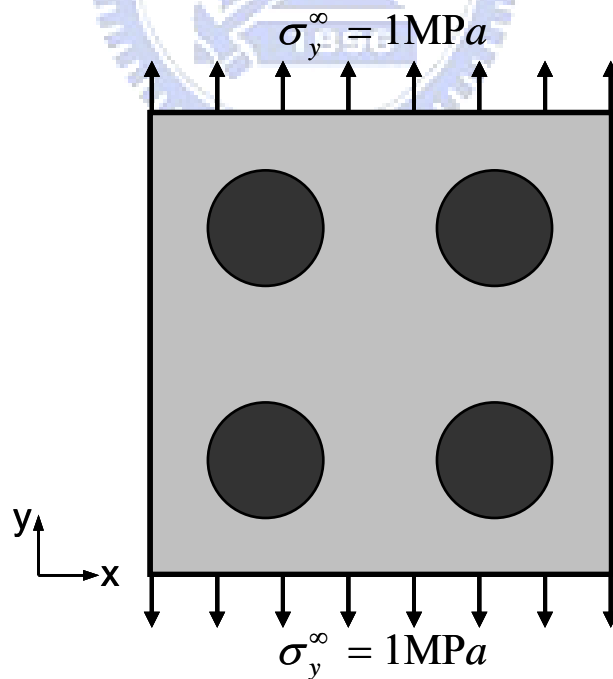


圖 3.14 承受 1 MPa 拉伸應力之顆粒型複合材料 RVE 模型

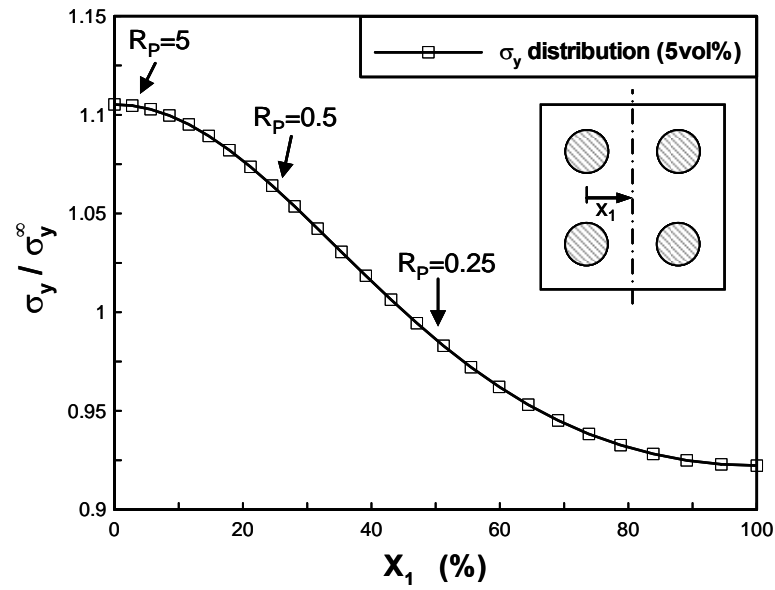


圖 3.15 體積分率為 5 vol%之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_1 線上之 σ_y 應力分佈曲線。箭號標示處為不同顆粒尺寸之奈米複合材料中裂紋尖端出現位置。

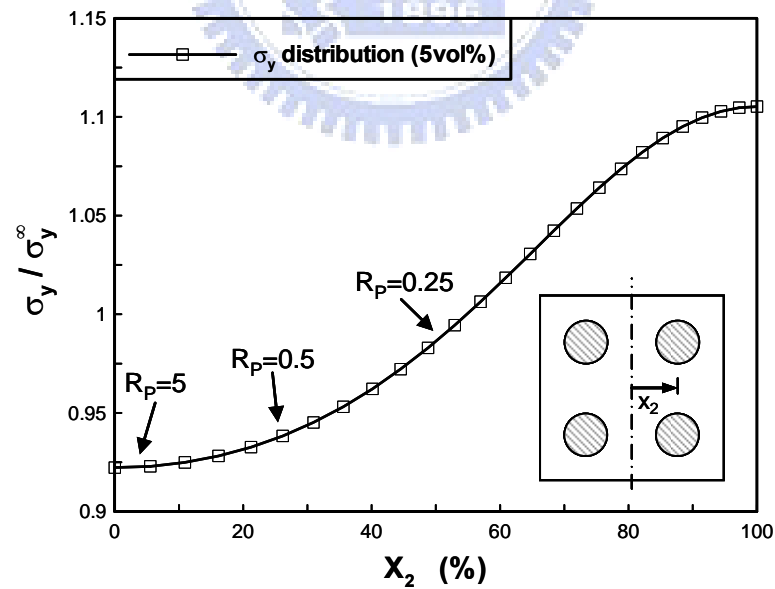


圖 3.16 體積分率為 5 vol%之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_2 線上之 σ_y 應力分佈曲線。箭號標示處為不同顆粒尺寸之奈米複合材料中裂紋尖端出現位置。

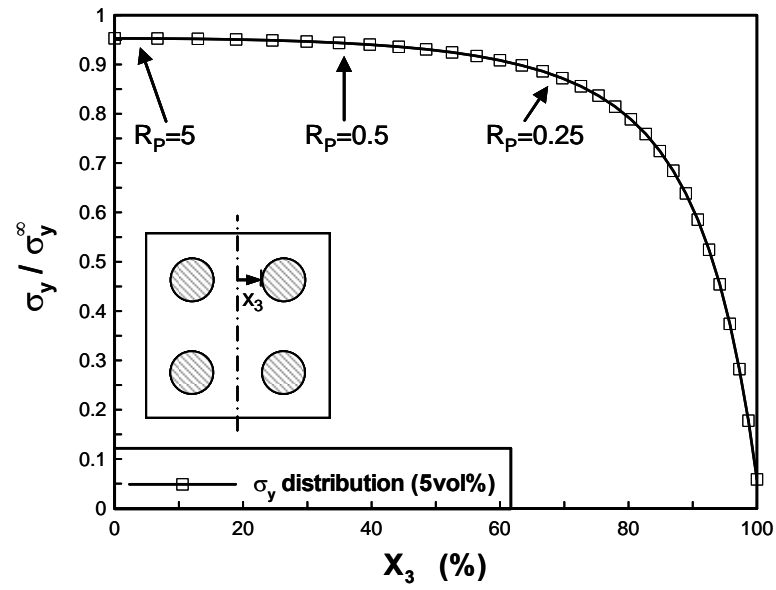


圖 3.17 體積分率為 5 vol% 之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_3 線上之 σ_y 應力分佈曲線。箭號標示處為不同顆粒尺寸之奈米複合材料中裂紋尖端出現位置。

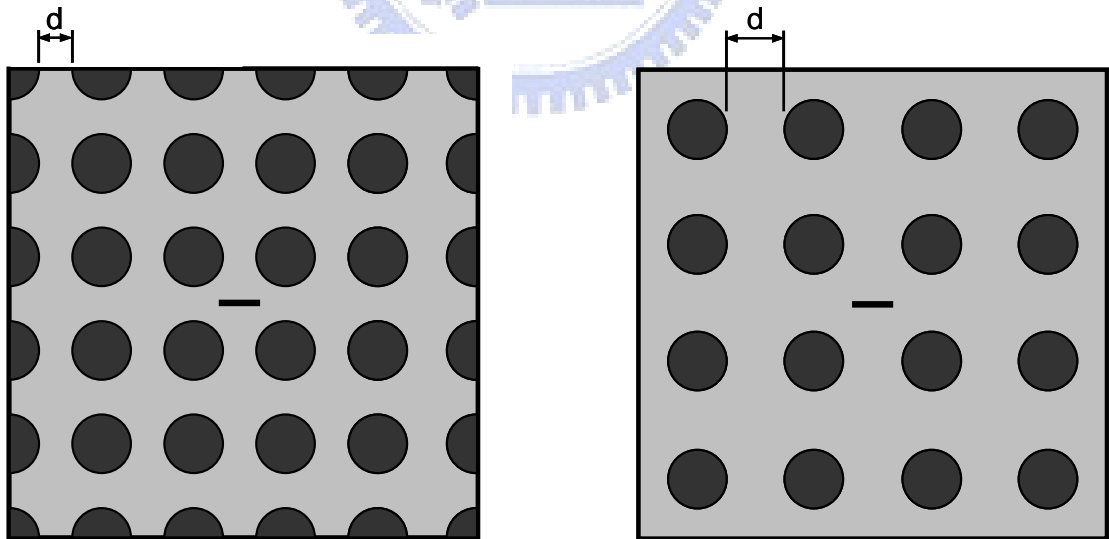


圖 3.18 相同顆粒尺寸、不同體積分率之含裂紋複合材料示意圖

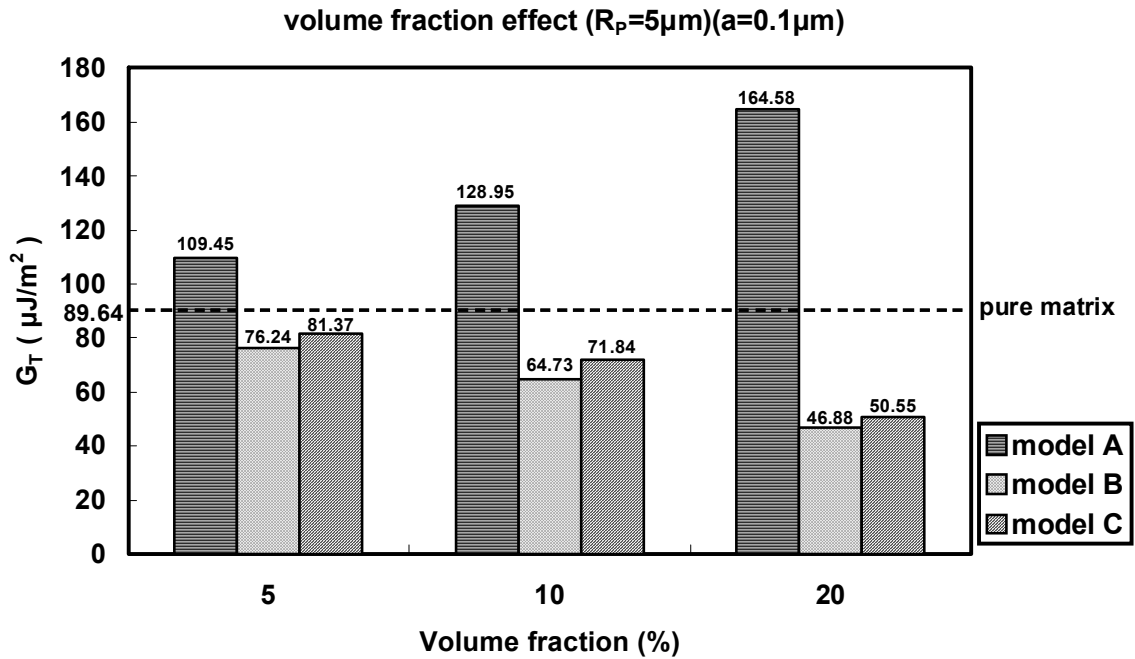


圖 3.19 顆粒半徑為 $5\mu\text{m}$ 、半裂紋長度 a 為 $0.1\mu\text{m}$ 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率

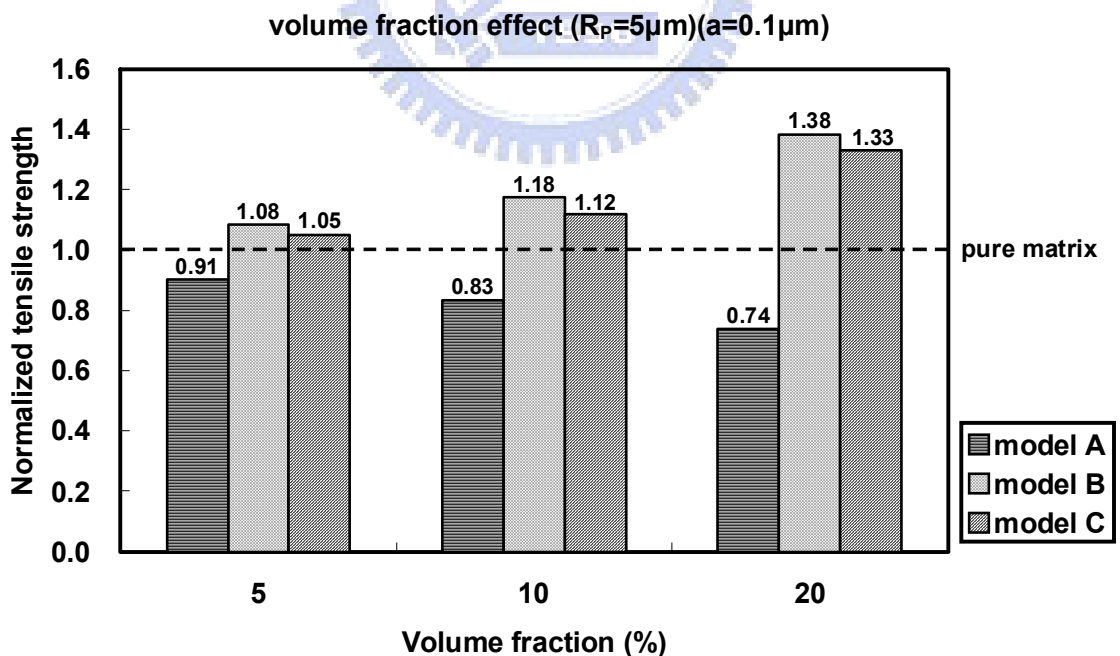


圖 3.20 顆粒半徑為 $5\mu\text{m}$ 、半裂紋長度 a 為 $0.1\mu\text{m}$ 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度

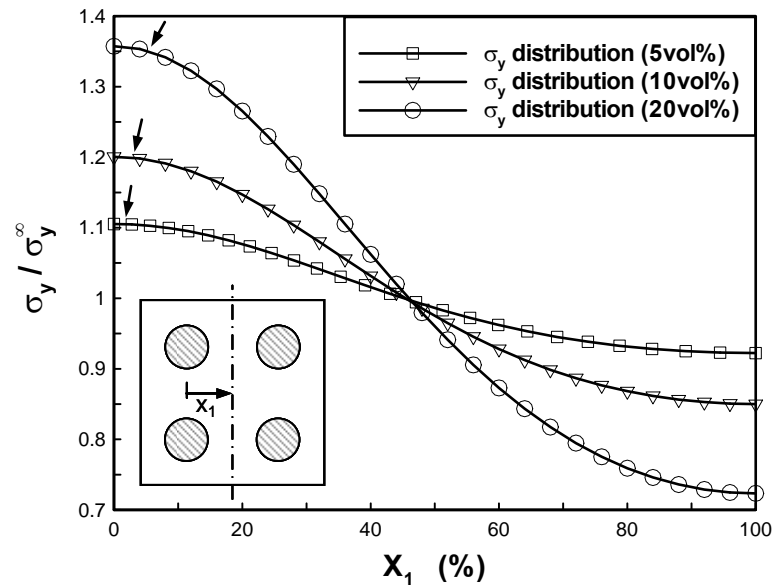


圖 3.21 不同體積分率之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_1 線上之 σ_y 應力分佈曲線。箭號標示處為不同體積分率之奈米複合材料中裂紋尖端出現位置。

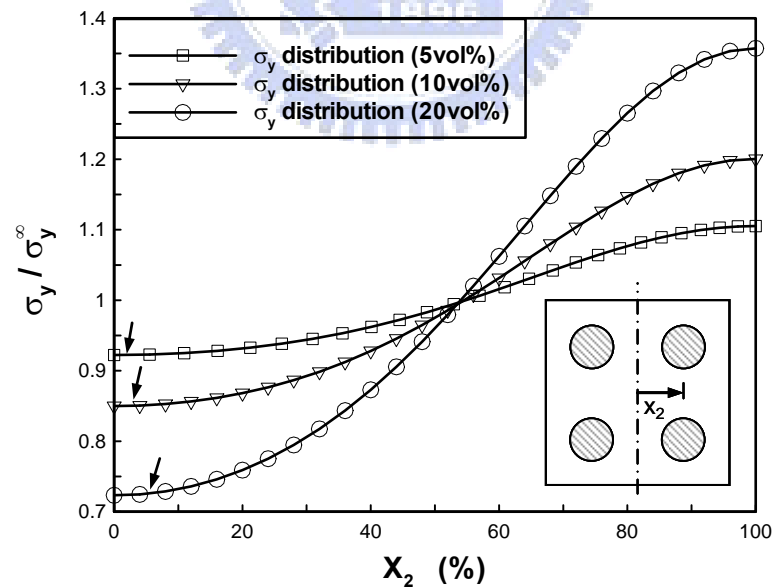


圖 3.22 不同體積分率之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_2 線上之 σ_y 應力分佈曲線。箭號標示處為不同體積分率之奈米複合材料中裂紋尖端出現位置。

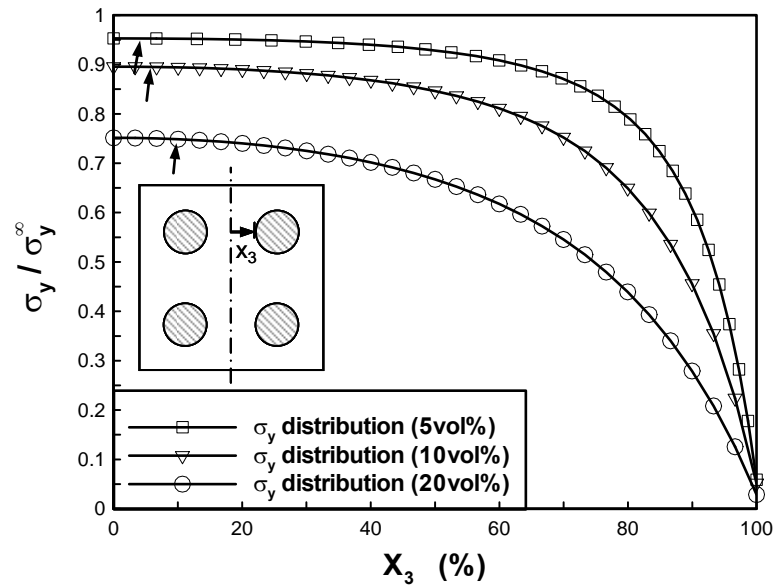


圖 3.23 不同體積分率之顆粒型複合材料 RVE 模型，承受 y 方向 1 MPa 拉伸應力下，沿 x_3 線上之 σ_y 應力分佈曲線。箭號標示處為不同體積分率之奈米複合材料中裂紋尖端出現位置。

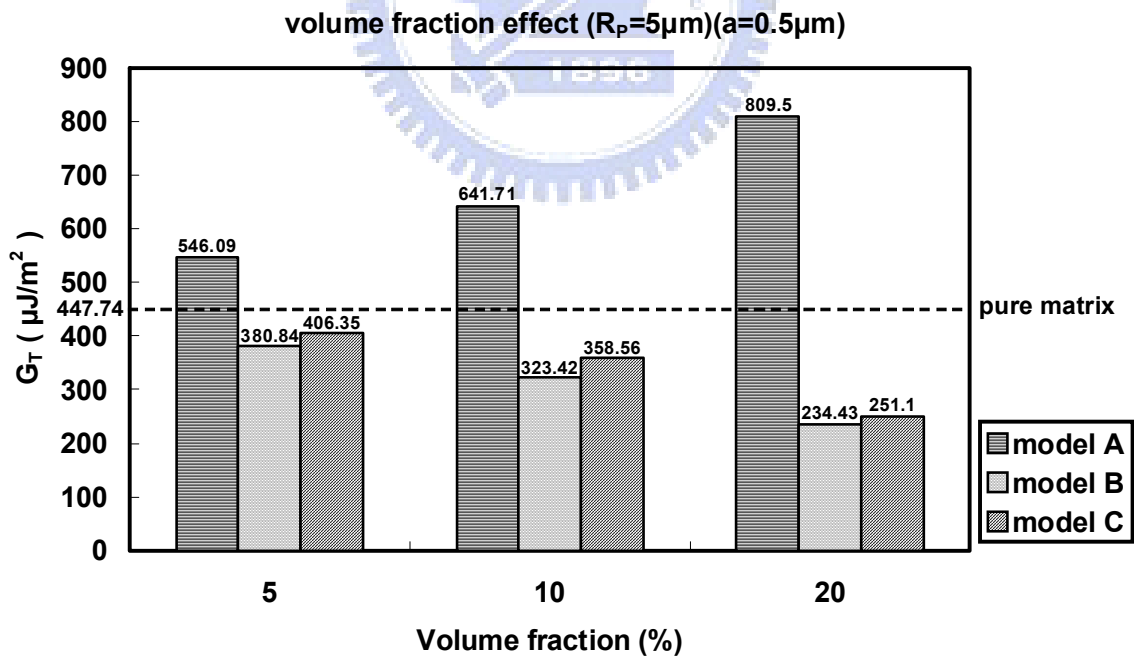


圖 3.24 顆粒半徑為 $5 \mu\text{m}$ 、半裂紋長度 a 為 $0.5 \mu\text{m}$ 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中承受 1 MPa 之外力下的應變能釋放率

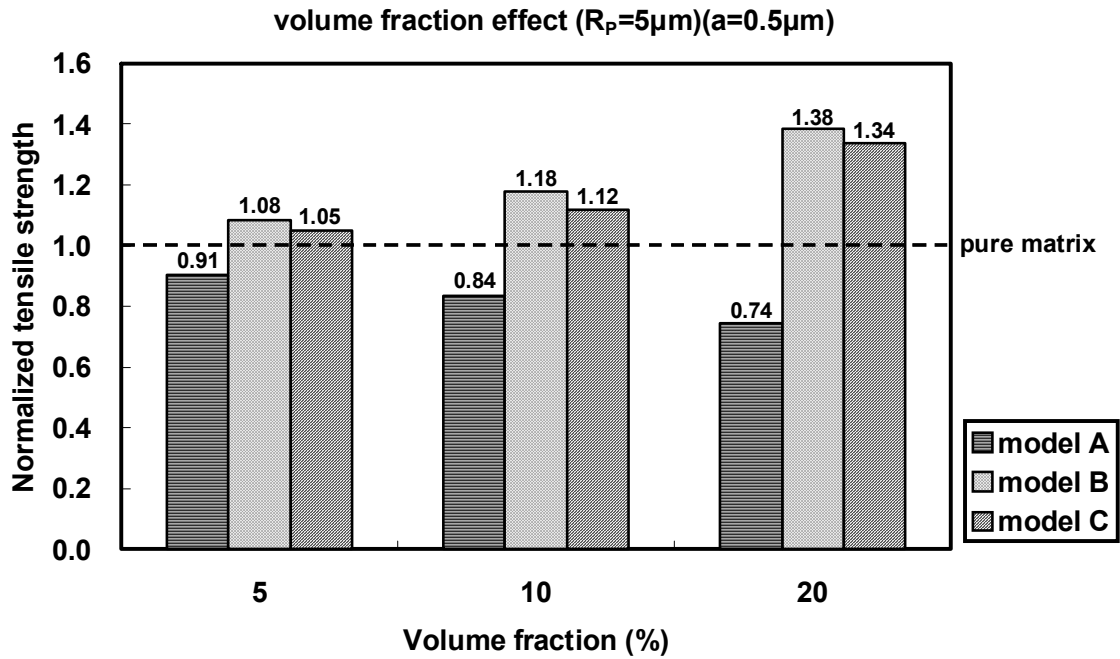


圖 3.25 顆粒半徑為 $5\mu\text{m}$ 、半裂紋長度 a 為 $0.5\mu\text{m}$ 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度

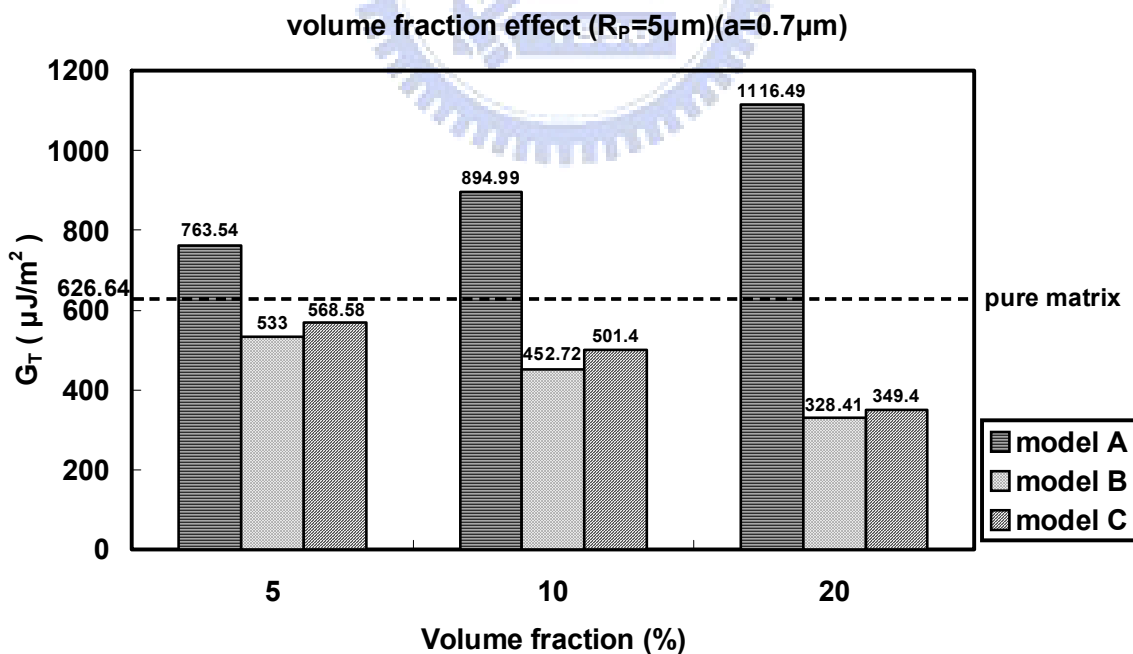


圖 3.26 顆粒半徑為 $5\mu\text{m}$ 、半裂紋長度 a 為 $0.7\mu\text{m}$ 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中承受 1MPa 之外力下的應變能釋放率

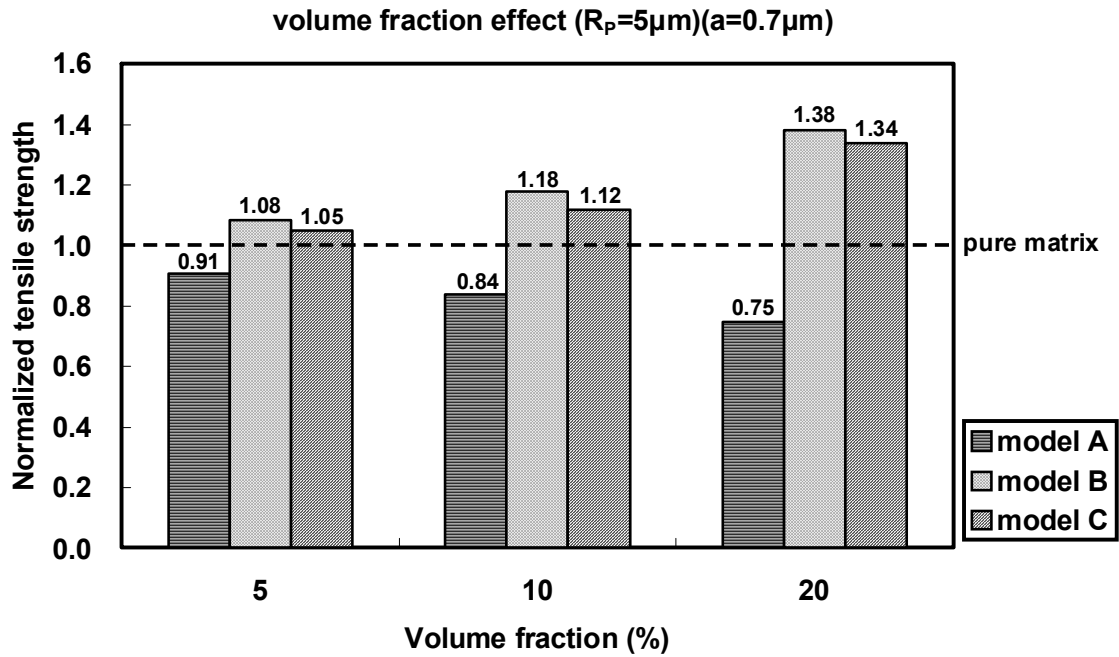


圖 3.27 顆粒半徑為 $5\mu\text{m}$ 、半裂紋長度 a 為 $0.7\mu\text{m}$ 之裂紋，在不同體積分率之複合材料鑲埋模型中的標準化拉伸強度

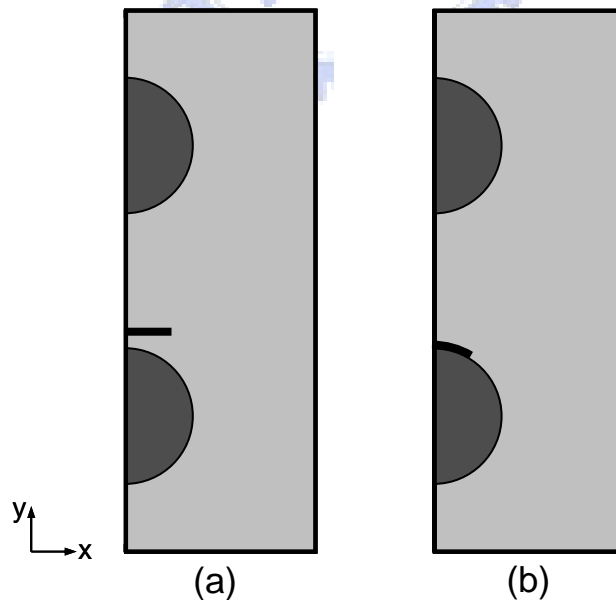


圖 3.28 鄰近補強材料顆粒之裂紋示意圖(a)基材中鄰近補強材料顆粒之裂紋 (b)雙材料介面層之裂紋

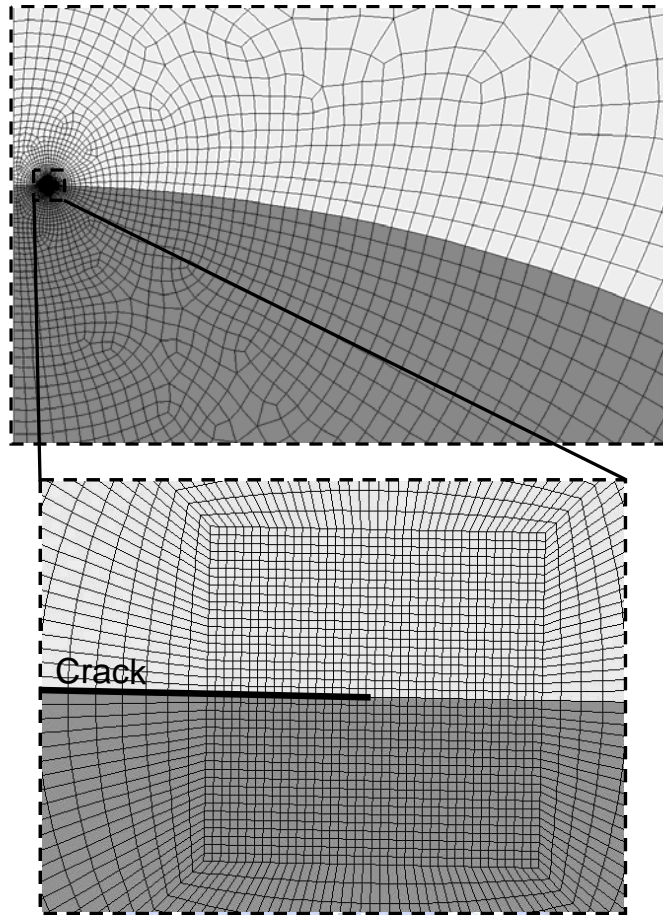


圖 3.29 補強材料與基材介面之裂紋有限元素模型

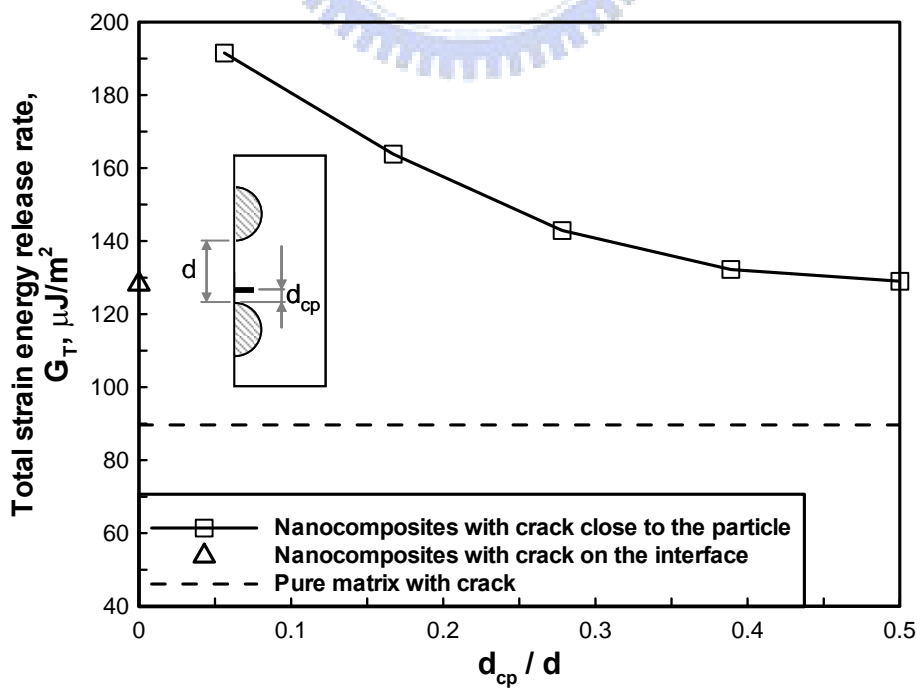


圖 3.30 裂紋位置對應變能釋放率的影響

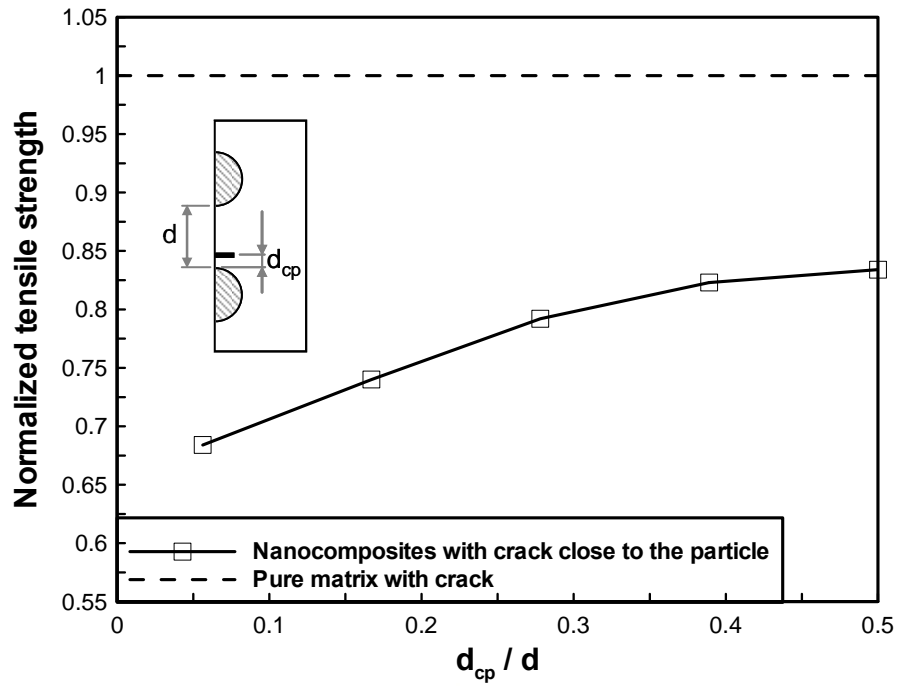


圖 3.31 裂紋位置對含裂紋複合材料之標準化拉伸強度的影響

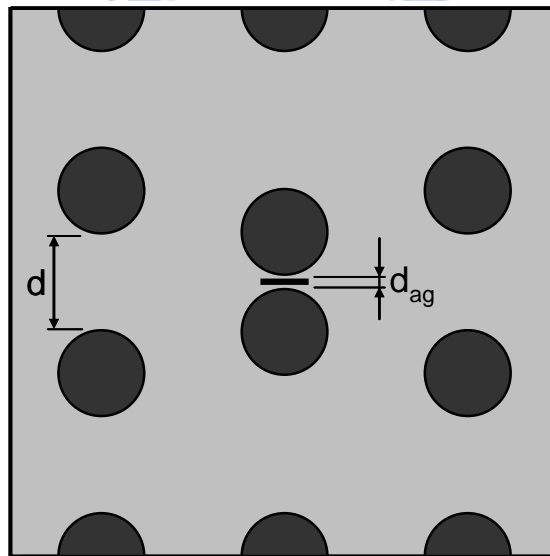


圖 3.32 發生局部群聚現象之複合材料中的裂紋示意圖

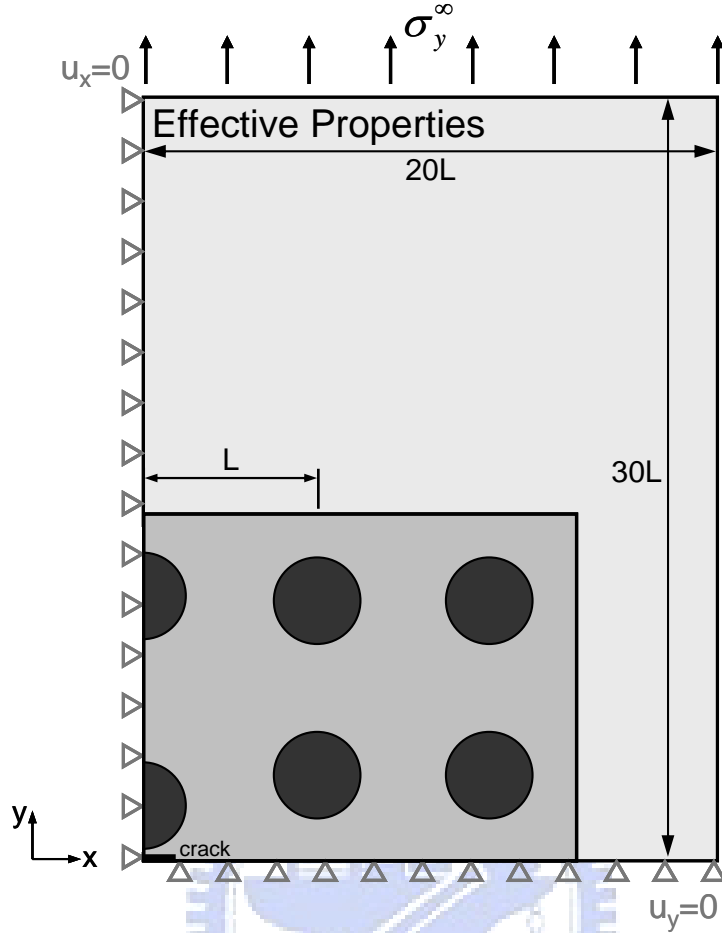


圖 3.33 裂紋在發生局部群聚現象之複合材料中的鑲埋模型 (四分之一模型)

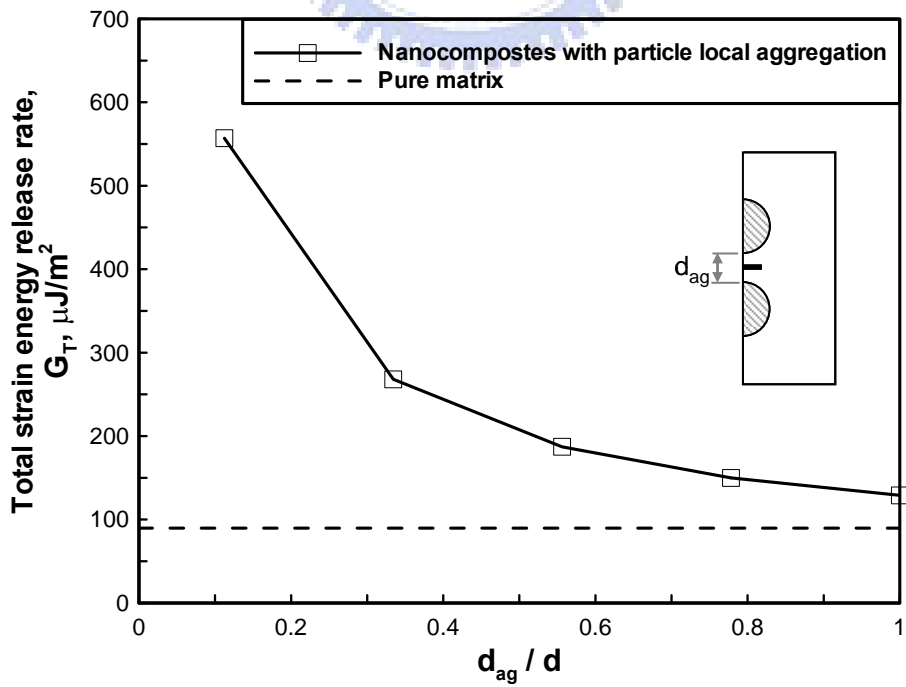


圖 3.34 局部群聚現象對複合材料中的裂紋應變能釋放率的影響

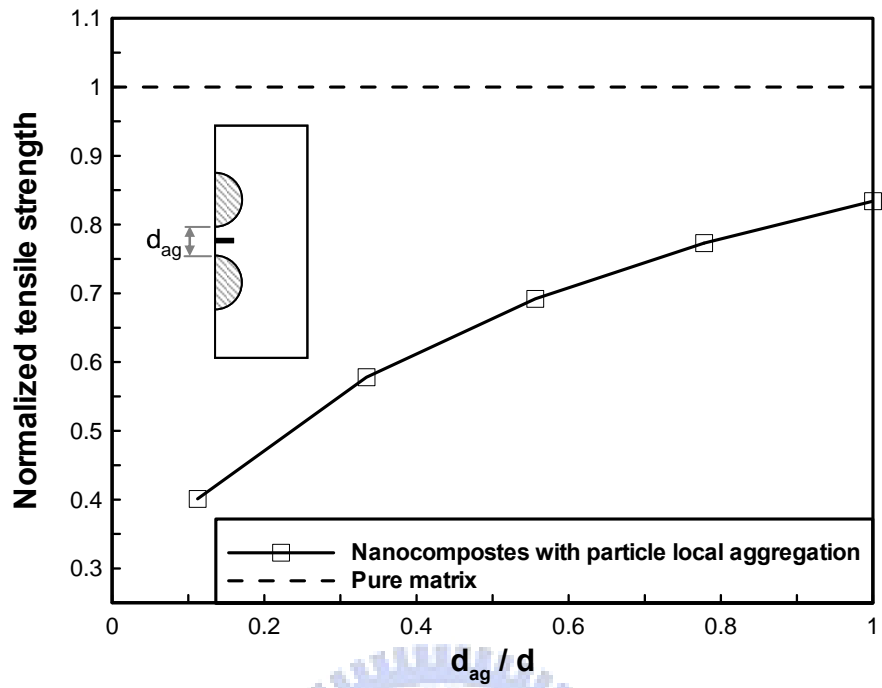


圖 3.35 局部群聚現象對含裂紋複合材料之標準化拉伸強度的影響

